Elektrodynamik I — Serie 6

Musterlösungen

1. Aufgabe: Eindimensionale Schrödingergleichung I

a) Das Betragsquadrat der Wellenfunktion $\psi(x,t)$ beschreibt die Aufenhaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens im quantenmechanischen Sinn. Die Wellenfunktion ψ ist Element des Hilbertraums, d.h. $\psi(x,t)$ ist normierbar und es gilt deshalb

$$\psi(x,t) \to 0$$

für $x \to \pm\infty$. Somit kann $\psi(x,t)$ als Fourierintegral dargestellt werden. Mit dem folgenden Fourieransatz

$$\psi(x,t) = \int dk \; exp(ikx) \; \tilde{\psi}(k,t) \qquad (*)$$

ergibt sich eingesetzt in die eindimensionale Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)$$

die Differentialgleichung

$$i\hbar \int dk \; exp(ikx) \; \dot{\tilde{\psi}}(k,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\int dk \; (ik)^2 exp(ikx) \; \tilde{\psi}(k,t)$$

$$\Leftrightarrow \; \dot{\tilde{\psi}}(k,t) + \frac{\hbar k^2}{2m} i \; \tilde{\psi}(k,t) = 0$$

Mittels dem Fourieransatz wird also die partielle Differentialgleichung 2.Ordnung im Ortsraum in eine gewöhnliche Differentialgleichung 1.Ordnung im Impulsraum transformiert. Die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung folgt somit leicht zu

$$\tilde{\psi}(k,t) = C(k) \; exp(-i\frac{\hbar k^2}{2m}t) = C(k) \; exp(-i\omega t)$$

wobei die Integrationskonstante $C(k)$ eine beliebige Funktion von k ist und die Kreisfrequenz ω gegeben ist durch

$$\omega \; = \; \frac{\hbar k^2}{2m} \, .$$

Schliesslich folgt durch Einsetzen von $\tilde{\psi}(k,t)$ in $(*)$ die allgemeine Lösung der eindimensionalen Schrödingergleichung:

$$\psi(x,t) = \int dk \; exp(ikx) \; \tilde{\psi}(k,t) = \int dk \; a(k) \; exp[i(kx - \omega t)]$$

Wir haben in dieser Schlussformel die beliebige Funktion $C(k)$ mit $a(k)$ bezeichnet.

b) Die Kreisfrequenz ω ist proportional zum Quadrat des Wellenvektors k und ist gegeben durch

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

c) Die Gruppengeschwindigkeit ist die Änderung der Kreisfrequenz ω bezüglich der Veränderung von k.

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow v_G = \frac{\hbar k}{m}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist dabei

$$v_{Ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_{Ph} = \frac{\hbar k}{2m}$$

d) Gemäss den de Broglie Relationen gilt

$$E = \hbar\omega \quad ; \quad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Mit $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ (siehe b)) gilt für die Energie $(*)$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Verwenden wir $\hbar k = m v_G$ (aus c)), folgt

$$E = \frac{m}{2} v_G^2 \quad \text{und} \quad p = m v_G$$

Wenn wir übrigens in $(*)$ $\hbar k = p$ einsetzen, finden wir die klassische Relation

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

zwischen Energie und Impuls eines freien Teilchens.

2.Aufgabe: Eindimensionale Schrödingergleichung II

a) Die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung ist der Form

$$\psi(x,t) = \int dk\, a(k)\, exp(ikx - i\omega t)$$

Speziell für $t = 0$ gilt

$$\psi(x,0) = \int dk\, a(k)\, exp(ikx)$$

Die Fourieramplitude $a(k)$ lässt sich also aus dem Anfangszustand $\psi(x,0)$ gewinnen, d.h.

$$a(k) = \frac{1}{2\pi}\int dx\, exp(-ikx)\psi(x,0)$$

Durch das Einsetzen des konkreten Anfangszustand

$$\psi(x,0) = A\, exp(-\frac{x^2}{2c^2} + ik_0x)$$

ergibt sich für $a(k)$

$$a(k) = \frac{A}{2\pi}\int dx\, exp[-\frac{x^2}{2c^2} + (k_0-k)ix]$$

$$= \frac{A}{2\pi}\int dx\, exp\{-\frac{1}{2c^2}[x + c^2i(k-k_0)]^2 - \frac{c^2}{2}(k-k_0)^2\}$$

$$= \frac{A}{2\pi}exp[-\frac{c^2}{2}(k-k_0)^2]\int dx\, exp\{-\frac{1}{2c^2}[x + c^2i(k-k_0)]^2\} = \%$$

Wähle die Substitution $z = x + c^2i(k-k_0) \Rightarrow dz = dx$. Somit erhält man schliesslich mittels Gauss-Integral

$$\% = \frac{A}{2\pi}exp[-\frac{c^2}{2}(k-k_0)^2]\int dz\, exp(-\frac{z^2}{2c^2})$$

die gesuchte Fourieramplitude zu

$$a(k) = A\sqrt{\frac{c^2}{2\pi}}exp[-\frac{c^2}{2}(k-k_0)^2]$$

b) Durch das Einsetzen der in 2a) gefundenen Fourieramplitude $a(k)$ in die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung aus 1a) folgt die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ zum Zeitpunkt t. Unter der Verwendung der Beziehung

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

folgt somit

$$\psi(x,t) = \int dk\, a(k)\, exp[i(kx - \omega t)]$$

$$= A\sqrt{\frac{c^2}{2\pi}}\int dk\, exp[-\frac{c^2}{2}(k-k_0)^2 + i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t)]$$

$$= A\sqrt{\frac{c^2}{2\pi}}\int dk\, exp[-\frac{c^2}{2}k^2 + c^2kk_0 - \frac{c^2}{2}k_0^2 + ikx - it\frac{\hbar k^2}{2m}]$$

$$= A\sqrt{\frac{c^2}{2\pi}}\, exp(-\frac{c^2}{2}k_0^2) \int dk\, exp[-\frac{1}{2}(c^2 + it\frac{\hbar}{m})k^2 + (c^2k_0 + ix)k] = \%$$

Durch das Benützen des Tipps

$$\int dk\, exp(-\frac{\lambda}{2}k^2 + zk) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} exp(\frac{z^2}{2\lambda})$$

folgt schliesslich

$$\% = A\sqrt{\frac{c^2}{2\pi}}\, exp(-\frac{c^2}{2}k_0^2)\sqrt{\frac{2\pi}{c^2 + it\frac{\hbar}{m}}} exp[\frac{(c^2k_0 + ix)^2}{2(c^2 + it\frac{\hbar}{m})}]$$

$$= \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{i\hbar t}{mc^2}}} exp[\frac{(c^2k_0 + ix)^2}{2c^2(1 + \frac{i\hbar t}{mc^2})} - \frac{k_0^2c^2}{2}]$$

3.Aufgabe: Wellenpaket

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Teilchen zum Zeitpunkt t am Ort x zu finden, ist gegeben durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion $\psi(x,t)$.

a) Ein Gausspaket der Breite c zentriert um x_0 ist von der Form

$$exp(-\frac{(x - x_0)^2}{c^2})$$

Die Gruppengeschwindigkeit berechnet sich dabei aus der zeitlichen Änderung von x_0. Betrachtet man das gegebene $|\psi(x,t)|^2$ sieht man, dass sich x_0 mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegt:

$$x_0 = \frac{k_0\hbar t}{m} \;\Rightarrow\; v_G = \frac{k_0\hbar}{m}$$

Dass das Paket mit dieser Geschwindigkeit propagiert, ist auch aus der allgemeinen Theorie ersichtlich. Das Paket ist zusammengesetzt aus Beiträgen, die k Vektoren haben, welche um k_0 konzentriert sind (siehe $a(k)$ in Aufgabe 2a)).
Die Propagierungsgeschwindigkeit ist die Gruppengeschwindigkeit

$$v_G = \left.\frac{dw}{dk}\right|_{k=k_0} = \frac{\hbar k_0}{m}$$

b) Betrachtet man erneut das gegebene $|\psi(x,t)|^2$, so identifiziert man mit Hilfe der Form des Gausspakets eine monoton wachsende Breite gegeben durch

$$a(t) := c\sqrt{1 + \frac{\hbar^2t^2}{m^2c^4}}$$

Das gegebene $|\psi(x,t)|^2$ bewegt sich für Zeiten $t > 0$ gleichmässig in positive x-Richtung und fliesst aufgrund der monoton wachsenden Breite aus 3b) ebenfalls für Zeiten $t > 0$ auseinander und wird immer breiter. Damit $|\psi(x,t)|^2$ stets auf 1 normiert bleibt, verkleinert sich bei zunehmender Breite die Amplitude. Wie diese Wellenpakete von der Form eines Gausspakets bei unterschiedlichen Zeiten t zueinander stehen ist in der unteren Abbildung visualisiert.

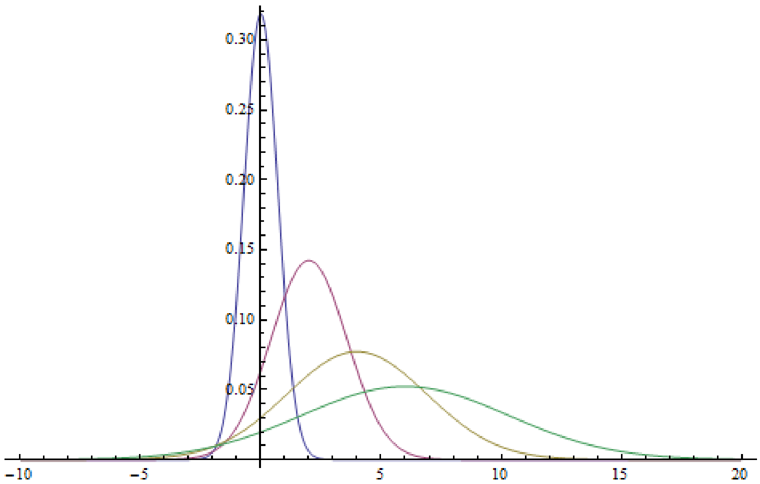

Abb.1: $|\psi(x,t)|^2$ zu unterschiedlichen Zeiten t