

Inleiding Kernfysica

t.b.v. FEW cursus Kernenergie
Voorjaar 2010

door

Prof.dr J. F. J. van den Brand

Faculteit der Exacte Wetenschappen
Afdeling Natuurkunde en Sterrenkunde
Vrije Universiteit
Amsterdam, The Netherlands

CONTENTS

I. Inleiding	5
II. Krachten tussen kerndeeltjes	6
III. Structuur van kernen	11
A. Werkzame doorsnede	11
B. Kernafmetingen uit Rutherfordverstrooiing	15
C. Ladingsverdeling uit elektronenverstrooiing	19
IV. Kernmodellen	25
A. Het vloeistofdruppelmodel	25
B. Het schillenmodel	32
1. Empirische aanwijzingen die op een schillenstructuur duiden	32
2. Theorie van het schillenmodel	34
3. Harmonische oscillator potentiaal	35
V. Verval van kernen	39
A. Stabiele kernen en kernverval	39
B. Massa, bindingsenergie, Q -waarde, en twee- en drie-deeltjesverval	41
C. Penetratie van een potentiaalbarrière	47
1. Levensduur voor α -verval	49
2. Fusiereacties	50
D. Massa's van isobaren en beta verval van kernen	51

I. INLEIDING

Het is reeds lang bekend dat de gewone materie uit moleculen bestaat, die uit ongeveer honderd verschillende elementen samengesteld kunnen worden. Elk element bestaat uit een minuscule atoomkern (ongeveer 100.000 keer kleiner dan het atoom) en een elektronenwolk. De elektronen, en vooral die in de buitenste schillen en die dus het minst sterk gebonden zijn, bepalen de eigenschappen van het element voor de vaste-stof fysica, scheikunde en biologie. Vanwege de geringe energie die in deze vakgebieden per atoom omgezet kan worden (enige eV), kan de atoomkern als inert beschouwd worden. Enkel zijn lading en massa zijn van belang¹, en de kern kan als ondeelbaar beschouwd worden, waarbij zijn substructuur geen enkele rol speelt.

Als hogere energieën ter beschikking staan - voor de klassieke kernfysica beschouwt men typische energieën van enkele MeV - kan de kern aangeslagen of zelfs gespleten worden. Tegenwoordig² weten we dat elke kern is samengesteld uit *protonen* en *neutronen*. Protonen en neutronen (zie tabel I) zijn verschillende manifestaties van een hypothetisch kerndeeltje, genaamd het *nucleon*. Voor zover we tegenwoordig weten is het proton stabiel (levensduur

Table I. *Belangrijkste eigenschappen van (elementaire) deeltjes.*

Deeltje	Symbol	Rustenergie	Lading	Spin	Levensduur
			[e]	[\hbar]	
Proton	p	938.27 MeV	+1	$\frac{1}{2}$	$> 1.6 \times 10^{25}$ jaar
Neutron	n	939.57 MeV	0	$\frac{1}{2}$	887 s
Elektron	e	0.511 MeV	-1	$\frac{1}{2}$	$> 4.3 \times 10^{23}$ jaar
Neutrino	ν_e	$< 10 - 15$ eV	0	$\frac{1}{2}$	> 300 s/eV
Gamma	γ	$< 6 \times 10^{-16}$ eV	0	1	∞

$\tau > 1.6 \times 10^{25}$ jaar). Er zijn diverse precisie-experimenten, die intensief speuren naar proton verval, zoals voorspeld door een aantal theoretische modellen. Het neutron daarentegen vervalt naar een proton, elektron en een (anti)elektron neutrino,

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (1.1)$$

en zijn levensduur is onlangs gemeten aan de hoge-intensiteitsreactor van ILL in Grenoble met ultrakoude neutronen en bedraagt $\tau = (887 \pm 2)s$.

In het vervolg bespreken we de belangrijkste zaken uit de kernfysica die nodig zijn voor een goed begrip van kernsplijting en kernfusie. De kernkracht, eigenschappen van kernen (veelal verkregen uit verstrooiingsexperimenten), kernmodellen en het radioactief verval van kernen worden behandeld.

¹ en soms ook het magnetische moment, bijvoorbeeld in de hyperfijnwisselwerking.

² We verwaarlozen hier subtiliteiten als bijvoorbeeld de virtuele mesonen in het binnenste van de kern.

II. KRACHTEN TUSSEN KERNDDEELTJES

Laten we beginnen met een beschouwing uit de klassieke mechanica. De gravitatiewet geeft de kracht tussen twee (voorlopig als puntvormig aangenomen) massa's als

$$F_{\text{grav}} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}. \quad (2.1)$$

Uit deze krachtwet en de wetten van Newton kon bijvoorbeeld de beweging van alle planeten in ons zonnestelsel met fantastische nauwkeurigheid worden afgeleid. Schijnbare afwijkingen bleken later te leiden tot de grootste triomfen van het model. Zo ontdekte men in het begin van de negentiende eeuw dat de planeet Uranus niet voldeed aan de gravitatiewet en bovendien de behoudswetten voor energie en impulsmoment schond. De oplossing van deze discrepantie werd in 1846 door Urbain Le Verrier en John Adams gegeven: de baan van Uranus wordt door de aantrekkingskracht van een onbekende planeet beïnvloed! Uit de zeer kleine storingen van de baan van Uranus kon zelfs de plaats van het onbekende object berekend worden. Daadwerkelijk vond op 23 September 1846 de sterrenkundige Johann Galle, zoals men zegt: in minder dan een half uur, binnen 1° van de voorspelde positie, de nieuwe planeet Neptunus. Dat was zonder twijfel één van de grootste successen van de klassieke mechanica. In het begin van de twintigste eeuw resteerde er in principe slechts één enkel niet begrepen effect: de periheliumverschuiving van de planeet die zich het dichtst bij de zon bevindt, namelijk Mercurius. Deze afwijking (slechts 43.11 ± 0.45 boogseconde per eeuw) kon enkel door de algemene relativiteitstheorie van Einstein verklaard worden (de berekende afwijking bedraagt 43.03 boogseconde per eeuw).

Een vergelijkbare doorbraak deed zich voor in de atoomfysica, nadat de basiswetten voor de golfmechanica (de Schrödinger en Diracvergelijking, alsook het Pauli principe) ontdekt waren. Samen met de wet van Coulomb (beter: de Maxwellvergelijkingen),

$$F_{\text{em}} = g_{\text{em}} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \quad (2.2)$$

konden de 'banen' van de elektronen voor de eenvoudigste atomen (H, He) berekend worden. Weer volgde er een fantastische overeenstemming tussen de berekende energieën en de zeer precies gemeten spectra. De *quantum elektrodynamica* (QED) werd aan steeds stringentere tests onderworpen, en steeds volgde er dezelfde perfecte overeenstemming tussen experiment en de berekeningen (de relatieve nauwkeurigheid is op dit moment beter dan 10^{-7}).

Vanzelfsprekend wilde men, aangemoedigd door deze successen, ook in andere gebieden van de natuurkunde een vergelijkbare nauwkeurigheid bereiken. Eerst bij de berekening van kernen en de constituenten ervan (protonen en neutronen) en in een volgende stap, bij de synthese van het nucleon uit zijn basiselementen, de quarks. Deze wens is tot nu toe niet in vervulling gegaan.

Naast de zwaartekracht en de elektromagnetische wisselwerking zullen we - misschien verbazingwekkend - slechts twee nieuwe krachten hoeven in te voeren, namelijk de sterke wisselwerking en de zwakke wisselwerking. Nadat men wist dat een kern is samengesteld uit protonen en neutronen, drong zich de vraag op, waarom een kern, ondanks de geweldige elektrische afstoting tussen de positief geladen protonen, gebonden is. Klaarblijkelijk

bestaat er een, voorlopig voor ons nog onbekende, wisselwerking die sterker is dan de elektromagnetische, en die men daarom de *sterke wisselwerking* of de *kernkracht*³ noemt.

Uit het β -verval van bepaalde kernen (bijvoorbeeld ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$) en later ook uit het verval van deeltjes (bijvoorbeeld $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$) kon het bestaan van nog een vierde kracht, de zogenaamde *zwakke wisselwerking* afgeleid worden. Deze kracht wordt door geheel andere eigenschappen gekarakteriseerd⁴. In de onderstaande tabel II worden enkele van de belangrijkste eigenschappen van de krachten vermeld.

Table II. *Belangrijkste eigenschappen van krachten en de bijbehorende uitgewisselde deeltjes.*

Wisselwerking	Sterkte [e]	Dracht	Boson	Massa [GeV/c ²]	Koppelt aan
El. magn	1/137	∞	γ	0	Lading
Zwakke	3×10^{-12}	$\ll 10^{-15}$ m	W^\pm, Z^0	80, 91	Quarks, Lept.
Gravitatie	5.9×10^{-39}	∞	Graviton	0	Massa
Kernkracht	1	$\leq 1.4 \times 10^{-15}$ m	$\pi^\pm, \text{enz.}$	0.135, ..	Hadronen
Sterke	1	Confinement	8 Gluonen	0	Quarks

Tabel II laat zien dat de natuur is opgebouwd uit *fermionen*: quarks en leptonen; deeltjes met half-tallige spin ($\frac{1}{2}$), die Fermi-Dirac statistiek volgen. De onderlinge wisselwerkingen van deze fermionen worden overgebracht door uitwisseling van andere deeltjes. Deze uitgewisselde deeltjes zijn *bosonen*, hebben heeltallige spin (0, 1, 2) en gedragen zich daarom volgens de Bose-Einstein statistiek.

Merk op dat neutrinos slechts voor één enkele wisselwerking gevoelig zijn, namelijk de zwakke wisselwerking, indien we aannemen dat hun massa nul is. Leptonen zijn niet gevoelig voor de sterke wisselwerking, zodat enkel de quarks alle wisselwerkingen ondergaan.

In tabel II is de karakteristieke sterkte van de wisselwerking aangegeven met een dimensieloos getal. We zullen deze procedure toelichten aan de hand van de elektrostatische potentiaal. De potentiële energie van twee elementaire ladingen, die zich op een afstand r van elkaar bevinden, bedraagt

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \rightarrow \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right) \hbar c \frac{1}{r} = \alpha_{\text{em}} \hbar c \frac{1}{r}. \quad (2.3)$$

We vinden dan

$$\alpha_{\text{em}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137.036}, \quad (2.4)$$

waarbij \hbar de constante van Planck is (gedeeld door 2π) en c de lichtsnelheid. Merk op dat $\hbar c = 197.328 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$.

³ Teneinde verwarring te voorkomen zullen we in het vervolg spreken over de *kernkracht*, als we de wisselwerking van baryonen en mesonen bedoelen en daarbij hun inwendige structuur, welke bij lage energieën niet van belang is, verwaarlozen. Daarentegen bedoelen we met de *sterke wisselwerking* die krachten, die tussen de quarks werkzaam zijn.

⁴ De zwakke wisselwerking schendt bijvoorbeeld, zoals we later nog uitvoerig zullen bespreken, de pariteit ofwel spiegelsymmetrie.

Analoog vinden we voor de gravitatie van twee protonen de energie

$$U_{\text{grav}} = -g_{\text{grav}} \frac{m_1 m_2}{r} \rightarrow -g_{\text{grav}} \frac{m_p^2}{\hbar c} \frac{1}{r} = -\alpha_{\text{grav}} \hbar c \frac{1}{r}, \quad (2.5)$$

waarbij

$$\alpha_{\text{grav}} = g_{\text{grav}} \frac{m_p^2}{\hbar c} = 5.9 \times 10^{-39}. \quad (2.6)$$

Voor zowel de zwakke wisselwerking, $\alpha_F = 3 \times 10^{-12}$, als de sterke wisselwerking, $\alpha_S = 0.07 - 14$, zijn in de literatuur ook andere normeringen gebruikelijk.

Door het uitvoeren van nucleon-nucleon verstrooiingsexperimenten heeft men vastgesteld dat de kernkracht een *eindige* dracht heeft ($\lambda \approx 1.4$ fm). In de eenvoudigste benadering (en met verwaarlozing van alle spineffecten) kan de kernkracht gevonden worden uit

$$U_{\text{kern}} \approx -\alpha_S \hbar c \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}. \quad (2.7)$$

De Japanse fysicus Hideki Yukawa heeft reeds in 1935 de suggestie gedaan, dat deze kracht overgebracht kan worden door uitwisseling van deeltjes met een rustenergie van

$$mc^2 = \frac{\hbar c}{\lambda} \approx 140 \text{ MeV}. \quad (2.8)$$

Daadwerkelijk werden deze deeltjes dan ook⁵ in 1947 door Cecil Powell, hij werkte in laboratoria in het hooggebergte (o.a. in de Andes op 5000 m hoogte), via sporen in fotografische emulsies gebruikt in kosmische stralingsexperimenten aangetoond. Het gaat hier om de drie pionen, π^\pm en π^0 . De neutron-proton wisselwerking kan dan (in laagste orde!) door de diagrammen in figuur 1 beschreven worden.

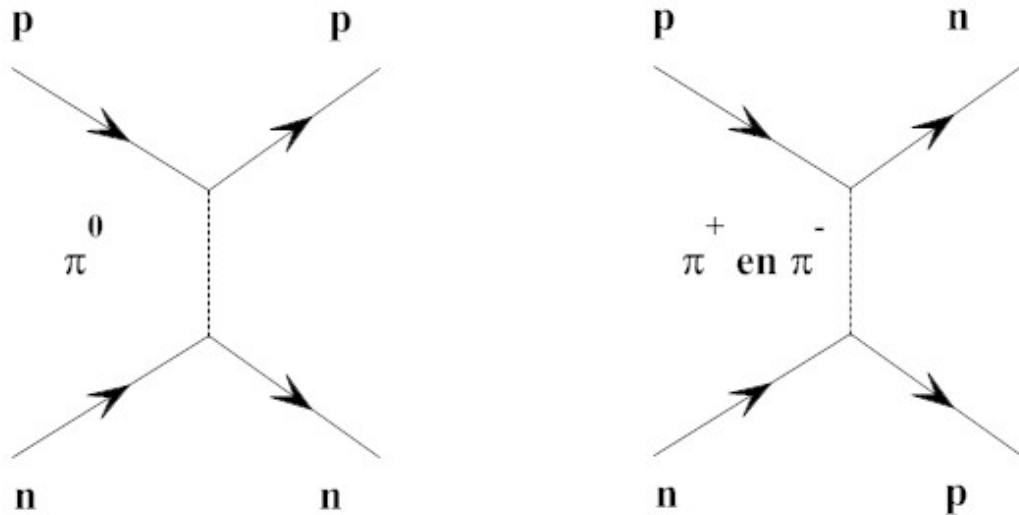


Figure 1. *Feynmandiagrammen voor proton-neutron verstrooiing in laagste orde.*

⁵ Na enkele dwalingen, want aanvankelijk werden in 1937 muonen ontdekt door Carl Anderson en Neddermayer in experimenten met kosmische straling. Muonen hebben echter totaal niets te maken met de sterke wisselwerking.

Een exacte afleiding van het verband tussen de vorm van de Yukawa potentiaal en de massa van het uitgewisselde deeltje kan pas later gegeven worden. We beperken ons hier tot een heuristisch argument: Indien een uitwisselingsdeeltje met een van nul verschillende massa door een nucleon geëmitteerd wordt, bijvoorbeeld m_π , dan gaat dit altijd gepaard met het schenden van de wet van behoud van energie. Deze energie, $m_\pi c^2$, mag door het nucleon ‘geleend’ worden, mits het wordt ‘terugbetaald’ binnen een tijd Δt ⁶. De onzekerheidsrelatie ‘laat zulks toe’ voor een beperkte tijdsduur Δt , waarbij

$$\Delta E \Delta t = m_\pi c^2 \cdot \Delta t \approx \hbar. \quad (2.9)$$

In deze tijd kan het deeltje *hooguit* een afstand

$$\lambda = c \cdot \Delta t \approx \frac{\hbar c}{m_\pi c^2} \quad (2.10)$$

afleggen, en die kan worden geïnterpreteerd als de *dracht* van de desbetreffende kracht.

We zijn er nu aan gewend dat de krachtwetten voor gravitatie⁷ en de elektromagnetische wisselwerking er zeer eenvoudig uitzien. Dit is echter geenszins het geval voor de kernkracht. Integendeel, deze krachtwet is zeer gecompliceerd. We zullen er enkele aspecten uitlichten.

1. De radiële afhankelijkheid is ingewikkeld en kan in de meest eenvoudige benadering beschreven worden door een superpositie van verschillende Yukawa potentialen. De reden van de ingewikkelde radiële afhankelijkheid is het feit dat er verschillende mesonen bestaan, die elk een bijdrage tot de nucleon-nucleon wisselwerking geven.
2. Naast de diagrammen gegeven in figuur 1 zijn er *oneindig veel* andere diagrammen, die in een exacte berekening *allemaal* meegenomen dienen te worden. In QED convergeert de bijbehorende reeks, omdat de koppelingsconstante ($\alpha_{em} \approx 1/137$) klein is. Dat is echter niet het geval in de kernfysica ($\alpha_S \approx 1$)
3. De interactiepotentiaal is niet centraal, maar bevat diverse componenten die van de spin afhangen. Van belang zijn de spin-spin koppeling, de spin-baan koppeling en de tensor interactie.
4. De interactie is bijzonder slecht bekend voor kleine afstanden tussen de nucleonen ($r < 1$ fm). Vermoedelijk dienen ook niet-lokale componenten in rekening gebracht te worden⁸.
5. Er zijn aanwijzingen voor het bestaan van meer-deeltjes krachten. Dit betekent dat de wisselwerking tussen twee nucleonen verandert, als er nog een derde (of meer) hadron in het interactiegebied gebracht wordt. De grootte van deze meer-deeltjes kracht is nog onbekend en wordt daarom op dit moment in veel experimenten met drie-nucleon systemen onderzocht.

⁶ Omdat de energie op tijd teruggegeven dient te worden, de wet van behoud van energie is immers geschonden, noemt men zo'n deeltje een virtueel deeltje. Het kan experimenteel niet worden waargenomen.

⁷ Uiteraard hebben we het nu niet over de complicaties die voortvloeien uit de algemene relativiteitstheorie.

⁸ We zullen later dieper ingaan op al deze eigenschappen van de kernkracht.

We verbazen ons tegenwoordig niet meer over deze gecompliceerde vorm van de nucleon-nucleon interactie. We weten immers dat de nucleonen en mesonen zelf een inwendige structuur hebben en uit meerdere deeltjes (de quarks, antiquarks en gluonen) zijn samengesteld.

De kernkracht is terug te voeren tot de onderliggende sterke wisselwerking, die de quarks (en antiquarks) door middel van gluonen samenbindt. De potentiaal tussen een quark en een antiquark, die samen een meson vormen, bevat twee termen,

$$V(r) \approx -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S}{r} + \lambda r. \quad (2.11)$$

In een zeer vereenvoudigde voorstelling komt de eerste term overeen met de verwachte bijdrage van de uitgewisselde massaloze gluonen, terwijl de tweede term (de zogenaamde *confinement* term) ermee te maken heeft dat de quarks (vanwege hun kleur) zich niet uit het hadron kunnen vrijmaken.

III. STRUKTUUR VAN KERNEN

In het volgende zullen we de structuur van kernen bespreken. De meeste informatie op dit gebied is verkregen uit de studie van deeltjes- en kernreacties. We zullen dan ook beginnen met een inleiding tot de verstrooiingstheorie⁹.

A. Werkzame doorsnede

De kinematische aspecten van verstrooiingsexperimenten zijn gelijk voor alle wisselwerkingen. Hier vragen we ons af hoe vaak bepaalde reacties zullen optreden. Als maat voor de waarschijnlijkheid voeren we het begrip *werkzame doorsnede* in. Zoals we later zullen zien, hangt de werkzame doorsnede af van de sterkte, de dracht, en verdere eigenschappen van de wisselwerking, *alsook* van de structuur van de reactiepartners. De allereerste experimenten werden uitgevoerd met deeltjes afkomstig van radioactieve bronnen (voornamelijk α -straling) en kosmische straling. Tegenwoordig gebruikt men in het algemeen¹⁰ versnellers om een deeltjesbundel (primaire bundels: protonen, elektronen; secundaire bundels: pionen, kaonen, zware ionen, enz.) te produceren, die dan op een vast target (*'fixed-target' experimenten*) gericht wordt. Figuur 2 laat zien dat wanneer een bundel een target treft, dat

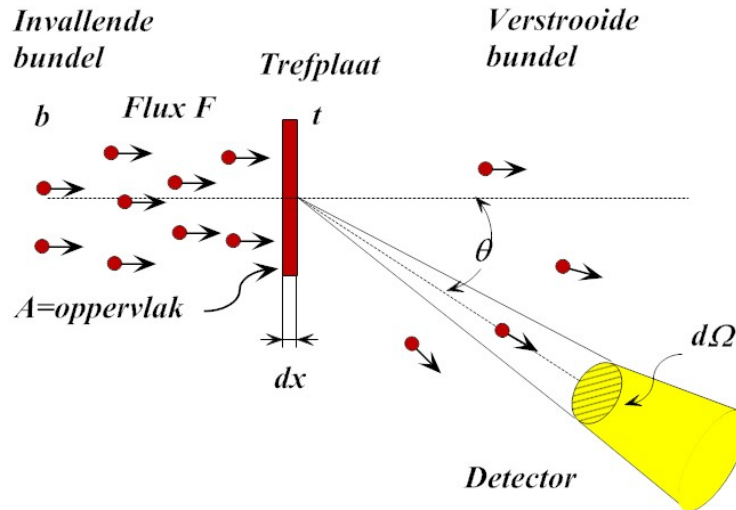


Figure 2. Schematische weergave van de verstrooiing van een deeltjesbundel aan een trefplaat.

n atomen per volume-eenheid (m^3) bevat, de waarschijnlijkheid dP dat per invallend bundeldeeltje een reactie optreedt in de dunne laag dx gegeven wordt door (de bundel bestrijkt een oppervlakte A)

$$dP = \frac{\sigma n A dx}{A} = \sigma n dx. \quad (3.1)$$

⁹ Het zal duidelijk zijn dat voor een volledige discussie relativistische kinematica, quantum mechanica, en in het algemene geval, van creatie en annihilatie van deeltjes, ook quantumveldentheorie vereist is.

¹⁰ Een uitzondering vormen de experimenten met neutronen, die vaak door een kernreactor kunnen worden geproduceerd.

De door deze vergelijking gedefinieerde grootte σ kan naïef gezien worden als de oppervlakte van het te raken object voor de desbetreffende reactie¹¹. Het zal blijken dat deze oppervlakte slechts zelden gelijk is aan de geometrische doorsnede van de deelnemende reactiedeeltjes (b en t),

$$\sigma_{\text{geometrisch}} = \pi(R_b + R_t)^2, \quad (3.2)$$

en vaak vele ordes van grootte hiervan verschillend is.

Typische kernreacties hebben een werkzame doorsnede van ongeveer

$$\sigma \approx 1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2. \quad (3.3)$$

Dezelfde reactie kan echter, indien men een resonantie aanslaat, ook zo'n 100,000 keer sneller verlopen (dus $\sigma \approx 10^5$ barn). De energieafhankelijkheid van de werkzame doorsnede, indien resonanties optreden, is heel karakteristiek. Figuur 3 geeft de totale werkzame doorsnede voor de verstrooiing van neutronen aan ^{238}U . Wie interesseert zich nu voor enkele¹² van de

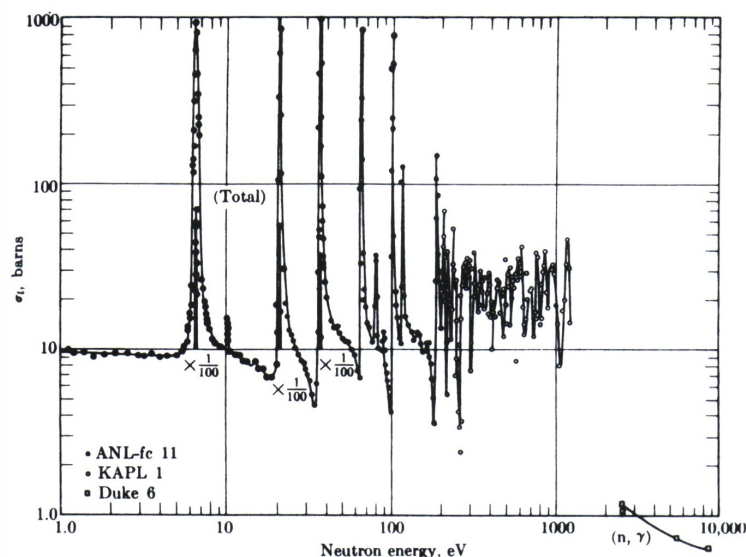


Figure 3. *Resonanties in de totale werkzame doorsnede voor de verstrooiing van neutronen aan ^{238}U . De werkzame doorsnede tussen de resonanties wordt voornamelijk veroorzaakt door elastische verstrooiing.*

duizenden resonanties in het systeem $^{238}\text{U} + n$?

Vaak zijn er meerdere reacties gelijktijdig mogelijk. Men definiëert dan voor elk proces

¹¹ Hoe groter de effectieve oppervlakte van het target deeltje, des te gemakkelijker kunnen we het raken; het bundeldeeltje zal diensgevolge worden verstrooid.

¹² De ontwerper van een reactor dient dit echter zeker te doen! De Dopplerverbreiding van bepaalde resonanties (de verbreding door de thermische beweging van de kernen) draagt wezenlijk bij tot de inherente stabiliteit van een reactor. Verder is de vraagstelling hoe resonanties statistisch verdeeld zijn een interessante.

een *partiële* werkzame doorsnede σ_i . De *totale* werkzame doorsnede, σ_{totaal} , is dan de som¹³ van alle *partiële* werkzame doorsneden

$$\sigma_{\text{totaal}} = \sum_i \sigma_i. \quad (3.4)$$

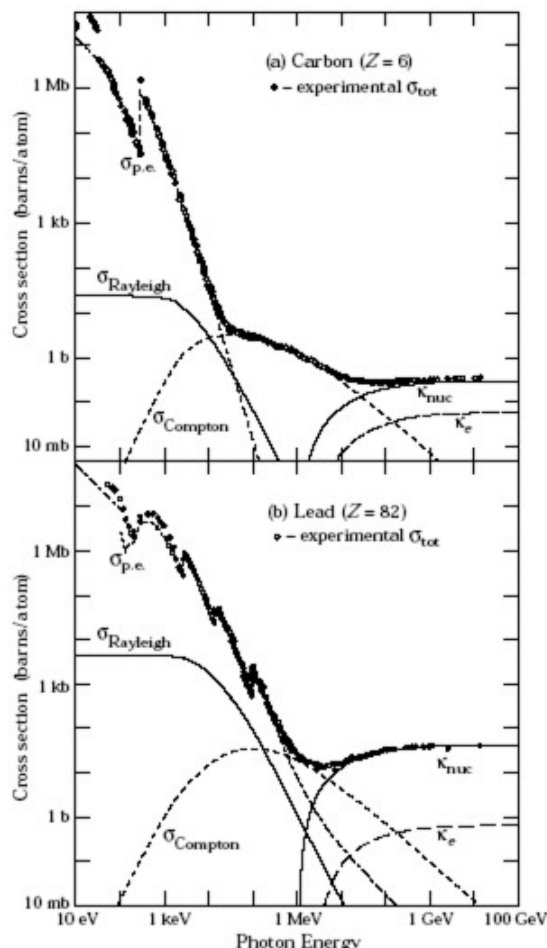


Figure 4. *Totale werkzame doorsnede voor foton verstrooiing aan koolstof en lood als functie van de energie. De bijdragen van individuele processen worden getoond, waarbij $\sigma_{\text{p.e.}}$ atomair foto-elektrisch effect (elektron emissie, foton absorptie), σ_{coherent} coherente verstrooiing (Rayleigh verstrooiing waarbij het atoom niet wordt geïoniseerd of aangeslagen), $\sigma_{\text{incoherent}}$ incoherente verstrooiing (Compton verstrooiing aan een elektron), κ_n paar-productie in het veld van de kern, κ_e paar-productie in het veld van het elektron, σ_{nuc} foto-nucleaire absorptie (in het algemeen gevolgd door emissie van een neutron of een ander deeltje).*

Figuur 4 geeft een overzicht van de totale en verschillende partiële werkzame doorsneden voor de reacties $\gamma + \text{C} \rightarrow \dots$ en $\gamma + \text{Pb} \rightarrow \dots$

¹³ In enkele gevallen, namelijk indien de verschillende *eindkanalen* niet onderscheidbaar zijn, moeten niet de werkzame doorsneden, maar de amplituden voor de verschillende processen opgeteld worden (zogenaamde *coherente* processen).

Indien een bundel met intensiteit N_0 (deeltjes/s) een target treft met dikte d , dan vermindert de intensiteit volgens

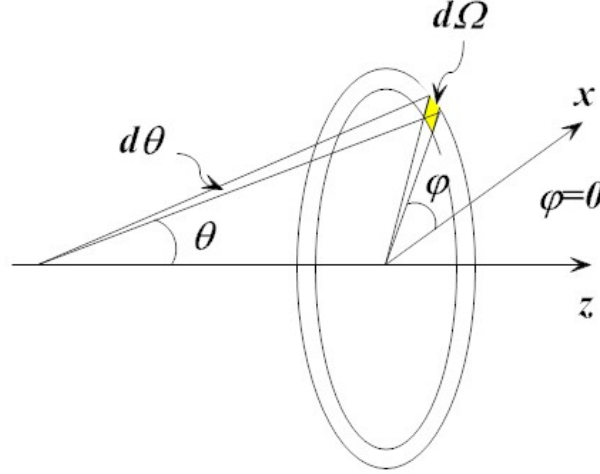
$$N(d) = N_0 e^{-n\sigma_{\text{totaal}}d}, \quad (3.5)$$

en er vinden

$$N_i = N_0 \frac{\sigma_i}{\sigma_{\text{totaal}}} (1 - e^{-n\sigma_{\text{totaal}}d}) \quad (3.6)$$

$$\approx N_0 n \sigma_i d \quad (\text{voor } n\sigma_{\text{totaal}}d \ll 1)$$

reacties van het type i plaats¹⁴.



Figuur 5. Schematische voorstelling van de differentiële werkzame doorsnede, voor processen waarbij de hoekverdeling niet isotroop is.

Figuur 5 geeft een schematische voorstelling van de kinematica voor een *differentiële* werkzame doorsnede. De waarschijnlijkheid dat bijvoorbeeld deeltje 1 uit de reactie



geëmitteerd wordt in de ruimtehoek $d\Omega_1$, bedraagt

$$dP = \frac{d\sigma_i}{d\Omega_1} n dx d\Omega_1. \quad (3.8)$$

De differentiële werkzame doorsnede $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ is in het algemeen niet enkel een functie van de hoek θ_1 , maar ook van de energie¹⁵ en (bijvoorbeeld in het geval van gepolariseerde deeltjes) de

¹⁴ In de literatuur vindt men vaak, meestal als het gaat om materiaaleigenschappen en de berekening van afscherming, niet de werkzame doorsnede σ_i getabelleerd, maar de *macroscopische (partiële) werkzame doorsnede* $\Sigma_i \equiv n\sigma_i$ [m^{-1}], de *verzwakkingcoëfficiënt* $\mu_{\text{totaal}} \equiv n\sigma_{\text{totaal}}$ [m^{-1}], en de *massaverzwakkingcoëfficiënt* $\frac{\mu_{\text{totaal}}}{\rho} \equiv \frac{N_A}{A} \sigma_{\text{totaal}}$ [m^2kg^{-1}]. Hierbij is $N_A = 6.022\,136\,7(36) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ de constante van Avogadro, A [kg/kmol] het atoomgewicht van het target, en ρ [kg/m^3] de dichtheid van het target.

¹⁵ Van belang is natuurlijk in alle gevallen de Galileï-, of de Lorentzinvariante *relatieve* energie van de reactiepartners. In het niet-relativistische geval zullen we rekenen met $T_{bt} = \frac{1}{2}m_{bt}(\vec{v}_b - \vec{v}_t)^2$, terwijl we relativistisch, $\sqrt{s} = E_{\text{CM}}$, de totale energie in het zwaartepunt zullen gebruiken. Later zullen we het relativistische correcte verband bespreken tussen het matrixelement M_{fi} , het faseruimte volume, en de werkzame doorsnede, alsook de transformatie van de reactiewaarschijnlijkheden in verschillende systemen.

hoek ϕ_1 (azimuthale hoek of ook de polarisatierichting).

Er geldt

$$\sigma_i = \iint \frac{d\sigma_i}{d\Omega_1} d\Omega_1 = \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^\pi \sin\theta_1 d\theta_1 \frac{d\sigma_1(\theta_1, \phi_1)}{d\Omega_1}. \quad (3.9)$$

In het geval dat de werkzame doorsnede *isotroop* is, geldt

$$\sigma_i = 4\pi \frac{d\sigma_i}{d\Omega}. \quad (3.10)$$

Op analoge wijze kunnen we ook meer gecompliceerde werkzame doorsneden definiëren, die soms nodig zijn als er zich meerdere deeltjes in de eindtoestand bevinden. Deze deeltjes kunnen in *coïncidentie* gemeten worden (dat is meestal het geval in dergelijke experimenten).

B. Kernafmetingen uit Rutherfordverstrooiing

Rond het jaar 1910 werden de eerste experimenten uitgevoerd waarbij hoog-energetische deeltjes¹⁶ werden verstrooid aan de atomen van metaalfolies. De hoogste kinetische energieën, die de fysici toen ter beschikking stonden, werden bepaald door het α -verval van natuurlijke radionucliden en bedroegen $T_\alpha \approx 4 - 7$ MeV.

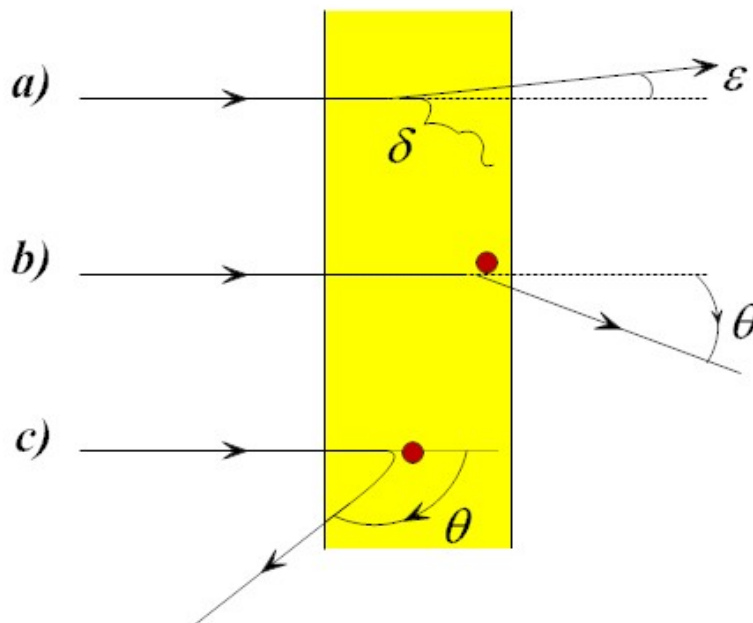


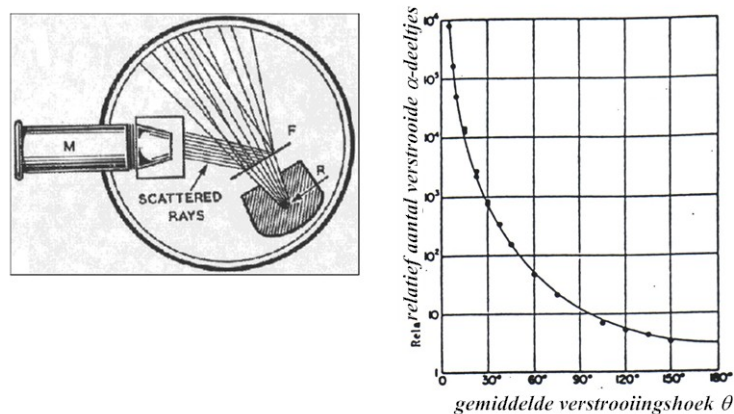
Figure 6. Schematische voorstelling van de verstrooiing van α -deeltjes aan een metaalfolie.

Indien men α -deeltjes op een target schiet, dan vinden er vaak botsingen plaats met de elektronen (zie figuur 6a). Vanwege de geringe massa van de elektronen zal een α -deeltje

¹⁶ Aangezien er tegenwoordig deeltjesversnellers ter beschikking staan, die deeltjes kunnen produceren met energieën van vele GeV, zou men deze experimenten nu niet meer als 'hoge-energie fysica' karakteriseren. De grenzen van de lage-energie kernfysica, medium-energie, en hoge-energie fysica verschuiven in de tijd.

slechts over een relatief kleine hoek ϵ afgebogen worden. In daartoe geschikte detectoren kunnen we deze terugstoot-elektronen (zogenaamde δ -elektronen) meten. Deze botsingen interesseren ons echter niet in de volgende discussie.

Het veroorzaakte grote opschudding toen destijds bleek dat er soms gebeurtenissen plaatsvinden, waarbij een α -deeltje over een grote hoek θ (zie figuur 6b) afgebogen of zelfs in achterwaartse richting verstrooid wordt (zie figuur 6c). Figuur 7 toont de relatieve waarschijnlijkheid van zulke (verstrooiings)gebeurtenissen, zoals ze in 1913 door Geiger en Marsden gepubliceerd werden.



Figuur 7. Hoekverdeling voor de verstrooiing van geladen deeltjes aan een kern: $T_b = 7.65 \text{ MeV}$, $Z_b = 2$, $Z_t = 79$.

Uit de data van deze experimenten kon Rutherford afleiden, dat in het inwendige van een atoom een geladen kern zit, die een positieve lading $Z_t e$ draagt (waarbij Z_t het ladingsgetal van het onderzochte target is) en die nagenoeg de hele massa van het atoom in zich herbergt. Het lukte hem verder om bij benadering de grootte van enkele kernen te bepalen. In het volgende proberen we zijn gedachtengang weer te geven (maar in moderne notatie en beperkt tot de essentiële zaken).

We nemen eerst aan dat een kern oneindig zwaar is (vergeleken met de massa van het α -deeltje) en bij de botsing in rust blijft. Figuur 8 toont een klassieke voorstelling waarbij een geladen deeltje met een impuls \vec{p}_b , kinetische energie $T_b \approx p_b^2/2m_b$, met een ‘botsingsparameter’ b_b op een kern wordt geschoten. Onder de aanname dat de wisselwerking tussen het α -deeltje en de kern door de Coulombpotentialiaal

$$V(r) = \frac{Z_b Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = Z_b Z_t \alpha \hbar c \frac{1}{r} = Z_b Z_t \cdot \frac{1.4}{r} \text{ MeV} \cdot \text{fm} \quad (3.11)$$

is gegeven (we praten later over afwijkingen hiervan), krijgen we uit de klassieke mechanica de volgende relaties

$$\begin{aligned} T_b &= T + Z_b Z_t \alpha \hbar c (b)^{-1} && \text{behoud van energie,} \\ p_b b_b &= p b && \text{behoud van impulsmoment,} \\ \tan \frac{\theta}{2} &= Z_b Z_t \alpha \hbar c (2b_b T_b)^{-1} && \text{bewegingsvergelijking.} \end{aligned} \quad (3.12)$$

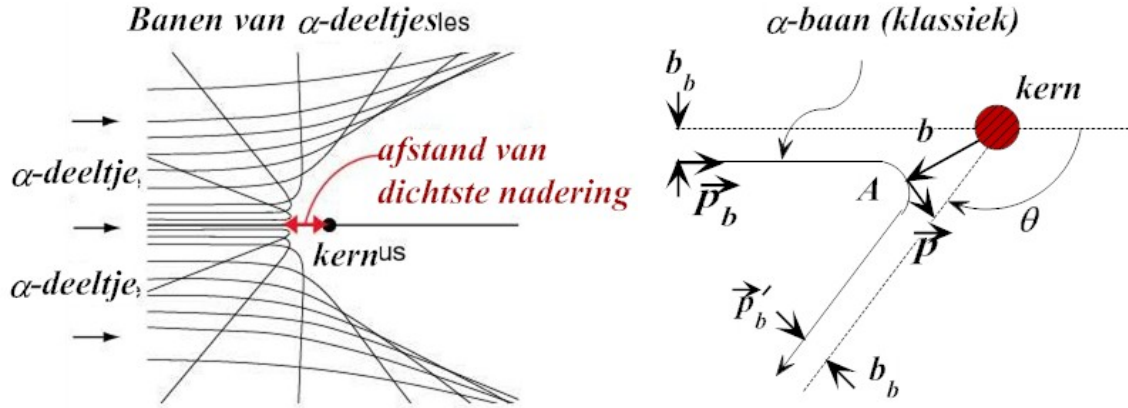


Figure 8. Schematische voorstelling van de verstrooiing van een α -deeltje aan een goudfolie. In punt A heeft het deeltje de kleinste afstand, b , tot de kern en wordt de kinetische energie gegeven door T .

Het α -deeltje beweegt op een hyperbool, waarbij b de kleinste afstand is tot het verstrooiingscentrum (de zogenaamde *apsidenafstand*). De energie en impuls van het deeltje op punt A zijn respectievelijk p en T . Hiermee kan de verstrooiingshoek berekend worden uit de botsingsparameter b - die helaas onbekend is! Van wezenlijk belang is echter dat de waarschijnlijkheid dat het α -deeltje verstrooid wordt over een hoek θ , dus de differentiële werkzame doorsnede $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ gemakkelijk berekend kan worden.

De oppervlakte van het doelwit, $d\sigma$, voor een botsing met een botsingsparameter tussen b_b en $b_b + db_b$ is gelijk aan de oppervlakte van de bijbehorende circelvormige ring

$$d\sigma = 2\pi b_b db_b = 2\pi (Z_b Z_t \alpha \hbar c)^2 \left(\frac{1}{2T_b} \right)^2 \cot \frac{\theta}{2} \sin^{-2} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{2}. \quad (3.13)$$

Voor het ruimtehoek element schrijven we

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta. \quad (3.14)$$

Hiermee vinden we de beroemde verstrooiingsformule van Rutherford

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{Z_b Z_t \alpha \hbar c}{4T_b} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2}. \quad (3.15)$$

Daadwerkelijk levert deze betrekking een uitstekende beschrijving voor alle energieën T_b , alle targetladingen Z_t en alle verstrooiingshoeken θ , indien het α -deeltje en de kern *elkaar niet te dicht naderen*.

Wat betekent ‘niet te dicht’ naderen? We kunnen niet verwachten dat de formule van Rutherford nog geldig is wanneer vergelijking (3.11) niet meer juist is¹⁷. Dat is zeker het

¹⁷ Het is verbazend dat de uitdrukking van de formule van Rutherford, zoals afgeleid uit de klassieke mechanica, ook geldig blijft voor een quantummechanische beschrijving. Dat is echter enkel het geval omdat $V(r) = \text{constante} \cdot \frac{1}{r}$. Voor alle andere wisselwerkingen levert de quantummechanische berekening een ander resultaat op dan de klassieke.

geval, indien de deeltjes elkaar raken of doordringen. Er moet dus gelden

$$b > b_{\min} = R_{\alpha} + R_t. \quad (3.16)$$

Na enkele triviale herschrijvingen krijgen we

$$\sin \frac{\theta_{\min}}{2} = \left| 1 - \frac{2T_b b_{\min}}{Z_b Z_t \alpha \hbar c} \right|^{-1}. \quad (3.17)$$

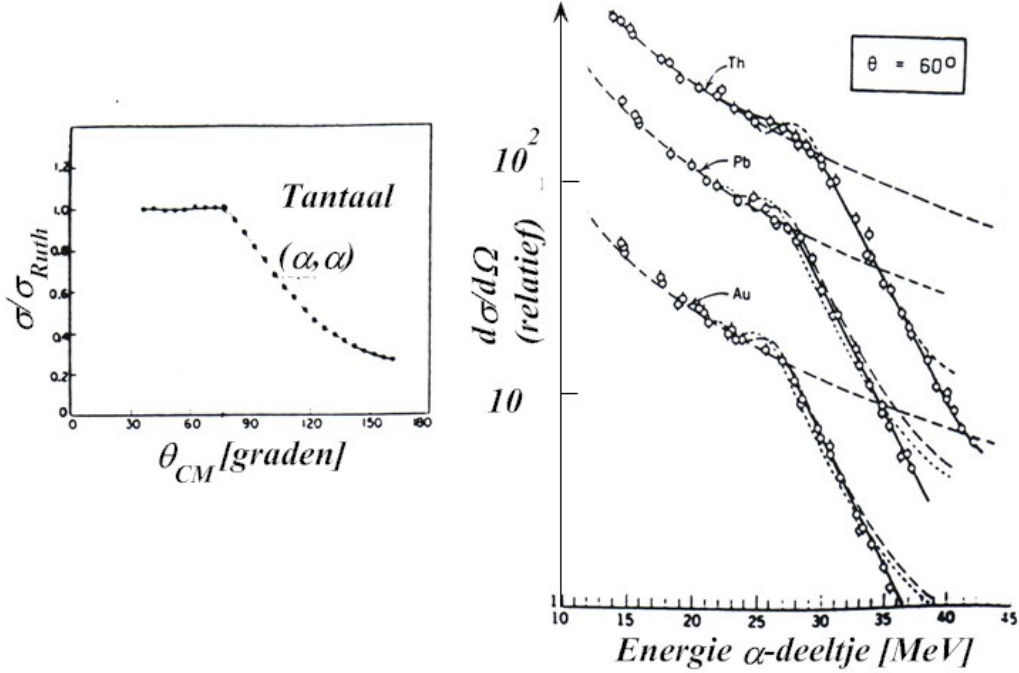


Figure 9. Elastische verstrooiing van α -deeltjes aan verschillende kernen. Links: als functie van de verstrooiingshoek voor een gegeven energie van $T_b = 22$ MeV voor verstrooiing aan tantaal. Rechts: als functie van de energie bij een gegeven verstrooiingshoek.

Figuur 9 laat zien dat we uit de gemeten hoek θ_{\min} , waarbij afwijkingen van Rutherford-verstrooiing optreden, dus de som van de beide stralen $R_b + R_t$ kunnen bepalen¹⁸.

Figuur 10 toont dat we, indien we nu de gemeten interactieafstanden $r_{\min} = R_t + \text{constante}$ uitzetten als functie van de derde-machts wortel uit het massagetal van het target, een rechte lijn vinden. Er geldt dus

$$R \simeq 1.4 \text{ fm } \sqrt[3]{A}. \quad (3.18)$$

Het kernvolume is dus evenredig met het aantal nucleonen in de kern:

$$V_{\text{kern}} = \frac{4\pi}{3} R^3 \propto A, \quad \text{met } A = N + Z, \quad (3.19)$$

¹⁸ Tegenwoordig weten we, dat de beide botsingspartners naast de ladingswisselwerking ook nog een sterke wisselwerking hebben. Omdat deze slechts een zeer korte dracht heeft ($R_{\text{sterk}} \sim 1$ fm), kunnen we stellen dat $b_{\min} \approx R_b + R_t + R_s$.

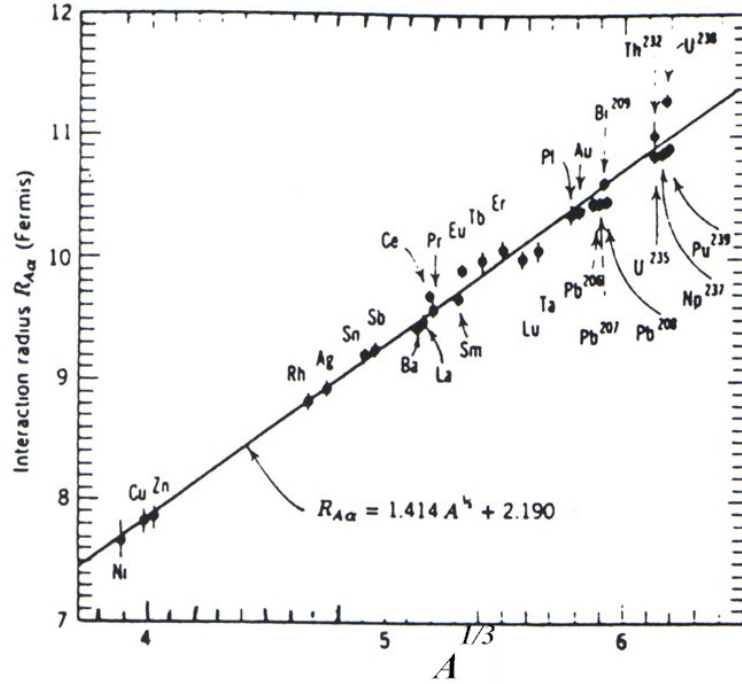


Figure 10. *Verstrooiing van α -deeltjes aan verschillende kernen. Gemeten interactieafstand als functie van de derde-machts wortel uit het massagetal van het target.*

en de dichtheid van de kern hangt niet af van de soort kern:

$$\rho_{\text{kern}} \simeq 4 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3. \quad (3.20)$$

Ook dit was destijds een uiterst interessant en onverwacht resultaat.

C. Ladingsverdeling uit elektronenverstrooiing

In de vorige sectie hebben we de verstrooiing van α -deeltjes aan kernen besproken en zijn we tot de volgende belangrijke conclusies gekomen:

- Uit de goede overeenstemming tussen de klassieke theorie en de resultaten van experimenten blijkt dat de wet van Coulomb

$$V(r) = \frac{Z_b Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (3.21)$$

ook voor zeer kleine afstanden ($r \geq 1 \text{ fm}$) *exact* geldig is.

- De totale lading van de kern bevindt zich binnen een bol met straal $R \simeq 1.4 \text{ fm} \sqrt[3]{A}$.
- De sterke wisselwerking, die de nucleonen bindt binnen een kern, heeft een zeer korte dracht ($\approx 1 \text{ fm}$) - anders zouden er afwijkingen van de Coulombwet optreden.
- ‘Toevallig’ levert een quantummechanische berekening (in de eerste-orde Born benadering) een werkzame doorsnede (niet door ons uitgerekend) die gelijk is aan wat we vinden met een klassieke berekening.

Hier zullen we de elastische verstrooiing van elektronen (dus negatief geladen deeltjes) aan kernen bespreken. Elektronen hebben als voordeel, dat ze net als de andere leptonen niet meedoen aan de sterke wisselwerking, en we dus niet een nieuwe, voorlopig onbekende, kracht hoeven in te voeren. Daarentegen willen we nu verstrooiingsexperimenten behandelen, waarbij we nog kleinere afstanden van de wisselwerking ($r \leq 1$ fm) aftasten en in het bijzonder de ladingsverdeling in het *inwendige* van de kern willen bepalen. Een verdere vereenvoudiging volgt uit het feit dat we elektronen als puntvormige elementaire deeltjes kunnen beschouwen.

Een eenvoudige schatting laat zien, dat we voor dergelijke experimenten hoogenergetische elektronen ($E \gg mc^2$) dienen te gebruiken. Om een plaatsresolutie van $\Delta x \leq 1$ fm te bereiken, hebben we een elektronenbundel met een voldoende kleine de Broglie golflengte nodig. Uit de optica (het oplossingsvermogen van een microscoop) weten we dat twee punten enkel dan gescheiden kunnen worden, indien

$$\Delta x \geq \frac{\lambda}{2}. \quad (3.22)$$

Hiermee vinden we direct¹⁹ dat

$$p_{\min} = \frac{h}{\lambda} \geq \frac{h}{2\Delta x}, \quad \text{en dus} \quad (3.23)$$

$$E_{\min} = \sqrt{m^2 c^4 + p_{\min}^2 c^2} \approx p_{\min} c \geq \pi \frac{\hbar c}{\Delta x} \approx \frac{620 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\Delta x}. \quad (3.24)$$

We berekenen allereerst de werkzame doorsnede in de niet-relativistische limiet. Er geldt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 |M_{fi}|^2}{(2\pi\hbar^2)^2}. \quad (3.25)$$

In het volgende zullen we het matrixelement M_{fi} uitrekenen in eerste-orde Born benadering²⁰.

Voor het inkomend en verstrooide elektron gebruiken we de vlakke golven $\psi_i = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ en $\psi_f = e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}}$, en krijgen

$$M_{fi} = \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \iiint V(\vec{x}) e^{\frac{i\vec{q}\cdot\vec{x}}{\hbar}} d\vec{r}, \quad (3.26)$$

waarbij $\vec{q}/\hbar = \vec{k} - \vec{k}'$ het golfgetal is en $V(\vec{x})$ de potentiaal die de wisselwerking beschrijft. Indien we sferische symmetrie aannemen, $V(\vec{x}) = V(x)$, dan vinden we

$$M_{fi} = \frac{4\pi\hbar}{|\vec{q}|} \int_0^\infty V(x) \sin\left(\frac{|\vec{q}|x}{\hbar}\right) x dx. \quad (3.27)$$

¹⁹ Jammer genoeg volgt uit hetzelfde argument, dat de benodigde deeltjesversnellers des te groter (en dus duurder) worden, als we dieper in het inwendige van deeltjes willen kijken.

²⁰ De voorwaarden waaronder de Bornse benadering geldig is, worden in het college quantummechanica besproken. Een uitvoerig onderzoek werd uitgevoerd door R. Jost en A. Pais, *Phys. Rev.* **82** (1951) 840. Een makkelijk te begrijpen voorstelling wordt gegeven door R.J. Taylor, *Scattering Theory*, J. Wiley, New York (1972). De factor $-m/(2\pi\hbar^2)$ hangt af van de normering van de golf functies en is niet eenduidig in de literatuur.

Om te beginnen berekenen we het matrixelement voor een afgeschermd Coulombpotentiaal

$$V(x) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-x/a}}{x}. \quad (3.28)$$

Hiermee houden we rekening met het feit, dat de lading van de targetkern Ze voor grote afstanden door de elektronenwolk afgeschermd wordt. De constante a is van de orde van de atoomstraal, dus $a \simeq 1 \text{ \AA} = 10^5 \text{ fm}$. We vermijden dan ook direct convergentieproblemen (de totale werkzame doorsnede voor de Coulombpotentiaal is oneindig groot!).

Voor de integraal vinden we

$$M_{fi} = 4\pi \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2 + (\hbar/a)^2}. \quad (3.29)$$

Indien de terugstootimpuls niet al te klein is,

$$|\vec{q}| \gg \frac{\hbar}{a} \simeq 2 \times 10^{-3} \frac{\text{MeV}}{c}, \quad (3.30)$$

dan valt de afschermparameter eruit en krijgen we als eindresultaat

$$M_{fi} = 4\pi \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2} = 4\pi Z\alpha\hbar c \frac{\hbar^2}{|\vec{q}|^2}. \quad (3.31)$$

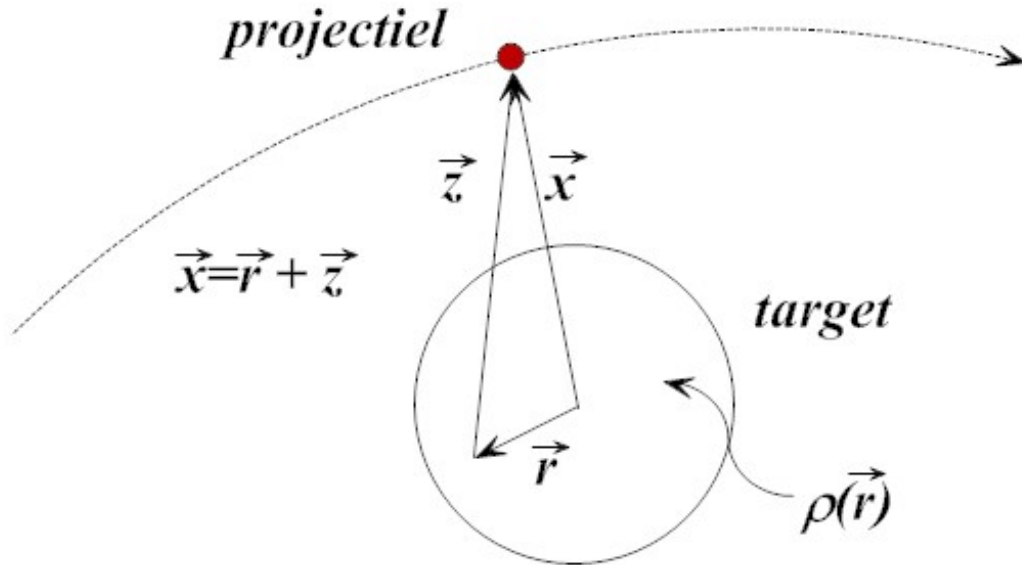


Figure 11. Verstrooiing van een elektron aan een kern met een eindige sferisch symmetrische ladingsverdeling.

In het niet-relativistische grensgeval volgt voor de overgedragen impuls

$$|\vec{q}| = 2|\vec{p}| \sin \frac{\theta}{2}, \quad (3.32)$$

waarbij $|\vec{p}| = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$ in het zwaartepuntsysteem en met

$$\frac{\vec{q}^2}{2m} = 4 \frac{\vec{p}^2}{2m} \sin^2(\theta/2) = 4T \sin^2(\theta/2) \quad (3.33)$$

krijgen we weer de werkzame doorsnede volgens de eenvoudige, vroeger klassiek afgeleide, formule van Rutherford,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha\hbar c}{4T \sin^2(\theta/2)} \right)^2. \quad (3.34)$$

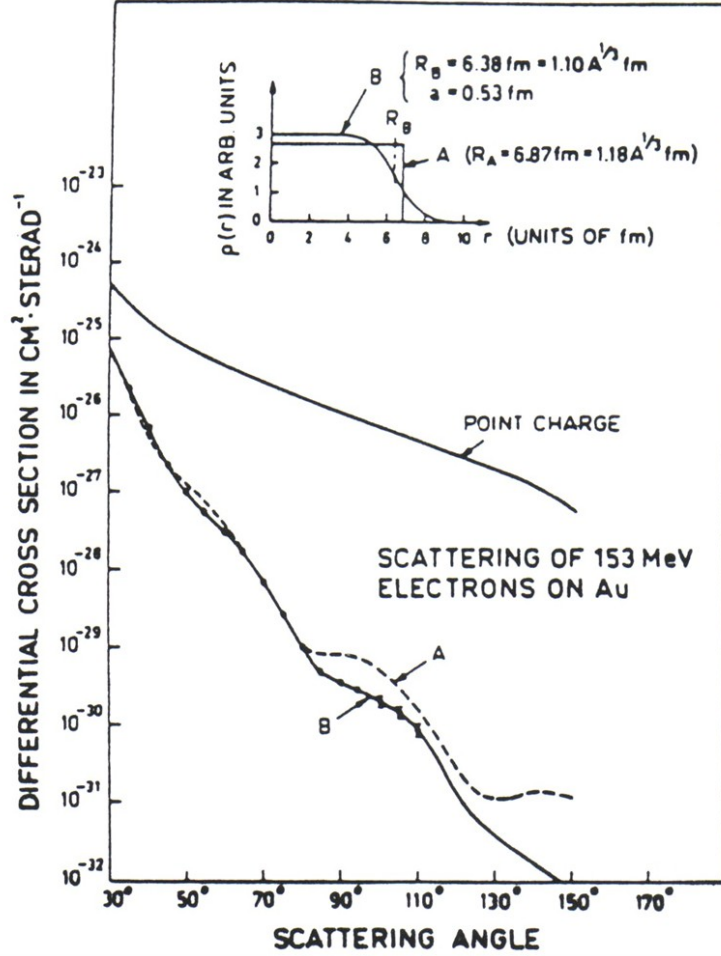


Figure 12. Verstrooiing van elektronen met een energie van 153 MeV aan kernen van goudatomen.

Een vergelijking van deze uitdrukking met de resultaten van experimenten laten grote afwijkingen zien (zie figuur 9). We vragen ons daarom af hoe we ons resultaat dienen te modificeren, indien we niet van een puntlading, maar van een uitgebreide sferisch symmetrische ladingsverdeling $\rho(r)$ uitgaan, zoals getoond in in figuur 11. Er geldt dan dat

$$V(\vec{x}) = Z\alpha\hbar c \iiint \rho(\vec{r}) \frac{e^{-z/a}}{z} d\vec{r}, \quad (3.35)$$

waarbij we de ladingsverdeling op 1 genormeerd hebben. Voor het matrixelement krijgen we

$$\begin{aligned}
 M_{fi} &= Z\alpha\hbar c \iiint e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} \rho(\vec{r}) \frac{e^{-z/a}}{z} d\vec{r} d\vec{x} \\
 &= Z\alpha\hbar c \iiint \frac{e^{-z/a}}{z} e^{i\vec{q}\cdot\vec{z}/\hbar} d\vec{z} \iiint \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d\vec{r} \\
 &= M_{fi}(\text{punt}) F(\vec{q}),
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

waarbij $F(\vec{q})$ de Fourier getransformeerde van de ladingsverdeling is en bekend staat als de *vormfactor*.

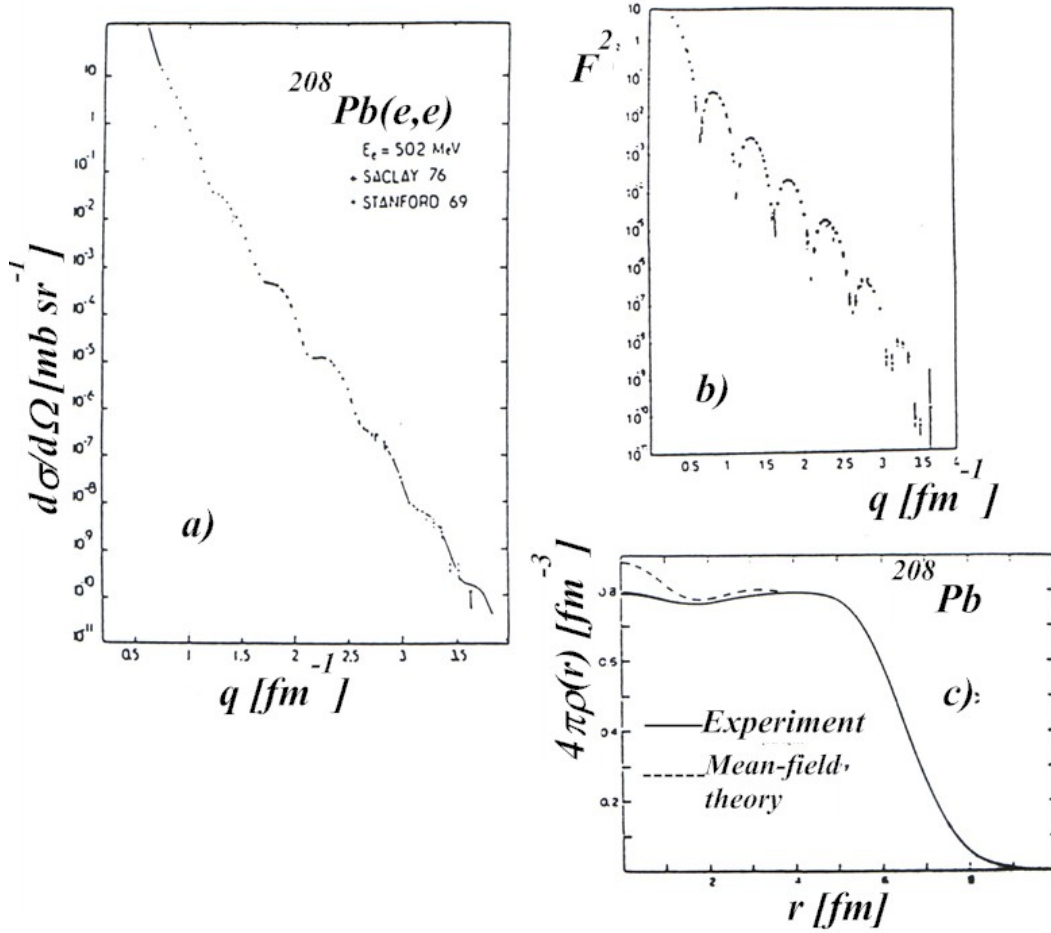


Figure 13. Werkzame doorsnede, vormfactor, en ladingsverdeling voor de verstrooiing van elektronen aan loodkernen.

Omgekeerd kunnen we uit $F(\vec{q})$ direct de gezochte ladingsverdeling,

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iiint F(\vec{q}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d\vec{q}, \tag{3.37}$$

verkrijgen. Het is de moeite waarde om dit resultaat te vergelijken met Fraunhofer diffractie aan een spleet²¹.

We kunnen opmaken uit figuur 12 dat we, indien we voor de interpretatie van de data voor de verstrooiing van 153 MeV elektronen aan een goudfolie een ladingsverdeling kiezen die homogeen verdeeld is in een bol met straal $R_Z = 6.87$ fm, al direct een veel betere overeenstemming bereiken dan het geval is voor een puntlading. De oscillaties zijn echter nog te sterk (diffractie aan een spleet met scherpe kanten). Een nagenoeg perfecte overeenstemming met de data wordt verkregen, indien we voor de ladingsverdeling de functie

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}, \quad (3.38)$$

met $R \simeq 1.2 \text{ fm } \sqrt[3]{A} - 0.48 \text{ fm}$, voor $A \gg 1$, en $a \simeq 0.5 \text{ fm}$ kiezen.

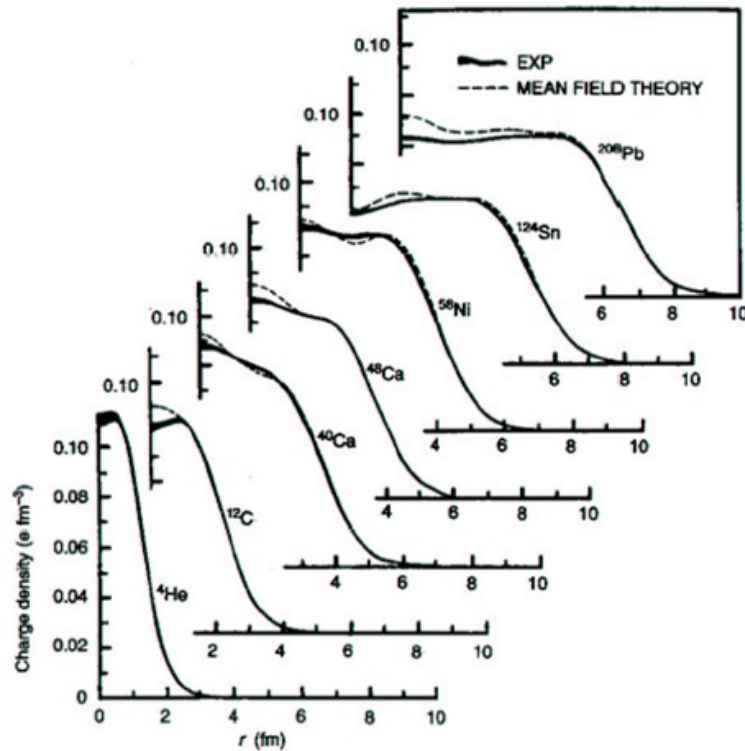


Figure 14. Ladingsverdelingen voor een aantal kernen, zoals bepaald met behulp van elektronenverstrooiing.

Figuur 13 laat data zien voor elektronenverstrooiing aan lood (merk op dat de werkzame doorsnede over het meetgebied veranderd met twaalf ordes van grootte). De figuur toont de werkzame doorsnede, de bijbehorende vormfactor $F^2(q)$, en de hieruit afgeleide ladingsverdeling. Figuur 14 geeft een overzicht van de ladingsverdeling van een aantal kernen. We zien dat de ladingsdichtheid in het kerninwendige bij alle kernen ongeveer even groot is. Kleine afwijkingen kunnen voor een deel door het *schillenmodel* verklaard worden.

²¹ Voor de verstrooiing aan de scherpe randen van een homogene bol met straal R vinden we een minimum voor $|\vec{q}|R/\hbar \approx 4.5$. De positie van het minimum geeft informatie over de ladingstraal.

IV. KERMODELLEN

In het volgende beschouwen we twee modellen voor de beschrijving van atoomkernen. Het klassieke vloeistofdruppelmodel en het quantummechanische schillenmodel.

A. Het vloeistofdruppelmodel

We zullen de kern modelleren op basis van een vloeistof van nucleon en hieruit een globale beschrijving van de massa's van kernen afleiden. De experimentele massagegevens worden getoond in Fig. 15. In het volgende zullen we het steeds over nucleonen hebben en geen

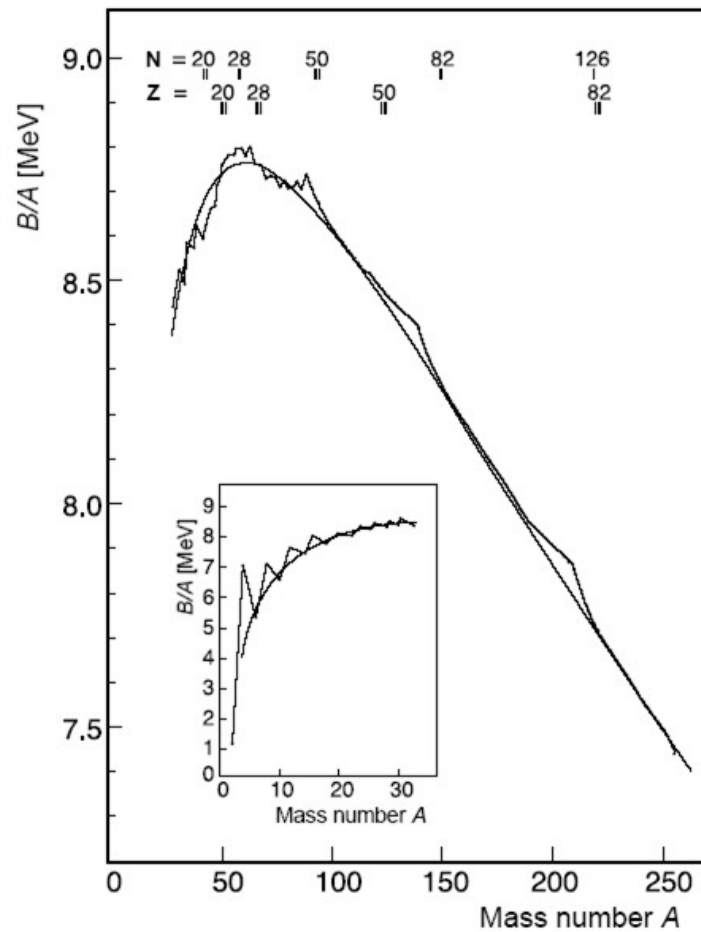


Figure 15. *Experimenteel bepaalde waarden voor de bindingsenergie per nucleon. De curve is een beschrijving gebaseerd op het vloeistofdruppelmodel voor de kern.*

onderscheid meer maken tussen protonen en neutronen. De reden hiervoor is de ladingsafhankelijkheid van de kernkrachten. Men weet dat de massa's van proton en neutron slechts weinig ($\leq 1\%$) van elkaar verschillen en dat de sterke wisselwerking tussen twee partners

steeds ongeveer gelijk is: $V_{nn} = V_{pp} \approx V_{np}$ ²². Dit rechtvaardigt het om het proton en neutron als één deeltje, het nucleon, te beschouwen, dat in twee verschillen toestanden voorkomt. Formeel schrijft men aan het nucleon een isospin $T = \frac{1}{2}$ toe; de toestand met $T_z = +\frac{1}{2}$ vertegenwoordigt het proton, de toestand met $T_z = -\frac{1}{2}$ het neutron. De Coulombafstoting die tussen protonen een rol speelt moet natuurlijk apart in beschouwing worden genomen.

Uit het feit dat de stralen van kernen bij benadering evenredig zijn met de derde-machtswortel uit het neutronengetal,

$$R \approx A^{\frac{1}{3}}, \text{ met } R_0 \approx 1,1 \dots 1,4 \text{ fm}, \quad (4.1)$$

volgt, dat de gemiddelde dichtheid van nucleonen bij benadering constant is,

$$\rho \approx 0,17 \frac{\text{nucleonen}}{\text{fm}^3} \approx 0,28 \times 10^{18} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (4.2)$$

De meeste kernen²³ hebben min of meer een bolvorm en men kan trachten de massa's of bindingsenergieën uit een model af te leiden, dat de kern als een sferische vloeistofdruppel beschrijft. De totale bindingsenergie B bestaat dan uit de volgende termen:

1. Volume energie B_V

Vanwege de korte reikwijdte van de kernkrachten heeft elk nucleon slechts een directe wisselwerking met zijn nabije partner. Het aantal van deze nabije partners is echter in een vloeistof met constante dichtheid ook constant. Hiermee draagt elk nucleon hetzelfde bedrag bij tot de bindingsenergie,

$$B_V = a_V A, \quad (4.3)$$

waarbij a_V een empirisch te bepalen constante is.

2. Oppervlakte energie B_F

Die deeltjes, die zich aan het oppervlak van de kern bevinden, zijn minder sterk gebonden dan die in het binnenste van het kernvolume, omdat ze minder nabije partners hebben. Het aantal nucleonen dat zich aan het oppervlak bevindt is evenredig met R^2 en hiermee dus met $A^{\frac{2}{3}}$. We dienen dus een correctieterm met een negatief teken toe te voegen,

$$B_F = -a_F A^{\frac{2}{3}}. \quad (4.4)$$

De term vertegenwoordigt de oppervlaktespanning van een vloeistof. We begrijpen nu ook waarom stabiele kernen vaak een bolvorm hebben (maximum volume bij gegeven oppervlak).

²² De ladingssymmetrie ($V_{nn} = V_{pp}$) is nog minder dan de ladingsonafhankelijkheid ($V_{nn} = V_{pp} = V_{np}$) gebroken.

²³ Men treft echter ook kernen aan, waarvan de vorm sterk van een bolvorm afwijkt, in het bijzonder kernen met sigaar- en discusvorm. De deformatie parameter $\epsilon = 3(a-b)/(a+2b)$ neemt in het gebied van de zeldzame aarden grote waarden aan, bijvoorbeeld voor ${}^{165}_{67}\text{Ho}$ met $J = \frac{7}{2}$ geldt $\epsilon = 0,31$. De parameters a en b stellen respectievelijk de grote en kleine halfas van de ellipsoïde voor. Voor deze kernen is ook het intrinsieke quadrupoolmoment groot.

3. Coulombenergie B_C

De protonen in het binnenste van een kern stoten elkaar vanwege de gelijke ladingen af. De elektrostatistische energie van een homogene geladen bol bedraagt,

$$\frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 \hbar c \alpha}{R} = \frac{3}{5} \frac{\hbar c \alpha}{A^{\frac{1}{3}}} Z^2 = 0,7 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \text{ MeV}. \quad (4.5)$$

In deze eenvoudige beschrijving wordt verwaarloosd dat de wisselwerking van de ladingen binnen een proton reeds in diens rustenergie verdisconteerd is. Men verkrijgt een kleine verbetering als men aanneemt dat ieder proton slechts met $Z - 1$ andere protonen wisselwerkt. Hiermee vinden we voor de gezochte Coulombenergie

$$B_C = -a_C \frac{Z(Z - 1)}{A^{\frac{1}{3}}}, \quad (4.6)$$

met $a_C \approx 0,7 \text{ MeV}$. Vooral bij lichte kernen zijn er nog verdere correcties nodig, die bijvoorbeeld correlaties tussen protonen en oppervlakte effecten beschrijven.

4. Asymmetrie-energie B_A

De discrete energieniveaus van een kern kunnen elk steeds met twee protonen en twee neutronen bezet worden. Vanwege het Pauli principe voor identieke fermionen bestaan er twee instelmogelijkheden voor de spins: $s = \frac{1}{2}$, $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

We zullen deze niveaus in een volgend hoofdstuk (het schillenmodel) nog berekenen. Fig. 16 tracht het plausibel te maken dat de bindingsenergieën voor kernen met $N = Z$ maximaal zijn en dat kernen met een groot neutronen- of protonenoverschot minder sterk gebonden zijn. We verwaarlozen hier de invloed van Coulombafstoting. Hiermee verwachten we een bijdrage tot de asymmetrie-energie die evenredig is met $(Z - N)^2$ (we zullen dat in het volgende afleiden). De grootte van deze term kan

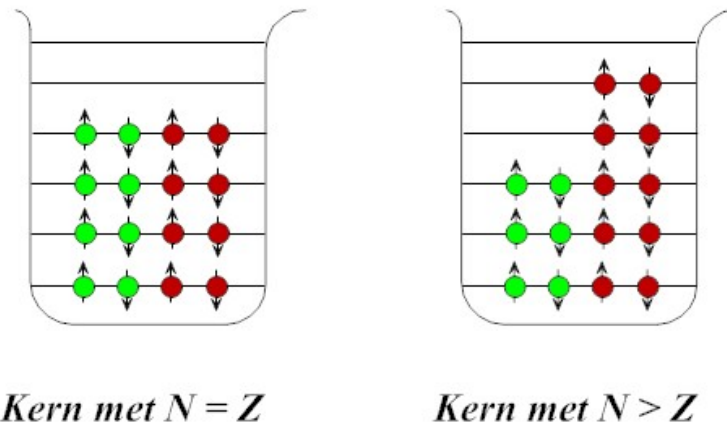


Figure 16. *Bezetting van niveaus in de potentiaal van een atoomkern.*

afgeschat worden door de nucleonen in een kern als een volledig ontaard Fermigas te behandelen. De onzekerheidsrelatie stelt $dx dp_x \approx h$ en in drie dimensies geeft dit voor

de eenheidscel $d^3x d^3p \approx h^3$. Voor het volume-element schrijven we $dV = d^3x$ en voor de impuls $d^3p = 4\pi p^2 dp$. In het kernvolume V passen

$$dN = 2 \frac{V}{dV} = 2 \frac{1}{h^3} V 4\pi p^2 dp, \quad (4.7)$$

neutronen met een impuls tussen p en $p + dp$. Hierbij geeft de eerste factor het aantal spininstellingen, de tweede het volume van de eenheidscel in de faseruimte en de laatste het volume van de bolschaal in de impulsruimte. Door integratie vinden we het totaal aantal neutronen,

$$N = \int_0^{p_{FN}} 8\pi \frac{V}{h^3} p^2 dp = \frac{8\pi}{3} \frac{V}{h^3} p_{FN}^3. \quad (4.8)$$

De maximum impuls van de neutronen, p_{FN} , wordt de Fermiimpuls genoemd. De totale kinetische energie T_N van deze neutronen bedraagt

$$\begin{aligned} T_N &= \int_0^{p_{FN}} \frac{p^2}{2m_n} 8\pi \frac{V}{h^3} p^2 dp = \frac{4\pi}{5m_n} \frac{V}{h^3} p_{FN}^5 \\ &= \frac{4\pi}{5m_n} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}} h^2 \frac{N^{\frac{5}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

We kunnen een analoge betrekking opschrijven voor de kinetische energie van de protonen,

$$T_Z = \frac{4\pi}{5m_p} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{5}{3}} h^2 \frac{Z^{\frac{5}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}}. \quad (4.10)$$

De totale kinetische energie T bedraagt,

$$\begin{aligned} T &= K \frac{Z^{\frac{5}{3}} + N^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} \\ \text{met } K &= 2^{\frac{2}{3}} \frac{4\pi}{5m} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{7}{3}} \left(\frac{h}{R_0} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

met $m \approx m_n \approx m_p$.

We gebruiken $T_z = \frac{1}{2}(Z - N)$. Hiermee geldt $N = \frac{A}{2} - T_z$, $Z = \frac{A}{2} + T_z$ en we kunnen voor $T_z \ll \frac{A}{2}$ vergelijking (4.11) in een Taylorreeks ontwikkelen,

$$\begin{aligned} T &= K \frac{\left(\frac{A}{2} \right)^{\frac{5}{3}} \left\{ \left(1 + \frac{2T_z}{A} \right)^{\frac{5}{3}} + \left(1 - \frac{2T_z}{A} \right)^{\frac{5}{3}} \right\}}{A^{\frac{2}{3}}} \\ &\approx \frac{K}{2^{\frac{5}{3}}} 2A \left(1 + \frac{20}{9} \frac{T_z^2}{A^2} \right) = \frac{K}{2^{\frac{2}{3}}} A + \frac{K}{2^{\frac{2}{3}}} \frac{5}{9} \frac{(Z - N)^2}{A}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Merk op dat de term $\frac{K}{2^3}A$ reeds in de volume-energie besloten ligt. De tweede term is de asymmetrieterm.

Bij dit deel dat uit kinetische energie bestaat dient nog een ongeveer evengrote term te worden opgeteld, die uit de potentiële energie van de wisselwerking bestaat. We schrijven

$$B_A = -a_A \frac{(Z - N)^2}{A}, \quad (4.13)$$

met een empirisch te bepalen constante a_A .

5. Paarenergie B_p

Meetgegevens laten zien dat kernen met N even en Z even stabiel zijn dan kernen waarbij N of Z oneven zijn. Deze laatste zijn echter weer stabiel dan kernen waarbij zowel N als Z oneven zijn. We gebruiken de volgende term voor de paarenergie,

$$B_p = \begin{cases} +\Delta & \text{voor even - even kernen} \\ 0 & \text{voor oneven - even kernen} \\ -\Delta & \text{voor oneven - oneven kernen} \end{cases} \quad (4.14)$$

De grootte Δ hangt nog van het atoomgewicht van de kern af. Empirisch bepaalt men dat de vergelijking

$$\Delta = a_p \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} \quad (4.15)$$

een goede benadering levert, die de algemene trend van de meetgegevens goed beschrijft; zie ook Fig. 17. Men ziet in deze figuur echter ook dat in het bijzonder bij de zogenaamde magische getallen ($N, Z = 8, 20, 28, 50, 82, 126$) er grotere afwijkingen optreden, die met de schillenstructuur van de kernen te maken hebben. Dat deze paarenergie van grote betekenis is, kan men bijvoorbeeld zien aan het feit dat in het periodieke systeem 165 stabiele even-even kernen, 105 stabiele oneven-even kernen en slechts 4 stabiele oneven-oneven (${}^2_1\text{H}_{1,3}$, ${}^6_3\text{Li}_{3,5}$, ${}^{10}_5\text{B}_{5,7}$, ${}^{17}_7\text{N}_7$) optreden.

De totale bindingsenergie van een kern kan hiermee in benadering worden geschreven als

$$B(A, Z) = a_V A - a_F A^{\frac{3}{2}} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} + \left\{ \begin{array}{c} +1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\} a_p \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.16)$$

In deze Weizsäcker formule herkennen we achtereenvolgens de termen voor de volume-energie, oppervlakte-energie, Coulombenergie, asymmetrie-energie en de paarenergie. Een fit van deze vergelijking aan de experimenteel bepaalde waarden voor de kernmassa's levert de volgende numerieke waarden,

$$\begin{aligned} a_V &= 15,56 \text{ MeV} \\ a_F &= 17,23 \text{ MeV} \\ a_C &= 0,705 \text{ MeV} \\ a_A &= 23,28 \text{ MeV} \\ (a_p &= 12 \text{ MeV}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

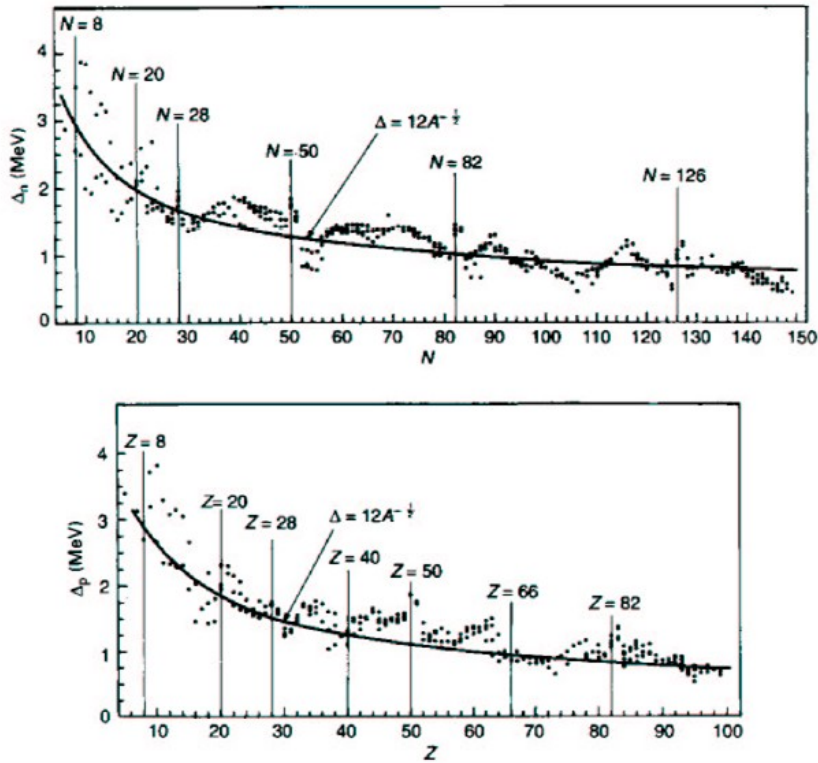


Figure 17. Paarenergieën voor protonen en voor neutronen als functie van respectievelijk het ladinggetal of het aantal neutronen.

De in Fig. 15 getoonde curve werd met deze parameters berekend. Ook hier vindt men een goede overeenstemming met de data, afgezien van de afwijkingen in de buurt van gesloten schillen. Fig. 18 toont de individuele bijdragen in de massaformule.

Tenslotte kunnen we natuurlijk proberen of we met een analytische berekening de belangrijkste termen uit de Weizsäcker formule kunnen verkrijgen. Voor de Coulombenergie is dat relatief eenvoudig. De Coulombpotentialiaal van een elementaire lading e op een afstand r bedraagt

$$v(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\alpha\hbar c}{e} \cdot \frac{1}{r}. \quad (4.18)$$

De potentialiaal van een homogeen geladen bol (met totale lading Ze) en een straal R bedraagt

$$V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{Z\alpha\hbar c}{e} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{voor } r \geq R, \quad (4.19)$$

met hyperfijnconstante $\alpha = e^2/\hbar c 4\pi\epsilon_0 \approx 1/137$. Voor de Coulombenergie vinden we dan

$$B_C = - \int V(r) \cdot dq = - \int_0^R \left(\frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{Z\alpha\hbar c}{e} \right) \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{3r^2 Ze}{R^3} \right) dr = -\frac{3}{5} Z^2 \alpha \hbar c \cdot \frac{1}{R}. \quad (4.20)$$

Voor de sterke wisselwerking tussen de nucleonen werken we met de volgende analoge Ansatz,

$$v(r) = \frac{g\hbar c}{y} \cdot \frac{e^{-\lambda r}}{r}, \quad (4.21)$$

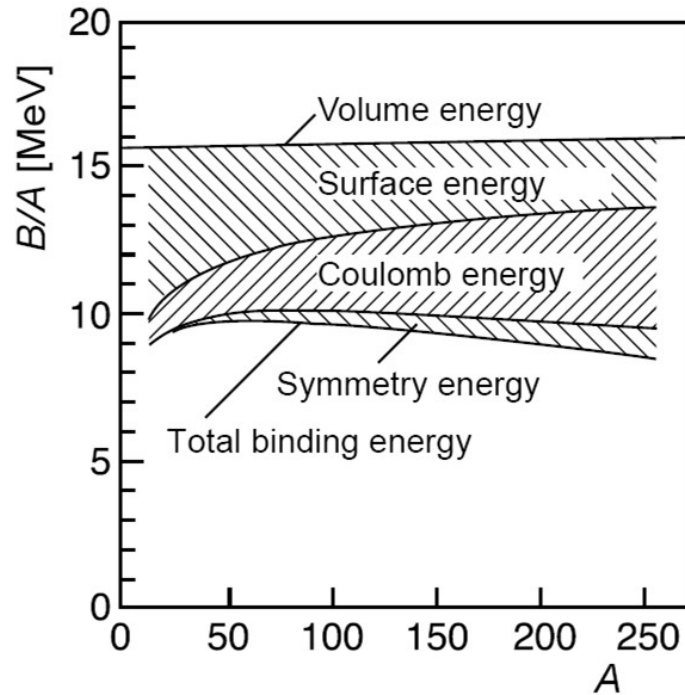


Figure 18. *Individuele bijdragen (cumulatief) tot de bindingsenergie per nucleon. De beschrijving is gebaseerd op het vloeistofdruppelmodel voor de kern.*

met g de koppelingsconstante en y de bijbehorende ‘lading’ van het nucleon. De exponentiële functie is geïntroduceerd om de korte reikwijdte te verdisconteren. Met een analoge, maar iets moeizamere berekening²⁴ krijgen we voor de potentiaal van een bol,

$$V(r) = \frac{Ag\hbar c}{y} \cdot \frac{e^{\lambda R}(\lambda R - 1) + e^{-\lambda R}(\lambda R + 1)}{\frac{2}{3}\lambda^3 R^3} \cdot \frac{e^{-\lambda r}}{r} \quad r > R \quad (4.22)$$

en hieruit volgt voor de kernenergie

$$B_k = \frac{3}{2} \cdot \frac{g\hbar c}{(R_0\lambda)^2} \cdot \frac{A}{R_0} - \frac{9}{4} \cdot \frac{g\hbar c}{(R_0\lambda)^3} \cdot \frac{A^{\frac{2}{3}}}{R_0} \left[1 - e^{-2R_0\lambda A^{\frac{1}{3}}} \right] + \dots \text{ veel andere termen.} \quad (4.23)$$

In het geval van de Coulombenergie komt de berekende waarde,

$$a_C = \frac{3}{5}\alpha\hbar c = 0,96 \text{ MeV} \cdot \text{fm}, \quad (4.24)$$

goed overeen met de semi-empirische waarde. We kunnen daarom proberen een schatting van beide vrije parameters te maken en krijgen

$$\begin{aligned} \lambda &\sim 1,0 \text{ fm}^{-1} \quad \text{en} \\ g &\sim 0,4. \end{aligned} \quad (4.25)$$

²⁴ Probeer U het eens om juistheid van de berekening te verifiëren: met de hand of met bijvoorbeeld het programma Mathematica.

Dit is ongeveer van de orde van grootte die we verwachten. Een correcte, zelf-consistente berekening, die ook $R_0 \sim 1,4$ fm oplevert, is uitermate gecompliceerd en moeizaam.

B. Het schillenmodel

1. Empirische aanwijzingen die op een schillenstructuur duiden

Het vloeistofdruppelmodel, dat we in het vorige hoofdstuk besproken hebben, kan een goede verklaring geven van diverse eigenschappen van atoomkernen. Bij een nauwkeurige analyse vinden we echter een reeks afwijkingen van de meetgegevens. Hiertoe behoren onder andere de volgende:

- Uit de atoomfysica is het bekend dat er elementen bestaan met een bijzonder stabiele elektronenstructuur: de edelgassen. Dit toont zich bijzonder duidelijk in de separatie-energie van het laatste elektron (de zogenaamde ionisatiepotentiaal). Men vindt uitgesproken maxima voor de ladingsgetallen

$$Z = 2, 10, 18, 36, 54, 86. \quad (4.26)$$

Analoog vindt men bij de atoomkernen karakteristieke sprongen in de separatieenergie van het laatste elektron en het laatste proton, zoals duidelijk te zien is in Fig. 19. Bij

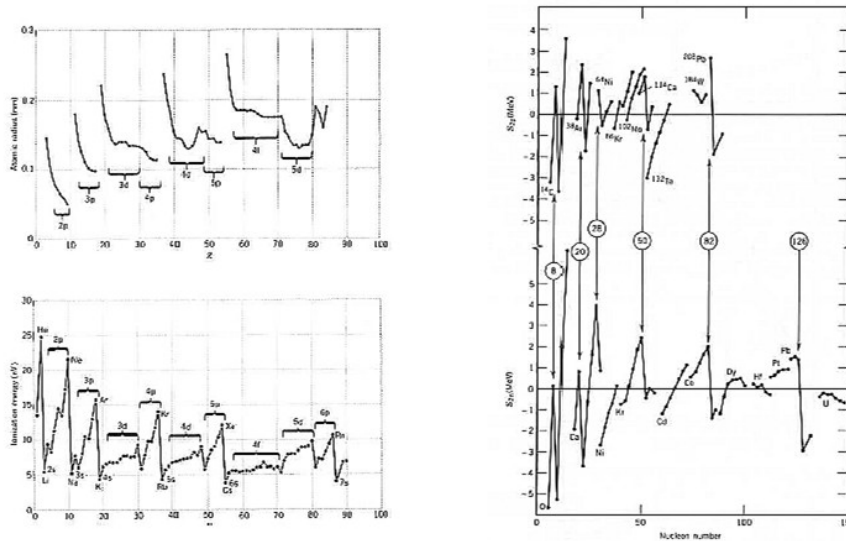


Figure 19. Links: atoomstraal en ionisatie-energie geven duidelijk aanwijzing voor het bestaan van een atomaire schillenstructuur. Rechts: twee-proton en twee-neutron separatie energieën voor sequenties met constant aantal neutronen en protonen. Het verschil tussen meetgegevens en corresponderende voorspellingen van de massa formule wordt getoond.

deze kernen worden de magische getallen gegeven door

$$Z = N = 2, 8, 20, (28), (40), 50, 82, 126, \quad (4.27)$$

waarbij de getallen tussen haakjes als ‘half-magisch’ worden aangeduid.

- Bijzonder stabiel (dus sterk gebonden) zijn kernen, waarbij zowel Z als N magische getallen zijn. Hiertoe behoren de ‘dubbel’ magische kernen

$${}^4_2\text{He}_2, {}^{16}_8\text{O}_8, {}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}, {}^{56}_{28}\text{Fe}_{28}, {}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}, \dots \quad (4.28)$$

Dit komt duidelijk tot uiting in de bindingsenergie per nucleon, B/A , zoals te zien is in Fig. 15.

- Een verdere aanwijzing voor een schillenstructuur volgt uit de energie voor de eerste aangeslagen toestand, in het bijzonder voor even-even kernen. Dit wordt gedemonstreerd in Fig. 20. Dergelijke kernen hebben alle in de grondtoestand een spin 0 en

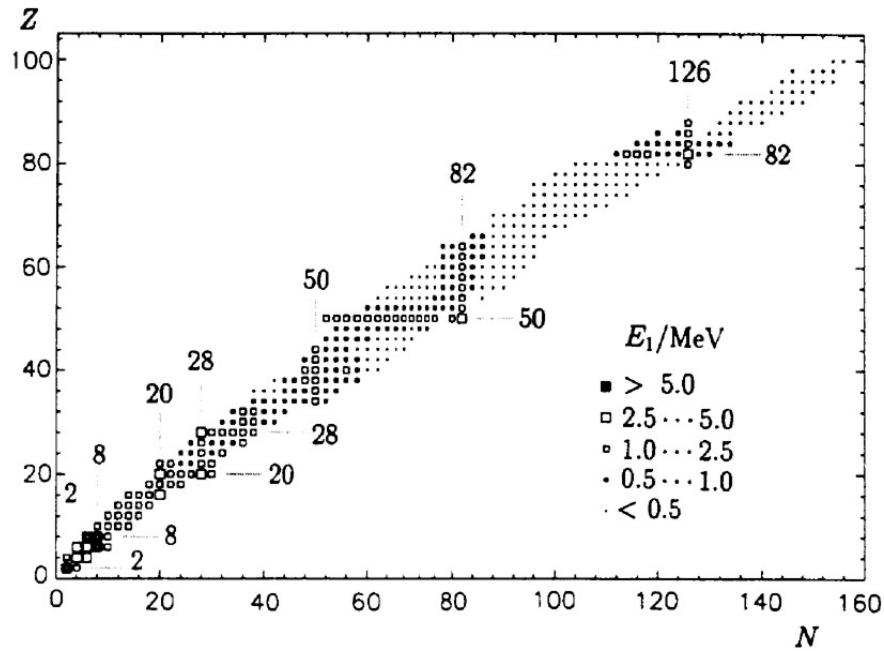


Figure 20. *Energieën van de eerste aangeslagen toestand van even-even kernen.*

een even pariteit, $J^\pi = 0^+$, terwijl men voor de eerste aangeslagen toestand meestal $J^\pi = 2^+$ vindt.

Het vloeistofdruppelmodel heeft ons geen informatie gegeven over het intrinsieke impulsmoment (de spin) van de kern - de vloeistofdruppel kan met een willekeurige hoeksnelheid om zijn as roteren. We zullen laten zien dat reeds de meest eenvoudige variant van het schillenmodel (het zogenaamde één-deeltjes schillenmodel) ons in staat stelt om spin en pariteit van de grondtoestand (en veel aangeslagen toestanden) correct te berekenen²⁵.

²⁵ Desondanks zullen we er op deze plaats op wijzen dat het eenvoudige schillenmodel, dat we in de volgende paragraaf zullen behandelen en dat met een sferisch symmetrische potentiaal werkt, niet geschikt is voor de behandeling van sterk gedeformeerde kernen en voor collectief aangeslagen toestanden, zoals vibraties of rotaties.

2. Theorie van het schillenmodel

We veronderstellen in het volgende dat ieder individueel nucleon beweegt in een gemeenschappelijke kernpotentiaal $V(r)$ en proberen dan met behulp van de Schrödingervergelijking de eigentoestanden (golffuncties, energieniveaus, spins, etc.) te berekenen. We trachten dus op een manier analoog aan de discussie van het waterstofatoom, te werk te gaan²⁶.

In de atoomfysica lijkt de aanname, dat de elektronen in eerste benadering onafhankelijk van elkaar in een centraal veld bewegen, zonder meer plausibel. In de kernfysica heeft een dergelijke analoge aanname echter een zorgvuldige argumentatie (die hier echter niet gegeven kan worden): de nucleonen zijn in het binnenste van een kern dicht op elkaar gestapeld. Hun gemiddelde afstand (≈ 2 fm) en hun doorsnede ($\approx 1,6$ fm) zijn van dezelfde orde van grootte, net zoals de reikwijdte van de kernkrachten ($\approx 1,4$ fm). Men zou op basis hiervan verwachten dat er constant botsingen plaatsvinden. Echter, ten gevolge van het Pauli principe zijn de energetisch laagliggende toestanden allemaal bezet, zodat na een botsing helemaal geen andere toestand ingenomen kan worden.

In principe zou het mogelijk moeten zijn uit de (bekende) wisselwerking van twee nucleonen in een zelf-consistente wijze de potentiaal, die we in de volgende paragraaf zullen gebruiken, af te leiden. Dit is echter een zeer moeilijke weg, vol met obstakels, die we hier ook niet zullen bewandelen. Wel gebruiken we weer het feit dat de kernkrachten ladingsonafhankelijk zijn en concluderen hieruit dat de gemiddelde potentiaal, $V(r)$, die op een proton werkt, dezelfde is als die op een neutron werkt²⁷. Verder gebruiken we de resultaten die we vroeger voor de ladingsverdeling in het kerninwendige hebben verkregen en nemen aan dat de massaverdeling in het inwendige van de kern eenzelfde vorm heeft als de ladingsverdeling²⁸. Als we tenslotte nog de korte reikwijdte van de kernkracht in acht nemen, dan lijkt het plausibel, om de volgende aanname voor de gemiddelde nucleonpotentiaal te maken,

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R}{a}\right)}}. \quad (4.29)$$

Dit is de zogenaamde Woods-Saxon potentiaal en deze wordt geschetst in Fig. 21, samen met een harmonische oscillator en een vierkante put potentiaal. De Woods-Saxon potentiaal is gekenmerkt door de volgende drie parameters,

$$\begin{aligned} \text{diepte} & V_0 \approx 50 \text{ MeV} \\ \text{radius} & R = R_0 A^{\frac{1}{3}}, \quad R_0 \approx 1,25 \text{ fm} \\ \text{oppervlakedikte} & a \approx 0,65 \text{ fm} \end{aligned} \quad (4.30)$$

²⁶ Voor het waterstofatoom, dus voor een potentiaal van de vorm $V(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$, kunnen de berekeningen nog relatief eenvoudig in analytische vorm uitgevoerd worden. We zullen het nu zonder een dergelijke kwantitatieve beschouwing dienen te stellen. Daarentegen kunnen de resultaten met goede nauwkeurigheid reeds met eenvoudige computerprogramma's verkregen worden.

²⁷ In een nauwkeurige berekening kan men zonder meer de Coulombwisselwerking tussen de geladen protonen meenemen.

²⁸ Experimenten, waarin men probeert de massaverdeling van een kern in kaart te brengen, bijvoorbeeld door verstrooiing van pionen aan kernen, zijn veel moeilijker te interpreteren.

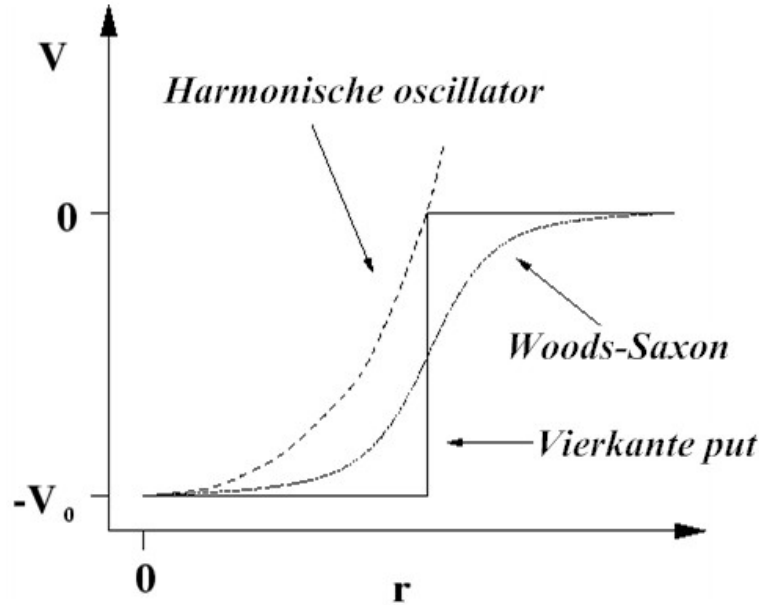


Figure 21. Schematische weergave van een harmonische oscillator, vierkante put, en een Woods-Saxon potentiaal.

De keuze voor de waarden van deze parameters kan pas later verklaard worden - namelijk door de uitstekende overeenstemming met de meetgegevens²⁹. In het volgende zullen we eerst enkele belangrijke resultaten voor de harmonische oscillator uit de quantummechanica in herinnering brengen.

3. Harmonische oscillator potentiaal

De harmonische oscillator beschrijft een deeltje met massa m , waarop een kracht met grootte $F_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{2}kr$ werkt, die het deeltje naar de evenwichtstoestand met $r = 0$ wil brengen. De constante k , ook wel de veerconstante genoemd, bepaalt de hoekfrequentie van de oscillaties rond de evenwichtstoestand en er geldt $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Hiermee wordt de potentiaal gegeven door

$$V(r) = \frac{m}{2}\omega_0^2 r^2. \quad (4.31)$$

Als we met deze potentiaal de Schrödingervergelijking oplossen, dan vinden we voor de toegestane energieën van de gebonden toestanden de waarden

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{3}{2}\right) \quad \text{met } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

Merk op dat n het hoofdquantumgetal wordt genoemd.

²⁹ Deze potentiaal beschrijft niet enkel de gebonden toestanden, maar in veel gevallen ook de elastische verstrooiing van nucleon aan willekeurige kernen. Teneinde de absorptie van nucleonen door deze kernen in rekening te brengen, gebruikt men voor de berekening van verstrooiing een complexe V_0 (een zogenaamde optische potentiaal).

We zien dat de naburige energieniveaus een constant verschil van $\hbar\omega$ hebben. De bezetting-sgraad b_n beschrijft de ontaardheid van elke toestand en wordt gegeven door

$$b_n = 2 \sum_{0,1}^n (2l+1) = (n+1)(n+2), \quad (4.33)$$

waarbij l het baanimpulsmoment quantumgetal wordt genoemd, dat de waarden $l = n, n-2, \dots, \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ kan aannemen. Merk op dat de factor 2 voor het sommatieteken in vergelijking (4.33) de twee spintoestanden van het nucleon met spin quantumgetal $m_s = \pm \frac{1}{2}$ verdisconteert, terwijl de ondergrens 0, 1 correspondeert met l respectievelijk even of oneven. Voor de volledigheid merken we op dat het magnetische quantumgetal m_l de waarden $-l \leq m_l \leq l$ bestrijkt.

Het totaal aantal toestanden B_n met een energie $E \leq E_n$ is

$$B_n = \sum b_n = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3). \quad (4.34)$$

De gemiddelde kwadratische straal $\langle r^2 \rangle$ is gelijk aan

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0} \left(n + \frac{3}{2} \right) \quad (4.35)$$

en neemt toe met toenemende n .

Het aantal nulpunten n_r van de radiële golffunctie in het gebied $0 < r < \infty$ wordt gegeven door $n_r = \frac{n-l}{2}$.

De golffuncties en energie eigenwaarden van de gebonden toestanden voor een Woods-Saxon potentiaal moeten numeriek bepaald worden. De ontaarding van de toestanden, die we bij de harmonische oscillator tegen kwamen en die horen bij de verschillende waarden van het baanimpulsmoment, wordt nu opgeheven. De ontaarde toestanden van de harmonische oscillator splitsen op naar volgorde van hun l -waarde, waarbij de niveaus met het hoogste baanimpulsmoment energetisch het diepst liggen. Deze gang van zaken wordt getoond in Fig. 22.

De golffuncties voor de Woods-Saxon potentiaal zijn, zoals Fig. 23 toont, niet erg verschillend van die voor de harmonische oscillator potentiaal. Van dit gegeven wordt vaak profijt getrokken bij de berekening van eigenschappen van kernen.

Echter, ook met enkel een Woods-Saxon potentiaal verkrijgt men niet het correcte niveau-schema en de juiste magische getallen. Het blijkt noodzakelijk om een additionele sterke *spin-baan* koppeling in te voeren. Hierdoor wordt ook de ontaarding van de niveaus met hetzelfde baanimpulsmoment l , maar met verschillende totaal impulsmomenten $j = l \pm \frac{1}{2}$ opgeheven (zie Fig. 22). Meestal werkt men met een spin-baan potentiaal van de volgende vorm,

$$V_{ls}(r) = V_{ls,0} \frac{1}{\hbar^2} (\vec{l} \cdot \vec{s}) R_0^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[1 + e^{\frac{r-R}{a}} \right]^{-1}, \quad (4.36)$$

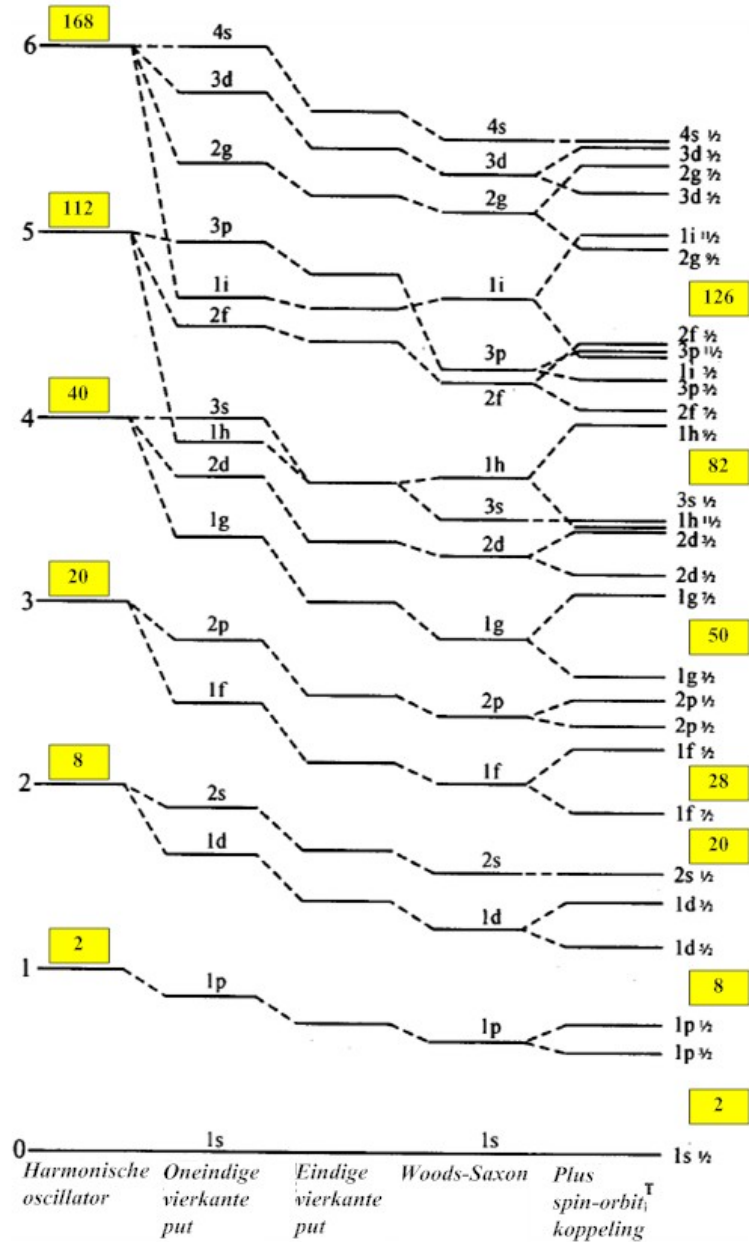


Figure 22. Schematische weergave van de energieniveaus voor een harmonische oscillator, vierkante put, en een Woods-Saxon potentiaal met een spin-baan koppeling.

met als parameters

$$V_{1s,0} \approx 15 \text{ MeV}$$

$$R_0 \approx 1,27 \text{ fm}$$

$$R \approx R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}} \text{ MeV}$$

$$a \approx 0,67 \text{ fm.}$$

(4.37)

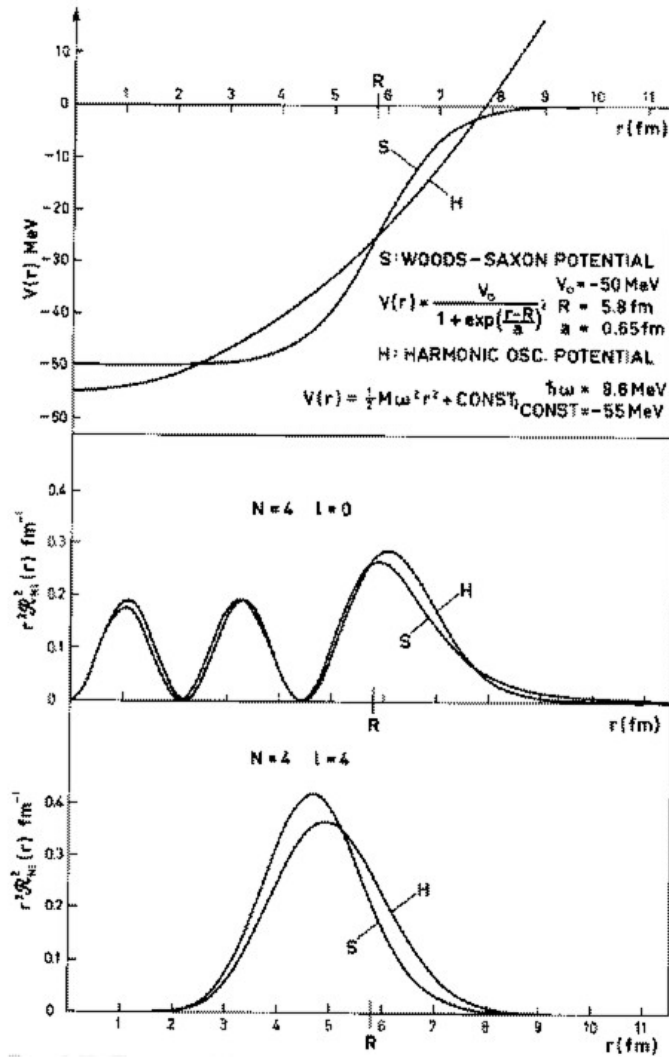


Figure 23. Vergelijking van de harmonische oscillator en Woods-Saxon potentialen (boven) en het radiële deel van enkele golffuncties (midden en beneden).

Voor de verwachtingswaarde van de operator $(\vec{l} \cdot \vec{s})$ geldt

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle &= \frac{1}{2} \{ \langle j^2 \rangle - \langle l^2 \rangle - \langle s^2 \rangle \} = \frac{\hbar^2}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \} \\
 &= \frac{\hbar^2}{2} \begin{cases} l & \text{voor } j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1) & \text{voor } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

De opsplitsing is hiermee bijzonder groot voor niveaus met een groot baanimpulsmoment l . Men vindt voor grotere waarden van het hoofdquantumgetal n telkens een 'indringer' uit de $n+1$ hoofdschil, waarvan de pariteit verschillend is van alle andere niveaus in de schil (zie weer Fig. 22). Tenslotte merken we nog op dat de energieën van de gebonden neutronen iets verschillen van die van de protonen, vanwege de bijdrage van Coulombkrachten.

V. VERVAL VAN KERNEN

We gebruiken de volgende symbolen:

N = het aantal neutronen in een kern; het neutronengetal.

Z = het aantal protonen in een kern; het ladingsgetal.

A = het aantal nucleonen in een kern; $A \equiv N + Z$, het massagetal.

M = massa van het neutrale atoom. Dit wordt meestal met atomaire eenheden aangeduid: ($1 \text{ amu} = 1,66043 \times 10^{-27} \text{ kg} = 0,9321478 \text{ GeV}/c^2$).

We beginnen met het verzamelen van enkele empirische gegevens: welke kernen komen er voor in de natuur? Welke zijn stabiel (een levensduur $\tau > 10^9$ jaar)? Welke vervallen naar instabiele isotopen (kernen met dezelfde lading)?

A. Stabiele kernen en kernverval

In Fig. 24 worden de nu bekende stabiele kernen als functie van hun ladingsgetal en hun neutronengetal gegeven. Kernen die β -instabiel zijn, worden met rood en blauw aangegeven, terwijl α -instabiele kernen met een gele kleur worden aangeduid. Gedurende de laatste decennia lukte het steeds weer om nieuwe, vaak zeer kortlevende, isotopen te produceren. Met zware-ionen versnellers is het de laatste tijd vooral gelukt om een reeks transuranen (elementen met een ladingsgetal groter dan 92) te synthetiseren.

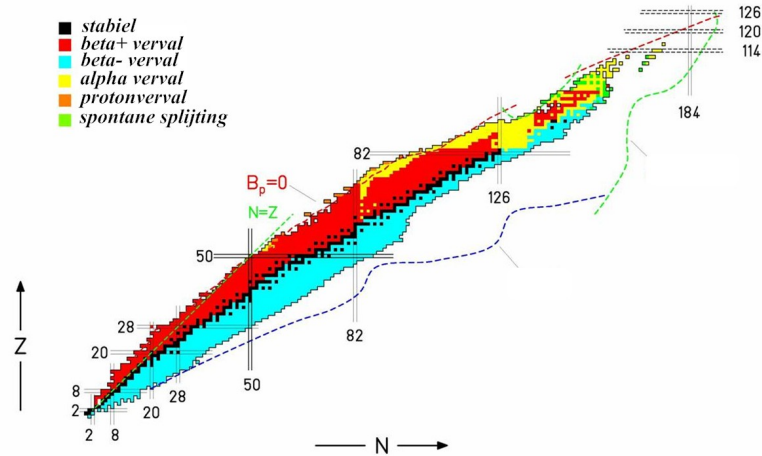


Figure 24. *Overzicht van stabiele en instabiele atoomkernen. De plot toont ladingsgetal versus neutrongetal. De mode van verval is aangegeven.*

Instabiele kernen kunnen op diverse manieren vervallen, zoals weergegeven in Fig. 25. We onderscheiden hierbij de volgende soorten verval:

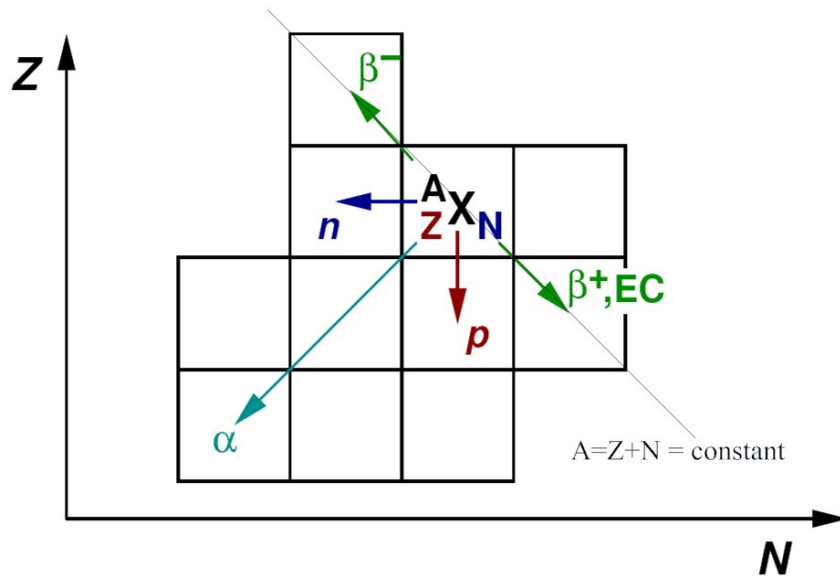
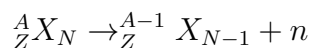


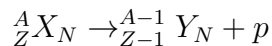
Figure 25. *Overzicht van stabiele en instabiele atoomkernen. De plot toont ladingsgetal versus neutrongetal. De mode van verval is aangegeven.*

- **Neutronemissie**



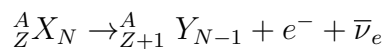
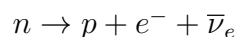
Bij een al te groot neutronenoverschot worden er binnen meestal zeer korte tijd (typisch $\tau < 10^{-16}$ s) neutronen ‘weggedampt’.

- **Protonemissie**



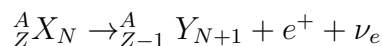
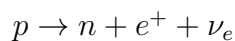
Kunstmatig geproduceerde kernen met een groot protonenoverschot kunnen protonen emitteren.

- **β^- -verval**



Bij kernen met een groot neutronenoverschot en voldoende energie³⁰ verandert er in het kerninwendige een neutron in een proton, waarbij een negatief geladen elektron en een anti-elektronneutrino worden uitgezonden.

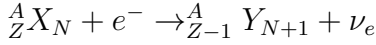
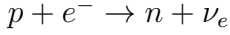
- **β^+ -verval**



³⁰ We zullen later uitleggen wat we hiermee precies bedoelen.

Bij kernen met een groot protonenoverschot en voldoende energie verandert er in het kerninwendige een proton in een neutron, waarbij een positief geladen elektron (positron) en een elektronneutrino worden uitgezonden.

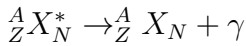
- **Elektronen-invangst**



In plaats van β^+ -verval ziet men in het bijzonder bij zware kernen (waarbij de waarschijnlijkheid dat het elektron zich in de buurt van kern bevindt relatief groot is) of indien de energie nodig voor β^+ -verval niet aanwezig is, vaak elektroneninvangst. In beide gevallen verandert een proton in een neutron.

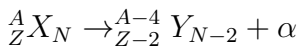
Meestal wordt er een K -elektron ingevangen en het gat in de K -schil wordt vervolgens door een ander elektron gevuld, waarbij karakteristieke Röntgenstraling wordt uitgezonden.

- **γ -verval**



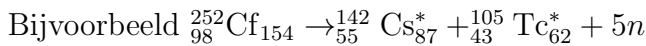
Bij aangeslagen kernen wordt de overtollige energie in de vorm van elektromagnetische straling (γ -quanta met een energie in de orde van 1 MeV) uitgezonden.

- **α -verval**



Elementen met grote A zijn vaak α -instabiel. Dit betekent dat ze ${}^4\text{He}$ kernen emitteren. Dit proces is energetisch gunstiger dan de emissie van enkele nucleonen, omdat het α -deeltje bijzonder sterk gebonden is.

- **Spontane splijting**



De allertzwaarste elementen splijten spontaan in meestal twee lichtere fragmenten. Hierbij worden er ook enkele neutronen geëmitteerd. De fragmenten van de kernsplijting worden meestal eerst β^- -instabiel. De reden hiervoor is dat de zwaarste stabiele kernen naar verhouding veel neutronen $N/Z \approx 1,5$ bevatten, terwijl deze verhouding voor middelzware kernen typisch $N/Z \approx 1,35$ is. Hierdoor worden er middelzware kernsplijtingsproducten gevormd met een neutronenoverschot. Dit feit is ook van betekenis bij de kunstmatige splijting van kernen in kerncentrales (radioactief afval!).

B. Massa, bindingsenergie, Q -waarde, en twee- en drie-deeltjesverval

Volgens de speciale relativiteitstheorie is de *massa* van een deeltje een *Lorentz-invariante scalar*, die karakteristiek is voor het deeltje (je kunt het dus bijvoorbeeld in een tabel opnemen). De relatie tussen massa, m , energie, E , en impuls, p , wordt gegeven door

$$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2. \quad (5.1)$$

Terwijl energie en impuls afhankelijk zijn van het inertiaalsysteem, is de massa altijd hetzelfde (dit wil zeggen *invariant*). In plaats van massa geven we voor een elementair deeltje vaak de *rustenergie*, E_0 . Dat is de totale energie in een referentiesysteem waarin het deeltje in rust is ($\vec{v} = \vec{p} = 0$). We vinden dan de bekende relatie

$$E_0 = mc^2. \quad (5.2)$$

We definiëren het massagetal van het neutrale atoom M in eenheden van $\frac{1}{12}$ van de massa van het neutrale koolstofatoom (^{12}C), m_0 ,

$$M = \frac{\text{Massa van het neutrale atoom}}{\frac{1}{12} \cdot \text{massa van een neutraal } ^{12}\text{C} - \text{atoom}} = \frac{m}{m_0}, \quad (5.3)$$

met $m_0 = 1 \text{ amu} = 1,66043 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Als totale bindingsenergie definiëren we

$$B = (Zm_H + Nm_n - m) \cdot c^2, \quad (5.4)$$

met m_H de massa van het neutrale waterstofatoom, m_n de massa van het neutron en m de massa van het atoom. De totale bindingsenergie is de energie die nodig is om een atoom in waterstofatomen te ontbinden. Voor stabiele kernen is B positief. Het is duidelijk dat B zowel de bindingsenergie van de elektronen in de atoomwolk bevat, als ook de nucleaire bindingsenergie. De eerste kan vaak verwaarloosd worden, zoals het volgende voorbeeld laat zien.

Voorbeeld: Deuterium heeft $B_{\text{elektronen}} = 13,6 \text{ eV}$ en $B_{\text{nucleair}} = 2,22 \text{ MeV}$. De verhouding is dan $B_{\text{elektronen}}/B_{\text{nucleair}} \approx 0,61 \times 10^{-5}$.

Voorbeeld: Uranium heeft $B_{\text{elektronen}} \approx 500 \text{ keV}$ en $B_{\text{nucleair}} \approx 1740 \text{ MeV}$. De verhouding is dan $B_{\text{elektronen}}/B_{\text{nucleair}} \approx 2,9 \times 10^{-4}$.

We vinden hiermee voor de bindingsenergie bij benadering

$$B \approx (Zm_p + Nm_n - m_K) \cdot c^2, \quad (5.5)$$

met m_p de massa van het proton, m_n de massa van het neutron en m_K de massa van de ‘naakte’ kern.

Stel voor dat we een reactie hebben van het type $b + t \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$. Vaak³¹ is in de begintoestand het deeltje t (het target) in rust. Het andere deeltje, $b =$ bundel, kan een primair (elektron, proton, ..) of secundair deeltje (pion, kaon, antiproton, ..) van een deeltjesversneller zijn. De reactie dient te voldoen aan de wet van behoud van energie, impuls, impulsmoment, lading, enz. Wat de energie betreft is de Q -waarde een belangrijke variabele. Het is het verschil in rustmassa’s (mc^2) tussen de begin- en eindtoestand,

$$Q = [(m_b + m_t) - (m_1 + m_2 + \dots + m_n)]c^2. \quad (5.6)$$

³¹ Dat is niet altijd het geval. De belangrijkste uitzondering wordt gevormd door de zogenaamde ‘collider’ experimenten.

Table III. *Enkele typische voorbeelden van het verval van kernen voor verschillende wisselwerkingen.*

Verval	Halfwaarde tijd [s]	Q -waarde [MeV]	Opmerkingen
${}^8\text{Be} \text{ (g.s.)} \rightarrow 2\alpha$	9.7×10^{-17}	0.09	sterk
${}^8\text{Be} \text{ (11.4)} \rightarrow 2\alpha$	1.9×10^{-22}	11.4	sterk
${}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{234}\text{Th} + \alpha$	1.4×10^{17}	4.2	sterk, tunneleffect
${}^{215}\text{Em} \rightarrow {}^{211}\text{Pb} + \alpha$	$\sim 10^{-6}$	8.6	sterk, tunneleffect
${}^{56}\text{Fe}^* \rightarrow {}^{56}\text{Fe} + \gamma$	6.0×10^{-12}	0.84	elm.
${}^{57}\text{Fe}^* \rightarrow {}^{57}\text{Fe} + \gamma$	1.0×10^{-7}	0.014	elm.
${}^{14}\text{C} \rightarrow {}^{14}\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$	1.8×10^{11}	0.16	zwak
${}^{12}\text{N} \rightarrow {}^{12}\text{C} + e^+ + \nu_e$	1.1×10^{-2}	17.3	zwak

Een alternatieve definitie kan verkregen worden door gebruik te maken van de wet van behoud van energie voor de reactie. Als we met T_i de kinetische energie³² in het laboratorium stelsel aangeven (voor het target geldt dan dat $T_t = 0$), vinden we

$$m_b c^2 + m_t c^2 + T_b = m_1 c^2 + T_1 + m_2 c^2 + T_2 + \dots + m_n c^2 + T_n. \quad (5.7)$$

Combineren van beide vergelijkingen geeft

$$Q = T_1 + T_2 + \dots + T_n - T_b. \quad (5.8)$$

Voor een *exotherme* reactie geldt dat de Q -waarde positief is, terwijl voor een *endotherme* reactie de Q -waarde negatief is. In het geval van *elastische verstrooiing* geldt dat $Q = 0$ (voor $n = 2$).

In de kernfysica³³ zijn er veel systemen (kernen) die in de tijd veranderen, en vervallen. De gemiddelde levensduur hangt sterk af van de sterkte van de wisselwerking³⁴ die het verval domineert. Verder is op te merken, dat wanneer de vervaltijd korter wordt (bij hetzelfde type verval), de vervalenergie ofwel Q -waarde groter is.

Tabel III toont enkele vervalsreacties voor kernen. We vinden zeer korte vervaltijden in het geval van de sterke wisselwerking. Het α -verval bij zware kernen is soms met 10 -

³² De *kinetische energie*, T , wordt gedefinieerd als $T \equiv E - E_0 = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - mc^2$, waarbij E de *totale energie* is. In de limiet van de niet-relativistische mechanica geldt dat $T_{\text{nr}} \approx \frac{p^2}{2m}$, terwijl in het ultra-relativistische grensgeval geldt dat $T_{\text{ur}} \approx pc$. Verder gebruiken we vaak de relaties $\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} = \gamma m \vec{v}$ en $E = \gamma mc^2$, waarbij $\gamma = (1 - \beta)^{-\frac{1}{2}}$ en $\beta = \frac{v}{c}$. De relativistisch correcte vorm van Newtons krachtwet wordt gegeven door $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.

³³ En natuurlijk ook in veel andere takken van de natuurkunde! Merk bijvoorbeeld de analogie op met de beschrijving van een gedempte slinger (harmonische oscillator).

³⁴ Voor iemand die de basisbegrippen van de quantummechanica begrepen heeft, is dit het te verwachten resultaat: gouden regel nummer twee van Fermi!

30 ordes van grootte vertraagd, omdat het α -deeltje een potentiaalbarrière doortunnelen moet. Ook bij de elektromagnetische wisselwerking zijn er enkele gevallen met een zeer lange levensduur (de zogenaamde *isomeren*). Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer een γ -quantum een zeer hoog impulsmoment afvoeren moet.

Alle bovengenoemde vervalprocessen voldoen aan een exponentiële vervalwet³⁵. Het aantal vervallen in een ensemble is evenredig met het aantal deeltjes, dat nog niet vervallen is

$$dN = -\lambda N(t)dt \text{ en dus } N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (5.9)$$

De gemiddelde levensduur (die algemeen in de deeltjesfysica gebruikt wordt) bedraagt

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.10)$$

In de kernfysica is het daarentegen gebruikelijk om de halfwaardetijd te geven

$$\tau_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2. \quad (5.11)$$

In het geval dat een deeltje dat zich in rust bevindt, vervalt naar twee deeltjes ($d \rightarrow 1 + 2$), dan geeft het behoud van energie en impuls

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \text{ en } E_1 + E_2 = E_d = m_d c^2. \quad (5.12)$$

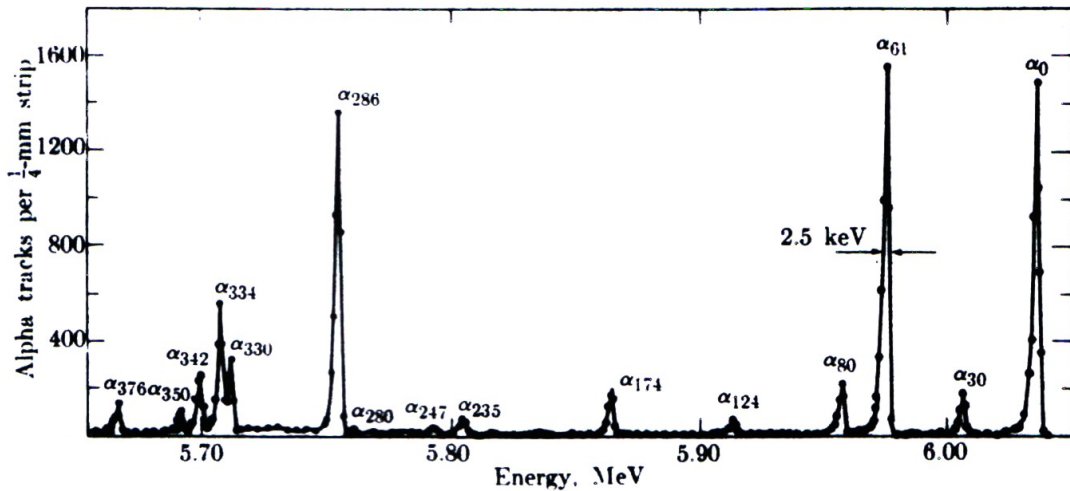


Figure 26. Het energiespectrum voor α -deeltjes afkomstig van het verval van ^{227}Th .

Als voorbeeld zullen we nu het α -verval van een kern bespreken. Daar in dat geval alle kinetische energieën van de deeltjes klein zijn (< 10 MeV) ten opzichte van de rustenergie kunnen we het probleem in de niet-relativistische limiet bespreken en krijgen direct

$$T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} Q \text{ en } T_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} Q, \quad (5.13)$$

³⁵ Afwijkingen van exponentieel verval zijn te verwachten kort na de vorming van het instabiele deeltje ($t \rightarrow 0$), voor extreem lange tijden ($t \gg 0$), of voor overlappende resonanties.

waarbij $Q = (m_d - m_1 - m_2)c^2$. We verwachten dus een *discreet* spectrum voor de energieverdeling van het α -deeltje.

Figuur 26 laat het vervalspectrum zien voor de kern ^{227}Th , en het valt ons meteen op dat we meerdere pieken zien in het spectrum. De reden hiervoor is het feit dat de dochterkern ^{223}Ra meerdere aangeslagen toestanden heeft (zie figuur 27), waardoor E_2 in vergelijking (5.12) meerdere waarden kan aannemen.

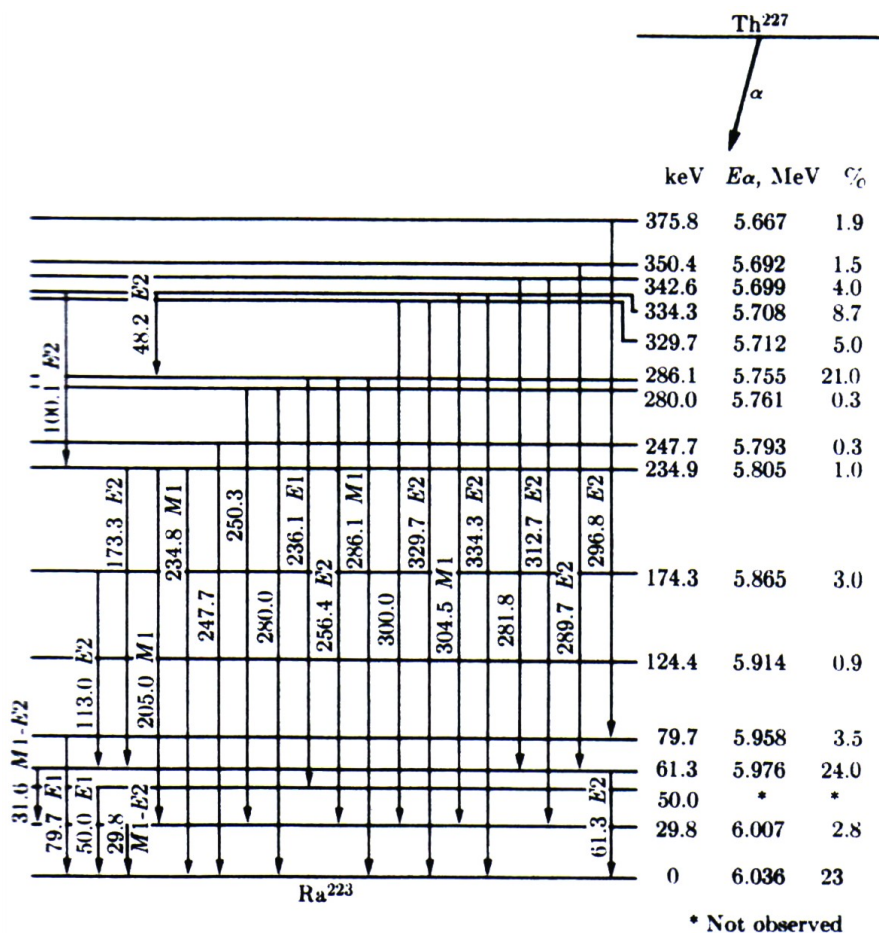


Figure 27. *Energieniveaus voor de dochterkern ^{223}Ra , zoals bepaald uit het spectrum voor α -verval van ^{227}Th .*

We vinden dan dat $E_2 = m_2c^2$ (grondtoestand) + E_x (excitatieenergie). De lijnbreedte (≈ 2.5 keV) wordt gegeven door de resolutie van de spectrometer en het energieverlies van de α -deeltjes in het preparaat. De natuurlijke lijnbreedte is zó klein, dat hij niet gemeten kan worden³⁶.

In het driedeeltjes verval, $d \rightarrow 1 + 2 + 3$, zijn energie en impulsbehoud niet voldoende om de energieën van alle deeltjes eenduidig te bepalen. We verwachten daarom een *continu* spectrum. Interessant is de discussie van het β -verval, omdat het feit dat hier continue

³⁶ We hebben een halfwaardetijd van $\tau_{1/2} = 18$ dagen. Hieruit volgt een natuurlijke lijnbreedte van $\Gamma = 2.9 \times 10^{-22}$ eV.

spectra optreden, Pauli ertoe gebracht heeft, een nieuw ‘onzichtbaar’ deeltje, het neutrino, te postuleren. Figuur 28 toont de gemeten energiespectra³⁷ van het verval ${}^{64}_{29}\text{Cu} \rightarrow {}^{64}_{30}\text{Zn}$

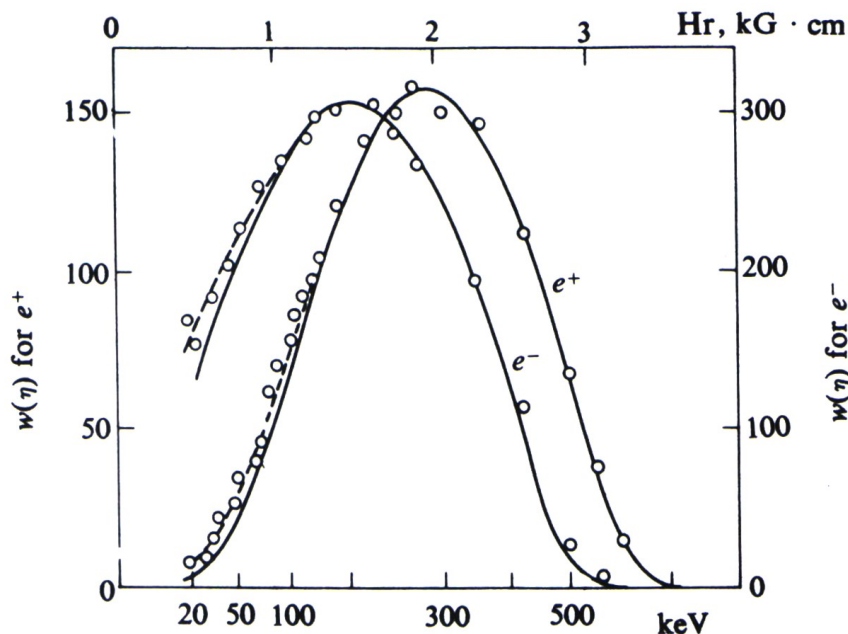


Figure 28. *Energiespectrum van elektronen en positronen afkomstig uit het verval van ${}^{64}\text{Cu}$. De circles corresponderen met de data en de getrokken curves komen overeen met theoretische voorspellingen. Zie ook C.S. Wu en R.D. Albert, Phys. Rev., 75, 315 (1949).*

$+e^- + \bar{\nu}_e$ en het verval ${}^{64}_{29}\text{Cu} \rightarrow {}^{64}_{28}\text{Zn} + e^+ + \nu_e$. De getrokken curves corresponderen met de berekende spectra en tonen goede overeenstemming.

De beide leptonen (elektron en antineutrino, of het positron en neutrino) kunnen koppelen tot een spin 0 (singlettoestand) of een spin 1 (triplettoestand) koppelen. Men spreekt van Fermi- respectievelijk Gamow-Teller overgangen. Voor *toegestane* β -vervallen gelden hiermee de volgende selectieregels,

$$\begin{aligned} \text{Fermi :} & \quad \Delta I = 0 \\ \text{Gamow - Teller :} & \quad \Delta I = 0, 1 \text{ behalve } 0 \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{5.14}$$

De pariteit verandert hierbij niet.

Bij *verboden* β -vervallen dragen de leptonen ook nog baanimpulsmoment l mee. De golf-functie, die men in het matrixelement \mathcal{M}_β dient in te vullen, kan dan niet mee als constant worden aangenomen. De Kurieplot correspondeert dan niet meer met een rechte en de levensduur neemt met toenemende l snel toe. Bij oneven l verandert de pariteit.

³⁷ Deze data zijn van mevrouw Wu, die later een aanbrekend werk verrichtte met haar metingen aan pariteitschending van de zwakke wisselwerking.

C. Penetratie van een potentiaalbarrière

Hier trachten we uit te leggen waarom zware kernen niet *direct* vervallen, ofschoon de wetten van behoud van energie en impuls alfa-verval of splijting in twee of meer gelijk grote fragmenten, zonder meer toestaan. Tegelijkertijd zullen we een verklaring vinden voor het feit dat fusiereacties pas bij hoge temperatuur verlopen. In beide gevallen moet namelijk eerst door de sterk afstotende Coulombpotentiaal tussen de positief geladen fragmenten ‘getunneld’ worden, zoals schematisch weergegeven in Fig. 29.

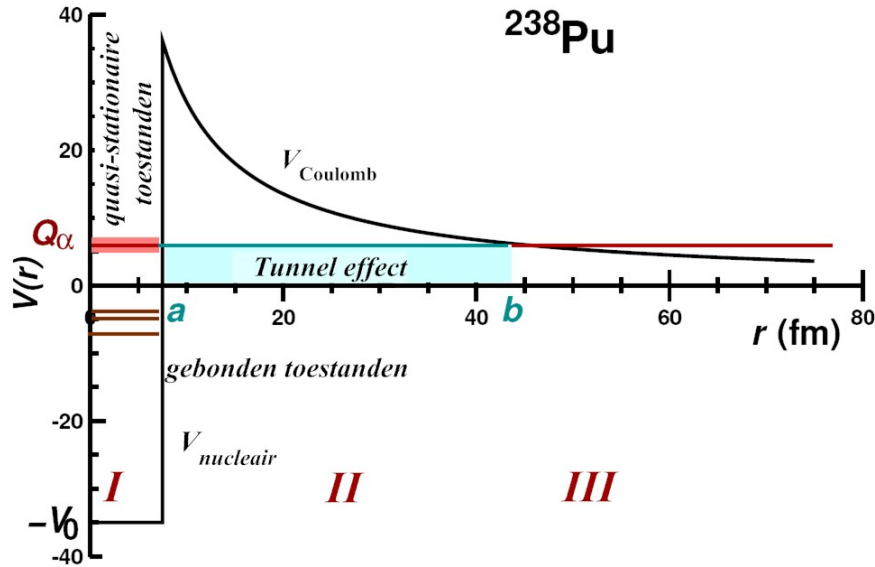


Figure 29. Een alfa-deeltje kan een Coulombbarrière overwinnen door middel van het tunneleffect. De lengte van de barrière is $L = b - a$.

Als eerste stap proberen we te begrijpen hoe groot de waarschijnlijkheid is, dat een deeltje met impuls $p = \hbar k$ een rechthoekige potentiaalbarrière met hoogte V_0 en breedte L kan overwinnen. Hiertoe introduceren we de afkortingen

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}v(x), \quad E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \quad (5.15)$$

en onderscheiden de gebieden I, II, en III, die zijn aangegeven in Fig. 29. We lossen vervolgens de één-dimensionale Schrödingervergelijking

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = (v - k^2)\psi = \begin{cases} -k^2\psi & \text{in I en in III} \\ (v_0 - k^2)\psi & \text{in II,} \end{cases} \quad (5.16)$$

op, met de volgende randvoorwaarden:

I: We nemen aan dat we een naar rechts bewegende golf

$$A_1 e^{ikx} \quad (5.17)$$

hebben, waarvan een deel

$$B_1 e^{-ikx} \quad (5.18)$$

gereflecteerd wordt.

II: De amplitude van de golf in de potentiaalbarrière neemt exponentieel af en er geldt

$$\psi(x) = A_2 e^{\epsilon x} + B_2 e^{-\epsilon x}, \quad (5.19)$$

met

$$\epsilon = +\sqrt{v_0 - k^2}, v > k^2. \quad (5.20)$$

III: In dit gebied treffen we de deeltjes aan, die het gelukt zijn om de barrière te overwinnen. Dit wordt weergegeven met een naar rechts lopende vlakke golf

$$\psi(x) = A_3 e^{ikx}. \quad (5.21)$$

We eisen dat de golffunctie $\psi(x)$ en haar afgeleide $\psi'(x)$ continue zijn voor $x = 0$ en $x = L$ en vinden

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2 \\ ik(A_1 - B_1) &= \epsilon(A_2 B_2) \\ A_2 e^{\epsilon L} + B_2 e^{-\epsilon L} &= A_3 e^{ikL} \\ \epsilon(A_2 e^{\epsilon L} - B_2 e^{-\epsilon L}) &= ik A_3 e^{ikL}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Uit deze vergelijkingen kunnen we B_1 , A_2 , B_2 en A_3 bepalen indien A_1 bekend is. In het bijzonder verkrijgen we voor de *transmissiecoëfficiënt* T de uitdrukking

$$T \equiv \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 \approx \left(\frac{4\epsilon k}{\epsilon^2 + k^2} \right)^2 e^{-2\epsilon L} \quad \text{voor } \epsilon L \gg 1. \quad (5.23)$$

Met name de exponentiële factor is belangrijk, en die werd voor het eerst door Gamow ingevoerd,

$$G = 2\epsilon L = 2\sqrt{v_0 - k^2}L = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}L. \quad (5.24)$$

Voor een niet-rechthoekige barrière geldt bij benadering

$$\begin{aligned} T &\approx e^{-G} \\ G &= \frac{2}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m[V(x) - E]} dx. \end{aligned} \quad (5.25)$$

De integraal omvat het klassiek verboden gebied van a tot b (zie Fig. 29).

Voor het penetreren van de Coulombbarrière vinden we

$$\begin{aligned} G &= \frac{2}{\hbar} \int_{a=R}^b \sqrt{2m \left[\frac{Z_b Z_t \alpha \hbar c}{r} - E \right]} dr \\ &= \sqrt{\frac{8mc^2 Z_b Z_t \alpha b}{\hbar c}} \left(\arccos \sqrt{\frac{R}{b}} \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right), \end{aligned} \quad (5.26)$$

waarbij R de straal van de kern is en

$$b = \frac{Z_b Z_t \alpha \hbar c}{E} \quad (5.27)$$

de bovengrens van integratie. Voor kleine energieën,

$$E \ll \frac{Z_b Z_t \alpha \hbar c}{R}, \quad (5.28)$$

geldt $b \gg R$, waarmee we vergelijking (5.26) kunnen vereenvoudigen tot

$$G = A - B\sqrt{R}, \quad (5.29)$$

met

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{2\pi^2 m c^2 Z_b Z_t \alpha b}{\hbar c}} = \pi \alpha Z_b Z_t \sqrt{\frac{2m c^2}{E}} \\ B &= \sqrt{\frac{32m c^2 Z_b Z_t \alpha}{\hbar c}}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

1. Levensduur voor α -verval

Fig. 30 toont de levensduur van enkele α -instabiele kernen. Men vindt de volgende empirische relatie tussen de halfwaardetijd $t_{\frac{1}{2}}$ (in jaren), het ladingsgetal Z van de α -emitter en de energie E (in MeV) van het α -deeltje,

$$\log t_{\frac{1}{2}} \approx 1,6 \left(\frac{Z}{\sqrt{E}} - Z^{\frac{2}{3}} \right) - 28,9. \quad (5.31)$$

Merk op dat de levensduur met een factor 10^{20} verandert, terwijl de energie E slechts met een factor 2 verandert.

Met de in de vorige paragraaf afgeleide relatie voor de Gamowfactor kunnen we dit merkwaardig verband makkelijk begrijpen: we nemen aan dat er in het midden van de kern een α -deeltje met snelheid v beweegt. Dit deeltje botst met een frequentie van

$$\frac{v}{R} \approx 10^{21} \text{ Hz} \approx 3,2 \times 10^{28} \text{ per jaar} \quad (5.32)$$

tegen de Coulombbarrière. De waarschijnlijkheid dat het door de barrière heen kan tunnelen bedraagt e^{-G} . Op deze wijze vinden we voor de vervalsconstante

$$\lambda = \frac{v_0}{R} e^{-G}, \quad (5.33)$$

en de halfwaardetijd bedraagt

$$\begin{aligned} t_{\frac{1}{2}} &= \ln 2 \left(\frac{r}{v_0} \right) e^{+G} \\ G &= 2\pi\alpha\sqrt{2m_\alpha c^2} \frac{Z}{\sqrt{E}} - \sqrt{\frac{64m_\alpha c^2 \alpha}{\hbar c}} Z^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}}, \\ R^{\frac{1}{2}} &\approx 1,2 \cdot A^{\frac{1}{6}} \approx 1,2(2,6 \cdot 6)^{\frac{1}{6}} \approx 1,4 \cdot Z^{\frac{1}{6}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

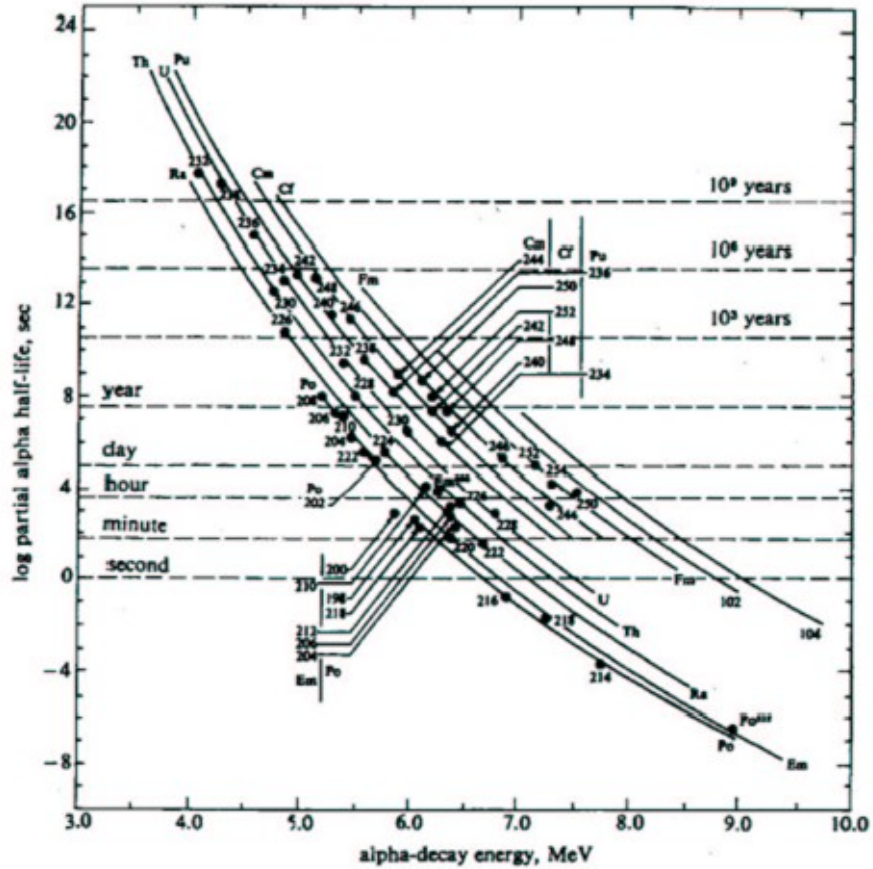


Figure 30. Logaritme van de levensduur van kernen als functie van de energie van het alfa-deeltje.

Als we de numerieke waarden voor de constanten invullen, vinden we, ondanks de grove benaderingen,

$$\log t_{\frac{1}{2}} \approx -28,7 + 1,7 \left(\frac{Z}{\sqrt{E}} - Z^{\frac{2}{3}} \right), \quad (5.35)$$

dus in overeenstemming met de eerder genoemde empirische relatie.

2. Fusiereacties

Om twee geladen deeltjes, die met lage energie op elkaar botsen, te laten fuseren, moet er weer een Coulombbarrière overwonnen worden. De werkzame doorsnede heeft het volgende verband,

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E}}}, \quad (5.36)$$

met E_G de zogenaamde Gamowenergie,

$$E_G = \frac{mc^2}{2} (2\pi\alpha Z_b Z_t)^2. \quad (5.37)$$

De S -factor, $S(E)$, hangt in de regel slechts zwak van de energie af. Typische waarden zijn:

$$\begin{aligned} p + p &\rightarrow d + e^+ + \nu : S(0) = 3,8 \times 10^{-25} \text{ MeV} \cdot \text{barn} \\ d + t &\rightarrow \alpha + n : S(0) = 8,1 \text{ MeV} \cdot \text{barn}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

In het eerste voorbeeld verloopt de reactie via de zwakke wisselwerking (bijvoorbeeld de pp -cyclus in de zon), terwijl in het tweede voorbeeld hij verloopt via de sterke wisselwerking (misschien in toekomstige fusiereactoren?). In ieder geval zorgt de Gamowfactor ervoor, dat slechts dan voldoende energie met dergelijke reacties geproduceerd kan worden, als er een voldoende hoge temperatuur ($T \geq 10^7$ K) is en als er over langere tijd een voldoende grote deeltjesdichtheid gerealiseerd kan worden.

D. Massa's van isobaren en beta verval van kernen

De massa's (of bindingsenergieën) van *stabiele* kernen kunnen met het vloeistofdruppelmodel berekend worden. In het volgende willen we ons ook bezig houden met *instabiele* kernen. De discussie van de massa's van isobaren zal ons tonen welk ladingsgetal Z hoort bij de stabiele isobar. In een volgende stap zullen we de Q -waarden van mogelijke β -vervalen afleiden.

Voor de massa van een atoom met een ladingsgetal Z en een massagetal A vinden we, als we de paarenergie verwaarlozen,

$$M(A, Z) = Zm_H + (A - Z)m_n - \frac{1}{c^2} \left[a_V A - a_F A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} \right]. \quad (5.39)$$

De stabiele isobaar is de kern die het meest gebonden is. We zoeken dus het minimum van $M(A, Z)$ voor vaste A ,

$$\frac{\partial M}{\partial Z} \Big|_{A=\text{const}} = (m_H - m_n) + \frac{1}{c^2} \left[a_C \frac{2Z-1}{A^{\frac{1}{3}}} - 4a_A \frac{(A-2Z)}{A} \right]. \quad (5.40)$$

Indien we bovenstaande uitdrukking gelijk aan nul stellen en vervolgens oplossen voor A , dan vinden we het ladingsgetal Z_0 van de stabiele isobar,

$$Z_0 = \frac{0,7825 + 4a_A + \frac{a_C}{A^{\frac{1}{3}}}}{8 \cdot \frac{a_A}{A} + 2 \cdot \frac{a_C}{A^{\frac{1}{3}}}} \approx \frac{A + 0,0075A^{\frac{2}{3}}}{1,983(1 + 0,00757A^{\frac{2}{3}})}. \quad (5.41)$$

We merken op dat geldt

$$\frac{\partial^2 M}{\partial Z^2} \Big|_{A=\text{const}} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{2a_C}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{8a_A}{A} \right], \quad (5.42)$$

en vinden dat de massa van een verzameling oneven-even isobare kernen als functie van Z de vorm van een parabool heeft. Dit is weergegeven in Fig. 31.

Elke isobar, waarvan de massa groter is dan die van de meest stabiele, zal door β -verval overgaan in zijn energetisch gunstigere buurkern. Hierbij verandert de kernlading Z bij elk

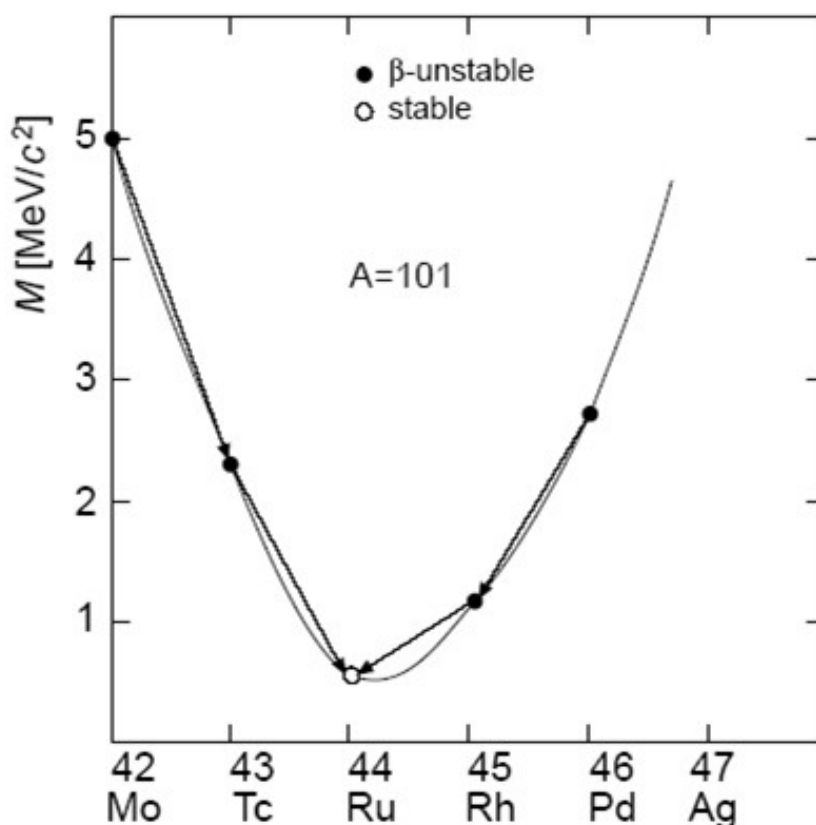


Figure 31. Massa's van de isobaren met atoomgetal $A = 101$. Een en ander is schematisch naar aanleiding van de massaformule weergegeven.

verval steeds met een eenheid en wel neemt Z bij β^- -emissie met 1 toe, bij β^+ -emissie of elektronvangst met 1 af. Bij kernen met oneven A bestaat er slechts één stabiele isobar³⁸.

Bij kernen met even massagetal, dus bij even-even of oneven-oneven kernen, krijgen we vanwege de bijdrage van de paarenergie $\pm\Delta$ twee verschillende parabolen. Dit is weergegeven in Fig. 32. De vervalstappen voeren ons afwisselend tussen de bovenste en onderste parabool. De vervalstetens eindigen steeds op de onderste parabool: er bestaan geen stabiele oneven-oneven kernen³⁹. Daarentegen kunnen er meer dan een stabiele even-even kernen bestaan (zie Fig. 32). In het geval dat er twee of meer stabiele even-even kernen bestaan, bestaan er ook oneven-oneven kernen met β^- en β^+ emissie.

Indien we de bindingsenergieën van de elektronen verwaarlozen, kunnen we de Q -waarden

³⁸ Er bestaan enkele uitzonderingen die de regel 'bevestigen', zoals bijvoorbeeld de kern ${}_{48}^{113}\text{Cd}$ en ${}_{49}^{113}\text{In}$. Hierbij is de vervalenergie zó klein ($Q_\beta = 0,28$ MeV) en het verschil in spin tussen de kernen zó groot ($\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{9}{2}^+$), dat het β^- -verval van ${}^{113}\text{Cd}$ buitengewoon langzaam verloopt: de halfwaardetijd bedraagt $\tau_{\frac{1}{2}} \approx 3 \times 10^{15}$ jaar!

³⁹ Uitzonderingen zijn de lichte kernen ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$, ${}^{14}\text{N}$, waarvoor de massaformule niet geldt.

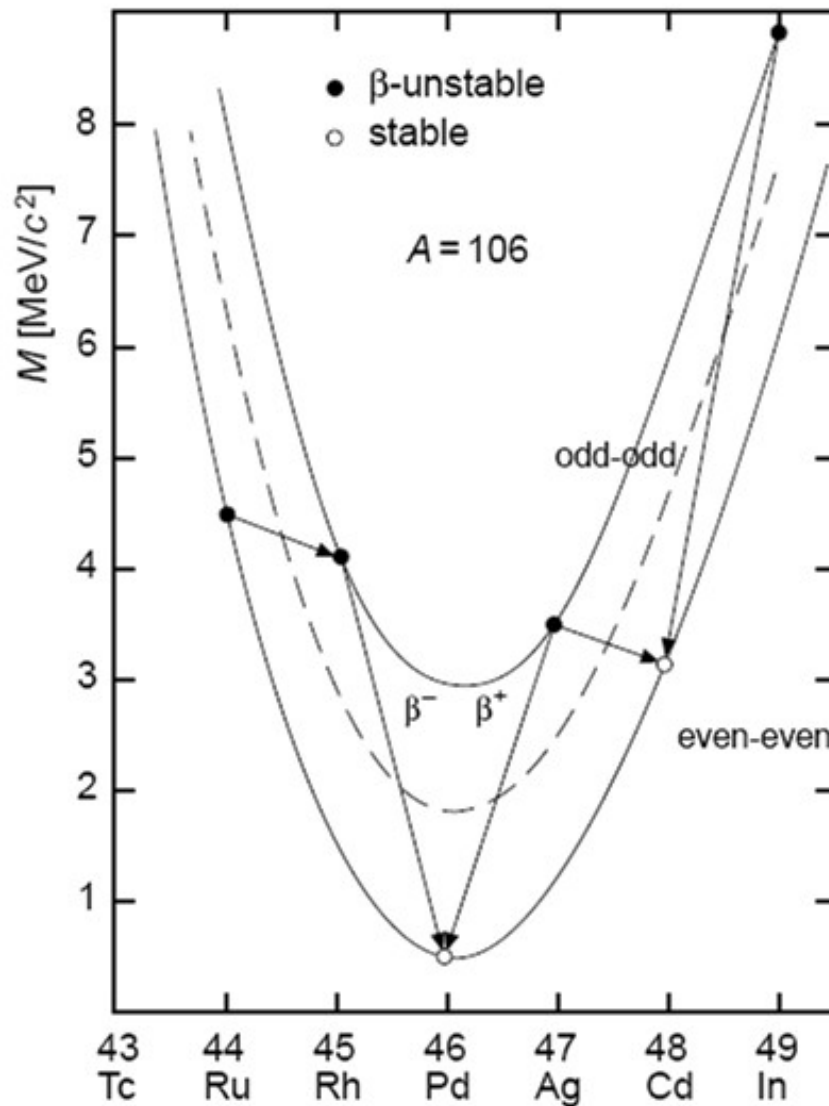


Figure 32. Massa's van de isobaren met atoomgetal $A = 106$. Een en ander is schematisch naar aanleiding van de massaformule weergegeven.

van de verschillende β -vervalen eenvoudig uitrekenen. De diverse vervalprocessen zijn schematisch weergegeven in Fig. 33.

We vinden voor de Q -waarden:

1. β^- -verval

Hiervoor geldt

$$Q \approx [M(Z, A) - M(Z + 1, A)] c^2. \quad (5.43)$$

2. β^+ -verval

Hiervoor geldt

$$Q \approx [M(Z, A) - M(Z - 1, A) - 2m_e] c^2, \quad (5.44)$$

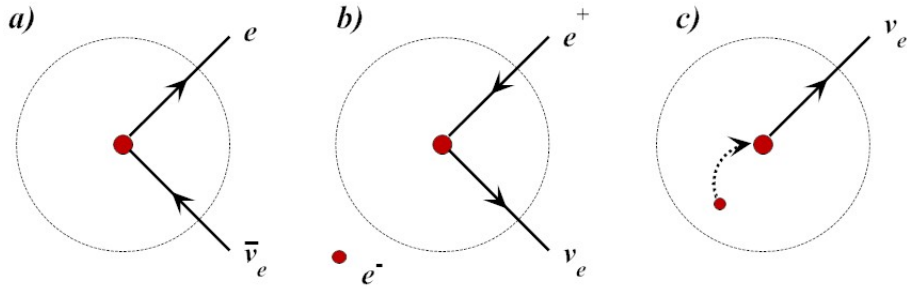


Figure 33. *Diverse zwakke vervalprocessen: a) het β^- -verval, waarbij er een enkelvoudig geïoniseerd atoom ontstaat met massa $M^+(Z+1, A) \approx M(Z+1, A) - m_e$ en een vrij elektron met massa m_e ; b) het β^+ -verval, waarbij er een atoom ontstaat met een overbodig elektron met massa $M^-(Z-1, A) \approx M(Z-1, A) + m_e$ en een positron met massa m_e ; c) elektronvangst, waarbij het atoom neutraal blijft, wanneer een kern een elektron invangt. Het atoom is in een aangeslagen toestand met massa M^* en er geldt $M^*(Z-1, A) \approx M(Z-1, A)$.*

waarbij $2m_e c^2 \approx 1,02 \text{ MeV}$.

3. Elektronvangst

Hiervoor geldt

$$Q \approx [M(Z, A) - M(Z-1, A)] c^2. \quad (5.45)$$

Het is dus mogelijk, vooral in de buurt van de meest stabiele isobaren, waarbij het massaverschil gering is, dat elektronvangst optreedt, terwijl het β^+ -verval energetisch ‘verboden’ is. Om de exacte Q -waarden te verkrijgen, dienen we ook rekening te houden met de bindingsenergieën van de elektronen. We moeten dan de energieschema’s van de desbetreffende atomen bestuderen.