Fredholm, ecuaciones integrales y álgebra lineal

Marcela Martins, Fernando Acero *

Resumen

Este artículo presenta la genial génesis del tratamiento de las ecuaciones integrales estrechamente vinculadas al álgebra lineal en espacios de dimensión finita. En § 1 se sitúa la importancia de la teoría de Fredholm en la ingeniería, en § 2 se la destaca como fuente generadora de los principales tópicos del análisis funcional, en § 3 se establecen las restricciones del tratamiento, en § 4 se presenta el lenguaje en el que reside la teoría expuesta en § 5 que incluye una prueba de la *alternativa de Fredholm* para el caso de núcleos separables en § 6, las nociones de bifurcación y espectro se tratan en § 7–8. Finalmente, § 9 señala la dirección hacia la que se orientan las extensiones a clases más inclusivas de espacios funcionales, y en § 10 algunas referencias bibliográficas con material desarrollado en un amplio rango de niveles.

§ 1. Introducción

Erik Ivar Fredholm

En un listado de tópicos que no pudiesen estar ausentes de cualquier especialidad de la ingeniería, seguramente hallaríamos el de las ecuaciones diferenciales ¿estaría también el de las ecuaciones integrales? Si juzgamos por su presencia en el currículum de las carreras de ingeniería en nuestro medio, la respuesta es negativa. Aunque pasáramos por alto la estrecha relación entre ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales[1] , convendría tener presente que la teoría surge a principios del siglo XX para satisfacer necesidades de la ingeniería, como surge del título del artículo de Erik Ivar Fredholm (1866-1927): *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet.* La siguiente lista de matemáticos impresiona: Volterra, Neumann, Schwarz, Riemann, Hadamard, Picard, Poincare; pues todos ellos habían obtenido resultados que ahora resultaban ser solamente especies del género más amplio que exponía el matemático sueco: las ecuaciones integrales de Fredholm, que hicieron un lugar a Suecia en el carácter de absoluto dominio franco-germano de la disciplina[2] .

Un breve y aproximado recorrido cronológico puede ayudar a situarnos en la magnitud y alcance del artículo de Fredholm. Si dejamos aparte las siempre omnipresentes

---

* Docentes de la Facultad de Ingeniería - UP

1. Cf. KOLMOGOROV, A. y FOMIN, S. (1975): Cáp. X, § 1. 3, p. 506; BRAUN, M. (1993): Cap. I, § 10, p. 69; BIRKHOFF, G. & ROTA, G. C. (1989): Cáp. 6, § 6, pp. 184-185.

2. Cf. RÍBNIKOV, K. (1991): pp. 381-382; O’ CONNOR, R y ROBERTSON E. (2002): p. 1.; ZEILON, N. (2007): II; BALIAN, R. (1994): pp. 25-30.

y universales contribuciones de Euler que hacia 1737[3] ya utilizaba en la resolución de ecuaciones diferenciales las transformaciones integrales que hoy conocemos como de Laplace con sus transformadas de la forma [1], posiblemente podamos decir que las primeras ecuaciones integrales surgen en Francia hacia 1811, como es el caso de expresión [2], que fuera resuelta por Fourier mediante la expresión [3], hacia 1823 tenemos la ecuación integral de Abel dada por [4] y del que dio la solución [5], y que forman parte de un tipo más amplio de ecuaciones integrales conocidas como de Volterra, de la que se tienen las variantes de primera especie [6] y de segunda especie [7].

[1] $$f(p) = \int_c u(t)\, e^{-pt}\, dt$$

[2] $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, e^{ixy}\, dy$$

[3] $$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx$$

[4] $$f(x) = \int_a^x \frac{u(y)}{(x-y)^{\alpha}}\, dy \qquad ,0 < \alpha < 1,\ \ f(a^+) = 0$$

[5] $$u(y) = \frac{\text{sen}\ \pi\alpha}{\pi} \int_a^y \frac{f'(x)}{(y-x)^{1-\alpha}}\, dx$$

[6] $$\int_a^x K(x,y)\, u(y)\, dy = f(x)$$

[7] $$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,y)\, u(y)\, dy$$

Que las cuatro últimas integrales a su vez quedaran incluidas en una clase mayor que las unificaba con una teoría común a todas ellas, no podía sino causar un alto impacto. Un habitante ilustre de Könisberg[4] , David Hilbert, presenció en el Seminario de Hilbert, en Götingen (invierno de 1901) la ponencia de un estudiante escandinavo (E. Holmgrem), que resumía los trabajos de su profesor en Estocolmo: Fredholm. Pues a Hilbert no se le pasó por alto la importancia de la teoría de Fredholm (los Espacios de Hilbert[5] fueron el lugar natural hacia el que fluyó la teoría, y entre 1904 y 1910 Hilbert

3. Cf. REY PASTOR, J. PI CALLEJA, P. y TREJO, C. (1965): XXXIX, Nota VIII, p. 487.

4. Könisberg, en la Prusia oriental, ha sido una cuna de asombrosa fecundidad: allí nacieron Immanuel Kant, Karl Neumann, Otto Hesse, Gustav Kirchhoff, Lipschitz... Cf. [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BirthplaceMaps/Places/Konigsberg.html]; BOYER, C., MERZSBACH, U. (1989): p. 688; pp. 679-680.

5. Cf. MÁSLOV, V. P. (1982): Cap. 2, § 3, pp. 137-144; SOBOLIEV, V. y LUSTERNIK, L. (1999): Chapitre. II, §3, pp. 84-93.

publicó cuatro artículos sobre las ecuaciones integrales en el Götingen Nachrichten, que ya sientan de modo irreversible las visiones propias del análisis funcional), dando impulso a lo que se convirtió en el mayor objeto de investigación durante todo el primer cuarto del siglo[6] , *desarrollándose por decenios, siendo considerada una herramienta universal para la resolución de los problemas de la ingeniería con condiciones de frontera*[7] ¿Está al alcance de un estudiante de ingeniería que no ha seguido un curso de análisis funcional? ¿Le es de alguna utilidad? Este trabajo constituye una respuesta implícita a ambas preguntas.

§ 2. El objeto

Un vistazo a las fechas anotadas consignadas en § 1 basta para comprender que ha pasado ya mucho tiempo de tales desarrollos, y no creo imposible que alguien se preguntara si merecen la atención del que se está formando en la ingeniería, como lo hiciera aquel estudiante de epistemología que consideraba poco menos que inútil intentar sacar algo de un *tipo que vivió hace ya más de dos mil años y no conoció la ciencia moderna*[8] . El objeto de este trabajo es defender la afirmación de que no es despreciable lo que un estudiante de ingeniería puede obtener de un tal Fredholm; aunque la defensa podría sostenerse desde diversas aproximaciones, nos limitaremos a enfocar la fertilidad que surge de la asociación de la teoría de Fredholm con el álgebra lineal, llave directa al cálculo numérico potenciado por la tecnología actual. En una palabra, si a una ecuación integral, por lo general de extrema complejidad, puede corresponderle un sencillo sistema de ecuaciones lineales, la complejidad se habrá diluido. En ese paso de lo infinito a lo finito *también fue Hilbert el legislador por excelencia*[9] . Así, el foco está menos en las ecuaciones integrales lineales de Fredholm y el álgebra lineal en espacios vectoriales de dimensión finita, que en la intuición de la *analogía*[10] que se ha explotado entre ellas; una extensión muy breve permite presentar la noción bifurcación.

§ 3. Las limitaciones

Hemos sido deliberadamente vagos al momento de precisar los términos; ¿en qué sentido se 'asemeja' una ecuación integral a un sistema lineal? ¿Qué quiere decir que la solución del problema lineal es una *aproximación* de la correspondiente ecuación integral? No es difícil contestarlo conceptualmente, todo depende de la medida que se utilice para definir el tamaño de una función y la distancia entre dos funciones esto es de lo que llamamos una *norma*.

---

6. Cf. BOYER, C., MERZSBACH, U. (1989): p. 688; O' CONNOR, R y ROBERTSON E. (2002): p. 2; RÍBNIKOV, K. (1991): p. 383; BOMBAL, F. (2003): p. 3; BOURBAKI, N. (1972): pp. 3-28.
7. Cf. GARDING L. (1998): p. 7.
8. Aunque el *tipo* fuese el mismo Platón, Cf. FEYERABEND, P. (1991): Primer Diálogo, Jack, p. 11.
9. DIEUDONNÉ, J. (1976): p. 313.
10. Cf. LÓPEZ, C. (2007): p. 35.

Ahora bien, una *norma* asegura axiomáticamente un conjunto de transformaciones legítimas sin especificar qué tipo específico de norma se está empleando, y el punto clave es que al momento de decidir una, quedan limitadas las funciones que resultan admisibles como solución de una ecuación integral. Se comprende de inmediato que el punto no es menor, como tampoco lo es en la aritmética elemental, donde la solución de la ecuación cuadrática $2x^2 + 3x - 2 = 0$ depende del conjunto del que consideremos admisible extraer las soluciones: ninguna solución en el conjunto de los números naturales, una (el valor –2) en el conjunto de los enteros, dos (los valores –2 y ½) en el conjunto de los números racionales, y ya nada se añade aunque ampliemos el conjunto a los números reales.

La analogía anterior alcanza para ver que, por lo general, ampliar el conjunto admisible de soluciones carga un precio implícito en la refinación de la estructura conceptual necesaria para definirla. En un nivel muy amplio de generalidad tendríamos espacios topológicos[11] (donde hasta la misma *norma* ha sido eliminada), otros intermedios utilizan una medida de Lebesgue[12] resultando así las ecuaciones integrales de Fredholm en L^1, L^2, L^p, o bien limitarnos a la norma del supremo, que posiblemente no sea tan exigente con la intuición en una primera lectura[13].

Aquí preferimos recordar la observación que, del abate Terrasson, nos recuerda Kant: *si se mide la magnitud de un libro no por el número de sus páginas sino por el tiempo que se necesita para comprenderlo... más de un libro resultaría mucho más corto si no fuera tan corto*[14]; pues nuestro artículo no será tan breve, intentando generar una comprensión intuitiva de la idea tal como fue explotada por sus creadores, omitiendo casi todas las pruebas, las que pueden encontrarse sin dificultad en la bibliografía a la que remitimos. También, y conforme a nuestro objetivo, el artículo no se construye sobre los sillares del análisis funcional, aunque se lo señala como el lenguaje en el que los hechos adquieren su pleno sentido.

§ 4. Definiciones, notación y un ejemplo

Representaremos con una letra minúscula en **negrita** un elemento del espacio vectorial R^n, de modo que **u** es una matriz columna cuyas componentes designamos con u_i, siendo i la variable indicial que toma valores i = 1, 2, ..., n; las **mayúsculas en negrita** las reservamos para designar una matriz del espacio R^{nxn}, de modo que **K** es una matriz cuadrada en cuya fila i, columna j se halla el elemento K_{ij}; con $\mathbf{K}^t$ designamos la matriz transpuesta de la matriz **K**, esto es $(\mathbf{K}^t)_{ij} = K_{ji}$. Con la expresión K_i designamos la

11. ARMSTRONG, M. A. (1991): Caps. 2-3, pp. 27-65.

12. SOBOLIEV, V. y LUSTERNIK, L. (1999): Chapitre. I, §, pp. 12-20.

13. PIPKIN, A. C. (1991): I–II, pp. 1-42; REY PASTOR, J. et al (1965): Ap. II, §§1-6, pp. 549-586; PRZEWORSKA-ROLEWICZ, D. y ROLEWICZ, S. (1998): Part D, Chapter I, §§1-5, pp. 319-330; KOLMOGOROV, A. y FOMIN, S. (1975): Cap. X, § 3, pp. 507-527.

14. KANT, I. (2004): Crítica de la razón pura. Prólogo de la primera edición. Buenos Aires: Libertador.

columna i-ésima de la matriz **K**. Finalmente, en R^n definimos el producto interno canónico como la función (,): $R^n \times R^n \longrightarrow R$:

[1] $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^t \mathbf{v}$ Producto interno en R^n

Con esta notación, resulta inmediato que se verifica, para toda matriz **K** y cualquier par de vectores **u**, **v** la identidad [2]

[2] $(\mathbf{u}, \mathbf{K}\,\mathbf{v}) = (\mathbf{K}^t \mathbf{u}, \mathbf{v})$ Prueba: $(\mathbf{u}, \mathbf{K}\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}^t\,\mathbf{K}\,\mathbf{v} = \mathbf{u}^t\,(\mathbf{K}^t)^t\,\mathbf{v} = (\mathbf{K}^t \mathbf{u})^t\,\mathbf{v} = (\mathbf{K}^t \mathbf{u}, \mathbf{v})$

Llamando V al espacio de las funciones continuas[15] en un intervalo [a, b], y representaremos con una letra minúscula un elemento cualquiera de V, de manera que u es el nombre de una función continua u: $[a, b] \longrightarrow R$; definimos el producto interno en el espacio V como la función (,): $V \times V \longrightarrow R$:

[3] $(u, v) = \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx$ Producto interno

Sean dados los intervalos $\Omega_1 = [a, b]$, $\Omega_2 = [a, b]$, el rectángulo $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, el campo escalar K definido en el rectángulo Ω, esto es $K: \Omega \longrightarrow R$ que consideraremos de cuadrado integrable en Ω. Sean además f una dada función escalar continua en [a, b]. Llamamos a [4] ecuación integral de Fredholm de primera especie, y a [5] ecuación integral de Fredholm de segunda especie; en ambos casos, resolver la ecuación integral consiste en hallar una función escalar u definida en el intervalo [a, b] tal que la igualdad se verifique para todo x en ese intervalo; como en la analogía aritmética que propusimos en § 3, el conjunto en el que consideremos admisible buscar tales soluciones puede ser muy diverso: lo llamaremos W. El campo escalar K es el *núcleo* o *kernel* de la ecuación de Fredholm.

[4] $\int_a^b K(x, y)\, u(y)\, dy = f(x)$ Fredholm primera especie

[5] $u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)\, u(y)\, dy$ Fredholm segunda especie

Si en beneficio de la analogía que nos ocupa nos permitimos cierto abuso de la notación, utilizamos el mismo símbolo K para designar el operador que nos convierte toda función u en su transformada integral con núcleo K (dejamos que sea el contexto el que las diferencie refiriéndonos al operador K o al kernel K), podemos definir el operador $K: W \longrightarrow W$ tal que para toda función u en W se tiene [6], cualquiera sea x en [a, b]

15. Este conjunto es mucho más restrictivo que lo necesario para la teoría.

[6] $(Ku)(x) = \int_a^b K(x,y)\,u(y)\,dy$ Operador K

Con la definición anterior las ecuaciones integrales de Fredholm [4] y [5] se reescriben como [7], [8] respectivamente.

[7] $Ku = f$ Fredholm primera especie

[8] $u = f + Ku$ Fredholm segunda especie

Estamos en un punto en el que podemos establecer un primer paralelo entre el álgebra lineal de dimensión finita y el análisis funcional; antes observamos que dada una matriz **K**, su traspuesta $\mathbf{K^t}$ verifica la expresión [2] y trasponer una matriz consiste en permutar filas por columnas ¿cómo podría definirse alguna trasposición en el análogo continuo K de una matriz **K**? La respuesta es ingeniosa y en algún sentido muy natural: ¡utilizar el correspondiente a [2] pero ahora como *definición* de K^t! Decimos así que, dado K, el campo K^t es por definición el que verifica la expresión [9], para todo par de funciones u, v en V.

[9] $(u, K\,v) = (K^t u, v)$ Definición de K^t

Podríamos querer una caracterización más directa de K^t que no nos obligara a extraerla de la expresión anterior; eso es realmente sencillo, basta desarrollar el primer miembro de [9] teniendo en cuenta las definiciones [3] y [6] resultando así que es válido [10]

[10]

$$(u, Kv) = \int_a^b u(x)\left(\int_a^b K(x,y)\,v(y)\,dy\right)dx = \int_a^b \int_a^b K(y,x)\,u(x)\,dx\ \ v(y)\,dy = (K^t u, v)$$

Así, hemos probado [11], que muestra el análogo continuo de la trasposición de matrices: en lugar de permutar filas por columnas, se permutan las variables.

[11] $K^t(x, y) = K(x, y)$ Propiedad de K^t

El kernel K asemeja a una matriz **K** en otras muchas direcciones; señalemos una. La potencia de una matriz $\mathbf{K^n}$ se define recursivamente poniendo que $\mathbf{K^1} = \mathbf{K}$, $\mathbf{K^n} = \mathbf{K^{n-1}}\,\mathbf{K}$, y podemos hacer algo similar con el kernel, escribiendo $K^1 = K$ y las restantes potencias dadas por la expresión [12]

[12] $K^n(x,y) = \int_a^b K(x,\xi)\;K^{n-1}(\xi, y)\,d\xi$

Ahora consideremos los sistemas lineales de ecuaciones en la incógnita u dados por las expresiones [13] y [14].

[13] $$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_j = f_i \quad con\ i = 1, 2, \ldots, n$$

[14] $$u_i = f_i + \sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_j \quad con\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Las anteriores pueden escribirse en la más compacta notación matricial como [15] y [16]

[15] $\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$

[16] $\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{K}\,\mathbf{u}$

Con las notaciones así establecidas, si observamos juntas las ecuaciones [7: K u = f] y [15: **K u** = **f**] al igual que el par de ecuaciones [8: u = f + K u] y [16: **u** = **f** + **K u**] nos resulta evidente la semejanza ya que sólo difiere en el carácter **negrita**, pero sabemos que en tanto las primeras son ecuaciones integrales en la incógnita u, las segundas son sistemas lineales en la incógnita **u**. Podríamos decir ahora que la teoría de Fredholm traslada esta similitud del fenotipo al terreno conceptual, y que esa intuición estaba ya en los trabajos de Volterra, cuyas ecuaciones integrales resultan un caso de las de Fredholm[16].

La intuición matemática nos ayuda a diferenciar conceptualmente las integrales de primera especie K u = f de las de segunda especie u = f + K u, en un aspecto muy esencial; el operador K actúa suavizando los argumentos funcionales que recibe, de modo que la ecuación K u = f tendrá solución sólo si f misma es lo suficientemente suave; en otro lenguaje, podemos decir que el efecto de suavizado que introduce el operador K constituye una pérdida de la información sólo recuperable si la salida contempla tal desaparición[17]. Sirva de ilustración la concreta ecuación integral dada por [17], con kernel K: [0, 1] x [0, 1] $\longrightarrow$ R tal que K(x, y) = e^{x-2y}.

[17] $$\int_0^1 e^{x-2y}\, u(y)\, dy = sen\, x$$

Es claro que cualquiera sea la función u que se quiera considerar, el miembro izquierdo es un múltiplo de la exponencial, esto es que para el operador K se tiene que cualquiera sea la función u, es (Ku) (x) = c e^x, siendo c el valor dado por [18].

16. El que resulta cuando es K(x, y) = 0 para y > x; Cf. PIPKIN, A. C. (1991): V, § 5.1, p. 92.
17. Cf. TOLEDO, C. (2000): p. 2.

[18] $c = \int_0^1 e^{-2y}\, u(y)\, dy$

Por tal motivo, no existe función u tal que K u = f, para la función f: [0, 1] $\longrightarrow$ R tal que f(x) = sen x. También podemos apreciar en este ejemplo el fuerte efecto de suavizado del operador K: por retorcida que resultara la función de entrada u, la función de salida es una exponencial, y por lo tanto de clase C^{∞}; para poner un caso extremo, si al ingreso tenemos la función impulsiva delta de Dirac dada por δ (y – ½), entonces es claro que de [18] se tiene [19], por la misma definición de la distribución de Dirac.

[19] $c = \int_0^1 e^{-2y}\, \delta\,(y-1/2)\, dy = e^{-1}$

Así resulta que la transformada del impulso es (K δ) (x) = e^{x-1}, lo que muestra que el efecto de suavizado ha sido tal que pudo transformar una distribución en una función analítica. Ahora en cambio consideramos la ecuación integral de segunda especie con el mismo kernel anterior, esto es [20], observamos que la solución debe ser u (x) = sen x + c e^x, con c dado por [18], que ahora puede determinarse reemplazando u en [18] para obtener [21] de donde resulta el valor de c.

[20] $u\,(x) = sen\, x + \int_0^1 e^{x-2y}\, u(y)\, dy$

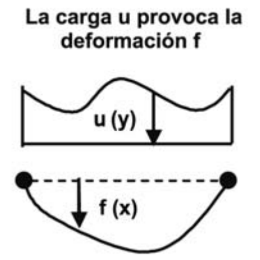
[21] $c = \int_0^1 e^{-2y}\, [sen\, y + c\ e^{y}]\, dy \ \Rightarrow c = \dfrac{e^2 - (\text{sen } 1 + \cos\ 1)}{5\,e}$

Podemos obtener todavía una intuición del motivo por el que las integrales de Fredholm de primera especie K u = f son tan exigentes con la función f, si presentamos una aplicación directa que podemos tomar del área de la ingeniería civil, para lo que consideramos la deformación de un cable de longitud unitaria previamente tensado con solicitación axial unitaria, que se halla en su posición de equilibrio coincidente con el segmento horizontal sujeto en los extremos x = 0, x = 1, mientras que sea u (y) la distribución de cargas sobre el mismo (la admitiremos pequeña frente a la tensión unitaria inicial), con 0 < y < 1. Definimos el kernel K según [22]

[22] $$K(x, y) = \begin{cases} x\,(1 - y) \ \text{ si } 0 < x < y \\ (1 - x)\, y \ \text{ si } y < x < 1 \end{cases}$$

En tales condiciones la teoría de la elasticidad nos permite obtener la deformación f(x) en cada punto de abscisa x debida a la distribución de cargas dada por u (y), mediante la expresión [23], que no es otra que la expresión [4] para a = 0, b =1.

[23] $\int_0^1 K(x,y)\,u(y)\,dy = f(x)$



Sin embargo, es de importancia práctica en el diseño la respuesta una pregunta distinta; ya no ¿cuál es la deformación que genera esta determinada carga?, sino ¿cuál distribución de carga podemos admitir para una dada deformación aceptable? Se comprende de inmediato lo anterior si se sabe que las normas constructivas no sólo fijan solicitaciones admisibles, sino también deformaciones admisibles.

Para contestar una pregunta como esa, naturalmente debemos poder resolver la ecuación [23], esto es una ecuación de Fredholm de primera especie, y no es difícil imaginar, ahora desde la mera sensatez antes que de los desarrollos teóricos, que no podemos aceptar que para cualquier deformación imaginada del cable vaya a existir un estado de cargas que lo provoque; no muchos creerán, por ejemplo, que haya un estado de cargas para el que el cable adopte la forma de la letra psi (Ψ). También el ejemplo permite concebir el efecto suavizante del operador K, aquí materializado por el elemento estructural, que no se limita a copiar la información tal como la recibe, sino que la transforma en una deformación consistente con su propia naturaleza.

§ 5. La teoría de Fredholm

Ahora tenemos el lenguaje apropiado para resumir el modo según el cual la teoría de Fredholm se liga a los resultados mucho más sencillos y conocidos de los sistemas lineales; una de las mayores originalidades consiste en el fecundo empleo de un cierto atajo para sustituir el arduo problema de la existencia por el mucho más accesible problema de la unicidad, hasta el punto que algún autor llama a los resultados de Fredholm como *curiosos teoremas oblicuos*[18] , para destacar este rodeo a la existencia a través del terreno de la unicidad. Nuevamente, volvamos sobre las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie dadas por las expresiones [5] y su versión en la notación compacta de [8] del § 4, y que aquí repetimos en [1]

[1] $u = f + K\,u$ Fredholm segunda especie

Bajo ciertas adecuadas hipótesis acerca de los conjuntos admisibles a los que pertenecen las funciones K, f, φ, tiene lugar la siguiente afirmación: *si la única solución de la ecuación* $K\,\varphi = \varphi$ *es la trivial, entonces para una cualquier f dada existe una única solución de la ecuación* $u = f + K\,u$, esto es que ¡basta probar una unicidad para probar una existencia! si ya eso solo no fuera suficiente,

18. PIPKIN, A. C. (1991): § 1. 2. p. 3.

la teoría todavía añade lo que sucede cuando la ecuación $K\varphi = \varphi$ tiene soluciones no nulas: en tal caso la ecuación dada por $K^t \psi = \psi$ también tiene soluciones no nulas, y entonces la ecuación u = f + K u tiene solución sii para toda solución de la ecuación $K^t \psi = \psi$ la función f verifica [2], llamada condición de Fredholm: $(\psi, f) = 0$, y de hecho para cada una de tales f, tiene infinitas soluciones [3] y son todas de la forma $u = u_0 + \varphi$, siendo u_0 una solución cualquiera y φ una solución de $K\varphi = \varphi$. De un modo muy sucinto estos resultados conforman el núcleo de la teoría, y allí reside el sentido de la expresión utilizada con cierta soltura de que la *unicidad implica la existencia*.

[2] $(\psi, f) = 0$ Condición de Fredholm, con $K^t \psi = \psi$

[3] $u = u_0 + \varphi$ Solución de u = f + K u, con $K\varphi = \varphi$

Las afirmaciones anteriores son en todo análogas a las que tienen lugar en el área del álgebra lineal en espacios de dimensión finita, y queremos ponerlo en evidencia trayendo al primer plano lo esencial de las relaciones entre los espacios fundamentales de una matriz[19], limitándonos a una matriz cuadrada. Sea $\mathbf{K} \in R^{nxn}$, $\varphi \in R^n$: sabemos que $\mathbf{M}\varphi$ es una combinación lineal de las columnas de la matriz **M**[20] y que por definición $\mathbf{M}\varphi = \mathbf{0}$ tiene por única solución $\varphi = \mathbf{0}$ sii las columnas de **M** son linealmente independientes, y entonces forman una base de R^n, esto es que para todo vector **h** de R^n existe una única solución de $\mathbf{M}\,\mathbf{u} = \mathbf{h}$. Puede verse que es esencialmente el mismo resultado aplicado a las matrices: *si la única solución de la ecuación* $\mathbf{M}\varphi = \mathbf{0}$ *es la trivial, entonces para una cualquier* **h** *dada existe una única solución de la ecuación* $\mathbf{M}\,\mathbf{u} = \mathbf{h}$. También podemos decir ciertamente lo que sucede cuando el conjunto solución de[21] $\mathbf{M}\varphi = \mathbf{0}$ tiene soluciones distintas de la trivial: en tal caso se tiene que Nul (**M**) estará generado por q vectores linealmente independientes, Nul (**M**) = gen $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q\}$, siendo entonces el espacio columna de **M** de dimensión n – q, resultando su complemento ortogonal de dimensión q no otra cosa que el conjunto de los vectores ortogonales a las columnas de **M**, que son las filas de $\mathbf{M}^t$, esto es el conjunto de los vectores ψ de R^n tales que $\mathbf{M}^t \psi = \mathbf{0}$ y que abreviadamente indicamos como Nul ($\mathbf{M}^t$), y como el rango de **M** y $\mathbf{M}^t$ es el mismo, entonces la dimensión de Nul ($\mathbf{M}^t$) es también q, y podremos escribir Nul ($\mathbf{M}^t$) = gen $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q\}$. Hemos probado entonces que $\mathbf{M}\varphi = \mathbf{0}$ tiene solución no trivial sii $\mathbf{M}^t \psi = \mathbf{0}$ tiene solución no trivial, y que ambos espacios tienen la misma dimensión, que hemos llamado q ¿qué sucede con

19. Cf. STRANG. G. (1986): Cap. 2, pp. 55-115; HOFFMAN, K y KUNZE, R. (1973): pp. 3-66.
20. El subespacio de todas ellas es columna de la matriz y se designa con col (M).
21. El subespacio nulo de M, designado por Nul (M).

el sistema $\mathbf{M}\ \mathbf{u} = \mathbf{h}$ en este caso? Pues que si suponemos que tiene una solución, entonces es, para cualquier ψ tal que $\mathbf{M}^{\mathbf{t}}\ \psi = \mathbf{0}$:

[4] $(\psi, \mathbf{h}) = (\psi, \mathbf{M}\,\mathbf{u}) = (\mathbf{M}^{\mathbf{t}}\psi, \mathbf{u}) = (\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0$

Así vemos que para que el sistema $\mathbf{M}\ \mathbf{u} = \mathbf{h}$ tenga solución es *necesario* que **h** sea ortogonal a ψ, esto es que verifique la [5] condición de Fredholm $(\psi, \mathbf{h}) = 0$; en caso contrario, **h** no pertenece al col (**M**) y por lo tanto el sistema no tiene solución. Que la condición de Fredholm es también *suficiente* puede verse de inmediato: si $(\psi, \mathbf{h}) = 0$, es que **h** es ortogonal al Nul ($\mathbf{M}^{\mathbf{t}}$), esto es, pertenece al col (**M**), y por lo tanto $\mathbf{M}\,\mathbf{u} = \mathbf{h}$ tiene solución. En ese caso, cuanto al carácter de la solución, sabemos que viene dado por [6], con $\mathbf{u_0}$ una solución de $\mathbf{M}\,\mathbf{u} = \mathbf{h}$, y φ una solución cualquiera del sistema homogéneo $\mathbf{M}\,\varphi = \mathbf{0}$.

[5] $(\psi, \mathbf{h}) = 0$ Condición de Fredholm, con $\mathbf{M}^{\mathbf{t}}\ \psi = \mathbf{0}$

[6] $\mathbf{u} = \mathbf{u_0} + \varphi$ Solución de $\mathbf{M}\,\mathbf{u} = \mathbf{h}$, con $\mathbf{M}\,\varphi = \mathbf{0}$

La prueba de [6]: si $\mathbf{u_0}$ es tal que $\mathbf{M}\,\mathbf{u_0} = \mathbf{h}$, entonces $\mathbf{M}\,(\mathbf{u_0} + \varphi) = \mathbf{M}\,\mathbf{u_0} + \mathbf{M}\,\varphi = \mathbf{h} + \mathbf{0} = \mathbf{h}$, luego $\mathbf{u} = \mathbf{u_0} + \varphi$ es también solución de $\mathbf{M}\,\mathbf{u} = \mathbf{h}$; por otra parte si $\mathbf{u_1}$ es una cualquier otra solución de $\mathbf{M}\ \mathbf{u} = \mathbf{h}$, entonces $\mathbf{u_1} - \mathbf{u_0}$ es una solución del sistema homogéneo, pues $\mathbf{M}\,(\mathbf{u_1} - \mathbf{u_0}) = \mathbf{M}\,\mathbf{u_1} - \mathbf{M}\,\mathbf{u_0} = \mathbf{h} - \mathbf{h} = \mathbf{0}$, esto es $\varphi = \mathbf{u_1} - \mathbf{u_0}$ satisface $\mathbf{M}\,\varphi = \mathbf{0}$

Las expresiones [5] y [6] tienen una similitud con [3] y [4]; pueden todavía hacerse idénticas salvo por la **negrita** si en lugar de denominar, como lo hemos venido haciendo, **M** a la matriz de nuestros desarrollos, escribimos $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{K}$, siendo **I** la matriz identidad de R^{nxn}, de modo que resultan así [7] y [8], en correspondencia perfecta con [3] y [4].

[7] $(\psi, \mathbf{h}) = 0$ Condición de Fredholm, con $\mathbf{K}^{\mathbf{t}}\ \psi = \psi$

[8] $\mathbf{u} = \mathbf{u_0} + \varphi$ Solución de $\mathbf{u} = \mathbf{h} + \mathbf{K}\,\mathbf{u}$, con $\mathbf{K}\,\varphi = \varphi$

Llegamos así a ver que la teoría de Fredholm tiene como resultado fundamental la llamada *alternativa de Fredholm* que afirma que *o bien* u = f + K u *tiene una solución (y sólo una) para cualquier f en W, o bien la ecuación* K $\varphi = \varphi$ *tiene solución no nula*, y que este resultado reproduce en el espacio de las funciones lo que ya podemos afirmar en los espacios vectoriales de dimensión finita Como dijimos, también la teoría dice lo que sucede cuando se da el segundo caso de la alternativa: *la ecuación* u = f + K u *tiene solución para aquellas funciones* f *(y sólo para ellas) que son ortogonales a toda solución de* $K^t\ \psi = \psi$, *esto es que satisfacen la condición de*

Fredholm (ψ, f) = 0. Con admirable sencillez, Fredholm nos presenta *todo* lo que puede suceder desde el principio (o bien...) y además nos dice lo que podemos esperar en el segundo caso de la alternativa; está también aquí la cuestión de la unicidad como suficiente para la existencia, tal como implícitamente lo señala el primer caso de la alternativa, esto es que basta probar la unicidad de la solución trivial de $K\varphi = \varphi$ para asegurar la existencia (y también unicidad, para cualquier f) de u = f + K u.

§ 6. Integrales 'disueltas' en sistemas

¿La analogía entre los sistemas y las ecuaciones lineales puede ir todavía más lejos? Las respuestas a una pregunta tan general son en verdad muy diversas; en este apartado damos la respuesta que habría dado Fredholm, siempre que le hubiésemos asegurado que el kernel K de sus ecuaciones integrales fuese de una clase particular, que denominamos *separable*. Decimos que un kernel K es separable de rango n si existen dos conjuntos de n funciones f_i, g_i linealmente independientes tales que para todo punto (x, y) de Ω se verifica la expresión [9], como podría ser, por ejemplo el kernel $K(x, y) = e^{x-2y}$ que utilizamos en el ejemplo que se inicia en la expresión [17] del § 4, ya que efectivamente es $K(x, y) = e^x e^{-2y}$.

[9] $$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\ g_i(y)$$ Kernel separable

Si recordamos la expresión §4. [6], tenemos la expresión [10]

[10] $$(Ku)(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)\,dy = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\ g_i(y)u(y)\,dy$$

Ahora bien, si definimos los números incógnita u_i como $u_i = (g_i , u)$, con el producto interno como en § 4. [3], tenemos [11]

[11] $$u_i = (g_i, u) = \int_a^b g_i(y)u(y)\,dy$$

Entonces podemos escribir [10] de un modo más simple como [12]

[12] $$(Ku)(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i\ f_i(x)$$

Tomamos ahora la ecuación de Fredholm [13], y hacemos su producto interno por g_i, para obtener [14]

[13] $$u(x) = h(x) + (Ku)(x) = h(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)\,dy$$

[14] $(g_i\,, u) = (g_i\,, h) + (g_i\,, K\,u)$

Ahora bien, si definimos los números h_i como $h_i = (g_i\,, h)$, y los números K_{ij} como $K_{ij} = (g_i, f_j)$ con el producto interno como en § 4. [3], tenemos [15]

[15] $$h_i = (g_i, h) = \int_a^b g_i(x)\,h(x)\,dx \quad , \quad K_{ij} = (g_i, f_j) = \int_a^b g_i(x)\,f_j(x)\,dx$$

Reemplazando en [14] y teniendo en cuenta [12] nos queda [16]

[16] $$u_i = h_i + \sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_j \quad (i=1,2,\ldots n)$$

Pero es que [16], ¡no es más que el sistema **u** = **h** + **K u**! Entonces, la ecuación integral original tiene solución sii la tiene el sistema [17], siendo esto una *prueba* de la alternativa de Fredholm, para el particular caso de kernel separable. Es todavía algo más: un método para resolver la ecuación integral, puesto que una vez obtenidos los u_i del sistema [17], por [12] y [13], tenemos la solución dada por la expresión [18]

[17] $\mathbf{u} = \mathbf{h} + \mathbf{K}\,\mathbf{u}$, con $K_{ij} = (g_i, f_j)$, $h_i = (g_i, h)$ Sistema lineal

[18] $$u(x) = h(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i\, f_i(x)$$ Solución de [13]

Es entonces que en la teoría de Fredholm no solamente se explota la relación entre las ecuaciones integrales y los sistemas lineales, sino que en el caso de núcleos separables, se puede explicitar un sistema cuya resolución nos permite obtener la de la ecuación integral misma ¿un ejemplo? Pues basta regresar al ejemplo de § 4, donde el núcleo $K(x, y) = e^{x-2y}$ es ciertamente separable, y de hecho seguimos el procedimiento tal como aquí se detalla; el sistema, por cierto, fue muy sencillo pues se redujo a una sola ecuación, ya que el rango del kernel resulta allí de valor 1. Puede observarse que también es separable el kernel que constituye el modelo de la influencia de la carga sobre la deformación dado por la expresión § 4. [22], sólo que se trata de una ecuación de primera especie, y que es preciso considerar el sistema desdoblado según las regiones donde se define.

§ 7. Ecuaciones λ – Fredholm y espectros

Introducimos aquí una noción esencial de la teoría de las ecuaciones integrales: la de bifurcación. Consideremos la ecuación de Fredholm de segunda especie, pero ahora con un parámetro real que llamaremos λ tal como en [1] y que con la notación establecida en § 4 escribimos de modo compacto mediante la expresión [2]

[1] $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\,u(y)\,dy$ Fredholm segunda especie

[2] $u = f + \lambda\, K u$ Fredholm segunda especie

Alcanza con flexibilizar lo ya dicho para comprender que el segundo caso de la alternativa de Fredholm se obtiene si la ecuación [3] tiene soluciones no triviales, esto es que existe un número real λ y una función φ tales que el producto el operador K aplicado a φ produce un múltiplo de φ, esto es que φ es, por definición, una autofunción de K, con autovalor $\sigma = \lambda^{-1}$ (es inmediato que no se da que $\lambda = 0$, pues en tal caso [3] indica que toda solución es trivial, contra lo supuesto).

[3] $\varphi = \lambda\, K\, \varphi$, con $\varphi \neq 0$ Autofunciones φ

Un valor de λ_0 para el que [3] tiene soluciones no triviales se denomina raíz característica de la ecuación λ–Fredholm, y también se dice que es un valor de bifurcación, pues la ecuación [3] es tal que en un entorno reducido de λ_0 tiene sólo la solución trivial, en tanto que en λ_0 tiene infinitas[22] soluciones no triviales, de modo que se dice que la solución trivial bifurca en λ_0. Podríamos precisar algo más el concepto de punto de bifurcación mediante una definición expresada en términos de una *norma*, que permita medir el tamaño de las funciones, simbolizada como $\|\varphi\|$: se dice que λ_0 es un punto de bifurcación de [3] sii para todo $\varepsilon > 0$ y para todo λ tal que $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ existe una solución no trivial φ de [3] que verifica $\|\varphi\| < \varepsilon$, lo que informalmente dicho informa de la ramificación de la solución trivial en soluciones 'pequeñas' emanando del valor de ramificación. Actualizando lo dicho en § 6 para el caso de kernel separable, podremos determinar los valores de bifurcación, en tanto existan, como aquellos valores λ para los que el sistema lineal [4] tiene soluciones no triviales

[4] $\mathbf{u} = \lambda\, \mathbf{K}\, \mathbf{u}$, con $K_{ij} = (g_i, f_j)$

Si la ecuación integral [3] tiene sólo solución trivial para todo valor real de λ, se dice que es λ–independiente como sería el caso de la ecuación integral [5], que tiene el kernel $K(x, y) = (3x - 2)\,y$, esto es con la nomenclatura establecida en § 6, tenemos aquí que el kernel es $K = f_1\, g_1$, con $f_1(x) = 3x - 2$, $g_1(y) = y$.

[5] $u(x) = \lambda \int_0^1 (3x-2)\; y\, u(y)\,dy$

22. Si φ es autofunción, también lo es $k\varphi$, para cualquier k real.

En efecto, puesto que en este caso la matriz **K** es escalar y su único elemento es $K_{11} = (f_1, g_1)$:

[6] $$K_{11} = (g_1, f_1) = \int_0^1 (3y-2)\ y\,dy = 0$$

De modo que el sistema [4] es para este caso sencillamente la ecuación **u** = λ 0 **u**, esto es **u** = **0** es la única solución, sin importar el valor de λ. Si en cambio consideramos la ecuación integral [7] encontramos sin mayor dificultad que sus raíces características son los números $\lambda_1 = -2/\pi$, con autofunción cualquier múltiplo (no nulo) de $\varphi_1(x) = \text{sen } x$, $\lambda_2 = 2/\pi$, con cualquier múltiplo (no nulo) de $\varphi_2(x) = \cos x$ como autofunción.

[7] $$u(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x+y)\,u(y)\,dy$$

El conjunto de las raíces características de una ecuación λ–Fredholm se denomina λ–espectro de Fredholm y lo designamos con Λ, mientras que el conjunto de sus autovalores σ se denomina σ–espectro y lo designamos con Σ, en tanto que se llama autoespacio (o también subespacio propio) asociado a la raíz característica al conjunto $S_\lambda = \{\varphi \in W\colon\ \varphi = \lambda K \varphi$, con λ raíz característica$\}$ y es inmediato que se trata de un subespacio vectorial de W.

Prueba: $\forall \alpha \in R\ \forall \varphi_1 \in S_\lambda\ \forall \varphi_2 \in S_\lambda\colon \alpha\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha\lambda K\varphi_1 + \lambda K\varphi_2 = \lambda K(\alpha\varphi_1 + \varphi_2)$

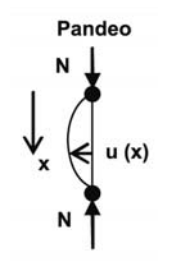
La dimensión del autoespacio S_λ es la multiplicidad geométrica de la raíz característica, y es un resultado de la teoría que la continuidad del kernel K en Ω es suficiente para asegurar que el espectro es discreto, y las multiplicidades geométricas asociadas también, esto es que hay un número finito de raíces características, y cada una de ellas tiene asociadas un número finito de autofunciones linealmente independientes. En este lenguaje, podríamos anotar que para la ecuación integral [5] el λ–espectro está dado por [8] y sus correspondientes autoespacios por [9].

[8] $\Lambda = \{\lambda_1 = -2/\pi, \lambda_2 = 2/\pi\}$

[9] $S_{\lambda 1} = \text{gen}\{\varphi_1(x) = \text{sen } x\}$, $S_{\lambda 2} = \text{gen}\{\varphi_2(x) = \cos x\}$

§ 8. No lineal

En este apartado sólo mencionamos que no pocos problemas de la ingeniería dan origen a ecuaciones integrales no lineales, entre las que se encuentran las integrales de



Hammerstein, que surgen básicamente en el área de redes neuronales[23], o muchas otras que residen en el análisis de la teoría de segundo orden en estructuras, como es el caso de la ecuación integral [1] en la que N es la fuerza de compresión a la que se halla sometida una barra de longitud unitaria con rigidez ρ (x) variable, e interesa determinar las configuraciones de equilibrio[24]; el fenómeno se conoce con el nombre de *pandeo* de barras. El fenómeno de pandeo queda interpretado así como un problema de bifurcación del equilibrio, y la carga N actúa como parámetro, de tal modo que para valores inferiores a un valor crítico N_0 (la carga crítica de Euler), la única solución es la trivial, y el estado de tensiones es de solicitación axial pura, mientras que para los valores de bifurcación se producen configuraciones que dan lugar a los estados de flexión compuesta; el diseño de estructuras se encarga que para las diversas solicitaciones externas la estructura se mantenga suficiente lejos de tales valores. Lo que subyace en la aparición del fenómeno se comprende de inmediato si se considera que normalmente no es necesario plantear las condiciones de equilibrio sobre la estructura deformada, dado que tales deformaciones se mantienen mucho menores que las de la estructura misma; sin embargo si las cargas actuantes (N en este caso) son considerables, se vuelve imprescindible considerar el equilibrio sobre la estructura deformada, y es allí de donde resulta la no linealidad[25] .

[1] $$u(x) = N\,\rho(x) \int_0^1 K(x,y) \sqrt{1-\left(\int_0^1 K'_x(x,y)\,u(y)\,dy\right)^2}\; u(y)\,dy$$

En general, una ecuación integral no lineal podemos escribirla como en [2], mientras que [3] es el tipo de ecuación no lineal particular conocido como de Hammerstein.

[2] $$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y, u(y))\,dy$$ No lineal general

[3] $$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, g(y, u(y))\,dy$$ Hammerstein

Sea por ejemplo la ecuación [4], que es del tipo de Hammerstein

[4] $$u(x) = \lambda \int_0^1 (u(y) + u^3(y))\,dy$$

23. BORDÓNS ALBA, C. (2007): pp. 1–32.

24. Cf. KRASNOV, M. et al. (1982): II, p. 108, (1'); GERE-TIMOSHENKO (1986): pp. 591-641; HIBBELER, R. (1997): pp. 654-680.

25. Cf. TIMOSHENKO, S. y WOINOWSKY, S. (1982): IV; POPOV, E. (1995): C. III.

Un cálculo inmediato nos permite concluir que para todo λ tal que $0 < \lambda < 1$, se tiene además de la solución trivial las soluciones dadas por [5], mientras que para cualquier otro valor de λ sólo se tiene la solución trivial; el espectro es aquí continuo, siendo el valor de bifurcación es $\lambda_0 = 1$.

[5] $$\varphi(x) = \pm\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

§ 9. Consideraciones finales

Las ecuaciones integrales de Fredholm surgen desde diversas disciplinas. La *alternativa de Fredholm* presenta de un modo completo las condiciones necesarias y suficientes que caracterizan los tipos de soluciones de una ecuación integral lineal de Fredholm, y deja como casos particulares a ecuaciones integrales como las de Abel y Volterra. En el caso de kernel separable, la solución se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, y hemos dado aquí una prueba de tal equivalencia. La teoría de Fredholm extiende la validez de su *alternativa* a una clase mucho más amplia de operadores, que se denominan compactos pero su presentación ya exige acudir a nociones propias del análisis funcional, basadas en una idea sencilla: si el operador no separable K se descompone en otros dos de modo que $K = K_1 + K_2$, siendo K_1 separable y K_2 suficientemente 'pequeño' entonces la solución obtenida para K_1 podrá ser considerada una aproximación tanto mejor cuanto menor sea la perturbación de K_2. Es justamente al tratar de definir algún sentido para el término 'pequeño' donde interviene la definición de alguna norma apropiada a los operadores; en la misma ampliación, puede ya acogerse sin inconvenientes las llamadas integrales singulares, con intervalo no acotado o kernel singular frente a la norma seleccionada.

En el § 1 dejamos a Fredholm tras presentar su artículo hacia 1900 ¿qué fue de él? Tres años después presentó una versión más completa de su teoría con el título *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, su reputación fue muy pronto inmensa; sus sucesivos artículos estaban todos a la altura de su reputación, con elaboraciones que le demandaba un gran esfuerzo escribir (ya podemos imaginar el que exige su lectura); su concisión es proverbial: sus obras completas cubren 160 páginas, básicamente sobre ecuaciones integrales y la teoría espectral, con alguna contribución al área actuarial. Era buen violinista (prefería a Bach) y además habilidoso como para construirse su propio violín, mientras que diseñaba y construía una máquina para resolver ecuaciones diferenciales. El año de su muerte trabajaba sobre un artículo con un tratamiento matemático de la acústica del violín, que dejó inconcluso, ¡y que ha resistido el esfuerzo hecho por los matemáticos para comprenderlo!

§ 10. Bibliografía

AIENA.P. (1994): Fredholm, Riesz and local spectral theory of multipliers. Extracta Mathematicae, 1994, 9 (1): 1-20, 23 Ref., Disponible el 29.11.2007 en http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/EXTRACTAMATHEMATICAE_1994_09_01_01.pdf'

ARMSTRONG, M. A. (1991): Basic Topology. Barcelona: Springer-Verlag.

BALIAN, R. (1994): La méthode de Neumann et Fredholm vue par le mathématicien et par le physicien, En Marais, G. (1994): Les grands systèmes des sciences et de la technologie. Paris: Guilleume.

BIRKHOFF, G. & ROTA, G. C. (1989): Ordinary differential equations. New York: JohnWiley & Sons.

BOMBAL, F. (2003): Análisis funcional, una perspectiva histórica. Proceedings of the Seminar of Mathematical Analysis, 2002-2003. Sevilla: Secretariado de Publicaciones, Universidad de Sevilla (2003), 81-117.

BORDÓNS ALBA, C. (2007): Control Predictivo No Lineal. Nuevas Tendencias y Aplicaciones. Ingeniería de Sistemas y Automática., Escuela Técnica Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Disponible el 29.11.2007 en [http://www.maii.upv.es/files/MPC%20no%20lineal.pdf]

BOYER, C., MERZSBACH, U. (1989): A history of mathematics. 2ª ed. New York: JohnWiley & Sons.

BOURBAKI, N. (1972): Elementos de Historia de la Matemática.. Madrid: Alianza Editorial.

BRAUN, M. (1993): Differential equations and the applications. New York: Springer-Verlag..

DIEUDONNÉ, J. (1976): David Hilbert (1862-1943). En Le Lionnais, F., Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires: Eudeba.

DAUTRAY, R. y LIONS, J. (1985): Mathematical Análisis and Numerical Methods for Science and Tecnology. Barcelona: Springer Verlag

FEYERABEND, P. (1991): Diálogos sobre el conocimiento. Madrid: Cátedra.

GARDING L. (1998): Mathematics and Mathematicians : Mathematics in Sweden before 1950. Rhode Island : Providence.

GERE-TIMOSHENKO (1986): Mecánica de Materiales. Barcelona: Grupo Editorial Ibero América.

HIBBELER, R. (1997): Mecánica de Materiales. México: Prentice Hall.

HOFFMAN, K y KUNZE, R. (1973): Álgebra Lineal. México: Prentice Hall.

KOLMOGOROV, A. y FOMIN, S. (1975): Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Barcelona: Editorial Mir Moscú.

KRASNOV, M. KISIELOV, A. y MAKARENKO, G. (1982): Ecuaciones integrales. Barcelona: Editorial Mir Moscú.

LAX, P. (2001): Linear algebra . New York: Springer Verlag.

LÓPEZ, C. (2007): La intuición y la matemática. Buenos Aires: Universidad de Palermo.

MÁSLOV, V. P. (1982): Métodos operacionales. Moscú: Editorial Mir Moscú.

O' CONNOR, R y ROBERTSON E. (2002): Erik Ivar Fredholm. En [http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fredholm.html], activo el 26.11.2007.

PIPKIN, A. C. (1991): A Course on integral equations. Barcelona: Springer-Verlag.

POPOV, E. (1995): Engineering Mechanics of Solids, New York: Prentice-Hall.

PORTER, D y STIRLING, D. (1990): Integral equations. Cambridge: Cambridge University Press.

PRZEWORSKA-ROLEWICZ, D. y ROLEWICZ, S. (1998): Equations in linear spaces. Madrid: College press, University of Biejing.

REY PASTOR, J. PI CALLEJA, P. y TREJO, C. (1965): Análisis Matemático, T. III. Buenos Aires: Kaplusz.

RÍBNIKOV, K. (1991): Historia de las matemáticas. Madrid: Editorial Mir Moscú.

RUSTON, A. (2007) : Fredholm Theory in Banach Spaces. Cambridge : Cambridge University Press.

RYNNE, B. y YOUNGSON, M. (2000) : Linear Functional Analysis, Barcelona : Springer Undergraduate Mathematics Series.

SOBOLIEV, V. y LUSTERNIK, L. (1999): Précis d'analyse fonctionnelle. Paris : Editorial Mir Moscú.

STRANG. G. (1986): Álgebra lineal y sus aplicaciones. Wilmington: Addison-Wesley.

TIMOSHENKO, S. y WOINOWSKY, S. (1982): Theory of Plates and Shells,. New York: McGraw-Hill.

TOLEDO, C. (2000): Introducción a las ecuaciones integrales. Chile: Universidad de Chile.

ZEILON, N. (2007): Ivar Fredholm, en Acta Math. 54 (1930), I-XII.