Obsah

Kapitola 2

Metrické prostory aneb jak měříme vzdálenost

S pojmem vzdálenosti se v životě potýkáme doslova na každém kroku. Víme, že vzdálenost odkudkoli kamkoli nebude nikdy záporná. Cesta tam bývá stejně dlouhá jako cesta zpátky. A vezmeme-li to oklikou přes oblíbenou hospůdku, můžeme si být jisti, že naše cesta nebude kratší nežli cesta přímá. Na těchto třech přirozených vlastnostech vzdálenosti je založena i matematická definice metriky. V této kapitole se s ní seznámíme a propojíme ji s topologickými pojmy, se kterými jsme pracovali v kapitole 9 druhého dílu. Odkryjeme také další zajímavé souvislosti nového pojmu metriky s pojmy již známými (skalární součin ve vektorových prostorech, konvergence posloupností a řad, diferenciální rovnice, vlastnosti čísel).

2.1 Co je to metrika?

Budeme-li se pídit po významech slova *metrika*, narazíme například na pojmy indikátor, ukazatel, způsob či nástroj měření. Metriku používají dokonce i básníci — je to kvantitativní popis rytmu básně, jeho techniky a struktury... V každém případě má metrika vždy co do činění s měřením.

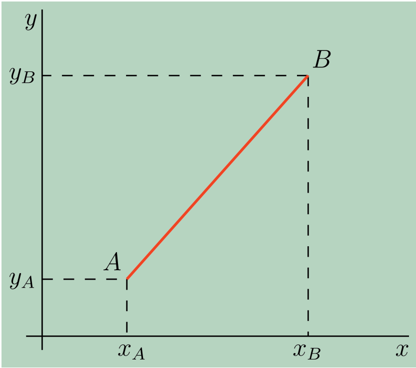
2.1.1 Vzdálenost v R^n aneb Euklides nejezdil taxíkem

V následujících příkladech nás bude zajímat především měření vzdálenosti. Uvidíme však, že způsob měření (metrika) se bude měnit podle toho, za jakým účelem chceme vzdálenost zjišťovat.

Příklad 2.1: Vzdušnou čarou

Kdybychom dostali za úkol určit vzdálenost dvou bodů (například A a B) v rovině, nejpřirozeněji bychom postupovali takto: Spojíme body úsečkou a změříme její délku. Označíme-li kartézské souřadnice bodů podle obrázku 2.1, získáme tak (z Pythagorovy věty) pro jejich vzdálenost následující výraz:

$$\varrho(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



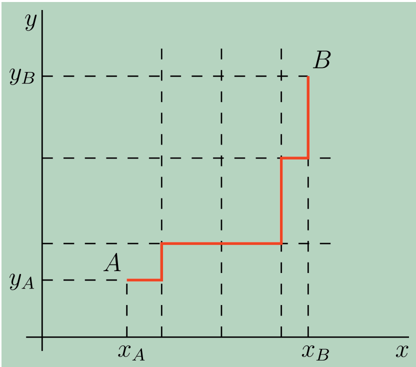
Obr. 2.1 Vzdálenost bodů v rovině.

Situaci můžeme zobecnit na trojrozměrný či vícerozměrný prostor. Vzdálenost bodů $A = (x_A^1, \dots x_A^n)$ a $B = (x_B^1 \dots x_B^n)$ v prostoru $\mathbf{R}^n$ je určena vztahem

$$\varrho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_B^i - x_A^i)^2}. \tag{2.1}$$

Příklad 2.2: Co na to taxikář?

Co by si však s naším předchozím měřením počal taxikář v Manhattanu, který je se svým vozem vázán na síť kolmých ulic (obr. 2.2)? Nejspíš by náš výraz pro vzdálenost poopravil takto:



Obr. 2.2 Taxikářův problém.

$$\varrho_1(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|.$$

Opět můžeme situaci zobecnit i na n-rozměrný prostor, přestože již nebude odpovídat původnímu praktickému významu. Vzdálenost bodů $A = (x_A^1, \dots x_A^n)$ a $B = (x_B^1 \dots x_B^n)$ je pak

$$\varrho_1(A,B) = \sum_{i=1}^{n} |x_B^i - x_A^i|. \tag{2.2}$$

Příklad 2.3: Konkurenční taxikář

Ve městě je velká konkurence taxikářů, proto nabízejí různé slevy. Jeden z nich například řekl zákazníkům: „Budu měřit vzdálenost tak, že započítám jenom delší z kolmých průmětů úsečky AB, kratší z nich pojedete zdarma.“ Dostal tak pro (placenou) vzdálenost vzorec

$$\varrho_\infty(A,B) = \max\{|x_B - x_A|, |y_B - y_A|\},$$

kde symbol „max“ označuje výběr největšího čísla dané množiny. Zobecněním na n-rozměrný prostor tak zavádí vzdálenost bodů $A = (x_A^1, \dots x_A^n)$ a $B = (x_B^1 \dots x_B^n)$ jako

$$\varrho_\infty(A,B) = \max\big\{|x_B^i - x_A^i|\big\}_{i=1}^{n}. \tag{2.3}$$

Co mají všechna popsaná měření vzdálenosti společného? Již v úvodu kapitoly jsme se zmínili o třech vlastnostech. Zkuste se sami zamyslet nad tím, zda jsou pro měření našich taxikářů splněny a teprve poté přejděte k následující definici.

Metrikou na množině M rozumíme zobrazení

$$\varrho : M \times M \ni [A,B] \to \varrho(A,B) \in \mathbf{R} \tag{2.4}$$

splňující pro všechna $A, B, C \in M$ vztahy

(i) $\varrho(A,B) \geq 0, \quad \varrho(A,B) = 0 \iff A = B$ pozitivní definitnost,

(ii) $\varrho(A,B) = \varrho(B,A)$ symetrie,

(iii) $\varrho(A,B) + \varrho(B,C) \geq \varrho(A,C)$ trojúhelníková nerovnost.

Množinu, na které je zavedena metrika, nazýváme *metrický prostor* a označujeme (M, ϱ).

Metriky z předchozích příkladů se v matematice opravdu používají. Metriku na množině $\mathbf{R}^n$ zavedenou vztahem (2.1) nazýváme *euklidovskou* nebo také *přirozenou*. Tuto metriku by jistě používal i taxikář, který by měl helikoptéru. Metrika z druhého příkladu (vztah 2.2) je metrikou *taxikářskou* neboli *součtovou* či *manhattanskou*. Třetí metrika, ze vztahu (2.3), se jmenuje *maximální* či *maximová*. Přestože jsou všechny tři metriky zavedené na téže množině (prostoru $\mathbf{R}^n$), jedná se o různé metrické prostory.

Splnění prvních dvou pravidel (pozitivní definitnosti a symetrie) je u všech tří metrik zřejmé. Ukážeme si splnění třetího pravidla (trojúhelníkové nerovnosti) například u součtové metriky:

$$\varrho(A,B)+\varrho(B,C)=\sum_{i=1}^{n}|x_B^i-x_A^i|+\sum_{i=1}^{n}|x_C^i-x_B^i|)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(|x_B^i-x_A^i|+|x_C^i-x_B^i|)\geq\sum_{i=1}^{n}|x_B^i-x_A^i+x_C^i-x_B^i|=\sum_{i=1}^{n}|x_C^i-x_A^i|=\varrho(A,C).$$

V úpravě jsme využili známé vlastnosti absolutní hodnoty:

$$|x|+|y|\geq|x+y|.$$

Podobně bychom ověřili platnost třetího pravidla u ostatních metrik. Tento úkol přenecháme čtenáři jako cvičení.

2.1.2 Podmnožiny metrických prostorů

Budeme-li uvažovat libovolnou podmnožinu P metrického prostoru (M,ϱ), můžeme na ní zavést metriku ϱ_{ind} vztahem

$$\varrho_{\text{ind}}(A,B)=\varrho(A,B)\quad\text{pro všechna}\quad A,B\in P.$$

Také zobrazení ϱ_{ind} bude splňovat pravidla (2.4). Metrika ϱ_{ind} se nazývá *indukovaná* metrikou ϱ a množina (P,ϱ_{ind}) *metrickým podprostorem* prostoru (M,ϱ). Obvykle pak indukovanou metriku ani nerozlišujeme od metriky původní a značíme ji stejným symbolem ϱ.

Příklad 2.4: Řidič tramvaje

Představme si, řidiče tramvaje, jenž se může se svým strojem pohybovat pouze po kolejích. Jeho metrickým prostorem se tak stává množina $M\subset\mathbf{R}^2$ všech bodů, do kterých vedou koleje. Vzdálenost dvou bodů A a B patřících do množiny M chápe řidič tramvaje jako délku (nejkratšího) úseku kolejí spojujícího body A a B.

Současně se mezi body množiny M mohou pohybovat také všichni taxikáři z příkladů 2.1, 2.2 a 2.3. Každý však používá k měření vzdálenosti v množině M metriku indukovanou ze svého prostoru! Množina M se tak stává pro každého z nich metrickým podprostorem. Podprostory našich taxikářů jsou obecně různé a liší se také od metrického prostoru řidiče tramvaje (jehož metrika není indukovaná z žádného „většího“ metrického prostoru).

Pro následující dva příklady si připomeňme definici suprema a infima podmnožiny reálných čísel. Číslo S se nazývá *supremum* množiny A, jestliže platí:

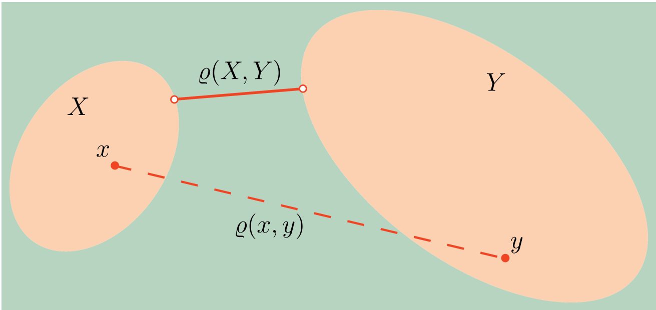
(i) $S\geq a$ pro všechna $a\in A$ (tj. S je horní závora množiny A),

(ii) je-li nějaké číslo $\overline{S}$ horní závorou množiny A, pak $S \leq \overline{S}$ (tj. S je ze všech horních závor „nejmenší“).

Analogicky definujeme *infimum* jako největší dolní závoru množiny. Pojmy supremum a infimum používáme namísto pojmů maxima a minima v situaci, kdy zkoumaná množina žádné maximum či minimum vůbec mít nemusí. Naproti tomu každá neprázdná ohraničená podmnožina reálných čísel má v $\mathbf{R}$ své supremum a infimum vždy.

Příklad 2.5: Vzdálenost množin

Romeo bydlí ve městě X a Julie ve městě Y. Oba se mohou dopravit v rámci svého města hromadnou dopravou kamkoli. Mezi městy však žádné spoje nejezdí. Jakou vzálenost musí (minimálně) urazit pěšky, aby se mohli setkat? Situaci znázorňuje obrázek 2.3.



Obr. 2.3 Vzdálenost množin.

Uvažujme množiny $X \subset M$ a $Y \subset M$ v metrickém prostoru (M, ϱ). Pro každé dva body $x \in X$ a $y \in Y$ můžeme určit jejich vzdálenost. Vzdálenost množin samotných pak definujeme

$$\varrho(X, Y) = \inf\{\varrho(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Můžeme ji chápat jako „nejmenší“ vzdálenost, kterou je nutné urazit, abychom se dostali z jedné množiny do druhé. Infimum v definici vzdálenosti množin však nemůžeme zaměnit slovem minimum, neboť množina $\{\varrho(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ nemusí vždy mít nejmenší prvek.

Zvolíme-li například $X = (0, 1)$ a $Y = (2, 3)$ v euklidovském prostoru $(\mathbf{R}, \varrho)$, je

$$\varrho(X, Y) = \inf D = \inf\{\varrho(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} = \inf\{|y - x| \mid x \in (0, 1), y \in (2, 3)\} = 1.$$

Množina D vzdáleností všech možných dvojic $x \in X$, $y \in Y$ je neprázdná a zdola ohraničená (každý prvek množiny D je jistě větší než jedna). Číslo jedna je dolní závorou množiny D a ukážeme, že je její největší dolní závorou, infimem: Předpokládejme, že existuje nějaká větší dolní závora a označme ji $k = 1 + \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je vzálenost $\varrho(1, k)$. Zvolme body $y = 2 + \frac{\varepsilon}{3} \in Y$ a $x = 1 - \frac{\varepsilon}{3} \in X$. Jejich vzdálenost

$$\varrho(x, y) = |y - x| = \left|2 + \frac{\varepsilon}{3} - \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)\right| = 1 + \frac{2}{3}\varepsilon < 1 + \varepsilon.$$

Dostáváme spor — číslo $k = 1 + \varepsilon$ nemůže být dolní závorou, neboť jsme našli v množině D menší prvek. Přestože je vzdálenost množin X a Y rovna jedné, pro žádné dva body $x \in X$, $y \in Y$ však $\varrho(x, y)$ hodnoty jedna nenabývá (množina vzdáleností D nemá nejmenší prvek).

Příklad 2.6: Průměr množiny

Pomocí metriky můžeme charakterizovat „velikost“ množiny v metrickém prostoru. Můžeme si ji představit jako vzdálenost „nejvzdálenějších“ bodů v této množině. Z matematického hlediska by to však nebyl korektně definovaný pojem — „nejvzdálenější“ body v dané množině vůbec nemusí existovat (podobně jako neexistovaly „nejbližší“ body v množinách X a Y z příkladu 2.5).

Nechť $X \subset M$ je podmnožina metrického prostoru (M, ϱ). Průměrem množiny X je číslo

$$d(X) = \sup\{\varrho(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in X\}.$$

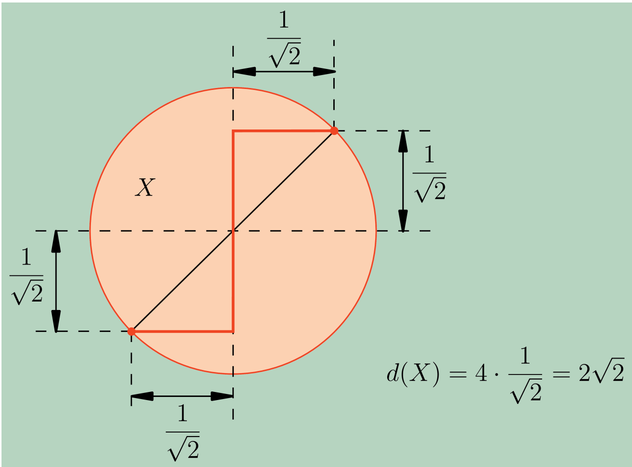
Je-li množina $\{\varrho(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in X\}$ neprázdná a shora ohraničená, její supremum určitě existuje. V případě, kdy ohraničená není, klademe $d(X) = \infty$.

Určíme průměr množiny $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ v euklidovské i v součtové metrice. Než se pustíme do výpočtů, nakreslete si obrázek a odhadněte výsledek!

Množina X je (uzavřeným) jednotkovým kruhem. V euklidovské metrice je průměr množiny X roven dvěma a jistě pro vás nebude těžké to ukázat. Vypočteme průměr v součtové metrice. Dva body X můžeme vyjádřit v polárních souřadnicích $r \in [0, 1]$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ (pozor — v součtové metrice nebude mít $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ význam vzdálenosti bodu (x, y) od počátku). Zvolme body $A_1 = [r_1 \cos\varphi_1, r_1 \sin\varphi_1]$, $A_2 = [r_2 \cos\varphi_2, r_2 \sin\varphi_2]$. Jejich vzdálenost v součtové metrice je

$$\varrho_1(A_1, A_2) = |r_1 \cos\varphi_1 - r_2 \cos\varphi_2| + |r_1 \sin\varphi_1 - r_2 \sin\varphi_2|.$$

Na základě vlastností goniometrických funkcí vidíme, že obě závorky můžeme na zadané množině „maximalizovat“, zvolíme-li $r_1 = r_2 = 1$ (tj. co největší) a úhly φ_1 a φ_2 v protilehlých kvadrantech. Zvolíme-li například $\varphi_1 \in [0, \pi/2]$ a $\varphi_2 \in [\pi, 3\pi/2]$, chceme maximalizovat součet $f(\varphi_1) = \cos\varphi_1 + \sin\varphi_1$ a součet $g(\varphi_2) = -\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2$. Absolutní maximum funkce $f(\varphi_1)$ může nastat v krajním bodě intervalu (tj. $\varphi_1 = 0$ nebo $\varphi_1 = \pi/2$) nebo ve stacionárním bodě, který určíme derivací $f'(\varphi_1) = \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 = 0$ a odtud $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$. Po dosazení $f(0) = 1 = f(\pi/2)$ a $f(\pi/4) = \sqrt{2}$ vidíme, že maximumu odpovídá úhel $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$. Podobně zjistíme $\varphi_2 = \frac{5}{4}\pi$. Vzdálenost těchto „nejvzdálenějších“ bodů již určíme snadno $\varrho_1(A_1, A_2) = 2\sqrt{2}$. Číslo $d(X) = 2\sqrt{2}$ je průměrem množiny X v součtové metrice. Odpovídající body B_1, B_2 ve druhém resp. čtvrtém kvadrantu mají také vzdálenosti $\varrho(B_1, B_2) = 2\sqrt{2}$ (obrázek 2.4). Průměr množiny $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ (kde jsme



Obr. 2.4 Průměr množiny.

neostrou nerovnost zaměnili za ostrou) je stejný, číslo $d(Y) = 2\sqrt{2}$ nyní nebude maximem nýbrž supremem vzdáleností dvojic bodů (největší prvek uvažovaná množina vzdáleností nemá).

Díky úvahám o symetrii a vlastnostech goniometrických funkcí jsme si vystačili s hledáním extrému funkce jedné proměnné. Z druhého dílu jsme již vybaveni aparátem pro nalezení extrémů funkce více proměnných — můžeme tak podobné úlohy řešit obecně. Pokud se vám úvaha zdála příliš komplikovaná, lze použít také geometrickou představu pomocí otevřených koulí v součtové metrice.

2.1.3 Metrika a topologie aneb koule mohou být i hranaté

V úvodu kapitoly jsme slíbili, že propojíme metriku s topologií. Okolí bodu, které jsme používali již v prvním dílu, souvisí s intuitivním chápáním „blízkosti“ resp. „přibližování“. Ukážeme si, jak je definovat pomocí vzdálenosti.

Nechť (M, ϱ) je metrický prostor, $S \in M$ a $\varepsilon > 0$. Množinu

$$B(S, \varepsilon) = \{A \in M \mid \varrho(S, A) < \varepsilon\}$$

nazýváme *otevřenou koulí se středem S a poloměrem ε*. Libovolnou množinu, která je sjednocením (konečného počtu či nekonečně mnoha) otevřených koulí, budeme nazývat *otevřenou*. Za otevřenou považujeme také prázdnou množinu. *Okolím* bodu $A \in M$ rozumíme jakoukoli otevřenou množinu obsahující bod A.

S pomocí předchozí definice je tak každou metrikou na množině M zavedena *topologie* (soubor podmnožin — nazývaných otevřenými — s vlastnostmi uvedenými na straně 438 druhého dílu. Topologie zavedená tímto způsobem se nazývá *metrická topologie* (topologie *asociovaná* s metrikou ϱ) a budeme ji značit τ_ϱ. Vlastnosti topologie si připomeneme v následujícím příkladu.

Příklad 2.7: Vlastnosti topologie

Topologií na libovolné množině M rozumíme systém podmnožin τ s vlastnostmi

- $\emptyset \in \tau$, $M \in \tau$,
- libovolné sjednocení množin systému τ je prvkem systému τ,
- průnik dvou libovolných množin ze systému τ je prvkem systému τ.

Množinu opatřenou topologií nazýváme *topologickým prostorem* a značíme (M, τ).

Ukažme si nyní, že každá metrická topologie skutečně požadavky definice splňuje. Prázdnou množinu jsme otevřenou nazvali již v definici. Množinu M samotnou získáme jako sjednocení otevřených koulí $\cup_{x\in M} B(x, \varepsilon_x)$ s libovolnými poloměry ε_x. Splnění druhé podmínky je vidět okamžitě — každá z množin systému τ_ϱ vznikla jako sjednocení otevřených koulí, proto libovolné sjednocení takových množin je opět sjednocením otevřených koulí a tedy prvkem τ_ϱ. Zastavme se u třetí vlastnosti. Uvažujme dvě otevřené množiny U a V. Je-li jejich průnik prázdný, pak je otevřenou množinou. Předpokládejme, že průnik je neprázdný, a uvažujme bod $x \in U \cap V$.

Označme $r_1 = \varrho(\{x\}, U \setminus V)$, $r_2 = \varrho(\{x\}, V \setminus U)$ a zvolme $r_x = \min\{r_1, r_2\}$. Pro otevřenou kouli se středem x a poloměrem r_x pak platí $B(x, r_x) \subset V \cap U$. Takovu konstrukci můžeme provést pro každý bod $x \in U \cap V$ a dostaneme $U \cap V = \cup_{x \in U \cap V} B(x, r_x)$. Průnik dvou libovolných otevřených množin jsme tak dokázali napsat jako sjednocení otevřených koulí — je proto množinou otevřenou. Každý metrický prostor (M, ϱ) je díky metrické topologii zároveň prostorem topologickým (M, τ_ϱ).

Podívejme se, jak vypadají topologie našich taxikářů z odstavce 2.1.

Příklad 2.8: Jednorozměrné koule

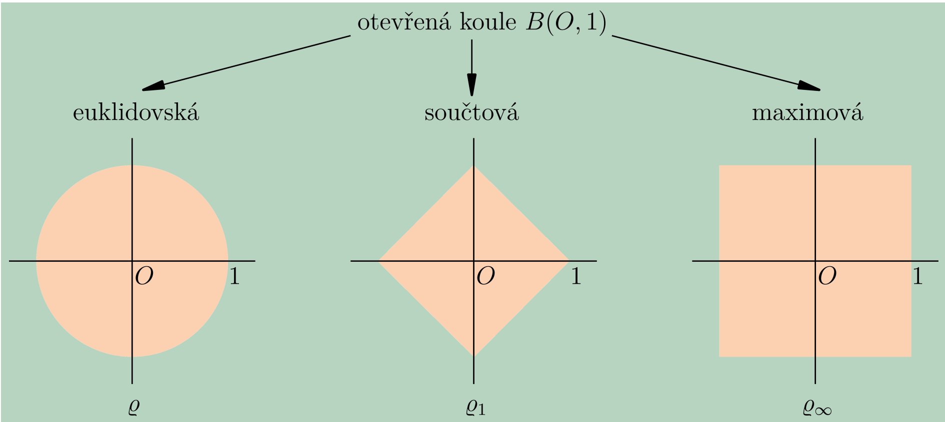
Jaké jsou otevřené koule odpovídající metrikám z příkladů 2.1, 2.2 a 2.3 pro speciální případ $n = 1$? Budou-li se taxikáři pohybovat v jednorozměrném prostoru (po reálné ose), naměří ve všech případech stejnou vzdálenost bodů $A, B \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
\varrho(A, B) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|, \\
\varrho_1(A, B) &= |x_B - x_A|, \\
\varrho_\infty(A, B) &= \max\{|x_B - x_A|\} = |x_B - x_A|.
\end{aligned}$$

Otevřené koule jsou intervaly $B(S, \varepsilon) = (S - \varepsilon, S + \varepsilon)$ a otevřené množiny jejich sjednocení.

Příklad 2.9: Vícerozměrné koule

Ještě než se podíváte na obrázek 2.5 zamyslete se sami nad tím, jak dopadne řešení předchozího příkladu pro $n = 2$, případně $n = 3$, nebo obecnou hodnotu n. Položte si například jako taxikářův zákazník otázku: „Jak vypadá množina bodů, kam se mohu z bodu O s tímto taxikářem dostat za méně než jeden dolar?“ Odpovídá vaše řešení obrázku? Co můžeme nyní říci o topologiích? Vrátíte-li se k příkladu 9.2 druhého dílu, uvidíte, že



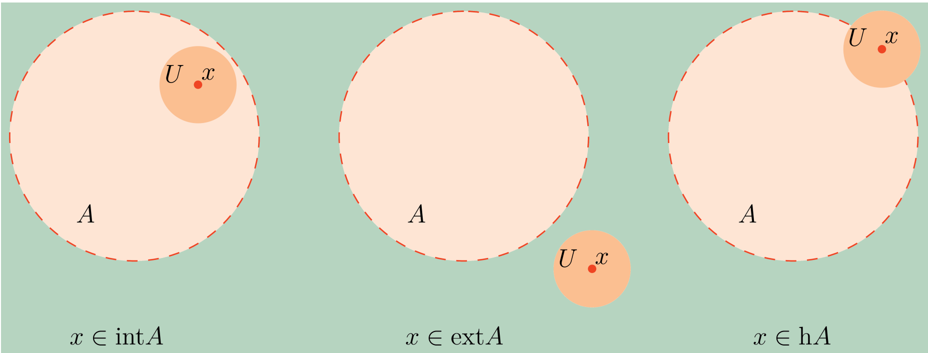
Obr. 2.5 Otevřené koule (kruhy) přirozené, součtové a maximální metriky v $\mathbf{R}^2$.

každou otevřenou kouli ve smyslu euklidovské metriky lze napsat jako sjednocení otevřených koulí ve smyslu maximální metriky (v druhém dílu jsme je nazývali kvádry) a naopak. Pokuste se udělat podobný důkaz jako je v příkladu 9.2 také pro součtovou metriku. Vidíme, že topologie asociovaná s metrikami ϱ, ϱ_1 a ϱ_∞ je tatáž — je to topologie přirozená. O metrikách, které generují stejnou topologii říkáme, že jsou *ekvivalentní*.

Na závěr odstavce si osvěžme pojmy z topologie, které známe z kapitoly 9 druhého dílu. Nechť (M, τ) je topologický prostor (bez ohledu na to, je-li topologie asociovaná s nějakou metrikou, či nikoli). Množinu $A \subset M$ nazveme *uzavřenou*, je-li její doplněk množinou otevřenou, tj. $M \setminus A \in \tau$. Víme, že každý bod $x \in A$ splňuje právě jednu ze tří podmínek:

- Existuje okolí U bodu x tak, že $U \subset A$ (bod x je *vnitřním* bodem množiny A).
- Existuje okolí U bodu x tak, že $U \subset M \setminus A$ (bod x je *vnějším* bodem množiny A).
- Každé okolí U bodu x má neprázdný průnik jak s množinou A, tak s jejím doplňkem $M \setminus A$ (bod x je *hraničním* bodem množiny A).

Situaci znázorňuje obrárek 2.6.



Obr. 2.6 Vnitřek, vnějšek a hranice množiny.

Vnitřní body množiny tvoří její vnitřek int$A$, vnější body *vnějšek* ext$A$ a hraniční body *hranici* hA. Sjednocení vnitřku a hranice se nazývá *uzávěrem* množiny A a značíme jej clA nebo $\overline{A}$. Bod $x \in A$, který má nějaké ryzí okolí $U \setminus \{x\}$ disjuntní s množinou A, je *izolovaným* bodem množiny A, naopak, bod $x \in M$, jehož každé ryzí okolí $U \setminus \{x\}$ má s množinou A neprázdný průnik, se nazývá *hromadným* bodem množiny A. Množina hromadných bodů množiny A se nazývá její *derivací* a množina izolovaných bodů *adherencí*.. Dalšími zajímavými souvislostmi topologických pojmů se budeme zabývat ve cvičení. Nyní se vraťme zpět k metrice.

2.1.4 I funkce si mohou být více či méně blízké

Definice metriky zavádí vzdálenost jako funkci přiřazující dvěma bodům množiny M reálné nezáporné číslo. Většinou si představíme nosnou množinu M jako nějaký prostor, ve kterém se pohybujeme od místa k místu a můžeme měřit vzdálenost různých bodů. Množina M však může být zcela libovolná a obsahovat i podivné objekty — jak uvidíme v odstavci 2.1.6. V tomto odstavci se zaměříme na situaci, kdy je nosnou množinou množina funkcí.

Příklad 2.10: Metrika stejnoměrné konvergence

Pro názornou představu můžeme uvažovat například o situaci, ve kterém výtahy obsluhují návštěvníky mrakodrapu. V časovém rozmezí otvírací doby zavedeme vzdálenost dvou výtahů jako největší rozdíl výšek, kterého mezi sebou dosáhly oba výtahy v průběhu této doby. Výška, ve které se nachází výtah v daném okamžiku x je tak (spojitou) funkcí $f(x)$ proměnné x na uzavřeném intervalu $[a,b]$. Víme, že každá taková funkce je na $[a,b]$ ohraničená a nabývá zde svého maxima a minima (Weierstrassova věta). Rozdíl $f(x)-g(x)$ dvou spojitých funkcí bude opět spojitou funkcí. Můžeme proto na množině všech funkcí spojitých na uzavřeném intervalu $[a,b]$ (tuto množinu značíme $C[a,b]$) zavést zobrazení:

$$C[a,b]\times C[a,b]\ni (f,g)\longrightarrow \varrho_c(f,g)=\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|\}.$$

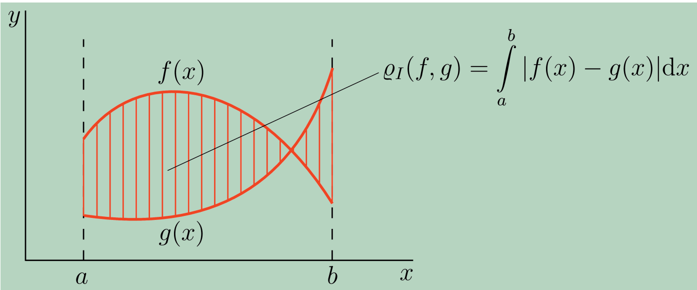
Sami ověřte, že takto definovaná vzdálenost má všechny tři vlastnosti (2.4). A proč název *metrika stejnoměrné konvergence*? Tohle překvapení odhalíte v rámci cvičení 2.2.5.

Příklad 2.11: Integrální metrika

Jinou možností, jak můžeme zavést vzdálenost na množině spojitých funkcí $C[a,b]$, je tzv. *integrální metrika*. Položíme

$$C[a,b]\times C[a,b]\ni (f,g)\longrightarrow \varrho_I(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

Geometrickou představu znázorňuje obrázek 2.7. Vzdálenost je určena plochou vymezenou mezi grafy obou funkcí. Vlastnosti (2.4) si opět ukážete jako cvičení (jsou však zřejmé už ze samotné geometrické představy).



Obr. 2.7 Integrální metrika.

Také posloupnosti jsou funkcemi — jsou to reálné funkce, jejichž definičním oborem je množina všech přirozených čísel. Následující dva příklady ukazují dvě různé možnosti zavedení metriky na množině posloupností.

Příklad 2.12: Metrika na množině ohraničených posloupností

Na množině l_∞ všech ohraničených posloupností reálných čísel zavedeme vzdálenost bodů $a = \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $b = \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ vztahem

$$\varrho_\infty(a,b) = \sup_{n\in\mathbf{N}}\{|a_n - b_n|\}.$$

Symbolem „sup" značíme supremum (tj. nejmenší horní závoru) množiny. Důležitost použití suprema v předchozí definici metriky si ukážeme na konkrétní situaci:

Vzdálenost $d(a,b)$ posloupností $a = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $b = \{\frac{2}{n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ je rovna jedné, tj. maximálnímu členu posloupnosti

$$c = \{c_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{|a_n - b_n|\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{\left|\frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right|\right\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

Vzdálenost posloupností $u = \{1 - \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $v = \{2 - \frac{2}{n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ je také rovna jedné. Posloupnost

$$w = \{w_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{|u_n - v_n|\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{\left|1 - \frac{1}{n} - \left(2 - \frac{2}{n}\right)\right|\right\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$$

nemá žádný maximální člen, supremum množiny jejích členů však existuje. Je jím číslo jedna — posloupnost se blíží k jedničce pro n jdoucí k nekonečnu. Metrika zavedená v tomto příkladu je analogií metriky stejnoměrné konvergence u funkcí. (U spojitých funkcí bylo možné použít v definici pojmu maxima — jeho existence je zaručena Weierstrassovou větou.)

Příklad 2.13: Metrický prostor pana Baireho

Na množině posloupností můžeme zavést metriku také jiným způsobem. Pro dvě posloupnosti $a = \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $b = \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ definujeme vzdálenost

$$\varrho_B(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad a = b, \\ \frac{1}{k} & \text{pro} \quad a \neq b, \quad k \quad \text{je nejmenší takový index, že} \quad a_k \neq b_k. \end{cases}$$

Vzdálenost posloupností je číslo v intervalu $[0,1]$ nepřímo úměrné indexu, počínaje kterým se obě posloupnosti od sebe odlišují. Tak například vzdálenost posloupnosti $\{1,1,1,1,1,2,3,4,\dots\}$ a $\{1,1,1,1,1,1,1,\dots\}$ je rovna jedné šestině.

Příklad 2.14: Metrika na množině polynomů

Polynom je spojitá funkce. Jako metrika na množině polynomů nám proto klidně může posloužit metrika stejnoměrné konvergence nebo metrika integrální. Zároveň lze na polynom n-tého stupně $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + {} + \dots + a_1 x + a_0$ pohlížet jako na posloupnost koeficientů doplněnou nulami: $\{a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0, \dots\}$. Pro zavedení vzdálenosti dvou polynomů tak můžeme použít i příklady 2.12 nebo 2.13. S dalšími metrikami na množině polynomů se setkáme ve cvičení.

2.1.5 Skalární součin a měření vzdálenosti

V tomto odstavci stručně uvedeme do souvislosti nový pojem metriky se strukturami zavedenými na vektorových prostorech ve druhém dílu. Množinu, se kterou nyní budeme pracovat již nebude zcela libovolná — bude jí vektorový prostor. V něm umíme sčítat vektory a násobit je skalárem.

Připomeňme, že euklidovským prostorem nazýváme vektorový prostor nad polem $\mathbf{R}$, který je (kromě „obyčejných“ operací součtu a násobku) opatřen skalárním součinem, tj. zobrazením

$$\mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n \ni [a, b] \longrightarrow (a, b) \in \mathbf{R}$$

s vlastnostmi

- symetrie $(a, b) = (b, a)$,
- linearita $(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b)$,
- linearita $(\alpha a, b) = \alpha(a, b)$,
- pozitivní definitnost $(a, a) \geq 0$, rovnost nastane $\Longleftrightarrow a = 0_{\mathbf{V}_n}$

pro libovoné vektory $a_1, a_2, b \in \mathbf{V}_n$ a libovolný skalár $\alpha \in \mathbf{R}$.

Ke každému vektoru jsme mohli pomocí skalárního součinu spočítat jeho délku, neboli *normu*:

$$||a|| = \sqrt{(a, a)}. \tag{2.5}$$

Ve Cvičení 6.1.4 druhého dílu jste v úloze 3 ukázali, že tato norma má následující vlastnosti (pro libovolné vektory $a, b \in \mathbf{V}_n$ a libovolný skalár $k \in \mathbf{R}$):

$$\begin{aligned} &\bullet \quad ||ka|| = |k|||a||, \\ &\bullet \quad ||a + b|| \leq ||a|| + ||b|| \quad \text{trojúhelníková nerovnost,} \\ &\bullet \quad ||a|| \geq 0, \quad \text{rovnost nastane} \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0_{\mathbf{V}_n} \quad \text{pozitivní definitnost.} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Normovaným lineárním prostorem rozumíme vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad polem $\mathbf{R}$ společně se zobrazením

$$\mathbf{V} \ni a \longrightarrow ||a|| \in \mathbf{R}$$

s vlastnostmi (2.6), nazývaným *normou.*

V každém normovaném lineárním prostoru lze definovat metriku pomocí normy vztahem

$$\varrho(a, b) = ||b - a||. \tag{2.7}$$

Pozitivní definitnost takto zavedené metriky je vyplývá z pozitivní definitnosti normy samotné. Symetrie pak plyne z první vlastnosti normy:

$$\varrho(a,b) = ||b-a|| = ||-1(a-b)|| = |-1|\,||a-b|| = ||a-b|| = \varrho(b,a).$$

Zbývá ukázat splnění trojúhelníkové nerovnosti:

$$\varrho(a,c) = ||c-a|| = ||(c-b)+(b-a)|| \le ||c-b|| + ||b-a|| = \varrho(b,c) + \varrho(a,b).$$

Zavedeme-li na vektorovém prostoru topologii asociovanou s touto metrikou (přičemž na množině $\mathbf{R}$ budeme vždy uvažovat topologii přirozenou) budou operace součtu a násobku skalárem dokonce spojitými zobrazeními topologických prostorů:

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}, \qquad \cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}.$$

Množina $\mathbf{V}$ spolu s topologií, ve které jsou operace součtu a násobku spojité se nazývá *topologickým vektorovým prostorem*.

Pozn.: Obecnou definici spojitosti zobrazení topologických prostorů uvedeme v odstavci 2.3.1, pojem spojitosti však již známe z kapitol o reálných funkcích (odstavec 2.1.5 v prvním dílu, odstavec 9.2.1 v druhém dílu).

Co jsme tedy zjistili? Že i matematické struktury mají svoji hierarchii. Každý euklidovský prostor je současně normovaným lineárním prostorem s normou *indukovanou* skalárním součinem (vztahem (2.5)). Každý normovaný lineární prostor je také prostorem metrickým s metrikou *indukovanou* pomocí normy (vztahem (2.7)). A každý metrický prostor je prostorem topologickým, s topologií asociovanou s touto metrikou. Opačně to však neplatí! Ne každá topologie je asociovaná s nějakou metrikou. Ne každá metrika na vektorovém prostoru je indukovaná nějakou normou. A ne každá norma je indukovaná nějakým skalárním součinem! První dvě tvrzení si ukážete sami v rámci cvičení, třetí z nich ilustrují následující příklady.

Příklad 2.15: Skalární součin indukující zvolenou normu?

Ve cvičení 6.1.4 jste v úloze 3 ukazovali platnost tzv. rovnoběžníkové rovnosti:

$$||a+b||^2 + ||a-b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2), \tag{2.8}$$

kterou pro libovolné vektory a, b splňuje každá norma asociovaná se skalárním součinem. Nyní ukážeme obrácené tvrzení: Splňuje-li nějaká norma definovaná na vektorovém prostoru rovnoběžníkovou rovnost, pak existuje skalární součin tak, že

$$||a|| = \sqrt{(a,a)}.$$

Definujme:

$$(a,b) = \frac{1}{4}(||a+b||^2 - ||a-b||^2). \tag{2.9}$$

Platí $(a,a) = \frac{1}{4}(||2a||^2 + 0) = ||a||^2$. Ukážeme, že takto definovaná operace splňuje vlastnosti skalárního součinu. Pozitivní definitnost operace (2.9) plyne z pozitivní definitnosti normy samotné a symetrie je vidět ze vzorce. Stačí ukázat linearitu. Platí

$$(a,b) + (a,c) = (a, \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2}) + (a, \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2}).$$

Označíme-li nyní

$$x = \frac{b+c}{2}, \qquad y = \frac{b-c}{2},$$

je $b = x + y$ a $c = x - y$ a ze vztahu (2.9) dostáváme

$$(a,b) + (a,c) = (a, x+y) + (a, x-y) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[||a + (x+y)||^2 - ||a - (x+y)||^2\right] + \frac{1}{4}\left[||a + (x-y)||^2 - ||a - (x-y)||^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[||(a+x) + y||^2 + ||(a+x) - y||^2 - ||(a-x) - y||^2 - ||(a-x) + y||^2\right].$$

Nyní využijeme platnost rovnoběžníkového pravidla a dokončíme první část výpočtu:

$$(a, x+y) + (a, x-y) = \frac{1}{4}\left[2||a+x||^2 + 2||y||^2 - 2||a-x||^2 - 2||y||^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[||a+x||^2 - ||a-x||^2\right] = 2(a,x) = 2\left(a, \frac{b+c}{2}\right).$$

Dosazením do právě odvozeného vztahu

$$(a,b) + (a,c) = 2\left(a, \frac{b+c}{2}\right)$$

za $c = 0_V$ a $b = 2u$ máme

$$(a, 2u) + (a, 0_V) = (a, 2u) = 2(a, u).$$

První vlastnost linearity je již zřejmá:

$$(a,b) + (a,c) = \frac{1}{2}\left[(a, 2b) + (a, 2c)\right] = \frac{1}{2}\left[2\left(a, \frac{2b+2c}{2}\right)\right] = (a, b+c).$$

Indukcí můžeme dokázat druhou vlastnost linearity pro libovolnou racionální konstantu $\alpha = \frac{p}{q}$:

$$(a, \alpha b) = \alpha(a,b).$$

Obecný důkaz pro reálné α již vyžaduje využití dalších struktur. Konkrétně topologie, kterou zvolená norma indukuje. V této topologii jsou operace součtu a násobku vektoru spojitými zobrazeními stejně jako zobrazení $||\ || : V \to \mathbf{R}$ realizující normu samotnou ($\mathbf{R}$ uvažujeme s přirozenou topologií).

Závěry příkladu shrneme do jednoduchého tvrzení:

Věta 2.1: *Norma ve vektorovém prostoru je indukovaná skalárním součinem právě tehdy, splňuje-li rovnoběžníkovou rovnost* $||a+b||^2 + ||a-b||^2 = 2(||a||^2 + ||b||^2)$. *Skalární součin je pak dán vztahem*

$$(a,b) = \frac{1}{4}(||a+b||^2 - ||a-b||^2).$$

Příklad 2.16: A norma, kterou nelze indukovat skalárním součinem?

Najdeme nyní normu, kterou skalárním součinem indukovat nelze. Sami se přesvědčte, že zobrazení

$$C[0,1] \ni f(x) \longrightarrow ||f(x)|| = \max\{|f(x)| \ \mid \ x \in [0,1]\}$$

je normou ve vektorovém prostoru $C[0,1]$ všech funkcí spojitých na intervalu $[0,1]$ (tj. splňuje požadavky (2.6)). Tato norma navíc indukuje metriku stejnoměrné konvergence z příkladu 2.10. Že neplatí rovnoběžníkové pravidlo? O tom se přesvědčíte snadno — stačí zvolit vhodné konkrétní vektory, např. $f = 1$, $g = x$).

Vraťme se ještě k vektorovým prostorům, se kterými pracujeme nejčastěji — doposud to byly reálné vektorové prostory konečné dimenze (izomorfní s $\mathbf{R}^n$). V budoucnu se nám budou hodit i některé prostory dimenze nekonečné — půjde o prostory nekonečných posloupností a prostory funkcí. Již jsme se o nich zmínili v příkladu 4.22 druhého dílu. V dalších dvou příkladech uvedeme do souvislosti skalární součin, normu a metriku právě v těchto typech prostorů.

Příklad 2.17: Vektorový prostor $\mathbf{R}^n$

V příkladech 2.1, 2.2 a 2.3 jsme zavedli tři různé metriky na množině $\mathbf{R}^n$. Hned vidíme, že standardní skalární součin (který známe už z prvního dílu a používali jsme jej v dílu druhém)

$$(a,b) = \alpha^1\beta^1 + \alpha^2\beta^2 + \ldots + \alpha^n\beta^n$$

indukuje normu

$$||a|| = \sqrt{(a,a)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha^i|^2}$$

a tato norma indukuje přirozenou metriku z příkladu 2.1:

$$\varrho(a,b) = ||b-a|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\beta^i - \alpha^i)^2}.$$

Kartézské souřadnice x_A^i, x_B^i bodů A, B jsme v zápisu nahradili složkami α^i, β^i vektorů a, b. V příkladu 2.1 jsme vyjma metriky neuvažovali o žádné další struktuře na množině $\mathbf{R}^2$, nyní novým zápisem dáváme najevo, že s $\mathbf{R}^2$ pracujeme jako s vektorovým prostorem — jeho prvky (vektory) umíme sčítat a násobit skalárem.

Také součtová i maximální metrika mají každá svoji normu:

$$||a||_1 = |\alpha^1| + |\alpha^2| + \ldots + |\alpha^n|, \quad \varrho_1(a,b) = ||b-a||_1 = \sum_{i=1}^{n} |\beta^i - \alpha^i|.$$

$$||a||_\infty = \max\{|\alpha^i|\}_{i=1}^n, \quad \varrho_\infty(a,b) = ||b-a||_\infty = \max\{|\beta^i - \alpha^i|\}_{i=1}^n.$$

Takových norem můžeme na $\mathbf{R}^n$ zavést nekonečně mnoho. Pro každé $k \in [1,\infty)$ definujme

$$||a||_k = \sqrt[k]{|\alpha^1|^k + |\alpha^2|^k + \ldots + |\alpha^n|^k} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha^i|^k\right)^{\frac{1}{k}}. \tag{2.10}$$

Příslušná metrika pak bude dána vztahem

$$\varrho_k(a,b) = ||b-a||_k = \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta^i - \alpha^i|^k\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Všimněme si, že pro hodnotu $k = 2$ se jedná o euklidovskou normu a metriku (indukovanou skalárním součinem). Ta také jediná splňuje rovnoběžníkové pravidlo (2.8). Že ostatní metriky toto pravidlo nesplňují? To si jistě sami snadno ověříte na jednoduchém konkrétním příkladě (volte např. $a = (1,1,0,\dots,0)$ a $b = (1,-1,0,\dots,0)$ a dosaďte do levé i pravé strany vztahu (2.8). Splnění pravidel normy (2.6) si ukážeme jako cvičení. Ve cvičení si také zodpovíme otázku: Proč nemůže být k menší než jedna? Nebo dokonce záporné? Které z pravidel (2.6) by například nesplňovala zobrazení

$$a \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{1}{\alpha^i}\right|\right)^{-1}, \quad \text{nebo} \quad a \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|\alpha^i|}\right)^{2}?$$

Příklad 2.18: Prostory nekonečné dimenze

Budeme pracovat s vektorovým prostorem V nekonečných posloupností (zavedli jsme jej v příkladu 4.22 druhého dílu). Pro $k \in [1,\infty)$ uvažujme o jeho podmnožině l_k posloupností $a = \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, pro které řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^k$$

konverguje (v kapitole 8 druhého dílu jsme se s takovými řadami naučili pracovat). Množina l_k je uzavřená na operace součtu a násobku skalárem, je tedy podprostorem vektorového prostoru V (ukážeme si to ve cvičení).

Analogicky jako v příkladu 2.17 můžeme na množině l_k zavést normu vztahem

$$||a||_k = ||\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}||_k = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^k\right)^{\frac{1}{k}}. \tag{2.11}$$

Metrika indukovaná normou $|| \; ||_k$ je

$$\varrho_k(a,b) = \varrho_k(\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}) = ||b-a|| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i|^k\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Pro množinu l_∞ všech *ohraničených* posloupností (ukažte sami, že je podprostorem ve V) definujeme normu takto:

$$||a||_\infty = ||\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}||_\infty = \sup\{|a_i| \mid i \in \mathbf{N}\}.$$

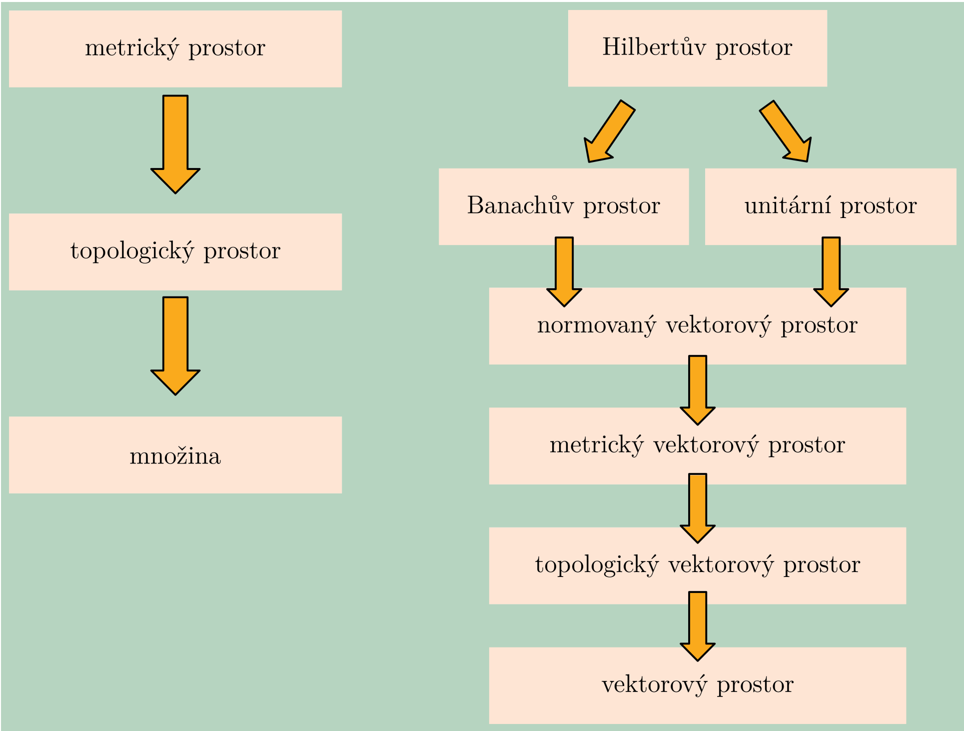
Tato norma indukuje metriku z příkladu 2.12.

V matematických textech se označením l_k resp. l_∞ automaticky rozumí množiny se strukturou vektorového prostoru, opatřené normou $|| \; ||_k$ resp. $|| \; ||_\infty$ a metrikou ϱ_k resp. ϱ_∞. Avšak podobně jako v příkladu 2.17 pouze pro $k = 2$ splňuje metrika ϱ_k rovnoběžníkové pravidlo a je indukovaná skalárním součinem. Jakým? Můžete si jej odvodit ze vztahu (2.9), nebo jen ověřit, že je to tento:

$$(a,b) = (\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

V tomto odstavci jsme pro jednoduchost uvažovali o euklidovských, tj. reálných vektorových prostorech. Normu můžeme pomocí skalárního součinu zavést i v prostorech unitárních (komplexních). Z vlastnosti kososymetrie $(a,b) = (b,a)^*$ skalárního součinu v prostorech nad **C** totiž ihned plyne, že číslo (a,a) musí být reálné a vztah (2.5) dává smysl také zde. Trošku obtížnější bude dokázat v unitárních prostorech platnost rovnoběžníkového pravidla. Pro vztah skalárního součinu a normy analogický vztahu (2.9) pak platí

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + \mathrm{i}||x+\mathrm{i}y||^2 - \mathrm{i}||x-\mathrm{i}y||^2\right).$$



Obr. 2.8 Hierarchie matematických struktur.

V kapitole 2.2 si rozšíříme náš „zvěřinec“ struktur o další dva pojmy: Banachův prostor a Hilbertův prostor. Prozatím nám pro orientaci postačí obrázek 2.8.

2.1.6 Neobvyklé i obvyklejší metriky

Formou příkladů se zmíníme o dalších možných i zdánlivě nemožných metrikách. Ve zbývající části knihy však většinu z nich nebudeme používat. Nemáte-li chuť v tuto chvíli svůj mozek zajímavým způsobem procvičit, můžete celý odstavec 2.1.6 přeskočit bez ztráty návaznosti.

Příklad 2.19: Šílený taxikář

Zoufalého taxikáře donutila konkurence učinit tuto nabídku: „Svezu vás kamkoli za jeden dolar.“ Matematicky lze situaci popsat takto:

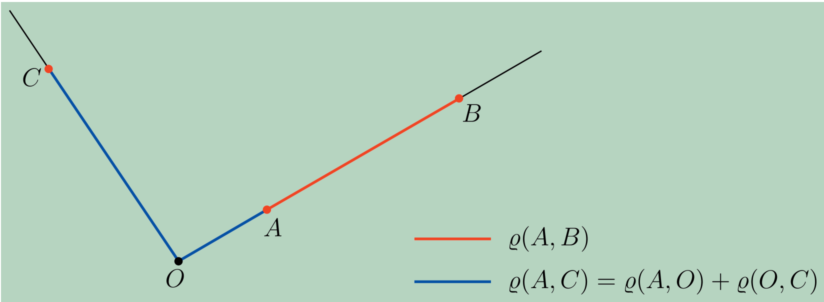
$$\varrho_d : M \times M \ni [A, B] \longrightarrow \varrho_d(A, B) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad A = B \\ 1 & \text{pro} \quad A \neq B \end{cases}$$

Tuto metriku můžeme zavést na libovolné nosné množině M a nazýváme ji *diskrétní*.

Příklad 2.20: Pampelišková metrika

V této metrice bude měřit vzdálenost například mravenec, pohybující se po tenkých okvětních lístcích, které paprskovitě vycházejí z jednoho místa. Koknkrétně: Budou-li se dva body nacházet na témže „paprsku“ procházejícím počátkem, odpovídá jejich vzdálenost euklidovské vzdálenosti. Pro body A, B na různých „paprscích“ je nutné sečíst vzdálenost, kterou musí mravenec urazit z bodu A k počátku a vzdálenost od počátku k bodu B. Situaci znázorňuje obrázek 2.9. Výpočet odpovídá vzorci $\varrho_p : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \ni [A, B] \to$

$$\varrho_p(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} & \text{pro } A, B \text{ ležící na stejné polopřímce procházející počátkem,} \\ \sqrt{x_A^2 + y_A^2} + \sqrt{x_B^2 + y_B^2} & \text{pro } A, B \text{ neležící na stejné polopřímce procházející počátkem.} \end{cases}$$



Obr. 2.9 Pampelišková metrika.

Příklad 2.21: Normy a metriky na množině matic

Ve druhém dílu (příklad 4.21) jsme pracovali s vektorovým prostorem reálných obdélníkových matic typu m/n. Nalezli jsme v něm bázi a určili dimenzi $\dim \mathcal{M}(m/n) = m \cdot n$. Prostor matic je konečněrozměrný, můžeme jej ztotožnit vektorovým prostorem $\mathrm{R}^{m \cdot n}$ prostřednictvím izomorfismu, který vektory standardní báze zobrazuje opět na vektory standardní báze.

Každou metriku resp. normu zavedenou pomocí souřadnic v euklidovském prostoru $\mathbf{R}^{mn}$ lze pak chápat také jako metriku resp. normu na vektorovém prostoru matic. Vraťme se k příkladu 2.17. V analogii můžeme pro libovolné číslo $k \in [1, \infty)$ na množině $\mathcal{M}(m/n)$ definovat normu matice $A = (a_{ij})$ vztahem:

$$||A||_k = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k \right)^{\frac{1}{k}} .$$

Pro $k = 2$ splňuje norma rovnoběžníkové pravidlo a snadno ověříte, že je indukována skalárním součinem

$$(A, B) = \operatorname{tr}\left(AB^T\right),$$

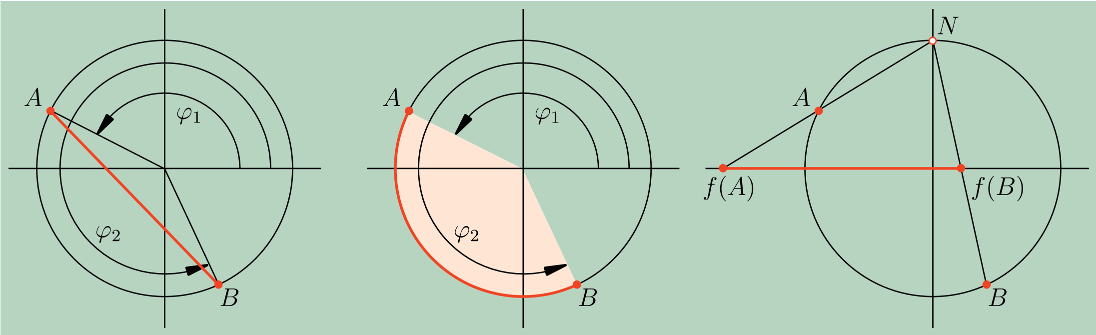
s nímž jsme ve druhém dílu knihy (Cvičení 6.1.4) rovněž pracovali. Vzpomínáte? A není to naposled, co se s ním v této knize setkáváme.

Jiným příkladem normy, tentokrát v prostoru „komplexních“ matic $\mathcal{M}(m/n)$ nad $\mathbf{C}$, je zobrazení dané vztahem

$$||A|| = \{\sup ||Ax||,\ x \in V_n \text{ nad } \mathbf{C},\ \ ||x|| < 1\},\ \ ||x|| = \sqrt{|x^1|^2 + \cdots + |x^n|^2}. \tag{2.12}$$

Příklad 2.22: Metriky na kruhové dráze

Zaveďme několik metrik na jednotkové kružnici se středem v počátku. Bod na kružnici můžeme popsat úhlem φ, měřeným od kladné poloosy x proti směru hodinových ručiček, nebo kartézskými souřadnicemi v $\mathbf{R}^2$.



Obr. 2.10 Metriky na kružnici.

- Vzdálenost dvou bodů na kružnici bude indukována z prostoru $\mathbf{R}^2$ euklidovskou metrikou (obrázek 2.10 vlevo), tj.

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)^2 + (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)^2}.$$

- Vzdálenost dvou bodů na kružnici je dána délkou kratšího z oblouků, který spojuje body A, B (obrázek 2.10 uprostřed):

$$\varrho(A, B) = \begin{cases} |\varphi_1 - \varphi_2| & \text{pro} \quad |\varphi_1 - \varphi_2| \le \pi, \\ ||\varphi_1 - \varphi_2| - 2\pi| & \text{pro} \quad |\varphi_1 - \varphi_2| > \pi. \end{cases}$$

- Vzdálenost indukujeme metrikou z pampeliškového prostoru (tj. pro $A \neq B$ je součtem délek úseček AS a BS, kde S je počátek) — získáváme diskrétní metriku:

$$\varrho(A, B) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad A = B \\ 2 & \text{pro} \quad A \neq B \end{cases}$$

- Vyjmeme-li z kružnice bod $N = (0, 1)$, můžeme všechny body na kružnici zobrazit na reálnou osu takto: Spojíme bod N s bodem A přímkou, obraz $f(A)$ bude průsečík této přímky s osou x. Vzdálenost bodů A, B definujeme jako euklidovskou vzdálenost jejich obrazů (obrázek 2.10 vpravo):

$$\varrho(A, B) = |f(A) - f(B)| = \left| \frac{\cos\varphi_1}{1 - \sin\varphi_1} - \frac{\cos\varphi_2}{1 - \sin\varphi_2} \right|.$$

Ukažte, že všechny čtyři metriky splňují pravidla (2.4). Jakou každá z nich indukuje topologii? Zakreslete otevřené koule. Jsou některé metriky ekvivalentní? (Při porovnávání se čtvrtou metrikou musíme z kružnice vždy vyjmout bod N, aby nosné množiny byly stejné — půjde o jiný metrický prostor než v případě celé kružnice.)

Příklad 2.23: Metrika na množině slov

Uvažujme o množině všech konečných slov, která utvoříme z určité abecedy (tj. souboru znaků). Se slovy můžeme provádět následující operace:

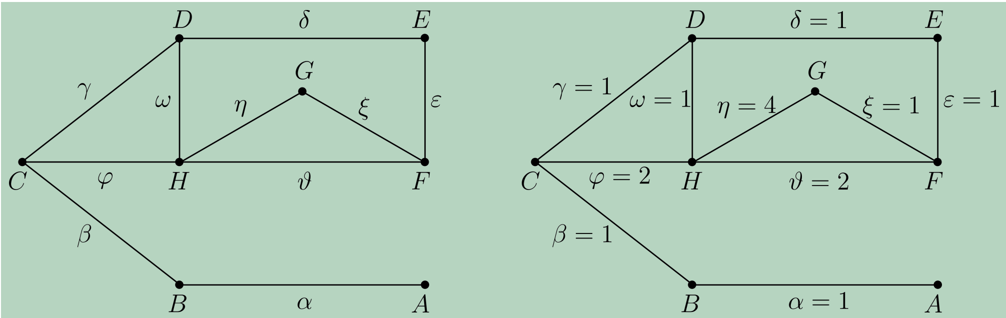
- výměna kteréhokoli znaku za jiný znak abecedy,
- vložení znaku kamkoli do slova,
- odebrání znaku z kteréhokoli místa ve slově.

Vzdálenost dvou slov A a B pak definujeme jako nejmenší počet operací, které musíme provést, aby ze slova A vzniklo slovo B.

Příklad 2.24: Metrika na grafu

Na obrázku 2.11 vlevo je znázorněn (jednoduchý souvislý konečný) graf. Přesné definice pojmů z teorie grafů nyní pomineme. Velkými písmeny jsou označeny vrcholy grafu, řeckými písmeny jeho hrany. Na množině všech vrcholů můžeme zavést metriku. Řekneme, že vzdálenost vrcholů X, Y je rovna nejkratší cestě z X do Y (tj. nejmenší počet hran, které musíme projít, abychom se přemístili mezi těmito vrcholy). Takto například vzdálenost F a A je rovna čtyřem.

Situaci lze zkomplikovat tím, že hrany budou tzv. „ohodnocené“ — je dána funkce, která každé z hran přiřadí kladné reálné číslo. Takové ohodnocení můžeme chápat např. jako „finanční náklady“ na provedení cesty po dané hraně. Tentokrát definujeme vzdálenost dvou vrcholů jako hodnotu odpovídající minimálním nákladům na přemístění mezi nimi. Situaci odpovídá graf vpravo. V této situaci se „nejlevnější cesta“ z F do A realizuje po jiných hranách než v přechozím případě (po jakých?) a vzdálenost je rovna pěti.



Obr. 2.11 Neohodnocený a ohodnocený graf.

Příklad 2.25: Rozšíření euklidovského prostoru

V prvním dílu jsme pracovali s rozšířenou množinou reálných čísel (reálnou osu jsme doplnili o body plus nekonečno a minus nekonečno, zavedli jsme algebraické operace s novými body a uspořádání). Ve druhém dílu jsme podobnou konstrukci použili pro množinu $\mathbf{R}^2$. Jiný způsob rozšíření nás čeká v kapitole **??** při zavádění bodu nekonečno v Gaussově rovině. Ukážeme si nyní, jakým způsobem rozšířit metriku (a topologii).

Uvažme nejprve množinu R s přirozenou metrikou a topologií. Množinu doplníme body ∞ a $-\infty$ jako jsme to udělali v prvním dílu. Na množině $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ pak definujeme funkci $\Phi : \mathbf{R}^* \to [-1, 1]$ takto:

$$\Phi(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad \Phi(\infty) = 1, \quad \Phi(-\infty) = -1.$$

Pomocí této funkce, která je bijekcí množiny $\mathbf{R}^*$ na množinu $[-1\,, 1]$ (ukážete to ve cvičení), definujeme metriku $\varrho^* : \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ vztahem

$$\varrho^*(A, B) = |\Phi(A) - \Phi(B)|.$$

Zbývá ukázat, že zobrazení ϱ^* splňuje axiomy metriky a že je na množině $\mathbf{R}$ nová metrika ekvivalentní s metrikami ϱ, ϱ_1 i ϱ_∞. Tento důkaz opět přenecháme do cvičení. Množinu $\mathbf{R}^*$ opatřenou metrikou ϱ^* (a také indukovanou topologií) budeme označovat symbolem $\mathbf{E}^*$.

Nyní již bude snadné rozšířit o nevlastní body také vícerozměrný euklidovský prostor. Na množině $\mathbf{R}^{*n}$ definujeme metriku ϱ^{*n} vztahem

$$\varrho^{*n}(A, B) = \max\{\varrho^*(A_1, B_1), \ldots, \varrho^*(A_n, B_n)\},$$

kde $A = (A_1, \ldots, A_n), B = (B_1, \ldots, B_n) \in \mathbf{R}^{*n}$. Příslušný metrický (i topologický) prostor označíme $\mathbf{E}^{*n}$. Co je opět potřeba ověřit?

Pozn.: Jak jsme již uvedli, existuje i jiný způsob rozšíření euklidovského prostoru. V něm se k množině $\mathbf{R}^n$ doplní pouze jediný bod „nekonečno“, označíme $*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$. V příkladu **??** kapitoly **??** zkonstruujeme konkrétně pro $n = 2$ (Gaussovu rovinu) bijektivní zobrazení takto rozšířené množiny na jednotkovou sféru. S pomocí bijekce a vhodné metriky na sféře (například indukované z $\mathbf{R}^3$) můžeme zavést metriku (a topologii) také na množině $*\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}^+$. Nově vzniklý topologický prostor bude kompaktní (definici kompaktnosti najdete například v dodatku F prvního dílu nebo v následujícím odstavci). Jedná se o tzv. *bodovou kompaktifikaci* euklidovského prostoru $\mathbf{R}^2$. Takovou konstrukci můžeme udělat pro libovolné n, topologické vlastnosti kompaktifikací však přesahují rámec našeho textu.

Aplikace pojmu metriky sahají i mimo obor matematiky. Jistě byste s výčtem příkladů mohli dál pokračovat sami. Kolikrát za den „řešíte podobné úlohy“? Jaké „metriky“ přitom používáte? S dalšími se setkáme ještě ve cvičení.

2.1.7 Cvičení

1. Ukažte, že metriky zavedené v příkladech 2.1, 2.2 a 2.3 splňují axiomy (i), (ii) a (iii) v definici metriky (2.4).

2. Ukažte, že metriku lze definovat pouze pomocí dvou axiomů:

(I) $\varrho(A, B) = 0 \iff A = B$

(II) $\varrho(B, A) + \varrho(B, C) \geq \varrho(A, C)$

Tj. ukažte, že pravidla (i), (ii) a (iii) vyplývají z pravidel (I) a (II).
Návod: Postupně dosaďte do pravidla (II) vždy dva stejné body ($A = B$, $A = C$, $B = C$).

3. Uvažujme o systému σ podmnožin množiny M, který splňuje

- $\emptyset, M \in \sigma$,
- Průnik libovolného počtu libovolných množin ze σ je opět prvkem systému σ.

- Sjednocení libovolných dvou množin ze σ je opět prvkem systému σ.

Ukažte, že pomocí takového systému lze zavést topologii na M takto: Každou množinu patřící do σ nazveme *uzavřenou.* Množinu $A \subset M$ nazveme *otevřenou*, jestliže její doplněk $M \setminus A$ je množina uzavřená (tj. $M \setminus A \in \sigma$).
Návod: Ukažte, že soubor τ všech otevřených množin splňuje pravidla z příkladu 2.7.

4. Nalezněte všechny topologie na dvouprvkové množině. Kolik existuje různých topologií na tříprvkové množině? Rozhodněte, které z nich jsou asociovány s nějakou metrikou.
Výsledek: Na dvouprvkové množině $A = \{a, b\}$: $\tau_0 = \{\emptyset, A\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, A, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, A, \{b\}\}$, $\tau_3 = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}\}$. Na tříprvkové množině je celkem 29 různých topologií. Na konečné množině je pouze diskrétní topologie asociovaná s metrikou (konkrétně s diskrétní metrikou).

5. Uzávěr lze chápat jako zobrazení přiřazující množině A množinu $\overline{A}$. Ukažte, že pro toto zobrazení platí:

(1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(2) $A \subset \overline{A}$ pro libovolnou množinu A,

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ pro libovolnou množinu A,

(4) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ pro libovolné množiny A a B.

6. Pravidla (1) až (4) z předchozího cvičení se nazývají *Kuratowského axiomy uzávěru.* Ukažte, že je lze použít k zavedení topologie na libovolné množině M takto: Nechť $f : 2^M \to 2^M$ splňuje pravidla (1) — (4) (symbolem 2^M označujeme množinu všech podmnožin množiny M). Množinu $A \subset M$ nazveme *uzavřenou*, jestliže $f(A) = A$. Dál vycházejte z cvičení 3.

7. Vymyslete systém (nekonečně mnoha) otevřených množin, jejichž průnikem není otevřená množina. Vymyslete systém (nekonečně mnoha) uzavřených množin, jejichž sjednocením není uzavřená množina.

8. Topologický prostor (M, τ) se nazývá *Hausdorffův* neboli *oddělitelný*, jestliže ke každým dvěma různým bodům x, y existují okolí U a V tak, že $x \in U$, $y \in V$ a $U \cap V = \emptyset$. Uveďte příklad topologického prostoru, který není Hausdorffův. Dále ukažte, že množina s libovolnou metrickou topologií je Hausdorffovým prostorem.
Návod: Vzdálenost dvou různých bodů je vždy kladná. Zvolte okolí bodů x a y jako otevřené koule vhodného poloměru.

9. Existuje metrika, která by indukovala triviální topologii (příklad 9.5 druhého dílu)? K odpovědi využijte výsledku předchozí úlohy.

10. Ukažte, že diskrétní metrika zavedená v příkladu 2.19 splňuje vlastnosti (2.4). Dále ukažte, že tato metrika indukuje diskrétní topologii (příklad 9.5 druhého dílu). Jak vypadají otevřené koule pro našeho šíleného taxikáře? Ukažte, že diskrétní metrika je příkladem metriky, která není indukovaná žádnou normou. Jak by taková „diskrétní“ norma musela být zadána? Kterou z vlastností (2.6) by však nesplňovala?

11. Ukažte, že pampelišková metrika zavedená v příkladu 2.20 splňuje vlastnosti (2.4). Nakreslete otevřené koule v pampeliškové metrice. Je topologie indukovaná touto metrikou ekvivalentní s přirozenou topologií? Zdůvodněte. Existuje norma na $\mathbf{R}^2$, která indukuje pampeliškovou metriku?
Návod: Pro důkaz trojúhelníkové nerovnosti si rozdělte situaci na tři případy. (1. Body A, B a C leží na stejné polopřímce procházející počátkem. 2. Dva body leží na stejné polopřímce, třetí na jiné. 3. Každý z bodů leží na jiné polopřímce procházející počátkem.) Také konstrukci otevřených koulí je třeba rozdělit na tři různé případy (střed je počátek, střed je vzdálený od počátku méně než je poloměr koule a střed je vzdálený od počátku více než je poloměr koule.) Norma, indukující metriku ϱ musí splňovat $||\vec{a}|| = \varrho(\vec{a} - \vec{o})$. Zadáte-li takto normu, jakou metriku bude indukovat?

12. Ukažte, že metriky zavedené v příkladech 2.12, 2.13, 2.23, 2.24 splňují vlastnosti (2.4).

13. Rozhodněte, zda následující funkce jsou metrikami na $\mathbf{R}$. Pro každou z funkcí, která splňuje vlastnosti (2.4), určete vzdálenosti $d_1 = \varrho(3,6)$, $d_2 = \varrho(\frac{5}{2}, -12{,}5)$.

a) $\varrho(x,y) = |x| + |y|$ pro $x \neq y$, $\varrho(x,x) = 0$,

b) $\varrho(x,y) = \log_4(|y-x|+1)$,

c) $\varrho(x,y) = \frac{|x-y|}{x^2+y^2}$,

d) $\varrho(x,y) = |[x] - [y]|$, kde $[x]$, značí dolní celou část z x,

e) $\varrho(x,y) = 2^{|x-y|} - 1$,

f) $\varrho(x,y) = |1 - 2^{(x-y)}|$,

g) $\varrho(x,y) = \frac{|y-x|}{|y-x|+5}$.

Výsledky: a) ANO, $d_1 = 9, d_2 = 15$, b) ANO $d_1 = 1, d_2 = 2$, c) NE (trojúhelníková nerovnost), d) NE, (např. $\varrho(1;1{,}5) = 0$), e) NE, f) NE, g) ANO, $d_1 = \frac{3}{8}, d_2 = \frac{3}{4}$.

14. Rozhodněte, zda následující funkce jsou metrikami na množině přirozených čísel $\mathbf{N}$. Pro každou z funkcí, která splňuje vlastnosti (2.4), určete vzdálenosti $d_1 = \varrho(3,5)$, $d_2 = \varrho(35,27)$.

a) $\varrho(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$,

b) $\varrho(n,m) = 2^{-k}$, kde 2^k je nejvyšší mocnina čísla 2, kterou je dělitelné číslo $|n-m|$ beze zbytku, $\varrho(n,n) = 0$,

c) $\varrho(n,m) = \frac{r}{n+m}$, kde r je zbytek po dělení čísla $|m-n|$ číslem 7,

d) $\varrho(n,m) = 1 - \frac{1}{|n-m|+1}$.

Výsledky: a) $d_1 = 2/15, d_2 = 8/945$, b) $d_1 = 1/2, d_2 = 1/8$, c) není metrika, d) $d_1 = 2/3$, $d_2 = 8/9$.

15. Určete vzdálenost $d = \varrho(A,B)$ bodů $A = [12,-2]$ a $B = [4,5]$ v metrice

a) přirozené z příkladu 2.1,

b) součtové z příkladu 2.2,

c) maximální z příkladu 2.3,

d) diskrétní z příkladu 2.19,

e) pampeliškové z příkladu 2.20.

Výsledky: a) $d = \sqrt{113}$, b) $d = 15$, c) $d = 8$, d) $d = 1$, e) $d = \sqrt{148} + \sqrt{41}$.

16. Určete následující vzdálenosti v příslušných metrikách:

a) $d = \varrho_c(f,g)$ funkcí $f = x^2$, $g = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ v metrice stejnoměrné konvergence z příkladu 2.10,

b) $d = \varrho_I(f,g)$ funkcí $f = x^2$, $g = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ v integrální metrice z příkladu 2.11,

c) $d = \varrho(a,b)$ posloupností $a = \{2^{-n}\}_{n\in\mathbf{N}}$, $b = \{(-2)^{-n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ v metrice z příkladu 2.13,

d) $d = \varrho_B(a,b)$ posloupností $a = \left\{\left[\frac{n}{10}\right]\right\}_{n\in\mathbf{N}}$, $b = \left\{\left[\frac{2n}{30}\right]\right\}_{n\in\mathbf{N}}$, kde symbol $[x]$ značí dolní celou část z x, v metrice z příkladu 2.12,

e) $d = \varrho(G,B)$ vrcholů neohodnoceného grafu na obrázku 2.11 vlevo,

f) $d = \varrho(G,B)$ vrcholů grafu s ohodnocenými hranami na obrázku 2.11 vpravo,

g) vzdálenost slov „matematik“ a „pomatenec“ v metrice zavedené v příkladu 2.23.

Výsledky: a) $d = 16^{-\frac{1}{6}} - 16^{-\frac{2}{3}}$, b) $d = \frac{1}{3}$, c) $d = 1$, d) $d = \frac{1}{10}$, e) $d = 3$ f) $d = 5$, g) $d = 5$.

17. Na podmnožině $M \subset C[a,b]$ polynomů stupně nejvýše dva (tj. $M = \{Ax^2 + Bx + C | A, B, C \in \mathbf{R}\}$) odvoďte vzorec pro výpočet vzdálenosti v integrální metrice (příklad 2.11) pomocí koeficientů A, B, C.
Výsledek: $\varrho_I(P_1, P_2) = \frac{1}{3}(A_1 - A_2)(b^3 - a^3) + \frac{1}{2}(B_1 - B_2)(b^2 - a^2) + (C_1 - C_2)(b - a)$.

18. Cestovatel na povrchu Země (sféra) používá tři různé metriky:

a) Vzdálenost dvou bodů A, B na povrchu koule je dána délkou kratšího z oblouků hlavní kružnice (tj. kružnice se středem ve středu koule) spojující body A, B.

b) Vzdálenost dvou bodů A, B na povrchu koule je dána euklidovskou vzdáleností obrazů těchto bodů při stereografické projekci ze severního pólu do $\mathbf{R}^2$. Tj. cestovatel měří vzdálenost v mapě, přičemž obraz bodu A na mapě je průsečíkem roviny rovníku s polopřímkou NA spojující severní pól N s bodem A (pro tento případ musíme severní pól N vyjmout z uvažovaného metrického prostoru).

c) Euklidovskou metriku indukovanou z trojrozměrného prostoru $\mathbf{R}^3$.

Ukažte, že všechny tři metriky splňují vlastnosti (2.4). Pro jednoduchost uvažujte, že sféra je jednotková a vyjádřete u každé z metrik vzorec pro vzdálenost bodů A a B v závislosti na jejich kartézských souřadnicích. Jak budou vypadat tyto vzorce vyjádřené v závislosti na zeměpisné délce a šířce?
Výsledky: Označme (ξ, η, ζ) kartézské souřadnice bodů, $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, (x, y) kartézské souřadnice bodů v rovině $\zeta = 0$, souřadnicové osy $x = \xi$, $y = \eta$.

$$\text{a)} \quad \varrho_a(A,B) = \arccos \frac{\xi_A \xi_B + \eta_A \eta_B + \zeta_A \zeta_B}{\sqrt{\xi_A^2 + \eta_A^2 + \zeta_A^2}\sqrt{\xi_B^2 + \eta_B^2 + \zeta_B^2}} = \arccos\left(\xi_A \xi_B + \eta_A \eta_B + \zeta_A \zeta_B\right),$$

$$\text{b)} \quad \varrho_b(A,B) = \left[\left(\frac{\xi_B}{1-\zeta_B} - \frac{\xi_A}{1-\zeta_A}\right)^2 + \left(\frac{\eta_B}{1-\zeta_B} - \frac{\eta_A}{1-\zeta_A}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{c)} \quad \varrho_C(A,B) = \left[(\xi_B - \xi_A)^2 + (\eta_B - \eta_A)^2 + (\zeta_B - \zeta_A)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

kde $\zeta_A = \sqrt{1 - \xi_A^2 - \eta_A^2}, \zeta_B = \sqrt{1 - \xi_B^2 - \eta_B^2}$. Vyjádření pomocí zeměpisné délky φ a zeměpisné šířky ϑ dostaneme dosazením $\xi = \cos\vartheta \cos\varphi$, $\eta = \cos\vartheta \sin\varphi$, $\zeta = \sin\vartheta$.

19. V přirozené topologii na $\mathbf{R}$ jsou právě dvě množiny, $\emptyset$ a $\mathbf{R}$, které jsou otevřené i uzavřené současně. Naopak, v diskrétní topologii jsou otevřené a současně uzavřené všechny podmnožiny $\mathbf{R}$. Uvažujme o množině $\mathbf{Q}$ všech racionálních čísel s metrikou $\varrho(x, y) = |x - y|$, metrická topologie na $\mathbf{Q}$ bude totožná s topologií *indukovanou* přirozenou topologií. Popište, jak vypadají v tomto prostoru podmnožiny, které jsou současně otevřené i uzavřené.
Výsledek: Jsou to množiny tvaru $\mathbf{Q} \cap (a, b)$, kde čísla a, b jsou iracionální (a jejich sjednocení).

20. Rozhodněte, zda norma na $C[a,b]$ indukující integrální metriku (příklad 2.11), tj. norma $||f|| = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$ splňuje rovnoběžníkové pravidlo. V kladném případě zadejte skalární součin na $C[a,b]$, který tuto normu indukuje (viz příklad 2.15).

Výsledek: Splňuje, $(f, g) = \int\limits_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x$.

21. Na množině polynomů stupně nejvýše 2 je zadán skalární součin

a) $(p, q) = \int\limits_0^1 p(x) q(x) \mathrm{d}x$,

b) $(p, q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$.

Jakou normu a metriku v každém z případů skalární součin indukuje?

Výsledky: a) $||p|| = \left[\int_0^1 p^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$, $\varrho(p,q) = ||p-q||$, b) $||p|| = \left[p^2(-1)+p^2(0)+p^2(1)\right]^{\frac{1}{2}}$, $\varrho(p,q) = = ||p-q||$.

22. Lidé často mluví o členech své rodiny jako o „blízkých" nebo „vzdálených" příbuzných. Definujte metriku na množině členů rodiny tak, aby splňovala vlastnosti (2.4) a vystihovala vaši představu o „vzdálenosti".

23. Ukažte, že všechny metriky, které je možné zadat na konečné množině, jsou navzájem ekvivalentní.
Návod: Ukažte, že jediná Hausdorffova topologie (úloha 8) na konečné množině je topologie diskrétní.

24. Na tříprvkové množině $M = \{A, B, C\}$ zaveďte tři různé metriky. Dále uveďte příklad tří zobrazení, která splňují právě dvě z pravidel (2.4), zatímco třetí pravidlo nesplňují, tedy metrikami nejsou.

25. Ukažte, že všechny normy zavedené vztahem (2.10) splňují pravidla (2.6) pro $k \geq 1$ a nesplňují trojúhelníkovou nerovnost pro $k < 1$.

26. Ukažte, že pro $k \in [1, \infty)$ je množina l_k všech posloupností $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, pro které řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^k$ konverguje, vektorovým podprostorem ve vektorovém prostoru V všech posloupností. Změní se situace, bude-li $k < 1$?

27. Ukažte, že pro každou množinu U otevřenou v metrické topologii τ_ϱ a každý bod $x \in U$ existuje otevřená koule $B(x, \varepsilon) \subset U$ (tj. každé okolí obsahuje s každým svým bodem nějaké symetrické okolí tohoto bodu).

28. V metrikách ϱ_k z příkladu 2.18 určete vzdálenost bodu (jako jednoprvkové množiny) $A = \{\frac{1}{n^2}\}_{n\in\mathbf{N}}$ od množiny $X = \{\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \mid a_1 = a_2\}$ pro $k = 1, 2, \infty$.
Výsledek: $\varrho_1(A,\, X) = \frac{3}{4}$, $\varrho_2(A,\, X) = \frac{3\sqrt{2}}{8}$, $\varrho_\infty(A,\, X) = \frac{3}{8}$.

29. Určete průměr množiny $X_1 = \{f \in C[0,1] \mid f = K,\ |K| \leq 2\}$ a množiny $X_2 = \{g \in C[0,1] \mid g = = ax + b,\ |a| < 1,\ |b| < 1\}$ v metrickém prostoru $(C[0,1], \varrho_I)$ — integrální metrika i v metrickém prostoru $(C[0,1], \varrho_c)$ — metrika stejnoměrné konvergence.
Výsledek: V integrální metrice: $d(X_1) = 4$, $d(X_2) = 3$, v metrice stejnoměrné konvergence: $d(X_1) = 4$, $d(X_2) = 4$.

30. Určete vzdálenost množiny $X = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$ od množiny $Y = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \mid x+y = 2\}$ a průměr množiny X v euklidovské, součtové i maximální metrice.
Výsledek: Vzdálenost je ve všech případech nulová, obě množiny obsahují bod $(x, y) = (1, 1)$. Průměr v euklidovské $d(X) = 2\sqrt{2}$, v součtové $d(X) = 4$, v maximální $d(X) = 2$.

31. Ukažte, že zobrazení ϱ^* z příkladu 2.25 splňuje axiomy metriky a že na množině $\mathbf{R}$ je tato metrika ekvivalentní euklidovské metrice ϱ.

32. Dokažte: Metriky ϱ_1 a ϱ_2 jsou ekvivalentní právě tehdy, když ke každé otevřené kouli $B_1 = B_{\varrho_1}(x, \varepsilon)$ v metrice ϱ_1 existuje otevřená koule $B_2 = B_{\varrho_2}(x, \delta)$ v metrice ϱ_2 tak, že $B_2 \subset B_1$, a ke každé otevřené kouli $B_2' = \varrho_2(x, \delta')$ v metrice ϱ_2 existuje otevřená koule $B_1' = B_{\varrho_1}(x, \varepsilon')$ v metrice ϱ_1 tak, že $B_1' \subset B_2'$.

33. Určete vnitřek, vnějšek a hranici množiny $A \subset \mathbf{R}^n$ (s přirozenou topologií) v následujících případech:

a) $A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$,

b) $A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid ||x|| = 1\}$.

Výsledky: a) $\mathrm{int}A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid ||x|| < 1\}$, $\mathrm{ext}A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid ||x|| > 1\}$, $\mathrm{h}A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid ||x|| = 1\}$, b) $\mathrm{int}A = \emptyset$, $\mathrm{ext}A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid ||x|| \neq 1\}$, $\mathrm{h}A = A$.

34. Ukažte, že

$$B \subset A \Longrightarrow \mathrm{int}B \subset \mathrm{int}A, \quad \text{a} \quad B \subset A \Longrightarrow \mathrm{ext}B \supset \mathrm{ext}A.$$

35. Ukažte, že uzávěr $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující A v následujícím smyslu: Je-li B uzavřená množina, pro kterou $A \subset B$, pak $\overline{A} \subset B$.

36. Charakterizujte množiny, pro které $\mathrm{h}A = \emptyset$.
Výsledek: Množiny, které jsou zároveň otevřené i uzavřené.

37. Rozhodněte, zda platí

$$\mathrm{h}A \cup \mathrm{h}B = \mathrm{h}(A \cup B) \cup \mathrm{h}(A \cap B).$$

Pokud ano, dokažte, v opačném případě uveďte protipříklad.
Výsledek: Neplatí, např. $A = \mathbf{Q}$, $B = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ v prostoru $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií.

38. Ukažte, že pro normu na vektorovém prostoru čtvercových matic řádu n zavedenou v příkladu 2.21: $||A|| = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^T)}$ platí:

a) $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$ (normy na vektorovém prostoru matic splňující tuto vlastnost nazýváme *maticové*),

b) $||M|| \leq q < 1 \longrightarrow (E - M)$ je regulární,

c) konverguje-li posloupnost UA_i k matici E, pak posloupnost A_i konverguje k matici U^{-1}.

Úlohu c) řešte až po přečtení definice konvergence v následujícím odstavci.

39. Ukažte, že pro normu (2.12) platí

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||, \quad ||A^k|| \leq ||A||^k.$$

2.2 Konvergence aneb přibližování

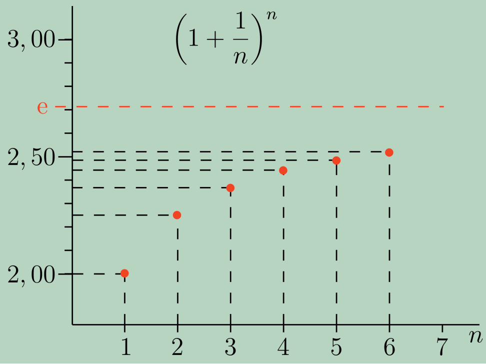
Již v prvním dílu jsme se naučili počítat limity funkcí a posloupností. V dalším dílu jsme pojem limity funkce zobecnili pro funkce více proměnných a pojem limity posloupnosti (částečných součtů) nám umožnil definovat konvergenci řady a její součet. Vzpomínáte si, že u posloupností a řad tvořených funkcemi jsme rozlišovali dva typy konvergence — bodovou a stejnoměrnou? Zopakujte si nejprve definice pojmů, abychom je v této kapitole mohli uvést do souvislosti s metrikou, normou a topologií. Limitu posloupnosti prvků libovolného metrického prostoru nyní definujeme „univerzálně“ pomocí vzdálenosti. Budeme se snažit, aby naše znalosti konvergovaly alespoň k základům funkcionální analýzy, tolik užitečné ve fyzice i aplikovaných vědách.

2.2.1 Konvergentní a Cauchyovská posloupnost

Základ přirozených logaritmů jako „mezera“ v množině racionálních čísel:
V několika příkladech prvního i druhého dílu jsme se zabývali posloupností

$$\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

Všimněte si, že je to posloupnost tvořená *pouze* racionálními čísly. Její limitou je však iracionální číslo e. Na první pohled se může zdát tato skutečnost nezajímavá. Ukazuje však na velmi zásadní rozdíl mezi vlastnostmi racionálních a reálných čísel.



n	1	2	3	4	5	6	...
a_n	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{64}{27}$	$\frac{625}{256}$	$\frac{7776}{3125}$	$\frac{117649}{46656}$	...

Obr. 2.12 Chybějící limita?

Členy posloupnosti se navzájem k sobě „přibližují“ pro rostoucí n (obrázek 2.12). I přes toto přibližování nemá posloupnost limitu v množině $\mathbf{Q}$, do níž patří všechny její členy. Budeme-li tutéž posloupnost chápat jako posloupnost reálných čísel, mezera se „zacelí“, na místo chybějící limity se usadí číslo e. Metrický prostor $(\mathbf{Q}, \varrho)$ není „úplný“, zatímco $(\mathbf{R}, \varrho)$ ano. Úplnost prostorů souvisí s existencí limit posloupností a součtů řad — hraje tedy roli opravdu důležitou.

Pojmy naznačené v předchozím příkladu nyní precizujeme definicí. Posloupností bodů metrického prostoru (M, ϱ) budeme rozumět zobrazení $\mathbf{N} \ni n \to a_n \in M$. Takovou posloupnost označujeme podle zvyku $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ (případně jen $\{a_n\}$).

Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ prvků metrického prostoru (M, ϱ) se nazývá *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $m, n > n_0$ platí $\varrho(a_m, a_n) < \varepsilon$.

Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ prvků metrického prostoru (M, ϱ) se nazývá *konvergentní*, jestliže má limitu, tj. existuje prvek $L \in M$, pro který platí: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $\varrho(a_n, L) < \varepsilon$. Píšeme pak

$$a_n \longrightarrow_{\varrho} L.$$

Zda je nějaká posloupnost cauchyovská či konvergentní není dáno pouze jejími členy, ale také tím, v jakém metrickém prostoru (M, ϱ) s ní pracujeme (příklady 2.26 a 2.27). Sami si jistě snadno rozmyslíte, že posloupnost konvergentní v nějakém metrickém prostoru je v něm cauchyovská. Naopak to neplatí, jak ukazuje motivační příklad v úvodu odstavce. To nám umožňuje definovat pojem úplnosti metrického prostoru.

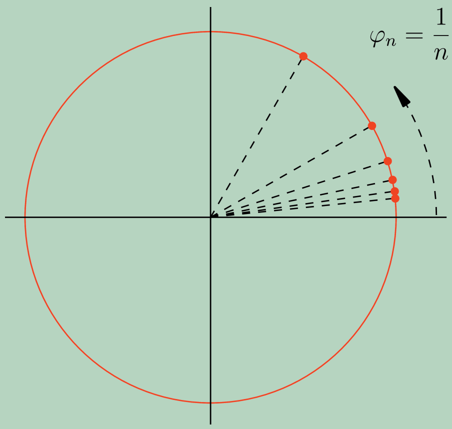
Metrický prostor (M, ϱ) nazýváme *úplný*, jestliže každá posloupnost, v tomto prostoru cauchyovská, je v něm také konvergentní. Úplný normovaný lineární prostor se nazývá *Banachův*, úplný unitární prostor *Hilbertův* (metriku uvažujeme indukovanou normou resp. skalárním součinem).

Příklad 2.26: Na metrice záleží

Uvažujme množinu $\mathbf{R}^2$ jednak jako metrický prostor $(\mathbf{R}^2, \varrho)$ s euklidovskou metrikou z příkladu 2.1 a také jako metrický prostor $(\mathbf{R}^2, \varrho_p)$ s pampeliškovou metrikou z příkladu 2.20. Zvolme posloupnost bodů $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ ležících na jednotkové kružnici se středem v počátku tak, že úhel, který svírá průvodič bodu A_n s osou x je $\varphi_n = \frac{1}{n}$. Bod A_n má v polárních resp. kartézských souřadnicích vyjádření

$$A_n = (r_n, \varphi_n) = \left(1, \frac{1}{n}\right), \quad \text{resp.} \quad A_n = (x_n, y_n) = \left(\cos\frac{1}{n}, \sin\frac{1}{n}\right).$$

Situaci znázorňuje obrázek 2.13. V euklidovské metrice konverguje tato posloupnost bodů k bodu $A =$



n	1	2	3	4	5	6	...
φ_n	57,3	28,7	19,2	14,3	11,5	9,55	...

Obr. 2.13 K příkladu 2.26.

$= (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$. Ukážeme to. Vzdálenost členu A_n od předpokládané limity A je

$$\varrho(A_n, A) = \sqrt{\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)^2 + \left(\sin\frac{1}{n} - 0\right)^2} = \sqrt{\cos^2\frac{1}{n} - 2\cos\frac{1}{n} + 1 + \sin^2\frac{1}{n}} =$$

$$= \sqrt{2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{4\sin^2\frac{1}{2n}} = \left|2\sin\frac{1}{2n}\right|.$$

Zvolme ε libovolné. Položíme-li $n_0 \geq \frac{1}{4\varepsilon}$, pak pro každé $n > n_0$ platí

$$\varrho(A_n, A) = 2\sin\frac{1}{2n} < 2\sin\frac{1}{2n_0} \leq 2\sin\frac{\varepsilon}{2} < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bod A je tak limitou uvažované posloupnosti (posloupnost konverguje) v euklidovském prostoru.

V pampeliškové metrice je

$$\varrho(A_n, A_m) = 2 \quad \text{pro každé} \quad n \neq m \in \mathbf{N}.$$

Posloupnost není v pampeliškovém prostoru ani cauchyovská, nemůže mít limitu.

Příklad 2.27: Na množině záleží

Uvažujme metrické prostory $(\mathbf{Q}, \varrho)$ a $(\mathbf{R}, \varrho)$ s euklidovskou metrikou a posloupnost uvedenou v motivačním příkladu na začátku odstavce

$$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbf{N}}.$$

Přestože je metrika u obou prostorů zadána stejným předpisem

$$\varrho(a, b) = |b - a|,$$

konverguje posloupnost v metrickém prostoru $(\mathbf{R}, \varrho)$ k limitě e, zatímco v metrickém prostoru $(\mathbf{Q}, \varrho)$ limitu nemá. V obou prostorech je cauchyovská (dokažte).

Příklad 2.28: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu

Jako příklad ukážeme, že posloupnost může mít jen jedinou limitu. (Takový důkaz jsme již dělali pro funkci jedné proměnné v prvním dílu. Vzpomínáte?) Připusťme, že by posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konvergovala současně ke dvěma různým limitám, řekněme $A \neq B$ v metrickém prostoru (M, ϱ). Označme vzdálenost $\varrho(A, B) = \alpha > 0$ a zvolme $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$. Podle definice existují indexy $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ tak, že

$$\varrho(a_n, A) < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad n > n_1, \qquad \varrho(a_n, B) < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad n > n_2.$$

Pro každý prvek a_m, kde $m > \max\{n_1, n_2\}$, platí

$$\varrho(a_m, A) + \varrho(a_m, B) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2} < \alpha = \varrho(A, B).$$

To je však spor s trojúhelníkovou nerovností. Náš předpoklad byl tedy nesprávný — posloupnost nemůže mít dvě různé limity.

Příklad 2.29: Konvergence jako topologický pojem

Podívejme se nyní na definici konvergence očima topologie. Souvislost definice limity v metrickém prostoru a v topologickém prostoru se nám bude hodit v příštím odstavci.

> Bod L topologického prostoru (M, τ) je *limitou* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L) \in \tau$ bodu L existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n \in \mathcal{O}(L)$. Říkáme, že $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje k L v topologii τ a píšeme
>
> $$\{a_n\} \longrightarrow_\tau L.$$

Je-li topologický prostor současně metrickým a jeho topologie je asociovaná s metrikou, definice splývají (podrobněji to rozebereme v následujícím příkladu).

V topologických prostorech, jejichž topologie nepochází z metriky, však nemusí tato definice vždy dávat smysl: Uvažme jakoukoli posloupnost bodů triviálního metrického prostoru (M, τ), $\tau = \{\emptyset, M\}$. Pro libovolný bod $L \in M$ je jeho jediným okolím celý prostor M. Proto je pro každé L splněna definice limity triviálně, všechny posloupnosti konvergují a to dokonce ke všem bodům množiny M současně. Naše tvrzení z předchozího příkladu, že posloupnost má nejvýše jednu limitu, by neplatilo a samotný pojem konvergence by ztrácel svůj původní význam.

Definice limity z tohoto příkladu bude fungovat v topologických prostorech, splňujících axiom oddělitelnosti (úloha 8 Cvičení 2.1.7):

> Topologický prostor (M, τ) se nazývá *Hausdorffův* (neboli *oddělitelný*), jestliže pro každé dva body $A \neq B$ existují otevřené množiny U, V takové, že $A \in U$, $B \in V$ a $U \cap V = \emptyset$.

Ukažte, že v Hausdorffově prostoru má každá posloupnost nejvýše jednu limitu.

Příklad 2.30: Ekvivalentní metriky z hlediska konvergence posloupností

Předpokládejme nyní, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje v metrickém prostoru (M, ϱ) k limitě L. Zvolme libovolné okolí U bodu L v topologii asociované s metrikou. Každé takové okolí musí obsahovat nějakou otevřenou kouli tvaru $B(L, \varepsilon) \subset U$ (Cvičení, 2.1.7 úloha 27). K tomuto ε pak najdeme index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $\varrho(L, a_n) < \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$, neboť $\{a_n\} \longrightarrow_\varrho L$. Platí $a_n \in U$ pro všechna $n > n_0$ a posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje k limitě L také v metrické topologii τ_ϱ (podle definice v příkladu 2.29).

Naopak, nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje k L v metrické topologii τ_ϱ. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné a sestrojme okolí bodu L takto: $U = B(L, \varepsilon) = \{x \in M \,|\, \varrho(x, L) < \varepsilon\}$. K okolí U nalezneme index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $a_n \in U$ pro všechna $n > n_0$, neboť $\{a_n\} \longrightarrow_{\tau_\varrho} L$. Je tedy $\varrho(L, a_n) < \varepsilon$ pro všechna $n > n_0$ a posloupnost konverguje k L v metrice ϱ.

Celkem dostáváme: Posloupnost konverguje k bodu L v metrice ϱ právě tehdy, když konverguje k bodu L v topologii τ_ϱ s touto metrikou asociované.

V předchozím příkladu jsme ukázali důležité tvrzení:

> **Věta 2.2:** *Metriky ϱ_1 a ϱ_2 na množině M jsou ekvivalentní (indukují stejnou topologii) právě tehdy, když pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ platí*
>
> $$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \longrightarrow_{\varrho_1} L \quad \Longleftrightarrow \quad \{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \longrightarrow_{\varrho_2} L.$$

Všichni taxikáři z odstavce 2.1.1 posuzují konvergenci svých posloupností stejně — jejich metriky totiž indukují tutéž (přirozenou) topologii.

Pozn.: Poznamenejme, že všechny metriky ve vektorovém prostoru *konečné* dimenze indukované nějakou normou, jsou navzájem ekvivalentní. Důkaz této skutečnosti sahá nad rámec naší učebnice.

Příklad 2.31: Cauchyovské a konvergentní posloupnosti v diskrétním prostoru

Diskrétní metrika šíleného taxikáře z příkladu 2.19 není ekvivalentní metrikám našich „normálních“ taxikářů — indukuje totiž diskrétní topologii. Není to snad nesoulad s předchozí poznámkou? Nikoli – v úloze 10 Cvičení

2.1.7 jste ukázali, že diskrétní metrika nemá žádnou normu. Podívejme se na konvergenci posloupností v této metrice.

Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje k bodu L v diskrétním metrickém prostoru (M,ϱ_d), kde

$$\varrho_d(A,B)=\begin{cases}0 & \text{pro} \quad A=B,\\ 1 & \text{pro} \quad A\neq B.\end{cases}$$

Má-li být L limitou posloupnosti, musí pro každé ε, například i pro $\varepsilon=\frac{1}{2}$, existovat $n_0\in\mathbf{N}$ tak, že $\varrho_d(L,a_n)<\varepsilon$ pro všechna $n>n_0$. Z toho ovšem vyplývá, že $a_n=L$ pro všechna $n>n_0$, neboť všechny body s výjimkou L mají od L vzdálenost rovnou jedné. K číslu L konvergují všechny takové posloupnosti, které mají nejvýše konečný počet členů různých od L. Říkáme jim *skorostacionární.* Žádné jiné posloupnosti v diskrétním prostoru limitu nemají. Proveďte podobnou úvahu pro vlastnost posloupností „být cauchyovská“.

Příklad 2.32: Konvergence v prostorech funkcí

Vraťme se k metrikám zavedeným v příkladech 2.10 a 2.11. Připomeňme, že metrika stejnoměrné konvergence na množině funkcí spojitých na intervalu $[0,1]$ je dána vztahem

$$C[0,1]\times C[0,1]\ni(f,g)\longrightarrow\varrho_c(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)|\mid x\in[0,1]\}$$

a integrální metrika vztahem

$$C[0,1]\times C[0,1]\ni(f,g)\longrightarrow\varrho_I(f,g)=\int\limits_0^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

Uvažujme posloupnost funkcí

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2\left(x-x^2-\frac{1}{4}\right)+1 & \text{pro} \quad x\in\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{v ostatních případech}\end{cases}$$

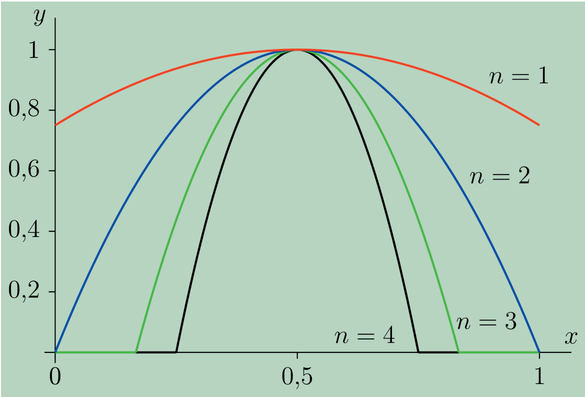
Ověřte, že grafy členů posloupnosti jsou paraboly s vrcholem $[\frac{1}{2},1]$ a kořeny $x_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$ (obrázek 2.14). Počítejme vzdálenost dvou libovolných členů v metrice stejnoměrné konvergence. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $n>m$:

$$\varrho_c(f_n,f_m)=\max\{|f_n(x)-f_m(x)|\mid x\in[0,1]\}=f_m(a)-f_n(a),$$

kde bod a odpovídá absolutnímu maximum rozdílu funkčních hodnot. Z obrázku je vidět, že jde o bod $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$ nebo $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$, ve kterém je funkce f_n nulová a rozdíl funkčních hodnot nabývá své největší hodnoty (proveďte přesnou úvahu). Vzdálenost je rovna

$$f_m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)-0=m^2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+1=1-\frac{m^2}{n^2}.$$

Zvolíme-li nyní libovolné m a například $n=2m$, je $\varrho_c(f_n,f_m)=\frac{3}{4}$. Posloupnost tedy není cauchyovská (například pro $\varepsilon<\frac{3}{4}$ nenajdeme n_0 tak, aby pro všechna $n,m>n_0$ platilo $\varrho_c(f_n,f_m)<\varepsilon$). Posloupnost nemůže být v metrice ϱ_c konvergentní.



Obr. 2.14 K příkladu 2.32.

Ukážeme, že v integrální metrice konverguje posloupnost k nulové funkci $f(x) = 0$. Vzdálenost

$$\varrho_I(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left[n^2 \left(x - x^2 - \frac{1}{4} \right) + 1 \right] \mathrm{d}x = \frac{4}{3n},$$

integraci a dosazení mezí proveďte sami. Zvolíme-li $\varepsilon > 0$ libovolné a označíme-li $n_0 \geq \frac{4}{3\varepsilon}$, pak pro každé $n > n_0$ je $\varrho_I(f_n, f) < \varepsilon$.

Ani tento příklad neznamená nesoulad s předchozí poznámkou — každá z obou neekvivalentních metrik má sice svoji normu (jakou?), ale vektorový prostor funkcí není konečněrozměrný.

2.2.2 Topologické pojmy očima metriky

V kapitole 9 druhého dílu jsme v topologických prostorech zavedli pojmy otevřené a uzavřené množiny, omezené, kompaktní a souvislé množiny, hromadného a izolovaného bodu, spojitosti a limity zobrazení vzhledem k nějaké množině, apod. V tomto odstavci formou příkladů uvedeme pojmy do souvislosti s metrikou a ukážeme, že pro metrickou topologii lze každý z nich definovat pomocí vzdálenosti.

Podmnožina X metrického prostoru (M, ϱ) se nazývá *ohraničná* (nebo také *omezená*, jestliže pro její průměr platí $d(X) < \infty$.

Příklad 2.33: Ohraničená množina

V odstavci 9.1.2 druhého dílu jsme zavedli ohraničenou množinu jiným způsobem. Byla to taková množina, která se „vejde“ do nějakého otevřeného kvádru. Ukážeme, že naše nová definice je ekvivalentní. Zvolme množinu $X \subset \mathbf{R}^n$, kde v $\mathbf{R}^n$ je zavedena euklidovská topologie.

Nechť je průměr množiny $d(X) = d$ konečné číslo. Zvolme libovolný bod A množiny X a uvažme otevřenou kouli $B(A, d+1)$ se středem A a poloměrem $d+1$. Platí $X \subset B(A, d+1)$. Pokud by totiž nějaký bod $C \in X$ nebyl prvkem $B(A, d+1)$, muselo by platit $\varrho(A, C) \geq d + 1 > d$. To se ovšem nemůže stát (průměr množiny d je definován jako suprémum vzdáleností všech dvojic bodů, žádné dva body $A, C \in X$ nemohou mít větší vzdálenost než d. Množina X se tak „vejde“ do otevřené koule $B(A, d+1)$. Ke každé otevřené kouli existuje otevřený kvádr, do něhož se tato koule vejde (to jsme ukazovali již v odstavci 9.2).

Nyní naopak předpokládejme, že se množina X „vejde“ celá do nějakého otevřeného kvádru. Víme, že existuje otevřená koule $B(A, \varepsilon)$, do níž se „vejde“ celý tento kvádr, zejména platí $X \subset B(A, \varepsilon)$. Vzdálenost libovolných dvou bodů množiny X tak nemůže převýšit hodnotu 2ε (rozmyslete proč — využijte trojúhelníkové nerovnosti). Proto musí být průměr množiny X konečné číslo.

Podmnožinu X metrického prostoru (M, ϱ) nazveme *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ jejích bodů lze vybrat konvergentní podposloupnost (tj. podposloupnost, která konverguje k limitě $L \in M$).

Příklad 2.34: Kompaktní množina

V dodatku F prvního dílu jsme kompaktní množinu definovali jinak: Množina X je kompaktní, jestliže z každého jejího otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí (které množinu X rovněž pokrývá).

Naše nová definice kompaktnosti je s touto původní ekvivalentní. Ukážeme alespoň jeden směr ekvivalence definic. Obrácený směr je technicky složitější a čtenář jej nalezne v literatuře zaměřené na topologii (Lebesgueovo lemma).

Předpokládejme, že množina X není kompaktní podle naší nové definice. Existuje tedy posloupnost $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ bodů množiny X, z níž nelze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou ležící v X. Žádný z bodů množiny X nemůže být hromadným bodem této posloupnosti, pro každý takový bod $x \in X$ označme $\varepsilon_x = \inf\{\varrho(x, A_n), x \neq = A_n, n \in \mathbf{N}\} > 0$ (pokud by toto infimum bylo nulové, jednalo by se o hromadný bod) a sestrojme pokrytí množiny X otevřenými koulemi $B(x, \varepsilon_x)$. Z tohoto pokrytí zjevně nelze vybrat konečné podpokrytí, které by pokrývalo celou množinu X (každá koule obsahuje nejvýše jeden bod posloupnosti, ale ta je nekonečná). Množina není kompaktní ani podle původní topologické definice.

Zbývá najít souvislost předchozích pojmů s definicí kompaktnosti, která se objevila v odstavci 9.1.2 v poněkud speciálním případě — podmnožina $X \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá kompaktní, jestliže je uzavřená a omezená (prostor $\mathbf{R}^n$ jsme uvažovali s přirozenou topologií). Klíčem je následující věta (ve Cvičení 2.2.5 uvedeme návod pro jeden směr důkazu).

Věta 2.3: *V normovaném lineárním prostoru konečné dimenze je množina kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a omezená.*

Pozn.: Kritérium kompaktnosti obsažené v předchozí větě ukazuje na jeden ze zásadních rozdílů mezi prostory konečné a nekonečné dimenze. V libovolném metrickém prostoru platí, že kompaktní množina musí být uzavřená i omezená (cvičení). Normovaný lineární prostor je konečněrozměrný právě tehdy, je-li také naopak každá uzavřená a omezená množina kompaktní. V žádném prostoru nekonečné dimenze není jednotková sféra $S(0,1) = \{x \in M\,,\, ||x|| = 1\}$ kompaktní množina, přestože je uzavřená a omezená.

Podobně bychom mohli s využitím metriky a konvergence formulovat další „nové“ definice již dříve zavedených topologických pojmů.

V metrickém prostoru (M, ϱ) je bod x *hromadným* bodem množiny X (přičemž může, ale nemusí být jejím prvkem), jestliže existuje posloupnost bodů množiny $X \setminus \{x\}$, která konverguje k x. Analogicky lze říci: Hromadný bod množiny X je takový bod x, jehož vzdálenost od množiny X je nulová ($\varrho(x, X) = 0$).

Bod patřící do množiny X je jejím *izolovaným* bodem, jestliže není jejím hromadným bodem.

Podmnožina X metrického prostoru (M, ϱ) je *uzavřená*, jestliže obsahuje všechny své hromadné body. Podmnožina metrického prostoru (M, ϱ) je *otevřená*, jestliže její doplněk je uzavřená množina.

Že jsou (pro případ metrických prostorů) předchozí definice ekvivalentní těm z druhého dílu si jistě čtenář snadno rozmyslí sám. K jejich zavedení jsme nyní využili pojmu konvergence (spjatého s metrikou). Můžeme tak „nové“ definice chápat spíše jako tvrzení poukazující na souvislost „topologického“ a „metrického“ přístupu. V dalším textu se budeme vždy odvolávat na tu definici, jež pro nás bude v konkrétní situaci příhodnější, někdy nám bude vyhovovat spíše topologiká verze, jindy naopak metrická.

Uveďme ještě „metrickou“ definici limity a spojitosti zobrazení metrických prostorů.

Nechť (M_1, ϱ_1) a (M_2, ϱ_2) jsou metrické prostory, $D \subset M_1$ a $f : D \to M_2$ zobrazení definované v nějakém ryzím okolí bodu $x_0 \in M_1$. Řekneme, že bod L je *limitou zobrazení f v bodě x_0*, a píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$0 < \varrho_1(x, x_0) < \delta \Longrightarrow \varrho_2(L, f(x)) < \varepsilon.$$

Je-li navíc zobrazení f v bodě x_0 definováno a platí-li $f(x_0) = L$, říkáme, že zobrazení f je *spojité v bodě x_0*.

Definice využívá pojmu metriky. Čtenář si jistě sám dokáže rozmyslet, že v situaci, kdy uvažujeme na množinách M_1 resp. M_2 topologii indukovanou metrikami ϱ_1 resp. ϱ_2, je tato definice ekvivalentní „topologické“ definici z druhého dílu (formulované pomocí okolí na straně 460). V odstavci 9.1 druhého dílu se objevily celkem čtyři různé definice (limita, limita vzhledem k množině). Pokuste se i další tři přeformulovat pomocí metrického přístupu.

Závěrem uvedeme definice dvou topologických pojmů, užitečných ve funkcionální analýze (setkali jsme se s nimi již ve druhém dílu), které později využijeme ve cvičení.

Množina $A \subset X$ se nazývá *hustá* v topologickém prostoru X, jestliže pro její uzávěr platí $\overline{A} = X$. Topologický prostor X se nazývá *separabilní*, pokud existuje jeho hustá podmnožina, která je nejvýše spočetná.

Pozn.: Takovou vlastnost má například podmnožina $\mathbf{Q}$ racionálních čísel v prostoru $\mathbf{R}$ reálných čísel s přirozenou topologií. Vzhledem k tomu, že množina $\mathbf{Q}$ je spočetná, je prostor reálných čísel separabilní. Uvažujeme-li metriku na množině reálných čísel, lze laicky říci, že v „libovolné blízkosti“ libovolného reálného čísla leží alespoň jedno číslo racionální. Zformulujte „metrickou“ definici husté množiny — na řadu opět přijde ε.

2.2.3 Úplné a neúplné metrické prostory

V tomto stručném odstavci si pouze rozebereme příklady některých metrických prostorů, s nimiž jsme se setkali, z hlediska jejich úplnosti. Připomeňme, že úplný metrický prostor (Banachův) je takový, ve kterém je každá Cauchyovská posloupnost konvergentní (tj. má v něm svoji limitu).

Nejprve uveďme fakta v přehledné tabulce:

Úplný metrický prostor	**Neúplný metrický prostor**
$(\mathbf{R}^n, \varrho)$ z příkladu 11.1	$(\mathbf{Q}^n, \varrho)$
$(\mathbf{R}^n, \varrho_1)$ z příkladu 11.2	$(\mathbf{Q}^n, \varrho_1)$
$(\mathbf{R}^n, \varrho_\infty)$ z příkladu 11.3	$(\mathbf{Q}^n, \varrho_\infty)$
$(\mathbf{R}^n, \varrho_k)$ z příkladu 11.17	$(\mathbf{Q}^n, \varrho_k)$
$(l_\infty, \varrho_\infty)$ z příkladu 11.12	
(l_k, ϱ_k) z příkladu 11.18	
(M, ϱ_d) z příkladu 11.19	
$(C[a,b], \varrho_c)$ z příkladu 11.10	$(C[a,b], \varrho_I)$ z příkladu 11.11
každý konečněrozměrný normovaný lineární prostor	

V následujících příkladech se některým skutečnostem věnujeme.

Příklad 2.35: Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřená množina

Uvažujme podprostor $(P, \varrho) \subset (M, \varrho)$. Předpokládejme, že P není uzavřenou množinou v M. Existuje proto hromadný bod x množiny P (bod uzávěru), který do P nepatří. Ke každému hromadnému bodu x množiny P lze sestrojit posloupnost bodů množiny P, jejíž limitou je právě x (Cvičení 2.2.5). Tato posloupnost je cauchyovská, nemá však v množině P limitu. Proto žádná „neuzavřená“ podmnožina P s indukovanou topologií nemůže být úplným metrickým prostorem.

Příklad 2.36: Uzavřená podmnožina v úplném metrickém prostoru je úplný prostor

Uvažujme uzavřenou podmnožinu P v úplném metrickém prostoru M. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je libovolná cauchyovská posloupnost bodů množiny P. Vzhledem k tomu, že M je úplný metrický prostor, má v něm posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ limitu L. Stačí tak ukázat, že $L \in P$. Libovolné okolí bodu L obsahuje alespoň jeden prvek posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, ten je zároveň prvkem množiny P. Proto je bod L hromadným bodem P a patří tedy do uzávěru $\overline{P}$. Množina P je uzavřená, platí $\overline{P} = P$.

V předchozích dvou příkladech jsme odvodili důležitý závěr:

Věta 2.4: *Podprostor úplného metrického prostoru je úplný právě tehdy, je-li uzavřený.*

Pozn. 1: Nyní již nemusíme ukazovat neúplnost podprostorů $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{Q}^n \subset \mathbf{R}^n$ s libovolnou z metrik ϱ_k pro každý případ zvlášť. Víme totiž z předchozích dílů, že podmnožina $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ není uzavřená (je hustá) v přirozené topologii, kterou každá z metrik ϱ_k indukuje.

Pozn. 2: Není předchozí závěr v rozporu se skutečností uvedenou v tabulce, že každý diskrétní metrický prostor (M, ϱ_d) je úplný? Nikoli, v diskrétní topologii je každá podmnožina současně uzavřená i otevřená, to jsme ukazovali ve druhém dílu.

Pozn. 3: Jak bude vypadat situace pro podmnožinu „racionálních posloupností“ (tj. posloupností tvořených pouze racionálními čísly) prostoru $(l_\infty, \varrho_\infty)$ resp. (l_k, ϱ_k) z příkladu 11.12 resp. 11.18?

Příklad 2.37: Úplnost euklidovských prostorů

Ukážeme úplnost reálné osy s metrikou $\varrho(a, b) = |b - a|$. Uvažujme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Zvolme index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, aby platilo $\varrho(a_i, a_j) = |a_j - a_i| < 1$ pro všechna $i, j > n_0$. Do otevřené koule $B(a_k, 1)$, kde $k > n_0$ se tedy „vejdou“ všechny členy posloupnosti s indexem převyšujícím n_0. Posloupnost je ohraničená (zbývajících členů je pouze konečně mnoho, označme $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |a_{n_0}| + 1\}$, platí $|a_i| < M$ pro každé $i \in \mathbf{N}$).

Definujme množinu

$$X = \{x \in \mathbf{R} \,|\, \text{v intervalu } (x, \infty) \text{ leží pouze konečně mnoho členů } a_i\}.$$

Tato množina je neprázdná (plyne z ohraničenosti posloupnosti) a zdola ohraničená (zdůvodněte). Z vlastností reálných čísel víme, že každá neprázdná, zdola ohraničená posloupnost má své infimum, označme $L = \inf X$. Ukážeme, že číslo L je limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Zvolme libovolné okolí bodu L, $\mathcal{O}(L) = (L - \varepsilon_1, L + \varepsilon_2)$. V tomto okolí leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ (zdůvodněte). Takže L je hromadným bodem uvažované posloupnosti, a to jediným (plyne ze skutečnosti, že posloupnost je cauchyovská). Platí proto $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Pro Euklidovský prostor dimenze $n > 1$ lze postupovat indukcí.

Pozn.: V předchozím příkladu jsme využili „axiomu úplnosti“ pro reálná čísla, který znáte z předchozího dílu („Každá neprázdná zdola ohraničená podmnožina $\mathbf{R}$ má v $\mathbf{R}$ infimum.“). Pro racionální čísla uvedené tvrzení neplatí (například množina $A = \{x \,|\, x > 0,\, x^2 > 2\}$ je neprázdná a zdola ohraničná, jejím infimem je však číslo $\sqrt{2}$, které není racionální). Prostor reálných čísel je „zúplněním“ metrického prostoru racionálních čísel. Této problematice se budeme věnovat v následujícím odstavci.

Příklad 2.38: Proč není prostor spojitých funkcí s integrální metrikou úplný?

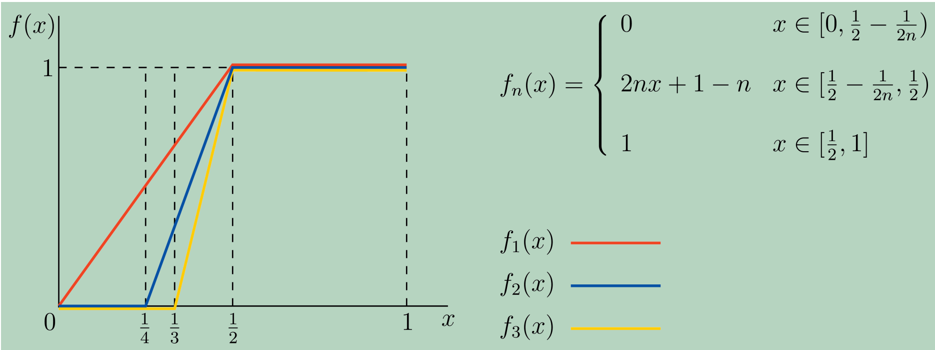
V prostoru $C[0,1]$ funkcí spojitých na intervalu $[0,1]$ s metrikou

$$\varrho_I(f(x), g(x)) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

uvažujme o posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}), \\ 2nx + 1 - n & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2}), \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Situaci znázorňuje obrázek 2.15. Vypočtěme vzdálenost $\varrho(f_n, f_m)$ libovolných dvou členů posloupnosti:



Obr. 2.15 K příkladu 2.38.

$$\varrho(f_n, f_m) = \int\limits_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| = \left| \int\limits_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} [2nx + 1 - n]\mathrm{d}x - \int\limits_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2}} [2mx + 1 - m]\mathrm{d}x \right| =$$

$$= \left| \left[nx^2 + x - nx\right]_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} - \left[mx^2 + x - mx\right]_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2m}}^{\frac{1}{2}} \right| = \left| \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \right|.$$

Posloupnost je cauchyovská, neboť k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ stačí vzít $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ a pro každé $n, m > n_0$ platí

$$\frac{1}{4}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Limitou této posloupnosti je funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

která není spojitá. Limita není prvkem množiny $C[0,1]$, proto metrický prostor $(C[0,1], \varrho_I)$ není úplný.

Příklad 2.39: Úplnost prostoru reálných posloupností

V příkladu 2.18 jsme na množině l_k, $k \in [1, \infty)$, všech reálných posloupností $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, pro které řada

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^k$$

konverguje, zavedli metriku vztahem

$$\varrho_k(a,b) = \varrho_k(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i|^k \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Ukážeme, že (l_k, ϱ_k) je úplný prostor. Uvažujme o cauchyovské posloupnosti prvků prostoru l_k (prvky jsou samy také posloupnosti, jedná se o „posloupnost posloupností“):

$$\{A^n\}_{n \in \mathbf{N}} = \{a_1^n, a_2^n, \ldots, a_i^n, \ldots\}.$$

Pro ni platí

$$\varrho_k(A^n, A^m) \longrightarrow 0 \quad \text{pro} \quad \min\{m,n\} \to \infty, \text{ tj.} \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^n - a_i^m|^k \right)^{\frac{1}{k}} \longrightarrow 0, \quad \text{pro} \quad \min\{m,n\} \to \infty.$$

To znamená, že pro indexy n, m rostoucí nade všechny meze se každý ze sčítanců sumy blíží nule,

$$|a_i^n - a_i^m| \longrightarrow 0 \qquad \text{pro} \quad \min\{m,n\} \to \infty,$$

a číselná posloupnost $\{a_i^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je cauchyovská pro každý index i. Reálný prostor je úplný, každá z posloupností $\{a_i^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ v něm má svoji limitu, kterou označíme

$$a_i = \lim_{n \to \infty} \{a_i^n\}.$$

Ukážeme, že posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je limitou posloupnosti $\{A^n\}_{n \in \mathbf{N}} = \{a_1^n, a_2^n, \ldots, a_i^n, \ldots\}$ a zároveň prvkem prostoru l_k. Tím bude důkaz úplnosti prostoru (l_k, ϱ_k) hotov.

Pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $m, n > n_0$ platí

$$\left(\sum_{i=1}^{p} |a_i^n - a_i^m|^k \right) \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^n - a_i^m|^k \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pro $m \to \infty$ je $\{a_i^m\} \to a_i$ a dostáváme

$$\left(\sum_{i=1}^{p} |a_i^n - a_i|^k \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nerovnost platí pro každé $p \in \mathbf{N}$ a přechodem $p \to \infty$ je

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^n - a_i|^k\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Posloupnost posloupností $\{A^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje v metrice ϱ_k ke své limitě (posloupnosti) $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. Zbývá ukázat, že tato limita je prvkem množiny l_k. Protože je $a_i^n \to a_i$ pro $n \to \infty$, platí

$$\left(\sum_{i=1}^{p} |a_i^n|^k\right)^{\frac{1}{k}} \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{p} |a_i|^k\right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{pro} \quad n \to \infty.$$

(Každý ze sčítanců vlevo konverguje k odpovídajícímu sčítanci na pravé straně rovnosti, musí tedy pro libovolné (konečné) $p \in \mathbf{N}$ konvergovat i celý součet.) Posloupnost $\{A^n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{a_1^n, a_2^n, \ldots, a_i^n, \ldots\}$ je ohraničená (to plyne z existence její limity), proto je suma

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

konečná, což znamená, že $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_k$.

Příklad 2.40: Úplnost prostoru spojitých funkcí s metrikou stejnoměrné konvergence

S metrikou stejnoměrné konvergence a prostorem $(C[a,b], \varrho_c)$ jsme se již setkali v příkladech 2.10 a 2.32. Víme také, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje v metrice ϱ_c k limitě f právě tehdy, když $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje k funkci f stejnoměrně (Cvičení 2.1.7).

Z druhého dílu máme k dispozici dva důležité závěry:

- Stejnoměrná konvergence je „silnější“ než konvergence bodová, tj. pokud $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje na intervalu $[a,b]$ k f stejnoměrně, pak číselná posloupnost $\{f_n(x)\}$ konverguje k $f(x)$ pro každé $x \in [a,b]$.
- Jsou-li všechny členy posloupnosti spojité funkce na $[a,b]$, je také limita spojitou funkcí.

To nám již postačí k důkazu úplnosti prostoru $(C[a,b], \varrho_c)$. Uvažujme o cauchyovské posloupnosti spojitých funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Pro každé $x \in [a,b]$ musí být cauchyovská číselná posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ (zdůvodněte). Množina reálných čísel je úplným metrickým prostorem, proto posloupnost $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ má limitu $f(x) \in \mathbf{R}$. Definujme funkci $f : [a,b] \ni x \to f(x) \in \mathbf{R}$, která je limitou posloupnosti $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ při bodové konvergenci. Ukážeme, že $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konverguje k f také v metrice ϱ_c. Zvolme $\varepsilon > 0$, posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je *cauchyovská*, proto existuje n_0 tak, že pro každé $n, m > n_0$ je vzdálenost $\varrho_c(f_n, f_m) = \max\{|f_n(x) - f_m(x)| \mid x \in [a,b]\} < \frac{\varepsilon}{2}$. Toto platí i v situaci, kdy $m \to \infty$ a $f_m(x) \to f(x)$, proto $\varrho_c(f_n, f) = \max\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [a,b]\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Funkce f je limitou posloupnosti $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ v metrice ϱ_c. Víme, že f je spojitá (věta 8.9 druhého dílu), patří tedy do množiny $C[a,b]$.

Příklad 2.41: Úplnost diskrétního metrického prostoru

V příkladu 2.31 jsme ukázali, že v diskrétním prostoru jsou jak konvergentní, tak cauchyovské posloupnosti pouze ty, které jsou od určitého členu konstantní, tj. existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $a_n = L$ pro všechna $n > n_0$. Tyto posloupnosti jsme nazvali skorostacionární. Pojem cauchyovská posloupnost tak v diskrétní metrice splyne s pojmem konvergentní posloupnost a prostor je úplný (z definice).

2.2.4 Čím zaplnit „mezery“ aneb zúplnění metrického prostoru

V předchozím odstavci jsme si všimli některých úplných a neúplných prostorů. Jistě i vás napadá myšlenka, že bychom chybějící limity cauchyovských posloupností v neúplném prostoru mohli zkrátka k množině „přidat“, aby vznikl prostor úplný. Taková konstrukce je skutečně vždy možná, ale zase tak jednoduché to nebude. Věnujeme jí celý tento odstavec.

Přestože se zobrazením metrických prostorů budeme zabývat až v následujícím odstavci, musíme si již nyní definovat pojem *izometrie*, tj. zobrazení, které zachovává vzdálenost. Izometrické prostory jsou z hlediska svých metrických vlastností totožné (podobně jako jsou například izomorfní vektorové prostory nebo izomorfní grupy totožné svojí algebraickou strukturou).

Zobrazení $f : X \to Y$ z metrického prostoru (X, ϱ) do metrického prostoru (Y, σ) se nazývá *izometrie*, jestliže

$$\sigma(f(A), f(B)) = \varrho(A, B) \quad \text{pro každé dva body} \quad A, B \in X.$$

Prostory, mezi nimiž existuje bijektivní izometrie, se nazývají *izometrické*.

Myšlenka „zúplnění“ metrického prostoru je založena právě na existenci izometrie z původního (neúplného) prostoru do nového (úplného) prostoru:

Izometrie f metrického prostoru (X, ϱ) do úplného metrického prostoru (Y, σ) taková, že množina $f(X) \subset Y$ je hustá v Y (tj. $\overline{f(X)} = Y$) se nazývá *zúplnění* metrického prostoru X. Metrický prostor Y nazýváme *úplný obal* metrického prostoru X.

Platí následující tvrzení.

Věta 2.5: *Ke každému metrickému prostoru existuje jeho zúplnění.*

Zbytek odstavce věnujeme důkazu existence zúplnění libovolného metrického prostoru. Důkaz je konstruktivní, proto jej raději nepřeskakujte. Pro čtenáře, který nechce studovat tento důkaz dopodrobna, uvedeme nejprve jeho hlavní myšlenky a teprve v následujícím příkladu podrobnou konstrukci. Ukážeme také, že úplný obal je určen jednoznačně, až na izometrii (tj. jsou-li $f_1 : (X, \varrho) \to (Y_1, \sigma_1)$, $f_2 : (X, \varrho) \to (Y_2, \sigma_2)$ dvě zúplnění metrického prostoru (X, ϱ), pak existuje izometrie $\varphi : Y_1 \to Y_2$ taková, že $\varphi(f_1(X)) = f_2(X)$.)

Hlavní myšlenka konstrukce zúplnění

- Zavedeme relaci ekvivalence na množině cauchyovských posloupností bodů z metrického prostoru (X, ϱ) vztahem

$$A \sim B, \quad A = \{A_n\}_{n\in\mathbf{N}},\ B = \{B_n\}_{n\in\mathbf{N}} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \varrho(A_n, B_n) = 0.$$

- Na faktorové množině $\mathcal{M}(X)$ tříd ekvivalence definujeme metriku vztahem

$$d([A],\ [B]) = \lim_{n\to\infty} \varrho(A^n, B^n).$$

- Ukážeme, že metrický prostor $(\mathcal{M}(X), d)$ je úplný.
- Najdeme izometrii z původního metrického prostoru (X, ϱ) do úplného metrického prostoru $(\mathcal{M}(X), d)$ (každému bodu přiřadíme třídu reprezentovanou konstantní posloupností):

$$X \ni x \longrightarrow f(x) = [x,\ x,\ x, \ldots] \in \mathcal{M}(X).$$

- Ukážeme, že množina $f(X)$ je hustá v $\mathcal{M}(X)$.

Příklad 2.42: Konstrukce zúplnění metrického prostoru

V metrickém prostoru (X, ϱ) vezměme dvě cauchyovské posloupnosti $A = \{A_n\}$ a $B = \{B_n\}$. Definujeme číslo

$$d(A, B) = \lim_{n\to\infty} \varrho(A_n, B_n). \tag{2.13}$$

Na množině všech cauchyovských posloupností tak zavádíme funkci $d : [A, B] \to d(A, B) \in \mathbf{R}$. Abychom se přesvědčili, že je funkce korektně definována, musíme ukázat, že limita na pravé straně vztahu (2.13) skutečně existuje. Pro libovolné cauchyovské posloupnosti A, B a každé $i, j \in \mathbf{N}$ platí

$$\varrho(A_i, B_i) \le \varrho(A_i, A_j) + \varrho(A_j, B_j) + \varrho(B_j, B_i) \implies$$

$$\varrho(A_i, B_i) - \varrho(A_j, B_j) \le \varrho(A_i, A_j) + \varrho(B_j, B_i),$$

podobně

$$\varrho(A_j, B_j) - \varrho(A_i, B_i) \le \varrho(A_i, A_j) + \varrho(B_j, B_i),$$

tj.

$$|\varrho(A_j, B_j) - \varrho(A_i, B_i)| \le \varrho(A_i, A_j) + \varrho(B_j, B_i).$$

Obě posloupnosti jsou cauchyovské, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro každé $i, j > n_0$ je $\varrho(A_i, A_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\varrho(B_i, B_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, tj.

$$|\varrho(A_j, B_j) - \varrho(A_i, B_i)| \le \varrho(A_i, A_j) + \varrho(B_j, B_i) < \varepsilon.$$

Posloupnost reálných čísel $d_i = \varrho(A_i, B_i)$ je cauchyovská a protože je metrický prostor $\mathbf{R}$ úplný, existuje v něm její limita, kterou jsme označili $d(A, B)$.

Uvědomte si, že funkce d není metrikou, splňuje totiž pouze dva ze tří axiomů metriky. Pravidlo $d(A,B) = 0 \Rightarrow A = B$ není splněno (jistě dokážete najít vhodný příklad). Takové funkci říkáme *pseudometrika*.

Nyní zavedeme na množině cauchyovských posloupností relaci ekvivalence: Posloupnosti A a B jsou *ekvivalentní* jestliže $d(A,B) = 0$. Ukázat, že jsou splněny požadavky reflexivity, symetrie a tranzitivity je snadné, $d(A,A) = \lim_{n\to\infty} \varrho(A_n, A_n) = 0$, tj. $A \sim A$, $d(A,B) = d(B,A)$, proto $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$, tj. $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \Rightarrow A \sim C$.

Na faktorové množině (označme ji $\mathcal{M}(X)$), tj. množině tříd ekvivalence tvaru $[A] = \{A' \mid A' \sim A\}$, je funkce $d : \mathcal{M}(X) \ni \big[[A],[B]\big] \to d([A],[B]) = d(A,B)$ korektně definována. Skutečně, zvolíme-li jiné reprezentanty v téže třídě, platí

$$d(A',B') \leq d(A',A)+d(A,B)+d(B,B') = d(A,B), \quad \text{analogicky} \quad d(A,B) \leq d(A',B') \implies d(A,B) = d(A',B').$$

Ukázat, že d splňuje axiomy metriky na množině $\mathcal{M}(X)$, je opět snadné a tento úkol přenecháváme čtenáři.

Ukážeme, že metrický prostor $(\mathcal{M}(X), d)$ je úplný. Zvolme cauchyovskou posloupnost

$$\{[A_i]\}_{i=1}^{\infty} = \{[A_1],[A_2],\dots,[A_i],\dots\}.$$

Pro libovolného reprezentanta třídy $[A_i]$ (kterým je cauchyovská posloupnost) označme $A_i = \{a_i^j\}_{j=1}^{\infty}$. Ke každému ε existuje index $n(\varepsilon)$ takový, že

$$\varrho(a_i^j, a_i^{n(\varepsilon)}) < \varepsilon \quad \forall \text{pro všechna} \quad j \geq n(\varepsilon) \tag{2.14}$$

Zvolme například $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$ a označme $n_i = n(\varepsilon_i)$ indexy splňující podmínku (2.14). Nyní můžeme definovat novou posloupnost vztahem

$$A = \{a^k\}_{k\in\mathbf{N}} = \{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \dots, a_k^{n_k}, \dots\}.$$

Ukážeme, že A je cauchyovská, tedy třída $[A]$ je prvkem uvažovaného prostoru ($[A] \in \mathcal{M}(X)$) a také, že $[A] = \lim_{i\to\infty}[A_i]$.

Sama posloupnost tříd $\{[A_i]\}_{i=1}^{\infty}$ byla cauchyovská, proto ke každému ε existuje index $m(\varepsilon)$ tak, že pro libovolné $h = 0,\ 1,\ 2\dots$ platí

$$d([A_{m(\varepsilon)}],[A_{m(\varepsilon)+h}]) = d(A_{m(\varepsilon)}, A_{m(\varepsilon)+h}) = \lim_{j\to\infty} \varrho(a^j_{m(\varepsilon)}, a^j_{m(\varepsilon)+h}) < \varepsilon.$$

Existuje proto index j_h tak, že pro každé $r \geq j_h$ je $\varrho(a^r_{m(\varepsilon)}, a^r_{m(\varepsilon)+h}) < \varepsilon$. Abychom dokázali, že právě zkonstruovaná posloupnost A je cauchyovská, potřebujeme ke každému $\alpha > 0$ najít index n_0 tak, že pro každé $k > n_0$ a libovolné $h = 0,\ 1,\ 2,\dots$ je

$$\varrho(a^k, a^{k+h}) = \varrho(a_k^{n_k}, a_{k+h}^{n_{k+h}}) < \alpha.$$

Při volbě $\varepsilon < \frac{\alpha}{4}$, $k \geq m(\varepsilon)$ a $r \geq n_i, n_{i+h}, j_h$ máme:

$$\varrho(a_k^{n_k}, a_{k+h}^{n_{k+h}}) \leq \varrho(a_k^{n_k}, a_k^r) + \varrho(a_k^r, a^r_{m(\varepsilon)}) + \varrho(a^r_{m(\varepsilon)}, a^r_{k+h}) + \varrho(a^r_{k+h}, a^{n_{k+h}}_{k+h}) < \frac{1}{k} + \varepsilon + \varepsilon + \frac{1}{k+h} < 4\varepsilon < \alpha.$$

Zbývá ukázat, že

$$[A] = \lim_{i\to\infty}[A_i]. \tag{2.15}$$

Platí

$$d([A_i],[A]) = d(A_i, A) = \lim_{k\to\infty} \varrho(a_i^k, a_k^{n_k}).$$

Dále $\varrho(a_i^k, a_k^{n_k}) \leq \varrho(a_i^k, a_i^{n_i}) + \varrho(a_i^{n_i}, a_k^{n_k}) < \varepsilon + 4\varepsilon$, kde stačí vzít $i > m(\varepsilon)$. Z libovolnosti hodnoty ε plyne (2.15).

Posledním krokem je vytvoření izometrie f z původního prostoru X do úplného prostoru $\mathcal{M}(X)$. Stačí vzít $f(x) = [\{x\}_{j=1}^{\infty}]$, bod x se zobrazí na třídu reprezentovanou konstantní posloupností $\{x\}_{j=1}^{\infty} = \{x, x, x, \ldots\}$.

Množina $f(X)$ všech obrazů bodů původního prostoru X je hustá v množině $\mathcal{M}(X)$. Do uzávěru $\overline{f(X)}$ totiž patří hromadné body této množiny a to jsou právě limity posloupností z prvků $f(X)$. A právě o chybějící limity („mezery“) v množině $f(X)$ jsme ji doplnili, proto $\overline{f(X)} = \mathcal{M}(X)$.

Pokud bychom zkonstruovali úplný obal $\mathcal{M}'(X)$ jiným způsobem, můžeme pomocí izometrií $f : X \to \mathcal{M}(X)$ a $f' : X \to \mathcal{M}'(X)$ a vlastností $\overline{f(X)} = \mathcal{M}(X)$, $\overline{f'(X)} = \mathcal{M}'(X)$ zkonstruovat izometrii φ mezi $\mathcal{M}(X)$ a $\mathcal{M}'(X)$:

$$\varphi(f(x)) = f'(x) \quad \varphi(\lim_{i\to\infty} f(x_i)) = \lim_{i\to\infty} f'(x_i).$$

Zúplnění metrického prostoru je určeno jednoznačně (až na izometrii).

2.2.5 Cvičení

1. Ukažte, že metrika ϱ_c stejnoměrné konvergence na množině $C[a,b]$ zavedená v příkladu 2.10 splňuje vlastnosti metriky. Dále ukažte, že posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ funkcí spojitých na $[a,b]$ konverguje k funkci f v metrice ϱ_c právě tehdy, když tato posloupnost konverguje k f stejnoměrně (tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ a pro všechna $x \in [a,b]$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$).

2. Ukažte, že integrální metrika ϱ_I na množině $C[a,b]$ zavedená v příkladu 2.11 splňuje vlastnosti metriky (využijte vlastnosti určitého integrálu). Rozhodněte, zda je některá z metrik (metrika stejnoměrné konvergence nebo integrální metrika) „silnější“ v tomto smyslu: Řekneme, že metrika ϱ_1 je „silnější“ než metrika ϱ_2, jestliže platí: Konverguje-li posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ k nějaké funkci f v metrice ϱ_1, pak také konverguje k f v metrice ϱ_2.

3. Uveďte příklad (nebo zdůvodněte, proč takový příklad neexistuje) množiny a dvou metrik ϱ_1 a ϱ_2 na této množině tak, že:

a) Existuje posloupnost, která konverguje v metrice ϱ_1, ale nekonverguje v metrice ϱ_2.

b) Existuje posloupnost, která konverguje v obou metrikách, ale v každé z nich k jiném bodu?

4. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti v příslušných metrických prostorech cauchyovské nebo konvergentní:

a) Posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ v prostoru $(C[a,b], \varrho_I)$ spojitých funkcí s integrální metrikou $\varrho_I(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$ zadaná takto:

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro} \quad x \in [a,u], \\ n\left(u - x + \frac{1}{2n}\right) & \text{pro} \quad x \in (u, u + \frac{1}{2n}], \\ 0 & \text{pro} \quad x \in (u + \frac{1}{2n}, b]. \end{cases}$$

b) Posloupnost $\{1 - \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbf{N}}$ v množině $M = [0,1)$ s metrikou indukovanou přirozenou metrikou z $\mathbf{R}$.

Výsledky: a) posloupnost je cauchyovská, není konvergentní (limitou je nespojitá funkce), b) posloupnost je cauchyovská, není konvergentní (limitou je číslo $L = 1$, které není prvkem množiny M).

5. Ukažte, že kompaktní množina X v metrickém prostoru (M, ϱ) je uzavřená.
Návod: Důkaz veďte sporem. Předpokládejte, že množina X není uzavřená. Pak existuje bod z uzávěru $\overline{X}$ nepatřící do X. Dále uvažujte o posloupnosti bodů množiny X, která konverguje k x.

6. Ukažte, že kompaktní množina X v metrickém prostoru (M, ϱ) je ohraničená.
Návod: Důkaz veďte sporem. Předpokládejte, že množina X není ohraničená. Sestrojte posloupnost jejích bodů tak, že vzdálenost libovolných dvou členů posloupnosti bude větší než předem zvolené $\varepsilon > 0$. Z takové posloupnosti nelze vybrat konvergentní podposloupnost.

7. Nechť X je podmnožina v prostoru $\mathbf{R}^n$ s přirozenou topologií. Rozhodněte o platnosti následujícího tvrzení: Každá podmnožina množiny X je kompaktní právě tehdy, když X je konečná. Pokud tvrzení platí, lze ho zobecnit na libovolný metrický prostor?

8. Uzávěr množiny X v metrickém prostoru (M, ϱ) je možné definovat pomocí vzdálenosti jako množinu $\overline{X} = \{x \in M \mid \varrho(x, X) = 0\}$. Množina, pro kterou $X = \overline{X}$ se pak nazývá *uzavřená*. Ukažte, že tato definice je ekvivalentní s definicí uzavřené množiny pomocí hromadných bodů uvedenou v tomto odstavci.

9. Rozhodněte, zda je úplný metrický prostor

a) množina $\mathbf{R}^2$ s pampeliškovou metrikou z příkladu 11.20,

b) její podmnožina $\mathbf{Q}^2$ s metrikou indukovanou z pampeliškového prostoru?

Výsledky: a) ano, zkoumejte zvlášť cauchyovské posloupnosti ležící v okolí počátku a zvlášť posloupnosti ostatní, b) $\mathbf{Q}^2$ s indukovanou metrikou z pampeliškového prostoru není úplný prostor.

10. Rozhodněte, zda je Baireho metrický prostor všech reálných posloupností z příkladu 11.13 úplný.
Výsledek: ano

11. Ukažte, že pro každý hromadný bod x množiny P existuje posloupnost bodů množiny P, jejíž limitou je právě bod x.
Návod: Sestrojte posloupnost otevřených koulí $B(x, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Každá z těchto koulí obsahuje alespoň jeden bod $a_n \neq x$ množiny P (definice hromadného bodu). Ukažte, že posloupnost bodů $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ libovolně vybraných z množin $B(x, \varepsilon_n) \cap P$ konverguje k x.

12. Dokažte, že prostor $(l_\infty, \varrho_\infty)$ z příkladu 11.12 je úplný.
Návod: Postupujte analogicky jako v příkladech 2.39 a 2.40.

13. Rozhodněte, za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor separabilní.

14. Rozhodněte o kompaktnosti následujících množin v euklidovských prostorech:

a) $(0, 1]$,

b) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0\}$,

c) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$,

d) $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$,

e) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n}, n = 1, 2 \dots\} \cup \{0\}$,

f) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, (x, y) \neq (0, 0)\}$,

g) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\}$.

Výsledky: a) ne (není uzavřená), b) ne (není ohraničená), c) ne (není uzavřená) d) ne (není uzavřená), e) ano, f) ne (není uzavřená), g) ne (není ohraničená).

15. Ukažte, že

a) Každý kompaktní podprostor metrického prostoru je uzavřený.

b) Uzavřený podprostor kompaktního prostoru je kompaktní.

c) Kompaktní prostor je separabilní.

2.3 Zobrazení metrických prostorů

Pracujeme-li se zobrazeními množin, zajímá nás především, jak se zobrazení „chová“ s ohledem na matematické struktury, které máme na těchto množinách zavedeny. U grup jsme pracovali s *grupovými homomorfismy*, zachovávajícími grupovou operaci, ve vektorových prostorech nás zajímala *lineární zobrazení*, která zachovávala sčítání vektorů a násobení skalárem. V minulém odstavci jsme zavedli pojem *izometrie* — zobrazení zachovávající vzdálenost mezi body. Nyní se na izometrii a další typy zobrazení v metrických a topologických prostorech podíváme podrobněji. Vyvrcholením celé kapitoly pak bude Banachův princip pevného bodu, velmi užitečný nástroj pro numerické řešení rovnic.

2.3.1 Spojitá a izometrická zobrazení

S pojmem *spojitosti* funkce jsme se setkali již v prvním a druhém dílu. Spojitost v nějakém bodě znamenala rovnost limity a funkční hodnoty v tomto bodě. Víme, že se jedná o *topologický* pojem, neboť limita byla zavedena pomocí okolí (otevřených množin). Definici lze pro obecný topologický prostor přeformulovat takto:

Nechť (X, τ_X) a (Y, τ_Y) jsou topologické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je *spojité v bodě* $a \in X$ jestliže ke každému okolí $V \in \tau_Y$ bodu $f(a)$ (tj. $f(a) \in V$) existuje okolí $U \in \tau_X$ bodu a (tj. $a \in U$) takové, že platí $f(U) \subset V$.

Příklad 2.43: Na topologii záleží

Uvažujme o prostoru (X, τ_d), kde $\tau_d = 2^X$ je diskrétní topologie, v níž je každá podmnožina množiny X otevřená (a současně i uzavřená). Tuto topologii indukuje diskrétní metrika. Vezmeme-li jakékoli zobrazení $f : X \to Y$ do libovolného topologického prostoru (Y, τ), bude spojité v každém bodě. Skutečně, jednoprvková množina $U = \{a\} \subset X$ je otevřeným okolím bodu a. Ať zvolíme okolí V bodu $f(a)$ jakkoli, vždy platí $f(U) = \{f(a)\} \subset V$.

Nyní naopak uvažujme o prostoru (Y, τ), kde $\tau = (\emptyset, Y)$ je triviální topologie na Y, v níž kromě prázdné množiny a celého prostoru žádné další otevřené množiny nejsou. Jakékoli zobrazení $f : X \to Y$ z libovolného topologického prostoru X je spojité v každém bodě. Skutečně, jediné okolí bodu $f(a)$ v topologickém prostoru Y je celá množina Y a proto triviálně $f(X) \subset Y$.

Libovolné zobrazení z diskrétního topologického prostoru je spojité v každém bodě. Libovolné zobrazení do triviálního topologického prostoru je spojité v každém bodě.

Vidíme, že zobrazení f z množiny X do množiny Y při určité volbě topologií na X resp. Y bude spojité, zatímco při jiné volbě topologií spojité být nemusí. Existuje nějaké zobrazení, které by bylo spojité vždy, bez ohledu na zvolenou topologii? Uvažujme *konstantní* zobrazení $f : X \ni x \to y_0 \in Y$, přiřazující všem bodům z množiny X tentýž obraz $y_0 \in Y$. Protože $f(X) = \{y_0\} \subset V$ pro jakékoli okolí $V \in \tau_Y$, je konstantní zobrazení spojité pro každou volbu topologií τ_X, τ_Y. Budeme-li uvažovat na X triviální a na Y diskrétní topologii, každé spojité zobrazení $f : X \to Y$ musí být konstantní (ukažte).

Zobrazení $f : X \to Y$ je spojité při libovolné volbě topologií τ_X, τ_Y právě tehdy, když je konstantní.

Další příklady nás čekají ve cvičení.

Spojitá bijekce $f : X \to Y$ dvou topologických prostorů, pro kterou je inverzní zobrazení f^{-1} také spojité, se nazývá *homeomorfismus*. Prostorům X, Y, mezi nimiž takové zobrazení existuje, říkáme *homeomorfní*. Jejich topologická struktura je stejná (podobně jako izomorfní grupy, okruhy, tělesa, vektorové prostory jsou „stejné“ z hlediska algebraické struktury.)

Pozn. 1: Požadavek spojitosti inverzního zobrazení f^{-1} nelze v definici vynechat, neplyne automaticky ze spojitosti původního zobrazení f. Například identita množiny (X, τ_d) s diskrétní topologií do (X, τ) s topologií triviální je spojitá, naopak nikoli.

Pozn. 2: Izometrická bijekce metrických prostorů je v příslušných indukovaných topologiích homeomorfismem. Vlastnost izometrie pro inverzní zobrazení je splněna automaticky. Dovedete to zdůvodnit?

V metrickém prostoru (který je současně prostorem topologickým), bychom jistě uvítali také nějakou „metrickou“ formulaci spojitosti. K tomu nám poslouží následující tvrzení.

Věta 2.6: *Nechť (X, ϱ) a (Y, σ) jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je spojité v bodě $a \in X$ (v asociovaných topologiích) právě tehdy, když pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ bodů v X konvergující k bodu a konverguje posloupnost obrazů $\{f(a_n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ k bodu $f(a)$, tj.*

$$a_n \longrightarrow_\varrho a \Longrightarrow f(a_n) \longrightarrow_\sigma f(a).$$

Uvedeme ještě definici pojmu *stejnoměrné* spojitosti, často používaného v různých oblastech matematiky, a oba pojmy porovnáme v následujícím příkladu.

Zobrazení $f : X \to Y$ z metrického prostoru (X, ϱ) do metrického prostoru (Y, σ) se nazývá *stejnoměrně spojité*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{pro všechny dvojice} \quad x, y \in X \quad \text{splňující vztah} \quad \varrho(x, y) < \delta.$$

Dvě metriky ϱ_1 a ϱ_2 na množině X nazýváme *stejnoměrně ekvivalentní*, jestliže identické zobrazení $\mathrm{id} : (X, \varrho_1) \to (X, \varrho_2)$ a k němu inverzní zobrazení $\mathrm{id} : (X, \varrho_2) \to (X, \varrho_1)$ jsou stejnoměrně spojitá.

Příklad 2.44: Spojitost, stejnoměrná spojitost a cauchyovské posloupnosti

Asi správně předpokládáte, že stejnoměrná spojitost je silnější vlastnost než „obyčejná“ spojitost. Pokuste se sami ukázat, že každé stejnoměrně spojité zobrazení metrických prostorů je v asociovaných topologiích spojité. Podobně jednoduché bude ukázat, že stejnoměrná ekvivalence dvou metrik je silnější než „obyčejná“ ekvivalence. Jsou-li dvě metriky na téže množině stejnoměrně ekvivalentní, jsou také ekvivalentní, tj. vedou k téže asociované topologii.

V tomto příkladu si ukážeme, že naopak to obecně není. Spojité zobrazení nemusí být stejnoměrně spojité a ekvivalentní metriky nemusí být stejnoměrně ekvivalentní.

Uvažujme o navzájem inverzních zobrazeních

$$f : X = (-1,1) \ni x \longrightarrow y = \frac{x}{1-|x|} \in \mathbf{R} = Y$$

a

$$f^{-1} : Y = \mathbf{R} \ni y \longrightarrow x = \frac{y}{1+|y|} \in (-1,1) \in X.$$

Na množinách $X = (-1,1)$ a $Y = \mathbf{R}$ zvolme přirozenou metriku, indukující přirozenou topologii a příslušné metrické resp. topologické prostory označme (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) resp. (X, τ_X), (Y, τ_Y). Obě zobrazení jsou v indukované topologii spojitá (ukažte). Jedná se o homeomorfismus a topologické prostory (X, τ_X), (Y, τ_Y) považujeme za „topologicky stejné“.

Zobrazení f ovšem není stejnoměrně spojité! Tušíme, že problémy budou dělat body x v blízkosti hraničních bodů intervalu $(-1,1)$. Zvolme $\varepsilon > 1$, ale jinak libovolné. Dále zvolme libovolné číslo $0 < \delta < 2$ a body $x_1 = 1 - \frac{\delta}{2\varepsilon}$, $x_2 = 1 - \frac{\delta}{4\varepsilon}$. Vzdálenost těchto bodů je

$$\varrho_X(x_1,x_2) = |x_1 - x_2| = \left|\left(1 - \frac{\delta}{2\varepsilon}\right) - \left(1 - \frac{\delta}{4\varepsilon}\right)\right| = \frac{\delta}{4\varepsilon} < \delta.$$

Vzdálenost jejich obrazů

$$\varrho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \left|\frac{x_1}{1-|x_1|} - \frac{x_2}{1-|x_2|}\right| = \left|\frac{1-\frac{\delta}{2\varepsilon}}{1-\left|1-\frac{\delta}{2\varepsilon}\right|} - \frac{1-\frac{\delta}{4\varepsilon}}{1-\left|1-\frac{\delta}{4\varepsilon}\right|}\right| = \frac{2\varepsilon}{\delta} > \varepsilon.$$

Závěr: zvolili jsme číslo $\varepsilon > 1$ libovolně, ale pro jakkoli zvolené $\delta \in (0,2)$ ($d(X) = 2$ je průměr množiny X) jsme našli dva body x_1, x_2, jejichž vzdálenost je sice menší než δ, ale vzdálenost jejich obrazů je větší než ε. Zobrazení f proto není stejměrně spojité.

Zvolme nyní posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{1-\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbf{N}}$, která je v metrickém prostoru X cauchyovská. Posloupnost

$$\{f(a_n)\}_{n\in\mathbf{N}} = \left\{\frac{1-\frac{1}{n}}{1-(1-\frac{1}{n})}\right\}_{n\in\mathbf{N}} = \{n-1\}_{n\in\mathbf{N}}$$

není cauchyovská v metrickém prosoru Y. Vlastnost posloupnosti „být cauchyovaská“ není „topologickým pojmem“ (invariantem), neboť jsme našli posloupnost, která je v prostoru X cauchyovská, zatímco v prostoru Y homeomorfním s X nikoli. Uvědomte si také, že (Y, ϱ_Y) je úplný metrický prostor, ale (X, ϱ_X) není (například právě uvažovaná cauchyovská posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ v něm nemá limitu). Ani úplnost není topologickým invariantem.

Metriku ϱ_Y můžeme pomocí zobrazení f „přenést“ na množinu X tak, že definujeme $\varrho_{XY}(x_1,x_2) = |f(x_1) - f(x_2)|$. Metriky ϱ_X a ϱ_{XY} jsou nyní definovány na téže množině X, jsou ekvivalentní (obě indukují přirozenou topologii), nejsou však stejnoměrně ekvivalentní.

Ještě uvedeme bez důkazu několik důležitých vlastností stejnoměrně spojitých zobrazení (o jejich důkaz se může čtenář pokusit v rámci cvičení):

Věta 2.7:

- *Jsou-li zobrazení* $f : (X, \varrho_X) \to (Y, \varrho_Y)$ *a* $g : (Y, \varrho_Y) \to (Z, \varrho_Z)$ *stejnoměrně spojitá, pak složené zobrazení* $g \circ f : (X, \varrho_X) \to (Z, \varrho_Z)$ *je stejnoměrně spojité.*
- *Pro libovolnou podmnožinu* $U \subset X$ *metrického prostoru* X *je zobrazení udávající vzdálenost bodu od množiny* U*, tj.* $\varrho : X \ni x \to \varrho(U, \{x\}) \in \mathbf{R}$ *stejnoměrně spojité.*
- *Je-li* $f : (X, \varrho_X) \to (Y, \varrho_Y)$ *stejnoměrně spojité zobrazení, pak pro každou cauchyovskou posloupnost* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *v* X *je posloupnost* $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *cauchyovská v* Y*.*
- *Je-li* $f : (X, \varrho_X) \to (Y, \varrho_Y)$ *bijekce a zobrazení* f *i* f^{-1} *jsou stejnoměrně spojitá, pak metrický prostor* (X, ϱ_X) *je úplný právě tehdy, když je úplný metrický prostor* (Y, ϱ_Y)*.*

Pozn.: Termínem *topologický invariant* nebo *topologický pojem* jsme v předchozím příkladu označili takovou vlastnost metrického prostoru, která se nemění při změně metriky za libovolnou jinou, ale ekvivalentní, metriku. Jinými slovy: Máme-li dva metrické prostory, které jsou v indukovaných topologiích homeomorfní, pak oba danou vlastnost buď mají, nebo nemají. Mezi takové topologické invarianty patří mj. všechny pojmy, které jsme dokázali definovat pomocí topologie (i bez metriky), například *kompaktnost, souvislost, limita.* V předchozím příkladu jsme ukázali, že vlastnost posloupnosti „být cauchyovská“, ani úplnost prostoru mezi topologické invarianty nepatří (tyto vlastnosti se zachovávají při stejnoměrně spojitém zobrazení a říkáme jim *uniformní invarianty*).

2.3.2 Kontrakce a Banachův princip pevného bodu

Ve druhém dílu učebnice jsme v kapitole 7 o diferenciálních rovnicích formulovali tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení různých typů rovnic. Tato tvrzení mají původ v mnohem obecnějším a přitom jednoduchém výsledku teorie metrických prostorů. Nyní se zaměříme na jeho formulaci, důkaz a především aplikace. Nejprve potřebné definice.

Zobrazení metrických prostorů $f : (X, \varrho) \to (Y, \sigma)$ nazýváme *lipschitzovské*, jestliže existuje nezáporné číslo K takové, že pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq K\varrho(x, y).$$

Nejmenší takové číslo K nazýváme *Lipschitzova konstanta* a značíme ji L.

Speciálně, je-li $L < 1$, nazývá se zobrazení *kontrakce*.

Dvě metriky ϱ_1 a ϱ_2 na množině X jsou *lipschitzovsky* ekvivalentní, jestliže identické zobrazení $\mathrm{id} : (X, \varrho_1) \to (X, \varrho_2)$ a k němu inverzní zobrazení $\mathrm{id} : (X, \varrho_2) \to (X, \varrho_1)$ jsou lipschitzovská.

V cvičení ukážete, že každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité (a tedy i spojité). Proto každé dvě lipschitzovsky ekvivalentní metriky jsou stejnoměrně ekvivalentní (a tedy i ekvivalentní). Obrácené tvrzení neplatí. Možná by vás zajímal příklad zobrazení, které je stejnoměrně spojité, ale není lipschitzovské. Takové funkce skutečně existují, příkladem je tzv. *Cantorova funkce*, ale její popis je natolik složitý, že jej nebudeme v tomto textu uvádět. Přejdeme k dalšímu a poslednímu pojmu kapitoly, kterým je *pevný bod* zobrazení.

Bod $x \in X$ se nazývá *pevným bodem* zobrazení $f : X \to X$, jestliže platí $f(x) = x$.

Jistě dokážete sami vymyslet zobrazení, které nemá žádný pevný bod, a také zobrazení, jehož všechny body jsou pevné, případně zobrazení s předem zadanou množinou pevných bodů. Pro nás však bude užitečné tvrzení o existenci a jednoznačnosti pevného bodu v případě speciálně zvoleného zobrazení metrických prostorů a to *kontrakce*:

Věta 2.8 (Banachův princip pevného bodu – Banachova věta): *Nechť (X, ϱ) je úplný metrický prostor a zobrazení $f : (X, \varrho) \to (X, \varrho)$ je kontrakce. Pak existuje právě jeden pevný bod zobrazení f.*

Důkaz tvrzení, který podrobně uvedeme až v příkladu 2.51, je současně návodem, jak tento pevný bod hledat. Postup se nazývá *metoda postupných aproximací* a můžeme jej využít k přibližnému řešení algebraických i diferenciálních rovnic. Proto nejprve shrneme jeho hlavní myšlenky:

Metoda postupných aproximací:

- Hledáme řešení rovnice $f(x_0) = x_0$, kde f je kontrakce v úplném metrickém prostoru (X, ϱ).
- Zavedeme posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, kde $a_1 = x \in X$ zvolíme libovolně, $a_2 = f(a_1)$, $\ldots$, $a_{i+1} = f(a_i)$, $\ldots$
- Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je cauchyovská (důsledek vlastnosti kontrakce) a konvergentní (důsledek úplnosti prostoru X).
- Limita posloupnosti $x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n$ (tj. $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} \longrightarrow_\varrho x_0$) je pevným bodem zobrazení f, tj. řešením rovnice $f(x_0) = x_0$.
- Bod x_0 je jediným pevným bodem zobrazení f a tedy jediným řešením rovnice.

Příklad 2.45: Úplně jednoduchý příklad

Na ukázku zvolme úplně jednoduchý příklad, řešme rovnici

$$x = \frac{1}{2}x + 1.$$

Na první pohled vidíme jediné řešení $x_0 = 2$. Příslušné zobrazení je

$$f : \mathbf{R} \ni x \longrightarrow \frac{1}{2}x + 1 \in \mathbf{R}$$

a ukážeme, že jde o kontrakci v metrickém prostoru $\mathbf{R}$ s přirozenou metrikou:

$$\varrho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| \left(\frac{1}{2}x + 1\right) - \left(\frac{1}{2}y + 1\right) \right| = \frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}\varrho(x, y),$$

tj. Lipschitzova konstanta je $\frac{1}{2} < 1$. Nyní zvolme první člen posloupnosti libovolně, například $a_1 = 10$ a počítejme:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 10,\\
a_2 &= \frac{1}{2}a_1 + 1 = 5 + 1 = 6,\\
a_3 &= \frac{1}{2}a_2 + 1 = 3 + 1 = 4,\\
a_4 &= \frac{1}{2}a_3 + 1 = 2 + 1 = 3,\\
a_5 &= \frac{1}{2}a_4 + 1 = 1{,}5 + 1 = 2{,}5,\\
a_6 &= \frac{1}{2}a_5 + 1 = 1{,}25 + 1 = 2{,}25,\\
&\vdots\quad \vdots\\
a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + 1.
\end{aligned}$$

Rekurentnímu vzorci a zvolenému prvnímu členu odpovídá zápis $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}} = \{2+16\cdot 2^{-n}\}_{n\in\mathbf{N}}$, tato posloupnost je cauchyovská a její limita

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} (2 + 16 \cdot 2^{-n}) = 2$$

je pevným bodem zobrazení f (řešením rovnice $f(x_0) = x_0$).

Příklad 2.46: Méně jednoduchý příklad

Uvažujme zobrazení v trojrozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{R}^3$:

$$f : \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \to f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Jedná se o afinní zobrazení, které je složením stejnolehlosti s koeficientem $\frac{1}{3}$ a posunutí o vektor $(1, 2, -4)$. Hledejme jeho pevný bod, tj. řešení rovnice $f(x_0,\, y_0,\, z_0) = (x_0,\, y_0,\, z_0)$. Nejprve ověříme, že splňuje předpoklady Banachovy věty:

$$\varrho(f(x, y, z), f(x', y', z')) = \varrho\left(\left(\frac{1}{3}x + 1, \frac{1}{3}y + 2, \frac{1}{3}z - 4\right), \left(\frac{1}{3}x' + 1, \frac{1}{3}y' + 2, \frac{1}{3}z' - 4\right)\right) =$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \frac{1}{3}\varrho((x, y, z), (x', y', z')).$$

Vezměme libovolný bod, například $a_1 = (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ a počítejme:

$$\begin{aligned}
a_1 = (x_1, y_1, z_1) &= (0, 0, 0), \\
a_2 = (x_2, y_2, z_2) &= f(x_1, y_1, z_1) = (1, 2, -4), \\
a_3 = (x_3, y_3, z_3) &= f(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{16}{3}\right), \\
a_4 = (x_4, y_4, z_4) &= f(x_3, y_3, z_3) = \left(\frac{13}{9}, \frac{26}{9}, -\frac{52}{9}\right), \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_n = (x_n, y_n, z_n) &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^{n-2}}, 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots + \frac{2}{3^{n-2}}, -4 - \frac{4}{3} - \frac{4}{9} - \ldots - \frac{4}{3^{n-2}}\right).
\end{aligned}$$

Limitou posloupnosti je pevný bod zobrazení f, bod $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{3}{2}, 3, -6)$ (složky x_n resp. y_n resp. z_n posloupnosti trojic a_n jsou posloupnosti částečných součtů geometrické řady z kvocientem $\frac{1}{3}$ a prvním členem 1, resp. 2, resp. -4). Ověřte výsledek dosazením.

Dokážete vymyslet zobrazení euklidovského prostoru, které nemá žádný pevný bod? A zobrazení, které má více pevných bodů? Pokud taková zobrazení zkonstruujete, ukažte, že nejsou kontrakcemi.

Příklad 2.47: Příklad o něco složitější

Hledejme řešení diferenciální rovnice $y' = y$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$ (víme, že se jedná o funkci $y = e^x$). Ukážeme si, jak lze použít metodu postupných aproximací při řešení podobných úloh. Stejný postup jsme použili už v kapitole 7.2 druhého dílu, vzpomínáte? Tenkrát jsme však ještě nic nevěděli o metrice, konvergenci ani Banachově větě. V obecnosti se k řešení diferenciálních rovnic ještě vrátíme v příkladu 2.48.

Integrací rovnice $y' = y$ v mezích od 0 do x dostáváme

$$y(x) - y(0) = \int_0^x y(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{tj.} \qquad y(x) = 1 + \int_0^x y(t)\mathrm{d}t,$$

kde jsme za dosadili $y(0) = 1$ ze zadané počáteční podmínky.

Uvažujme metrický prostor $(C[-L, L], \varrho_c)$, kde $0 < L < 1$, spojitých funkcí s metrikou stejnoměrné konvergence (tento prostor je úplný) a zobrazení

$$f : C[-L, L] \ni y(x) \longrightarrow f(y(x)) = 1 + \int_0^x y(t)\mathrm{d}t \in C[-L, L],$$

které spojité funkci přiřadí opět spojitou funkci (integrál jako funkce horní meze).

Ukážeme, že zobrazení je kontrakce:

$$\varrho_c(f(y_1(x)), f(y_2(x))) = \max\left\{ \left| \left(1 + \int_0^x y_1(t)\mathrm{d}t\right) - \left(1 + \int_0^x y_2(t)\mathrm{d}t\right) \right| \;\middle|\; x \in [-L, L] \right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{ \int_0^x |y_1(t) - y_2(t)|\mathrm{d}t \;\middle|\; x \in [-L, L] \right\} \leq \max\{|y_1(t) - y_2(t)| \mid x \in [-L, L]\} \int_0^x \mathrm{d}t \leq L\varrho(y_1(x), y_2(x)).$$

Nyní zvolme jako první člen posloupnosti libovolnou funkci splňující zadanou počáteční podmínku, například $a_1 = 1$ a počítejme

$$\begin{aligned}
a_2 &= f(a_1) = 1 + \int_0^x a_1\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x 1\mathrm{d}t = 1 + x, \\
a_3 &= f(a_2) = 1 + \int_0^x a_2\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x (1 + t)\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \\
a_4 &= f(a_3) = 1 + \int_0^x a_3\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{t^2}{2})\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \\
\vdots &\quad \vdots \\
a_n &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \\
\vdots &\quad \vdots \\
\lim_{n\to\infty} a_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.
\end{aligned}$$

Příklad 2.48: Diferenciální rovnice a Lipschitzova podmínka

Vraťme se nyní na chvíli k odstavci 7.2 druhého dílu učebnice. Najdeme tu dvě tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy (počáteční) úlohy, Peanovu a Picardovu větu (věty 7.1 a 7.2). Jejich důkazy pro nás ve druhém dílu byly neschůdné. Věty nám říkají, že (pro funkci $f(t,x)$ spojitou na otevřené souvislé množině D) má počáteční úloha

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in D,$$

vždy řešení. Splňuje-li navíc funkce f tzv. Lipschitzovu podmínku, je toto řešení jediné.

Podívejme se na Lipschitzovu podmínku z hlediska metriky. Připomeňme: funkce $f(t,x)$ splňuje (globální) Lipschitzovu podmínku na množině D, jestliže existuje číslo K takové, že pro každé dva body $(t,x_1), (t,x_2) \in D$ platí

$$\left| \frac{f(t,x_2) - f(t,x_1)}{x_2 - x_1} \right| \le K. \tag{2.16}$$

Zintegrujme rovnici $\dot{x} = f(\tau, x(\tau))$ v mezích od t_0 do t:

$$\int_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau)\mathrm{d}\tau = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau \quad \Longrightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $L = \varepsilon \cdot K < 1$, kde K je konstanta ze vztahu (2.16). Ukážeme, že zobrazení

$$F : (C[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \varrho_c) \ni x(t) \longrightarrow F(x(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau \in (C[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \varrho_c),$$

kde $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, je kontrakce v metrickém prostoru spojitých funkcí s metrikou stejnoměrné konvergence.

$$\varrho_c(F(x_1(t)), F(x_2(t))) = \max \left\{ \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_2(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))\mathrm{d}\tau \right| \,\middle|\, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \right\} \le$$

$$\le \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_2(\tau)) - f(\tau, x_1(\tau))| \,\mathrm{d}\tau \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} K|x_2(\tau) - x_1(\tau)|\mathrm{d}\tau \right| \le$$

$$\le \max\{|x_2(t) - x_1(t)| \mid t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\} \cdot K \left| \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u \right| \le K\varepsilon\varrho_c(x_1(t), x_2(t)) \le L\varrho_c(x_1(t), x_2(t)), \quad L \in [0,1).$$

Prostor spojitých funkcí s metrikou stejnoměrné konvergence je úplný a zobrazení F splňuje předpoklady Banachovy věty, má proto jediný pevný bod, a to funkci vyhovující vztahu

$$x(t) = F(x(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

Tato funkce je jediným řešením diferenciální rovnice $\dot{x}(t) = f(t,x)$ procházejícím bodem (t_0, x_0). Je-li Lipschitzova podmínka splněna globálně na množině D, můžeme konstrukci provést pro libovolný bod $(t_0, x_0) \in D$ a dokázali jsme tak Picardovu větu (věta 7.2 druhého dílu učebnice).

Příklad 2.49: Metoda postupných aproximací a soustavy lineárních rovnic

Metodu postupných aproximací lze použít také k řešení soustav lineárních rovnic. Mějme soustavu (značení používáme v souladu s prvním dílem učebnice)

$$A \cdot X = \overline{B},$$

kde $A = (a_i^j)$ je matice soustavy, $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ sloupec neznámých a $\overline{B} = (b_i)$ sloupcová matice pravých stran. Soustavu můžeme vyjádřit ve tvaru

$$X = (E - A)X + \overline{B},$$

a hledané řešení X pak bude pevným bodem zobrazení

$$f : \mathbf{R}^n \ni X \longrightarrow (E - A)X + \overline{B} \in \mathbf{R}^n.$$

Prostor $\mathbf{R}^n$ opatřený přirozenou (euklidovskou) metrikou je úplný.

Zkoumejme, za jakých podmínek bude zobrazení kontrakcí a bude tak splňovat předpoklady Banachovy věty. Označme $M = E - A$, $M = (m_i^j) = (\delta_i^j - a_i^j)$, $1 \le i, j \le n$. Pro vzdálenost vzorů a obrazů platí

$$\varrho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

$$\varrho(f(X), f(Y)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (m_i^j x_j + b_i) - \sum_{j=1}^{n} (m_i^j y_j + b_i) \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} m_i^j (x_j - y_j) \right)^2}.$$

Zobrazení f je kontrakce pro $\varrho(f(X), f(Y)) \le L \cdot \varrho(X, Y)$, kde $L \in [0, 1)$, tj. jestliže platí

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (m_i^j)^2 = \operatorname{tr}(M \cdot M^T) = ||M||^2 \le L < 1,$$

kde jsme použili zápis pomocí normy indukované skalárním součinem z příkladu 2.21. Změní se tato podmínka, budeme-li uvažovat na $\mathbf{R}^n$ místo přirozené metriky například součtovou nebo maximální?

Nyní nalezneme metodou postupných aproximací řešení konkrétní soustavy:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} &= -1, \\ \frac{x}{2} + y &= 5. \end{aligned}$$

Platí

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad M = E - A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$||M||^2 = \operatorname{tr}(M \cdot M^T) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{3}{4} \le L < 1.$$

Nyní začneme s libovolným bodem, například $a_1 = (x_1, y_1)^T = (0, 0)^T$ a počítejme

$$a_2 = f(a_1) = M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overline{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$a_3 = f(a_2) = M \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{31}{8} \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} \frac{17}{8} \\ \frac{61}{16} \end{pmatrix}, \dots$$

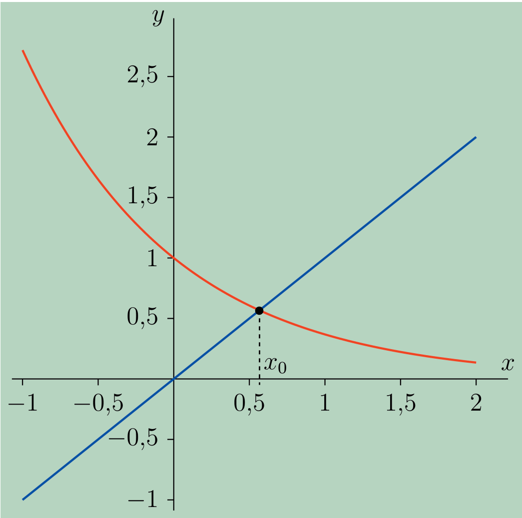
Posloupnost konverguje k jedinému pevnému bodu zobrazení f, bodu $a_0 = (x_0, y_0)^T = (2, 4)^T$, který je řešením soustavy (ověřte zkouškou). Vypočtěte další členy posloupnosti a odpovídající vzdálenosti $\varrho(a_i, a_0)$ jednotlivých členů od pevného bodu.

Příklad 2.50: Řešení transcendentní rovnice

Metodou postupných aproximací se pokusíme řešit rovnici

$$\mathrm{e}^{-x} = x.$$

Situaci znázorňuje obrázek 2.16.



Obr. 2.16 K příkladu 2.50.

Hledejme pevný bod zobrazení

$$\mathbf{R} \ni x \longrightarrow f(x) = \mathrm{e}^{-x} \in \mathbf{R}.$$

Úvahu nad splněním předpokladů Banachovy věty tentokrát přenecháme čtenáři. Začněme s libovolným bodem, například $x_1 = 0$ a počítejme:

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1) = \mathrm{e}^{-x_1} = \mathrm{e}^0 = 1, \\ x_3 &= f(x_2) = \mathrm{e}^{-x_2} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{e} \doteq 0{,}368, \\ x_4 &= f(x_3) = \mathrm{e}^{-x_3} = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}} \doteq 0{,}692, \\ x_5 &= f(x_4) = \mathrm{e}^{-x_4} = \ldots \doteq 0{,}500, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_6 &= f(x_5) = \mathrm{e}^{-x_5} = \ldots \doteq 0{,}606, \\
x_7 &= f(x_6) = \mathrm{e}^{-x_6} = \ldots \doteq 0{,}545, \\
x_8 &= f(x_7) = \mathrm{e}^{-x_7} = \ldots \doteq 0{,}579, \\
x_9 &= f(x_8) = \mathrm{e}^{-x_8} = \ldots \doteq 0{,}560, \\
x_{10} &= f(x_9) = \mathrm{e}^{-x_9} = \ldots \doteq 0{,}571, \\
x_{11} &= f(x_{10}) = \mathrm{e}^{-x_{10}} = \ldots \doteq 0{,}564, \\
x_{12} &= f(x_{11}) = \mathrm{e}^{-x_{11}} = \ldots \doteq 0{,}568, \\
x_{13} &= f(x_{12}) = \mathrm{e}^{-x_{12}} = \ldots \doteq 0{,}566, \\
&\vdots \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Nyní lze pokračovat tak dlouho, dokud nedosáhneme požadované přesnosti výsledku. Spokojíme-li se s přesností na tisíciny (s níž jsme uváděli výsledky jednotlivých kroků), postačí nám hodnota $x_0 \doteq x_{15} \doteq 0{,}567$.

S dalšími příklady se setkáme v kapitole 15. Na závěr ještě slibovaný podrobný důkaz Banachova principu a pak už se můžete pustit do cvičení.

Příklad 2.51: Důkaz Banachova principu

Předpokládejme, že zobrazení f úplného metrického prostoru (X, ϱ) do sebe je kontrakce, tj. existuje číslo $L \in [0, 1)$ takové, že platí

$$\varrho(f(x), f(y)) \le L \cdot \varrho(x, y), \qquad \text{pro každou dvojici} \quad x, y \in X.$$

Zvolme libovolný bod $a_1 \in X$ a definujme posloupnost $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ rekurentním vztahem $a_{i+1} = f(a_i)$. Pro každé $i \in \mathbf{N}$ platí

$$\varrho(a_{i+1}, a_{i+2}) = \varrho(f(a_i), f(a_{i+1})) \le L\varrho(a_i, a_{i+1}) \le L^2\varrho(a_{i-1}, a_i) \le \ldots \le L^i\varrho(a_1, a_2).$$

Pro libovolné $m > n$ je pak (s využitím trojúhelníkové nerovnosti a předchozího vztahu)

$$\varrho(a_n, a_m) \le \varrho(a_n, a_{n+1}) + \varrho(a_{n+1}, a_{n+2}) + \ldots + \varrho(a_{m-1}, a_m) \le$$

$$\le (L^{n-1} + L^n + L^{n+1} + \ldots L^{m-2})\varrho(a_1, a_2) \le L^{n-1}\varrho(a_1, a_2)\frac{1}{1-L}.$$

Výraz je totiž částí součtu geometrické řady s kvocientem L a prvním členem $L^{n-1}\varrho(a_1, a_2)$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ nyní již snadno nalezneme index $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, aby pro všechna $n, m \ge n_0$ platilo $\varrho(a_n, a_m) < \varepsilon$. Stačí vzít $n_0 > 1 + \frac{1}{\ln L} \ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\varrho(a_1, a_2)}$. Posloupnost je tedy cauchyovská. Vzhledem k úplnosti prostoru X existuje její limita. Označme

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Ukážeme, že x_0 je pevným bodem zobrazení f. Předpokládejme sporem, že tomu tak není a platí

$$\varrho(x_0, f(x_0)) = \varepsilon > 0.$$

Na druhé straně x_0 je limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, takže pro hodnotu $\frac{\varepsilon}{2}$ nalezneme index n_0 takový, že, pro každé $n - 1 > n_0$ je $\varrho(a_{n-1}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Platí

$$\varrho(x_0, f(x_0)) \le \varrho(x_0, a_n) + \varrho(a_n, f(x_0)) = \varrho(x_0, a_n) + \varrho(f(a_{n-1}), f(x_0)) \le \varrho(x_0, a_n) + L\varrho(a_{n-1}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + L\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dostáváme spor a proto $\varrho(x_0, f(x_0)) = 0$, tj. $x_0 = f(x_0)$.

Zbývá ukázat, že pevný bod je jediný. Nechť y_0 je jiný pevný bod, pak dostáváme

$$\varrho(x_0, y_0) = \varrho(f(x_0), f(y_0)) \leq L\varrho(x_0, y_0),$$

odtud

$$(1 - L)\varrho(x_0, y_0) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_0, y_0) = 0,$$

proto $x_0 = y_0$.

2.3.3 Cvičení

1. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení topologických prostorů. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

a) Zobrazení f je spojité.

b) Pro libovolnou množinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

c) Vzor libovolné uzavřené množiny v Y je uzavřená množina v X.

d) Vzor libovolné otevřené množiny v Y je otevřená množina v X.

2. Nechť τ_1 resp. τ_2 jsou dvě topologie na X. Topologii τ_1 nazveme silnější než τ_2 (resp. τ_2 slabší než τ_1) jestliže $\tau_2 \subset \tau_1$. Dokažte následující tvrzení:

a) Identita $(X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ je spojitá právě tehdy, když τ_1 je silnější než τ_2.

b) Spojitost zobrazení $f : X \to Y$ se nenaruší, jestliže zesílíme topologii na X nebo zeslabíme topologii na Y.

3. Vyšetřete spojitost zobrazení $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ z množiny $\mathbf{R}$ s přirozenou topologií do množiny $\mathbf{R}$ s topologií přirozenou (resp. triviální resp. diskrétní).

4. Uvažujte množinu $X = \{\heartsuit, \diamondsuit, \bullet, \triangle, \clubsuit\}$ a systém podmnožin $\sigma = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit, \bullet\}, \{\heartsuit, \diamondsuit, \triangle\}, \{\heartsuit, \clubsuit\}\}$. Tento systém tvoří bázi topologie (druhý díl str. 438). Topologii určete (tvoří ji všechna sjednocení bázových množin). Nechť zobrazení $f, g, h : X \to X$ jsou definovaná vztahy:
$f(\heartsuit) = \heartsuit, f(\diamondsuit) = \heartsuit, f(\bullet) = \diamondsuit, f(\triangle) = \triangle, f(\clubsuit) = \clubsuit,$
$g(\heartsuit) = \bullet, g(\diamondsuit) = \heartsuit, g(\bullet) = \diamondsuit, g(\triangle) = \clubsuit, g(\clubsuit) = 1,$
$h(\heartsuit) = \bullet, h(\diamondsuit) = \diamondsuit, h(\bullet) = \bullet, h(\triangle) = \triangle, h(\clubsuit) = \triangle,$
Určete jejich body nespojitosti.
Výsledek: Zobrazení f je spojité (vzorem každé otevřené množiny je množina otevřená), body nespojitosti zobrazení g jsou $\diamondsuit, \bullet, \triangle, \clubsuit$, body nespojitosti zobrazení h jsou $\diamondsuit, \triangle, \clubsuit$.

5. Ukažte, že dvě metriky ϱ_1 a ϱ_2 na X jsou ekvivalentní právě tehdy, když identita $\mathrm{id} : X \to X$ je homeomorfismus v příslušných indukovaných topologiích.

6. Ukažte, že obraz kompaktní množiny spojitým zobrazením je opět kompaktní množina, tj. dokažte následující větu: Je-li $f : (X, \varrho_X) \to (Y, \varrho_Y)$ spojité zobrazení a podmnožina $A \subset X$ kompaktní v metrickém prostoru X, pak je množina $f(A)$ kompaktní v metrickém prostoru Y.

Návod: Využijte „metrickou“ definici kompaktnosti před příkladem 2.34. Ukažte, že z libovolné posloupnosti $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ bodů množiny $f(A)$ lze vybrat konvergentní podposloupnost (z posloupnosti libovolně zvolených vzorů ji vybrat dokážeme, neboť o množině A jsme předpokládali, že je kompkaktní, dále využijte vlastností spojitých zobrazení.)

7. Vraťte se k větě 2.2 na straně 89 prvního dílu. Zamyslete se nad tím, jak vyplývají první tři vlastnosti funkcí spojitých na uzavřeném intervalu z obecnějšího tvrzení, dokázaného v předchozí úloze.
Návod: Uvědomte si, že uzavřený interval je kompaktní množina v $\mathbf{R}$. Jeho obrazem spojitou funkcí tak musí být opět kompaktní množina, kompaktní množina je uzavřená a ohraničená a každá neprázdná ohraničená množina v $\mathbf{R}$ má supremum a infimum.

8. Zobrazení dvou topologických prostorů se nazývá *otevřené*, je-li obrazem každé otevřené množiny otevřená množina. Zobrazení se nazývá *uzavřené*, je-li obrazem každé uzavřené množiny uzavřená množina. Uveďte příklad

a) spojitého zobrazení, které není otevřené, ale je uzavřené,

b) spojitého zobrazení, které není ani otevřené, ani uzavřené,

c) spojitého zobrazení, které není uzavřené, ale je otevřené,

d) uzavřeného a současně otevřeného zobrazení, které není spojité,

e) spojité bijekce, která není homeomorfismem.

Návod: zkoumejte například identitu mezi prostory s různou topologií, nebo konstantní zobrazení.

9. Uveďte příklad topologického prostoru a jeho kompaktní podmnožiny, která není uzavřená.

10. Pokuste se o důkaz alespoň některých tvrzení ve větě 11.7 o stejnoměrně spojitých zobrazeních.

11. Ukažte, že pro spojité zobrazení $f : X \to f(X)$ platí: Je-li množina A hustá v X, pak je množina $f(A)$ hustá v $f(X)$. Důsledkem je pak tvrzení: Je-li $f : X \to Y$ surjektivní spojité zobrazení a prostor X separabilní, pak je separabilní také prostor Y.

12. Ukažte, že každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité.

13. Metodou postupných aproximací hledejte řešení následujících rovnic (ukažte také, že jsou splněny předpoklady Banachovy věty):

a) $x = \frac{1}{4}x - 3$,

b) $x = \frac{2}{3}x + 1$,

c) $x = \sqrt{x}$ na intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$,

d) $x = \cos x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ je dostatečně malé.

Výsledky: a) -4, b) 3, c) 1 d) $x \doteq 0{,}739$.

14. Metodou postupných aproximací nalezněte pevné body následujících zobrazení $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Ukažte také, že jsou splněny předpoklady Banachovy věty:

a) $f(x, y) = \left(\frac{x}{2} + 1, \frac{y}{2} - 1\right)$,

b) $f(x, y) = \left(\frac{x}{3} + 2, -\frac{y}{2} - 3\right)$.

Výsledky: a) $[2, -2]$, b) $[3, -2]$.

15. Metodou postupných aproximací nalezněte řešení následujících diferenciálních rovnic se zadanou počáteční podmínkou (ukažte také, že jsou splněny předpoklady Banachovy věty):

a) $y' + y = 0$, $y(0) = 2$,

b) $y' - y = 0$, $y(0) = -1$.

c) $y' + 2xy = 0$, $y(0) = 1$,

Výsledky: a) $y = -2\mathrm{e}^{-x}$, b) $y = -\mathrm{e}^{x}$, c) $y = \mathrm{e}^{-x^2}$.

16. Na vhodném příkladu ukažte, že podmínku kontrakce

$$\varrho(f(x), f(y)) \le L\varrho(x, y), \quad L \in [0, 1)$$

v Banachově větě nelze nahradit slabší podmínkou $\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y)$, pro všechna $x \neq y$. Uveďte třeba příklad zobrazení $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pro které platí $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pro každé $x \neq y \in \mathbf{R}$, ale toto zobrazení nemá žádný pevný bod.

17. Nechť (X, ϱ) je kompaktní metrický prostor a zobrazení $f : X \to X$ splňuje podmínku

$$\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y), \quad \forall\, x, y \in X,\ x \neq y.$$

Pak f má právě jeden pevný bod v X. Dokažte.
Návod: Uvažujte zobrazení $d : X \to \mathbf{R}$, $d(x) = \varrho(x, f(x))$. Sporem předpokládejte, že pevný bod neexistuje, tj. $d(x) > 0$ pro každé x. Ukažte, že d je spojité a vzhledem ke kompaktnosti X nabývá své nejmenší hodnoty pro nějaké $x_0 \in X$. Zadaná podmínka použitá pro body $y = f(x_0)$ a $x = x_0$ povede ke sporu. Jednoznačnost ukažte podobně jako v příkladu 2.51.

18. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $A \subset X$ množina. Ukažte, že zobrazení $d_A : X \ni x \to d_A(x) = \varrho(x, A) \in \mathbf{R}$ přiřazující bodu $x \in (X, \varrho)$ jeho vzdálenost od podmnožiny A je lipschitzovské. Určete hodnotu Lipschitzovy konstanty L.