2 Elektromagnetické vlny ve volném prostředí

V předchozí kapitole jsme se seznámili s Maxwellovými rovnicemi, které popisují:

- Jak časově proměnné elektrické pole **E** a elektrický proud **J** vytvářejí rotující magnetické pole **H**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + j\omega\varepsilon \mathbf{E} \tag{2.1a}$$

- Jak časově proměnné magnetické pole **H** vytváří rotující elektrické pole **E**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} \tag{2.1b}$$

kde γ je měrná vodivost prostředí, $\varepsilon = \varepsilon_0\ \varepsilon_r$ je permitivita prostředí a $\mu = \mu_0\ \mu_r$ značí permeabilitu prostředí (veličiny s indexem nula reprezentují parametry vakua). Symbol ∇ značí diferenciální operátor, který je v kartézském souřadném systému reprezentován vektorem

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

V celé této kapitole budeme předpokládat, že se parametry prostředí nemění.

Elektromagnetické pole, které vznikne v určitém místě prostoru, nezaplní tento prostor okamžitě, ale šíří se v něm konečnou rychlostí, jež závisí na vlastnostech prostředí. Chceme-li toto šíření analyzovat, musíme nalézt řešení takzvaných vlnových rovnic

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2\ \mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{2.3a}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2\ \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{2.3b}$$

kde symbol k značí vlnové číslo

$$k^2 = -j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon) \tag{2.4}$$

Zde ω značí úhlovou frekvenci, μ je permeabilita, ε permitivita a γ měrná vodivost prostředí.

Vztahy (2.3) vděčí za své jméno své podobě s rovnicemi, popisujícími šíření akustických a mechanických vln. Vyřešením rovnic (2.3) nalezneme intenzitu elektrického pole **E** a intenzitu magnetického pole **H** vlny, šířící se prostorem.

Předpokládejme, že zdrojem vlny je všesměrový bodový zářič. Pokud bychom si v určitém časovém okamžiku t_0 *udělali snímek* generovaného elektromagnetického pole, zjistili bychom, že místa se stejnou fází intenzity elektrického nebo magnetického pole (vlnoplochy) jsou soustředné kulové povrchy se středem v bodovém zářiči. Říkáme, že prostorem se šíří *kulová vlna.* Společný střed kulových vlnoploch nazýváme *fázovým středem.*

Pokud bude zdrojem vlny harmonický proud tekoucí nekonečně dlouhým přímým vodičem, budou mít vlnoplochy válcový tvar a hovořit budeme o šíření *válcové vlny*.

Budeme-li kulovou nebo válcovou vlnu pozorovat z místa *téměř nekonečně* vzdáleného od zdroje, bude zakřivení vlnoploch tak malé, že budeme moci považovat vlnoplochu za rovinnou. Z našeho hlediska se tedy bude prostorem šířit *rovinná vlna*.

2 Electromagnetic waves in free space

In the previous chapter, Maxwell equations were explained to describe that:

- Time variant electric field **E** and electric current **J** excite rotating magnetic field **H**

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + j\omega\varepsilon \mathbf{E} \tag{2.1a}$$

- Time variant magnetic field **H** excites rotating electric field **E**

$$\nabla \times \mathbf{E} = - j\omega\mu \mathbf{H} \tag{2.1b}$$

where γ is conductivity of environment, $\varepsilon = \varepsilon_0\ \varepsilon_r$ is permittivity and $\mu = \mu_0\ \mu_r$ permeability of environment (quantities with subscript zero represent parameters of vacuum). The symbol ∇ denotes the differential operator, which is represented by the vector (in Cartesian coordinate system)

$$\nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

In this chapter, parameters of environment are assumed being constant.

Electromagnetic field, which is excited in a given part of space, propagates through the space by a finite velocity depending on parameters of environment. If field propagation is going to be analyzed, so called wave equations have to be solved

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2\ \mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{2.3a}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2\ \mathbf{E} = \mathbf{0} \tag{2.3b}$$

where the symbol k denotes the wavenumber

$$k^2 = - j\omega\mu(\gamma + j\omega\varepsilon) \tag{2.4}$$

Here, ω is angular frequency, μ is permeability, ε permittivity and γ conductivity of environment.

Equations (2.3) are called wave equations due to their similarity to relations describing the propagation of acoustic and mechanical waves. The intensity of electric and magnetic field of an electromagnetic wave propagating in the space can be evaluated by solving (2.3).

Let us assume that the wave is radiated by an omnidirectional point source. If *a picture* of generated electromagnetic field *is taken* at a certain moment t_0, the places with the identical phase of the field intensity (wavefronts) create centric spherical surfaces with the center in the point source. Thus, *a spherical wave* is said to propagate through space. The common center of spherical wavefronts is called *the phase center.*

If the source of a wave is a harmonic current flowing through an infinitely long straight conductor, then wavefronts are cylindrical and *the cylindrical wave* propagates in space.

If the spherical or cylindrical waves are observed from a point in *almost infinite* distance from the source, then the wavefront curvature is negligibly small, and can be considered planar. From our viewpoint, *a plane wave* propagates in space.

2.1 Šíření rovinné vlny

Pro řešení vlnových rovnic použijeme kartézskou souřadnou soustavu natočenou tak, aby osa z byla orientována do směru, v němž se vlna šíří, a aby vektor elektrické intenzity **E** ležel v ose x. Vektor **E** tedy bude mít jedinou nenulovou složku E_x.

Amplituda intenzity elektrického pole E_x se bude měnit pouze ve směru šíření z. Ve směrech x a y (na vlnoploše) bude amplituda E_x konstantní. To znamená, že všechny derivace podle x a podle y budou nulové. Vektorová rovnice (2.3b) proto přejde na jedinou rovnici skalární

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \tag{2.5}$$

Obecné řešení rovnice (2.5) může být zapsáno pomocí exponenciál

$$E_x = A \exp(-jkz) + B \exp(+jkz) \tag{2.6a}$$

nebo prostřednictvím goniometrických funkcí

$$E_x = A' \sin(kz) + B' \cos(kz) \tag{2.6b}$$

Symboly A, B, A' a B' jsou integrační konstanty. Zápisu (2.6b) dáváme přednost v případě, kdy očekáváme vznik stojatého vlnění (primární vlna přicházející od zdroje se skládá s vlnou sekundární, vzniklou odrazem primární vlny od překážky). Pokud se zabýváme šířením vlny, vybereme zápis (2.6a).

V řešení (2.6a) hraje důležitou roli vlnové číslo k. Nejprve přepišme jeho definiční vztah (2.4) do tvaru

$$k^2 = -j\omega\mu \; j\omega\left(\varepsilon - j\,\frac{\gamma}{\omega}\right) \tag{2.7}$$

Výraz uvnitř závorky budeme nazývat komplexní permitivitou prostředí $\tilde{\varepsilon}$. Díky tomuto označení se nám vztah pro vlnové číslo podstatně zjednoduší

$$k^2 = \omega^2 \mu \tilde{\varepsilon} \tag{2.8}$$

Nyní vlnové číslo (2.8) odmocněme. Zatímco ω^2 a μ jsou kladná reálná čísla, a tudíž i jejich odmocnina bude kladné reálné číslo, $\tilde{\varepsilon}$ je komplexní číslo se záporným argumentem, jehož odmocnina je rovněž komplexní číslo se záporným argumentem. Kladný kořen k tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$k = k' - jk'' \tag{2.9}$$

Výsledek (2.9) dosadíme zvlášť do prvního a zvlášť do druhého sčítance v (2.6):

$$E_x(z) = A \exp[-j(k' - jk'')z] = A \exp(-k''z) \exp(-jk'z) \tag{2.10}$$

Uvědomme si, že pracujeme s fázory. Vyšetřovaná intenzita elektrického pole má tedy i svůj časový rozměr

$$E_x(z,t) = A \exp(-k''z) \exp[j(\omega t - k'z)] \tag{2.11}$$

Reálný signál je reálnou částí fázorové funkce:

$$E_x(z,t) = A \exp(-k''z) \cos(\omega t - k'z) \tag{2.12}$$

2.1 Plane wave propagation

Wave equations are solved in the Cartesian coordinate system. The z-axis is oriented to the direction of the wave propagation, and the electric field intensity vector **E** lies on the *x*-axis. The only nonzero component of the vector **E** is therefore E_x.

The amplitude of the electric field intensity E_x can vary in the direction of propagation *z* only. The amplitude E_x is constant in the direction of *x* and *y* (on the wavefront). Therefore, all derivations with respect to *x* and *y* are zero. The vector equation (2.3b) thereby shifts to a single scalar equation

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \tag{2.5}$$

A general solution of (2.5) can be expressed through exponentials

$$E_x = A \exp(-jkz) + B \exp(+jkz) \tag{2.6a}$$

or through goniometric functions

$$E_x = A' \sin(kz) + B' \cos(kz) \tag{2.6b}$$

The *A*, *B*, *A'* and *B'*symbols are constants of integration. The relation (2.6b) is preferred if formation of a standing wave is expected (the primary wave radiated by the source interferes with the secondary wave, formed through reflecting the primary wave from an obstacle). Since the wave propagation is going to be studied, the relation (2.6a) is selected.

In the relation (2.6a), the wavenumber *k* plays an important role. First, the definition relation (2.4) can be rewritten to the form:

$$k^2 = -j\omega\mu\, j\omega\left(\varepsilon - j\,\frac{\gamma}{\omega}\right) \tag{2.7}$$

The expression in parentheses is called the complex permittivity of a medium $\tilde{\varepsilon}$. According to this denotation, our relation for wavenumber gets significantly simpler

$$k^2 = \omega^2 \mu \tilde{\varepsilon} \tag{2.8}$$

Now let us extract the wavenumber (2.8). While ω^2 and μ are positive real numbers and thus their square roots will also be positive real numbers, $\tilde{\varepsilon}$ is a complex number with negative argument whose square root is also complex number with negative argument. The positive root *k* can therefore be written as follows:

$$k = k' - jk'' \tag{2.9}$$

The result (2.9) is substituted into the first and into the second addend in (2.6a) separately:

$$E_x(z) = A \exp[-j(k' - jk'')z] = A \exp(-k''z)\exp(-jk'z) \tag{2.10}$$

Let us realize that we are working with the phasors. Thus, the considered electric field intensity has also its time dimension

$$E_x(z,t) = A \exp(-k''z)\exp[j(\omega t - k'z)] \tag{2.11}$$

The real signal makes the real part of phasor function:

$$E_x(z,t) = A \exp(-k''z)\cos(\omega t - k'z) \tag{2.12}$$

Ze získaného vztahu nyní vyplývá fyzikální význam konstant:

- Symbol A značí amplitudu x-ové složky vektoru intenzity elektrického pole v počátku souřadného systému $A = E_x(z=0)$.
- Symbol k'' [m^{-1}] je tzv. *měrný útlum*. Popisuje zmenšování amplitudy vlny ve směru osy z, tedy ve směru šíření. V důsledku nenulové vodivosti prostředí γ v něm vlna indukuje proudy, které toto prostředí ohřívají. Vše se děje na úkor energie naší vlny.
- Symbol k' [$rad.m^{-1}$] je tzv. *měrná fáze*. Udává nám, o kolik radiánů se *na fotografii vlny*[1] změní její fáze na dráze $z = 1$ m.

Vztah (2.12) rovněž ilustruje časoprostorový charakter vlny. Stojí-li pozorovatel v místě $z = z_0$, bude se mu vlnění jevit jako harmonická funkce v čase. Pokud pozorovatel *vyfotografuje* vlnu v čase $t = t_0$, uvidí na snímku vlnu jako harmonickou funkci v prostoru.

Z argumentu kosinu v (2.12) vidíme, že časový člen ωt se od členu prostorového kz liší znaménkem. Zdali je časový člen kladný a prostorový záporný nebo zdali je tomu naopak, je věcí dohody. My budeme používat znaménka tak, jak jsou uvedena v (2.12).

Kromě výše uvedených parametrů je vlnění popisováno jeho *fázovou rychlostí* a *vlnovou délkou*. Fázová rychlost v_f [$m.s^{-1}$] udává vzdálenost z, jakou naše vlnoplocha s fází ϕ_0 urazí za jednu sekundu. Pro fázovou rychlost platí vztah:

$$v_f = \omega / k' \tag{2.13}$$

Vlnová délka λ [m] udává dráhu, kterou vlnoplocha s fází ϕ_0 urazí za dobu, odpovídající časové periodě vlny T [s]

$$\lambda = v_f T = v_f / f \tag{2.14}$$

kde f [Hz] je kmitočet vlny a $f = T^{-1}$. Odsud vyplývá, že fázový posuv mezi dvěma body na ose z, které jsou vzdáleny λ, je 2π radiánů. Jelikož reálná část vlnového čísla udává, o kolik radiánů se změní fáze na jednom metru v ose z, lze k' vyjádřit pomocí vlnové délky jako

$$k' = 2\pi / \lambda \tag{2.15}$$

Nyní se opět vraťme k obecnému řešení vlnové rovnice (2.6a) a zaměřme svou pozornost na její druhý sčítanec. Reálný časoprostorový signál, odpovídající tomuto členu, bude

$$E_x(z,t) = A\exp(k''z)\cos(\omega t + k'z) \tag{2.16}$$

Fázová rychlost, vyplývající z argumentu goniometrické funkce v (2.16), je dána výrazem

$$v_f = -\omega / k' \tag{2.17}$$

Vidíme, že fázová rychlost je orientována do směru -z a že amplituda funkce (2.16) ve směru -z klesá. Ze získané zkušenosti tedy můžeme říci, že (2.16) popisuje elektrickou intenzitu rovinné harmonické vlny, šířící se ve směru -z. Této vlně se říká *zpětná vlna*, a jak již bylo řečeno, vzniká např. odrazem *přímé postupné vlny* od nějaké nehomogenity prostředí.

[1] Představit si pole zároveň v prostoru i čase je velmi obtížné. Zajímá-li nás tedy pouze prostorové rozložení vlny, čas si zastavíme (pole *vyfotografujeme*, vypočteme jeho závislost na prostorových souřadnicích v jediném časovém okamžiku $t = t_0$).

From the obtained relation, the physical meaning of the constants arises:

- The symbol A denotes the amplitude of the x component of an electric field intensity vector at the origin of the coordinate system $A = E_x(z=0)$.
- The symbol k'' [m^{-1}] is the *attenuation constant* describing the decrease of the wave amplitude in the z direction. Due to the nonzero conductivity γ, the wave induces currents which heat the medium (wave energy is transformed to the heat).
- The symbol k' [rad.m^{-1}] is the *phase constant* telling us of how much radians the phase of a wave changes on its photograph[2]at a distance z = 1 m.

Eqn. (2.12) also illustrates the spatiotemporal pattern of a wave. If the observer stands in the place $z = z_0$, then the wave acts as a harmonic function in time. If the observer takes a photo of the wave in the time $t = t_0$, he can see the wave as a harmonic function in space.

The cosine argument in (2.12) shows that the time component ωt differs from the space component kz in sign. Whether the time component is positive and the space component is negative or whether it is vice versa, depends on the stipulation. We use notation from (2.12).

Beside the parameters above, the wave is described by its *phase velocity* and *wavelength*. The phase velocity v_f [m.s^{-1}] determines the distance z, that our wavefront with the phase ϕ_0 has travelled in one second. Phase velocity is given by the equation:

$$v_f = \omega / k' \tag{2.13}$$

The wavelength λ [m] determines the distance that the wavefront with phase ϕ_0 travels during a period of time that is equal to a time period of the wave T [s]

$$\lambda = v_f T = v_f / f \tag{2.14}$$

where f [Hz] is the wave frequency and $f = T^{-1}$. Obviously, the phase shift between two points on the z-axis that are at a distance λ is 2π radians. Since the real part of the wavenumber determines the phase variation on one meter along the z-axis, k' can be expressed as:

$$k' = 2\pi / \lambda \tag{2.15}$$

Let us consider the general solution of the wave equation (2.6a) and focus on the second addend. The real spatiotemporal signal that is adequate to this component is

$$E_x(z,t) = A\exp(k''z)\cos(\omega t + k'z) \tag{2.16}$$

The phase velocity arising from the goniometric function argument in (2.16) is given by

$$v_f = -\omega / k' \tag{2.17}$$

Obviously, the phase velocity is oriented to the -z direction and the amplitude of the function (2.16) decreases in the -z direction. Hence, (2.16) describes an electric intensity of a planar harmonic wave propagating to the -z direction. This wave is so-called *backward wave* and being formed by the reflection of a *straight travelling wave* from inhomogeneity of a medium.

[2] To imagine a field in time and in space simultaneously is difficult. If we are interested in the spatial distribution of a wave only, the time is stopped (*a photograph* of the field *is taken* and the dependence on spatial coordinates in a single time instant $t = t_0$ is computed).

Vlnové číslo má vektorový charakter. Velikost *vlnového vektoru* je dána vztahem (2.4), jeho směr je totožný se směrem šíření vlny. V naší situaci je vlnový vektor **k** = k**z**. Pokud bychom souřadný systém pootočili o úhel α (viz obr. 2.1), bude mít vlnový vektor vedle z-ové složky nenulovou i složku y-ovou. Složky počítáme klasicky; např. pro reálné části **k** platí:

$$k'_z = |\mathbf{k}'|\cos(\alpha) \tag{2.18a}$$

$$k'_y = |\mathbf{k}'|\sin(\alpha) \tag{2.18b}$$

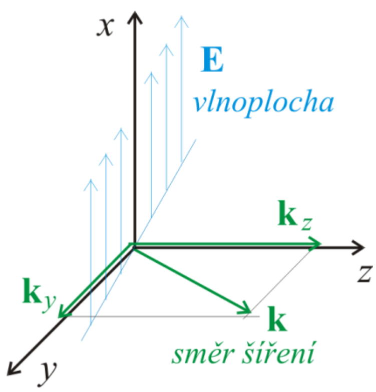
Fázové rychlosti ve směrech souřadných os spočítáme následujícím způsobem:

$$v_{fy} = \frac{\omega}{k'_y} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}'|\sin(\alpha)} = \frac{v_f}{\sin(\alpha)} \tag{2.19}$$

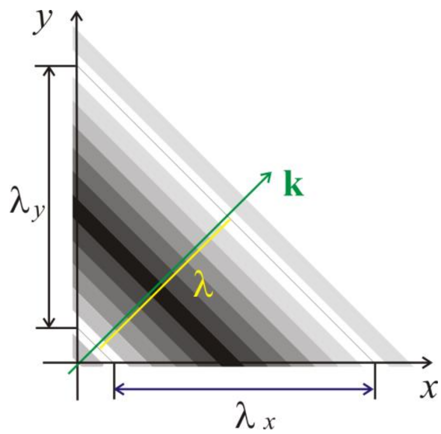
Obdobně postupujeme při výpočtu vlnové délky ve směrech souřadných os

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k'_y} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}'|\sin(\alpha)} = \frac{\lambda}{\sin(\alpha)} \tag{2.20}$$

Skutečnost, že vlnová délka roste se vzrůstem úhlu mezi směrem šíření a směrem, v němž počítáme vlnovou délku, je ilustrována na obr. 2.1. Pokud v určitém směru vzroste vlnová délka, musí v něm vzrůst i fázová rychlost, jelikož fáze musí během periody T nyní urazit větší vzdálenost.



Obr. 2.1 *Šíření rovinné vlny v obecném směru.*



Obr. 2.2 *Pohled „shora" na rovinnou vlnu (maximální intenzity černě, minimální bíle).*

Dále se zaměřme na vektor intenzity magnetického pole **H** naší vlny. Dosazením intenzity elektrického pole **E** do druhé Maxwellovy rovnice získáme jednotlivé složky vektoru magnetické intenzity

$$H_x = H_z = 0 \tag{2.21a}$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\gamma + j\omega\varepsilon}{j\omega\mu}}\, E_x \tag{2.21b}$$

Konstanta úměrnosti mezi elektrickou a magnetickou intenzitou

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} \tag{2.22}$$

se nazývá *vlnová impedance prostředí* Z_0 [Ω].

The wavenumber behaves as a vector. The magnitude of a *wave vector* is given by eqn. (2.4); its direction is equal to the direction of wave propagation. In our situation, the wave vector is $\mathbf{k} = k\mathbf{z}$. If the coordinate system is shifted an angle α (see Fig. 2.1), the wave vector has even the nonzero y component. Components are computed conventionally: for treal pars of $\mathbf{k}$ holds:

$$k'_z = |\mathbf{k}'|\cos(\alpha) \tag{2.18a}$$

$$k'_y = |\mathbf{k}'|\sin(\alpha) \tag{2.18b}$$

The phase velocities in the directions of coordinate axes are computed in the following way:

$$v_{fy} = \frac{\omega}{k'_y} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}'|\sin(\alpha)} = \frac{v_f}{\sin(\alpha)} \tag{2.19}$$

Similar procedure is taken while computing the wavelength in directions of coordinate axes

$$\lambda_y = \frac{2\pi}{k'_y} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}'|\sin(\alpha)} = \frac{\lambda}{\sin(\alpha)} \tag{2.20}$$

Given the fact, that the wavelength increases with the increase in the angle between the direction of propagation and direction in which we compute the wavelength, is shown in Fig. 2.1. If the wavelength increases in a certain direction, then also the phase velocity has to increase because the phase then must travel longer distance during the period T.

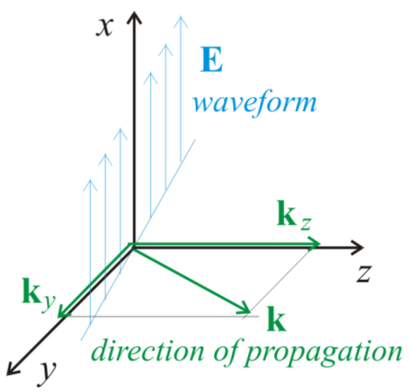


Fig. 2.1 *The propagation of a plane wave in a general direction.*

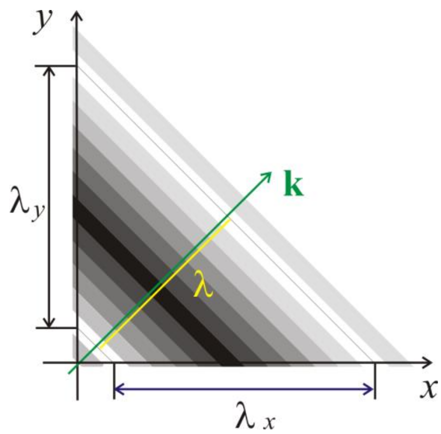


Fig. 2.2 *The top view on a plane wave (maximum: black, minimum: white)*

Let us focus on the magnetic field intensity vector $\mathbf{H}$. Substituting electric field intensity $\mathbf{E}$ into the second Maxwell equation, components of the magnetic intensity vector are obtained:

$$H_x = H_z = 0 \tag{2.21a}$$

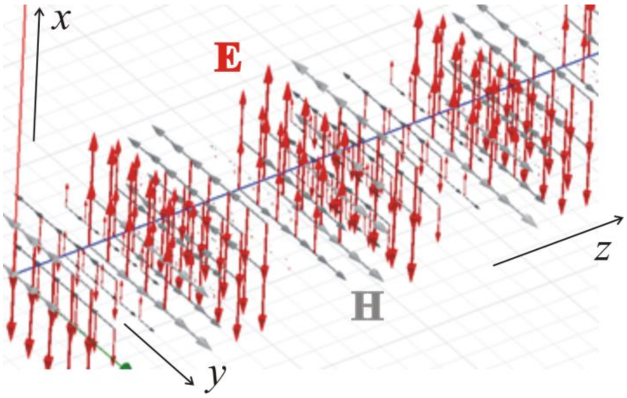
$$H_y = \sqrt{\frac{\gamma + j\omega\varepsilon}{j\omega\mu}}\, E_x \tag{2.21b}$$

The constant of the proportionality between the electric and magnetic intensity

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma + j\omega\varepsilon}} \tag{2.22}$$

is called the *wave impedance of a medium* Z_0 [Ω].

Všimněme si, že vektory elektrické a magnetické intenzity jsou vzájemně kolmé. Oba jsou navíc kolmé ke směru šíření. Můžeme tedy říci, že rovinná vlna ve volném prostoru je *příčně (transversálně) elektromagnetická* (TEM). Tedy, vektory elektrické a magnetické intenzity nemají *podélné (longitudinální)* složky neboli jejich složky, rovnoběžné se směrem šíření, jsou nulové (viz obr. 2.3).



Obr. 2.3 *Intenzita rovinné vlny ve volném prostoru.*

Na obr. 2.3 je znázorněna okamžitá velikost vektorů **E** a **H** v nějakém časovém okamžiku t_0 na ose z. Obrázek je nakreslen pro bezeztrátové prostředí. Proto jsou elektrická a magnetická intenzita ve fázi, a proto jejich amplituda ve směru šíření neklesá.

Dále se ještě zmiňme o Poyntingově vektoru

$$\Pi = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \tag{2.23}$$

Směr Poyntingova vektoru je totožný se směrem šíření vlny a jeho velikost má význam plošné hustoty komplexního výkonu, neseného elektromagnetickou vlnou. Ve vztahu (2.23) značí symbol × vektorový součin a * komplexní sdruženost složek vektoru **H**[3].

2.2 Příklady

Představme si elektromagnetickou vlnu, která se šíří prázdným bezeztrátovým[4] prostorem. Pokud má elektrická (magnetická) intenzita této vlny stejnou fázi v každém bodě roviny kolmé na směr šíření vlny, nazveme ji <u>vlnou rovinnou</u>. Pokud je v každém bodě popsané roviny stejná i amplituda elektrické (magnetické) intenzity, mluvíme o <u>vlně uniformní</u>.

Nejmenší vzdálenost dvou míst se stejnou fází nazýváme vlnovou délkou λ [m]. Vypočteme ji jako součin fázové rychlosti v_f [m/s] a časové periody T [s]

$$\lambda = v_f\, T \tag{2.24}$$

3 Důvod pro komplexní sdruženost vektoru **H** je týž, z jakého v teorii obvodů při výpočtu komplexního výkonu komplexně sdružujeme proud $P = UI^*$: fáze komplexního výkonu je dána fázovým posuvem mezi napětím a proudem, a tudíž musíme od fáze napětí fázi proudu *odečíst*. Kdybychom nepoužili pro výpočet komplexního výkonu komplexně sdruženého proudu, fáze napětí a proudu bychom při násobení *sčítali*.

4 Prostředí neobsahuje žádné volné nosiče náboje a jeho vodivost je nulová $\gamma = 0$.

Notice that the vectors of electric and magnetic field intensity are perpendicular to each other. Both are also perpendicular to the direction of propagation. Therefore, we can say that the plane wave in a free space is *transverse electromagnetic* (TEM). Thus, the electric and magnetic field intensity vectors do not have *longitudinal* components or in other words their components that are parallel with the direction of propagation are equal to zero (see Fig. 2.3).

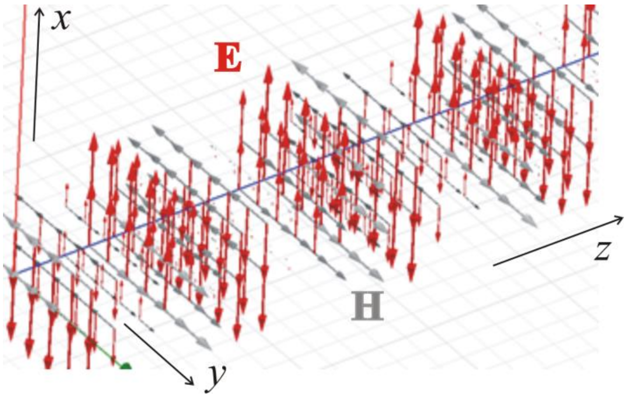


Fig. 2.3 *The intensity of a plane wave in free space.*

Fig. 2.3 shows the instantaneous magnitude of the vectors **E** and **H** in a time instant t_0 on the z-axis. The figure is drawn for a lossless medium. Therefore, the electric and magnetic intensity are in phase and their amplitudes do not decrease.

Let us further mention the Poynting vector

$$\Pi = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^{*} \tag{2.23}$$

The direction of Poynting vector is identical with the direction of propagation and its magnitude signifies the power density carried by an electromagnetic wave. In eqn. (2.23) the symbol × stands for the cross product and * stands for the complex conjugation of **H**[5].

2.2 Examples

Imagine electromagnetic wave that propagates through an empty lossless[6] space. If the electric (magnetic) intensity of this wave is identical at every point of the area which is perpendicular to the direction of wave propagation, we would call it a plane wave. If the amplitude of the electric (magnetic) intensity is also identical at every point of the area then we are talking about a uniform wave.

The shortest distance of two points with the same phase is called the wavelength λ [m]. The wavelength is computed as the product of phase velocity v_f [m/s] and time period T [s]

$$\lambda = v_f \, T \tag{2.24}$$

[5] The complex conjugation of the vector **H** is analogical to the complex conjugation of current when computing the complex power computation $P=UI^*$ in the circuit theory: the phase of the complex power is given by the phase shift between the voltage and current. The phase of the current has to be therefore *subtracted* from the phase of the voltage. If the complex conjugated current is not used, the phases of current and voltage are *added up*.

[6] There are no free charges in environment, and its conductivity is $\gamma = 0$.

Fázová rychlost je v bezeztrátovém prostředí dána vztahem

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \tag{2.25}$$

kde c =3.10[8] m/s značí rychlost světla ve vakuu, μ_r [-] je relativní permeabilita prostředí, v němž se vlna šíří a ε_r [-] je relativní permitivita prostředí.

Dosazením (2.25) do (2.24) dostaneme užitečný výraz

$$\lambda = \frac{\lambda_o}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \tag{2.26}$$

Pokud uvažujeme rovinnou uniformní vlnu šířící se homogenním prostředím (konstantní permitivita a permeabilita), můžeme ze znalosti intenzity vlnění v nějakém bodě A určit elektrickou a magnetickou intenzitu vlnění v libovolném jiném bodě B podle vztahů

$$\mathbf{E}^{(B)} = \mathbf{E}^{(A)} \exp\left[-j\,\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\right)\right] \tag{2.27a}$$

$$\mathbf{H}^{(B)} = \mathbf{H}^{(A)} \exp\left[-j\,\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\right)\right] \tag{2.27b}$$

kde $\mathbf{r}_A$ [m] značí polohový vektor bodu A (obdobně $\mathbf{r}_B$) a $\mathbf{k}$ [1/m] je vektor vlnový.

Směr a orientace vlnového vektoru jsou totožné se směrem a orientací šíření vlny, velikost vlnového vektoru je dána vztahem

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{2.28}$$

kde ω je úhlový kmitočet [rad/s] a význam ostatních symbolů je týž jako v předchozím textu.

V mnoha situacích je lépe počítat velikost vlnového vektoru pomocí výrazu

$$k = k_o\sqrt{\mu_r.\varepsilon_r} \tag{2.29}$$

kde μ_r je relativní permeabilita prostředí, ε_r je relativní permitivita prostředí a k_0 je velikost vlnového čísla ve vakuu

$$k_0 = 2\pi/\lambda_0 \tag{2.30}$$

Přepočet velikosti intenzity elektrického pole v nějakém bodě A na velikost intenzity magnetického pole v tomtéž bodě a naopak je možný prostřednictvím vztahu

$$\frac{E^{(A)}}{H^{(A)}} = Z_0 \tag{2.31}$$

kde symbol Z_0 [Ω] značí vlnovou impedanci prostředí a počítá se podle výrazu

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{2.32}$$

nebo praktičtěji

$$Z_0 = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \tag{2.33}$$

Význam použitých symbolů zůstává stále stejný.

The phase velocity is given as follows

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \tag{2.25}$$

where c =3.10^8 m/s is the speed of light in vacuum, μ_r [-] is the relative permeability of a medium in which the wave propagates and ε_r is relative permittivity of a medium.

Substituting (2.25) into (2.24) we get a useful relation

$$\lambda = \frac{\lambda_o}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \tag{2.26}$$

Considering a plane uniform wave propagating through a homogeneous medium (constant permittivity and permeability), electric and magnetic field intensity can be recomputed from a certain point A to another point B using relations

$$\mathbf{E}^{(B)} = \mathbf{E}^{(A)} \exp\left[-j\,\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\right)\right] \tag{2.27a}$$

$$\mathbf{H}^{(B)} = \mathbf{H}^{(A)} \exp\left[-j\,\mathbf{k}\cdot\left(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\right)\right] \tag{2.27b}$$

Here, $\mathbf{r}_A$ [m] is positional vector of point A (similarly $\mathbf{r}_B$) and $\mathbf{k}$ [1/m] is propagation vector.

The direction and orientation of the propagation vector are identical to the direction and orientation of the wave propagation. The magnitude of the propagation vector is given by

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{2.28}$$

where ω is the angular frequency [rad/s] and the meaning of other symbols stays unchanged.

In many situations, the magnitude of the propagation vector is better to compute using

$$k = k_o\sqrt{\mu_r.\varepsilon_r} \tag{2.29}$$

where μ_r is the relative permeability of a medium, ε_r is the relative permittivity of a medium and k_0 is the magnitude of the wavenumber in vacuum

$$k_0 = 2\pi/\lambda_0 \tag{2.30}$$

The conversion of the magnitude of electric field intensity at a certain point A into the magnitude of magnetic field intensity at the same point and vice versa is possible using

$$\frac{E^{(A)}}{H^{(A)}} = Z_0 \tag{2.31}$$

where symbol Z_0 [Ω] stands for the wave impedance of a medium and is computed using

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{2.32}$$

or, more practically

$$Z_0 = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \tag{2.33}$$

The meaning of the symbols used remains the same.

Dále se podívejme na vztah vlnové délky ve směru šíření λ a ve směrech souřadných os λ_x a λ_y. Na obr. 2.2 je pohled *shora* na rovinnou vlnu, šířící se ve směru odchýleném o úhel α od osy **x** (vlnoplocha je kolmá k rovině *xy*). Tam, kde bylo v okamžiku záznamu maximum sinusovky, je barva nejtmavší, minima jsou bílá. Nejmenší vzdálenost dvou maxim (tedy vzdálenost dvou míst se stejnou fází) v určitém směru je vlnovou délkou v daném směru. Z obrázku je tedy zřejmé, že

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos(\alpha)} \tag{2.34a}$$

$$\lambda_y = \frac{\lambda}{\sin(\alpha)} \tag{2.34b}$$

kde λ značí vlnovou délku ve směru šíření. Dosazením získáme výrazy pro fázové rychlosti v daných směrech

$$v_{fx} = \frac{\lambda_x}{T} = \frac{v_f}{\cos(\alpha)} \tag{2.35a}$$

$$v_{fy} = \frac{\lambda_y}{T} = \frac{v_f}{\sin(\alpha)} \tag{2.35b}$$

kde v_f je fázová rychlost ve směru šíření.

Velikost průmětů vlnového vektoru do souřadných os vypočteme klasicky

$$k_x = k\cos(\alpha) \tag{2.36a}$$

$$k_y = k\sin(\alpha) \tag{2.36b}$$

Užitečné jsou rovněž vztahy mezi průměty měrného útlumu *k* a vlnové délky λ

$$\lambda_{x,y} = \frac{2\pi}{k_{x,y}} \tag{2.37}$$

a mezi průměty měrné fáze *k* a fázové rychlosti v_f

$$v_{f\,x,y} = \frac{\omega}{k_{x,y}} \tag{2.38}$$

Dále si připomeňme důležitou výkonovou veličinu – Poyntingův vektor. Velikost tohoto vektoru je rovna plošné hustotě výkonu elektromagnetického pole v místě *A* [W/m^2], směr a orientace vektoru jsou shodné se směrem a orientací šíření vlny. Poyntingův vektor vypočteme jako vektorový součin intenzity elektrického a magnetického pole v bodě *A*

$$\Pi^{(A)} = \mathbf{E}^{(A)*} \times \mathbf{H}^{(A)} \tag{2.39}$$

kde hvězdička značí komplexní sdruženost.

Výkon [W], procházející plochou *S*, je skalárním součinem Poyntingova vektoru a vektoru plochy **S** (směr **S** je totožný se směrem normály k ploše *S*)

$$P = \Pi.\mathbf{S} = |\Pi|\,|\mathbf{S}|\cos(\alpha) \tag{2.40}$$

kde α je úhel svíraný směry vektorů **Π** a **S**.

Let us focus on the relation of the wavelength in the direction of propagation λ and in directions of coordinate axes λ_x and λ_y. Fig. 2.2 shows the top view on the plane wave propagating in the direction diverted through an angle α from the **x**-axis. The colour is the darkest in places of the maximum of the sinusoid; the minimum is in white. The shortest distance between two maxims in a certain direction is the wavelength in the given direction

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos(\alpha)} \tag{2.34a}$$

$$\lambda_y = \frac{\lambda}{\sin(\alpha)} \tag{2.34b}$$

where λ denotes the wavelength in the direction of propagation. Substitutions yield relations for the phase velocity in given directions

$$v_{fx} = \frac{\lambda_x}{T} = \frac{v_f}{\cos(\alpha)} \tag{2.35a}$$

$$v_{fy} = \frac{\lambda_y}{T} = \frac{v_f}{\sin(\alpha)} \tag{2.35b}$$

where v_f is the phase velocity in the direction of propagation.

The magnitude of the projection of the propagation vector into coordinate axes is

$$k_x = k\cos(\alpha) \tag{2.36a}$$

$$k_y = k\sin(\alpha) \tag{2.36b}$$

Useful are also relations between the projections of attenuation constant k' and wavelength λ

$$\lambda_{x,y} = \frac{2\pi}{k_{x,y}} \tag{2.37}$$

and between the projections of phase constant k and phase velocity v_f

$$v_{f\,x,y} = \frac{\omega}{k_{x,y}} \tag{2.38}$$

Let us further mention the important power quantity – Poynting vector. The magnitude of this vector is equal to the power density in a place A [W/m^2], the direction and orientation of the vector are identical to the direction and orientation of the wave propagation. Poynting vector is computed as a cross product of the electric and magnetic field intensity in a place A

$$\Pi^{(A)} = \mathbf{E}^{(A)*} \times \mathbf{H}^{(A)} \tag{2.39}$$

where the star denotes the complex conjugation.

The power [W] passing through an area S is a scalar product of Poynting vector and area vector **S** (direction **S** is identical with the direction of a normal to the area S)

$$P = \Pi.\mathbf{S} = |\Pi|\,|\mathbf{S}|\cos(\alpha) \tag{2.40}$$

where α is an angle between the directions of vectors $\mathbf{\Pi}$ and **S**.

1. Uniformní rovinná vlna o kmitočtu f = 50 MHz se šíří ve směru, odchýleném od osy **x** o úhel α = 60°. Vlna se šíří prostředím s relativní permitivitou ε_r = 9, relativní permeabilitou μ_r = 1 a měrnou vodivostí γ = 0,01 S/m. V bodě A (4 m, –1 m) byla naměřena intenzita elektrického pole $E^{(A)}$ = 1 mV/m s referenční (nulovou) fází. Následující veličiny vypočtěte při zanedbání ztrát v prostředí.

a) Vlnovou délku ve směru šíření λ a vlnové délky ve směrech souřadných os λ_x, λ_y;

b) Fázovou rychlost ve směru šíření v_f, fázovou rychlost ve směru souřadné osy **x** $v_{f,x}$ a fázovou rychlost ve směru β = 45° $v_{f\beta}$;

c) Vlnové číslo ve směru šíření k a vlnová čísla ve směrech souřadných os k_x, k_y;

d) Intenzitu magnetického pole v bodě A a fázový posuv mezi elektrickou a magnetickou intenzitou v daném bodě;

e) Činný výkon plochou S = 0,2 m^2, která se nachází v bodě A a je (1) kolmá na směr šíření, (2) leží v rovině **xz**;

f) Intenzitu elektrického pole v bodě B (–2 m, 2 m);

g) Vzdálenost dvou bodů na rovnoběžce s osou **x**, v nichž je rozdíl fází intenzity pole $\Delta\Phi$ = 135°;

h) Vzdálenost dvou bodů na ose **x**, v nichž je poměr amplitud intenzity pole q = 3.

[**a**) λ = 2 m; λ_x = 4 m; λ_y = 2.31 m; **b**) $v_f = 10^8$ m/s; $v_{fx} = 2\cdot10^8$ m/s; $v_{f\beta} = 1{,}04\cdot10^8$ m/s;
c) k = 3,14 rad/m; k_x = 1,57 rad/m; k_y = 2,72 rad/m; **d**) $H^{(A)}$ = 7,96 μA/m; $\Delta\Phi$ = 0°;
e) $P_{č1}$ = 1,59 nW; $P_{č2}$ = 1,38 nW; **f**) $E^{(B)}$ = 1 exp(j 1,26) mV/m; **g**) Δx = 1,50 m;
h) v beze ztrátovém prostředí je amplituda vlny všude stejná]

2. Rovinná uniformní vlna o kmitočtu f = 3 MHz se šíří prostředím s relativní permitivitou ε_r = 1, relativní permeabilitou μ_r = 9 a zanedbatelnou měrnou vodivostí ve směru, odchýleném od osy **x** o úhel α = –30°. V bodě A (r = 3 m, φ = 10°) má vlna intenzitu $E^{(A)}$ = 20,0 mV/m . Vypočtěte:

a) Intenzitu elektrického a magnetického pole v bodě B(r = 10 m, φ = 150°);

b) Fázovou rychlost a vlnovou délku ve směru osy **y**;

c) Výkon, procházející plochou S = 1 cm^2, jež leží v rovině xz;

d) Tři body na ose **x** ležící nejblíže počátku P (0, 0), v nichž má vlna nulovou fázi.

[**a**) $E^{(B)}$ = 20,0 exp(+j133°) mV/m; $H^{(B)}$ = 17,7 exp(+j133°) μA/m; **b**) $v_{f,y} = 2\cdot10^8$ m/s;
λ_y = 66,7 m; **c**) P = 17,7 pW; **d**) x = –35,8 m, 2,65 m, 41,1 m]

1. A uniform plane wave propagates at the frequency $f = 50$ MHz in the direction declining the axis **x** for an angle $\alpha = 60°$. The wave propagates in an environment with relative permittivity $\varepsilon_r = 9$ and relative permeability $\mu_r = 1$. In the point A (4 m, –1 m), we measured electric field intensity $E^{(A)} = 1$ mV/m with the reference (zero) phase. The following quantities should be evaluated with neglecting losses.

a) Wavelength in the direction of propagation λ and wavelengths in directions of coordinate axes λ_x, λ_y;

b) Phase velocity in the direction of propagation v_f, phase velocity in the direction of **x** axis $v_{f,x}$ and phase velocity in the direction $\beta = 45°$ $v_{f\beta}$;

c) Wavenumber in the direction of propagation k and wavenumbers in directions of coordinate axes k_x, k_y;

d) Magnetic field intensity in the point A and phase shift between electric field intensity and magnetic field intensity in this point;

e) The active power passing the surface $S = 0.2$ m^2 in the point A which is (1) perpendicular to the direction of propagation, (2) parallel to the **xz** axis;

f) Electric field intensity in B (–2 m, 2 m);

g) The distance of two points on **x** axis with the difference of phases $\Delta\Phi = 135°$;

h) The distance of two points on **x** axis with the ratio of amplitudes $q = 3$.

[**a**) $\lambda = 2$ m; $\lambda_x = 4$ m; $\lambda_y = 2.31$ m; **b**) $v_f = 10^8$ m/s; $v_{fx} = 2 \cdot 10^8$ m/s; $v_{f\beta} = 1.04 \cdot 10^8$ m/s;
c) $k = 3.14$ rad/m; $k_x = 1.57$ rad/m; $k_y = 2.72$ rad/m; **d**) $H^{(A)} = 7.96$ μA/m; $\Delta\Phi = 0°$;
e) $P_{a1} = 1.59$ nW; $P_{a2} = 1.38$ nW; **f**) $E^{(B)} = 1 \exp(j\,1.26)$ mV/m; **g**) $\Delta x = 1.50$ m;
h) amplitud eis constant in lossless environment]

2. A uniform plane wave propagates at the frequency $f = 3$ MHz in an environment with relative permittivity $\varepsilon_r = 1$, relative permeability $\mu_r = 9$ and negligible conductivity. The direction of propagation declines for $\alpha = -30°$ from axis **x**. V A ($r = 3$ m, $\varphi = 10°$), field intensity is $E^{(A)} = 20.0$ mV/m. Following quantities should be evaluated:

a) Intensity of electric field and magnetic field in B($r = 10$ m, $\varphi = 150°$);

b) Phase velocity and wavelength in the direction of **y** axis;

c) Power passing the surface $S = 1$ cm^2 in xz plane;

d) Three points with zero phase on **x** axis with the shortest distance from origin P (0, 0).

[**a**) $E^{(B)} = 20.0 \exp(+j133°)$ mV/m; $H^{(B)} = 17.7 \exp(+j133°)$ μA/m; **b**) $v_{f,y} = 2 \cdot 10^8$ m/s;
$\lambda_y = 66.7$ m; **c**) $P = 17{,}7$ pW; **d**) $x = -35.8$ m, 2.65 m, 41.1 m]

3. Rovinná uniformní vlna o kmitočtu f = 30 MHz se šíří prostředím s relativní permitivitou $\varepsilon_r = 4$, relativní permeabilitou $\mu_r = 4$ a zanedbatelnou měrnou vodivostí ve směru odchýleném od osy x o úhel α = 210°. V bodě A (10 m, 5 m) má vlna intenzitu $H^{(A)}$ = 10 μA/m. Vypočtěte:

a) Intenzitu elektrického pole v bodě B (15 m, 12 m);

b) Fázovou rychlost a vlnovou délku ve směru β = 30°;

c) Výkon, procházející plochou S = 10 dm^2, která je kolmá na směr β = 30°;

d) Výkon všesměrového zdroje záření, který ze vzdálenosti r = 1 km vytvoří v počátku souřadné soustavy P (0, 0) stejně velkou intenzitu pole, jakou má naše rovinná uniformní vlna.

[**a**) $E^{(B)}$ = 3,77 exp(+j47,5°) mV/m; **b**) $v_f = 75 \cdot 10^6$ m/s; λ_β = 2,5 m; **c**) P = 3,77 nW; **d**) P = 0,474 W]

4. Rovinná uniformní vlna o kmitočtu f = 50 MHz se šíří ve směru osy **x** prostředím s parametry $\varepsilon_r = 2$ a $\mu_r = 4$. V bodě A (1 m, 0,5 m) má vlna intenzitu $H^{(A)}$ = 100 μA/m. Určete:

a) Intenzitu elektrického pole v počátku souřadné soustavy P (0,0);

b) Fázovou rychlost a vlnovou délku ve směru, odchýleném od osy **x** o úhel α = –30°;

c) Velikost výkonu, procházejícího v počátku P (0, 0) plochou S = 100 cm^2, jež leží v rovině yz.

[**a**) $E^{(P)}$ = 321 exp(+j240°) mV/m; **b**) $v_f = 99 \cdot 10^6$ m/s; λ = 1,98 m; **c**) P = (2,39 – j1,40) μW]

3. A uniform plane wave propagates at the frequency f = 30 MHz in an environment with relative permittivity ε_r = 4, relative permeability μ_r = 4 and negligible conductivity. The direction of propagation declines for α = 210°from axis **x**. In A (10 m, 5 m), field intensity is $H^{(A)}$ = 10 μA/m. Following quantities should be evaluated:

a) Electric field intensity in B (15 m, 12 m);

b) Phase velocity and wavelength in the direction β = 30°;

c) Power passing the surface S = 10 dm^2 which is perpendicular to the direction β = 30°;

d) Power of the omnidirectional source of radiation which excites in the origin P (0, 0) the same field intensity from the distance r = 1 km like the investigated plane wave.

[**a**) $E^{(B)}$ = 3.77 exp(+j47.5°) mV/m; **b**) $v_f = 75\cdot10^6$ m/s; λ_β = 2.5 m; **c**) P = 3.77 nW; **d**) P = 0.474 W]

4. A uniform plane wave propagates at the frequency f = 50 MHz in an environment with parameters ε_r = 2 and μ_r = 4 in the direction of **x** axis. In A (1 m, 0.5 m) magnetic field intensity is $H^{(A)}$ = 100 μA/m. Following quantities should be evaluated:

a) Electric field intensity in origin P (0,0);

b) Phase velocity and wavelength in the direction declining for α = –30° from **x** axis;

c) Power passing the surface S = 100 cm^2 which is located in the origin P (0, 0) and is parallel to the yz plane.

[**a**) $E^{(P)}$ = 321 exp(+j240°) mV/m; **b**) $v_f = 99\cdot10^6$ m/s; λ = 1.98 m; **c**) P = (2.39 – j1.40) μW]