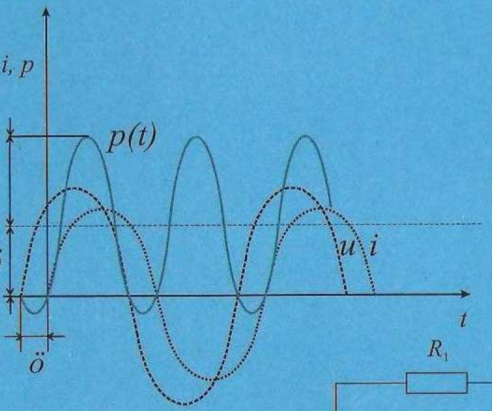
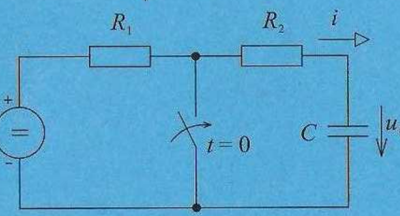
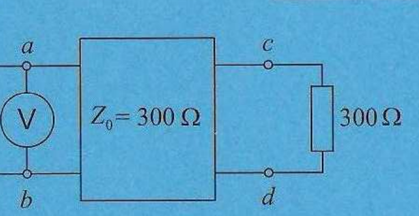
ZÁKLADY ELEKTRICKÝCH OBVODŮ V PŘÍKLADECH

Zdeňka Benešová
Marcela Ledvinová







ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ
PLZEŇ 2008

ZÁKLADY ELEKTRICKÝCH OBVODŮ V PŘÍKLADECH

Zdeňka Benešová
Marcela Ledvinová

Západočeská univerzita v Plzni, 2008

ISBN 978-80-7043-640-0

Předmluva

Tato skripta jsou určena především posluchačům 1. a 2. ročníku fakulty elektrotechnické jako studijní pomůcka k procvičení nejdůležitějších pojmů a k ověření základních znalostí z elektrických obvodů. Probíraná látka je rozdělena do deseti kapitol. V každé kapitole je nejprve uveden přehled nejdůležitějších pojmů, zákonů a pravidel pro řešení dané partie, následují řešené vzorové příklady a pak soubor neřešených příkladů. Na nich si čtenář může ověřit, zda příslušné partii porozuměl, pro kontrolu správnosti postupu jsou u každého příkladu uvedeny výsledky. Do sbírky byly záměrně zařazeny převážně jednodušší příklady, podobné těm, se kterými se studenti setkají v testech zadávaných během semestru a u vstupního testu při zkoušce. Problematika probíraná při přednáškách a ve cvičení je však mnohem širší a v předložených příkladech je zachycena jen částečně. Text v úvodu každé kapitoly není uceleným výkladem dané problematiky, ale je pouze přehledem vztahů potřebných pro řešení následujících příkladů, nemůže proto plně nahradit ani výklad látky na přednášce ani studium z učebnice elektrických obvodů.

Předložená sbírka obsahuje 45 řešených příkladů a 295 jednodušších příkladů neřešených, část z nich byla převzata ze starších skript Elementární příklady z elektrických obvodů (autoři Benešová, Mayer, Ledvinová, Kůs). Příklady zařazené v této nové sbírce lze vyřešit zpravidla s minimálními numerickými výpočty, jejich řešení má především pomoci studentům vytvořit si správný fyzikální názor. Při řešení příkladů je proto třeba snažit se problematice porozumět, nikoliv se ji učit zpaměti.

Skripta obsahují příklady z těch partií elektrických obvodů, které se probírají v předmětech Úvod do elektrotechniky a Teoretická elektrotechnika 1 na elektrotechnické fakultě a v Teoretické elektrotechnice pro FAV. Věříme, že předkládaná skripta se stanou účinnou studijní pomůckou pro úspěšné zvládnutí těchto základních předmětů pro studium elektrotechniky.

Děkujeme kolegům, kteří nám byli nápomocni při přípravě skript, zejména ing. Janu Mayerovi za nakreslení části obrázků a ing. Antonínu Předotovi za kontrolu výsledků u většiny neřešených příkladů. Náš dík patří rovněž recenzentovi doc. Ing. Jiřímu Kotlanovi, CSc., který svými cennými připomínkami přispěl ke konečné úpravě textu.

V Plzni, prosinec 2007

Zdeňka Benešová
Marcela Ledvinová

Obsah

1. PERIODICKY PROMĚNNÉ VELIČINY A JEJICH MATEMATICKÉ VYJADŘOVÁNÍ

1.1 ZÁKLADNÍ VZTAHY

Časově proměnné napětí a proudy v ustáleném stavu lze vyjádřit periodickou funkcí času s periodou T

$$v(t) = v(t + kT) \tag{1.1}$$

Charakteristické hodnoty periodické funkce jsou: *maximální hodnota (amplituda), střední a efektivní hodnota.*

Střední hodnota určuje stejnosměrnou složku periodické funkce $v(t)$, je definována vztahem

$$V_S = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} v(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{resp.} \qquad V_S = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

Střední hodnota proudu určuje takovou hodnotu stejnosměrného proudu, který by za dobu T přenesl stejně velký elektrický náboj.

Časové průběhy, jejichž stejnosměrná složka je nulová, nazýváme *průběhy střídavé.* Časové průběhy, které nabývají pouze kladných nebo pouze záporných hodnot, nazýváme *průběhy pulsující.* Odečtením stejnosměrné složky od libovolného periodického průběhu dostaneme průběh střídavý. Jelikož *pro střídavé průběhy* je stejnosměrná složka nulová, zavádíme v elektrických obvodech *střední hodnotu pro polovinu periody*

$$V_S = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

kde t_1 a t_2 jsou časové okamžiky začátku a konce půlvlny kladné polarity.

Efektivní hodnota periodické funkce je

$$V = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{1.4}$$

Fyzikální význam má *efektivní hodnota periodicky proměnného proudu,* která je rovna takové hodnotě stejnosměrného proudu, který na lineárním odporu vyvolá za dobu T stejné tepelné účinky.
Pro analýzu obvodů s neharmonickými průběhy napětí a proudů je důležitý rozklad periodické funkce na jednotlivé harmonické složky pomocí Fourierovy řady, této problematice je věnována 10. kapitola.

1.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

1.1 Napětí se mění podle funkce $u = 120\cos\left(942t + \frac{\pi}{6}\right)$. Stanovte amplitudu, efektivní hodnotu, kmitočet a dobu jednoho kmitu.

$$\boxed{\begin{matrix} U_m = 120\text{V}, U = 120/\sqrt{2} = 84.8\text{ V} \\ f = 150\text{Hz}, T = 0.00666\text{ s} \end{matrix}}$$

1.2 Úhlový kmitočet harmonicky proměnného napětí je $\omega = 300\ \text{s}^{-1}$. Stanovte dobu periody.

$$\boxed{T = 0.0209\text{ s}}$$

1.3 Stanovte fázový posun mezi napětími $u_1 = 100\sin\left(314t - \frac{\pi}{6}\right)$ a

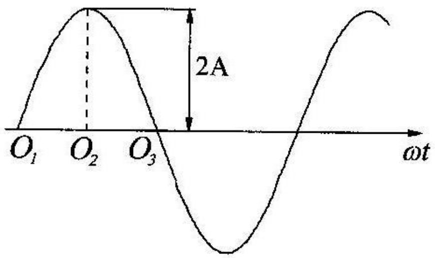
$$u_2 = 150\sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\boxed{\text{napětí } u_2 \text{ předbíhá před napětím } u_1 \text{ o } \frac{\pi}{3}}$$

1.4 Stanovte okamžitou hodnotu napětí v čase $t = 0{,}025$ s, jestliže se mění v závislosti na čase podle funkce: $u = 50\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, kmitočet je $f = 50$ Hz.

$$\boxed{u(0{,}025) = -50\text{ V}}$$

1.5 Harmonický průběh proudu znázorněný na obrázku vyjádřete analyticky pomocí funkce sinus, je-li kmitočet průběhu $f = 50$ Hz a počátek na vodorovné ose odpovídá bodu: a) O_1, b) O_2, c) O_3.



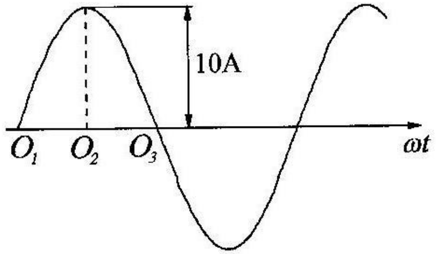
$$\boxed{\begin{matrix} a)\ 2\sin 314t\ \text{A}, \\ b)\ 2\sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right)\text{A}, \\ c)\ 2\sin(\omega t + \pi) = -2\sin 314t\ \text{A}. \end{matrix}}$$

1.6 Stanovte amplitudu U_m harmonicky proměnného napětí

$u(t) = U_m\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$, platí-li $u(0) = 30\text{V}$.

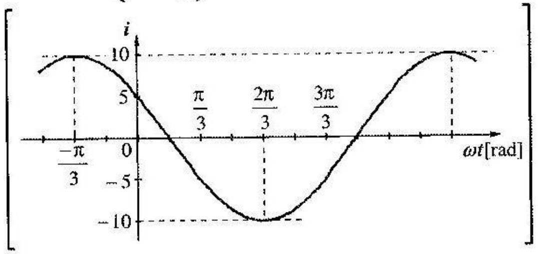
$$\boxed{U_m = 60\text{V}}$$

1.7 Harmonický průběh proudu znázorněný na obrázku vyjádřete pomocí funkce kosinus, je-li kmitočet $f = 50$ Hz a počátek odečítání času $t = 0$ odpovídá bodu a) O_1, b) O_2, c) O_3.

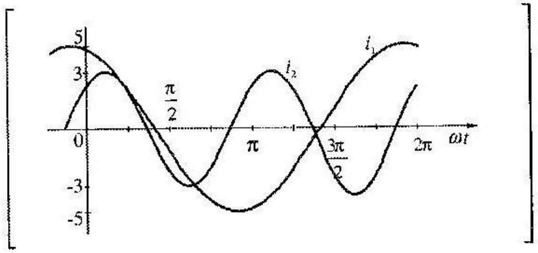


$$\boxed{\begin{matrix} a)\ 10\cos\left(314t - \frac{\pi}{2}\right)\text{A}, \\ b)\ 10\cos 314t\ \text{A}, \\ c)\ 10\cos\left(314t + \frac{\pi}{2}\right)\text{A}. \end{matrix}}$$

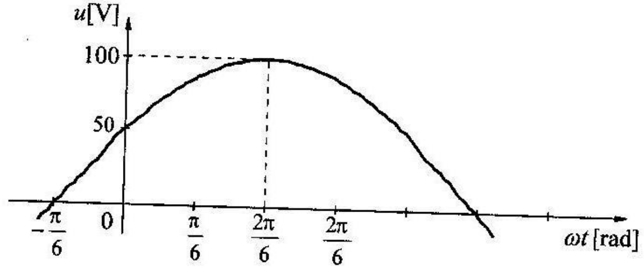
1.8 Zakreslete průběh proudu $i(t) = 10\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\text{A}$.



1.9 Zakreslete průběhy $i_1(t) = 5\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ a $i_2(t) = 3\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$.

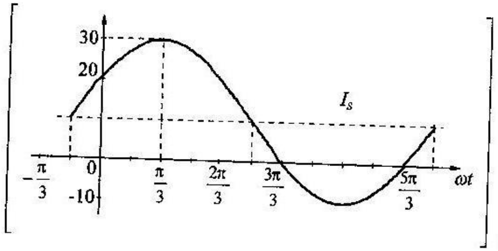


1.10 Vyjádřete analyticky harmonické napětí, jehož průběh je na obrázku, a to:
a) pomocí funkce sinus, b) pomocí funkce kosinus.



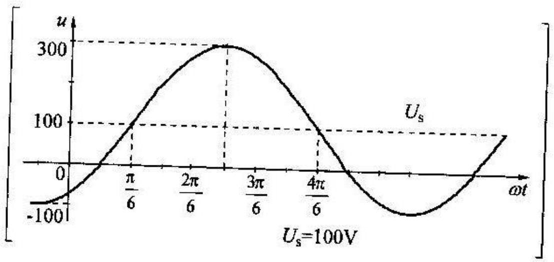
$$\boxed{\begin{aligned} &a)\ u(t)=100\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{V},\\ &b)\ u(t)=100\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)\,\mathrm{V}\end{aligned}}$$

1.11 Vyjádřete pomocí funkce sin časový průběh na obrázku.

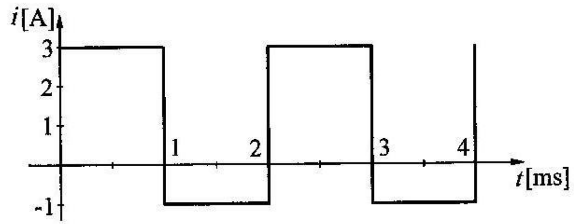


$$\boxed{i_1(t)=10+20\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)}$$

1.12 Zakreslete průběh napětí $u(t)=100-200\cos\left(2\omega t+\frac{\pi}{6}\right)$ a vyznačte stejnosměrnou složku tohoto napětí.

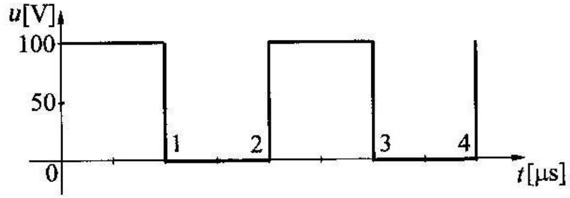


1.13 Stanovte stejnosměrnou složku proudu, jehož časový průběh je na obrázku.



$$\boxed{I_S=1\mathrm{A}}$$

1.14 Stanovte střední a efektivní hodnotu napětí, jehož časový průběh je na obrázku:

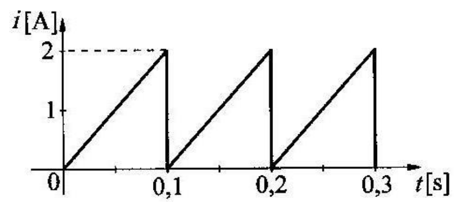


$$\boxed{U_S=50\mathrm{V},\ U=50\sqrt{2}=70{,}7\mathrm{V}}$$

1.15 Stanovte střední a efektivní hodnotu proudu $i(t)=|10\sin\omega t|\ \mathrm{A}$.

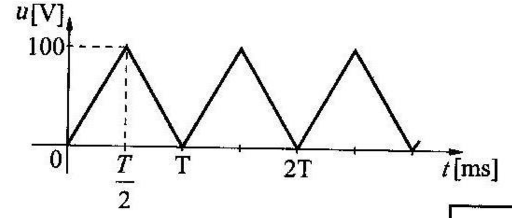
$$\boxed{I_S=\frac{20}{\pi}=6{,}37\ \mathrm{A},\ I=\frac{10}{\sqrt{2}}=7{,}07\ \mathrm{A}}$$

1.16 Stanovte střední a efektivní hodnotu proudu, jehož časový průběh je na obrázku:



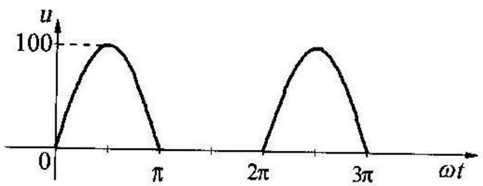
$$\boxed{I_S=1\mathrm{A},\ I=\frac{2}{\sqrt{3}}=1{,}15\mathrm{A}}$$

1.17 Stanovte střední a efektivní hodnotu proudu, jehož časový průběh je na obrázku:



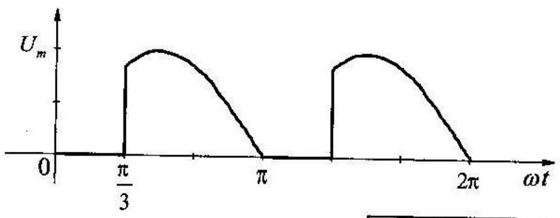
$$U_S = 50\text{ V},\ U = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57{,}7\text{ V}$$

1.18 Stanovte střední a efektivní hodnotu napětí o amplitudě 100V, usměrněného jednocestným usměrňovačem.



$$U_S = \frac{100}{\pi} = 31{,}83\text{ V},$$
$$U = \frac{100}{2} = 50\text{ V}$$

1.19 Stanovte střední a efektivní hodnotu napětí $u(t)$ dle obr.



$$U_S = \frac{3U_m}{2\pi} = 0{,}478U_m, U = 0{,}633U_m$$

2. TOPOLOGICKÁ A FYZIKÁLNÍ STRUKTURA ELEKTRICKÉHO OBVODU

Elektrický obvod je model elektrického zařízení, který respektuje způsob propojení jednotlivých elementů (*topologická struktura obvodu*) a elektromagnetické jevy, které v daném systému probíhají. Ty modelujeme pomocí idealizovaných prvků, které určují *fyzikální strukturu obvodu.*

2.1 TOPOLOGICKÁ STRUKTURA OBVODU

Způsob zapojení obvodu vyjadřuje *graf obvodu,* který se skládá z *větví* a *uzlů.* Orientujeme-li větve grafu, získáme *orientovaný graf.* Graf může být buďto rovinný nebo prostorový.

Základními topologickými prvky jsou: *uzel, větev, smyčka, strom, soustava nezávislých větví.* Zvolíme-li jeden uzel grafu jako *referenční,* jsou zbývající uzly *nezávislé* – platí pouze v obvodech sestávajících z jedné separátní části. Spojíme-li všechny uzly větvemi tak, aby nevznikla uzavřená smyčka, dostaneme *strom.* Větve, které nepatří do stromu, tvoří systém *nezávislých větví.* Ke každému grafu lze sestrojit více stromů. Označíme-li:

l – počet větví grafu
k – počet uzlů grafu, (k – 1 je nezávislých)

pak počet nezávislých větví je: $n = l - k + 1$.

Incidenční matice umožňují algebraické zobrazení orientovaného grafu.

1. incidenční matice vyjadřuje incidenci mezi *větvemi a nezávislými uzly,* řádky matice odpovídají nezávislým uzlům a její sloupce odpovídají větvím. Prvky 1. incidenční matice jsou +1, -1, 0, přičemž:

+1 – orientace větve směřuje z uzlu
-1 – orientace větve směřuje do uzlu
0 – větev s uzlem neinciduje

2. incidenční matice vyjadřuje incidenci mezi *větvemi a nezávislými smyčkami,* přičemž řádky odpovídají nezávislým smyčkám a sloupce větvím grafu. Prvky 2. incidenční matice jsou opět +1, -1, 0, přičemž:

+1 – orientace větve souhlasí s orientací smyčky
-1 – orientace větve je opačná než orientace smyčky
0 – větev neinciduje s danou smyčkou

2.2 FYZIKÁLNÍ STRUKTURA OBVODU – IDEÁLNÍ PRVKY OBVODU

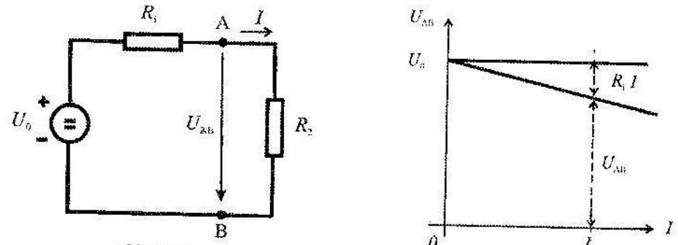
Ideální prvky obvodu dělíme na *pasivní a aktivní:*

aktivní – ideální zdroj napětí a ideální zdroj proudu
jejich parametry označujeme $u_0(t)$ a $i_0(t)$

pasivní – rezistory, induktory a kapacitory
jejich parametry označujeme *R, L, C.*

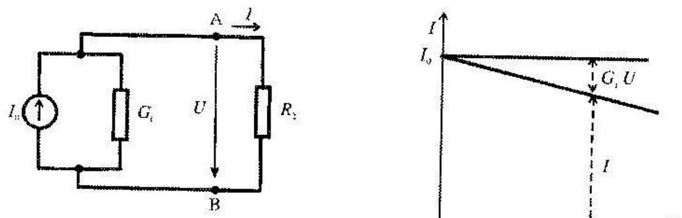
Aktivní prvky – *nezávislé* reálné zdroje modelujeme pomocí ideálního zdroje napětí resp. proudu a vnitřního odporu, *ideální zdroj napětí* má svorkové napětí nezávislé na odebíraném proudu, *závislé* (řízené) zdroje závisí na napětí či proudu v některé větvi obvodu.

Napěťový zdroj
modelujeme ideálním zdrojem napětí U_0 a vnitřním odporem R_i – obr. 2.1. Na svorkách AB je napětí $U_{AB} = U_0 - R_i I$, jeho velikost závisí na odebíraném proudu. *Ideální napěťový zdroj* má $R_i = 0$, takže platí: $U_0 = U_{AB}$.



Obr 2.1

Proudový zdroj
modelujeme ideálním zdrojem proudu I_o a vnitřní vodivostí G_i – obr. 2.2. Zdroj dodává do obvodu proud $I = I_o - G_i\, U$. *Ideální proudový zdroj* má $G_i = 0$, takže platí: $I_o = I$.



Obr 2.2

Pasivní prvky mohou být *lineární* (jejich parametry jsou konstanty), *nelineární* (jejich parametry jsou funkcemi napětí a proudů) nebo *časově proměnné.*

Dále budeme uvažovat pouze prvky ***lineární, časově neproměnné.***

Vlastnosti pasivních prvků

Rezistor (odporník)
má parametr *odpor* R [Ω], jeho převrácená hodnota je *vodivost* $G = 1/R$ [S]. Na rezistoru dochází k ***přeměně elektrické energie v tepelnou.*** Okamžitý tepelný výkon rezistoru je

$$p(t) = u(t)\, i(t) \tag{2.1}$$

Induktor (ideální cívka)
parametrem je *indukčnost* L [H], definujeme ji jako poměr magnetického indukčního toku Φ a proudu i, který tok Φ vyvolal

$$L = \frac{\Phi}{i} \tag{2.2}$$

V induktoru se akumuluje energie magnetického pole

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2 \tag{2.3}$$

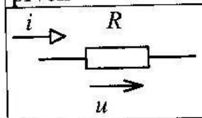
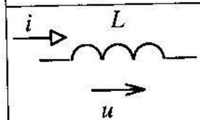
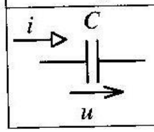
Kapacitor (ideální kondenzátor)
parametrem je *kapacita* C [F], je dána poměrem elektrického náboje Q na kladné elektrodě kondenzátoru a napětí u mezi elektrodami

$$C = \frac{Q}{u} \tag{2.4}$$

Kapacitor akumuluje energii elektrického pole

$$W_e = \frac{1}{2} C u^2 \tag{2.5}$$

Vztahy mezi okamžitými hodnotami napětí a proudu pro pasivní lineární prvky

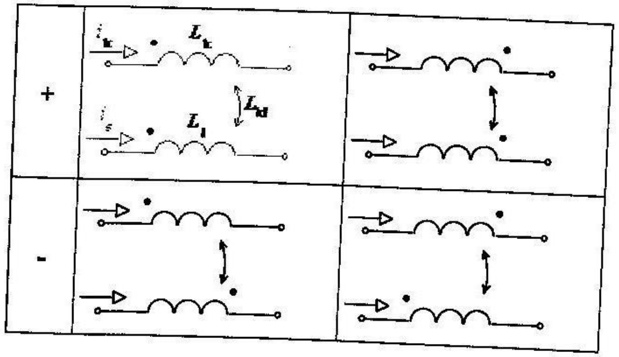
prvek	napětí	proud
	$u(t) = R\, i(t)$	$i(t) = \dfrac{u(t)}{R}$
	$u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$	$i(t) = \dfrac{1}{L}\int_0^t u(\xi)\,\mathrm{d}\xi + i(0)$
	$u(t) = \dfrac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\,\mathrm{d}\xi + u(0)$	$i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$

Tab. 2.1

Induktivně vázané cívky
Cívky mohou být induktivně vázané. Napětí pro dvojici cívek k, l se vzájemnou indukčností L_{kl} je dáno vztahy:

$$u_k = L_k \frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} \pm L_{kl} \frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{d}t} \tag{2.6}$$
$$u_l = L_l \frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{d}t} \pm L_{kl} \frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t}$$

Znaménka u vzájemných indukčností závisí na vzájemné orientaci magnetických indukčních toků v obou cívkách. V elektrických obvodech tato znaménka určíme pomocí referenčních znaků „•“, které značí začátek vinutí, a směru proudů v obou cívkách podle následující tabulky:



Tab. 2.2

2.3 SPOJOVÁNÍ REZISTORŮ, INDUKTORŮ A KAPACITORŮ

Pro *sériové řazení* dvou prvků platí

$$R = R_1 + R_2\ ,\quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{2.7a}$$

Pro indukčnosti bez vzájemné indukčnosti

$$L = L_1 + L_2 \tag{2.7b}$$

Pro *paralelní řazení* dvou prvků platí

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\ ,\quad C = C_1 + C_2 \tag{2.8a}$$

Pro indukčnosti bez vzájemné indukčnosti

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{2.8b}$$

Poznámka

V mnohých příkladech této a následujících kapitol se počítá s voltmetry a ampérmetry. Ve všech těchto příkladech se předpokládá, že:

– přístroje měří efektivní hodnotu

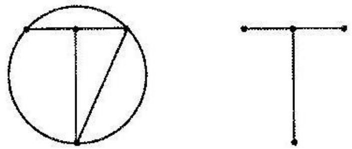
– jde o ideální přístroje, které nemají ztráty *(tj. voltmetry mají nekonečně velký vnitřní odpor a ampérmetry mají nulový odpor)*

Zdroje napětí a proudů *uváděné v příkladech* ***jsou vždy ideální*** *(tj. zdroje napětí mají vnitřní odpor $R_i = 0$ a zdroje proudu vnitřní vodivost $G_i = 0$).*

2.4 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

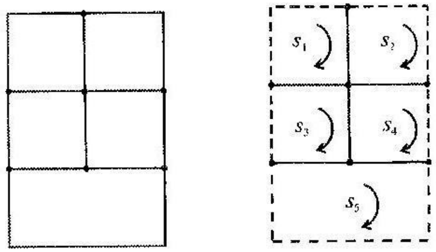
Topologická struktura

2.1 Pro daný graf obvodu nakreslete jeden strom, určete počet nezávislých větví a nezávislých uzlů.



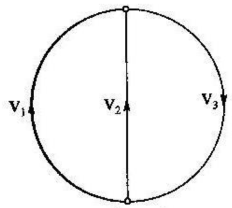
$\boxed{\ell = 7\ ,\ k - 1 = 3\ ,\ n = 4}$

2.2 Pro graf obvodu uvedený na obrázku nakreslete jeden strom, určete počet nezávislých větví a vyznačte systém nezávislých smyček.



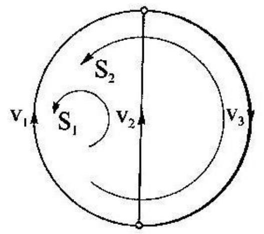
$\boxed{n = 5}$

2.3 Sestrojte 1. incidenční matici **A** orientovaného obvodu podle obrázku.



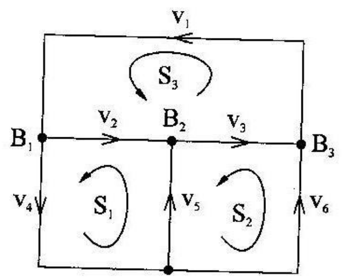
$\boxed{\mathbf{A} = [-1\ \ -1\ \ 1]}$

2.4 Sestrojte 2. incidenční matici orientovaného grafu.



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.5 Pro orientovaný graf podle obrázku zapište 1. incidenční matici.



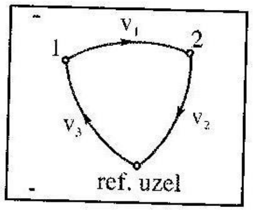
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.6 Pro orientovaný graf z předchozího příkladu zapište 2. incidenční matici.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

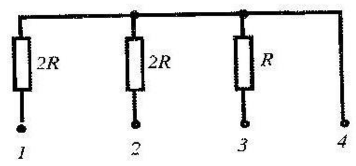
2.7 Nakreslete orientovaný graf obvodu, jehož 1. incidenční matice **A** je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



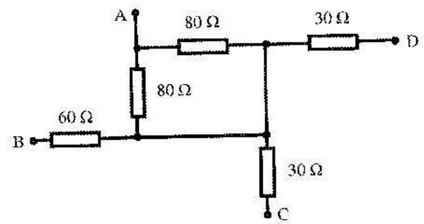
Spojování rezistorů, induktorů a kapacitorů

2.8 Určete výsledný odpor mezi uzly 3-4, jsou-li svorky 1,2,3 zkratovány



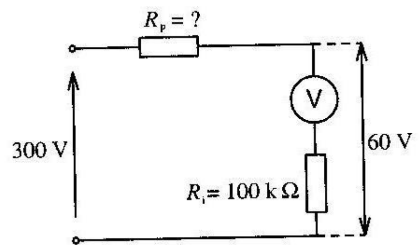
$$R_{34} = R/2$$

2.9 Vypočtěte velikost odporu měřeného na svorkách AB, AC, AD a BC.



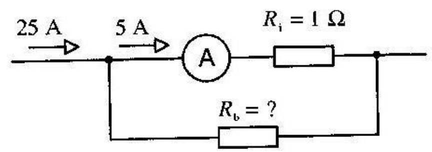
$R_{AB} = 100\Omega$
$R_{AC} = 70\Omega$
$R_{AD} = 70\Omega$
$R_{BC} = 90\Omega$

2.10 Stanovte velikost předřadného odporu R_p.



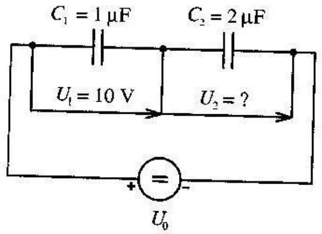
$$R_p = 400\,\mathrm{k\Omega}$$

2.11 Stanovte velikost odporu bočníku.



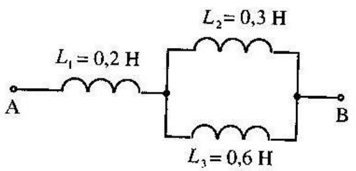
$$R_b = 0{,}25\,\Omega$$

2.12 Jaké napětí je na svorkách kondenzátoru C_2 ?



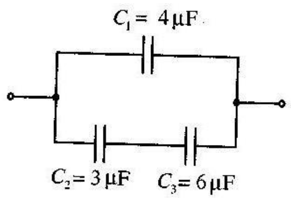
$\boxed{U_2 = 5\,\text{V}}$

2.13 Stanovte celkovou indukčnost dvojpólu podle obrázku.



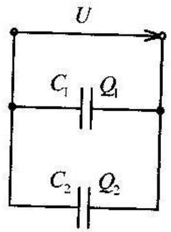
$\boxed{L = 0{,}4\,\text{H}}$

2.14 Stanovte celkovou kapacitu dvojpólu podle obrázku.



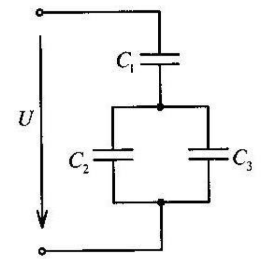
$\boxed{C = 6\,\mu\text{F}}$

2.15 Dva kondenzátory s kapacitou $C_1 = 2C_2$ jsou zapojeny paralelně a připojeny na síť s napětím U. Jaké jsou náboje na kondenzátorech?



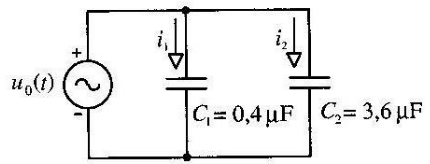
$\boxed{Q_1 = 2Q_2}$

2.16 Pro zapojení podle obrázku určete celkové napětí U.
Dáno: $C_1 = 100\,\text{nF}$, $C_2 = 60\,\text{nF}$, $C_3 = 20\,\text{nF}$, $Q_3 = 4\,\mu\text{C}$



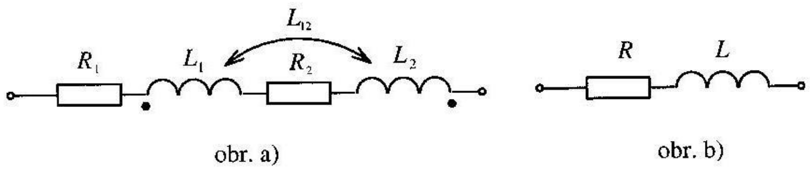
$\boxed{U = 360\,\text{V}}$

2.17 V obvodu podle obrázku je $i_2 = 18\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ A. Určete i_1.



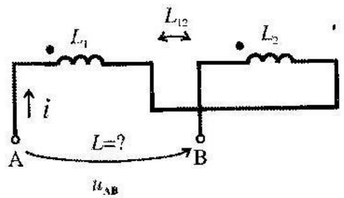
$\boxed{i_1 = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\text{A}}$

2.18 Pro větev podle obr. a) stanovte ekvivalentní odpor a ekvivalentní indukčnost podle obr. b).



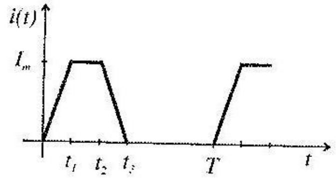
$\boxed{R = R_1 + R_2\,,\ L = L_1 + L_2 - 2L_{12}}$

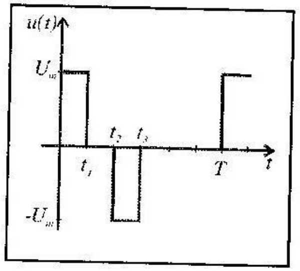
2.19 Vyjádřete napětí u_{AB} a vypočtěte hodnotu ekvivalentní indukčnosti L_{AB}.



$$\boxed{\begin{aligned} u_{AB} &= (L_1 + L_2 - 2L_{12})\frac{di}{dt} \\ L_{AB} &= L_1 + L_2 - 2L_{12} \end{aligned}}$$

2.20 Ideální cívkou protéká proud s časovým průběhem dle obrázku. Zakreslete časový průběh napětí

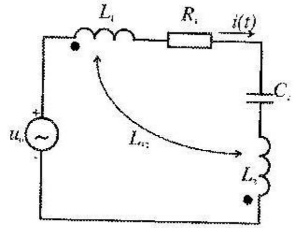




2.21 Vypočtěte hodnotu U_m z příkladu 2.20, je-li dáno: I_m = 10A, L = 10 mH, t_1 = 1 ms, t_2 = 2 ms, t_3 = 3 ms.

$$\boxed{U_m = 100\text{ V}}$$

2.22 Napište rovnici pro okamžité hodnoty proudu $i(t)$



$$\boxed{(L_1 - L_{12})\frac{di}{dt} + R_1 i + \frac{1}{C_2}\int_0^t i\,dt + u_C(0) + (L_2 - L_{12})\frac{di}{dt} = u_0}$$

2.23 Kapacitorem protéká proud $i = 10\cos\omega t$ A, f = 50 Hz. Vypočtěte napětí a akumulovanou energii na kapacitoru v čase $t = T/4$, je-li C = 0,1 mF.

$u(T/4)$ = 318V
W_E = 5,07 J

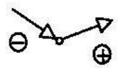
3. STEJNOSMĚRNÉ OBVODY S REZISTORY

3.1. ZÁKLADNÍ VZTAHY

Analýzu jednodušších obvodů provádíme pomocí Kirchhoffových zákonů, základních principů (ekvivalence, superpozice) a metodou postupného zjednodušování.

První Kirchhoffův zákon (proudový)

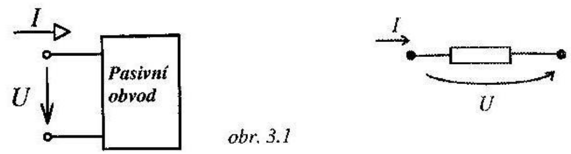
$$\sum_k \pm I_k = 0 \qquad (3.1)$$



Druhý Kirchhoffův zákon (napěťový)

$$\sum_k \pm U_k = 0 \qquad (3.2)$$

Princip ekvivalence
Napěťové a proudové poměry v obvodu zůstanou zachovány, nahradíme-li složitější část obvodu jednoduchým dvojpólem za předpokladu, že se nezmění napětí U a proud I na vnějších svorkách.

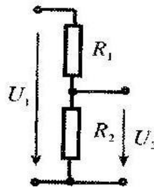


obr. 3.1

Princip superpozice
Je-li lineární obvod napájen více zdroji, lze určit větvové veličiny tak, že postupně analyzujeme náhradní obvody napájené pouze jedním zdrojem a ostatní zdroje nahradíme jejich vnitřním odporem (napěťový zdroj zkratem, má $R_i = 0$, proudový zdroj rozpojenou větví, má $R_i \rightarrow \infty$). Hledanou větvovou veličinu získáme superpozicí dílčích řešení s přihlédnutím k jejich orientaci.

Metoda postupného zjednodušování
Je jednoduchá metoda založená na principu ekvivalence, lze ji použít pro analýzu obvodu napájeného jedním zdrojem, pokud obvod obsahuje více zdrojů, použijeme ještě princip superpozice.
Postup: Analyzovaný obvod postupně zjednodušujeme (transfigurujeme) až dospějeme k obvodu, sestávajícímu pouze z jedné smyčky, vypočteme proud a zpětným postupem určujeme hledané větvové veličiny. Často využíváme vztahy pro *dělič napětí* (obr.3.2a) a *dělič proudu* (obr. 3.2b).

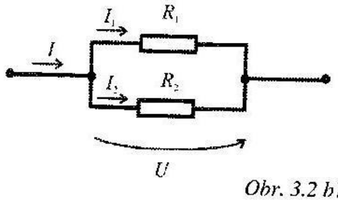
Dělič napětí (nezatížený) – napětí se rozdělí přímo úměrně velikosti rezistorů



$$U_2 = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad (3.3)$$

Obr. 3.2 a)

Dělič proudu – proud se rozdělí nepřímo úměrně velikosti rezistorů

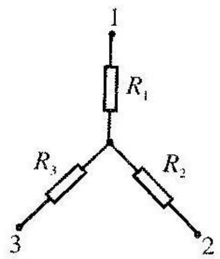


$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

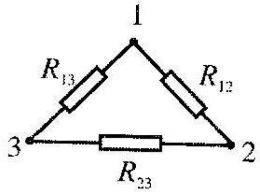
$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad (3.4)$$

Obr. 3.2 b)

Ve složitějších obvodech kromě pravidel pro sériově-paralelní zapojení používáme *transfiguraci hvězda-trojúhelník*



Obr. 3.3



$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{13} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \qquad R_1 + R_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

Z těchto rovnic dostaneme vzorce pro:

a) transfiguraci hvězda – trojúhelník:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 + R_2}{R_3} \qquad R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 + R_3}{R_2} \qquad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 + R_3}{R_1}$$

b) transfiguraci trojúhelník - hvězda:

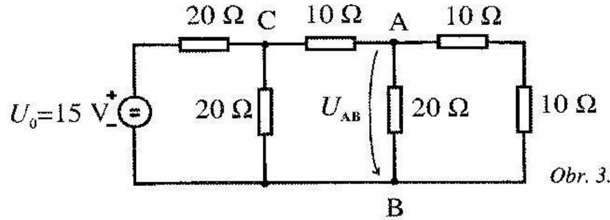
$$R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \qquad R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \qquad R_3 = \frac{R_{23} R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Pro symetrické uspořádání platí:

$$R_{12} = R_{13} = R_{23} = R_\Delta \ ; \ R_1 = R_2 = R_3 = R_Y \quad \Rightarrow \quad R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \qquad (3.5)$$

Výkon na odporu R určíme ze vztahu $\quad P = U\,I = RI^2 = \dfrac{U^2}{R} \qquad (3.6)$

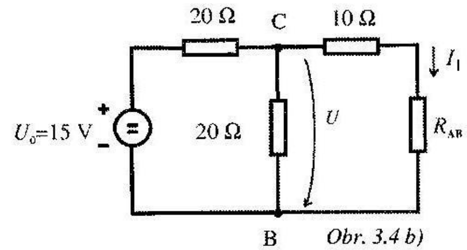
Příklad III-1: V obvodu na obr. 3.4a) vypočtěte velikost napětí U_{AB}.



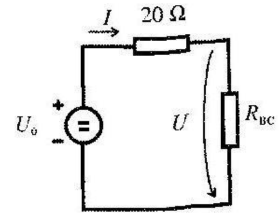
Obr. 3.4 a)

Řešení:

1. Obvod postupně zjednodušujeme - viz obr. 3.4 b),c) a vypočteme odpory $R_{AB} = 10\ \Omega$, $R_{BC} = 10\ \Omega$.
2. V obvodu na obr. 3.4c) stanovíme proud $I = U_0/(R_{BC}+20) = 0{,}5\text{A}$ a napětí $U = R_{BC}\, I = 5\ \text{V}$.
3. Nyní řešíme obvod na obr. 3.4 b): z napětí U vypočteme proud I_1: $I_1 = U/(10 + R_{AB}) = 0{,}25\ \text{A}$, hledané napětí je $U_{AB} = I_1 R_{AB} = 5\text{V}$.



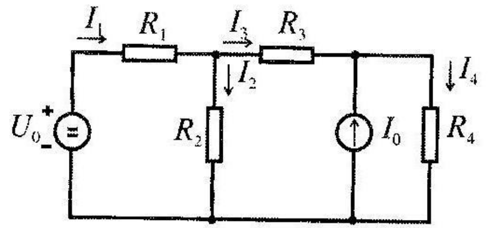
Obr. 3.4 b)



Obr. 3.4 c)

Existuje více postupů, jak určit z proudu I napětí U_{AB}, zde je uveden pouze jeden z nich, lze např. využít vztahy pro proudový a napěťový dělič.

Příklad III-2: V daném obvodu vypočtěte proud protékající rezistorem R_4.



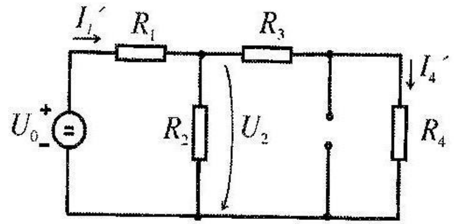
Dáno:
$U_0 = 240\text{V}$, $I_0 = 3\text{A}$
$R_1 = 16\Omega$, $R_2 = 40\Omega$,
$R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 50\Omega$,

Obr. 3.5 a)

Řešení:

Použijeme princip superpozice a metodu postupného zjednodušování. Vyřešíme dva dílčí obvody dle obr.3.5 b) a c):

1) ***Obvod s napěťovým zdrojem,*** *větev s proudovým zdrojem je rozpojena.*
Vypočteme proud I_1', poté z proudového děliče I_4'.

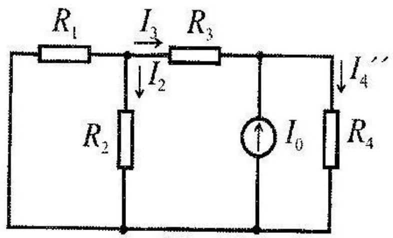


Obr. 3.5 b)

$$I_1' = \frac{U_0}{R_1 + \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}} = 6\text{A}$$

$$I_4' = I_1' \frac{R_2}{R_2+R_3+R_4} = 2{,}4\text{A}$$

2) ***Obvod s proudovým zdrojem,*** *větev s napěťovým zdrojem je zkratována.*



Obr. 3.5 c)

Vypočteme odpor sérioparalelního zapojení rezistorů R_1, R_2 a R_3

$$R_{123} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = 21{,}43\Omega$$

Použijeme vztah pro proudový dělič a dostaneme I_4''

$$I_4'' = I_0 \frac{R_{123}}{R_{123} + R_4} = 0{,}9\text{A}$$

Hledaný proud je $I_4 = I_4' + I_4'' \Rightarrow I_4 = 2{,}4 + 0{,}9 = 3{,}3\text{A}$

(proudy sčítáme, neboť v obou obvodech byla shodná orientace proudu)

Příklad III-3: Vyšetřete výkonové poměry v obvodu na obr. 3.6.a). Zdroj napětí je modelován ideálním zdrojem napětí U_0 a vnitřním odporem R_i, odpor R značí zátěž.

Řešení: Určíme proud v obvodu $I = \frac{U_0}{R_i + R}$ a vypočteme výkony:

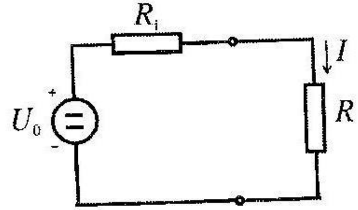
příkon spotřebiče :

$$P_Z = R I^2 = \frac{R U_0^2}{(R_i + R)^2}$$

ztráty na odporu R_i :

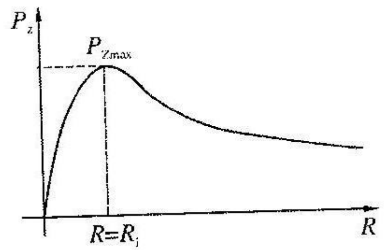
$$\Delta P = R_i I^2 = \frac{R_i U_0^2}{(R_i + R)^2}$$

výkon zdroje : $P = U_0 I = \frac{U_0^2}{R_i + R}$.



Obr. 3.6a)

Maximální výkon zdroje je pro $R = 0$, je to tzv. *zkratový výkon zdroje* $P_k = \frac{U_0^2}{R_i}$



Obr. 3.6b)

Účinnost přenosu elektrické energie

$$\zeta = \frac{P_Z}{P} = \frac{P_Z}{P_Z + \Delta P} = \frac{R}{R_i + R}$$

Všechny vypočtené hodnoty závisí na velikosti odporu R; na obr. 3.6.b) je zakreslena závislost $P_z(R)$, jelikož pro příkon spotřebiče platí:

$$R = 0 \Rightarrow P_Z = 0,$$

$$R \to \infty \Rightarrow P_Z = 0$$

musí existovat hodnota odporu R, pro kterou je příkon maximální, určíme ji z podmínky

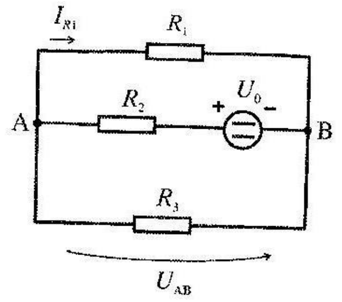
$$\frac{dP_Z}{dR} = 0 = U_0 \frac{(R_i + R)^2 - 2R(R_i + R)}{(R_i + R)^4} \Rightarrow R_i = R \Rightarrow P_{Z\max} = \frac{U_0^2}{4R}$$

V energetických systémech (*obvody pro přenos energie*) je důležitá hodnota účinnosti; požadujeme, aby ztráty při přenosu byly minimální, čili $R_i << R$.

V *obvodech pro přenos informací* velikost účinnosti není rozhodující, důležitá je velikost výkonu dodaného do zátěže. Tento výkon je maximální při splnění podmínky $R_i = R$, jedná se o tzv. *výkonové přizpůsobení*, při kterém je sice účinnost 50%, ale *příkon spotřebiče* je $P_{Z\max} = \frac{U_0^2}{4R} = 0{,}25 P_k$.

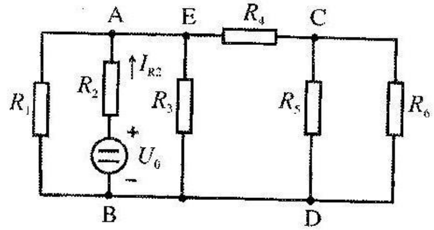
3.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

3.1. V daném obvodu vypočtěte proud I_{R1}, odpor R_{AB} a napětí U_{AB}.
Dáno: $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $U_o = 220V$



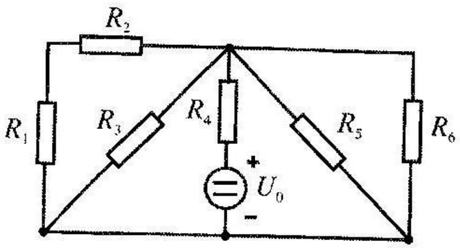
$I_{R1} = 1{,}74A$
$R_{AB} = 14{,}29A$
$U_{AB} = 52{,}6V$

3.2. V daném obvodu vypočtěte proud I_{R2}, odpor R_{EC} a napětí U_{AB}, U_{CD}
Dáno: $U_o = 60V$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 20\Omega$



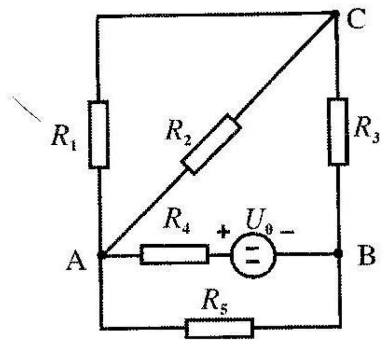
$I_{R2} = 2{,}18A$
$U_{AB} = 16{,}4V$
$U_{CD} = 5{,}44V$
$R_{EC} = 9{,}09\Omega$

3.3. V daném obvodu vypočtěte proudy I_{R3} a I_{R4}.
Dáno: $U_o = 80V$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 60\Omega$



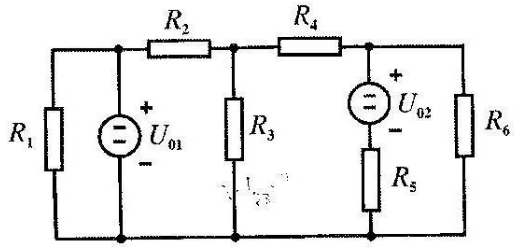
$I_{R3} = 0{,}296A$
$I_{R4} = 1{,}037A$

3.4. V daném obvodu vypočtěte proudy I_{R1}, I_{R4} a odpor R_{BC}.
Dáno: $U_o = 220V$, $R_1 = R_3 = R_4 = 50\Omega$, $R_2 = R_5 = 100\Omega$



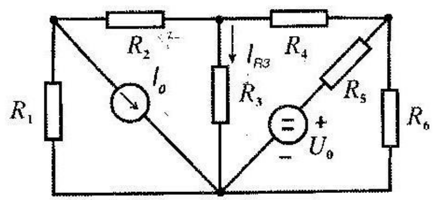
$I_{R1} = 0{,}83A$
$I_{R4} = 2{,}3A$
$R_{BC} = 28{,}57\Omega$

3.5. V daném obvodu vypočtěte proud I_{R3}
Dáno: $U_{o1} = 300V$, $U_{o2} = 500V$, $R_1 = R_4 = 200\Omega$, $R_5 = R_6 = 300\Omega$,
$R_2 = 150\Omega$, $R_3 = 0$



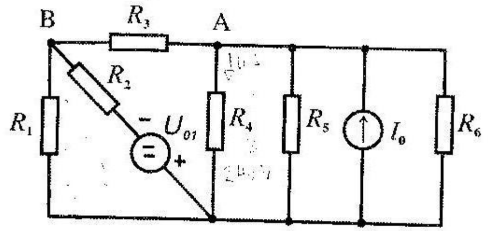
$I_{R3} = 2{,}71$ A

3.6. V daném obvodu vypočtěte proud I_{R3}
Dáno: $I_o = 3A$, $U_o = 100V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 0\ \Omega$,
$R_4 = 40\Omega$, $R_5 = 50\Omega$, $R_6 = 60\Omega$,



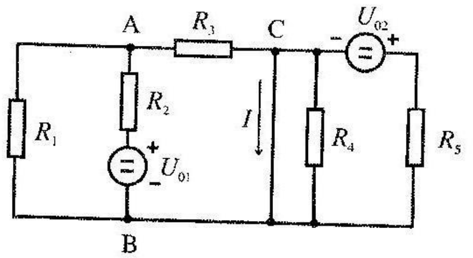
$I_{R3} = 0{,}19$ A

3.7. V daném obvodu vypočtěte odpor R_{AB} a napětí U_{AB}
Dáno: $U_o = 300V$, $I_o = 10A$, $R_1 = 90\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $R_3 \to \infty$, $R_4 = 60\Omega$, $R_5 = 80\Omega$, $R_6 = 80\Omega$



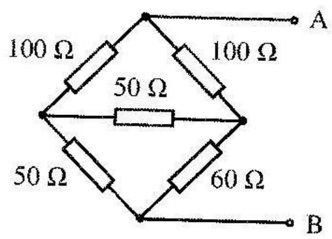
$U_{AB} = 120$ V
$R_{AB} = 60\ \Omega$

3.8. V daném obvodu vypočtěte proud I, odpor R_{AC} a napětí U_{AB}
Dáno: $U_{01} = 180V$, $U_{02} = 15V$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 30\Omega$



$I = 1,5$ A
$U_{AB} = 60$ V
$R_{AC} = 10\ \Omega$

3.9. Vypočtěte odpor R_{AB}



$R_{AB} = 77,33\ \Omega$

4. METODY OBECNÉ ANALÝZY OBVODŮ

V této kapitole uvedeme základní metody pro úplnou a částečnou analýzu obvodů, které mají obecnou platnost. Pro snazší pochopení ukážeme nejprve jejich aplikaci na stejnosměrné obvody. Užití těchto metod pro analýzu obvodů s časově proměnnými zdroji v ustáleném i přechodovém stavu bude uvedeno v dalších kapitolách. Mezi základní metody analýzy patří:

1. Přímá aplikace Kirchhoffových zákonů
2. Metoda smyčkových proudů
3. Metoda uzlových napětí
4. Metoda náhradního zdroje

Poznámka:
1. V jednodušších případech lze použít i metodu postupného zjednodušování (transfigurace), metodu superpozice (viz kap. 3).
2. Metodu náhradního zdroje (Théveninova a Nortonova věta) používáme pro ***částečnou analýzu obvodů*** (hledáme pouze některé větvové veličiny)

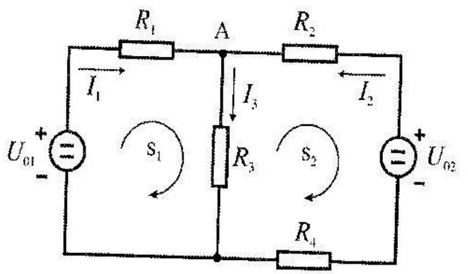
Metody pro úplnou analýzu se liší v počtu rovnic, které je nutno pro daný obvod formulovat. *Soustavu lineárně nezávislých rovnic* dostaneme tehdy, jestliže dodržíme následující pravidla:

1. ***Přímá aplikace Kirchhoffových zákonů*** – počet rovnic je dán počtem větví v obvodu ℓ
   - 1. K.z. aplikujeme na $(k - 1)$ nezávislých uzlů (je-li k počet uzlů a obvod se skládá pouze z jedné separátní části)
   - 2. K.z. aplikujeme pouze na $n = \ell - (k - 1)$ nezávislých smyček
2. ***Metoda smyčkových proudů*** – rovnice formulujeme pomocí 2. K.z., počet rovnic je dán počtem nezávislých smyček n
3. ***Metoda uzlových napětí*** – rovnice formulujeme pomocí 1. K.z., počet rovnic je dán počtem nezávislých uzlů k-1, pokud má obvod pouze jednu separátní část.

4.1 PŘÍMÁ APLIKACE KIRCHHOFOVÝCH ZÁKONŮ

Postup:
1. V obvodu zavedeme a orientujeme větvové proudy
2. Pro nezávislé uzly napíšeme rovnice pomocí 1.K.z.
3. Pro nezávislé smyčky zapíšeme rovnice podle 2. K.z.
4. Řešením soustavy rovnic vypočteme větvové proudy

Příklad IV-1: Metodou přímé aplikace Kirchhoffových zákonů řešte daný obvod.
Dáno: $U_{01} = 60\,V, U_{02} = 40\,V, R_1 = 10\,\Omega, R_2 = 20\,\Omega, R_3 = 30\,\Omega$



Obr. 4.1

Řešení:

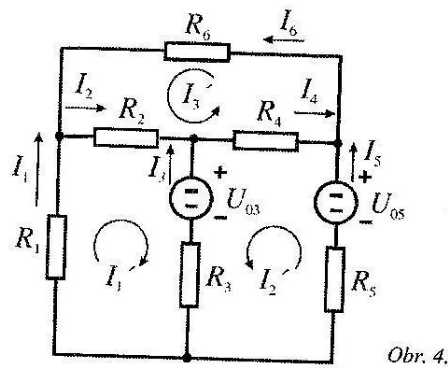
1. V obvodu zavedeme a orientujeme 3 větvové proudy
2. Pro nezávislý uzel A napíšeme 1.K.z.
   $-I_1 - I_2 + I_3 = 0$
3. Pro nezávislé smyčky s_1 a s_2 zapíšeme 2. K.z.
   $R_1 I_1 + R_3 I_3 = U_{01}$
   $R_2 I_2 + R_3 I_3 = U_{02}$
4. Řešením soustavy rovnic vypočteme větvové proudy:
   $I_1 = 1{,}65\ A \quad I_2 = -0{,}2\ A \quad I_3 = 1{,}45\ A$

4.2 METODA SMYČKOVÝCH PROUDŮ

Postup:

1. V daném obvodu určíme systém nezávislých smyček a v každé zavedeme fiktivní smyčkový proud (orientovaný ve shodě s orientací smyčky)
2. Pro každou nezávislou smyčku formulujeme rovnici pomocí 2. K.z,
3. Vypočteme smyčkové proudy
4. Hledané větvové veličiny (proudy resp.napětí) vypočteme ze smyčkových proudů

Příklad IV-2: Metodou smyčkových proudů formulujte rovnice pro daný obvod



Obr. 4.2

Řešení:

1. V obvodu jsou 3 nezávislé smyčky, zvolíme 3 smyčkové proudy I_1', I_2' a I_3'
2. Pomocí 2. K.z. formulujeme pro smyčkové proudy 3 rovnice:

$$
\begin{aligned}
&R_1 I_1' + R_2(I_1' + I_3') + U_{03} + R_3(I_1' + I_2') = 0 \\
&U_{03} + R_3(I_1' + I_2') + R_5 I_2' - U_{05} + R_4(I_2' - I_3') = 0 \qquad (4.1) \\
&R_2(I_3' + I_1') + R_4(I_3' - I_2') + R_6 I_3' = 0
\end{aligned}
$$

3. Nalezneme řešení soustavy rovnic (4.1)
4. Zvolíme orientaci větvových proudů a vyjádříme je pomocí vypočtených smyčkových proudů.

$$
\begin{aligned}
&I_1 = I_1' \qquad && I_3 = -(I_1' + I_2') \qquad && I_5 = I_2' \\
&I_2 = I_1' + I_3' \qquad && I_4 = I_3' - I_2' \qquad && I_6 = I_3'
\end{aligned}
$$

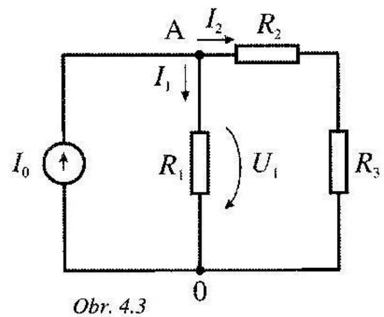
Poznámka: *Orientaci větvových proudů bylo možno provést hned na počátku řešení, jejich směr nemá na kroky 1-3 žádný vliv, projeví se teprve při vyjádření vzájemných vztahů mezi větvovými a smyčkovými proudy.*

4.3 METODA UZLOVÝCH NAPĚTÍ

Postup:

1. V daném obvodu označíme referenční uzel (zpravidla uzel, do kterého jsou zapojeny záporné svorky zdrojů) a v nezávislých uzlech zvolíme uzlová napětí (orientujeme od nezávislého uzlu k referenčnímu)
2. Pro nezávislé uzly formulujeme rovnice pomocí 1. K.z, proudy ve větvích vyjádříme pomocí uzlových napětí (vyjma větví s nezávislým proudovým zdrojem)
3. Hledané větvové veličiny (proudy resp.napětí) vypočteme z uzlových napětí

Příklad IV-3: Metodou uzlových napětí formulujte rovnice pro daný obvod



Obr. 4.3

Řešení:

1. V obvodu je jeden nezávislý uzel (uzel 0 je referenční), zvolíme uzlové napětí U_1 orientované od uzlu A do referenčního uzlu
2. Pomocí 1. K.z. formulujeme rovnici pro výpočet napětí U_1

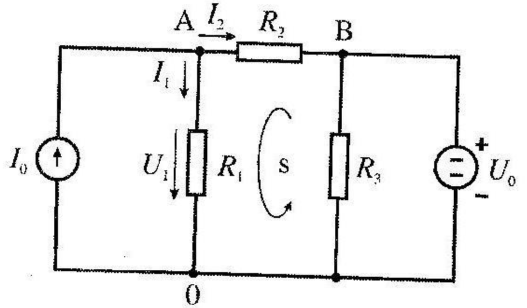
$$-I_0 + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1}{R_2 + R_3} = 0$$

3. Vypočteme uzlové napětí $U_1 = \dfrac{I_0}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2 + R_3}}$

4. Pomocí napětí U_1 určíme větvové proudy I_1 a I_2

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} \qquad I_2 = \frac{U_1}{R_2 + R_3}$$

Příklad IV-4: Metodou uzlových napětí formulujte rovnice pro daný obvod a vypočtěte proud I_2



Řešení:

1. V obvodu jsou dva nezávislé uzly A, B (uzel 0 je referenční), jelikož uzlové napětí pro uzel B je dáno napětím zdroje U_0, postačí zvolit pouze uzlové napětí U_1 orientované od uzlu A do referenčního uzlu. Pomocí 1. K.z. formulujeme rovnici pro uzel A, přičemž platí: $-U_{AB} + U_1 = U_0$

$$-I_0 + \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1 - U_0}{R_2} = 0$$

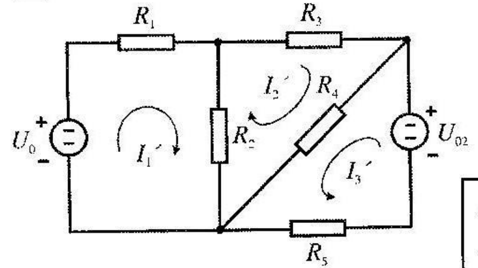
2. Vypočteme uzlové napětí: $U_1 = \dfrac{\dfrac{U_0}{R_2} + I_0}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$

3. Z napětí U_1 vypočteme proud

$$I_2 = \frac{U_1 - U_0}{R_2}$$

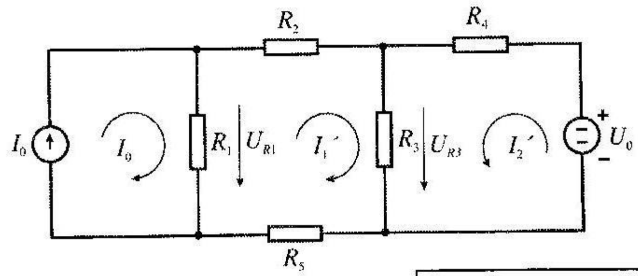
4.4 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

4.1 Pro daný obvod formulujte rovnice metodou smyčkových proudů.



$$\boxed{\begin{aligned} &R_1 I_1' + R_2(I_1' - I_2') = U_0 \\ &R_2(I_2' - I_1') + R_3 I_2' + R_4(I_2' + I_3') = 0 \\ &R_4(I_3' + I_2') + R_5 I_3' = U_0 \end{aligned}}$$

4.2 Pro daný obvod formulujte rovnice metodou smyčkových proudů.



$$\boxed{\begin{aligned} &R_1(I_1' - I_0) + R_2 I_1' + R_3(I_1' + I_2') + R_5 I_1' = 0 \\ &R_3(I_2' + I_1') + R_4 I_2' = U_0 \end{aligned}}$$

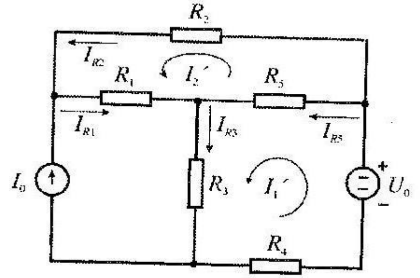
4.3 V obvodu z příkladu 4.2 vypočtěte napětí proudového zdroje a napětí U_{R3}, znáte-li I_0, I_1' a I_2'.

$$\boxed{\begin{aligned} &U_{zdroje} = U_{R1} = R_1(I_0 - I_1') \\ &U_{R3} = R_3(I_1' + I_2') \end{aligned}}$$

4.4 V obvodu z ***příkladu IV-4*** vypočtěte proud, který zdroj napětí dodává do obvodu, je-li: $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 50$, $I_0 = 5A$ a $U_0 = 50V$.

$$\boxed{I_{U0} = -2{,}21 \text{ A}}$$

4.5 Pro daný obvod formulujte rovnice metodou smyčkových proudů.



$$R_3(I_1'+I_0)+R_4I_1'+R_5(I_1'-I_2')=U_0$$
$$R_1(I_2'+I_0)+R_2I_2'+R_5(I_2'-I_1')=0$$

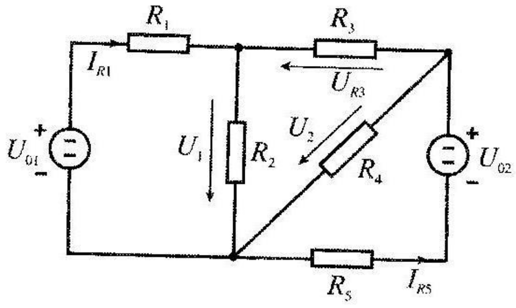
4.6 V obvodu z příkladu 4.5 vypočtěte větvové proudy I_{R1}, I_{R2}, I_{R3} a I_{R5}, jestliže znáte I'_1, I'_2 a I_0.

$$I_{R1}=I_0+I_2' \qquad I_{R2}=I_2'$$
$$I_{R3}=I_0+I_1' \qquad I_{R5}=I_1'-I_2'$$

4.7 V obvodu z příkladu 4.5 vypočtěte napětí na rezistorech R_1, R_3 a R_5, je-li dáno I_0, I'_1 a I'_2.

$$U_{R1}=R_1(I_0+I_2'),$$
$$U_{R3}=R_3(I_0+I_1'),$$
$$U_{R5}=R_5(I_1'-I_2')$$

4.8 Pro daný obvod formulujte rovnice metodou uzlových napětí.

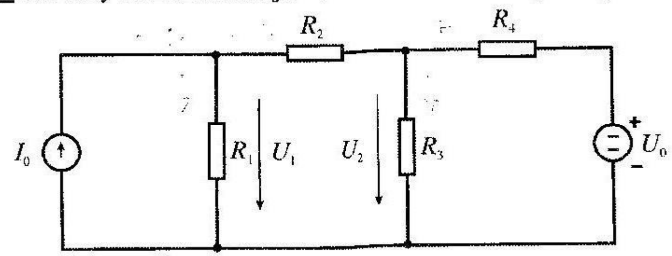


$$\frac{U_1-U_{01}}{R_1}+\frac{U_1}{R_2}+\frac{U_1-U_2}{R_3}=0$$
$$\frac{U_2-U_1}{R_3}+\frac{U_2}{R_4}-\frac{U_2-U_{02}}{R_5}=0$$

4.9 V obvodu z příkladu 4.8 vypočtěte napětí na rezistoru R_3, a proudy I_{R1}, I_{R5}
Dáno: U_{01} = 150V, U_{02} = 200V, R_1 = 50 Ω, R_2 = 75 Ω, R_3 = 25Ω, R_4 = 100 Ω, R_5 = 150 Ω.

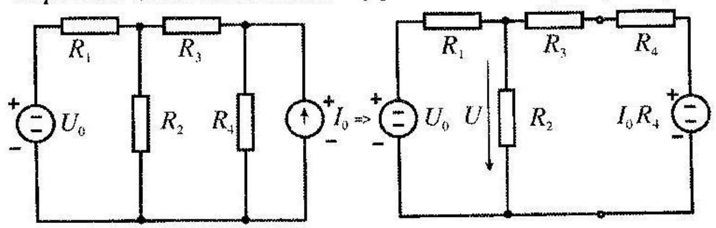
I_{R1} =0,348 A, I_{R5} =0,348A, U_{R3} =4,37 V

4.10 Pro daný obvod formulujte rovnice metodou uzlových napětí.



$$-I_0+\frac{U_1}{R_1}+\frac{U_1-U_2}{R_2}=0, \quad \frac{U_2-U_1}{R_2}+\frac{U_2}{R_3}+\frac{U_2-U_0}{R_4}=0$$

4.11 Formulujte rovnice pro daný obvod metodou, která vede na nejmenší počet rovnic.
Nápověda: zvažte možnost náhrady proudového zdroje napěťovým.

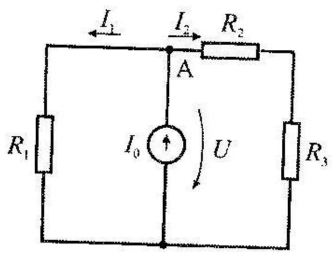


$$\frac{U-U_0}{R_1}+\frac{U-I_0R_4}{R_3+R_4}+\frac{U_2}{R_2}=0$$

4.12 V obvodu z příkladu 4.11 vypočtěte proud I_{R1} a napětí na rezistoru R_3.
Dáno: U_0 = 150V, I_0 = 1A, R_1 = 100Ω, R_2 = 40Ω, R_3 = 50Ω, R_4 = 5,0Ω

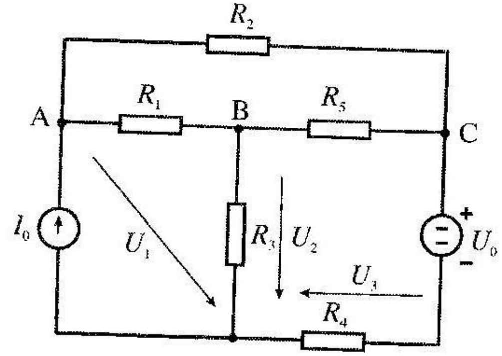
$$I_{R1}=\frac{U_0-U}{R_1}=1{,}06\text{ A}, \quad U_{R3}=(I_{R1}-\frac{U}{R_2})R_3=2{,}8\text{V}$$

4.13 Pro daný obvod formulujte rovnici metodou uzlových napětí a vypočtěte proudy I_1 a I_2, je-li $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$ a $I_0 = 1$ A.



$$I_1 = \frac{2}{3}\ \text{A}$$
$$I_2 = \frac{1}{3}\ \text{A}$$

4.14 Pro daný obvod formulujte rovnice metodou uzlových napětí.

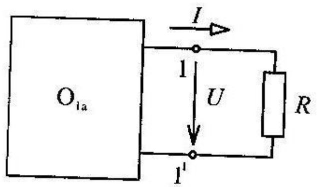


$$\text{A}: \quad -I_0 + \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_{AC}}{R_2} = 0$$
$$\text{B}: \quad \frac{U_2 - U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_3} + \frac{U_{BC}}{R_5} = 0$$
$$\text{C}: \quad -\frac{U_{BC}}{R_5} - \frac{U_{AC}}{R_2} + \frac{U_3}{R_4} = 0$$
$$U_{AB} = U_1 - U_2$$
$$U_{AC} = U_1 - U_0 - U_3$$
$$U_{BC} = U_2 - U_0 - U_3$$

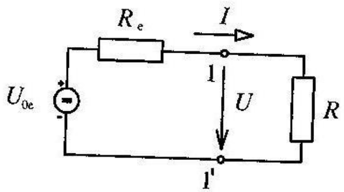
4.5 METODA NÁHRADNÍHO ZDROJE

Théveninova věta

V obvodu na obr.4.6 a) se napětí a proud větve o odporu R nezmění, zaměníme-li aktivní dvojpól O_{1a} za odpor R_e sériově spojeným se zdrojem napětí U_{0e}, podle obr.4.6 b).



Obr.4.6 a)



Obr.4.6 b)

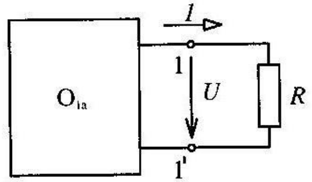
U_{0e} je napětí na svorkách $1-1'$, při odpojeném odporu R

R_e je odpor na svorkách $1-1'$ při odpojeném odporu R a při nahrazení aktivních zdrojů jejich vnitřními odpory (spojením dokrátka u zdroje napětí a rozpojením větve u zdroje proudu).

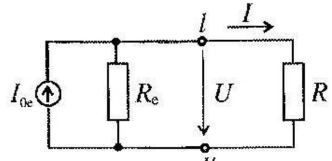
Zřejmě platí:
$$I = \frac{U_{0e}}{R_e + R} \tag{4.2}$$

Nortonova věta

V obvodu na obr.4.7 a) se napětí a proud větve o odporu R nezmění, zaměníme-li aktivní dvojpól O_{1a} za odpor R_e paralelně spojený se zdrojem proudu I_{0e}, podle obr.4.7 b).



Obr.4.7 a)

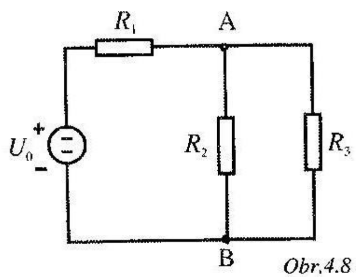


Obr.4.7 b)

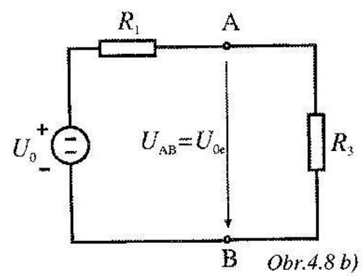
I_{0e} je proud, který teče ve větvi spojením svorek $1-1'$ dokrátka.
R_e je odpor určený stejně jako u Théveninovy věty.

Zřejmě platí:
$$I = I_{0e}\frac{R_e}{R_e + R} \tag{4.3}$$

Příklad IV-5: V daném obvodu vypočtěte proud I_{R2} pomocí Théveninovy věty.
Dáno: $U_0 = 200$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$



Obr.4.8 a)



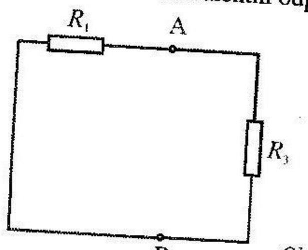
Obr.4.8 b)

Řešení:

1. Vypočteme napětí náhradního zdroje U_{0e}, v zadaném obvodu vyjmeme větev s rezistorem R_2 – obr.4.8 b)

$$U_{0e} = \frac{U_0}{R_1 + R_3}R_3 = 150\ \text{V}$$

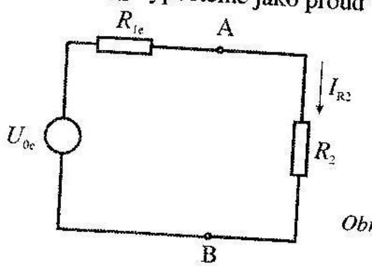
2. V původním obvodu nahradíme napěťový zdroj zkratem ($R_i = 0$) - obr. 4.8 c) a vypočteme ekvivalentní odpor R_e jako výsledný odpor ke svorkám AB



Obr.4.8 c)

$$R_e = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 7{,}5\,\Omega$$

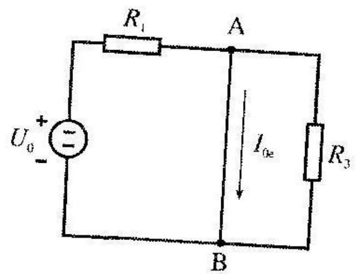
3. Proud I_{R2} vypočteme jako proud v náhradním obvodu dle obr.4.8 d)



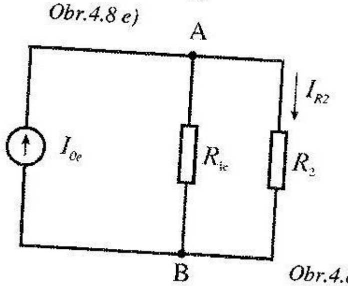
Obr.4.8 d)

$$I_{R2} = \frac{U_{0e}}{R_2 + R_{ie}} = 5{,}45\text{ A}$$

Příklad IV-6: V obvodu z *příkladu IV-5* vypočtěte proud I_{R2} pomocí Nortonovy věty



Obr.4.8 e)



Obr.4.8 f)

Řešení:

1. Vypočteme proud náhradního zdroje I_{0e}, v zadaném obvodu zkratujeme větev s rezistorem R_2 – obr.4.8e)

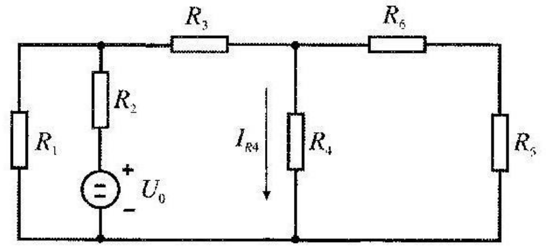
$$I_{0e} = \frac{U_0}{R_1} = 20\text{ A}$$

2. Ekvivalentní odpor náhradního proudového zdroje počítáme stejně jako v *příkladu IV-5*: $R_e = 7{,}5\,\Omega$
3. Proud I_{R2} vypočteme jako proud v náhradním obvodu dle obr. 4.8 f)

$$I_{R2} = \frac{I_{0e}}{R_e + R_2} R_e = 5{,}45\text{ A}$$

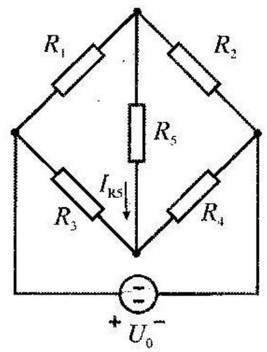
4.6 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

4.15 Pomocí Théveninovy věty vypočtěte proud I_{R4}.
Dáno: $U_0 = 140\text{V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 20\Omega$, $R_4 = R_5 = R_6 = 20\Omega$



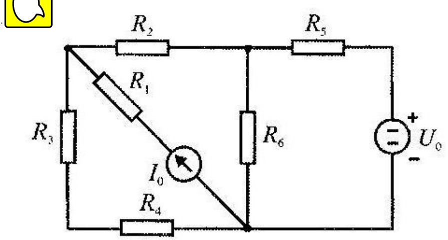
$U_{0e} = 40\text{V}$
$R_e = 17{,}14\Omega$
$I_{R4} = 1{,}08\text{A}$

4.16 Pomocí Théveninovy věty vypočtěte proud I_{R5}.
Dáno: $U_0 = 100\text{V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 30\Omega$, $R_4 = 40\Omega$, $R_5 = 50\Omega$



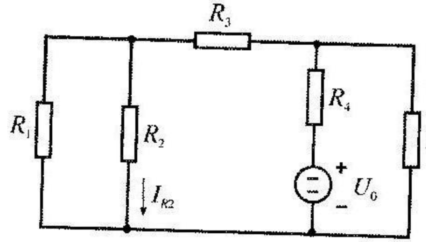
$U_{0e} = 9{,}6\text{V}$
$R_e = 23{,}81\Omega$
$I_{R5} = 0{,}13\text{A}$

4.17 Pomocí Nortonovy věty vypočtěte proud I_{R6}.
Dáno: $U_0 = 100\text{V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 40\Omega$



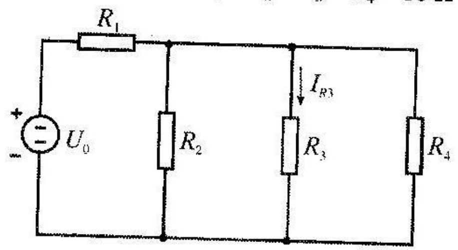
$I_{0e} = 3{,}83\text{A}$
$R_e = 30\Omega$
$I_{R6} = 1{,}64\text{A}$

4.18 Pomocí Nortonovy věty vypočtěte proud I_{R2} .
Dáno: $U_0 = 200\text{V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 60\Omega$, $R_4 = R_5 = R_6 = 60\Omega$



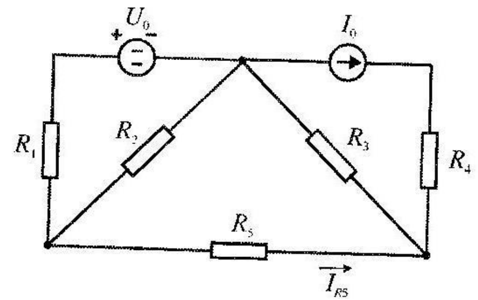
$I_{0e} = 1{,}11\text{A}$
$R_e = 36\Omega$
$I_{R4} = 0{,}416\text{A}$

4.19 Pomocí Nortonovy věty vypočtěte proud I_{R3}.
Dáno: $U_0 = 60\text{V}$, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10\ \Omega$



$R_e = 3{,}33\Omega$, $I_{0e} = 6\ \text{A}$,
$I_{R3} = 1{,}5\ \text{A}$

4.20 Pomocí Théveninovy věty vypočtěte proud I_{R5}
Dáno: $U_0 = 24\text{V}$, $I_0 = 2\ \text{A}$, $R_1 = R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $R_5 = 5\Omega$



$R_e = 4\Omega$, $U_{0e} = 6\ \text{V}$,
$I_{R5} = 0{,}66\ \text{A}$

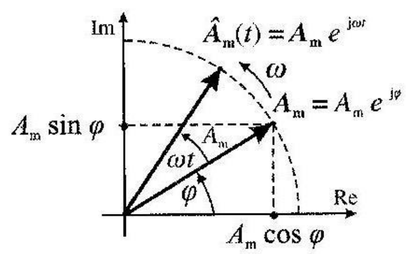
5. ELEKTRICKÉ OBVODY V HARMONICKÉM USTÁLENÉM STAVU

5. 1 KOMPLEXNÍ REPREZENTACE HARMONICKÝCH VELIČIN

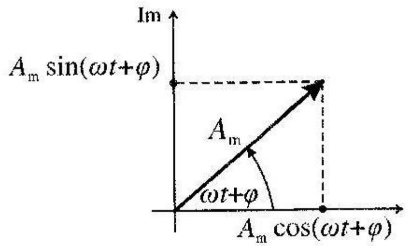
5.1.1 Zobrazení v komplexní rovině – komplexor, fázor

Z matematiky je známo, že komplexní číslo lze v komplexní rovině vyjádřit ve složkovém nebo v exponenciálním tvaru – obr. 5.1

$$A_m = A_m e^{j\varphi} = A_m \cos\varphi + j\,A_m \sin\varphi \tag{5.1}$$



Obr. 5.1



Obr. 5.2

Otočí-li se koncový bod úsečky délky A_m podél kružnice za čas t o úhel ωt, lze jeho polohu vyjádřit komplexním číslem

$$A_m e^{j\varphi}\, e^{j\omega t} = A_m e^{j(\omega t+\varphi)} = A_m \cos(\omega t + \varphi) + j\,A_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{5.2}$$

Průmětem komplexního čísla $A_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ do reálné a imaginární osy jsou harmonické funkce – obr. 5.2

$$A_m \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\{A_m e^{j(\omega t+\varphi)}\} \qquad A_m \sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\{A_m e^{j(\omega t+\varphi)}\} \tag{5.3}$$

Z rov.(5.2) a (5.3) vyplývá, že ***harmonickou funkci lze v komplexní rovině vyjádřit pomocí komplexního čísla:***

- komplexní číslo, které mění svoji polohu v závislosti na čase, značíme $\hat{\mathbf{A}}_m(t) = A_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ a nazýváme ***komplexor***
- komplexní číslo vyjadřující polohu $\hat{\mathbf{A}}_m$ v čase $t = 0$ $\mathbf{A}_m = \hat{\mathbf{A}}_m(0) = A_m e^{j\varphi}$ nazýváme ***fázor.***

Vztah mezi *komplexorem* a *fázorem* je
$$\hat{\mathbf{A}}_m = \mathbf{A}_m e^{j\omega t} \tag{5.4}$$

Komplexory i fázory lze vyjádřit pro amplitudy harmonických funkcí A_m nebo pro efektivní hodnoty A, pak platí

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}_m}{\sqrt{2}} \qquad \hat{\mathbf{A}} = \frac{\hat{\mathbf{A}}_m}{\sqrt{2}} \tag{5.5}$$

Zobrazení harmonických funkcí v komplexní rovině je základem ***symbolické metody*** (SKM), kterou používáme při řešení ustálených stavů v lineárních obvodech s harmonickými zdroji. Tato metoda umožňuje:

1. Zobrazit *harmonicky proměnné veličiny* (okamžité hodnoty napětí a proudů) v komplexní rovině jako ***fázory***.
2. K fázorům zpětně přiřadit harmonickou funkci (okamžitou hodnotu napětí nebo proudu) podle rov. (5.3) a obr. 5.2.
3. Provádět základní algebraické operace (sčítání, odčítání, násobení apod.) v komplexní rovině analogicky operacím s vektory.
4. Derivaci a integrál funkce $u(t)$ vyjádřit jako násobení nebo dělení fázoru $\boldsymbol{U}_m$ koeficientem $j\omega$, místo integrodifernciálních rovnic pro okamžité hodnoty napětí a proudů řešíme *algebraické rovnice pro fázory*.

Příklad V-1: Pomocí SKM vypočtěte výsledný proud $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$, je-li dáno: $i_1(t) = 3\sin(\omega t + 30^{\circ})$ A, $i_2(t) = 4\sin(\omega t + 60^{\circ})$ A.

Řešení:

K okamžitým hodnotám proudů i_1 a i_2 přiřadíme fázory (maximálních hodnot)

$$\boldsymbol{I}_{m1} = 3e^{j30^{\circ}} \quad , \quad \boldsymbol{I}_{m2} = 4e^{j60^{\circ}}$$

Vypočteme fázor proudu $\boldsymbol{I}_{m3}$ (pro sčítání použijeme složkový tvar)

$$\boldsymbol{I}_{m3} = \boldsymbol{I}_{m1} + \boldsymbol{I}_{m2} = 3e^{j30^{\circ}} + 4e^{j60^{\circ}} = 2{,}598 + j1{,}5 + 2 + j3{,}464 = 4{,}598 + j4{,}964 = 6{,}766e^{j47{,}19^{\circ}}$$

Provedeme zpětnou transformaci (průmětem do imaginární osy, jelikož proudy i_1 a i_2 byly dány funkcí sin)

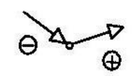
$$i_3(t) = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{I}_{m3}\, e^{j\omega t}\} = 6{,}766\sin(\omega t + 47{,}19^{\circ})\ \mathrm{A}$$

5.1.2 Rovnice pro fázory

Pro fázory napětí a proudů platí Kirchhoffovy zákony:

První Kirchhoffův zákon v komplexním tvaru:

$$\sum_k \pm \boldsymbol{I}_k = 0 \qquad (5.6)$$



Druhý Kirchhoffův zákon v komplexním tvaru:

$$\sum_k \pm \boldsymbol{U}_k = 0 \qquad (5.7)$$

Vyjádření derivace a integrálu harmonické funkce

K harmonické funkci $u(t)$ přiřadíme komplexor (efektivní hodnoty) $\hat{U}(t)$

$$u(t) \quad \rightarrow \quad \hat{U}(t) = \boldsymbol{U}\, e^{j\omega t} \qquad (5.8a)$$

Pro derivaci pak platí

$$\frac{du}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d\hat{U}}{dt} = j\omega \boldsymbol{U}\, e^{j\omega t} \qquad (5.8b)$$

Derivaci** v časové oblasti odpovídá **násobení fázoru koeficientem $j\omega$

Pro integrál bude:

$$\int u(t)\,dt \quad \rightarrow \quad \int \hat{U}(t)\,dt = \frac{1}{j\omega}\boldsymbol{U}\, e^{j\omega t} \qquad (5.8c)$$

Integraci** v časové oblasti odpovídá **dělení fázoru koeficientem $j\omega$

Příklad V-2: Pasivním dvojpólem protéká harmonicky proměnný proud $i(t) = I_m \sin \omega t$, vyjádřete fázor napětí dvojpólu, je-li dán sériovým spojením prvků: a) *RL*, b) *RC*, c) *RLC*. Vyznačte fázory napětí v komplexní rovině.

Řešení:

a) Sériové spojení *R* a *L*

pro okamžité hodnoty platí:

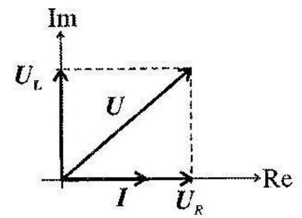
$$u = u_R + u_L = Ri + L\frac{di}{dt}$$

pro komplexory $\hat{U}(t)$

$$\hat{U} = R\hat{I} + j\omega L\hat{I} = \boldsymbol{I}\, e^{j\omega t}(R + j\omega L)$$

pro fázory dostaneme – obr. 5.3a)

$$\boldsymbol{U} = R\boldsymbol{I} + j\omega L\boldsymbol{I} = \boldsymbol{U}_R + \boldsymbol{U}_L$$



Obr.5.3 a)

fázor napětí na induktoru je vůči fázoru proudu pootočen o 90°
(pootočení vyjadřuje násobení koeficientem j *)*

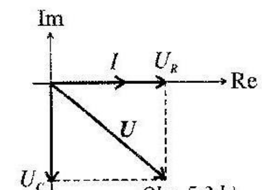
b) Sériové spojení *R* a *C*

pro okamžité hodnoty platí

$$u = u_R + u_C = Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

analogicky pro fázory dostaneme –obr. 5.3 b)

$$\boldsymbol{U} = R\boldsymbol{I} + \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{U}_R + \boldsymbol{U}_C$$



Obr. 5.3 b)

fázor napětí na kapacitoru je vůči fázoru proudu pootočen o -90°
(pootočení vyjadřuje násobení koeficientem –j *)*

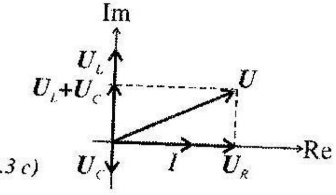
c) Sériové spojení *R*, *L* a *C*

pro okamžité hodnoty platí: $u = u_R + u_L + u_C$

pro fázory dostaneme – obr. 5.3 c)

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_R + \boldsymbol{U}_L + \boldsymbol{U}_C =$$

$$= R\,\boldsymbol{I} + \mathrm{j}\omega L\,\boldsymbol{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\boldsymbol{I}$$



Obr. 5.3 c)

Grafy v komplexní rovině – obr. 5.3 a), b), c) nazýváme ***fázorové diagramy***. V některých případech lze fázorový diagram použít k rychlé analýze obvodu.

5. 1.3 Komplexní impedance a komplexní admitance

Vztahy mezi fázory napětí a proudu na elementárních prvcích nebo na pasivním dvojpólu můžeme vyjádřit ***zobecněným Ohmovým zákonem v komplexním tvaru***

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{I} \quad \text{resp.} \quad \boldsymbol{U}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{I}_{\mathrm{m}} \qquad (5.9)$$

Podíl fázoru napětí a proudu nazýváme ***komplexní impedance Z***, lze ji vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}X \qquad [\Omega] \qquad (5.10)$$

Reálnou část komplexní impedance nazýváme ***resistance*** a imaginární část ***reaktance***. Převrácená hodnota **Z** je ***komplexní admitance***

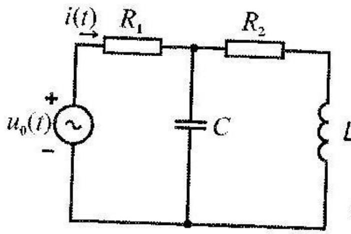
$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{U}} = G + \mathrm{j}B \qquad [\mathrm{S}] \qquad (5.11)$$

Reálnou část komplexní admitance nazýváme ***konduktance***, imaginární část nazýváme ***susceptance***.

Pro výpočet celkové impedance sério-paralelního spojení pasivních prvků platí táž pravidla jako pro počítání s rezistory včetně vztahů pro transfiguraci hvězda - trojúhelník. Komplexní impedance a admitance elementárních pasivních prvků, vztahy mezi jejich fázory napětí a proudů i příslušné fázorové diagramy jsou uvedeny v tab. 5.1.

Příklad V-3: Vypočtěte okamžitou hodnotu proudu, který do obvodu dodává zdroj harmonického napětí $u(t) = 100\cos(\omega t+30°)$ V.

Dáno: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $L = 0{,}01$ H, $C = 0{,}2$ mF, $\omega = 1000\ \mathrm{s}^{-1}$



Obr. 5.4

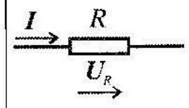
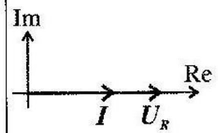
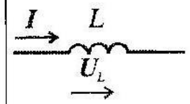
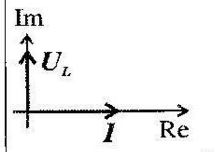
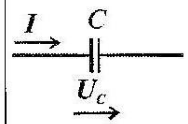
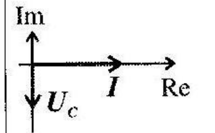
Řešení:

K řešení použijeme SKM, vyjádříme fázor napětí zdroje

$$\boldsymbol{U}_{0\mathrm{m}} = 100\,e^{\mathrm{j}30°}$$

Tab. 5.1

Vztahy mezi fázory napětí a proudu lineárních prvků obvodů

Prvek	Vztahy mezi napětím a proudem	Komplexní impedance admitance	Fázorový diagram
	$\boldsymbol{U}_R = R\,\boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{I} = G\boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{Z}_R = R$ $\boldsymbol{Y}_R = G$	
	$\boldsymbol{U}_L = \mathrm{j}\omega L\,\boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{I} = \dfrac{\boldsymbol{U}_L}{\mathrm{j}\omega L}$	$\boldsymbol{Z}_L = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}X_L$ $\boldsymbol{Y}_L = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega L}$	
	$\boldsymbol{U}_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{I} = \mathrm{j}\omega C\boldsymbol{U}_C$	$\boldsymbol{Z}_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \mathrm{j}X_C$ $\boldsymbol{Y}_C = \mathrm{j}\omega C$	

$X_L = \omega L$ je induktivní reaktance a $X_C = \dfrac{-1}{\omega C}$ je kapacitní reaktance.

pokračování příkladu V-3 : vypočteme celkovou impedanci obvodu

$$\boldsymbol{Z} = R_1 + \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}(R_2 + \mathrm{j}\omega L)}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R_2 + \mathrm{j}\omega L} = 10 + \frac{5\angle -90° \cdot 22{,}36\angle 26{,}57°}{20{,}62\angle 14{,}04°}$$

$$\boldsymbol{Z} = 10 + 5{,}42\angle -77{,}47° = 12{,}36\angle -25{,}32°\ \Omega$$

Fázor proudu je

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{m}} = \frac{\boldsymbol{U}_{0\mathrm{m}}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{100\angle 30°}{12{,}37\angle -25{,}32°} = 8{,}08\angle 55{,}32° \quad \mathrm{A}$$

Zpětnou transformací (průmětem komplexoru $\hat{\boldsymbol{I}}_{\mathrm{m}}$ do reálné osy, neboť napětí u_0 je dáno funkcí cos) dostaneme požadovanou okamžitou hodnotu proudu:

$$i(t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{I}_{\mathrm{m}}\,e^{\mathrm{j}\omega t}\} = 8{,}08\cos(\omega t + 55{,}32°) \ \ \mathrm{A}$$

Poznámka: ***Dělení dvou komplexní čísel*** *lze provést ve složkovém nebo exponenciálním tvaru, postup zpravidla volíme podle toho, zda pro výslednou veličinu chceme určit modul nebo složky:*

a) ***exponenciální tvar*** užíváme pro vyjádření modulu a fáze výsledné veličiny *(např. pro určení okamžité hodnoty proudu)*

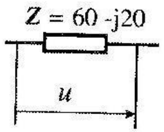
$$\boldsymbol{I} = \frac{3+\mathrm{j}4}{8+\mathrm{j}6} = \frac{5\angle 53{,}13^\circ}{10\angle 36{,}87^\circ} = 0{,}5\angle 16{,}26^\circ$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\{\sqrt{2}\,\boldsymbol{I}\,e^{\mathrm{j}\omega t}\} = 0{,}71\cos(\omega t + 16{,}26^\circ)\ \mathrm{A}$$

b) ***složkový tvar*** užíváme pro výpočet reálné a imaginární složky výsledku *(např. pro určení resistance a reaktance nebo činného a jalového výkonu)* zlomek násobíme číslem komplexně sdruženým

$$\boldsymbol{Z} = \frac{8+\mathrm{j}6}{3+\mathrm{j}4} = \frac{8+\mathrm{j}6}{3+\mathrm{j}4}\cdot\frac{3-\mathrm{j}4}{3-\mathrm{j}4} = \frac{48-\mathrm{j}14}{25} = 1{,}92 - \mathrm{j}0{,}56\ \Omega$$

Příklad V-4: Určete časový průběh proudu protékajícího komplexní impedancí $\boldsymbol{Z} = 60 - \mathrm{j}20\ \Omega$, je-li na ní napětí $u = 400\cos(\omega t + 60^\circ)$ V.



Obr.5.5

Řešení:

Zadané veličiny vyjádříme v exponenciálním tvaru a vypočteme fázor proudu

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{m} = 400\angle 60^\circ,\quad \boldsymbol{Z} = 60 - \mathrm{j}20 = 63{,}25\angle -18{,}43^\circ$$

$$\boldsymbol{I}_\mathrm{m} = \frac{\boldsymbol{U}_\mathrm{m}}{\boldsymbol{Z}} = 6{,}32\angle 78{,}43^\circ$$

transformací z komplexní roviny do časové oblasti dostaneme

$$i(t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{I}_\mathrm{m}\,e^{\mathrm{j}\omega t}\} = 6{,}32\cos(\omega t + 78{,}43^\circ)\ \mathrm{A}$$

Příklad V-5: Nakreslete ***fázorový diagram*** pro obvod z *příkladu V-3*.

Obecný postup:

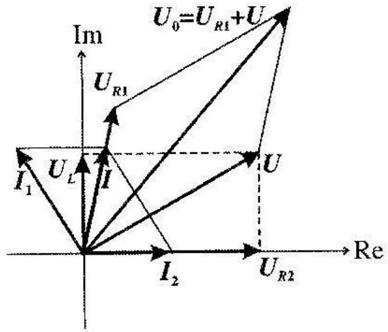
Při kreslení fázorových diagramů postupujeme od nejvzdálenější resp. nejsložitější větve obvodu, ve které ***zvolíme fázor proudu resp. napětí.*** Postupně vyjadřujeme fázory napětí na jednotlivých prvcích a proudy v jednotlivých větvích, přičemž respektujeme Kirchhoffovy zákony a Ohmův zákon v komplexním tvaru.

Řešení:

1. Zvolíme proud $\boldsymbol{I}_2$ ve větvi s rezistorem R_2 a zakreslíme $\boldsymbol{U}_{R2}$ (leží v reálné ose ve shodě s fázorem proudu) a $\boldsymbol{U}_L$ (je pootočen vůči fázoru proudu o 90°)

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{R2} + \boldsymbol{U}_L$$

2. Proud kapacitorem $\boldsymbol{I}_1$ je vůči fázoru napětí $\boldsymbol{U}$ pootočen o 90°: $\boldsymbol{I}_1 = \mathrm{j}\omega C\boldsymbol{U}$



Obr. 5.6

3. Nyní určíme proud rezistorem R_1 a napětí na R_1

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 \qquad \boldsymbol{U}_{R1} = \boldsymbol{I}\,R_1$$

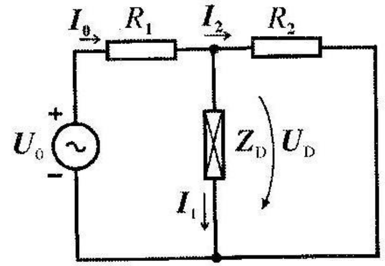
4. Vypočteme napětí zdroje $\boldsymbol{U}_0$

$$\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{U}_{R1} + \boldsymbol{U}$$

Poznámka:

Tuto konstrukci fázorového diagramu lze použít v obvodech s jedním zdrojem.

Příklad V-6: Daný obvod je napájen ze zdroje harmonického napětí $u_0(t) = 50\sin(4000t - 20^\circ)$ V proudem $i_0(t) = 0{,}5\sin 4000t$ A, $R_1 = 50\Omega$, $R_2 = 100\Omega$. Vypočtěte komplexní impedanci dvojpólu $\boldsymbol{Z}_\mathrm{D}$.



Obr. 5.7

Řešení:

1. Vypočteme fázor napětí $\boldsymbol{U}_\mathrm{Dm}$

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{0m} = R_1\boldsymbol{I}_\mathrm{0m} + \boldsymbol{U}_\mathrm{Dm}$$

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{Dm} = 50\angle -20^\circ - 50\cdot 0{,}5\angle 0^\circ = $$
$$= 27{,}8\angle -37{,}9^\circ\ \mathrm{V}$$

2. Určíme fázor proudu $\boldsymbol{I}_\mathrm{2m}$

$$\boldsymbol{I}_{2m} = \frac{\boldsymbol{U}_\mathrm{Dm}}{R_2}$$

3. Vypočteme proud $\boldsymbol{I}_\mathrm{1m}$

$$\boldsymbol{I}_{1m} = \boldsymbol{I}_{0m} - \boldsymbol{I}_{2m} = 0{,}5 - \frac{27{,}8\angle -37{,}9^\circ}{100} = 0{,}328\angle 31{,}4^\circ\ \mathrm{A}$$

4. Vypočteme komplexní impedanci $\boldsymbol{Z}_\mathrm{D}$

$$\boldsymbol{Z}_\mathrm{D} = \frac{\boldsymbol{U}_\mathrm{Dm}}{\boldsymbol{I}_\mathrm{1m}} = 84{,}8\angle -69{,}3^\circ = 30{,}1 - \mathrm{j}79{,}2\ \Omega$$

Dvojpól může být tvořen sériovým spojením rezistoru $R_\mathrm{D} = 30{,}1\,\Omega$ a kapacitou

$$C_\mathrm{D} = \frac{1}{\omega|X_\mathrm{D}|} = \frac{1}{4000\cdot 79{,}2} = 3{,}15\cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}$$

5. 2 ANALÝZA OBVODŮ S HARMONICKÝMI ZDROJI

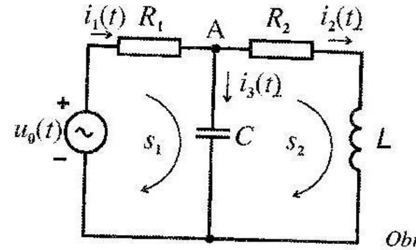
Pro formulaci rovnic používáme metody pro úplnou a částečnou analýzu uvedené ve 3. kapitole, rovnice píšeme pro fázory.

Příklad V-7: Pro obvod na obr. 5.8a) formulujte obvodové rovnice :

a) pomocí Kirchhoffových zákonů
b) metodou smyčkových proudů
c) metodou uzlových napětí

Řešení:

a) v obvodu je jeden nezávislý uzel a 2 nezávislé smyčky, napíšeme 3 rovnice pro ***fázory větvových proudů***



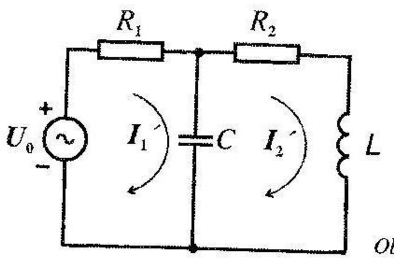
$$A: -\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{I}_3 = 0$$

$$s_1: R_1\boldsymbol{I}_1 + \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{U}_0$$

$$s_2: R_2\boldsymbol{I}_2 + j\omega L\boldsymbol{I}_2 - \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}_3 = 0$$

Obr. 5.8 a)

b) zavedeme dva ***fiktivní smyčkové proudy*** a napíšeme pro ně 2 rovnice pomocí 2. Kirchhoffova zákona

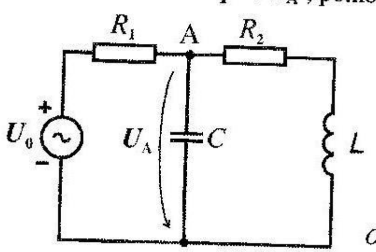


$$(R_1 + \frac{1}{j\omega C})\boldsymbol{I}_1' - \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}_2' = \boldsymbol{U}_0$$

$$(R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C})\boldsymbol{I}_2' - \frac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}_1' = 0$$

Obr. 5.8 b)

c) zavedeme ***uzlové napětí*** U_A , pomocí 1. K.z. dostaneme



$$\frac{\boldsymbol{U}_A - \boldsymbol{U}_0}{R_1} + j\omega C\boldsymbol{U}_A + \frac{\boldsymbol{U}_A}{R_2 + j\omega L} = 0$$

Obr. 5.8 c)

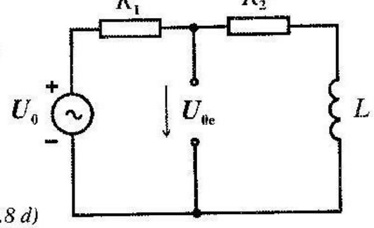
Příklad V-8: V obvodu podle obr. 5.8 a) určete pomocí metody náhradního zdroje proud kapacitorem. Použijte Théveninův i Nortonův náhradní obvod. Obvod je napájen ze zdroje harmonického napětí $u(t) = U_m \cos \omega t$ V.

Řešení:

1. Théveninův náhradní obvod

a) vypočteme fázor napětí $\boldsymbol{U}_{0e}$ obr. 5.8 d)

$$\boldsymbol{U}_{0e} = \frac{\boldsymbol{U}_{0m}}{R_1 + R_2 + j\omega L}(R_2 + j\omega L)$$



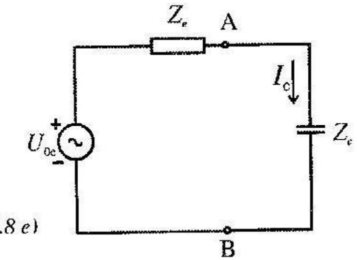
b) určíme ekvivalentní impedanci $\boldsymbol{Z}_e$

$$\boldsymbol{Z}_e = \frac{R_1(R_2 + j\omega L)}{R_1 + j\omega L + R_2}$$

Obr. 5.8 d)

vypočteme proud $\boldsymbol{I}_{Cm}$ obr. 5.8 e)

$$\boldsymbol{I}_{Cm} = \frac{\boldsymbol{U}_{0e}}{\boldsymbol{Z}_e + \boldsymbol{Z}_C}$$



c) k fázoru $\boldsymbol{I}_{Cm}$ vytvoříme komplexor a průmětem do reálné osy určíme okamžitou hodnotu proudu kapacitorem

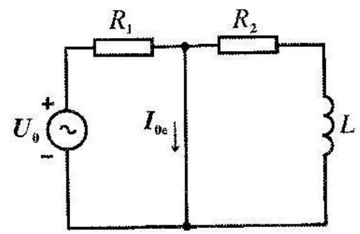
$$i_C(t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{I}_{Cm}\, e^{j\omega t}\}$$

Obr. 5.8 e)

2. Nortonův náhradní obvod

a) vypočteme fázor proudu $\boldsymbol{I}_{0e}$ obr. 5.8f)

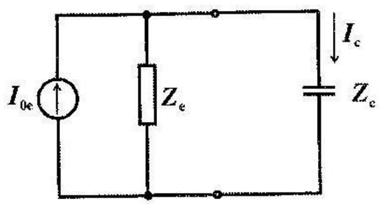
$$\boldsymbol{I}_{0e} = \frac{\boldsymbol{U}_{0m}}{R_1}$$



b) určíme ekvivalentní impedanci $\boldsymbol{Z}_e$ (dle 1b) a vypočteme proud $\boldsymbol{I}_{Cm}$ ze vztahu pro proudový dělič obr.5.8.g

Obr. 5.8 f)

$$\boldsymbol{I}_{Cm} = \boldsymbol{I}_{0e}\frac{\boldsymbol{Z}_e}{\boldsymbol{Z}_e + \boldsymbol{Z}_C}$$

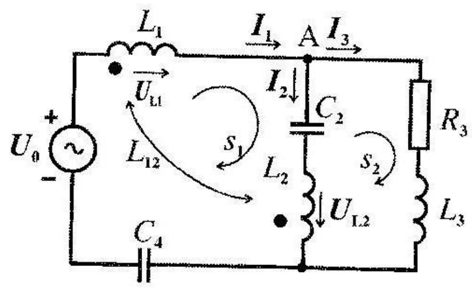


c) k fázoru $\boldsymbol{I}_{Cm}$ vytvoříme komplexor a průmětem do reálné osy určíme okamžitou hodnotu proudu kapacitorem

Obr. 5.8 g)

$$i_C(t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{I}_{Cm}\, e^{j\omega t}\}$$

Příklad V-9: Pro obvod se vzájemnými indukčnostmi dle obr. 5.9 formulujte rovnice: a) pro větvové proudy, b) pro smyčkové proudy.



Obr. 5.9

Řešení:

a) ***rovnice pro větvové proudy***:
nejprve vyjádříme fázory napětí U_{L1} a U_{L2} se vzájemnými induktivními vazbami

$$\boldsymbol{U}_{L1} = \mathrm{j}\omega L_1 \boldsymbol{I}_1 - \mathrm{j}\omega L_{12} \boldsymbol{I}_2$$
$$\boldsymbol{U}_{L2} = \mathrm{j}\omega L_2 \boldsymbol{I}_2 - \mathrm{j}\omega L_{12} \boldsymbol{I}_1$$

Rovnice pro uzel A a smyčky s_1, s_2:

$$\mathrm{A}:\ -\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{I}_3 = 0$$
$$s_1:\ \boldsymbol{U}_{L1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{U}_{L2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4}\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{U}_0$$
$$s_2:\ (R_3 + \mathrm{j}\omega L_3)\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{U}_{L2} - \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\boldsymbol{I}_2 = 0$$

b) ***formulace pro smyčkové proudy***:
ve smyčkách s_1 a s_2 volíme smyčkové proudy $\boldsymbol{I}'_1$ a $\boldsymbol{I}'_2$, pomocí nich vyjádříme napětí $\boldsymbol{U}_{L1}$ a $\boldsymbol{U}_{L2}$

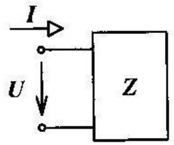
$$\boldsymbol{U}_{L1} = \mathrm{j}\omega L_1 \boldsymbol{I}'_1 - \mathrm{j}\omega L_{12}(\boldsymbol{I}'_1 - \boldsymbol{I}'_2)$$
$$\boldsymbol{U}_{L2} = \mathrm{j}\omega L_2(\boldsymbol{I}'_1 - \boldsymbol{I}'_2) - \mathrm{j}\omega L_{12}\boldsymbol{I}'_1$$

Rovnice pro smyčky s_1, s_2 jsou:

$$s_1:\ \boldsymbol{U}_{L1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}(\boldsymbol{I}'_1 - \boldsymbol{I}'_2) + \boldsymbol{U}_{L2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_4}\boldsymbol{I}'_1 = \boldsymbol{U}_0$$
$$s_2:\ (R_3 + \mathrm{j}\omega L_3)\boldsymbol{I}'_2 - \boldsymbol{U}_{L2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}(\boldsymbol{I}'_2 - \boldsymbol{I}'_1) = 0$$

5. 3 REZONANCE

Obvod napájený harmonickým napětím je v rezonanci, jestliže *proud a napětí zdroje jsou ve fázi*, tj. jestliže impedance pasivního dvojpólu připojeného ke zdroji má ohmický charakter. Obvod v *rezonanci odebírá ze zdroje pouze činný výkon.*

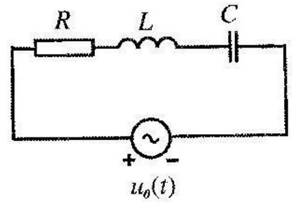


Podmínka pro rezonanci:

Im{Z}=0 resp. Im{Y}=0

Příklad V-10: Pro sériový rezonanční obvod určete:

a) impedanci a podmínku rezonance
b) proud v obvodu a napětí na R, L, C
c) nakreslete fázorový diagram pro $\omega < \omega_r$, $\omega = \omega_r$, $\omega > \omega_r$
d) nakreslete rezonanční křivky $U_R(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$



Obr.5.10

Řešení:

a) Impedance obvodu je $\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

při rezonanci je Im(Z) = 0 $\Rightarrow$ $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

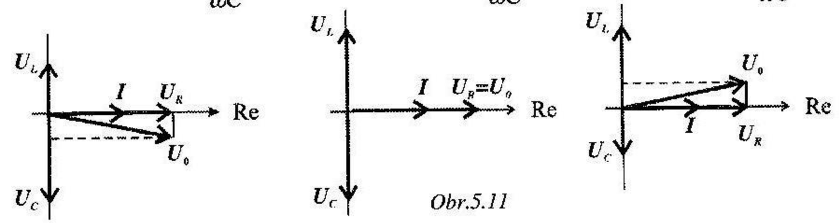
rezonanční frekvence je $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

b) vypočteme proud a napětí U_R, U_L, U_C

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{U}_0}{\boldsymbol{Z}} \qquad \boldsymbol{U}_R = R\boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{U}_L = \mathrm{j}\omega L\boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{U}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\boldsymbol{I}$$

c) ***fázorové diagramy*** (fázor proudu je vždy v reálné ose)

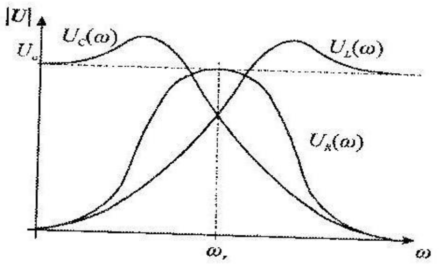
$\omega < \omega_r$ $\omega L < \frac{1}{\omega C}$ $\omega = \omega_r$ $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ $\omega > \omega_r$ $\omega L > \frac{1}{\omega C}$



Obr.5.11

d) ***rezonanční křivky*** vyjadřují závislost velikosti fázoru na frekvenci $|U| = U(\omega)$, kreslíme je s přihlédnutím k následujícím skutečnostem

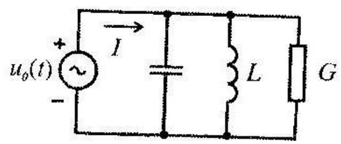
- pro rezonanční frekvenci je U_R maximální a $U_L = U_C$
- pro frekvence $\omega < \omega_r$ je $X_L < X_C \Rightarrow U_L(\omega) < U_C(\omega)$,
  $U_L(0) = 0,\ U_C(0) = U_o$
- pro frekvence $\omega > \omega_r$ je $X_C < X_L \Rightarrow U_L(\omega) > U_C(\omega)$,
  $U_C(\infty) = 0,\ U_L(\infty) = U_o$



Obr.5.12

Příklad V-11: Pro paralelní rezonanční obvod určete:

a) admitanci a podmínku rezonance
b) proud v obvodu a napětí na G, L, C
c) nakreslete fázorový diagram pro
$\omega < \omega_r,\ \omega = \omega_r,\ \omega > \omega_r$



Obr.5.13

Řešení:

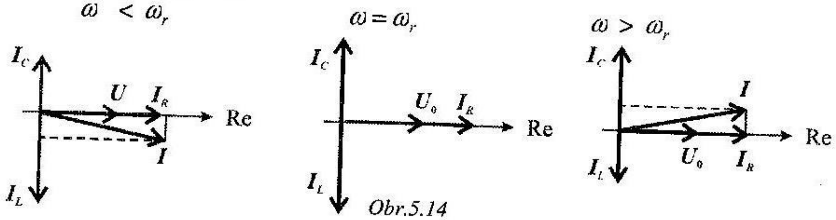
a) Admitance obvodu je $\quad Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$

podmínka rezonance je $\quad \mathrm{Im}(Y) = 0 \Rightarrow \omega C = \frac{1}{\omega L}$

rezonanční frekvence je $\quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

b) vypočteme proudy: $\quad \boldsymbol{I}_R = \boldsymbol{U}_0 G,\quad \boldsymbol{I}_C = \boldsymbol{U}_0 j\omega C,\quad \boldsymbol{I}_L = \frac{\boldsymbol{U}_0}{j\omega L}$

c) fázorové diagramy



Obr.5.14

5.4 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Komplexní reprezentace harmonických veličin

5.1 K okamžité hodnotě napětí $u(t) = \sqrt{2}\ 230 \sin(\omega t + 30°)$ V přiřaďte fázor.

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{U}_m &= \sqrt{2}\ 230 e^{j30°}\ \mathrm{V} \\ \boldsymbol{U} &= 230 e^{j30°}\ \mathrm{V} \end{aligned}}$$

5.2 K okamžité hodnotě napětí $u(t) = \sqrt{2}\ 230 \sin(\omega t + 30°)$ přiřaďte komplexor.

$$\boxed{\boldsymbol{U}_m e^{j\omega t} = \sqrt{2}\ 230 e^{j30°} e^{j\omega t}}$$

5.3 Pomocí fázorů sečtěte $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \sqrt{2}\ 3 \cos \omega t + \sqrt{2}\ 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ A.

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 = 5e^{j\varphi}\mathrm{A} \\ &i(t) = \sqrt{2}\ 5 \cos(\omega t + \varphi)\ \mathrm{A}\ ;\ \varphi = \mathrm{arctg}\ \frac{4}{3} \end{aligned}}$$

5.4 Vypočtěte $u(t) = 10 \sin \omega t - 8 \cos \omega t$ V.

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{U}_m = 12{,}81 e^{-j\varphi}\ \mathrm{V} \\ &u(t) = 12{,}81 \sin(\omega t - \varphi)\ \mathrm{V} \quad \varphi = \mathrm{arctg}\ 0{,}8 \end{aligned}}$$

5.5 Stanovte průběh proudu (s frekvencí ω), jemuž je přiřazen fázor $\boldsymbol{I} = -10$ A.

$i(t) = \sqrt{2}\ 10 \sin(\omega t + \pi)$ A, $i(t) = \sqrt{2}\ 10 \cos(\omega t + \pi)$ A
úloha má dvě řešení

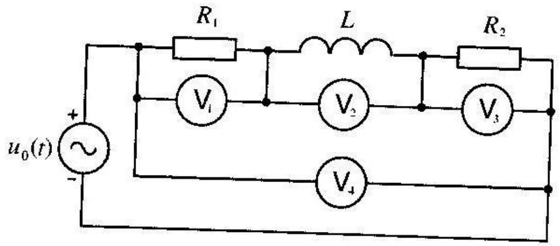
5.6 Stanovte kosinový průběh proudu (s frekvencí ω), jemuž je přiřazen fázor $\boldsymbol{I} = -10j$ A.

$$\boxed{i(t) = \sqrt{2}\ 10 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\ 10 \sin \omega t\ \mathrm{A}}$$

5.7 Stanovte sinový průběh proudu, jemuž přísluší komplexní efektivní hodnota $\boldsymbol{I} = -6 + \mathrm{j}\,8\ \mathrm{A}$.

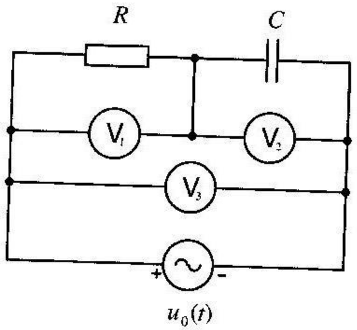
$$i(t) = \sqrt{2}\,10 \sin\left[\omega t + \mathrm{arctg}\left(\frac{4}{-3}\right)\right] = \\ = 14{,}4 \sin(\omega t + 126°42')\ \mathrm{A}$$

5.8 Jaké napětí změříme voltmetrem V_2, jestliže ostatní voltmetry udávají $U_1 = 20\ \mathrm{V}, U_3 = 10\ \mathrm{V}, U_4 = 50\ \mathrm{V}$.



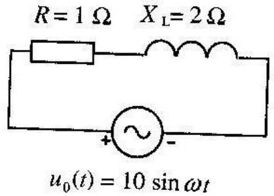
$U_2 = 40\ \mathrm{V}$

5.9 Voltmetry V_1 a V_2 změříme napětí $U_1 = 100\ \mathrm{V}$ a $U_2 = 200\ \mathrm{V}$. Stanovte údaj voltmetru V_3.



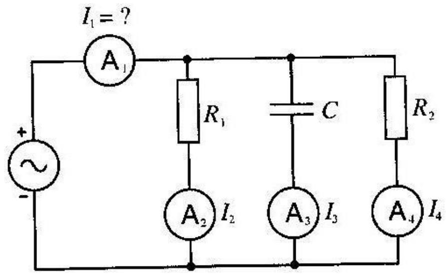
$U_3 = 224\ \mathrm{V}$

5.10 Jaký je fázový posuv proudu vůči napětí zdroje $u_0(t)$.



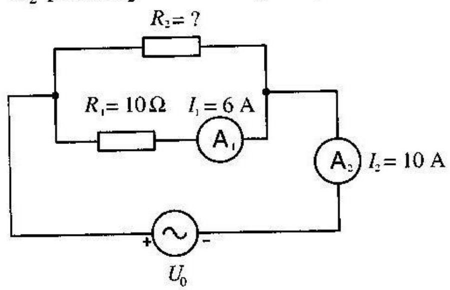
napětí předbíhá o úhel
$\varphi = \mathrm{arctg}\ 2 = 63°30'$

5.11 Jaký proud změříme ampérmetrem A_1, jestliže ostatní ampérmetry udávají $I_2 = 10\ \mathrm{A}, I_3 = 40\ \mathrm{A}, I_4 = 20\ \mathrm{A}$.



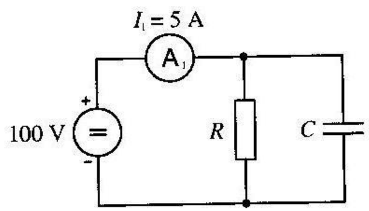
$I_1 = 50\ \mathrm{A}$

5.12 V obvodu podle obrázku udává ampérmetr A_1 proud $I_1 = 6\ \mathrm{A}$ a ampérmetr A_2 proud $I_2 = 10\ \mathrm{A}$. Odpor $R_1 = 10\ \Omega$. Stanovte odpor R_2.

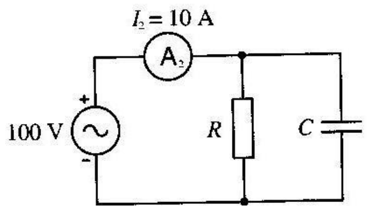


$R = 15\ \Omega$

5.13 Rezistor R a kapacitor C jsou spojeny paralelně a připojeny nejprve na stejnosměrný zdroj o napětí 100 V (obr. a), pak na střídavý zdroj o efektivní hodnotě napětí 100 V a úhlové frekvenci $\omega = \sqrt{3}\ 10^2\ \mathrm{s}^{-1}$ (obr. b). V obou případech měříme ampérmetry A_1 a A_2 proud. Z naměřených hodnot proudu stanovte hodnoty R a C.



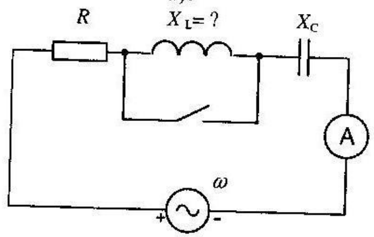
obr. a)



obr. b)

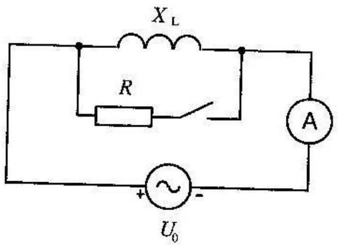
$R = 20\ \Omega, C = 500\ \mu\mathrm{F}$

5.14 V obvodu podle obrázku jsou dány hodnoty rezistoru R, kapacitní reaktance X_C a úhlové frekvence zdroje ω. Stanovte hodnotu induktivní reaktance X_L, při níž je údaj ampérmetru stejný při zapnutém i při vypnutém vypínači (v ustáleném stavu).



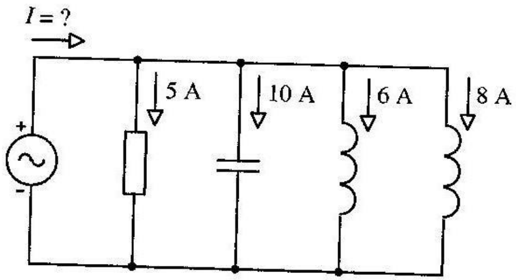
$$X_L = 2|X_C|$$

5.15 V obvodu podle obrázku je $R = X_L$. Jak se změní údaj ampérmetru po sepnutí vypínače?



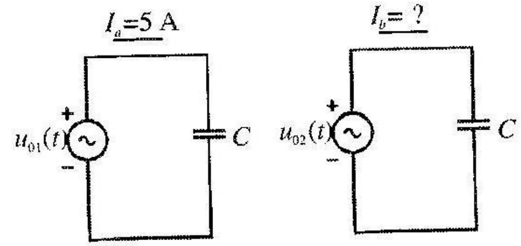
proud se zvětší $\sqrt{2}$ – krát

5.16 Stanovte efektivní hodnotu proudu I.



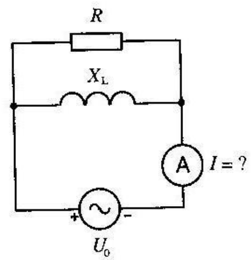
$$I = 6{,}4\ \mathrm{A}$$

5.17 Stanovte efektivní hodnotu proudu I_b, jestliže $I_a = 5$ A a $u_{01}(t) = 100\sin(100t + 30°)$ V, $u_{02}(t) = 100\sin(50t + 60°)$ V.



$$I_b = 2{,}5A$$

5.18 V obvodu podle obrázku známe $U_0 = 100$ V (efektivní hodnota). Stanovte údaj ampérmetru, je-li $R = X_L = 10\ \Omega$.



$$I = 10\sqrt{2}\ \mathrm{A}$$

Komplexní impedance a admitance

5.19 Určete fázový posun mezi napětím a proudem na impedanci **Z**, je-li:
a) $\mathbf{Z} = 6 + j4\ \Omega$, b) $\mathbf{Z} = 6 - j4\ \Omega$, c) $\mathbf{Z} = 6\ \Omega$

a) napětí předbíhá proud o $33{,}7^0$
b) napětí se zpožďuje za proudem o $33{,}7^0$
c) napětí a proud jsou ve fázi

5.20 Vypočtěte komplexní impedanci dvojpólu, fázor napětí je $\mathbf{U} = 30\angle 60^0$ V a proudu $\mathbf{I}_m = 5\angle 90^0$ A. Určete, z jakých sériově řazených prvků lze dvojpól sestavit, je-li $\omega = 1000\ \mathrm{s}^{-1}$.

$\mathbf{Z} = 8.49\angle -30^0\ \Omega$,
$R = 7.35\Omega$, $C = 236\ \mu\mathrm{F}$

5.21 Vypočtěte časový průběh proudu dvojpólem, je-li napětí dvojpólu $u(t) = 100\sin(\omega t + 30°)$ V a komplexní impedance $\mathbf{Z} = 8 + j\,10\ \Omega$.

$$i(t) = 15{,}61\cos(\omega t + 21{,}34^0)\mathrm{A}$$

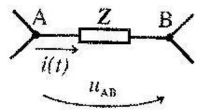
5.22 Proud induktorem o indukčnosti L = 12 mH je $i(t)$ = 20 cos ($10^6 t$) mA.
Určete: a) komplexní impedanci, b) napětí $u(t)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{Z} = \mathrm{j}1{,}2\cdot 10^4\ \Omega \\ u(t) = 240\cos(10^6 t + 90^0)\mathrm{V} \end{array}}$$

5.23 Napětí na kapacitoru o kapacitě C = 20 pF je $u(t)$ = 30 cos ($10^5 t$) V.
Určete: a) komplexní admitanci, b) proud $i_C(t)$

$$\boxed{\begin{array}{l} Y_c = \mathrm{j}\ 2.10^{-6}\ \mathrm{S} \\ i_c(t) = 6.10^{-5}\cos(10^5 t + 90^0)\mathrm{A} \end{array}}$$

5.24 Komplexní impedance dvojpólu je $\boldsymbol{Z}$ = 6 + j 3 Ω. Určete napětí u_{AB}, je-li $i(t)$ = 3 sin (ωt + 30°) A

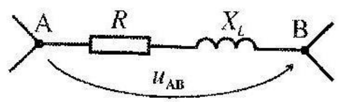


$$\boxed{u_{AB}(t) = 20{,}1\sin(\omega t + 56{,}57^0)\ \mathrm{V}}$$

5.25 Vypočtěte komplexní impedanci dvojpólu, jsou-li prvky R=30 Ω, X_L=40 Ω spojeny: a) do série, b) paralelně

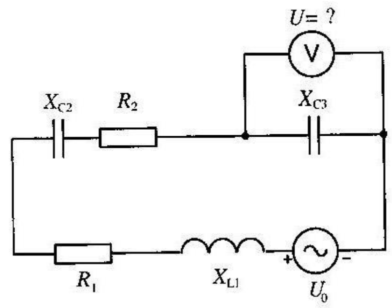
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{a) } \boldsymbol{Z}_a = 30 + \mathrm{j}40 = 50\angle 53{,}13^0\,\Omega \\ \text{b) } \boldsymbol{Z}_b = 24\angle 36{,}87^0\,\Omega \end{array}}$$

5.26 Napětí na rezistoru R = 10 Ω je $u_R(t)$ = 10 sin (ωt + 30°) V, vypočtěte napětí u_{AB}, je-li X_L = 20 Ω



$$\boxed{u_{AB}(t) = 22{,}36\sin(\omega t + 93{,}43^0)\mathrm{V}}$$

5.27 Stanovte údaj voltmetru, jestliže prvky obvodu mají tyto hodnoty: $R_1 = 3\,\Omega, R_2 = 5\,\Omega, X_{L1} = 12{,}5\,\Omega, X_{C2} = -3{,}5\,\Omega, X_{C3} = -3\,\Omega$ a efektivní hodnota napětí zdroje je $U_0 = 100\,\mathrm{V}$.

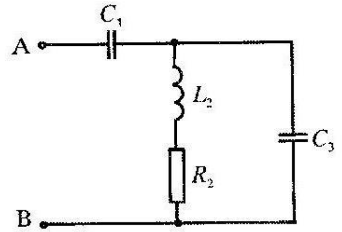


$$\boxed{U = 30\,\mathrm{V}}$$

5.28 Dvojpól je dán sériovým spojením dvou pasivních prvků, protéká jím proud $i(t)$ = 5 sin(ωt + 20°) A a je na něm napětí $u(t)$ = 100 sin (ωt + 50°) V. Stanovte, z jakých prvků je sestaven a určete jejich hodnoty, je-li:
a) ω= 1000 s^{-1}, b) ω= 10000 s^{-1}.

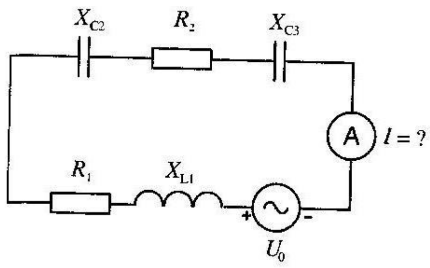
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{a) } R = 17{,}32\ \Omega,\ L = 10\ \mathrm{mH} \\ \text{b) } R = 17{,}32\ \Omega,\ L = 1\ \ \mathrm{mH} \end{array}}$$

5.29 Vypočtěte impedanci $\boldsymbol{Z}_{AB}$ při frekvenci f_1=50 Hz a při f_2=150 Hz.
Dáno: C_1=35,37 μF, R_2=40 Ω, L_2=63,66 mH, C_3=53,05 μF.



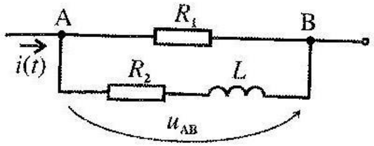
$$\boxed{\begin{array}{l} Z_1 = 114{,}24\angle -66{,}8^0\,\Omega \\ Z_2 = 55{,}23\angle -84{,}81^0\,\Omega \end{array}}$$

5.30 Stanovte údaj ampérmetru, je-li efektivní hodnota napětí zdroje $U_0 = 100\,\mathrm{V}$ a prvky obvodu mají tyto hodnoty:
$R_1 = 4\,\Omega,\ R_2 = 2\,\Omega,\ X_{L1} = 14{,}2\,\Omega,\ X_{C2} = -4{,}1\,\Omega,\ X_{C3} = -2{,}1\,\Omega.$



$I_1 = 10\ \mathrm{A}$

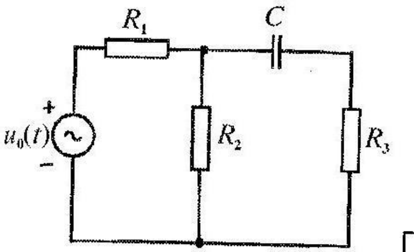
5.31 Určete impedanci dvojpólu a vypočtěte okamžitou hodnotu napětí $u_{AB}(t)$, je-li $i(t) = 2\ \sin(\omega t + 60^0)$ A , R_1=20 Ω , R_2=50 Ω , X_L=30 Ω



$Z = 15{,}31\angle 7{,}76^0\ \Omega$
$u_{AB}(t) = 30{,}62\sin(\omega t + 67{,}76^0)\ \mathrm{V}$

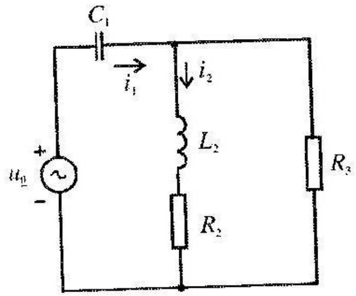
Analýza obvodů s harmonickými zdroji

5.32 Stanovte proud, který dodává zdroj do obvodu, je-li dáno:
$u_0(t) = 230\ \sin(\omega t + 30^\circ)$ V , R_1=20 Ω , R_2=5 Ω , R_3=10 Ω , X_C= - 10 Ω



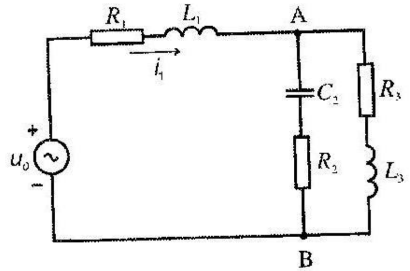
$i(t) = 9{,}64\sin(\omega t + 31{,}85^0)\ \mathrm{A}$

5.33 V obvodu podle obrázku vypočtěte proudy $i_1(t)$ a $i_2(t)$
Dáno: $u_0 = 400\cos(10^5 t + 50^\circ)$ V , $R_2 = 500\ \Omega$, $R_3 = 400\ \Omega$, $C_1 = 50$ nF , $L_2 = 3$ mH.



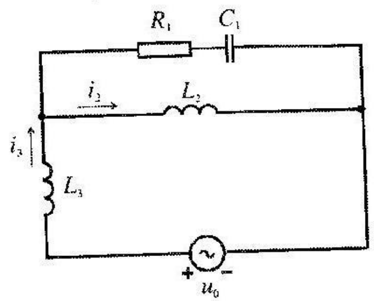
$i_1 = 1{,}42\cos(10^5 t + 81{,}43^\circ)$ A
$i_2 = 0{,}6\ \ \cos(10^5 t + 63^\circ)$ A

5.34 V obvodu podle obrázku vypočtěte proud $i_1(t)$ a napětí $u_{AB}(t)$.
Dáno: $u_0 = 400\cos(\omega t + 60^\circ)$ V, $R_1 = 150\ \Omega$, $X_{L1} = 400\ \Omega$, $R_2 = 400\ \Omega$, $X_{C2} = -300\ \Omega$, $R_3 = 200\ \Omega$, $X_{L3} = 500\ \Omega$.



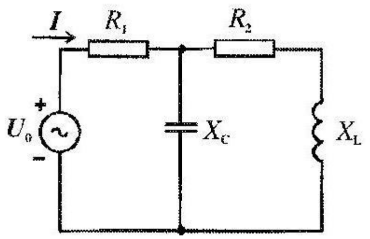
$i_1 = 0{,}377\sqrt{2}\cos(\omega t + 18{,}78^\circ)$ A
$u_{AB} = 160{,}5\sqrt{2}\cos(\omega t + 31{,}68^\circ)$ V

5.35 V obvodu podle obrázku vypočtěte proudy $i_3(t)$ a $i_2(t)$.
Dáno: $u_0 = 400\cos(\omega t + 30^\circ)$ V ,
$R_1 = 600\ \Omega$, $X_{C1} = -200\ \Omega$, $X_{L2} = 500\ \Omega$, $X_{L3} = 300\ \Omega$.



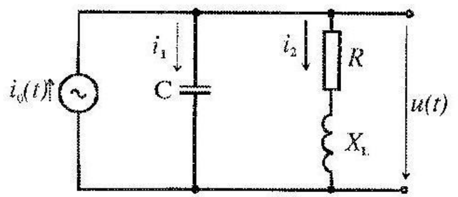
$i_3 = 0{,}559\cos(\omega t - 32{,}24^\circ)$ A
$i_2 = 0{,}527\cos(\omega t - 77{,}24^\circ)$ A

5.36 Vypočtěte efektivní hodnotu napětí zdroje, který napájí daný obvod.
Dáno: $i(t) = 3\sin(\omega t + 30^\circ)$ A, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $X_L = 30\Omega$, $X_C = -40\Omega$



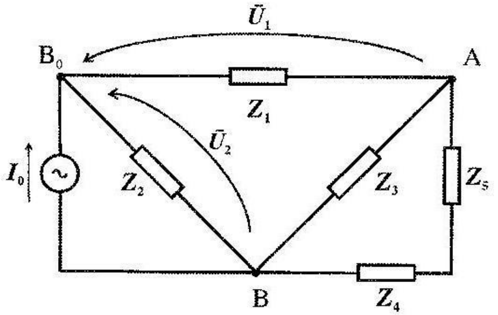
U_0=196,92 V

5.37 Daný obvod je napájen ze zdroje proudu $i_0(t)$ = 10 sin 2000t A. Vypočítejte napětí $u(t)$ a proudy i_1 a i_2. Dáno: C = 1 μF, R = 500 Ω, L = 0,5 H.



$$u(t)=7905{,}5\sin(2000t-71{,}57^\circ)\ \mathrm{V}$$
$$i_1(t)=15{,}81\sin(2000t+18{,}43^\circ)\ \mathrm{A}$$
$$i_2(t)=7{,}07\sin(2000t-135^\circ)\ \mathrm{A}$$

5.38 Pro obvod podle obrázku formulujte rovnice pro metodu uzlových napětí.

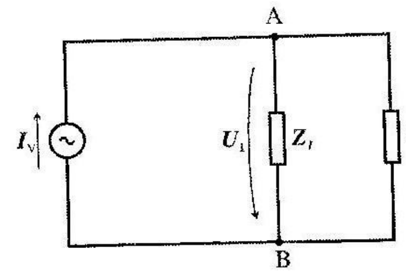


$$\frac{\bar{U}_1}{Z_1}+\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_2}{Z_3}+\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_2}{Z_4+Z_5}=0$$
$$\frac{\bar{U}_2}{Z_2}+\frac{\bar{U}_2-\bar{U}_1}{Z_3}+\frac{\bar{U}_2-\bar{U}_1}{Z_4+Z_5}=-I_0$$

5.39 V obvodu z předchozího příkladu určete proud tekoucí impedancí Z_3 směrem od uzlu A, je-li dáno uzlové napětí $\bar{U}_1$ a $\bar{U}_2$

$$I_3=\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_2}{Z_3}$$

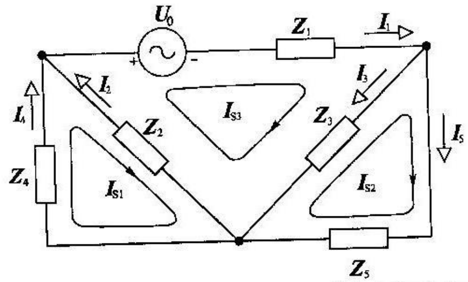
5.40 Napište rovnice obvodu na základě metody uzlových napětí.



Zvolíme - li uzel B jako referenční , platí :

$$\frac{U_1}{Z_1}+\frac{U_1}{Z_2}-I_V=0$$

5.41 Pro obvod podle obrázku napište rovnice pro řešení metodou smyčkových proudů.

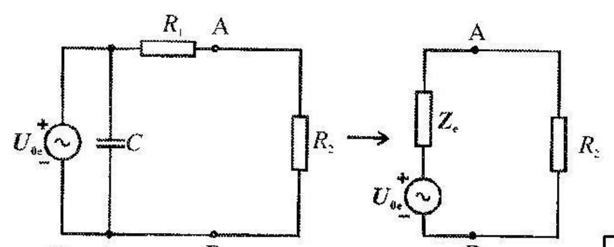


$$Z_2(I_{S1}-I_{S3})+Z_4I_{S1}=0$$
$$Z_3(I_{S2}-I_{S3})+Z_5I_{S2}=0$$
$$Z_1I_{S3}+Z_3(I_{S3}-I_{S2})+Z_2(I_{S3}-I_{S1})=-U_0$$

5.42 Pro obvod z předcházejícího příkladu zapište rovnice vyjadřující vztahy mezi smyčkovými a větvovými proudy.

$$I_1=I_{S3}\,;\ I_2=I_{S3}-I_{S1}$$
$$I_3=I_{S3}-I_{S2};\ I_4=I_{S1}$$
$$I_5=I_{S2}$$

5.43 Pro obvod podle obr. a) stanovte s užitím Théveninovy věty hodnoty prvků ekvivalentního obvodu (tj. U_{0e}, Z_e), obr. b).



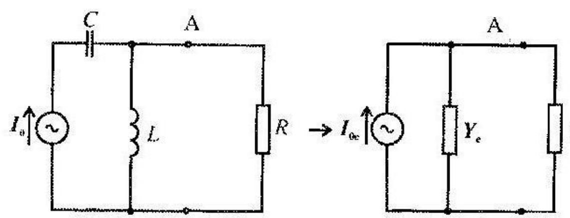
Obr. a) Obr. b)

$$\boxed{U_{0e} = U_0, Z_e = R_1}$$

5.44 Napětí nezatíženého Théveninova zdroje je u_{0e} = 20 cos 2000 t V , při zatížení induktorem o indukčnosti L = 50 mH je napětí ekvivalentního zdroje u_e = 12 cos (2000 t + 45^0) V . Určete parametry náhradního obvodu

$$\boxed{Z_e = 119{,}17\angle 8{,}61^\circ\,\Omega}$$

5.45 Pro obvod podle obr. a) stanovte s užitím Nortonovy věty hodnoty prvků ekvivalentního obvodu (tj. Y_e, I_{0e}), obr. b)



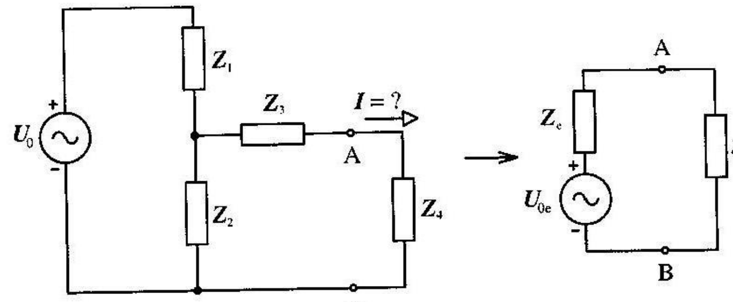
Obr. a) Obr. b)

$$\boxed{I_{0e} = I_0, Y_e = \frac{1}{j\omega L}}$$

5.46 Proud nezatíženého Nortonova zdroje je i_{0e} = 1.2 sinωt A, při zatížení rezistorem R = 150 Ω je proud $i(t)$ = 0,6 cos (ωt+45^0) A . vypočtěte hodnotu ekvivalentní admitance Y_e.

$$\boxed{Y_e = 9{,}82\,10^{-3}\angle -73{,}65^\circ\,\mathrm{S}}$$

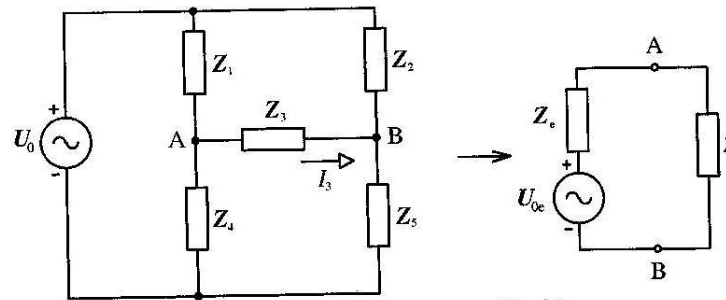
5.47 Pro obvod podle obr. a) stanovte s užitím Théveninovy věty hodnoty prvků ekvivalentního obvodu (tj. U_{0e}, Z_e), obr. b).



Obr. a) Obr. b)

$$\boxed{U_{0e} = \frac{U_0}{Z_1 + Z_2} Z_2,\quad Z_e = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

5.48 Pro obvod podle obr.a) stanovte s užitím Théveninovy věty hodnoty prvků ekvivalentního obvodu (tj. U_{0e}, Z_e), obr. b).



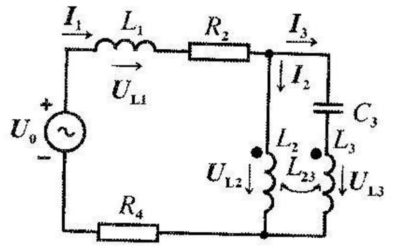
Obr. a) Obr. b)

$$\boxed{\begin{aligned} U_{0e} &= \frac{U_0}{Z_2 + Z_5} Z_2 - \frac{U_0}{Z_1 + Z_4} Z_1 \\ Z_e &= \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2 Z_5}{Z_2 + Z_5} \end{aligned}}$$

5.49 Napětí nezatíženého Théveninova zdroje je $u_{0e} = 10 \sin 1000t$ V, vypočtěte u_e při zatížení kapacitorem $C = 100\ \mu F$, je-li $Z_e = 3\angle 30^0\ \Omega$.

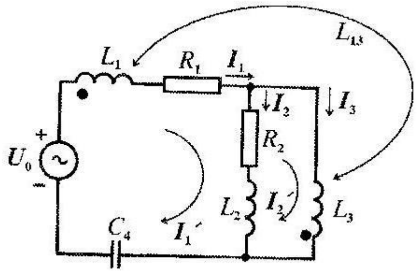
$$\boxed{u_e = 11{,}25\sin(1000t - 16{,}95^\circ)\ \text{V}}$$

5.50 Pro daný obvod vyjádřete napětí na indukčnostech L_1, L_2 a L_3 pomocí větvových proudů



$$\boxed{\begin{aligned} U_{L1} &= j\omega L_1 I_1 \\ U_{L2} &= j\omega L_2 I_2 + j\omega L_{23} I_3 \\ U_{L3} &= j\omega L_3 I_3 + j\omega L_{23} I_2 \end{aligned}}$$

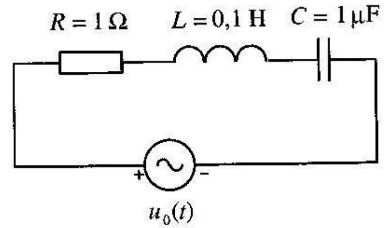
5.51 Pro daný obvod formulujte rovnice pro smyčkové proudy.



$$\boxed{\begin{aligned} & j\omega L_1 I_1' - j\omega L_{13} I_2' + R_1 I_1' + R_2(I_1' - I_2') + j\omega L_2(I_1' - I_2') + \frac{1}{j\omega C_4} I_1' = U_0 \\ & j\omega L_3 I_2' - j\omega L_{13} I_1' + j\omega L_2(I_2' - I_1') + R_2(I_2' - I_1') = 0 \end{aligned}}$$

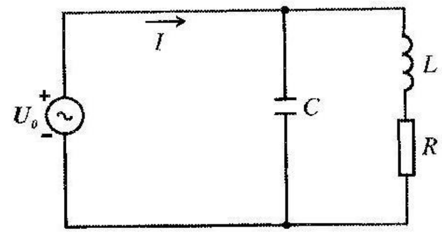
Rezonance

5.52 V obvodu dle obrázku stanovte napětí na kapacitě a rezonanční frekvenci ω, je-li napětí na indukčnosti $u_L = 160\sin(\omega t + 30°)$ V.



$$\boxed{\begin{aligned} u_C &= 160\sin(\omega t - 150°)\ \text{V} \\ \omega &= 3163\,\text{s}^{-1} \end{aligned}}$$

5.53 V obvodu podle obrázku stanovte hodnotu kapacitoru tak, aby zdroj dodával do obvodu pouze činný výkon. Změní-li se kmitočet zdroje, bude nutno změnit též tuto kapacitu?

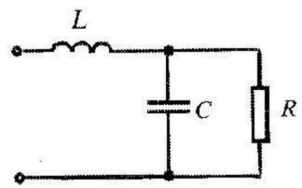


$$\boxed{\begin{aligned} & C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}; \\ & \text{ano, neboť } C = C(\omega) \end{aligned}}$$

5.54 Vypočtěte frekvenci, pro kterou je obvod z předchozího příkladu v rezonanci, dáno: $L = 1$ mH, $C = 10\ \mu F$, $R = 1\ \Omega$

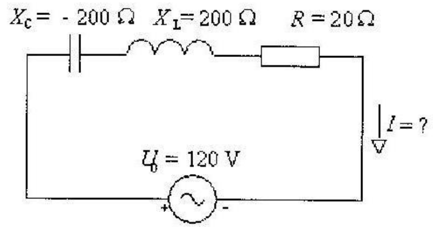
$$\boxed{\omega_r = 9{,}95.10^3\ \text{s}^{-1}}$$

5.55 V obvodu je dáno $R = 10\Omega$, $C = 10\mu F$, a $\omega = 10^4\ \text{s}^{-1}$, vypočtěte hodnotu indukčnosti L tak, aby vstupní napětí a proud byly ve fázi.



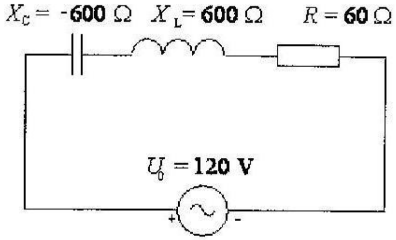
$$\boxed{L = \frac{R^2 C}{1 + (\omega R C)^2} = 0{,}5\,\text{mH}}$$

5.56 Stanovte efektivní hodnotu proudu v obvodu.



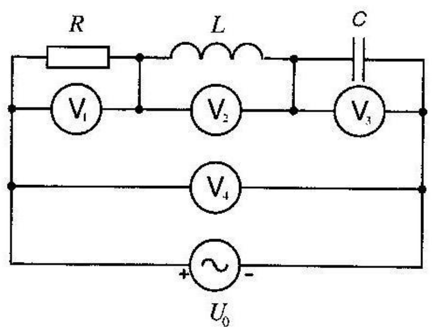
$I = 6$ A; obvod je v rezonanci

5.57 Jaká je efektivní hodnota napětí na rezistoru?



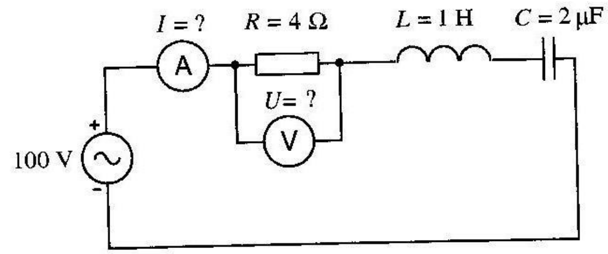
$U_R = 120$ V; obvod je v rezonanci

5.58 V obvodu podle obrázku ukazují všechny čtyři voltmetry U = 120 V. Vyjádřete komplexní efektivní hodnotu napětí na kapacitoru, jestliže fáze napětí U_R je $-30°$.



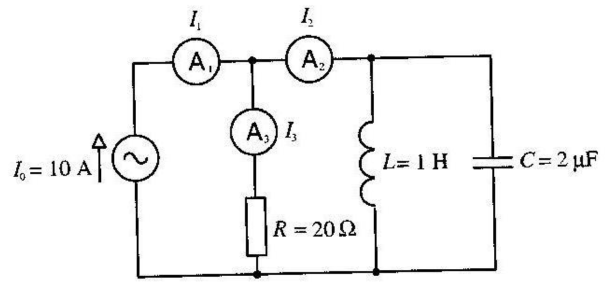
$U_C = 120\, e^{-j120°}$;
obvod je v rezonanci

5.59 V obvodu podle obrázku je efektivní hodnota napětí zdroje 100 V; jalový výkon zdroje je nulový. Stanovte údaje ampérmetru a voltmetru.



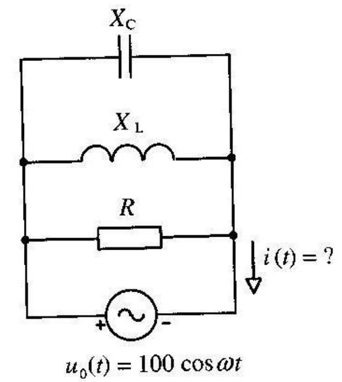
$I = 25$ A, $U = 100$ V

5.60 Obvod podle obrázku je napájen zdrojem proudu o efektivní hodnotě 10 A. Jalový výkon dodávaný zdrojem do obvodu je nulový. Stanovte údaje všech ampérmetrů.



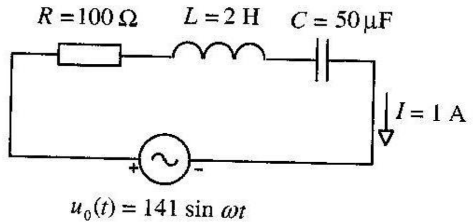
$I_1 = 10$ A,
$I_2 = 0$ A,
$I_3 = 10$A

5.61 V obvodu podle obrázku je $R = X_L = |X_C| = 1\,\Omega$. Stanovte časový průběh proudu $i = i(t)$.



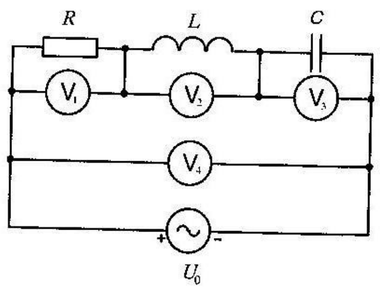
$i = 100 \cos \omega t$; obvod je v rezonanci

5.62 Při jaké úhlové frekvenci ω protéká větví obvodu podle obrázku proud $I = 1$ A (ef. hodnota)?



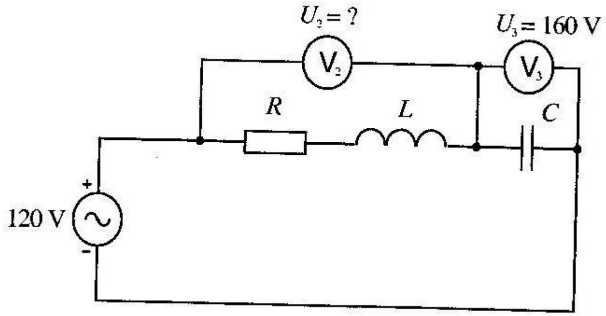
$\boxed{\omega = \omega_r = 100\,\mathrm{s}^{-1}}$

5.63 Vyjádřete nutnou a postačující podmínku, aby údaj všech čtyř voltmetrů byl stejný.



$\boxed{R = \omega L = \frac{1}{\omega C}}$; obvod je v rezonanci

5.64 V obvodu podle obrázku je efektivní hodnota napětí zdroje 120 V. Stanovte efektivní hodnotu napětí voltmetru V_2, jestliže obvod je v rezonanci.

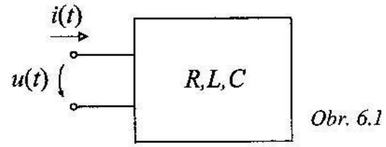


$\boxed{U_2 = 200\ \mathrm{V}}$

6. VÝKONY V HARMONICKÉM USTÁLENÉM STAVU

6.1. ZÁKLADNÍ VZTAHY

Pro pasivní lineární dvojpól na obr. 6.1 s napětím $u(t)$ a proudem $i(t)$ na vstupních svorkách definujeme *okamžitý, činný, jalový a zdánlivý výkon* – obr. 6.2.



Obr. 6.1

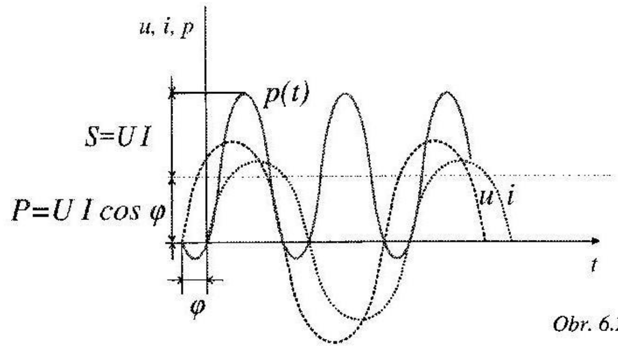
$$u = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t + \varphi)$$
$$i = \sqrt{2}\,I \sin \omega t$$

Okamžitý výkon:

$$p(t) = u(t)i(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \varphi) = UI\cos\varphi(1 - \cos 2\omega t) + UI\sin\varphi\sin 2\omega t = p_{\check{C}}(t) + p_J(t) \qquad (6.1)$$

Činný výkon (střední hodnota okamžitého výkonu):

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = UI\cos\varphi \qquad (6.2)$$



Obr. 6.2

Jalový výkon (amplituda okamžitého jalového výkonu p_J):

$$Q = UI\sin\varphi \qquad (6.3)$$

Zdánlivý výkon (amplituda okamžitého výkonu $p(t)$):

$$S = UI \qquad (6.4)$$

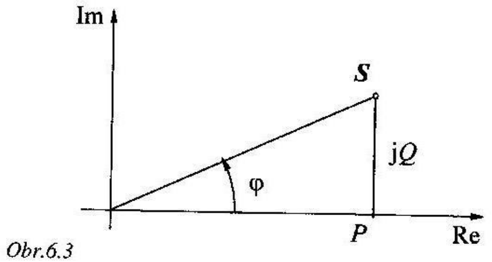
Komplexní výkon:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^*;\quad P = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}\},\quad Q = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{S}\},\quad S = |\boldsymbol{S}| \qquad (6.5)$$

Pomocí komplexní impedance $\boldsymbol{Z}$ lze určit komplexní výkon ze vztahu

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^* = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{I}.\boldsymbol{I}^*,\quad \text{odtud}\quad P = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{Z}\}.I^2 \quad Q = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{Z}\}.I^2 \qquad (6.6)$$

Trojúhelník výkonů:

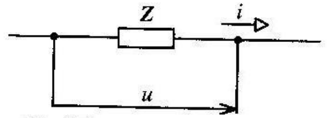


$$S^2 = P^2 + Q^2$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{Q}{P}$$

Obr.6.3

Příklad VI-1: Určete činný a jalový výkon odebíraný dvojpólem, je-li okamžitá hodnota napětí na dvojpólu $u(t) = 100 \sin(1000t + 30^0)$ V a protéká jím proud $i(t) = 5 \sin(1000t + 60^0)$ A.



Obr 6.4

Řešení:

a) ***výpočet ze vzorců pro P,Q*** (dosazujeme efektivní hodnoty)

$$P = UI\cos\varphi = \frac{100}{\sqrt{2}}\frac{5}{\sqrt{2}}\cos\left(-30^0\right) = 216{,}51\mathrm{W}$$

$$Q = UI\sin\varphi = \frac{100}{\sqrt{2}}\frac{5}{\sqrt{2}}\sin\left(-30^0\right) = -125\mathrm{VAr}$$

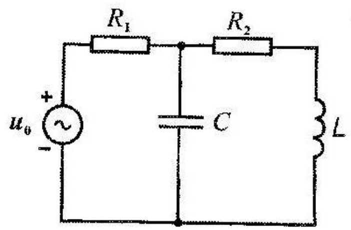
Jalový výkon je záporný (má kapacitní charakter), neboť proud předbíhá napětí.

b) ***výpočet pomocí komplexního výkonu***

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^* = \frac{100}{\sqrt{2}}\angle 30^0 \frac{5}{\sqrt{2}}\angle -60^0 = 250\angle -30^0 = 216{,}51 - \mathrm{j}125$$

$P = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}\} = 216{,}51\mathrm{W}$ $\qquad Q = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{S}\} = -125\mathrm{VAr}$

Příklad VI-2: Určete činný a jalový výkon dodaný zdrojem do obvodu, napětí zdroje je $u_0(t) = 100 \sin(\omega t + 30^0)$ V, $\omega = 1000\ \mathrm{s}^{-1}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $L = 10$ mH, $C = 100\mu$F



Řešení:

a) ***výpočet pomocí komplexního výkonu***: vypočteme celkovou impedanci

$$\boldsymbol{Z} = R_1 + \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\left(R_2 + \mathrm{j}\omega L\right)}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + R_2 + \mathrm{j}\omega L}$$

$$= 18{,}3\angle -33{,}69^0\ \Omega$$

vyjádříme fázor efektivní hodnoty proudu

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{U_0}}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}\angle 30^0}{18{,}3\angle -33{,}69^0} = 3{,}92\angle 63{,}69^0\ \mathrm{A}$$

a dosadíme do vztahu pro komplexní výkon

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^* = \frac{100}{\sqrt{2}}\angle 30^0 3{,}92\angle -63{,}69^0 = 277{,}19\angle -33{,}69^0 = 230{,}64 - \mathrm{j}153{,}76$$

$P = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}\} = 230{,}64$ W $\qquad Q = \mathrm{Im}\{\boldsymbol{S}\} = -153{,}76\mathrm{VAr}$

b) ***výpočet ze vzorců pro P a Q:***

fázový posuv mezi napětím a proudem je dán úhlem impedance φ, takže

$$P = UI\cos\varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} 3{,}92\cos\left(-33{,}69^0\right) = 230{,}64\mathrm{W}$$

$$Q = UI\cos\varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} 3{,}92\sin\left(-33{,}69^0\right) = -153{,}76\mathrm{VAr}$$

6.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

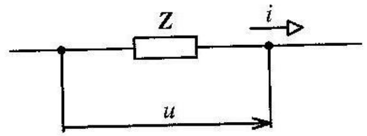
6.1 Jaký je vztah mezi jalovým (Q) a zdánlivým výkonem (S)?

$$\boxed{Q = S \sin\varphi}$$

6.2 Činný a jalový výkon jsou $P = 300\,\mathrm{W}$, $Q = 400\,\mathrm{VAr}$. Stanovte zdánlivý výkon.

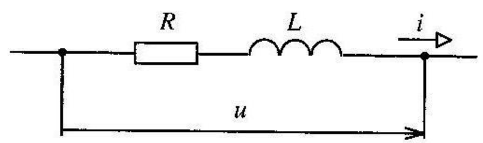
$$\boxed{S = 500\,\mathrm{VA}}$$

6.3 Větví obvodu protéká proud $i = 8\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ A při napětí $u = 120 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ V. Stanovte činný a jalový výkon.



$$\boxed{P = 240\,\mathrm{W},\ Q = -415{,}7\mathrm{VAr}}$$

6.4 Stanovte činný a jalový výkon větve podle obrázku, jestliže $R = 10\Omega$, $L = 0{,}01\,\mathrm{H}$, $i = 2\sqrt{2}\sin(618t + 50°)\,\mathrm{A}$

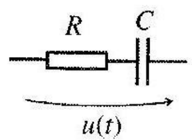


$P = 40\,\mathrm{W},\ Q = 98{,}88\,\mathrm{VAr}$

6.5 Určete komplexní impedanci dvojpólu.
Dáno: $U = 200\,\mathrm{V}$, $P = 500\,\mathrm{W}$, $Q = 500\,\mathrm{VAr}$ (kap.).

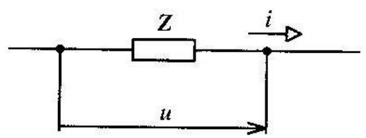
$\mathbf{Z} = 56{,}56\angle -45^0\,\Omega$

6.6 Určete činný a jalový výkon dodaný do dvojpólu, je-li $u(t) = 100\sin\omega t$ V, $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$, $R = 10\,\Omega$, $C = 100\,\mu\mathrm{F}$.



$P = 250\,\mathrm{W},\ Q = -250\,\mathrm{VAr}$

6.7 Stanovte činný a jalový výkon větve obvodu podle obrázku, jestliže $u = 10\sqrt{2}\sin(314t + 30°)\,\mathrm{V}$, $i = 2\sqrt{2}\sin(314t - 60°)\,\mathrm{A}$.



$P = 0\,\mathrm{W},\ Q = 20\,\mathrm{VAr}$

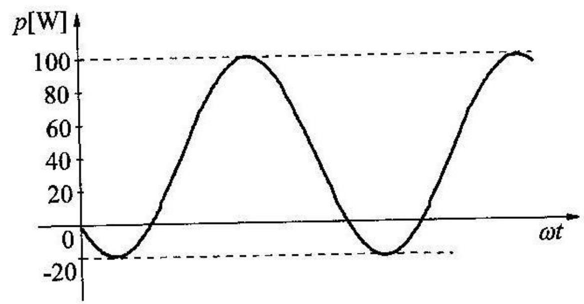
6.8 V obvodu známe časový průběh napětí zdroje $u_0(t) = 100\sin\omega t$ V a fázor efektivní hodnoty proudu zdroje $\mathbf{I} = 4\angle 45^\circ$ A. Určete činný a jalový výkon, který dodává zdroj do obvodu.

$P = 200\,\mathrm{W},\ Q = -200\,\mathrm{VAr}$

6.9 Amplituda harmonického proudu tekoucího odporem $R = 100\,\Omega$ je 10 mA. Jaký je činný výkon dodaný do rezistoru?

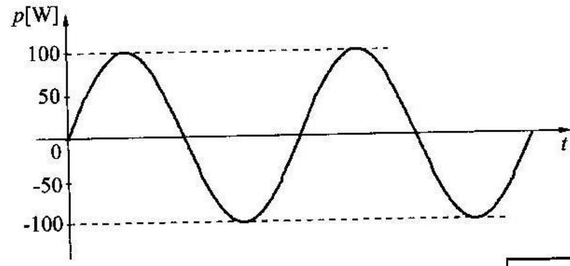
$P = 5\,\mathrm{mW}$

6.10 Na obrázku je zakreslen časový průběh okamžitého výkonu p na zátěži. Stanovte činný výkon P na zátěži.



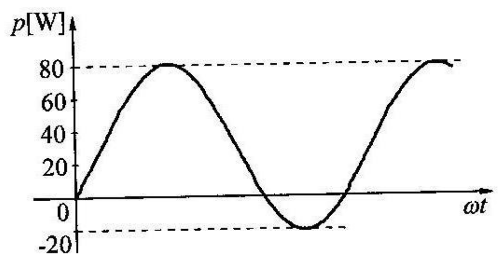
$P = 40\,\mathrm{W}$

6.11 Na obrázku je znázorněn průběh okamžitého výkonu v závislosti na čase, $p = p(t)$. Stanovte činný, jalový a zdánlivý výkon.



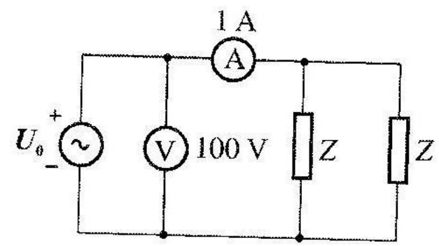
$P = 0\,\mathrm{W},\ Q = S = 100\,\mathrm{VA}$

6.12 Na obrázku je zakreslen časový průběh okamžitého výkonu p na zátěži. Stanovte účiník.



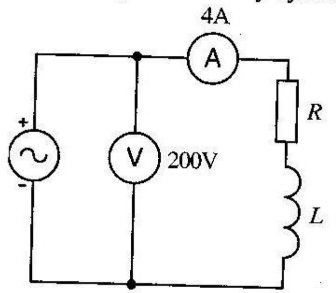
$\cos\varphi = \dfrac{P}{S} = \dfrac{30}{50} = 0{,}6$

6.13 V obvodu podle obrázku je $Z = R + jX\ \Omega$, přičemž $R = X$; bylo změřeno napětí $U = 100$ V a proud $I = 1$ A (efektivní hodnoty). Stanovte činný výkon zdroje.



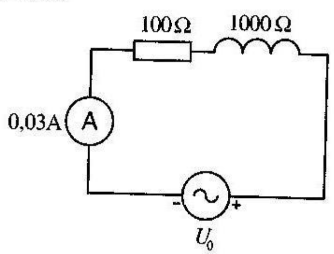
$P = 100\cos 45° = 70{,}7$ W

6.14 Z daných údajů ampérmetru a voltmetru v obvodu podle obrázku stanovte hodnotu odporu R a činný výkon zdroje P, jestliže $\omega L = 30\,\Omega$.



$R = 40\,\Omega$, $P = 640$ W

6.15 V obvodu s induktivní reaktancí $X_L = 1000\,\Omega$ a ohmickým odporem $R = 100\,\Omega$ protéká proud $I = 0{,}03$ A. Stanovte činný výkon dodaný do obvodu.

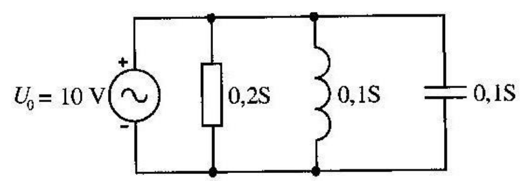


$P = 90$ mW

6.16 Spotřebičem o impedanci **Z**=4+j3 Ω protéká proud $i(t) = 10\sin(\omega t + 30°)$ A, určete činný a jalový výkon, který spotřebič odebírá.

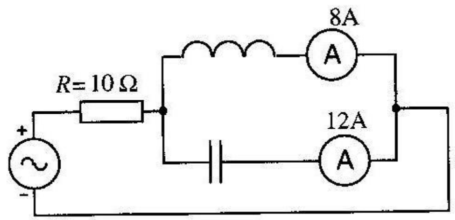
$P = 200$ W, $Q = 150$ VAr

6.17 Efektivní hodnota napětí zdroje v obvodu podle obrázku je $U_0 = 10$ V. Admitance jednotlivých větví jsou uvedeny na schématu. Stanovte zdánlivý, činný a jalový výkon zdroje.



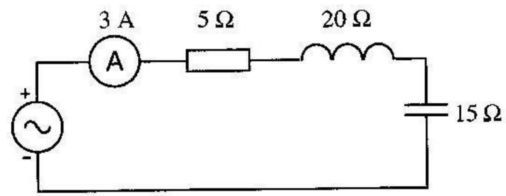
$S = P = 20$ W, $Q = 0$ VAr

6.18 Stanovte činný výkon dodávaný zdrojem do obvodu.



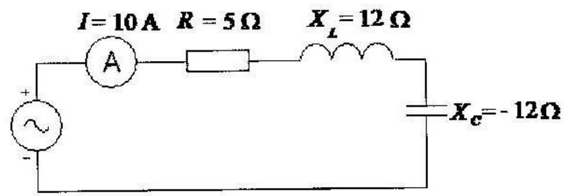
$P = 160$ W

6.19 Stanovte jalový výkon zdroje v obvodu podle obrázku.



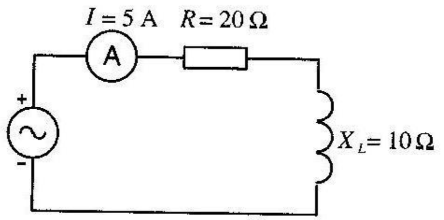
$Q = 45$ VAr

6.20 Stanovte jalový výkon zdroje v obvodu podle obrázku.



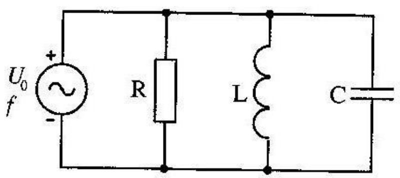
$Q = 0$ VAr

6.21 Stanovte jalový výkon zdroje v obvodu podle obrázku.



$Q = 250$ VAr

6.22 Obvod je napájen zdrojem o efektivní hodnotě napětí $U_0 = 100$ V a frekvenci $f = 50$ Hz. Činný výkon na odporu je $P_R = 100$ W, jalový výkon na indukčnosti $Q_L = 200$ VAr a na kapacitě $Q_C = 400$ VAr. Jak se změní tyto výkony, zvětší-li se napětí zdroje na $U_0' = 200$ V a frekvence na $f' = 100$ Hz?

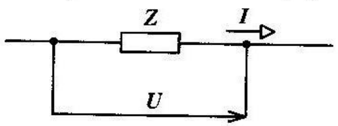


$P_R' = 400$ W, $Q_L' = 400$ VAr, $Q_C' = 3200$ VAr

6.23 Komplexní výkon je $S = 200e^{j30°}$. Stanovte činný výkon.

$P = 173$ W

6.24 Impedancí protéká proud, jehož fázor efektivní hodnoty je $\boldsymbol{I} = 2e^{j100°}$A a na svorkách impedance je napětí, jehož fázor efektivní hodnoty je $\boldsymbol{U} = 200e^{j40°}$V. Stanovte komplexní, činný, jalový a zdánlivý výkon.



$S = 400e^{-j60°}$VA, $P = 200$ W,
$Q = 400\frac{\sqrt{3}}{2} = 346{,}4$ VAr, $S = 400$ VA

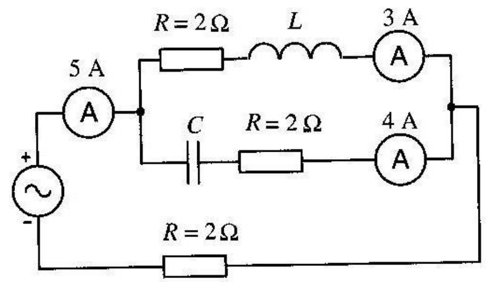
6.25 Větví obvodu protéká proud (komplexní efektivní hodnota) $\boldsymbol{I}$ = (1 - j) A při napětí na větvi $\boldsymbol{U}$ = (10 - j2) V. Stanovte komplexní výkon větve.

$S = (12 + 8j)$ VA

6.26 Komplexní výkon je $S = 100e^{j30°}$VA. Stanovte jalový výkon.

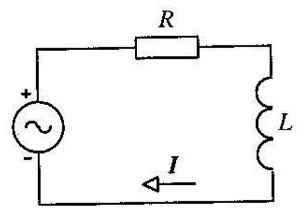
$Q = 50$ VAr

6.27 Stanovte činný výkon dodávaný zdrojem do obvodu



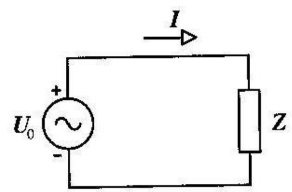
$P = 100$ W

6.28 Určete hodnotu odporu R, jestliže činný výkon dodávaný zdrojem je 500 W a komplexní efektivní hodnota proudu je $\boldsymbol{I} = (3 - j4)$ A.



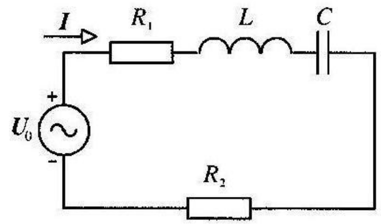
$R = 20\,\Omega$

6.29 Určete jalový výkon zdroje, jestliže $\boldsymbol{U}_0 = 100e^{j0°}$ V, $\boldsymbol{I} = 10e^{j\frac{\pi}{6}}$ A. ($\boldsymbol{U}_0$, $\boldsymbol{I}$ jsou komplexní efektivní hodnoty).



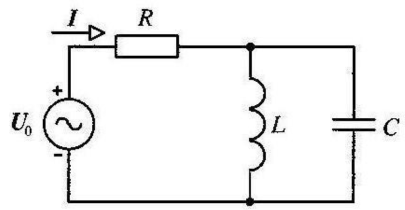
$Q = -500$ VAr

6.30 Prvky obvodu mají tyto hodnoty: $R_1 = 35\,\Omega$, $R_2 = 65\,\Omega$, $L = 1$ H, $C = 10\,\mu$F. Stanovte činný výkon, dodávaný zdrojem do obvodu, jestliže komplexní efektivní hodnota proudu je $\boldsymbol{I} = (3 + j4)$ A.



$P = 2{,}5\,\text{kW}$

6.31 Prvky obvodu mají tyto hodnoty: $R = 100\,\Omega$, $L = 1\,\text{H}$, $C = 1\,\mu\text{F}$. Stanovte činný výkon dodávaný zdrojem do obvodu, jestliže komplexní efektivní hodnota proudu je $\boldsymbol{I} = (6 - \text{j}8)\,\text{A}$.



$P = 10\,\text{kW}$

7. TROJFÁZOVÉ OBVODY

7.1. ZÁKLADNÍ VZTAHY

S trojfázovými obvody se setkáváme zejména v silnoproudých aplikacích. Pro jejich řešení lze užít libovolnou ze známých metod pro analýzu obvodů. Řešení harmonického ustáleného stavu lze podstatně zjednodušit, přihlédneme-li k následujícím skutečnostem:

- způsob zapojení zdroje či spotřebiče (hvězda, trojúhelník)
- typ zdroje či spotřebiče (symetrický, nesymetrický)

K označení jednotlivých fází se v literatuře užívá různé značení (starší XYZ nebo RST, nověji UVW, v zahraniční literatuře abc).

Souměrná trojfázová soustava napětí – stejná amplituda, fázový posun ± 120°

pro okamžité hodnoty platí: *pro fázory – efektivní hodnoty*:

$$u_U = \sqrt{2}\,U \sin \omega t \qquad \boldsymbol{U}_U = U$$
$$u_V = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t - 120^\circ) \qquad \boldsymbol{U}_V = U\angle{-120^\circ} = \mathbf{a}^2 U \qquad (7.1)$$
$$u_W = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t + 120^\circ) \qquad \boldsymbol{U}_W = U\angle 120^\circ = \mathbf{a} U$$

kde **a** je *operátor natočení*, platí:

$$\mathbf{a} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mathbf{a}^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 + \mathbf{a} + \mathbf{a}^2 = 0 \qquad (7.2)$$

V ***souměrné soustavě*** platí

$$u_U(t) + u_V(t) + u_W(t) = 0, \qquad \boldsymbol{U}_U + \boldsymbol{U}_V + \boldsymbol{U}_W = 0 \qquad (7.3)$$

Soustava s nulovým součtem napětí je ***vyvážená***. Analogické vztahy lze napsat i pro okamžité hodnoty proudů resp. pro jejich fázory.

Nesouměrná trojfázová soustava napětí – napětí má různé amplitudy a libovolný fázový posun

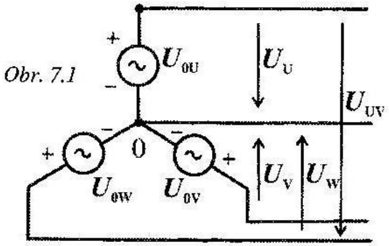
$$u_U = \sqrt{2}\,U_U \sin(\omega t + \varphi_U)$$
$$u_V = \sqrt{2}\,U_V \sin(\omega t + \varphi_V) \qquad u_U(t) + u_V(t) + u_W(t) \neq 0 \qquad (7.4)$$
$$u_W = \sqrt{2}\,U_W \sin(\omega t + \varphi_W)$$

Nesouměrná soustava fázových napětí není vyvážená, pro sdružená napětí vyvážená je.

Spojování zdrojů

a) ***Symetrický napěťový zdroj v zapojení do hvězdy s vyvedeným nulovým vodičem***

Obr. 7.1



V této soustavě jsou dvě napětí:

fázové napětí U_f - fázory U_U, U_V, U_W (napětí mezi fázovým a nulovým vodičem)

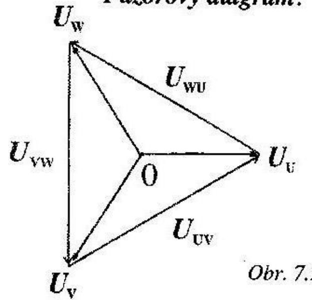
sdružené napětí U_s (mezi dvěma fázovými vodiči), platí pro ně

$$\boldsymbol{U}_{UV} = \boldsymbol{U}_U - \boldsymbol{U}_V = \boldsymbol{U}_U(1-\mathbf{a}^2) = \sqrt{3}U_U\angle 30^0$$

$$\boldsymbol{U}_{VW} = \boldsymbol{U}_V - \boldsymbol{U}_W = \boldsymbol{U}_U(\mathbf{a}^2-\mathbf{a}) = \sqrt{3}U_U\angle -90^0$$

$$\boldsymbol{U}_{WU} = \boldsymbol{U}_W - \boldsymbol{U}_U = \boldsymbol{U}_U(\mathbf{a}-\mathbf{a}^2) = \sqrt{3}U_U\angle 150^0$$

Fázorový diagram:

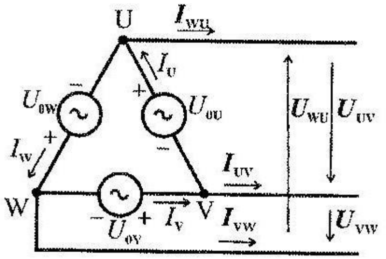


Obr. 7.2

Pro efektivní hodnoty platí:

$$U_s = \sqrt{3}U_f$$

b) ***Symetrický napěťový zdroj zapojený do trojúhelníka***



Obr. 7.3

Napětí mezi vodiči jsou ***sdružená***:

$$\boldsymbol{U}_{UV} = \boldsymbol{U}_{0U}$$
$$\boldsymbol{U}_{VW} = \boldsymbol{U}_{0V}$$
$$\boldsymbol{U}_{WU} = \boldsymbol{U}_{0W}$$

Proudy ve vodičích sítě nazýváme ***sdružené***, lze je vyjádřit z proudů ve fázích zdroje :

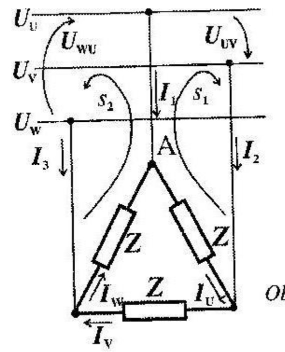
$$\boldsymbol{I}_{UV} = \boldsymbol{I}_V - \boldsymbol{I}_U$$
$$\boldsymbol{I}_{VW} = \boldsymbol{I}_W - \boldsymbol{I}_V$$
$$\boldsymbol{I}_{WU} = \boldsymbol{I}_U - \boldsymbol{I}_W$$

pro efektivní hodnoty proudu platí:

$$I_s = \sqrt{3}I_f$$

I_f je hodnota proudu ve fázích zdroje

Příklad VII-1: Symetrický spotřebič o impedanci jedné fáze $\boldsymbol{Z}$ = j50 Ω je zapojen do trojúhelníka a připojen na síť 230/400 V. Stanovte proudy $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3$.



Obr. 7.4

Řešení:

Pro smyčku s_1 platí :

$$-\boldsymbol{I}_U\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{U}_{UV} = 0$$

$$\boldsymbol{I}_U = \frac{\boldsymbol{U}_U - \boldsymbol{U}_V}{\boldsymbol{Z}} = \frac{230\angle 0^0 - 230\angle -120^0}{50\text{j}} = \frac{400\angle 30^0}{50\text{j}} = 8\angle -60^0$$

Pro smyčku s_2 platí:

$$\boldsymbol{I}_W\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{U}_{WU} = 0 \qquad \boldsymbol{I}_W = 8\angle 60^0$$

Pro uzel A platí :

$$-\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_U - \boldsymbol{I}_W = 0$$

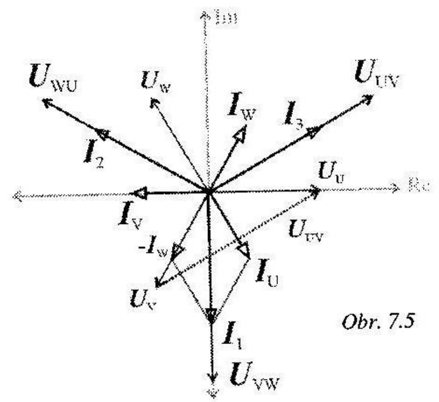
$$\boldsymbol{I}_1 = 8\angle -60^o - 8\angle 60^o = -\text{j}16\sin 60^o = -\text{j}8\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\angle -90^o \text{ A}$$

$$\boldsymbol{I}_2 = 8\sqrt{3}\angle 150^o \text{ A} \qquad \boldsymbol{I}_3 = 8\sqrt{3}\angle 30^o \text{ A}$$

V ***souměrné soustavě*** zpravidla počítáme pouze s velikostmi fázorů

$$I_f = \frac{U_s}{Z} = \frac{400}{50} = 8 \text{ A} \qquad I_s = \sqrt{3}I_f = 8\sqrt{3} \text{ A}$$

Pro určení fázového posunu je nutno stanovit pevnou polohu jednoho fázoru (např. U_U položíme do reálné osy), zbývající hodnoty odečteme z fázorového diagramu.

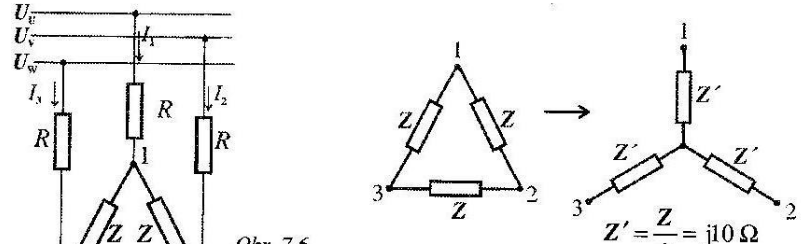


Obr. 7.5

Příklad VII-2: Symetrická zátěž o impedanci v jedné fázi $\mathbf{Z} = j30\ \Omega$ je zapojena do trojúhelníka, odpor přívodních vodičů je $R = 10\ \Omega$, vypočtěte proudy v přívodních vodičích, je-li sdružené napětí sítě 400 V.

Řešení:

Provedeme transfiguraci spotřebiče a vypočteme celkovou impedanci jedné fáze spotřebiče v zapojení do hvězdy



Obr. 7.6

$$Z' = \frac{Z}{3} = j10\ \Omega$$

Celková impedance je $\mathbf{Z}_1 = 10 + j10 = 10\sqrt{2}\angle 45°$

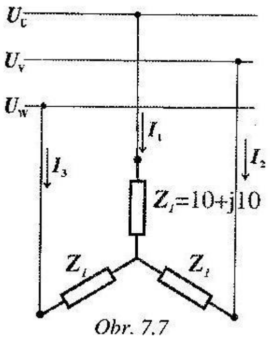
Vypočteme proud $\mathbf{I}_1$ ve fázi U a z něj pak proudy $\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3$

$$\mathbf{U}_1 = U_1\angle 0° = 230\angle 0°\ \text{V}$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{230\angle 0°}{10\sqrt{2}\angle 45°} = \frac{23}{\sqrt{2}}\angle -45°\ \text{A}$$

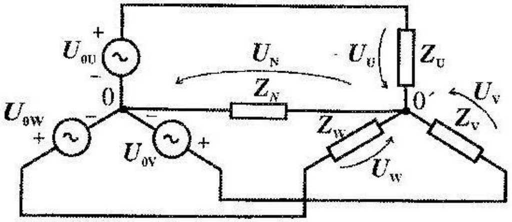
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1\angle -120° = \frac{23}{\sqrt{2}}\angle -165°\ \text{A}$$

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1\angle 120° = \frac{23}{\sqrt{2}}\angle 75°\ \text{A}$$



Obr. 7.7

Příklad VII-3: V nesouměrné trojfázové soustavě jsou dána fázová napětí zdroje $\mathbf{U}_{0U}$, $\mathbf{U}_{0V}$, $\mathbf{U}_{0W}$ a impedance spotřebiče $\mathbf{Z}_U$, $\mathbf{Z}_V$, $\mathbf{Z}_W$. Určete napětí mezi nulovým bodem zdroje a spotřebiče, je-li impedance nulového vodiče $\mathbf{Z}_N$.



Obr. 7.8

Řešení:

Použijeme metodu uzlových napětí, zvolíme jako uzlové napětí $\mathbf{U}_N$. Napětí na fázích spotřebiče pak vyjádříme :

$$\mathbf{U}_U = \mathbf{U}_{0U} - \mathbf{U}_N \qquad \mathbf{U}_V = \mathbf{U}_{0V} - \mathbf{U}_N \qquad \mathbf{U}_W = \mathbf{U}_{0W} - \mathbf{U}_N$$

Aplikací 1. Kirchhoffova zákona na uzel O´ dostaneme :

$$\frac{\mathbf{U}_{0U} - \mathbf{U}_N}{\mathbf{Z}_U} + \frac{\mathbf{U}_{0V} - \mathbf{U}_N}{\mathbf{Z}_V} + \frac{\mathbf{U}_{0W} - \mathbf{U}_N}{\mathbf{Z}_W} = \frac{\mathbf{U}_N}{\mathbf{Z}_N}$$

Vypočteme $\mathbf{U}_N$, impedanci nahradíme admitancí $\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$

$$\mathbf{U}_N = \frac{\mathbf{U}_{0U}\mathbf{Y}_U + \mathbf{U}_{0V}\mathbf{Y}_V + \mathbf{U}_{0W}\mathbf{Y}_W}{\mathbf{Y}_U + \mathbf{Y}_V + \mathbf{Y}_W + \mathbf{Y}_N} \qquad (7.5)$$

Fázové proudy vypočteme z fázových napětí:

$$\mathbf{I}_U = \frac{\mathbf{U}_U}{\mathbf{Z}_U} = \frac{\mathbf{U}_{0U} - \mathbf{U}_N}{\mathbf{Z}_U} \qquad \mathbf{I}_V = \frac{\mathbf{U}_{0V} - \mathbf{U}_N}{\mathbf{Z}_V} \qquad \mathbf{I}_W = \frac{\mathbf{U}_{0W} - \mathbf{U}_N}{\mathbf{Z}_W}$$

Pro proud v nulovém vodiči platí: $\mathbf{I}_N = \frac{\mathbf{U}_N}{\mathbf{Z}_N} = \mathbf{I}_U + \mathbf{I}_V + \mathbf{I}_W$

Z rov.(7.5) ***pro napětí $\mathbf{U}_N$*** plyne:

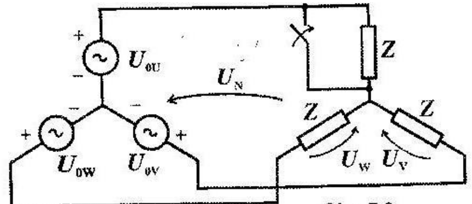
1. V soustavě *symetrický zdroj – symetrická zátěž* je $\mathbf{U}_N = 0$, napětí na fázích spotřebiče je rovno napětí zdroje $\mathbf{U}_U = \mathbf{U}_{0U}$, ***obvod řešíme jako jednofázový***.
2. V *nesymetrické soustavě* závisí velikost $\mathbf{U}_N$ na způsobu propojení nulového bodu zdroje a spotřebiče.
   a) $\mathbf{Z}_N = 0$ (dokonalý vodič $\mathbf{Y}_N \to \infty$), $\mathbf{U}_N = 0$, na fázích spotřebiče je napětí zdroje, proud $\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_U + \mathbf{I}_V + \mathbf{I}_W$
   b) $\mathbf{Z}_N \neq 0$ (viz řešení ***příkladu VII-3***)
   c) $\mathbf{Z}_N \to \infty$ (nulový vodič není vyveden nebo došlo k jeho přerušení), $\mathbf{U}_N$ je maximální, vliv nesymetrie se projeví nejvýrazněji

Příklad VII-4: V souměrné trojfázové soustavě v zapojení hvězda-hvězda vznikne na fázi U zkrat (jednopólové zemní spojení), stanovte napětí na fázích spotřebiče a nakreslete fázorový diagram.

Řešení:

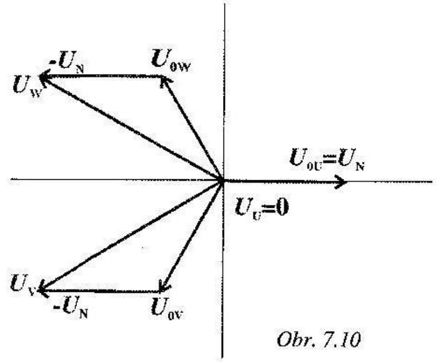
Jelikož není vyveden nulový vodič a fáze U je zkratována, platí

$$\mathbf{Y}_U \to \infty, \quad \mathbf{Y}_N = 0, \quad \mathbf{U}_U = 0$$



Obr. 7.9

Z rov.(7.5) vypočteme U_N a poté určíme napětí na fázích V a W



Obr. 7.10

$$\mathbf{U}_N = \mathbf{U}_{0U} = U_f\angle 0^\circ$$
$$\mathbf{U}_V + \mathbf{U}_N = \mathbf{U}_{0V}$$
$$\mathbf{U}_V = U_f\angle -120^\circ - U_f\angle 0^\circ$$

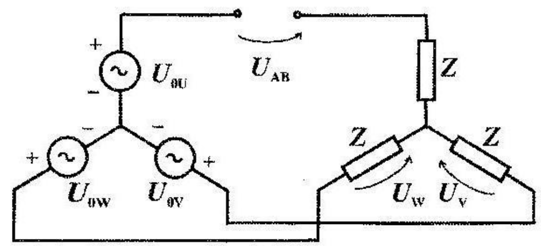
odtud $\mathbf{U}_V = \sqrt{3}U_f\angle -150^\circ$,

podobně $\mathbf{U}_W = \sqrt{3}U_f\angle 150^\circ$

Z fázorového diagramu (obr.7.10) je patrné, že na nepostižených fázích je napětí sdružené.

Příklad VII-5 **:** V souměrné trojfázové soustavě dojde k přerušení fáze U, stanovte napětí na fázích spotřebiče a napětí na přerušení $\mathbf{U}_{AB}$. Nakreslete fázorový diagram.

Obr. 7.11

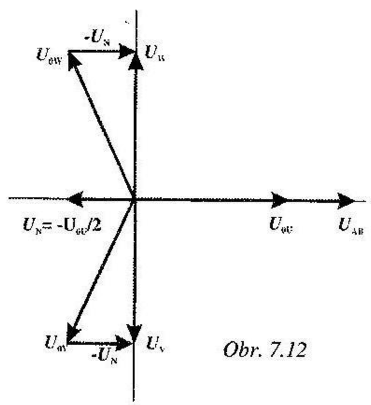


Řešení:

Vypočteme napětí U_N ze vztahu (7.5) s přihlédnutím k $\mathbf{Y}_U = 0$, $\mathbf{Y}_N = 0$ a dostaneme

$$\mathbf{U}_N = \frac{\mathbf{U}_{0V}\mathbf{Y}_V + \mathbf{U}_{0W}\mathbf{Y}_W}{\mathbf{Y}_V + \mathbf{Y}_W} =$$
$$= \frac{\mathbf{U}_{0V} + \mathbf{U}_{0W}}{2} = -\frac{\mathbf{U}_{0U}}{2}$$

Z napětí $\mathbf{U}_N$ vypočteme fázová napětí $\mathbf{U}_V$, $\mathbf{U}_W$ a napětí na přerušené fázi $\mathbf{U}_{AB}$



Obr. 7.12

$$\mathbf{U}_V = \mathbf{U}_{0V} - \mathbf{U}_N = \mathbf{U}_{0U}\angle -120^\circ + \frac{\mathbf{U}_{0U}}{2} = \mathbf{U}_{0U}\frac{\sqrt{3}}{2}\angle -90^\circ$$
$$\mathbf{U}_W = \mathbf{U}_{0W} - \mathbf{U}_N = \mathbf{U}_{0U}\angle +120^\circ + \frac{\mathbf{U}_{0U}}{2} = \mathbf{U}_{0U}\frac{\sqrt{3}}{2}\angle 90^\circ$$
$$\mathbf{U}_{AB} = \mathbf{U}_{0U} - \mathbf{U}_N = \frac{3}{2}\mathbf{U}_{0U}$$

7.2. VÝKONY V TROJFÁZOVÉ SOUSTAVĚ

***Nesouměrná trojfázová soustava*:** činný, jalový i zdánlivý výkon je dán součtem výkonů ve všech fázích

$$P = U_U I_U \cos\varphi_U + U_V I_V \cos\varphi_V + U_W I_W \cos\varphi_W$$
$$Q = U_U I_U \sin\varphi_U + U_V I_V \sin\varphi_V + U_W I_W \sin\varphi_W \qquad (7.6)$$
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

***Souměrná trojfázová soustava*:** výkony lze počítat buď *z hodnot fázových napětí a proudů* (U_f, I_f) nebo *z hodnot sdružených (změřených ve vodičích sítě)*, **úhel φ** vyjadřuje fázový posun mezi U_f a I_f **a závisí na impedanci zátěže**

$$P = 3U_f I_f \cos\varphi = \sqrt{3}\, U\, I \cos\varphi \qquad Q = 3U_f I_f \sin\varphi = \sqrt{3}\, U\, I \sin\varphi$$
$$S = 3U_f I_f = \sqrt{3}\, U\, I \qquad (7.7)$$

- spotřebič zapojený do hvězdy: $U = \sqrt{3}\, U_f$, $I = I_f$
- spotřebič zapojený do trojúhelníka: $I = \sqrt{3}\, I_f$, $U = U_f$

Příklad VII-6 **:** Symetrický spotřebič má impedanci jedné fáze $\mathbf{Z} = 50\angle 60^\circ\,\Omega$ a je připojen k symetrické trojfázové soustavě napětí s efektivní hodnotou fázového napětí U_f = 500V. Vypočtěte velikost fázového proudu, proudu sdruženého a odebíraný činný výkon pro zapojení spotřebiče:
a) do hvězdy, b) do trojúhelníka

Řešení:

a) zapojení do hvězdy

$$I = I_f = \frac{U_f}{Z} = 10\,\text{A}, \qquad P = 3U_f I_f \cos\varphi = 3.500.10.\cos 60^\circ = 7500\,\text{W}$$

b) zapojení do trojúhelníka

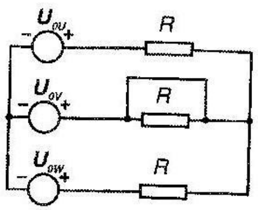
$$I_f = \frac{\sqrt{3}U_f}{Z} = 17{,}32\,\text{A} \qquad I = \sqrt{3}I_f = 30\,\text{A}$$

Činný výkon je $P = \sqrt{3}UI\cos\varphi = \sqrt{3}.\sqrt{3}.500.30.\cos 60^\circ = 22500\,\text{W}$

Při zapojení do trojúhelníka je fázový proud $\sqrt{3}$-krát větší, sdružený proud a činný výkon je větší 3-krát, (využívá se při rozběhu asynchronních motorů, přepnutím vinutí z hvězdy na trojúhelník se postupně zvyšuje odebíraný proud i výkon).

7.3. PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

7.1 Trojfázový symetrický zdroj napětí (U_{0U} = 230 V) napájí souměrnou zátěž tvořenou rezistory R = 100 Ω. Určete napětí mezi nulovými body U_N a napětí na fázích spotřebiče, dojde-li ke zkratu ve fázi V.



$$\boldsymbol{U}_N = \boldsymbol{U}_{0V} = 230\angle -120^\circ \text{ V}$$
$$\boldsymbol{U}_U = 230\sqrt{3}\angle 30^\circ \text{ V}$$
$$\boldsymbol{U}_W = 230\sqrt{3}\angle 90^\circ \text{ V}$$

7.2 Symetrický spotřebič zapojený do hvězdy odebírá ze symetrického zdroje napětí celkový zdánlivý výkon 40 kVA při účiníku cos φ = 0,9 (efektivní hodnota sdruženého napětí je 480 V). Stanovte impedanci spotřebiče v každé fázi a vypočtěte fázory proudu v každé fázi.

$\boldsymbol{Z} = 5{,}76\angle 25{,}84^\circ$ Ω, $\boldsymbol{I}_U = 48{,}113\angle -25{,}84^\circ$ A
$\boldsymbol{I}_V = 48{,}113\angle -145{,}84^\circ$ A, $\boldsymbol{I}_W = 48{,}113\angle 94{,}16^\circ$ A

7.3 Symetrický spotřebič v zapojení do hvězdy odebírá ze sítě 230/400V celkový činný výkon P = 4,5 kW a jalový výkon Q = 3 kVAr. Vypočtěte impedanci spotřebiče v jedné fázi.

$$\boldsymbol{Z} = 29{,}34\angle 33{,}69^\circ \ \Omega$$

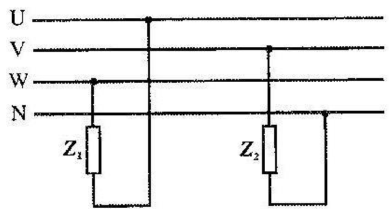
7.4 Symetrický spotřebič v zapojení do trojúhelníka odebírá ze sítě celkový činný výkon P = 4,5 kW, zdánlivý výkon je S = 6 kVA, efektivní hodnota sdruženého napětí je 500 V. Vypočtěte impedanci spotřebiče v jedné fázi.

$$\boldsymbol{Z} = 125\angle 41{,}41^\circ \ \Omega$$

7.5 Symetrický spotřebič má v každé fázi zapojen rezistor R = 20 Ω a je připojen k symetrické trojfázově soustavě napětí s efektivní hodnotou sdruženého napětí U_S = 400 V. Vypočtěte velikost I_S, I_f a odebíraný činný výkon, je-li spotřebič zapojen: a) do hvězdy, b) do trojúhelníka.

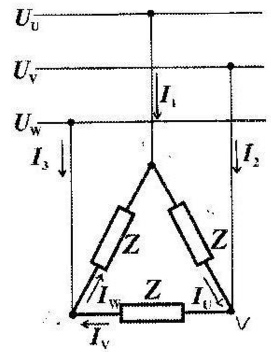
a) $I_f = I_s = 11{,}55$ A, $P = 8$ kW
b) $I_f = 20$ A, $I_s = 34{,}64$ A, $P = 24$ kW

7.6 Vypočtěte činný a jalový výkon odebíraný z trojfázové sítě 230/400V, jsou dány impedance $\boldsymbol{Z}_1 = 50 - j70$ Ω, $\boldsymbol{Z}_2 = 50 + j45$ Ω.



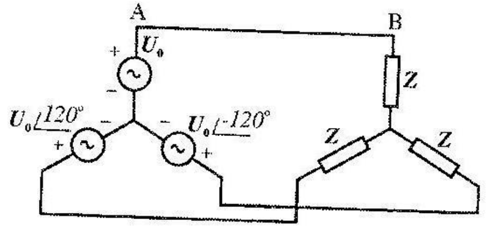
$P = 1666$ W
$Q = -987$ VAr

7.7 V symetrické trojfázové soustavě je impedance jedné fáze $\boldsymbol{Z}$ = 40+30j Ω (zapojení do trojúhelníka), sdružené napětí je U = 2400 V (efektivní hodnota). Určete:
a) proudy ve fázích spotřebiče
b) sdružené proudy (proudy v síťových vodičích)
c) činný a jalový výkon dodaný do zátěže



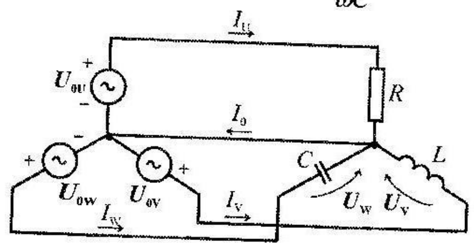
a) $\boldsymbol{I}_U = 48\angle -6{,}87^\circ$ A,
$\boldsymbol{I}_V = 48\angle -126{,}87^\circ$ A,
$\boldsymbol{I}_W = 48\angle 113{,}13^\circ$ A,
b) $\boldsymbol{I}_1 = 83{,}14\angle -36{,}88^\circ$ A,
$\boldsymbol{I}_2 = 83{,}14\angle -156{,}87^\circ$ A,
$\boldsymbol{I}_3 = 83{,}14\angle 83{,}13^\circ$ A
c) $P = 276{,}48$ kW, $Q = 207{,}36$ kVAr

7.8 Symetrický trojfázový zdroj napětí (230/400V) zapojený do hvězdy napájí souměrný spotřebič o impedanci $\mathbf{Z} = 20\angle 60^\circ\ \Omega$ zapojený do hvězdy (nuly zdroje a spotřebiče nejsou propojeny, $Y_N = 0$). Vypočtěte proudy ve fázích spotřebiče a jeho příkon.



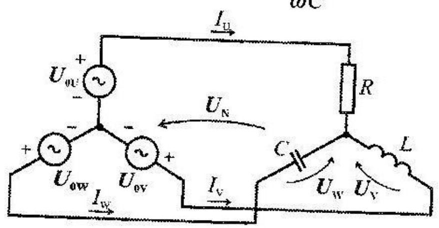
$P = 3967{,}5\ \text{W}$,
$\mathbf{I}_U = 11{,}5\angle -60^\circ\ \text{A}$
$\mathbf{I}_V = 11{,}5\angle -180^\circ\ \text{A}$,
$\mathbf{I}_W = 11{,}5\angle 60^\circ\ \text{A}$

7.9 Je dána souměrná trojfázová soustava o fázovém napětí $U_f = 230$ V (fázor efektivní hodnoty). Stanovte proud I_0 a celkový činný výkon dodaný zátěži. Pro danou zátěž platí: $R = \omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 200\ \Omega$



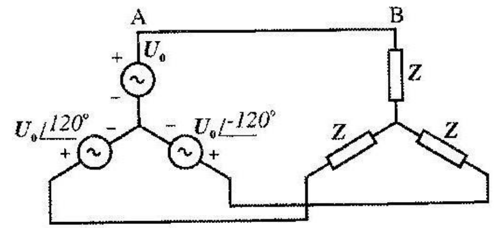
$I_0 = -0{,}842\ \text{A}$,
$P = 264{,}5\ \text{W}$

7.10 Je dána souměrná trojfázová soustava napětí o $U_f = 230$ V (efektivní hodnota). Stanovte napětí U_N a celkový činný výkon dodaný zátěži. Pro danou zátěž platí: $R = \omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 200\ \Omega$



$U_N = -168{,}36\ \text{V}$, $P = 792{,}02\ \text{W}$

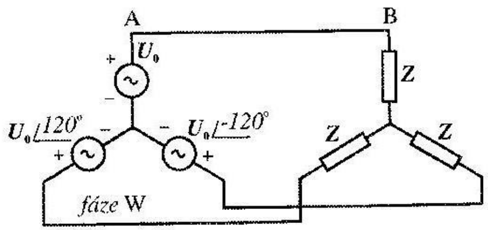
7.11 Symetrický trojfázový zdroj napětí se sdruženým napětím 500V zapojený do hvězdy napájí souměrný spotřebič o impedanci $\mathbf{Z} = 50\angle -30^\circ\ \Omega$ zapojený do hvězdy (nuly zdroje a spotřebiče nejsou propojeny, $Y_N = 0$). Vypočtěte proudy ve fázích spotřebiče a jeho jalový výkon.



$Q = 2498{,}48\ \text{VAr}$,
$\mathbf{I}_U = 5{,}77\angle 30^\circ\ \text{A}$,
$\mathbf{I}_V = 5{,}77\angle -90^\circ\ \text{A}$,
$\mathbf{I}_W = 5{,}77\angle 150^\circ\ \text{A}$

7.12 Symetrický trojfázový zdroj (230/400V) zapojený do hvězdy napájí souměrný spotřebič o impedanci $\mathbf{Z} = 10\angle 30^\circ\ \Omega$ zapojený do hvězdy (nuly zdroje a spotřebiče nejsou propojeny $Y_N = 0$). Na straně zdroje dojde ke zkratu ve fázi W.

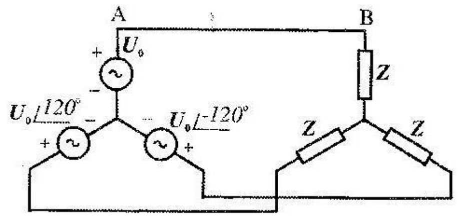
a) Určete hodnotu proudu ve fázi W před poruchou a porovnejte ji s proudem v této fázi po poruše.
b) Vypočtěte příkon spotřebiče před a po poruše.



a) $\mathbf{I}_W = 23\angle 90^\circ\ \text{A}$, po poruše $\mathbf{I}_W = 7{,}67\angle 90^\circ\ \text{A}$
b) $P = 13744\ \text{W}$, po poruše $P = 7636\ \text{W}$

7.13 Symetrický trojfázový zdroj (230/400V) zapojený do hvězdy napájí souměrný spotřebič o impedanci $\mathbf{Z} = 20\angle 45^\circ\ \Omega$ zapojený do hvězdy (nuly zdroje a spotřebiče nejsou propojeny, $Y_N = 0$). Na vedení vznikne porucha (vodič mezi body A a B je přerušen).

a) Určete proudy ve fázích spotřebiče před poruchou a po poruše.
b) Vypočtěte příkon spotřebiče před a po poruše.

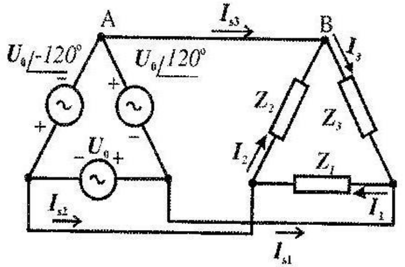


a) $I_U = 11{,}5\angle -45^0$ A,
$I_V = 11{,}5\angle -165^0$ A,
$I_W = 11{,}5\angle 75^0$ A
po poruše $I_V = 9{,}96\angle -135^0$ A,
$I_W = 9{,}96\angle 45^0$ A,
b) před poruchou $P = 5611$ W,
po poruše $P = 2806$ W

7.14 Symetrický trojfázový zdroj zapojený do trojúhelníka (efektivní hodnota U_0 = 400 V) napájí nesymetrický spotřebič zapojený do trojúhelníka s impedancemi $\mathbf{Z}_1 = 10\angle 30°\ \Omega$, $\mathbf{Z}_2 = 10\angle -30°\ \Omega$, $\mathbf{Z}_3 = 20\angle 60°\ \Omega$.

a) Určete proudy ve fázích spotřebiče a v přívodních vodičích.

b) Vypočtěte příkon spotřebiče.



a) $I_1 = 40\angle -30°$ A, $I_2 = 40\angle -90°$ A,
$I_3 = 20\angle 60°$ A,
$I_{s1} = 44{,}72\angle -56{,}57°$ A, $I_{s2} = 40\angle -150°$ A,
$I_{s3} = 58{,}19\angle 80{,}1°$ A
b) $P = 31712$ W

8. PŘECHODNÉ JEVY

8.1 ZÁKLADNÍ VZTAHY

Přechodný děj nastává v elektrickém obvodu při změně jeho topologické nebo fyzikální struktury; tedy při připojení, zkratování nebo rozpojení větve nebo části obvodu, případně při připojení či odpojení zdroje nebo zátěže. Přechodný děj vznikne pouze v obvodu, který obsahuje tzv. akumulační prvky, tj. kapacitory a induktory, které mohou akumulovat energii elektrického nebo magnetického pole

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 \qquad W_C = \frac{1}{2} C u_C^2 \qquad (8.1)$$

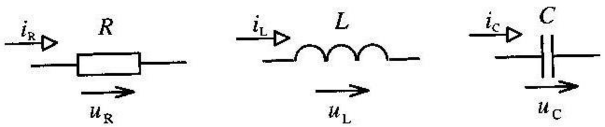
Proud induktorem a napětí na kapacitoru jsou ***stavovými veličinami*** (jsou mírou akumulované energie) a při přechodném ději ***se mění spojitě*** (na rozdíl od ostatních větvových veličin, které se mohou měnit nespojitě). Nastane-li přechodný děj v okamžiku $t = t_0$, pak pro stavové veličiny platí

$$\lim_{t\to t_0-} i_L(t) = \lim_{t\to t_0+} i_L(t) = \lim_{t\to t_0} i_L(t); \quad \lim_{t\to t_0-} u_C(t) = \lim_{t\to t_0+} u_C(t) = \lim_{t\to t_0} u_C(t) \qquad (8.2)$$

stručně zapsáno $i_L(t_0-) = i_L(t_0+) = i_L(t_0)$; $u_C(t_0-) = u_C(t_0+) = u_C(t_0)$

Zpravidla předpokládáme, že počátek přechodného děje je v čase $t_0 = 0$.

Pro analýzu přechodného děje v obvodu formulujeme rovnice pro okamžité hodnoty napětí a proudů nebo pro jejich Laplaceovy obrazy. Základní vztahy mezi napětími a proudy na pasivních lineárních prvcích obvodu jsou v tab. 8.1.



Tab.8.1

pro okamžité hodnoty	Laplaceovy obrazy
$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$U_R(p) = R \cdot I_R(p)$
$u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$	$U_L(p) = pLI_L(p) - L\,i(0)$
$i_C(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$	$I_C(p) = pCU_C(p) - Cu_C(0)$
$i_L(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^t u(\xi)\mathrm{d}\xi + i_L(0)$	$I_L(p) = \dfrac{1}{pL}U_L(p) + \dfrac{i_L(0)}{p}$
$u_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi + u_C(0)$	$U_C(p) = \dfrac{1}{pC}I_C(p) + \dfrac{u_C(0)}{p}$

V průběhu přechodného děje se větvové veličiny mění v závislosti na předchozím (původním) a následném (novém) ustáleném stavu. Předchozí ustálený stav zohledňujeme při analýze obvodu formulací *počátečních podmínek* udávajících hodnoty větvových veličin v čase t_{0+}. Hodnoty větvových veličin po skončení přechodného děje, tj. v *novém ustáleném stavu* značíme následovně

$$\lim_{t\to\infty} u(t)=u(\infty); \qquad \lim_{t\to\infty} i(t)=i(\infty)$$

Přechodné děje dělíme na:

- přechodné děje v obvodu 1. řádu
- přechodné děje v obvodech 2. a vyššího řádu

Řád obvodu n závisí na počtu akumulačních prvků v obvodu. *V obvodech 1.řádu mají odezvy vždy exponenciální charakter*, v obvodech 2. a vyššího řádu může nastat *přechodný děj aperiodický, na mezi periodicity a kmitavý.*

Rovnice pro analýzu obvodu v přechodném stavu formulujeme:

- pro okamžité hodnoty napětí a proudů (*analýza obvodu v časové oblasti*), dostaneme jednu diferenciální rovnici n-tého řádu nebo soustavu n diferenciálních rovnic prvého řádu
- pro Laplaceovy obrazy napětí a proudů (*operátorová metoda – analýza obvodu ve frekvenční oblasti*), dostaneme soustavu algebraických rovnic, okamžité hodnoty získáme po provedení zpětné Laplaceovy transformace.

Analýza obvodu v časové oblasti sestává z následujících kroků:

1. formulace diferenciálních rovnic
2. určení počátečních podmínek
3. nalezení obecného řešení homogenní rovnice
4. výpočet partikulárního řešení (v lineárních obvodech se stejnosměrnými nebo harmonickými zdroji lze nahradit řešením nového ustáleného stavu)
5. výpočet integračních konstant
6. určení dalších požadovaných veličin

Analýza obvodu operátorovou metodou sestává z následujících kroků:

1. formulace diferenciálních rovnic pro okamžité hodnoty včetně určení počátečních podmínek
2. formulace rovnic pro Laplaceovy obrazy
3. nalezení Laplaceova obrazu hledané veličiny
4. zpětná Laplaceova transformace – nalezení okamžitých hodnot hledaných veličin
5. určení dalších požadovaných veličin

Pro přechodný děj s *nulovými počátečními podmínkami* jsou vztahy mezi Laplaceovými obrazy napětí a proudu analogické rovnicím platícím pro fázory – viz tab, . 8.1. Rovnice obvodu lze pak formulovat přímo pro Laplaceovy obrazy. Podíl Laplaceova obrazu napětí a proudu nazýváme **obrazovou impedancí,** pracujeme s ní analogicky jako s komplexní impedancí.

$$Z(p)=\frac{U(p)}{I(p)} \qquad (8.3)$$

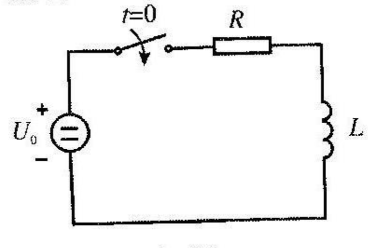
prvek	obrazová impedance
rezistor	R
induktor	pL
kapacitor	$1/pC$

Tab. 8.1

Poznámka:

1. *Počáteční podmínky a hodnoty větvových veličin v novém ustáleném stavu lze zjistit z fyzikálního rozboru daného elektrického obvodu, v příkladové části jsou uvedeny mnohé příklady, na kterých si lze tyto znalosti osvojit.*
2. *Spínače jsou považovány za ideální, spínají-li například v okamžiku $t = t_0$, pak jsou v čase $t = t_0$ - ještě v původní (nakreslené) poloze a v čase $t = t_0+$ v nové poloze. Rozepnutý spínač má mezi kontakty nulovou vodivost, sepnutý pak nekonečně velkou vodivost.*
3. *V celé kapitole předpokládáme, že **před vznikem přechodného jevu byl obvod v ustáleném stavu**, pokud výslovně není uvedeno jinak. Není-li zadáno napětí kapacitoru, předpokládáme, že v počátku přechodného děje nebyl nabit.*

Příklad VIII-1: Vyšetřete časový průběh proudu a napětí na induktoru v obvodu dle obr.8.1.



Obr. 8.1

Řešení:

Formulujeme rovnici pro napětí

$$Ri+L\frac{di}{dt}=U_0 \qquad (8.4)$$

počáteční podmínka: $i(0) = 0$,

nový ustálený stav: $i(\infty) = U_0/R$

Levá strana rov. (8.4) je homogenní rovnice, jejíž tvar závisí na konfiguraci obvodu. K homogenní rovnici sestavíme charakteristickou rovnici a určíme její kořen

$$R+L\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{R}{L} \qquad (8.5)$$

dále vypočteme časovou konstantu τ

$$\tau=-\frac{1}{\lambda}=\frac{L}{R} \qquad (8.6)$$

a určíme obecné řešení rov. (8.4)

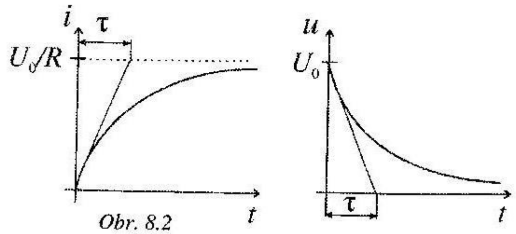
$$i=Ke^{-\frac{t}{\tau}}+i(\infty)=Ke^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{U_0}{R} \qquad (8.7)$$

Do rov. (8.7) dosadíme počáteční podmínku a vypočteme integrační konstantu K

$$0=K+\frac{U_0}{R} \quad\Rightarrow\quad K=-\frac{U_0}{R}$$

okamžitá hodnota proudu je $$i(t) = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

napětí na indukčnosti $$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\left(-\frac{U_0}{R}\right)\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Obr. 8.2

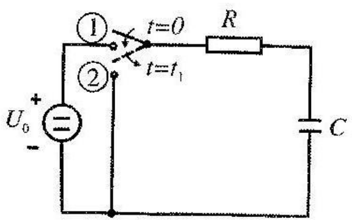
Na obr. 8.2. jsou nakresleny časové průběhy proudu a napětí na induktoru a je na nich vyznačena ***časová konstanta*** τ. Je určena bodem, ve kterém tečna k danému průběhu vedená z počátku protne ustálenou hodnotu. Ze vztahu pro napětí $u_L(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ plyne, že v čase $t = \tau$ je hodnota napětí $U_0 e^{-1} = 0{,}368 U_0$, v čase $t = 5\tau$ je $U_0 e^{-5} = 6{,}74.10^{-3} U_0$, proto je

doba 5τ považována za praktické ukončení přechodného děje.

Fyzikální význam časové konstanty:
Časová konstanta je významnou charakteristikou průběhu přechodného děje, udává čas, za který

- klesající okamžitá hodnota napětí resp. proudu poklesne na 1/e své původní hodnoty
- vzrůstající okamžitá hodnota dosáhne (1 – e^{-1}) = 0,632 násobek hodnoty ustálené
- čím menší je časová konstanta, tím rychleji přechodný děj probíhá

Příklad VIII-2: Vyšetřete časový průběh napětí a proudu na kapacitoru. V čase $t = 0$ dojde k sepnutí vypínače do polohy 1 (nabíjení kondensátoru), po ***odeznění přechodného děje*** v čase $t = t_1 = 5\tau$ přepne vypínač do polohy 2 (vybíjení kondenzátoru).



Obr. 8.3

Řešení:

a) nabíjení kondenzátoru *pro* $t \in \langle 0, t_1 \rangle$:

Formulujeme rovnici pro napětí

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_0 \qquad (8.8)$$

počáteční podmínka: $u_C(0) = 0$,

nový ustálený stav: $u(\infty) = U_0$

charakteristická rovnice je $RC\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{RC}$

vypočteme časovou konstantu $\tau = -\frac{1}{\lambda} = RC$

obecné řešení rov. (8.8) je $u_C(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + u(\infty) = K e^{-\frac{t}{\tau}} + U_0$

po dosazení počáteční podmínky určíme integrační konstantu $K = -U_0$

okamžitá hodnota napětí je $u_c(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

okamžitá hodnota proudu je $i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = CU_0\left(\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

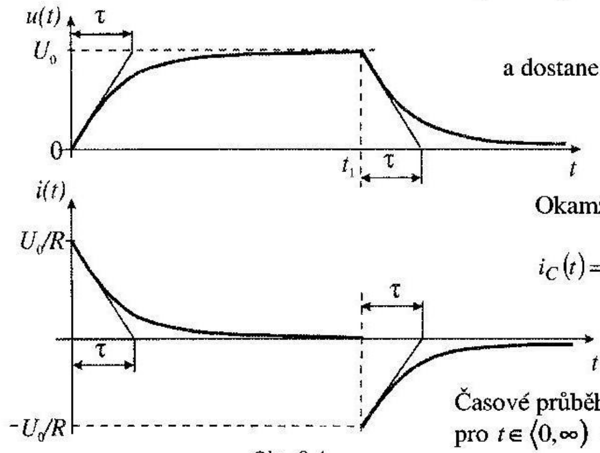
b) vybíjení kondenzátoru *pro* $t \in \langle t_1, \infty)$:

rovnice pro napětí je $$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \qquad (8.9)$$

Jelikož homogenní rovnice pro rov. (8.8) a (8.9) jsou stejné, je formálně shodné i jejich obecné řešení, nyní je však začátek přechodného děje v čase t_1,

proto obecné řešení zapíšeme ve tvaru $u_C(t) = K_1 e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$.

Pomocí počáteční podmínky $u_C(t_1) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) \cong U_0$, určíme $K_1 = U_0$



Obr. 8.4

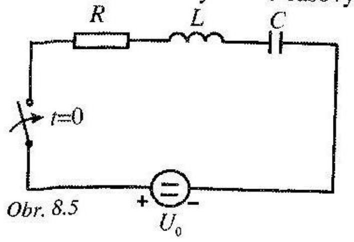
a dostaneme $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$

Okamžitá hodnota proudu je

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

Časové průběhy napětí a proudu jsou pro $t \in \langle 0, \infty)$ na obr. 8.4.

Příklad VIII-3: Vyšetřete časový průběh proudu v obvodu RLC dle obr. 8.5



Obr. 8.5

Řešení:

Formulujeme rovnici pro napětí

$$u_R + u_L + u_C = U_0$$

Napětí na R a L vyjádříme pomocí proudu

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C = U_0 \qquad (8.10)$$

Zderivujeme rov. (8.10), dosadíme $\frac{i}{C} = \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ a dostaneme

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0$$

Vypočteme kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{D} = -\beta \pm \alpha$$

obecné řešení pro proud je

$$i(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (8.11)$$

Podle hodnoty diskriminantu se liší typ kořenů charakteristické rovnice a také charakter přechodného děje, platí:

diskriminant	kořeny λ_1, λ_2	charakter přechodného děje
D ≥ 0 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \geq \frac{1}{LC}$	reálné různé	aperiodický
D = 0 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$	reálné, násobné	na mezi aperiodicity
D ≤ 0 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$	komplexně sdružené	kmitavý (kvaziperiodický)

Integrační konstanty K_1 a K_2 v rov. (8.11) určíme

z matematických počátečních podmínek, tj. z hodnot $i(0)$ a $\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t\to 0+}$

Snadno formulujeme

fyzikální počáteční podmínky $u_L(0) = U_0$, $i(0) = 0$

z nich vypočteme požadované *počáteční podmínky matematické*

$$i(0) = 0, \quad u_L(0_+) = U_0 = L\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t\to 0+} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t\to 0+} = \frac{U_0}{L}$$

Integrační konstanty K_1 a K_2 v rov. (8.11) určíme pomocí počátečních podmínek a s přihlédnutím k charakteru kořenů charakteristické rovnice:

a) ***přechodný děj aperiodický*** $D > 0$

Z rov. (8.11) vypočteme $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, dosadíme počáteční podmínky a vypočteme integrační konstanty K_1 a K_2

$$i(0) = K_1 + K_2 = 0$$

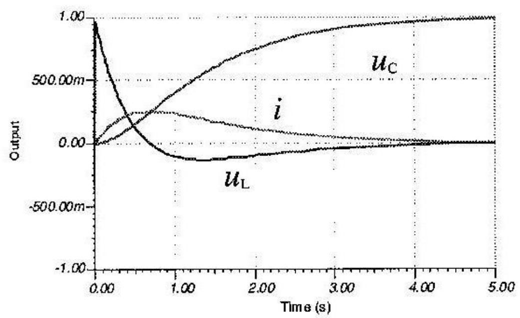
$$\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = K_1\lambda_1 + K_2\lambda_2 = \frac{U_0}{L} \quad \Rightarrow \quad K_1 = -K_2 = -\frac{U_0}{2\alpha L} = -I_0$$

Konstanty K_1 a K_2 dosadíme do rov. (8.11) a dostaneme

$$i(t) = -I_0 e^{\frac{t}{\tau_1}} + I_0 e^{\frac{t}{\tau_2}} = i_1 + i_2,$$

kde $\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\beta + \alpha}$, $\tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\beta - \alpha}$

Ze vztahů pro napětí $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ a $u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t$ lze určit jejich časové průběhy – obr. 8.6 a).



Přechodný děj aperiodický pro $U = 1$ V, $R = 3\ \Omega$, L = 1H, $C = 500$ mF, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\tau_1 = 1$ s, $\tau_2 = 0{,}5$ s

Obr. 8.6a)

b) ***přechodný děj na mezi aperiodicity*** $D = 0$

kořeny charakteristické rovnice jsou násobné $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} = -\beta$

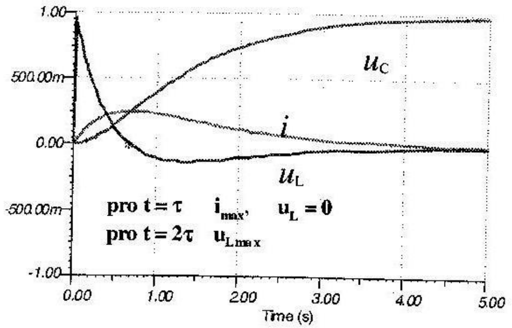
obecné řešení pro proud napíšeme ve tvaru

$$i(t) = K_1 e^{-\beta t} + K_2 t e^{-\beta t} \qquad (8.12)$$

kde $\tau = \frac{1}{\beta}$ je časová konstanta.

Integrační konstanty K_1, K_2 vypočteme po dosazení počátečních podmínek do rov. (8.12) a dostaneme $i(t)=\frac{U_0}{L}te^{-\beta t}$

Časový průběh proudu a napětí u_L a u_C je na obr. 8.6b)



Přechodný děj na mezi aperiodicity
$U = 1$ V, $R = 3\ \Omega$
L = 1H, $C = 4.$-45 mF

$\lambda_{1,2} = -1{,}5$, $\tau_{1,2} = 0{,}667$ s

Obr. 8.6b)

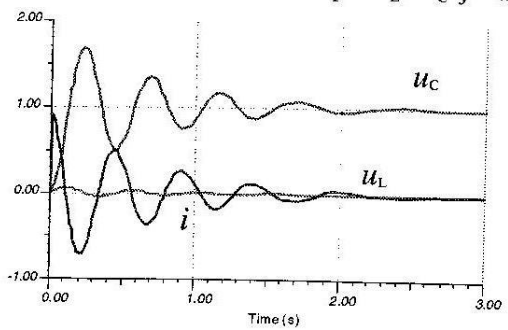
c) ***přechodný děj kmitavý*** $D < 0$

kořeny charakteristické rovnice jsou komplexně sdružené $\lambda_{1,2} = -\beta \pm j\alpha$.

Označíme $\alpha = \sqrt{\frac{1}{LC} - \beta^2} = \sqrt{\omega_r^2 - \beta}$, $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ je *rezonanční frekvence.*

Po dosazení počátečních podmínek do rov. (8.11) dostaneme řešení ve tvaru: $i(t)=\frac{U_0}{\alpha L}e^{-\beta t}\sin\alpha t = I_0 e^{-\beta t}\sin\alpha t$

Časové průběhu proudu a napětí u_L a u_C je na obr. 8.6c)



Přechodný děj kmitavý
$U = 1$ V, $R = 3\ \Omega$
L = 1H, $C = 50$ mF

$\lambda_{1,2} = -1{,}5 \pm$ **14,6 j,**
$\tau_{1,2} = 0{,}667$ s
ω_v= 14,6s^{-1} T = 0,43 s

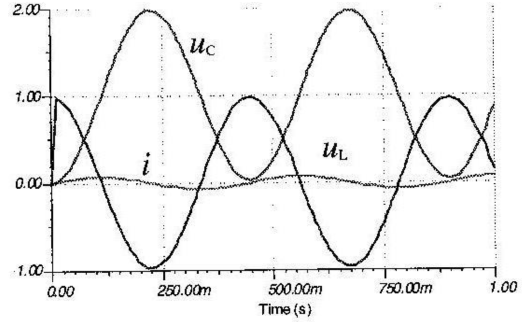
Obr. 8.6c)

Poznámka: *Jestliže se hodnota odporu zmenšuje, teoreticky na hodnotu R = 0, pak řešíme ideální oscilační obvod tvořený pouze prvky L a C, přičemž vzniká*

d) ***přechodný děj kmitavý netlumený:*** $D < 0$, R = 0, $\lambda_{1,2} = \pm j\alpha = \pm j\omega_r$,

řešení pro proud dostaneme ve tvaru $i(t)=\frac{U_0}{\alpha L}\sin\alpha t = I_0\sin\alpha t$,

pomocí něj pak lze vyjádřit i napětí u_L a u_C je na obr. 8.6d)

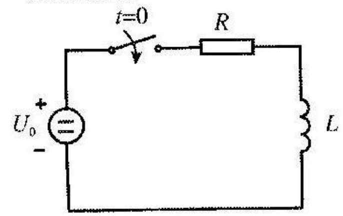


Přechodný děj kmitavý netlumený
$U = 1$ V, $R = 0\ \Omega$
L = 1H, $C = 5$ mF

$\lambda_{1,2} = \pm$ 14,6 j, $\tau_{1,2} = 0$
ω_v= 14,1s^{-1} T = 0,44 s

Obr. 8.6d)

Příklad VIII-4: Stanovte proudovou odezvu obvodu pomocí Laplaceovy transformace.



Obr. 8.7

Řešení:
Proud v obvodu v čase $t = 0$ je nulový, proto můžeme formulovat rovnici přímo pro Laplaceovy obrazy.
Obrazová impedance obvodu je

$$Z(p) = R + pL$$

Vypočteme Laplaceův obraz proudu:

$$I(p)=\frac{U(p)}{Z(p)}=\frac{\frac{U_0}{p}}{R+pL}=\frac{U_0}{p(R+pL)}=\frac{U_0}{L}\frac{1}{p(p+R/L)}$$

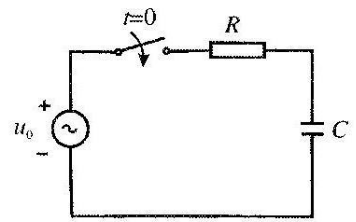
Zpětnou Laplaceovu transformaci provedeme pomocí slovníku Laplaceových obrazů. Platí:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p+a)(p+b)}\right]=\frac{1}{a-b}\left[e^{-bt}-e^{-at}\right]$$

V našem případě je $a = 0$, $b = R/L$, takže okamžitá hodnota proudu bude:

$$i(t)=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-t\frac{R}{L}}\right)$$

Příklad VIII-5: Vypočtěte časový průběh napětí na kapacitoru, který je v čase t = 0 připojen k harmonickému zdroji napětí $u_0(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ V.



Obr. 8.8

Řešení:
Pro obvod napíšeme diferenciální rovnici:

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_0 \qquad (8.13)$$

Počáteční podmínka: $u_C(0) = 0$,
Jelikož *nový ustálený stav je harmonický*, vypočteme hodnotu $u_C(\infty)$ pomocí SKM.

Impedance obvodu $\quad \boldsymbol{Z} = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \angle \arctan\frac{-1}{R\omega C} = Z\angle\psi$

$$U_{Cm} = \frac{U_m\angle\varphi}{Z\angle\psi}\frac{1}{\omega C}\angle -90^0 = \frac{U_m}{Z\omega C}\angle\varphi - \psi - 90^0 = U_{Cm}\angle\varphi - \psi - 90^0$$

Napětí $u_C(t)$ v novém ustáleném stavu je $\quad u_{Cp} = U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi - \psi - 90^0)$

obecné řešení rov.(8.13) je $\quad u_C(t) = K\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}} + U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi - \psi - 90^0)$

Po dosazení počáteční podmínky vypočteme integrační konstantu

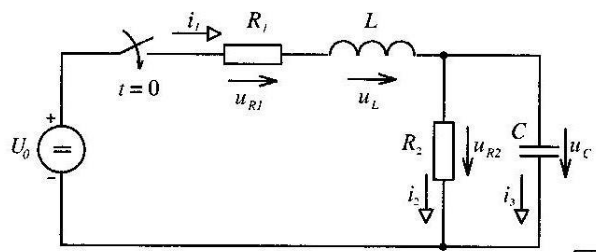
$$0 = K + U_{Cm}\cos(\varphi - \psi - 90^0) \;\Rightarrow\; K = -U_{Cm}\cos(\varphi - \psi - 90^0)$$

Časový průběh napětí na kondenzátoru

$$u_C(t) = -U_{Cm}\cos(\varphi - \psi - 90^0)\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}} + U_{Cm}\cos(\omega t + \varphi - \psi - 90^0)$$

8.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

8.1 Které veličiny obvodu se budou měnit spojitě?



$\boxed{\text{Všechny s vyjímkou } u_L}$

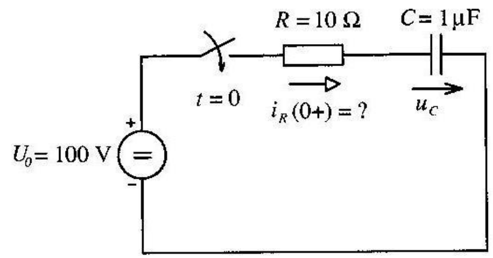
8.2 Stanovte hodnotu napětí na indukčnosti v př. 8.1 v okamžiku sepnutí spínače.

$\boxed{u_L(0+) = U_0}$

8.3 Stanovte hodnoty veličin v obvodu v př. 8.1 v ustáleném stavu (po odeznění přechodného děje).

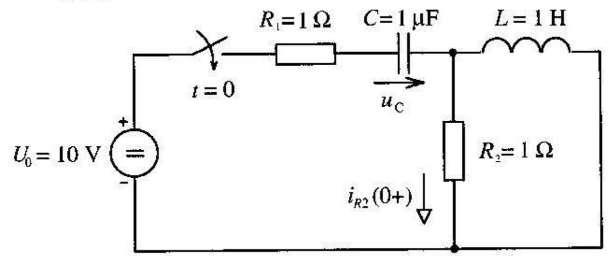
$$\boxed{\begin{aligned} &i_3(\infty) = 0;\, u_L(\infty) = 0;\, i_1(\infty) = i_2(\infty) = \frac{U_0}{R_1 + R_2};\; u_{R1}(\infty) = \\ &= R_1 i_1(\infty);\, u_{R2}(\infty) = R_2 i_2(\infty);\, u_C(\infty) = u_{R2}(\infty) = \frac{U_0}{R_1 + R_2}R_2 \end{aligned}}$$

8.4 Stanovte proud odporem v okamžiku zapnutí, jestliže $u_C(0) = 20$V.



$\boxed{i_R(0+) = 8\text{ A}}$

8.5 Určete proud tekoucí odporem R_2 v okamžiku zapnutí vypínače, jestliže $u_C(0) = 0$ V.

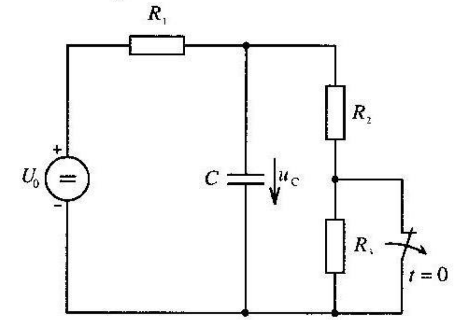


$\boxed{i_{R2}(0+) = 5\text{ A}}$

8.6 Řešte předchozí příklad pro $u_C(0) = 6$ V.

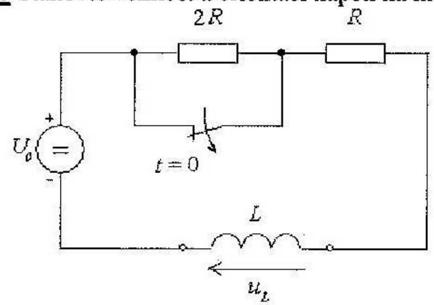
$\boxed{i_{R2}(0+) = 2\text{ A}}$

8.7 Stanovte napětí na kondenzátoru v čase t = 0 a v ustáleném stavu.



$$u_C(0)=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_0,$$
$$u_C(\infty)=\frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}U_0$$

8.8 Stanovte velikost a orientaci napětí na indukčnosti v čase t = 0+.

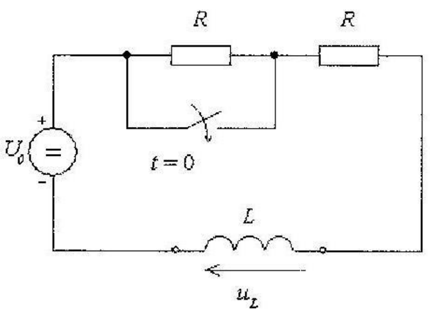


$$u_L(0+)=-2U_0$$

8.9 Vypočtěte časový průběh proudu a napětí na indukčnosti v př. 8.8.

$$i_L(t)=\frac{2U_0}{3R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\ u_L(t)=2U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \tau=\frac{L}{3R}$$

8.10 Stanovte velikost a orientaci napětí na indukčnosti v čase t = 0+.

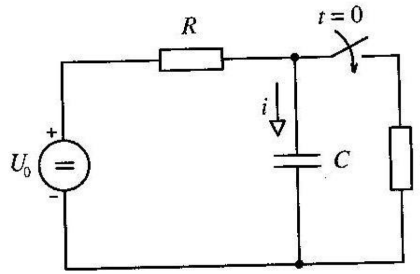


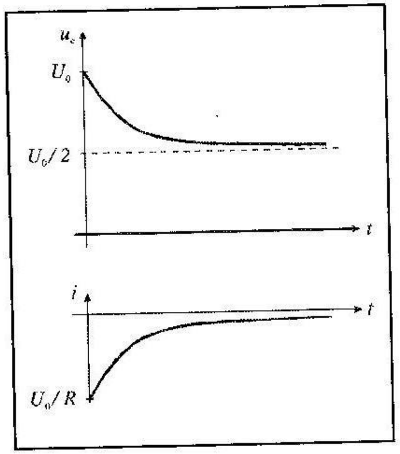
$$u_L(0+)=\frac{U_0}{2}$$

8.11 Vypočtěte časový průběh proudu a napětí na indukčnosti v př. 8.10.

$$i(t)=\frac{U_0}{2R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{U_0}{R},\ u(t)=\frac{U_0}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\ \tau=\frac{L}{R}$$

8.12 V obvodu dle obrázku určete hodnoty proudu i a napětí na kapacitoru v čase t=0-, t=0+ a $t\to\infty$. Zakreslete jejich časový průběh.





$$i(0-)=0,\ i(0+)=\frac{U_0}{R},$$
$$i(\infty)=0,\ u(0)=U_0,\ u(\infty)=\frac{U_0}{2}$$

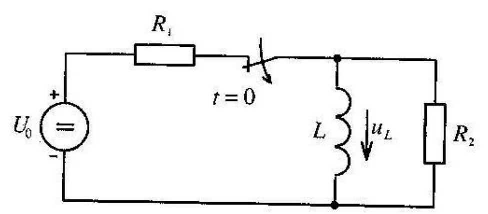
8.13 Formulujte rovnici pro výpočet napětí u_C z příkladu 8.12.

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{R}u_C=\frac{U_0}{R}$$

8.14 Řešením přechodného děje vypočtěte časový průběh napětí u_C z př.8.12.

$$u_C(t)=\frac{U_0}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ \tau=\frac{RC}{2}$$

8.15 Stanovte napětí indukčnosti $u_L(0+)$ v okamžiku rozpojení spínače, jestliže $R_1=60\,\Omega$, $R_2=10\,\mathrm{k\Omega}$, $U_0=12\,\mathrm{V}$.



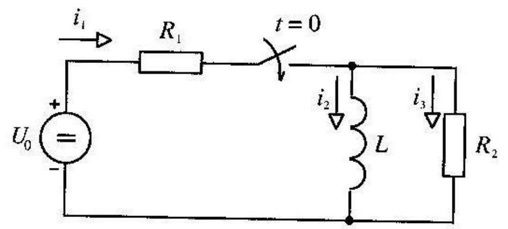
$$\boxed{u_L(0+) = -\frac{R_2}{R_1}U_0 = 2\,\text{kV}}$$

napětí má opačnou orientaci, než je uvedeno

8.16 Vypočtěte časový průběh proudu a napětí na indukčnosti v příkladu 8.15.

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R_1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}12\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\ u(t) = -U_0\frac{R_2}{R_1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = -12\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\ \tau = \frac{L}{R_2}}$$

8.17 Stanovte proudy v obvodu čase $t = 0+$ a v ustáleném stavu.



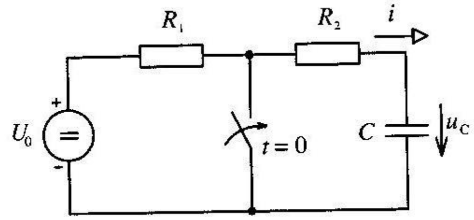
$t = 0+$: $i_2(0+) = 0$; $i_1(0+) = i_3(0+) = \dfrac{U_0}{R_1 + R_2}$

$t \to \infty$: $i_3(\infty) = 0$; $i_1(\infty) = i_2(\infty) = \dfrac{U_0}{R_1}$

8.18 Vypočtěte časový průběh proudu a napětí na indukčnosti v příkladu 8.17.

$$\boxed{i_2(t) = \frac{U_0}{R_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ u_2(t) = U_0\frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\ \tau = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}}$$

8.19 Určete hodnoty $u_C(0)$, $i(0-)$ a $i(0+)$.



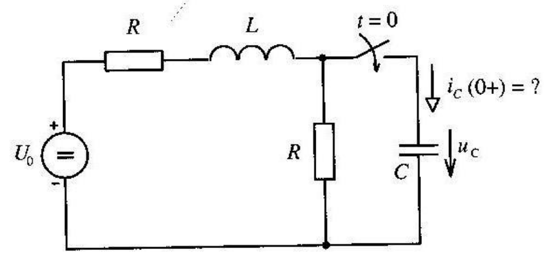
$u_C(0) = U_0$; $i(0-) = 0$; $i(0+) = -\dfrac{U_0}{R_2}$

(proud teče obráceně, než je naznačeno)

8.20 Vypočtěte časový průběh napětí a proudu na kapacitoru v příkladu 8.19.

$$\boxed{u_c(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\quad \tau = R_2 C}$$

8.21 Stanovte proud i_C v kondenzátoru v čase $t = 0+$, jestliže $U_0 = 100\,\text{V}$, $R = 25\,\Omega$, $u_C(0) = 0$.

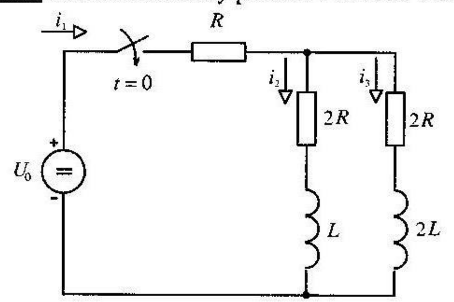


$$\boxed{i_C(0+) = 2\,\text{A}}$$

8.22 Řešte úlohu 8.21 pro $u_C(0) = 50\,\text{V}$.

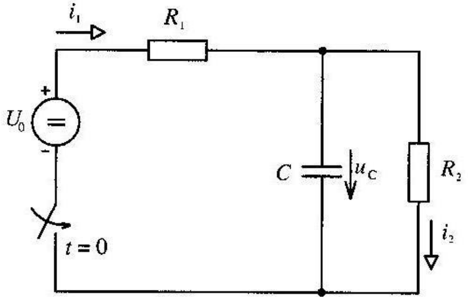
$$\boxed{i_C(0+) = 0,\ \text{k přechodnému ději nedojde}}$$

8.23 Stanovte hodnoty proudů v obvodu v čase t = 0+ a v ustáleném stavu.



$$i_1(0+) = i_2(0+) = i_3(0+) = 0$$
$$i_1(\infty) = \frac{U_0}{2R};\ i_2(\infty) = i_3(\infty) = \frac{U_0}{4R}$$

8.24 Stanovte proudy i_1, i_2 v okamžiku t = 0+ a v ustáleném stavu a dále napětí na kondenzátoru v ustáleném stavu.

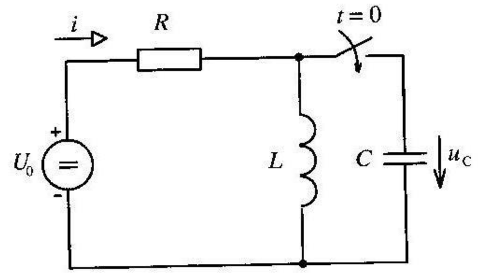


$$i_1(0+) = \frac{U_0}{R_1};\ i_2(0+) = 0;$$
$$i_1(\infty) = i_2(\infty) = \frac{U_0}{R_1 + R_2},\quad u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

8.25 Vypočtěte časový průběh napětí a proudu na kapacitoru v příkladu 8.24.

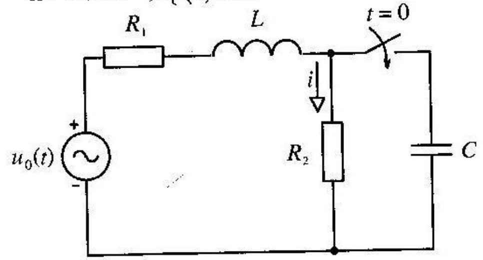
$$u_C(t) = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\quad i_C(t) = \frac{U_0}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}},\quad \tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

8.26 Stanovte proud i a napětí u_C na kondenzátoru v ustáleném stavu, jestliže: $U_0 = 100$ V, $R = 25\,\Omega$, $u_c(0) = 0$.



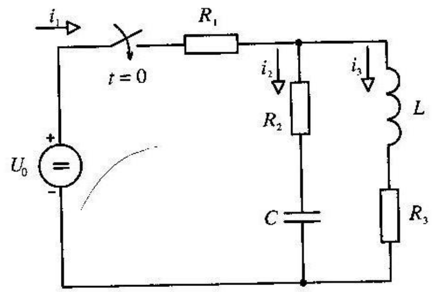
$i(\infty) = 4$ A, $u_C(\infty) = 0$,
k přechodnému ději nedojde

8.27 V obvodu podle obrázku stanovte proudy i a i_C v čase t = 0+, jestliže: $u_0(t) = 100\sin(\omega t + 90°)$ V, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $L = 50$ mH, $C = 50\,\mu$F, $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$, $u_C(0) = 0$.



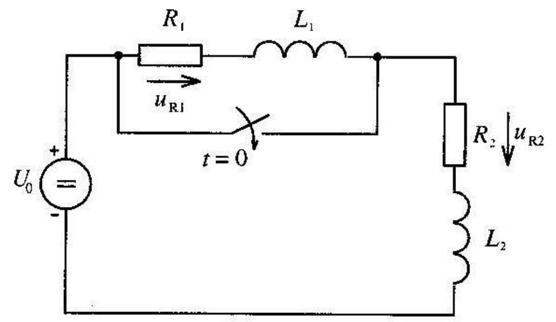
$i_C(0+) = 1{,}86\sin(\omega t + 21{,}8°) = 0{,}69$ A
$i(0+) = 0$

8.28 Stanovte hodnoty proudů v obvodu v čase t = 0+ a hodnotu napětí na kapacitoru u_C v ustáleném stavu.



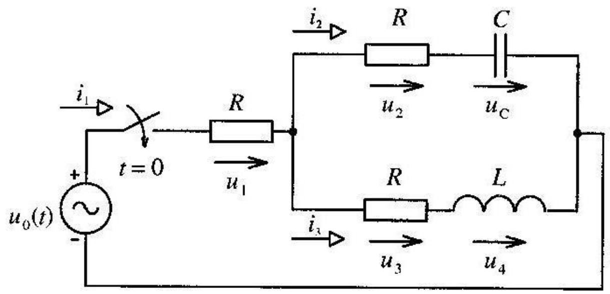
$i_3(0+) = 0,$
$i_1(0+) = i_2(0+) = \frac{U_0}{R_1 + R_2};$
$i_2(\infty) = 0,$
$i_1(\infty) = i_3(\infty) = \frac{U_0}{R_1 + R_3};$
$u_C(\infty) = R_3\, i_3(\infty) = U_0 \frac{R_3}{R_1 + R_3}$

8.29 Stanovte napětí u_{R1} a u_{R2} v čase t = 0+ a v ustáleném stavu, jestliže $U_0 = 120\,\mathrm{V}$, $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $L_1 = 0{,}8\,\mathrm{H}$, $L_2 = 0{,}3\,\mathrm{H}$.



$u_{R1}(0+) = 48\,\mathrm{V}$,
$u_{R2}(0+) = 72\,\mathrm{V}$,
$u_{R1}(\infty) = 0$,
$u_{R2}(\infty) = 120\,\mathrm{V}$,
pro $L_1, L_2 \neq 0$

8.30 V obvodu podle obrázku stanovte proudy a napětí v čase t = 0+, jestliže $u_0(t) = 200\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{V}$.

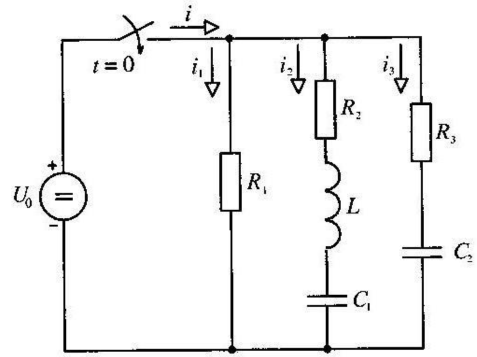


$i_3(0+) = 0, i_1(0+) = i_2(0+) = \dfrac{u_0(0)}{2R}$

$u_3(0+) = 0, u_4(0+) = u_2(0+) = R\,i_2(0+) = \dfrac{u_0(0)}{2} = 100\,\mathrm{V}$,

$u_1(0+) = R\,i_1(0+) = 100\,\mathrm{V}$

8.31 Stanovte proudy ve všech větvích obvodu a to:
a) v čase $t = 0+$,
b) v ustáleném stavu,



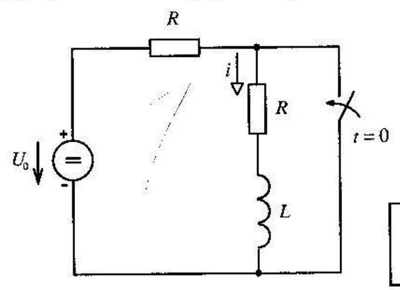
$i_1(0+) = \dfrac{U_0}{R_1}$, $\quad i_1(\infty) = \dfrac{U_0}{R_1}$

$i_2(0+) = 0$, $\quad i_2(\infty) = 0$,

$i_3(0+) = \dfrac{U_0}{R_3}$, $\quad i_3(\infty) = 0$,

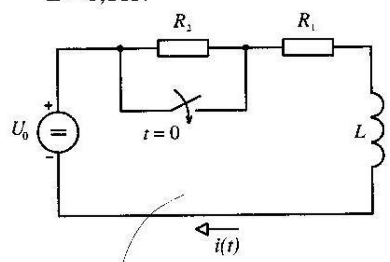
$i(0+) = \dfrac{U_0}{R_1} + \dfrac{U_0}{R_3}$, $\quad i(\infty) = \dfrac{U_0}{R_1}$.

8.32 Vyšetřete časový průběh proudu a napětí na induktoru .



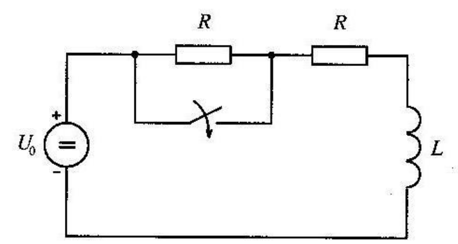
$i(t) = -\dfrac{U_0}{2R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$, $u(t) = -\dfrac{U_0}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \dfrac{L}{R}$

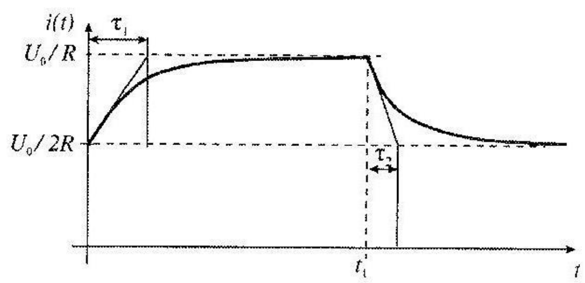
8.33 Stanovte průběh proudu i (t), jestliže: $U_0 = 24\,\mathrm{V}$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $L = 0{,}1\,\mathrm{H}$.



$i(t) = 12 - 9e^{-20t}$ A

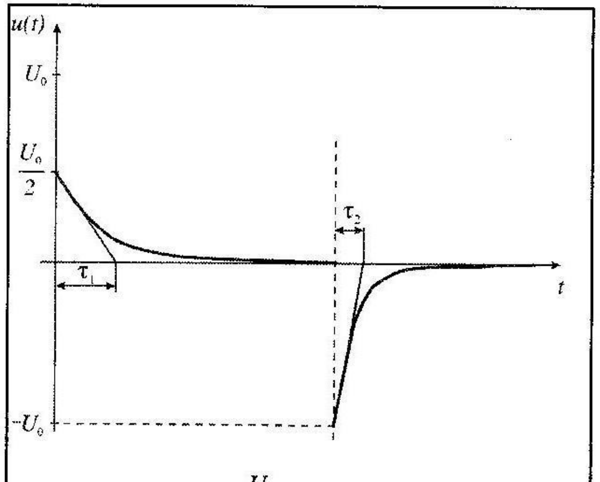
8.34 V čase t = 0 vypínač sepne a v čase $t = t_1$ se opět rozepne. Určete časové konstanty τ_1 a τ_2 pro oba přechodné děje a nakreslete časový průběh proudu induktorem za předpokladu, že $t_1 = 5\,\tau_1$ (tj. obvod byl již v čase t_1 v ustáleném stavu).





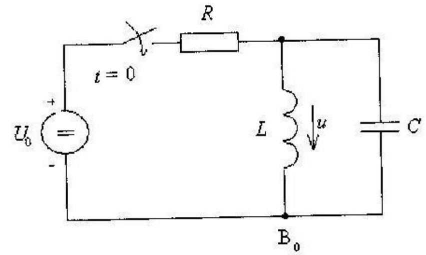
$$\tau_1 = \frac{L}{R},\quad \tau_2 = \frac{L}{2R}$$

8.35 Nakreslete časový průběh napětí na induktoru z předchozího příkladu a vypočtěte tyto hodnoty: $u_L(0-)$, $u_L(0+)$, $u_L(t_1-)$, $u_L(t_1+)$.



$$u_L(0-)=0,\ u_L(0+)=\frac{U_0}{2},\ u_L(t_1-)=0,\ u_L(t_1+)=-U_0$$

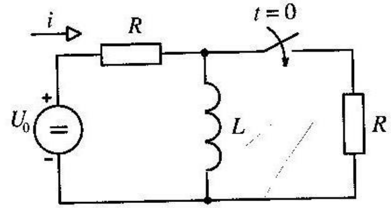
8.36 Napište základní rovnice pro obvod v přechodném stavu, s užitím metody uzlových napětí.



$$\frac{1}{L}\int_0^t u\mathrm{d}t + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{u-U_0}{R}=0$$

zvolíme-li uzel B_0 za referenční

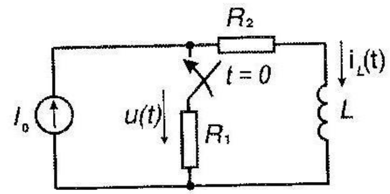
8.37 Vyšetřete časový průběh proudu a napětí na induktoru.



$i_L(0)=\frac{U_0}{R}$, $u_L(0-)=0$,
k přechod. ději nedojde

8.38 Určete časové průběhy proudu i_L a napětí u v obvodu dle obrázku.
Dáno: $I_0 = 10\text{A}$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $L = 1\text{H}$. Číselně vypočtěte:

a) $i_L(0)$, $i_L(\infty)$, $u(0+)$
b) časovou konstantu
c) energii je akumulovanou v cívce v čase $t = 0$

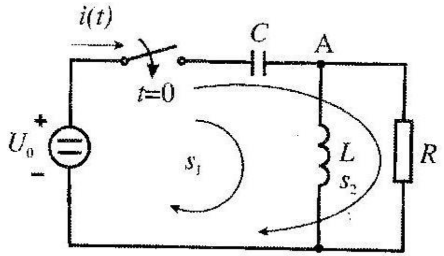


$$i(t)=\frac{I_0}{R_1+R_2}\left(R_2 e^{\frac{-t}{\tau}}+R_1\right),\quad u(t)=I_0\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right),\quad \tau=\frac{L}{R_1+R_2}$$

a) $i_L(0)=I_0$, $i_L(\infty)=I_0\frac{R_1}{R_1+R_2}=5\,\text{A}$, $u(0+)=0$

b) $\tau=\frac{L}{R_1+R_2}=0{,}05\,\text{s}$, c) $W=50\text{J}$

8.39 Formulujte rovnice pro stavové veličiny pro uzel A a smyčky s_1a s_2..



$$A: \; C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i_L + i_R$$

$$s_1: \; u_C + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = U_0$$

$$s_2: \; u_C + Ri_R = U_0$$

8.40 Z rovnic předchozího příkladu sestavte stavovou matici soustavy a určete charakter přechodného děje.

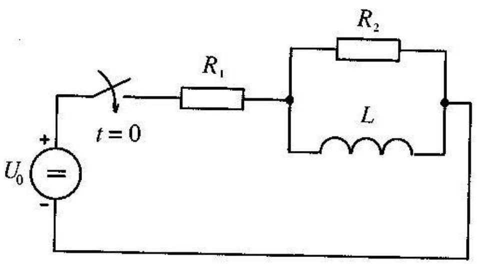
a) Je-li dáno: R = 10 Ohm, C = 10uF, L = 100mH.

b) Jak se změní charakter přechodného děje, bude-li L =1mH.

0	$-\frac{1}{L}$
$\frac{1}{C}$	$-\frac{1}{RC}$

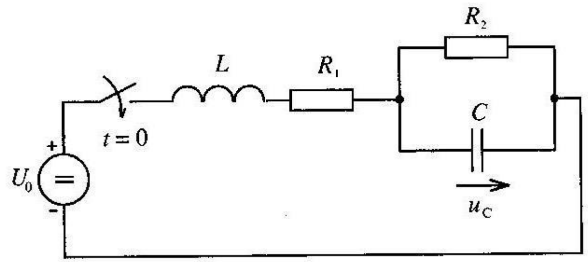
a) $\lambda_1 = -100\,;\ \lambda_2 = -9900$; aperiodický děj
b) $\lambda_1 = -5000 + \mathrm{j}8660\,;\ \lambda_2 = -5000 - \mathrm{j}8660$; kmitavý děj

8.41 Stanovte obrazovou impedanci obvodu podle obrázku:



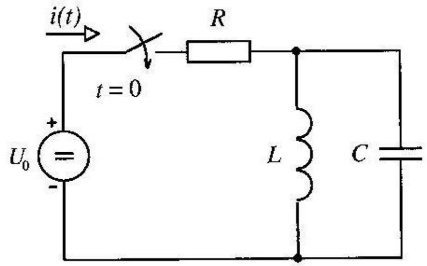
$$Z(p) = R_1 + \frac{pR_2L}{pL + R_2}$$

8.42 Stanovte obrazovou impedanci obvodu podle obrázku.



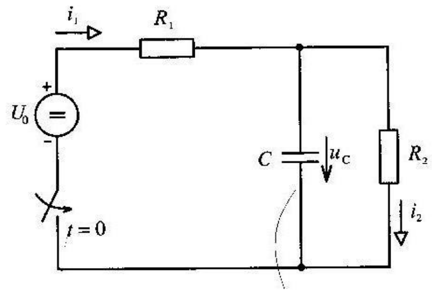
$$Z(p) = R_1 + pL + \frac{R_2}{pR_2C + 1}$$

8.43 Stanovte Laplaceův obraz proudu $I(p) = \mathcal{L}\,\{i(t)\}$ pro přechodný jev vyvolaný sepnutím vypínače v čase t = 0.



$$I(p) = U_0 \frac{p^2LC + 1}{p^3RLC + p^2L + pR}$$

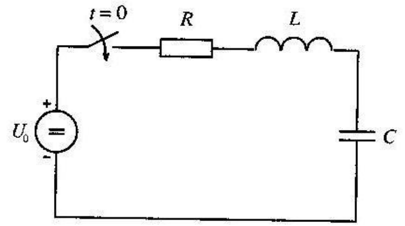
8.44 Vypočtěte časový průběh napětí na kapacitou pomocí Laplaceovy transformace.



$$U_C(p) = \frac{U_0}{R_1C} \frac{1}{p\left(p + \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}\right)},$$

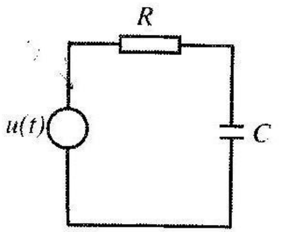
$$u_C(t) = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

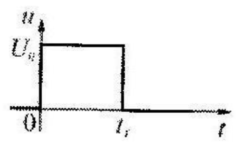
8.45 V obvodu je dáno L a C. Pro jakou hodnotu R bude přechodný jev v obvodu na mezi periodicity?



$$\boxed{R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

8.46 Určete proudovou odezvu $i(t)$ obvodu na napěťový impuls podle obrázku pro $t \in (0, t_1)$, jestliže $u_C(0) = 0$.



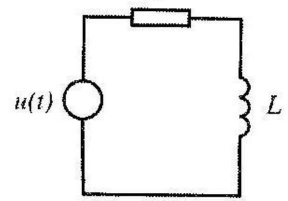


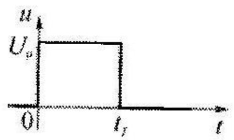
$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}}$$

8.47 Určete hodnotu napětí na kondenzátoru u_C v př. 8.46 v okamžiku $t = t_1$.

$$\boxed{u_C(t_1) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}}\right)}$$

8.48 Vypočtěte časový průběh proudu v obvodu v intervalu $t \in \langle 0, t_1 \rangle$ a $t \in \langle t_1, \infty)$.





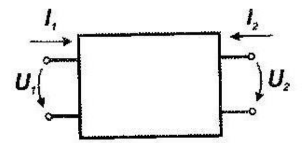
$$t \in \langle 0, t_1 \rangle \qquad i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$t \in \langle t_1, \infty) \qquad i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) e^{-\frac{t - t_1}{\tau}}$$

9. DVOJBRANY

9.1. ZÁKLADNÍ VZTAHY

Dvojbran je libovolná část obvodu, která je s ostatními částmi obvodu spojena dvěma páry svorek (*vstupní a výstupní svorky*). K analýze chování obvodu postačí popsat daný dvojbran pouze *vztahy mezi napětími a proudy na vstupních a výstupních svorkách*, tyto vztahy vyjadřují *charakteristické rovnice dvojbranu*. Vnitřní struktura dvojbranu může být libovolně složitá. Dále předpokládáme harmonický ustálený stav, základní vztahy budeme psát pro fázory.



U_1, U_2 vnější napětí dvojbranu
I_1, I_2 vnější proudy dvojbranu

Charakteristické matice jednoznačně určují vlastnosti dvojbranu a vztahy mezi výstupními a vstupními veličinami – tab. 9.1

Název matice	matice	rovnice
impedanční	**Z**	$U_1, U_2 = f(I_1, I_2)$
admitanční	**Y**	$I_1, I_2 = f(U_1, U_2)$
přímá kaskádní	**A**	$U_1, I_1 = f(U_2, -I_2)$
zpětná kaskádní	**B**	$U_2, I_2 = f(U_1, I_1)$
sériově paralelní	**H**	$U_1, I_2 = f(I_1, U_2)$
paralelně sériovou	**G**	$I_1, U_2 = f(U_1, I_2)$

Tab. 9.1

Prvky charakteristických matic lze určit buď z rovnic obvodu příslušně upravených nebo ze stavu naprázdno, nakrátko.

Obecný dvojbran je určen čtyřmi veličinami (tj. čtyřmi prvky příslušné charakteristické matice). Je-li dvojbran *reciprocitní*, resp. *symetrický*, postačí určit pouze 3 prvky charakteristické matice, je-li *reciprocitní* a *zároveň symetrický*, postačí vypočítat pouze dva prvky. Zbývající prvky stanovíme pomocí vztahů uvedených v tab. 9.2

Tab. 9.2

reciprocita	$z_{12} = z_{21}$	$y_{12} = y_{21}$	det **A** = 1	det **B** = 1	$h_{12} = -h_{21}$	$g_{12} = -g_{21}$
symetrie	$z_{11} = z_{22}$	$y_{11} = y_{22}$	$a_{11} = a_{22}$	$b_{11} = b_{22}$	det **H** = 1	det **G** = 1

Spojování dvojbranů

Dva dvojbrany lze spojit: *sériově, paralelně, postupně kaskádně, zpětně kaskádně, sériově paralelně a paralelně sériově*. Pro každé zapojení je vhodné použít příslušnou charakteristickou matici, neboť lze pak snadno určit matici výsledného zapojení – Tab. 9.3

zapojení	charakteristická matice
sériové	$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$
paralelní	$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$
postupné kaskádní	$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2$
zpětné kaskádní	$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1\,\mathbf{B}_2$
sérioparalelní	$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$
paralelně sériové	$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$

Tab. 9.3

Ekvivalentní dvojbrany

Dva dvojbrany jsou *ekvivalentní*, jestliže jsou si rovny jejich charakteristické matice.

Obvodové funkce dvojbranu

Dvojbrany zpravidla tvoří *přenosovou cestu* mezi zdrojem a spotřebičem, *kvalitu přenosu* (zkreslení signálu, účinnost přenosu energie) lze posoudit podle hodnot *obvodových funkcí* či jejich frekvenční závislosti (*frekvenční charakteristik*).

Obvodové funkce dělíme na:

a) *přenosové funkce* – informace o přenosu ze vstupu na výstup nebo naopak
b) *imitanční funkce* – vztahy mezi napětími a proudy

- Komplexní přenos napětí resp. proudu $\quad \boldsymbol{K}_U = \dfrac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_1}, \quad \boldsymbol{K}_I = \dfrac{(-\boldsymbol{I}_2)}{\boldsymbol{I}_1}$
- Vstupní impedance, admitance $\quad \boldsymbol{Z}_1 = \dfrac{\boldsymbol{U}_1}{\boldsymbol{I}_1}, \quad \boldsymbol{Y}_1 = \dfrac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{U}_1}$
- Výstupní impedance, admitance $\quad \boldsymbol{Z}_2 = \dfrac{\boldsymbol{U}_2}{(-\boldsymbol{I}_2)}, \quad \boldsymbol{Y}_2 = \dfrac{(-\boldsymbol{I}_2)}{\boldsymbol{U}_2}$
- Přenosová impedance, admitance $\quad \boldsymbol{Z}_{12} = \dfrac{\boldsymbol{U}_1}{(-\boldsymbol{I}_2)}, \quad \boldsymbol{Y}_{21} = \dfrac{(-\boldsymbol{I}_2)}{\boldsymbol{U}_1}$

Obvodové funkce jsou dány poměrem vnějších napětí a proudů, přičemž se vyjadřují:

a) pro ustálený stav pomocí fázorů, jsou to pak komplexní funkce $\boldsymbol{F}(\mathrm{j}\omega)$,
b) pro dynamické chování obvodu pomocí Laplaceových obrazů $F(p)$.

Důležité jsou rovněž přenosové funkce ve zvláštních režimech, např.:

- Vstupní, výstupní impedance naprázdno $\quad \boldsymbol{Z}_{10} = \left.\dfrac{\boldsymbol{U}_1}{\boldsymbol{I}_1}\right|_{I_2=0}, \quad \boldsymbol{Z}_{20} = \left.\dfrac{\boldsymbol{U}_2}{(-\boldsymbol{I}_2)}\right|_{I_1=0}$

- Vstupní, výstupní impedance nakrátko $\quad \boldsymbol{Z}_{1k} = \left.\dfrac{\boldsymbol{U}_1}{\boldsymbol{I}_1}\right|_{U_2=0}, \quad \boldsymbol{Z}_{2k} = \left.\dfrac{\boldsymbol{U}_2}{(-\boldsymbol{I}_2)}\right|_{U_1=0}$

Kmitočtové vlastnosti dvojbranu lze graficky znázornit pomocí *kmitočtových* resp. *frekvenčních charakteristik* – tj. závislosti obvodové funkce na úhlovém kmitočtu ω resp.na frekvenci f.

Grafy obvodových funkcí $\boldsymbol{F}(\mathrm{j}\omega)$ se nazývají:

a) *komplexní kmitočtová charakteristika* – graf $\boldsymbol{F}(\mathrm{j}\omega)$ v komplexní rovině
b) *amplitudová (modulová) kmitočtová charakteristika* - závislost amplitudy resp. modulu fázoru obvodové funkce na ω
c) *fázová kmitočtová charakteristika* - závislost argumentu $\boldsymbol{F}(\mathrm{j}\omega)$ na ω

Pro kreslení ***kmitočtových charakteristik*** jsou důležité 3 body:

$$\omega = 0, \quad \omega \to \infty, \quad \omega = \omega_0,$$

kde ω_0 *je mezní kmitočet* a lze ho určit z kořenů jmenovatele funkce $\boldsymbol{F}(\mathrm{j}\omega)$

Vlnové parametry dvojbranu

Vlnová impedance dvojbranu (*charakteristická impedance*) je důležitý vlnový parametr dvojbranu, nesymetrický dvojbran má vstupní a výstupní vlnovou impedanci:

- *vstupní vlnovou impedanci* lze určit ze vztahu $\quad \boldsymbol{Z}_{01} = \sqrt{\boldsymbol{Z}_{10}\,\boldsymbol{Z}_{1k}}$
- *výstupní vlnovou impedanci* lze určit ze vztahu $\quad \boldsymbol{Z}_{02} = \sqrt{\boldsymbol{Z}_{20}\,\boldsymbol{Z}_{2k}}$

Pro *symetrický dvojbran* jsou vstupní a výstupní vlnová impedance shodné:

$$\mathbf{Z}_{01} = \mathbf{Z}_{02} = \mathbf{Z}_0 .$$

Platí: *je-li dvojbran zatížen svou výstupní vlnovou impedancí, pak jeho vstupní impedance je právě rovna vstupní vlnové impedanci a naopak.* Takový dvojbran je ***impedančně přizpůsobený***. Z důvodů kvality přenášeného signálu navrhujeme spojení dvojbranů zpravidla jako impedančně přizpůsobené.

Vlnový přenos definujeme pro symetrický přizpůsobený dvojbran:

Vlnový přenos napětí $\quad \boldsymbol{G}_U = \dfrac{\boldsymbol{U}_1}{\boldsymbol{U}_2} = \dfrac{1}{\boldsymbol{K}_U}$

Jelikož pro impedančně přizpůsobený symetrický dvojbran platí: $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_0$, lze vyjádřit *vlnový přenos proudu* následovně

$$\boldsymbol{G}_I = \frac{\boldsymbol{I}_1}{(-\boldsymbol{I}_2)} = \frac{\boldsymbol{U}_1/\boldsymbol{Z}_0}{\boldsymbol{U}_2/\boldsymbol{Z}_0} = \boldsymbol{G}_U = \boldsymbol{G}_0$$

Pro vlnový přenos $\boldsymbol{G}_0$ zavádíme *vlnovou míru přenosu*, lze ji vyjádřit pomocí přirozeného nebo podle současné normy pomocí dekadického logaritmu

$$g_0 = \ln G_0 = \ln \frac{U_1 e^{j\varphi_1}}{U_2 e^{j\varphi_2}} = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\varphi_1 - \varphi_2) = b_0\,[\mathrm{Np}] + j a_0$$

$$g_0 = 20\log G_0 = 20\log \frac{U_1 e^{j\varphi_1}}{U_2 e^{j\varphi_2}} = 20\log \frac{U_1}{U_2} + j\,(\varphi_1 - \varphi_2)20\log e = b_0\,[\mathrm{dB}] + j a_0$$

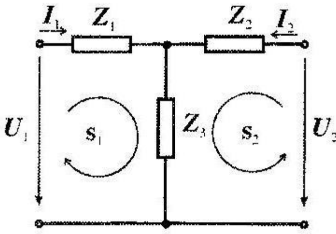
kde $b_0 = \ln\,(U_1/\,U_2)$ je *vlnový útlum* v jednotkách Np (Nepér)
$b_0 = 20\,\log\,(U_1/\,U_2)$ je vlnový útlum v jednotkách dB (decibel)
a_0 je *vlnový fázový posun*.

Pro převod **dB na Np** platí: $b_0\,[\mathrm{dB}] = 8{,}68\,b_0\,[\mathrm{Np}]$, $b_0\,[\mathrm{Np}] = 0{,}115\,b_0\,[\mathrm{dB}]$.

Pro pasivní symetrický dvojbran lze vyjádřit prvky *kaskádní matice* **A** pomocí *vlnových parametrů* Z_0, g_0 (g_0 je definovaná pomocí přirozeného logaritmu)

$$\mathbf{A}(g_0, Z_0) = \begin{bmatrix} \cosh g_0 & Z_0 \sinh g_0 \\ 1/Z_0 \sinh g_0 & \cosh g_0 \end{bmatrix}$$

Příklad IX-1: Stanovte impedanční matici T článku



Obr. 9.1

Řešení:
Formulujeme rovnice pro smyčky s_1 a s_2:

s_1: $I_1(Z_1 + Z_3) + I_2 Z_3 = U_1$

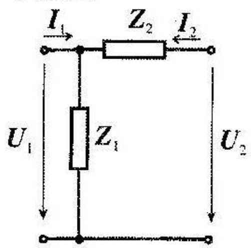
s_2: $I_1 Z_3 + I_2(Z_2 + Z_3) = U_2$

impedanční matice je

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

Pro symetrický dvojbran platí $\qquad Z_1 = Z_2 \;\Rightarrow\; z_{11} = z_{22}$

Příklad IX-2: Určete kaskádní matici Γ článku ze stavu dvojbranu naprázdno a nakrátko.



Obr. 9.2

Řešení :

$U_1 = a_{11} U_2 + a_{12}(-I_2)$

$I_1 = a_{21} U_2 + a_{22}(-I_2)$

Koeficienty a_{11} a a_{21} počítáme z výstupu dvojbranu naprázdno $I_2 = 0$

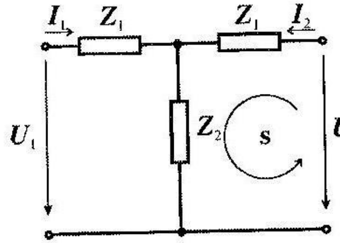
$$a_{11} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{U_1}{U_2} = 1\,, \quad a_{21} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{I_1}{Z_1 I_1} = \frac{1}{Z_1}$$

Koeficienty a_{12} a a_{22} počítáme z výstupu dvojbranu nakrátko $U_2 = 0$

$$a_{12} = \left.\frac{U_1}{(-I_2)}\right|_{U_2=0} = \frac{U_1}{U_1/Z_2} = Z_2\,, \quad a_{22} = \left.\frac{I_1}{(-I_2)}\right|_{U_2=0} = \frac{I_1}{I_1 \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2}} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1}$$

Příklad IX-3: Pro symetrický T článek určete hybridní matici **H**

Řešení:
Dvojbran je ***symetrický a reciprocitní*** $\Rightarrow$ 2 prvky určíme z rovnic obvodu, další 2 z tabulky 9.2.



Obr. 9.3

Sérioparalelní rovnice jsou ve tvaru

$U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2$

$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2$

Rovnice pro smyčku s:

$I_2(Z_1 + Z_2) + I_1 Z_2 = U_2$

$$\Rightarrow I_2 = -I_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} + U_2 \frac{1}{Z_1 + Z_2}$$

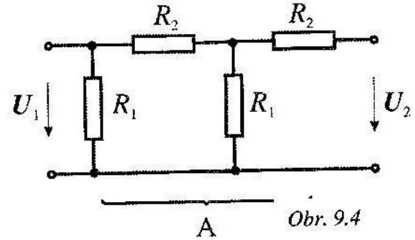
Odtud dostaneme $\qquad h_{21} = -\dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad h_{22} = \dfrac{1}{Z_1 + Z_2}$

Jelikož je dvojbran reciprocitní, platí: $\qquad h_{12} = -h_{21} = \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$

Pro symetrický dvojbran dále platí: $\qquad \det\mathbf{H} = 1 \;\Rightarrow\; h_{11} = \dfrac{Z_1^{\,2} + 2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$

Příklad IX-4: Určete hodnotu U_2, je-li $U_1 = 60\angle 30^0\,\mathrm{V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 10\Omega$.

Řešení: Zapojení lze považovat za kaskádní spojení dvou stejných Γ článků s maticí $\mathbf{A_1}$ (viz ***příklad IX-2***). Kaskádní matici výsledného zapojení určíme pomocí součinu $\mathbf{A} = \mathbf{A_1}.\mathbf{A_1}$.



Obr. 9.4

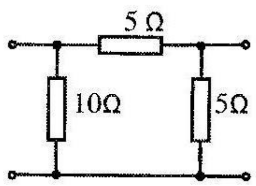
Vypočteme $\qquad \mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0{,}1 & 2 \end{bmatrix}$

Výsledná matice je $\qquad \mathbf{A} = \mathbf{A_1}.\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & 30 \\ 0{,}3 & 5 \end{bmatrix}$

Napěťový přenos nezatíženého dvojbranu určíme z parametru a_{11} matice **A**

$$a_{11} = \frac{U_1}{U_2}\Big|_{I_2=0} \quad \Rightarrow \quad U_2 = \frac{60\angle 30^0}{2} = 30\angle 30^0 \text{ V}$$

Příklad IX-5: Určete vstupní a výstupní vlnovou impedanci Π-článku.



Obr. 9.5

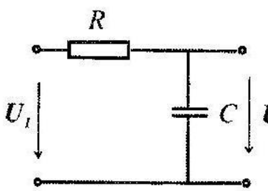
Řešení:
Vypočteme vstupní a výstupní impedanci naprázdno a nakrátko. Poté určíme vstupní a výstupní vlnovou impedanci

$$Z_{10} = 5\,\Omega \qquad Z_{20} = \frac{5.15}{20} = \frac{15}{4}\,\Omega$$

$$Z_{1k} = \frac{10.5}{15} = \frac{10}{3}\,\Omega \qquad Z_{2k} = 2{,}5\,\Omega$$

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{50}{3}} = 4{,}08\,\Omega \qquad Z_{02} = \sqrt{2{,}5.\frac{15}{4}} = 3{,}06\,\Omega$$

Příklad IX-6: Určete komplexní přenos napětí, nakreslete komplexní kmitočtovou charakteristiku, amplitudovou a fázovou charakteristiku.



Obr. 9.6

Řešení:
Vypočteme komplexní přenos napětí

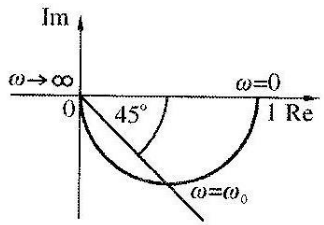
$$\boldsymbol{K}_U = \frac{\boldsymbol{U}_2}{\boldsymbol{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = K_U \angle -\varphi$$

Určíme jeho velikost a fázi

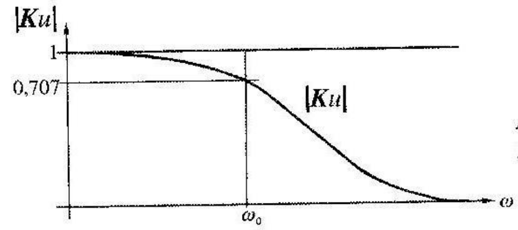
$$K_U = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\omega RC \qquad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Pro tři charakteristické hodnoty $\omega = 0$, ω_0 a ∞ vypočteme $\boldsymbol{K}_U$, K_U a φ a zakreslíme jejich grafy.

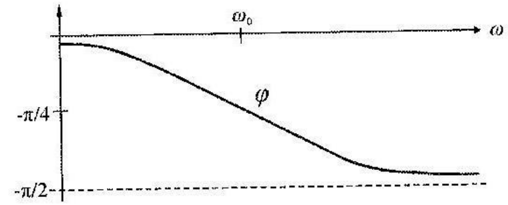
	$\boldsymbol{K}_u$	$\lvert\boldsymbol{K}_u\rvert$	φ
$\omega = 0$	1	1	0
$\omega = \omega_0$	$0{,}707\angle -45^\circ$	0.707	-45°
$\omega \to \infty$	0	0	-90°



Komplexní kmitočtová charakteristika



Amplitudová (modulová) kmitočtová charakteristika



Fázová kmitočtová charakteristika

Příklad IX-7: Dvojbran má vlnový útlum b_0 = 5dB, vypočtěte efektivní hodnotu výstupního napětí U_2, je-li efektivní hodnota vstupního napětí U_1=100 V.

Řešení:

a) ***výpočet v*** dB

Ze vztahu pro $b_0 = 5 = 20\log\frac{U_1}{U_2}$ vypočteme $U_2 = \frac{100}{10^{0,25}} = 56{,}23$ V

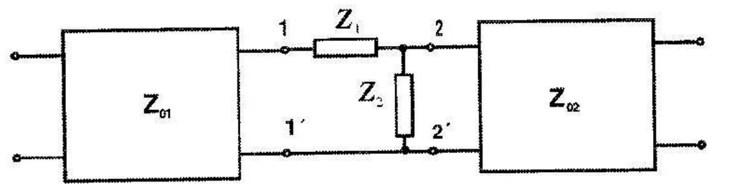
b) ***výpočet v*** Np

převedeme decibely na Np $\quad$ 5dB = 5.0,115Np = 0,575Np

a po té určíme $\quad b_0 = \ln\frac{U_1}{U_2} = 0{,}575$

$$\frac{U_1}{U_2} = e^{0{,}575} \quad \Rightarrow \quad U_2 = \frac{100}{e^{0{,}575}} = 56{,}27 \text{ V}$$

Příklad IX-8: Kaskádní spojení dvou dvojbranů má být impedančně přizpůsobeno pomocí Γ článku s impedancemi $\mathbf{Z}_1$ a $\mathbf{Z}_2$. Vypočtěte jejich velikost, jsou-li vlnové impedance dvojbranů $\mathbf{Z}_{01}$ = 300 Ω a $\mathbf{Z}_{02}$ = 75 Ω.



Řešení: Rovnice pro výpočet Z_1 a Z_2 lze formulovat dvěma způsoby:

a) ***řešení z podmínek přizpůsobení na svorkách 1-1´a 2-2´:***

na svorkách 1-1´ musí platit: $Z_{01} = Z_1 + \dfrac{Z_2 Z_{02}}{Z_2 + Z_{02}}$

na svorkách 2-2´ musí platit: $Z_{02} = \dfrac{Z_2 (Z_1 + Z_{01})}{Z_1 + Z_2 + Z_{02}}$

b) ***z výpočtu vstupní a výstupní vlnové impedance*** Γ článku:

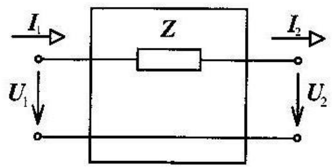
$$Z_{1k} = Z_1, \quad Z_{10} = Z_1 + Z_2, \quad Z_{01} = \sqrt{Z_1 (Z_1 + Z_2)}$$

$$Z_{2k} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad Z_{20} = Z_2, \quad Z_{02} = Z_2 \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}$$

Po dosazení za Z_{01} a Z_{02} vypočteme: $Z_1 = 260\ \Omega$, $Z_2 = 86{,}6\ \Omega$

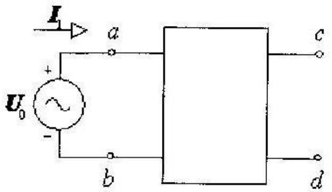
9.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

9.1 Stanovte kaskádní matici dvojbranu podle obrázku.

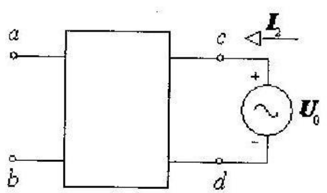


$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

9.2 Připojíme-li na vstup symetrického reciprocitního dvojbranu naprázdno zdroj napětí, je vstupní proud I_1 (obr. a). Připojíme-li tentýž zdroj na výstup, je napájecí proud I_2 (obr. b). Jaký vztah platí mezi oběma proudy?



Obr. a



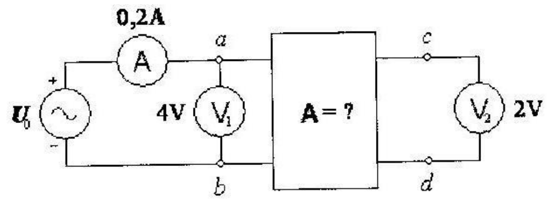
Obr. b

$$\boxed{I_1 = I_2}$$

9.3 Symetrický dvojbran s přizpůsobenou zátěží je složen pouze z kapacit. Jaký je fázový posun mezi vstupním a výstupním napětím?

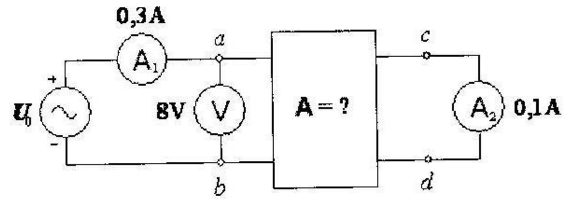
$\boxed{\text{obě napětí } U_1 \text{ a } U_2 \text{ jsou ve fázi}}$

9.4 Pasivní, podélně symetrický dvojbran je sestaven pouze z ohmických odporů. Z údajů ampérmetru A a voltmetrů V_1, V_2 stanovte kaskádní matici **A**.



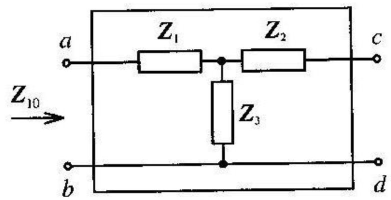
$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 30 \\ 0{,}1 & 2 \end{bmatrix}}$$

9.5 Pasivní, podélně symetrický dvojbran se skládá pouze z ohmických odporů. Z údajů ampérmetru A_1, A_2 a voltmetru určete kaskádní matici dvojbranu **A**.



$$\boxed{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 80 \\ 0{,}1 & 3 \end{bmatrix}}$$

9.6 Pro dvojbran podle obrázku stanovte vstupní impedanci naprázdno.

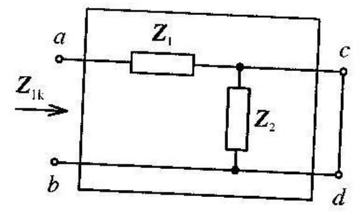


$$\boxed{Z_{10} = Z_1 + Z_3}$$

9.7 Podélně symetrický dvojbran má vstupní impedanci naprázdno $Z_{10} = 40\,e^{j80°}\ \Omega$ a vstupní impedanci nakrátko $Z_{1k} = 10\,e^{j40°}\ \Omega$. Stanovte jeho vlnovou impedanci Z_0.

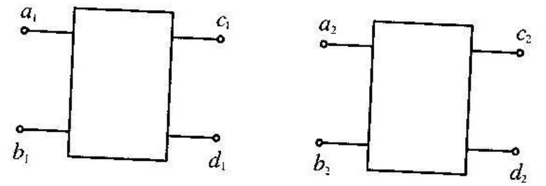
$$\boxed{Z_0 = 20e^{j60°}\ \Omega}$$

9.8 Pro dvojbran podle obrázku stanovte vstupní impedanci nakrátko.



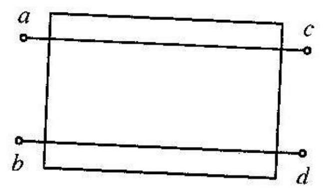
$\boxed{Z_{1k} = Z_1}$

9.9 Doplňte zapojení obou dvojbranů tak, aby byly spojeny v sérii.



Jsou spojeny svorky b_1 a a_2 svorky d_1 a c_2.

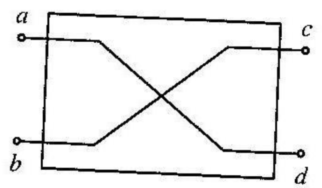
9.10 Stanovte kaskádní matici pro dvojbranu podle obrázku.



Ze vztahů $U_1 = U_2, I_1 = I_2$ plyne:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

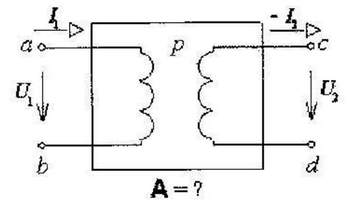
9.11 Stanovte kaskádní matici pro dvojbran podle obrázku.



Ze vztahů $U_1 = -U_2, I_1 = -I_2$ plyne:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

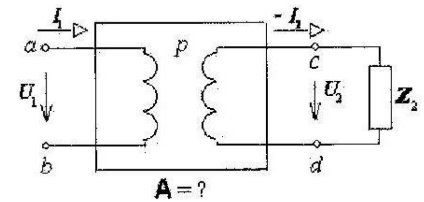
9.12 Stanovte kaskádní matici ideálního transformátoru s převodem p.



Ze vztahů $U_1 = pU_2,\ I_1 = \frac{1}{p}(-I_2)$

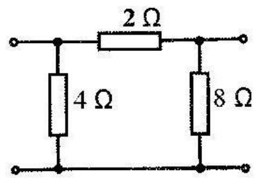
plyne: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & \frac{1}{p} \end{bmatrix}$

9.13 Určete vztah mezi vstupní a výstupní impedancí ideálního transformátoru s převodem p, je-li zatížen impedancí Z_2.



$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{pU_2}{\frac{1}{p}(-I_2)} = p^2 Z_2$$

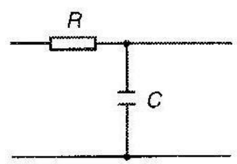
9.14 Pro dvojbran na obrázku vypočtěte prvky admitanční matice



$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0{,}75, & 0{,}5 \\ 0{,}5, & 0{,}625 \end{bmatrix}$$

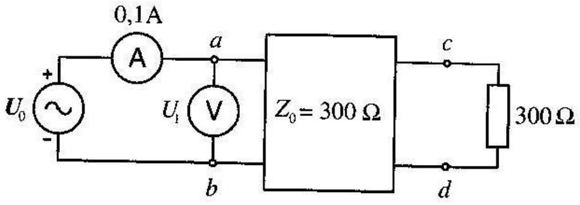
9.15 Stanovte prvky kaskádní matice **A** pro Γ článek na obrázku, je-li dáno:

$\omega = 1000\text{s}^{-1}$, $R = 1\ \text{k}\Omega$, $C = 1\ \mu\text{F}$.



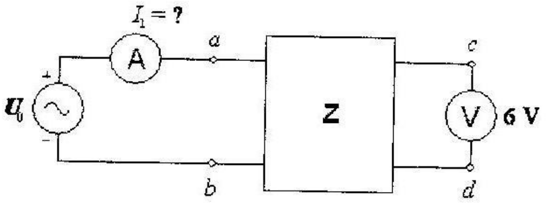
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \text{j}1, & 10^3 \\ \text{j}10^{-3}, & 1 \end{bmatrix}$$

9.23 Dvojbran podle obrázku má vlnovou impedanci $Z_0 = 300\,\Omega$. Stanovte údaj voltmetru, jestliže ampérmetr ukazuje $I_1 = 0{,}1$ A.



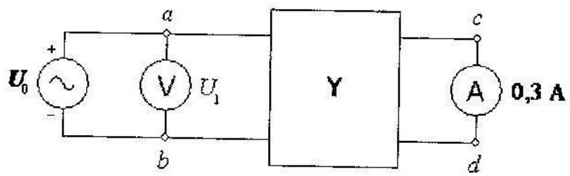
$\boxed{U_1 = 30\text{ V}}$

9.24 Je dána impedanční matice dvojbranu $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$. Stanovte údaj ampérmetru, jestliže voltmetr ukazuje napětí $U_2 = 6$ V.



$\boxed{I_1 = 0{,}6\text{ A}}$

9.25 Pro dvojbran s admitanční maticí $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}$ stanovte údaj voltmetru, jestliže ampérmetr ukazuje proud $I_2 = 0{,}3$ A.

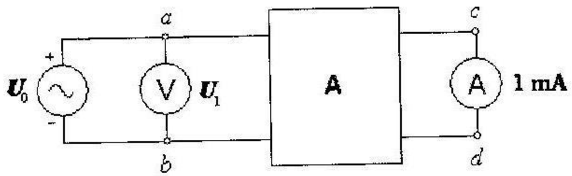


$\boxed{U_1 = 3\text{ V}}$

9.26 Útlum dvojbranu je $b_0 = 15$ dB, výstupní napětí má efektivní hodnotu 50 V, určete amplitudu vstupního napětí.

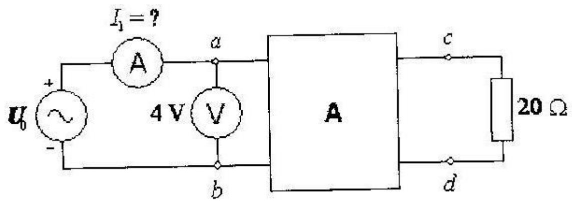
$\boxed{U_{1m} = 407\text{ V}}$

9.27 Kaskádní matice dvojbranu je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1500 \\ 0{,}01 & 4 \end{bmatrix}$, stanovte údaj voltmetru V, jestliže ampérmetr A ukazuje proud $I_2 = 1$ mA.



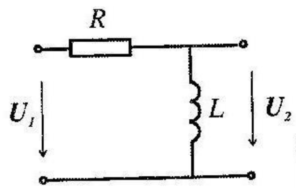
$\boxed{U_1 = 1{,}5\text{ V}}$

9.28 Je dána kaskádní matice dvojbranu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 40 \\ 0{,}1 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$, určete údaj ampérmetru, jestliže voltmetr ukazuje $U_1 = 4$ V.



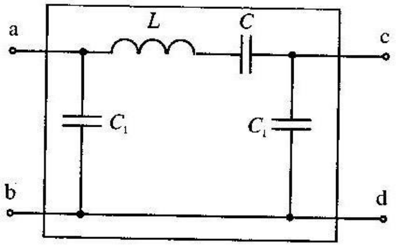
$\boxed{I_1 = 0{,}2\text{ A}}$

9.29 Pro daný dvojbran vypočtěte komplexní přenos napětí, mezní kmitočet a určete hodnoty $\boldsymbol{K}_U$ pro hodnoty $\omega = 0,\ \omega_0,\ \infty$. Dáno: $R = 1$ kΩ, $L = 1$ mH.



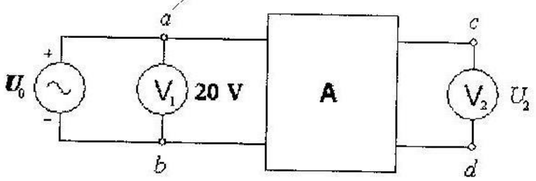
$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{K}_U = \frac{\mathrm{j}\omega L/R}{1 + \mathrm{j}\omega L/R}\ , \quad \omega_0 = R/L = 1\text{ s}^{-1} \\ \boldsymbol{K}_U(0) = 0\ , \quad \boldsymbol{K}_U(\infty) = 1\ , \quad \boldsymbol{K}_U(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ \end{gathered}}$$

9.30 Pro dvojbran podle obrázku stanovte útlum b_0, jestliže harmonické napětí má úhlovou frekvenci $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.



$\boxed{b_0 = 0}$

9.31 Kaskádní matice dvojbranu je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1500 \\ 0{,}01 & 4 \end{bmatrix}$, stanovte údaj voltmetru V_2, jestliže voltmetr V_1 ukazuje $U_1 = 20$ V.



$\boxed{U_2 = 5\text{ V}}$

10. OBVODY S NEHARMONICKY PROMĚNNÝMI NAPĚTÍMI A PROUDY V USTÁLENÉM STAVU.

10.1 ZÁKLADNÍ VZTAHY

Periodickou funkci $v(t)$ lze rozložit na harmonické složky a stejnosměrnou složku pomocí **Fourierovy řady**

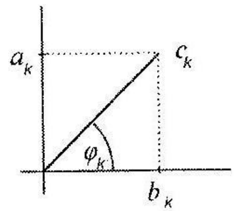
$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t \qquad (10.1)$$

kde $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$

$$\left.\begin{aligned} a_K &= \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t \\ b_K &= \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (10.2)$$

- je-li funkce $v(t)$ sudá, tj. $v(t) = v(-t)$, jsou koeficienty $b_k = 0$,
- je-li funkce $v(t)$ lichá, tj. $v(t) = -v(-t)$, jsou koeficienty $a_k = 0$.

Periodickou funkci $v(t)$ lze také vyjádřit řadou



$$v(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \qquad (10.3)$$

kde $c_0 = \frac{a_0}{2}$ $\quad c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $\quad \varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{a_k}{b_k}$,

neboť $b_k = c_k \cos\varphi_k$

$$a_k = c_k \sin\varphi_k \qquad (10.4)$$

Graf závislosti $c_k(\omega)$ nazýváme *amplitudové spektrum*, graf závislosti $\varphi_k(\omega)$ nazýváme *fázové spektrum*

Efektivní hodnotu funkce $v(t)$ lze určit ze vztahu

$$V = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right)} \qquad (10.5)$$

nebo

$$V = \sqrt{c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2} \qquad (10.6)$$

V rov. (10.5) a (10.6) udávají Fourierovy koeficienty amplitudy jednotlivých harmonických, určíme-li z nich efektivní hodnoty

$$A_k = \frac{a_k}{\sqrt{2}}, \quad B_k = \frac{b_k}{\sqrt{2}}, \quad C_k = \frac{c_k}{\sqrt{2}} \qquad k = 1,2,3...$$

dostaneme vztahy vyjadřující tzv. Parsevalova rovnost

$$V = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2} \quad \text{resp.} \quad V = \sqrt{c_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2} \qquad (10.7)$$

Analýzu obvodu s neharmonickými zdroji v ustáleném stavu provádíme následovně:

- danou periodickou funkci $v(t)$, zpravidla napětí resp. proud zdroje, rozložíme na harmonické složky dle rovnice (10.1) resp. (10.3)
- pro každou harmonickou složku určíme větvové veličiny pomocí SKM
- okamžitou hodnotu hledaných větvových veličin získáme superpozicí okamžitých hodnot od jednotlivých harmonických.

Výpočet výkonů *n* harmonických provádíme podle následujících vztahů:

činný výkon $\quad P = \sum_{i=0}^{n} P_i \quad$ W $\qquad$ (10.8)

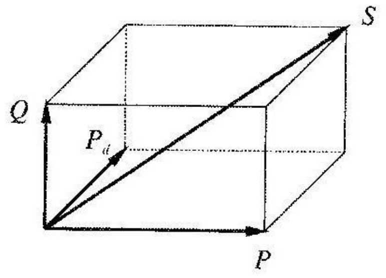
jalový výkon $\quad Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \quad$ VAr $\qquad$ (10.9)

zdánlivý výkon $\quad S = UI \quad$ VA $\qquad$ (10.10)

kde U a I jsou *efektivní hodnoty* napětí a proudu vypočtené podle rovnice (10.5), (10.6). Jelikož pro neharmonické průběhy je $S^2 > P^2 + Q^2$, zavádíme další veličinu:

deformační výkon $\quad P_d = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad$ VAd $\qquad$ (10.11)

V obvodech s neharmonickými zdroji lze stanovit i účiník $\cos\varphi$, ten však nevyjadřuje fázový posun mezi průběhem napětí a proudu, neboť je dán poměrem velikosti činného a zdánlivého výkonu



$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \lambda \qquad (10.12)$$

Graficky lze zdánlivý výkon znázornit jako tělesovou úhlopříčkou kvádru, jehož hrany vyjadřují velikost výkonu činného,jalového a deformačního.

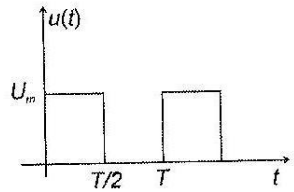
***Příklad X-1*:** Určete Fourierovy koeficienty a_k, b_k, je-li funkce $u(t)$ ve tvaru obdélníkových pulsů: $u(t) = U_m$ pro $t \in \left\langle 0, \frac{T}{2} \right\rangle$, $u(t) = 0$ pro $t \in \left\langle \frac{T}{2}, T \right\rangle$

***Řešení*:**

Podle rov. (10.1) a (10.2) vypočteme:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} U_m \mathrm{d}t = U_m \qquad a_k = 0 \qquad k = 1,2,... \text{ funkce lichá}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} U_m \sin k\omega t\, dt = \frac{2U_m}{T}\left[-\frac{\cos k\omega t}{k\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{U_m}{k\pi}(1 - \cos k\pi)$$



Vzhledem k periodicitě funkce *cos* platí:

pro $k = 2,4,6,...$ je $\cos k\pi = 1 \Rightarrow b_k = 0$

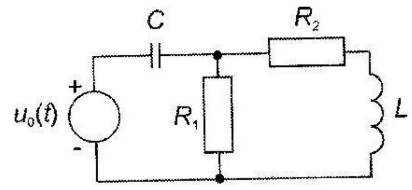
$k = 1,3,5,...$ je $\cos k\pi = -1$

$$b_k = \frac{2U_m}{k\pi}$$

Fourierův rozvoj funkce $u(t)$ zapíšeme ve tvaru

$$u(t) = \frac{U_m}{2} + \sum_{k=1,3,5,...} \frac{2U_m}{\pi}\frac{\sin k\omega t}{k} = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi}\sin\omega t + \frac{2U_m}{\pi}\frac{\sin 3\omega t}{3} + ...$$

***Příklad X-2*:** Určete proud, který do obvodu dodává zdroj neharmonického napětí $u_0(t) = 100 + 50\sqrt{2}\sin\omega t + 10\sqrt{2}\sin(3\omega t + 30°)\,\mathrm{V}$, je-li dáno: $f = 50\,\mathrm{Hz}$, $C = 300\,\mu\mathrm{F}$, $L = 10\,\mathrm{mH}$, $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$.



***Řešení*:**

ss složka: $U_0 = 100\,\mathrm{V}$, $I_0 = 0\,\mathrm{A}$ (kapacitorem neprotéká ss proud)

Z impedance pro k-tou harmonickou

$$\mathbf{Z}_k = \frac{1}{\mathrm{j}k\omega C} + \frac{R_1(R_2 + \mathrm{j}k\omega L)}{R_1 + R_2 + \mathrm{j}k\omega L}$$

vypočteme *proud k-té harmonické*

$k = 1 \qquad \mathbf{Z}_k = 9{,}82\,\angle -76{,}5°\,\Omega \qquad \mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{U}_{01}}{\mathbf{Z}_1} = \frac{50}{9{,}82}\angle 76{,}5°\,\mathrm{A}$

$$i_1(t) = 5{,}1\sqrt{2}\sin(\omega t + 76{,}5°) \quad \mathrm{A}$$

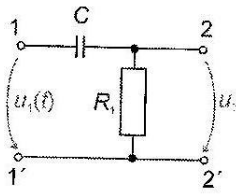
$k = 3 \qquad \mathbf{Z}_3 = 4{,}2\,\angle -28{,}5°\,\Omega \qquad \mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{U}_{03}}{\mathbf{Z}_3} = \frac{10\angle 30°}{4{,}2\,\angle -28{,}5°} = 2{,}4\,\angle 58{,}5° \quad \mathrm{A}$

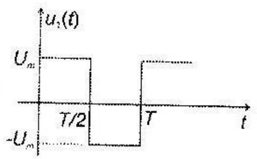
$$i_3(t) = 2{,}4\sqrt{2}\sin(3\omega t + 58{,}5°) \text{ A}$$

Celkový proud dodávaný zdrojem do obvodu je dán *součtem okamžitých hodnot jednotlivých harmonických:*

$$i(t) = 5{,}1\sqrt{2}\sin(\omega t + 76{,}5°) + 2{,}4\sqrt{2}\sin(3\omega t + 58{,}5°) \text{ A}$$

Příklad X-3: Určete časový průběh napětí $u_2(t)$ na svorkách 2-2´, je-li na vstupní svorky1-1´připojen zdroj obdélníkových kmitů.





$R = 10\text{ k}\Omega$
$C = 1\,\mu\text{F}$
$U_m = 100\text{ V}$
$T = 0{,}02\text{ s}$

Řešení: Fourierův rozvoj $\quad u_1(t) = \dfrac{4U_m}{\pi}\left(\sin\omega t + \dfrac{\sin 3\omega t}{3} + \dfrac{\sin 5\omega t}{5} + \dots\right)$

pro k-tou harmonickou platí $\quad U_{2k} = U_{1k}\dfrac{R}{R + \frac{1}{jk\omega C}} = U_{1k}\dfrac{jk\omega RC}{1 + jk\omega RC}$

$k = 1 \qquad U_{21m} = 121{,}6 \angle 17{,}7°\text{ V}$

$k = 3 \qquad U_{23m} = 42{,}2 \angle 6{,}1°\text{ V}$

$k = 5 \qquad U_{25m} = 26{,}7 \angle 0{,}5°\text{ V}$

$$u_2(t) = 121{,}6\sin(\omega t + 17{,}7°) + 42{,}2\sin(3\omega t + 6{,}1°) + 26{,}7\sin(5\omega t + 0{,}5°) + \dots\text{ V}$$

Příklad X-4: Vypočtěte deformační výkon zdroje, jestliže napětí zdroje je $u_0(t) = 60 + 380\sin(\omega t + 15°) + 150\sin(3\omega t - 10°) + 10\sin(5\omega t - 20°)$ V a dodávaný proud je $i(t) = 2 + 5\sin(\omega t - 15°) + 0{,}5\sin(5\omega t + 10°)$ A

Řešení:

Činný výkon: $\quad P = 60.2 + \dfrac{380.5}{2}\cos 30^0 + \dfrac{10.0{,}5}{2}\cos\left(-30^0\right) = 944{,}89\text{ W}$

Jalový výkon: $\quad Q = \dfrac{380.5}{2}\sin 30^0 + \dfrac{10.0{,}5}{2}\sin\left(-30^0\right) = 473{,}75\text{ VAr}$

Efektivní hodnoty napětí a proudu vypočteme Parsevalovou rovností

$$U = \sqrt{60^2 + \frac{380^2 + 150^2 + 10^2}{2}} = 295{,}13\text{ V}, \qquad I = \sqrt{2^2 + \frac{5^2 + 0{,}5^2}{2}} = 4{,}08\text{ A}$$

Z vypočtených hodnot určíme zdánlivý a deformační výkon:

$$S = UI = 1204{,}13\text{ VA} \qquad P_d = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 576{,}8\text{ VAd}$$

10.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

10.1 Určete efektivní hodnotu U periodické funkce $u(t)$
$u(t) = 10 + 100\cos\omega t + 50\cos 2\omega t + 20\cos 3\omega t$ V.

$\boxed{U = 80{,}9\text{ V}}$

10.2 Určete koeficienty Fourierovy řady c_k a φ_k pro periodickou funkci $v(t)$

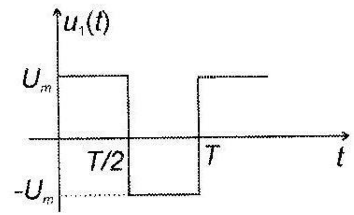
$$v(t) = 10 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{k}\cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k}\sin k\omega t,$$

$\boxed{c_k = \dfrac{10}{k},\ \varphi_k = 53{,}1°}$

10.3 Určete efektivní hodnotu neharmonického proudu
$i(t) = 5 + 10\sin(\omega t + 30°) + 5\sin(3\omega t - 30°)$ A.

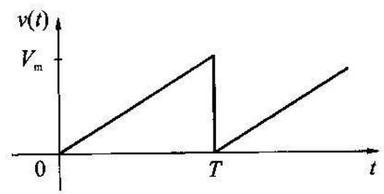
$\boxed{I = 9{,}35\text{ A}}$

10.4 Stanovte Fourierovy koeficienty a_k, b_k obdélníkových kmitů,vypočtěte c_k.



$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = 0,\ a_k = 0, \\ b_k = \dfrac{4U_m}{k\pi} \text{ pro } k \text{ liché} \\ c_k = b_k \end{array}}$$

10.5 Stanovte Fourierovy koeficienty a_0, a_k, b_k pro periodickou funkci $v(t)$ dle obrázku.



Nápověda:

$$\int t\cos k\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\cos k\omega t}{(k\omega)^2} + \frac{t\sin k\omega t}{k\omega}$$

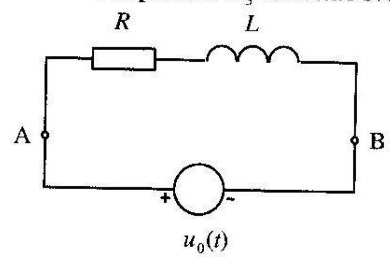
$$\int t\sin k\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\sin k\omega t}{(k\omega)^2} - \frac{t\cos k\omega t}{k\omega}$$

$$\boxed{a_0 = V_m,\ a_k = 0,\ b_k = -\frac{V_m}{k\pi}}$$

10.6 Z koeficientů a_k, b_k určete střední a efektivní hodnotu funkce $v(t)$ z předchozího příkladu. Použijte Parsevalovu rovnici a vztah $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

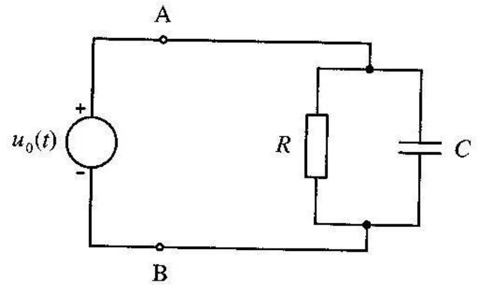
$$\boxed{V_s = \frac{V_m}{2}, \quad V = \frac{V_m}{\sqrt{3}}}$$

10.7 Impedance na svorkách A,B pro 1. harmonickou je $\mathbf{Z}_1 = 10 + \mathrm{j}10\ \Omega$. Stanovte impedanci $\mathbf{Z}_3$ na těchto svorkách pro 3. harmonickou.



$$\boxed{\mathbf{Z}_3 = 10 + \mathrm{j}30\ \Omega}$$

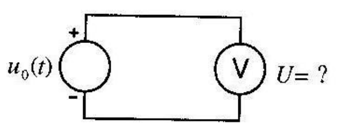
10.8 Obvod podle obrázku je napájen zdrojem periodického (neharmonického) napětí. Admitance mezi svorkami A,B pro 1. harmonickou je $\mathbf{Y}_1 = 1 + \mathrm{j}2\,\mathrm{S}$. Stanovte admitanci $\mathbf{Y}_3$ na těchto svorkách pro 3. harmonickou.



$$\boxed{\mathbf{Y} = 1 + \mathrm{j}\,6\ \mathrm{S}}$$

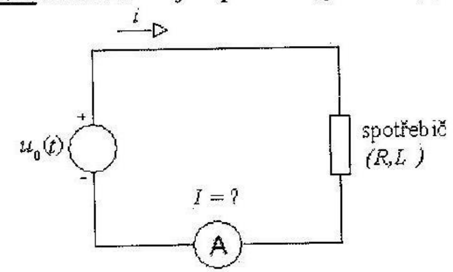
10.9 Stanovte údaj voltmetru, jestliže

$$u_0(t) = 8\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + 6\sqrt{2}\sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\ \mathrm{V}.$$



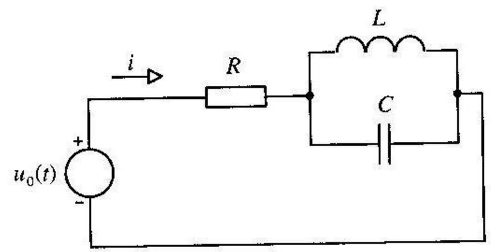
$$\boxed{U = 10\ \mathrm{V}}$$

10.10 Stanovte údaj ampérmetru, jestliže $i(t) = 30 + 40\sqrt{2}\sin 5\omega t$ A.



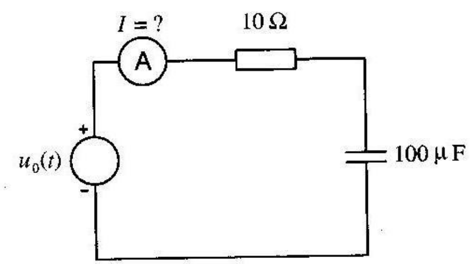
$$\boxed{I = 50\ \mathrm{A}}$$

10.11 Stanovte efektivní hodnotu proudu $i(t)$, jestliže $u_0(t) = 20 + 10\sqrt{2}\sin\omega t$ V, $R = 5\,\Omega$, $\omega L = \frac{1}{\omega C}$.



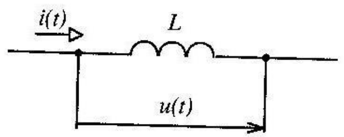
$I = 4$ A;
obvod je pro 1. harmonickou v rezonanci

10.12 Stanovte údaj ampérmetru, jestliže $u_0(t) = 50 + 200\ \sin 1000t$ V.



$$\boxed{I = 10\ \mathrm{A}}$$

10.13 Indukčností protéká proud $i(t)=4+30\sqrt{2}\sin\omega t+\ +5\sqrt{2}\sin 3\omega t$ A. Vypočtěte, kolikrát je amplituda 1. harmonické napětí na indukčnosti větší, než amplituda 3. harmonické.



$$\boxed{\frac{U_{m1}}{U_{m3}}=2}$$

10.14 Určete efektivní hodnotu neharmonického napětí $u(t)=100+25\sin 3\omega t+10\sin 5\omega t$ V.

$$\boxed{U=101{,}8\ \text{V}}$$

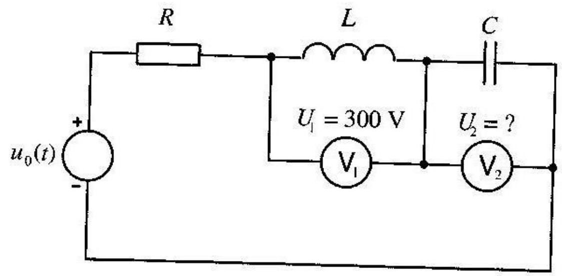
10.15 Efektivní hodnota proudu $i(t)=100+I_m\sin\omega t$ je 103,1 A. Stanovte velikost I_m.

$$\boxed{I_m=35{,}5\ \text{A}}$$

10.16 Určete zdánlivý výkon na dvojpólu, je-li proud
$i(t)=4+10\sqrt{2}\sin\omega t+5\sin 3\omega t$ A a napětí
$u(t)=20+100\sqrt{2}\sin\omega t+25\sin 3\omega t+10\sin 5\omega t$ V.

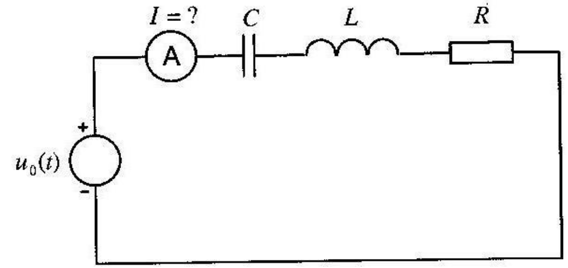
$$\boxed{S=1176{,}4\ \text{VA}}$$

10.17 Stanovte údaj voltmetru V_2, jestliže voltmetr V_1 ukazuje $U_1=300$ V. Napětí zdroje $u_0(t)=400+200\sqrt{2}\sin\omega t$ V; při úhlové frekvenci ω je $\omega L=\dfrac{1}{\omega C}$.



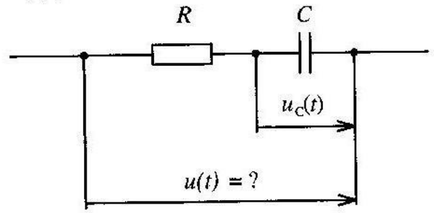
$$\boxed{U_2=500\ \text{V}}$$

10.18 Stanovte údaj ampérmetru, jestliže $u_0(t)=400+200\sqrt{2}\sin\omega t$ V, $R=40\ \Omega$; při úhlové frekvenci ω je $X_C=X_L=60\,\Omega$.



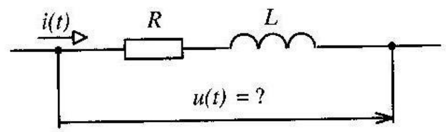
$$\boxed{I_2=5\ \text{A}}$$

10.19 Stanovte průběh napětí $u(t)$ na větvi podle obrázku, jestliže $u_C(t)=10+20\sin 100t$ V, $R=100\ \Omega$, $C=300\ \mu$F.



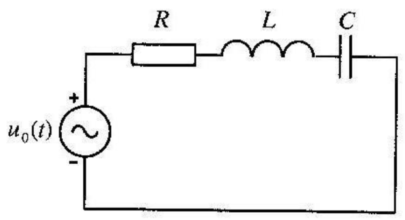
$$\boxed{u(t)=10+20\sin 100t+60\cos 100t\ \text{V}}$$

10.20 Stanovte průběh napětí $u(t)$ na větvi podle obrázku, jestliže $i(t)=2+3\sin 100t$ A, $R=1\ \Omega$, $L=10$ mH.



$$\boxed{u(t)=2+3\sin 100t+3\cos 100t\ \text{V}}$$

10.21 Stanovte činný výkon zdroje, jestliže
$u_0(t)=100+100\sqrt{2}\sin(100t+45°)$ V a $\omega L=\dfrac{1}{\omega C}=R=100\ \Omega$.

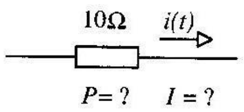


$\boxed{P = 100 \text{ W; obvod je v rezonanci pro 1. harmonickou napětí zdroje}}$

10.22 Napájí-li se odpor ze zdroje proudu pravoúhlých kmitů, je jeho výkon (Jouleovo teplo) P_1, napájíme-li jej ze zdroje proudu harmonického průběhu, je jeho výkon P_2. Stanovte poměr P_1/P_2, jsou-li maximální hodnoty proudu v obou případech stejné.

$$\boxed{\frac{P_1}{P_2} = 2}$$

10.23 Proud protékající odporem 10 Ω má tento časový průběh: $i(t) = 5 + 14{,}14\cos t + 7{,}07\cos 2t$ A.
Stanovte: a) efektivní hodnotu proudu, b) činný výkon dodaný odporu



$\boxed{I = \sqrt{150} \text{ A}, \ P = 1{,}5 \text{ kW}}$

10.24 Napětí a proud na větvi obvodu se v závislosti na čase mění periodicky podle vztahů:

$u(t) = 80\sqrt{2}\sin(\omega t + 15°) + 60\sqrt{2}\sin(3\omega t - 20°)$ V,

$i(t) = 40\sqrt{2}\sin(\omega t + 75°) + 30\sqrt{2}\sin(3\omega t + 40°)$ A.

Stanovte činný výkon větve.

$\boxed{P = 2{,}5 \text{ kW}}$

10.25 Napětí a proud na větvi obvodu se v závislosti na čase mění periodicky podle vztahů:

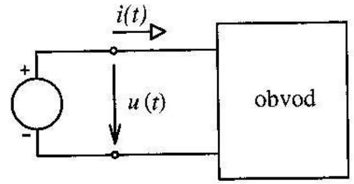
$u(t) = 80\sqrt{2}\sin(\omega t + 15°) + 60\sin(3\omega t + 20°)$ V,

$i(t) = 40\sqrt{2}\sin(\omega t - 15°) + 40\sin(3\omega t - 70°)$ A.

Stanovte jalový výkon větve.

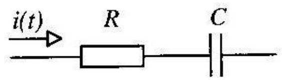
$\boxed{Q = 2800 \text{ VAr}}$

10.26 Stanovte činný výkon dodávaný do obvodu, je-li na vstupních svorkách napětí $u(t) = 100 + 100\cos t + 50\cos 2t + 30\cos 3t$ V
a proud $i(t) = 10\cos(t - 60°) + 2\cos(3t - 45°)$ A.



$\boxed{P = 271{,}2 \text{ W; přičemž: } P_0 = 0, \ P_1 = 250 \text{ W}, \ P_2 = 0, \ P_3 = 21{,}2 \text{ W}}$

10.27 Impedance dvojpólu R, C je při frekvenci ω rovna $\mathbf{Z} = 6 - \mathrm{j}9\ \Omega$. Stanovte činný a jalový výkon větve, jestliže $i(t) = 10\sqrt{2}\sin\omega t + \sqrt{2}\sin 3\omega t$ A.

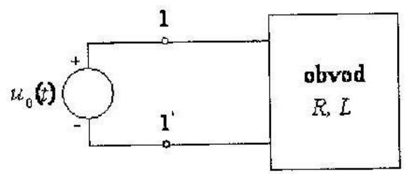


$\boxed{P = 606 \text{ W}, \ Q = -903 \text{ VAr}}$

10.28 Impedance dvojpólu RL je pro 3. harmonickou $\mathbf{Z} = 3 + \mathrm{j}12\ \Omega$, stanovte jalový výkon, je-li proud $i(t) = 2 + 10\sin\omega t + 5\sin(3\omega t + 30°)$ A.

$\boxed{Q = 350 \text{ VAr}}$

10.29 Stanovte P, S a $\cos\varphi$, je-li na vstupních svorkách $1 - 1'$ proud $i(t) = 10 + 3\sin\omega t + \sin(3\omega t + 30°)$ A
a napětí $u_0(t) = 100 + 200\sin(\omega t + 30°) + 20\sin(3\omega t + 60°)$ V.



$\boxed{P = 1268 \text{ W}, \ U = 173{,}8 \text{ V}, \ I = 10{,}25 \text{ A}, \ S = 1{,}781 \text{ kVA}, \ \cos\varphi = 0{,}71}$

10.30 Určete účiník $\cos\varphi$, jestliže na svorkách $1 - 1'$ obvodu z předchozího příkladu byly zjištěny hodnoty $P = 50$W, $Q = 30$ VAr, $P_d = 20$ VAd,

$\boxed{S = 61{,}6 \text{ VA}, \ \cos\varphi = 0{,}81}$

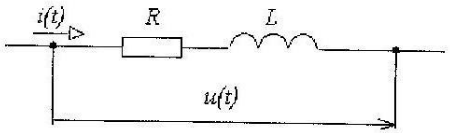
10.31 Určete hodnotu zdánlivého a deformačního výkonu, je-li dáno: $P = 1000$ W, $Q = 500$ VAr, $U = 1000$ V, $I = 10$ A.

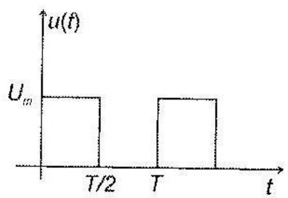
$$\boxed{S = 10 \text{ kVA},\ P_d = 9{,}93 \text{ kVAd}}$$

10.32 Stanovte zdánlivý výkon a účiník dvojpólu, je-li dáno:
$i(t) = 10 + 10\sin\omega t + 5\sin(3\omega t - 15°)$ A
$u(t) = 20 + 200\sin\omega t + 10\sin(3\omega t + 45°)$ V.

$$\boxed{\begin{array}{l} I = 12{,}74 \text{ A}, U = 141{,}6 \text{ V}, S = 1804 \text{ VA} \\ P = 1012{,}5 \text{ W}, \cos\varphi = 0{,}56 \end{array}}$$

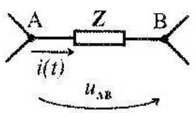
10.33 Na svorky dvojpólu je připojeno napětí $u(t)$ ve tvaru obdélníkových pulsů, určete činný výkon dodaný do dvojpólu, je-li dáno:
$U_m = 100$ V, $R = 10\ \Omega$, $L = 10$ mH, $\omega_1 = 1000$ s^{-1}





P = 353,8 W
efektivní hodnoty I_0=5 A,
$I_1 = 3{,}086$ A, $I_3 = 0{,}474$ A,
$I_5 = 0{,}177$ A

10.34 Vypočtěte časový průběh napětí na impedancí **Z**, jestliže časový průběh proudu je $i(t) = 5\sin(\omega t + 30^0) + 2\sin(3\omega t - 50^0)$ A a impedance pro 1.harmonickou má hodnotu $\mathbf{Z} = 10 - j30\ \Omega$.

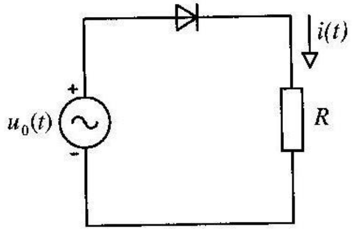


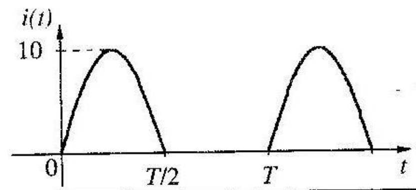
$$\boxed{u(t) = 158{,}1\sin(\omega t - 41{,}57^0) + 28{,}28\sin(3\omega t - 95^0)\text{V}}$$

10.35 Vypočtěte deformační výkon, je-li na impedanci napětí a proud :
$u(t) = 50 + 100\sin(\omega t + 30^0) + 20\sin(3\omega t - 50^0)$V,
$i(t) = 2 + 8\sin(\omega t - 20^0) + 2\sin(3\omega t - 60^0)$A.

$$\boxed{\begin{array}{l} P = 3760{,}82 \text{ W},\ Q = 309{,}89 \text{VAr} \\ S = 540{,}54 \text{ VA},\ P_d = 232{,}72 \text{VAd} \end{array}}$$

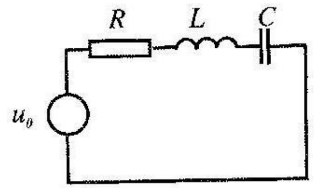
10.36 V obvodu dle obrázku je zdroj harmonického napětí $u(t) = 100\sin\omega t$ V. Zakreslete časový průběh proudu a vypočtěte činný příkon spotřebiče o odporu $R = 10\,\Omega$.





P = 250 W

10.37 Vypočtěte deformační výkon v obvodu, je-li dáno:
$u_0(t) = 220\cos\omega t + 50\cos(3\omega t + 20°)$ V
$f = 50$ Hz, $R = 30\Omega$, $L = 0{,}1$ H, $C = 200\mu$F,



$$\boxed{\begin{array}{l} i(t) = 4{,}61\sqrt{2}\cos(\omega t - 27{,}29°) + \\ +0{,}377\cos(3\omega t - 51{,}35°) \text{ A} \\ P = 641{,}59 \text{ W},\ Q = 341{,}23 \text{ VAr}, \\ S = 737{,}83 \text{ VA},\ P_d = 126{,}57 \text{ VAd} \end{array}}$$

Základy elektrických obvodů v příkladech

prof. Ing. Zdeňka Benešová, CSc.
Ing. Marcela Ledvinová, Ph.D.

Lektor:	doc. Ing. Jiří Kotlan, CSc.
Vydavatel:	Západočeská univerzita v Plzni Univerzitní 8, 306 14 Plzeň Vydavatelství – tel.: 377 631 951
Katedra:	teoretické elektrotechniky
Vedoucí katedry:	prof. Ing. Zdeňka Benešová, CSc.
Určeno:	pro studenty 1. a 2. ročníku FEL, FAV
Vyšlo:	únor 2008
Počet stran:	146
Počet obrázků:	306
Počet příloh:	0
AA / VA:	9,04 / 9,43
Nositelé autorských práv:	autorky Západočeská univerzita v Plzni
Vydání:	1. vydání brožované
Náklad:	400 výtisků
Číslo publikace:	1851
Vyrobil:	TYPOS, tiskařské závody, a.s., Plzeň
Cena Kč:	157,00

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.

55 - 066 - 08

17/54 Kč 157,00