Matemáticas: Enseñanza Universitaria
ISSN: 0120-6788
reviserm@univalle.edu.co
Escuela Regional de Matemáticas
Colombia

Castrillón, Iván Darío; Cruz, Roberto
Escalonabilidad de grafos e hipergrafos simples que contienen vértices simpliciales
Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XX, núm. 1, 2012, pp. 69-80
Escuela Regional de Matemáticas
Cali, Colombia

Vol. XX, № 1, Junio (2012)
Matemáticas: 69–80

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Escalonabilidad de grafos e hipergrafos simples que contienen vértices simpliciales

Iván Darío Castrillón
Universidad de Antioquia

Roberto Cruz
Universidad de Antioquia

Recibido Ago. 03, 2011 Aceptado Jun. 06, 2012

Abstract

In this work we study the shellability of graphs and clutters that have a simplicial vertex. We give characterizations of shellable graphs and clutters by using the properties of simplicial vertices, shedding vertices and shedding faces. We also introduce a family of recursively simplicial graphs and clutters.

Keywords: Shellable graphs, shellable clutters, independence complex, simplicial vertex.

MSC(2000): 13F55, 13D02, 05C38, 05C75

Resumen

En este trabajo estudiamos la escalonabilidad de grafos e hipergrafos simples que contienen al menos un vértice simplicial. Se dan carateterizaciones de los grafos e hipergrafos simples escalonables obtenidas a partir de las propiedades de los vértices simpliciales, los vértices de descomposición y las caras de descomposición. Además, se introducen las familias de grafos e hipergrafos recursivamente simpliciales.

Palabras y frases claves: Grafos escalonables, hipergrafos simples escalonables, complejo de independencia, vértice simplicial.

1 Introducción

Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo simple no dirigido donde $V_G = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es el conjunto de vértices y E_G el conjunto de aristas. Identificando cada vértice x_i con la variable x_i en el anillo de polinomios $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ sobre el campo k, se puede asociar al grafo G un ideal de monomios libres de cuadrados $I(G) = (\{x_ix_j \mid \{x_ix_j\} \in E_G\})$. El ideal $I(G)$ es llamado el ideal de aristas de G y fue introducido por primera vez por Villarreal en [8]. Usando la correspondencia de Stanley-Reisner, se puede asociar a G el complejo simplicial Δ_G, llamado el complejo de independencia de G, donde $I_{\Delta_G} = I(G)$. Las caretas de este complejo simplicial son los conjuntos independientes de G.

La relación anterior se puede generalizar a los hipergrafos simples, donde un hipergrafo simple es un hipergrafo que no tiene aristas que estén contenidas propiamente en otras aristas. Sea $\mathcal{C} = (V_\mathcal{C}, E_\mathcal{C})$ un hipergrafo simple con conjunto de vértices $V_\mathcal{C} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y conjunto de aristas $E_\mathcal{C}$ el cual es una familia de subconjuntos no vacíos de $V_\mathcal{C}$. De la misma manera que en grafos, se puede asociar a cada hipergrafo simple un ideal de monomios libres de cuadrados $I(\mathcal{C}) = \left(\{\prod_{x_i \in e} x_i \mid e \in E_\mathcal{C}\}\right)$. El ideal $I(\mathcal{C})$ es llamado el ideal de aristas de $\mathcal{C}$. Análogamente, se puede asociar a $\mathcal{C}$ un complejo simplicial $\Delta_\mathcal{C}$ donde $I_{\Delta_\mathcal{C}} = I(\mathcal{C})$.

Las caras de $\Delta_{\mathcal{C}}$ son los conjuntos independientes de $\mathcal{C}$, donde un conjunto independiente F de $\mathcal{C}$ es un subconjunto de $V_{\mathcal{C}}$ tal que $e \not\subset F$ para cualquier $e \in E_{\mathcal{C}}$.

Un grafo G o un hipergrafo simple $\mathcal{C}$ es llamado grafo o hipergrafo simple secuencialmente Cohen-Macaulay si el anillo R/I, donde $I = I(G)$ o $I = I(\mathcal{C})$, respectivamente, es secuencialmente Cohen-Macaulay. El problema algebraico de clasificar los grafos e hipergrafos simples secuencialmente Cohen-Macaulay se puede estudiar como un problema puramente combinatorio en términos de la escalonabilidad de sus complejos simpliciales asociados.

Un complejo simplicial Δ es escalonable si sus caretas (caras maximales) se pueden ordenar de la forma $F_1, \ldots, F_s$ tal que para todo $1 \leq i < j \leq s$, existe $x \in F_j \backslash F_i$ y $l \in \{1, \ldots, j-1\}$ con $\{x\} = F_j \backslash F_l$. El orden $F_1, \ldots, F_s$ es llamado un escalonamiento de Δ. La anterior es la definición de complejo simplicial escalonable no puro introducida por Björner y Wachs [1]. Van Tuyl y Villarreal [7] definieron que un grafo o un hipergrafo simple es escalonable si su correspondiente complejo de independencia es escalonable. Un complejo simplicial escalonable tiene la propiedad de que su anillo de Stanley-Reisner asociado es secuencialmente Cohen-Macaulay [6]. Así, un grafo o hipergrafo simple escalonable es un grafo o hipergrafo simple secuencialmente Cohen-Macaulay.

La descomposición por vértices es una propiedad de los complejos simpliciales que implica la escalonabilidad. Este concepto fue introducido inicialmente para complejos simpliciales puros por Provan y Billera en [5] y fue extendido para los complejos no puros por Björner y Wachs [1]. Dado un complejo simplicial Δ y una cara σ, $\Delta \backslash \sigma$ es el complejo simplicial obtenido de Δ eliminando todas las caras que contienen a σ, $\text{star}_{\Delta}(\sigma)$ es el complejo simplicial cuyas caretas son las caretas de Δ que contienen a σ y el enlace de σ es el complejo simplicial $\text{link}_{\Delta}(\sigma) = \{F \in \Delta \mid \sigma \cap F = \emptyset,\ F \cup \sigma \in \Delta\}$.

Un vértice x tal que ninguna careta de $\text{link}_{\Delta}(x)$ es una careta de $\Delta \backslash x$ se denomina vértice de descomposición (shedding vertex). Un complejo simplicial es descomponible por vértice si Δ es un simplejo, o existe un vértice de descomposición x tal que $\text{link}_{\Delta}(x)$ y $\Delta \backslash x$ son descomponibles por vértice. En [9, Lema 6] Wachs probó que si x es un vértice de descomposición de Δ y los complejos $\text{link}_{\Delta}(x)$ y $\Delta \backslash x$ son escalonables, entonces Δ es escalonable. Esto implica que un complejo simplicial descomponible por vértices es escalonable. Además, si Δ es escalonable entonces $\text{link}_{\Delta}(\sigma)$ es escalonable para cualquier cara σ de Δ [2, Proposición 10.14].

En este trabajo se introducen condiciones necesarias y suficientes para la escalonabilidad de grafos e hipergrafos simples que contienen vértices simpliciales. En la sección 2 se parte de los principales resultados de Van-Tuyl y Villarreal [7] sobre la escalonabilidad de grafos con vértices de grado uno, los resultados de Cruz y Estrada [3] sobre la escalonabilidad de grafos con vértices simpliciales y los resultados de Woodroofe [10] sobre la escalonabilidad de grafos descomponibles por vértices. Se introduce una nueva familia de grafos escalonables, se muestra que la escalonabilidad de un grafo que contiene un vértice simplicial se preserva al eliminar un vértice de descomposición y a partir de este resultado se dan condiciones necesarias y suficientes para la escalonabilidad de los grafos con vértices simpliciales. En la sección 3 se obtienen nuevas condiciones necesarias y suficientes para la escalonabilidad de hipergrafos simples que generalizan el teorema de Cruz y Estrada para grafos [3], y se generaliza también el resultado de la segunda sección, al demostrarse que la escalonabilidad de un hipergrafo que contiene un vértice simplicial se preserva al eliminar una cara de descomposición (shedding face).

2 Escalonabilidad de grafos que contienen vértices simpliciales

Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo simple y $S \subset V_G$. Por $G\backslash S$ se denota el grafo obtenido al eliminar todos los vértices de S y todas las aristas incidentes en un vértice de S. Si x es un vértice de G, $N_G(x)$ denota la vecindad abierta de x, es decir, el conjunto de todos los vértices adyacentes a x y $N_G[x] = \{x\} \cup N_G(x)$ denota la vecindad cerrada de x.

Van Tuyl y Villarreal [7] introdujeron la noción de grafo escalonable y discutieron sus propiedades básicas. Sea G un grafo, Δ_G su complejo simplicial asociado, x un vértice de G y $G' = G\backslash N_G[x]$, entonces $\Delta_{G'} = link_{\Delta_G}(x)$ [7, Lema 2.5] y si G es escalonable, entonces G' es escalonable [7, Teorema 2.6]. Este hecho es consecuencia del resultado de Wachs [2, Proposición 10.14].

En [7] Van Tuyl y Villarreal establecieron condiciones necesarias y suficientes para la escalonabilidad de los grafos que tienen vértices de grado uno. Si x, y son vértices adyacentes de G con $\deg_G(x) = 1$, entonces G es escalonable si y sólo si $G\backslash N_G[x]$ y $G\backslash N_G[y]$ son escalonables [7, Teorema 2.9].

Utilizando el concepto de vértice simplicial, Cruz y Estrada [3] generalizaron el teorema anterior. Recordemos que x es un vértice simplicial de G si $N_G[x]$ es un clique, más aun, $N_G[x]$ es el único clique maximal que contiene a x. Notemos que si x es un vértice de grado 1, entonces x es un vértice simplicial de G. A continuación presentamos el teorema de Cruz y Estrada y su demostración puesto que este resultado se generalizará al contexto de los hipergrafos en la sección 3.

Teorema 1. *[3, Teorema 2.1.13] Sea G un grafo, x_1 un vértice simplicial de G y su vecindad $N_G(x_1) = \{x_2, ..., x_r\}$. Sea $G_i = G\backslash N_G[x_i]$ para $i = 1, ..., r$. Entonces G es escalonable si y sólo si G_i es escalonable para todo $i = 1, ..., r$.*

Demostración. Sea G escalonable. El teorema 2.6 [7] de Van Tuyl y Villarreal, asegura que si G es escalonable y x cualquier vértice de G, entonces el grafo $G' = G\backslash N_G[x]$ es escalonable. Por tanto, los grafos G_i son escalonables. Sea G_i escalonable y $F_{i1}, \ldots, F_{is_i}$ un escalonamiento de Δ_{G_i} para cada $i = 1, \ldots, r$. El subgrafo inducido por $N_G[x_1] = \{x_1, \ldots, x_r\}$ es el único subgrafo completo maximal que contiene a x_1. Además cada careta de Δ_G, es decir, cada conjunto independiente maximal de G, intersecta a $\{x_1, \ldots, x_r\}$ exactamente en un vértice.

Por el argumento anterior, la lista completa de caretas de Δ_G es

$$F_{11} \cup \{x_1\}, \ldots, F_{1s_1} \cup \{x_1\}; \ldots; F_{r1} \cup \{x_r\}, \ldots, F_{rs_r} \cup \{x_r\}.$$

Se demuestra que la lista con ese orden lineal es un escalonamiento de Δ_G. Se consideran dos casos:

1. $F' = F_{ik} \cup \{x_i\}$, $F = F_{jt} \cup \{x_j\}$, $i < j$. Se tiene que $x_j \in F \backslash F'$. Además, el conjunto $F_{jt} \cup \{x_1\}$ es un conjunto independiente de G, por lo tanto está contenido en una de las caretas de Δ_G que contiene a x_1, es decir, existe l, $1 \leq l \leq s_1$, tal que $F_{jt} \cup \{x_1\} \subset F_{1l} \cup \{x_1\}$. Denotando por $F'' = F_{1l} \cup \{x_1\}$, se tiene que $\{x_j\} = F \backslash F''$ y F'' es anterior a F.

2. $F' = F_{ik} \cup \{x_i\}$, $F = F_{it} \cup \{x_i\}$, $k < t$. Este caso se demuestra a partir de la escalonabilidad del grafo G_i.

$\square$

El teorema 1 nos motiva a introducir la familia de los grafos recursivamente simpliciales, la cual es también una familia de grafos escalonables.

Definición 1. *Un grafo G es recursivamente simplicial si G es un grafo vacío o tiene un vértice simplicial x tal que para todo $y \in N_G[x]$, el grafo $G \backslash N_G[y]$ es recursivamente simplicial.*

Corolario 1. *Sea G un grafo recursivamente simplicial, entonces G es escalonable.*

Demostración. Si G es un grafo vacío, entonces G es escalonable. Si G es no vacío, razonemos por inducción sobre el número de vértices del grafo. Sea x un vértice simplicial de G, por hipótesis el subgrafo $G \backslash N_G[y]$ es recursivamente simplicial para todo $y \in N_G[x]$, y por inducción es escalonable. Por el teorema 1, G es escalonable. $\square$

En [7], Van Tuyl y Villareal establecieron la escalonabilidad de los grafos cordales. Este resultado se obtiene también como consecuencia del corolario 1 ya que los grafos cordales son recursivamente simpliciales, pues cada subgrafo inducido de un grafo cordal tiene un vértice simplicial.

En [3] Cruz y Estrada establecieron la escalonabilidad de los grafos simpliciales. Un grafo es simplicial si todo vértice es simplicial o es vecino de un simplicial. En el mencionado artículo se demuestra que si G es simplicial, entonces el subgrafo $G_v = G \backslash N_G[v]$ es simplicial para cualquier vértice v, lo que implica que un grafo simplicial es recursivamente simplicial y por corolario 1 obtenemos la escalonabilidad de los grafos simpliciales.

A continuación se construye una familia especial de grafos simpliciales con la propiedad de que cada grafo simplicial G de esta familia es tal que su grafo de línea $\mathcal{L}(G)$ es también simplicial. Por lo tanto G y $\mathcal{L}(G)$ son escalonables.

Sea C_n el ciclo con el conjunto de vértices $v_1, ..., v_n$ y sea T_i un árbol simplicial con raíz de grado al menos 2 para cada $i = 1, ..., n$. Denotemos por $C_n(T_1, ..., T_n)$ el grafo obtenido al hacer coincidir la raíz del árbol T_i con el vértice v_i del ciclo C_n para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por su construcción vemos que el grafo $C_n(T_1, ..., T_n)$ es simplicial pues cada vértice del ciclo es un vértice del correspondiente árbol simplicial. Lo anterior implica que el grafo $C_n(T_1, ..., T_n)$ es escalonable.

Dado un grafo G, su grafo línea $\mathcal{L}(G)$ es el grafo tal que cada vértice de $\mathcal{L}(G)$ representa una arista de G y dos vértices de $\mathcal{L}(G)$ son adyacentes si y solo si sus aristas correspondientes tienen en común un vértice de G. Como el grafo de línea de un ciclo sigue siendo un ciclo, $\mathcal{L}(C_n) = C_n$, y el grafo de línea de un árbol es un grafo de cliques, el grafo $\mathcal{L}(C_n(T_1, ..., T_n))$ es un grafo formado por un ciclo C_n y cada arista del ciclo forma parte de un clique. Mostremos que $\mathcal{L}(C_n(T_1, ..., T_n))$ un grafo simplicial, por lo tanto un grafo escalonable. Notemos que cada vértice simplicial de un árbol es un vértice de grado uno, por lo tanto, la arista incidente con un vértice simplicial de un árbol T es un vértice simplicial en $\mathcal{L}(T)$. Como $T_1, ..., T_n$ son árboles simpliciales, cada arista de cada árbol es un vértice simplicial o es vecino de un vértice simplicial en $\mathcal{L}(C_n(T_1, ..., T_n))$. Notemos que cada arista de C_n es incidente con al menos una arista de uno de los árboles la cual es un vértice simplicial en $\mathcal{L}(C_n(T_1, ..., T_n))$.

Ejemplo 1. *Se muestran los árboles T_1, T_2, T_3, T_4, el grafo $C_4(T_1, T_2, T_3, T_4)$ y el grafo de línea $\mathcal{L}(C_4(T_1, T_2, T_3, T_4))$, ver figura 1.*

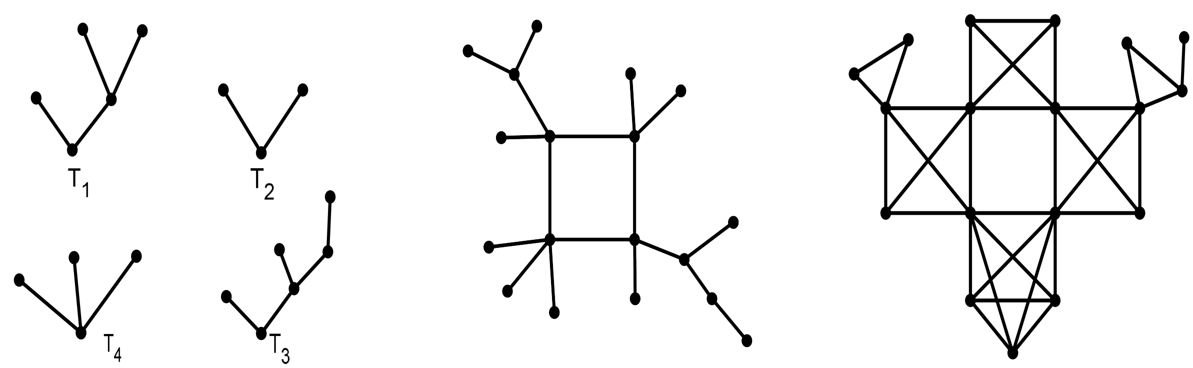

Figura 1: Los árboles T_1, T_2, T_3, T_4, el grafo $C_4(T_1, T_2, T_3, T_4)$ y su grafo de línea $\mathcal{L}(C_4(T_1, T_2, T_3, T_4))$.

La escalonabilidad de grafos también puede ser estudiada en términos de la descomposición por vértice. En [10] Woodroofe introdujo el concepto de grafo descomponible por vértice considerando su complejo de independencia y la definición de complejo descomponible por vértice. Un grafo G es descomponible por vértice si es un grafo totalmente disconexo o si existe un vértice de descomposición v tal que $G \backslash v$ y $G \backslash N_G[v]$ son ambos descomponibles por vértice. Un vértice v de G se denomina vértice de descomposición si no existe un conjunto independiente en $G \backslash N_G[v]$ que sea un conjunto independiente máximal en $G \backslash v$. El vértice v

es llamado vértice de descomposición del grafo G. Así, por el lema de Wachs [9, Lema 6], un grafo que es descomponible por vértice también es escalonable.

En [10] Woodrofe demuestra que dado un grafo G tal que para dos vértices v, w de G se cumple que $N_G[v] \subseteq N_G[w]$, entonces w es un vértice de descomposición de G. Esto implica que cualquier vecino de un vértice simplicial de un grafo G es un vértice de descomposición de G. Esta afirmación le permitió a Woodroofe demostrar que los grafos cordales son descomponibles por vértice y por lo tanto escalonables.

El teorema de Van Tuyl y Villarreal [7, Teorema 2.6] establece que si un grafo G es escalonable, entonces el subgrafo $G' = G \backslash N_G[x]$ es escalonable para todo vértice x de G. Sin embargo, el hecho de que G sea escalonable no implica que el subgrafo $G \backslash \{x\}$ sea escalonable para todo vértice x. A continuación se demuestra que la escalonabilidad se preserva al eliminar un vértice que sea vecino de un vértice simplicial en un grafo escalonable. Notemos que en este caso el vértice a eliminar es un vértice de descomposición.

Corolario 2. *Sea G un grafo escalonable, x un vértice simplicial en G y sea y un vecino de x. Entonces $G \backslash \{y\}$ es escalonable.*

Demostración. Sea G escalonable y $N_G(x_1) = \{x_2, \ldots, x_r\}$, donde $x_1 = x$ y $x_r = y$. El grafo $G_i = G \backslash N_G[x_i]$ es escalonable por el teorema 1 para cada $i = 1, ..., r$. Sea $F_{i1}, ..., F_{is_i}$ un escalonamiento de G_i para cada $i = 1, \ldots, r$. Por la demostración del teorema 1 tenemos que

$$F_{11} \cup \{x_1\}, ..., F_{1s_1} \cup \{x_1\}, ..., F_{r1} \cup \{x_r\}, ..., F_{rs_r} \cup \{x_r\}$$

es un escalonamiento de G. Además tenemos que $N_G(x_1) \subseteq N_G(x_i)$ para cada $i = 2, \ldots, r$, lo cual implica que cada uno de los vértices $x_2, \ldots, x_r$ es un vértice de descomposición. Como x_r es un vértice de descomposición de G, entonces si eliminamos del escalonamiento de G la sublista de los conjuntos independientes que contienen a x_r obtenemos la lista de todos los conjuntos independientes maximales de $G \backslash x_r$.

$$F_{11} \cup \{x_1\}, ..., F_{1s_1} \cup \{x_1\}, ..., F_{r-1\,1} \cup \{x_{r-1}\}, ..., F_{r-1\,s_{r-1}} \cup \{x_{r-1}\}$$

Por la definición de escalonabilidad, es claro que esta lista forma un escalonamiento de $G \backslash x_r = G \backslash \{y\}$ y por tanto este grafo es escalonable. $\square$

Utilizando el corolario 2 y el lema de Wachs [9, Lema 6], se puede dar otra caracterización para la escalonabilidad de los grafos que contienen vértices simpliciales.

Teorema 2. *Sea G un grafo con un vértice simplicial x y sea y un vecino de x. G es escalonable si y sólo si los grafos $G \backslash y$ y $G \backslash N_G[y]$ son escalonables.*

Demostración. Supongamos que el grafo G es escalonable, por el corolario 2 el grafo $G\backslash y$ es escalonable y el teorema de Van Tuyl y Villarreal [7, Teorema 2.6] asegura la escalonabilidad de $G\backslash N_G[y]$. En la otra dirección supongamos que $G\backslash y$ y $G\backslash N_G[y]$ son escalonables, por el lema de Wachs [9, Lema 6], G es escalonable. $\square$

3 Escalonabilidad de hipergrafos simples que contienen vértices simpliciales

La escalonabilidad de los hipergrafos simples con emparejamiento perfecto de tipo König fue estudiada en [4]. Recientemente Woodroofe [11] introdujo el concepto de vértice simplicial de un hipergrafo simple.

Sea $\mathcal{C} = (V_\mathcal{C}, E_\mathcal{C})$ un hipergrafo simple y $v \in V_\mathcal{C}$. Por $\mathcal{C}\backslash\{v\}$ se denota el hipergrafo simple obtenido al eliminar el vértice v, cuyo conjunto de vértices es $V_\mathcal{C}\backslash\{v\}$ y cuyo conjunto de aristas es $\{e \in E_\mathcal{C} \mid v \notin e\}$. La contracción del vértice v es el hipergrafo simple $\mathcal{C}/\{v\}$ cuyo conjunto de vértices es $V_\mathcal{C}\backslash\{v\}$ y cuyas aristas son los subconjuntos minimales de $\{e\backslash\{v\} \mid e \in E_\mathcal{C}\}$. Un hipergrafo simple obtenido de $\mathcal{C}$ mediante la eliminación o contracción sucesiva de vértices se denomina menor de $\mathcal{C}$. Es fácil comprobar que si $\Delta_\mathcal{C}$ es el complejo de independencia del hipergrafo simple $\mathcal{C}$, los complejos asociados a la eliminación $\mathcal{C}\backslash\{v\}$ y la contracción $\mathcal{C}/\{v\}$ del vértice v son $\Delta_\mathcal{C}\backslash v$ y $\mathrm{link}_{\Delta_\mathcal{C}}(v)$ respectivamente [11, Lema 2.2]. Si se tiene que $\sigma \subset V_\mathcal{C}$ es un conjunto independiente de $\mathcal{C}$ entonces $\mathcal{C}/\sigma$ denota la contracción de cada vértice de σ en cualquier orden y el complejo simplicial asociado a este menor de $\mathcal{C}$ es $\mathrm{link}_{\Delta_\mathcal{C}}(\sigma)$. Por otra parte, el complejo simplicial $\Delta_\mathcal{C}\backslash\sigma$ está asociado al hipergrafo simple $\mathcal{C}^\sigma$ cuyas aristas son los subconjuntos minimales de $E_\mathcal{C} \cup \sigma$, es decir, se agrega σ como una nueva arista y se toman los subcojuntos minimales respecto a la inclusión para que el hipergrafo resultante sea simple [11, Lema 2.2]. Se puede comprobar fácilmente que cuando σ está formado por un solo vértice v, entonces $\mathcal{C}^{\{v\}} = \mathcal{C}\backslash\{v\}$.

Un vértice x de $\mathcal{C}$ es simplicial si para cualesquiera dos aristas $e_1, e_2 \in E_\mathcal{C}$ que contienen a x, existe una tercera arista f tal que $f \subseteq (e_1 \cup e_2)\backslash\{x\}$. El siguiente teorema establece condiciones necesarias y suficientes para la escalonabilidad de los hipergrafos simples que contienen al menos un vértice simplicial y generaliza el teorema 1 al caso de los hipergrafos simples.

Teorema 3. *Sea x un vértice simplicial de $\mathcal{C}$, $\{e_1 \ldots, e_r\}$ las aristas de $\mathcal{C}$ que contienen a x, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}/x$ y $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}/\sigma_i$ donde $\sigma_i = e_i\backslash\{x\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Entonces el hipergrafo simple $\mathcal{C}$ es escalonable si y solo si $\mathcal{C}_i$ es escalonable para cada $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ es escalonable, entonces $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_r$ son escalonables por el resultado de Wachs [2, Proposición 10.14]. Entonces basta probar la otra implicación. Sea $F_{01}, \ldots, F_{0s_0}$ un escalonamiento de $\Delta_{\mathcal{C}_0} = \mathrm{link}_{\Delta_\mathcal{C}}(x)$ y $F_{i1}, \ldots, F_{s_i}$ un escalonamiento de $\Delta_{\mathcal{C}_i} = \mathrm{link}_{\Delta_{\mathcal{C}}}(\sigma_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$. Afirmamos que

$$F_{01} \cup \{x\}, \ldots, F_{0s_0} \cup \{x\}, F_{11} \cup \sigma_1, \ldots, F_{1s_1} \cup \sigma_1, \ldots,$$
$$F_{r1} \cup \sigma_r, \ldots, F_{rs_r} \cup \sigma_r$$

es la lista completa de las caretas de $\Delta_{\mathcal{C}}$ y que esta lista es un escalonamiento de este complejo.

Sea F una careta de $\Delta_{\mathcal{C}}$. Si $x \in F$, entonces $F \backslash \{x\} \in \Delta_{\mathcal{C}_0}$. Si $x \notin F$, como F es un conjunto independiente maximal, al agregar el vértice x a F obtenemos que el conjunto $F \cup \{x\}$ no es independiente, por lo tanto existe una arista $e \subseteq F \cup \{x\}$ tal que $x \in e$. Así que $e \backslash x = \sigma_i$ para cierto $i \in \{1, \ldots, r\}$. Luego $\sigma_i = e \backslash x \subseteq F$, lo que implica que toda careta de $\Delta_{\mathcal{C}}$ que no contiene a x, contiene algún σ_i.

Ahora probemos que el orden dado anteriormente es un escalonamiento de $\Delta_{\mathcal{C}}$. Sea $\sigma_0 = x$. Afirmamos que $\sigma_i \cup \sigma_j$ para $0 \leq i < j \leq r$ no se contiene en ninguna careta de $\Delta_{\mathcal{C}}$, de lo contrario, si existiera una careta F tal que $\sigma_i \cup \sigma_j \subseteq F$ para algún par $i, j \in \{0, 1, \ldots, r\}$, como x es un vértice simplicial, existiría una arista $e \subseteq \sigma_i \cup \sigma_j \subseteq F$, lo que contradice el hecho de que F es un conjunto independiente.

Consideremos dos casos:

1. $F' = F_{ik} \cup \sigma_i < F = F_{jt} \cup \sigma_j$, donde $i < j$. Existe un vértice $y \in \sigma_j$ tal que $y \notin F_{ik} \cup \sigma_i$, entonces $y \in F \backslash F'$. Veamos que $F_{jt} \cup (\sigma_j \backslash \{y\}) \cup \{x\}$ es un conjunto independiente de $\mathcal{C}$, pues de lo contrario existiría una arista e_p que contiene a x y tal que $e_p \backslash \{x\} = \sigma_p \subseteq F_{jt} \cup (\sigma_j \backslash \{y\}) \subseteq F_{jt} \cup \sigma_j$ lo que implicaría que $\sigma_p \subseteq F_{jt} \cup \sigma_j$ lo cual es una contradicción. Entonces, existe una careta $F'' = F_{0l} \cup \{x\} < F$ tal que $F_{jt} \cup (\sigma_j \backslash \{y\}) \cup \{x\} \subseteq F''$ y $\{y\} = F \backslash F''$.

2. $F' = F_{ik} \cup \sigma_i < F = F_{it} \cup \sigma_i$, donde $k < t$. Este caso se demuestra a partir de la escalonabilidad de $\Delta_{\mathcal{C}_i}$.

$\square$

El siguiente ejemplo ilustra el uso del teorema 3:

Ejemplo 2. *Sea el hipergrafo* $\mathcal{C} = (V_{\mathcal{C}}, E_{\mathcal{C}})$ *con* $V_{\mathcal{C}} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, *y cuyas aristas son* $e_1 = \{a, b, c\}$, $e_2 = \{a, b, d\}$, $e_3 = \{a, c, d\}$, $e_4 = \{b, c, d\}$, $e_5 = \{c, e, f\}$, $e_6 = \{f, g\}$. *El vértice* a *es simplicial puesto que para las aristas* e_1, e_2 *y* e_3 *que contienen al vértice* a *se cumple:*

$$e_4 \subseteq (e_1 \cup e_2) \backslash a = (e_1 \cup e_3) \backslash a = (e_2 \cup e_3) \backslash a = \{b, c, d\}\,.$$

Además de la contracción del vértice a *en* $\mathcal{C}$, *se deben contraer los subconjuntos de vértices:*

$$\sigma_1 = e_1 \backslash a = \{b, c\}\,, \quad \sigma_2 = e_2 \backslash a = \{b, d\}\,, \quad \sigma_3 = e_3 \backslash a = \{c, d\}\,.$$

Los menores $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}/a$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}/\sigma_1$, $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}/\sigma_2$ y $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}/\sigma_3$ tienen los siguientes conjuntos de aristas:

$$\begin{aligned}
E_{\mathcal{C}_a} &= \{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{c,e,f\},\{f,g\}\\
E_{\mathcal{C}_1} &= \{a\},\{d\},\{e,f\},\{f,g\}\\
E_{\mathcal{C}_2} &= \{a\},\{c\},\{f,g\}\\
E_{\mathcal{C}_3} &= \{a\},\{b\},\{e,f\},\{f,g\}
\end{aligned}$$

y sus complejos simpliciales asociados son:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{C}_a} &= \langle \{b,e,f\},\{b,e,g\},\{d,e,f\},\{d,e,g\},\{c,e,g,\},\{c,f\}\rangle,\\
\Delta_{\mathcal{C}_1} &= \langle \{e,g\},\{f\}\rangle,\\
\Delta_{\mathcal{C}_2} &= \langle \{e,f\},\{e,g\}\rangle,\\
\Delta_{\mathcal{C}_3} &= \langle \{e,g\},\{f\}\rangle.
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que la lista de caretas de cada uno de estos complejos simpliciales forma un escalonamiento, por lo tanto, aplicando el teorema 3 obtenemos un escalonamiento de $\Delta_{\mathcal{C}}$:

$$\{a,b,e,f\},\{a,b,e,g\},\{a,d,e,f\},\{a,d,e,g\},\{a,c,e,g,\},\{a,c,f\},$$

$$\{b,c,e,g\},\{b,c,f\},\{b,d,e,f\},\{b,d,e,g\},\{c,d,e,g\},\{c,d,f\}.$$

Al igual que para el caso de los grafos, el teorema anterior nos permite introducir la familia de los hipergrafos simples recursivamente simpliciales.

Definición 2. *Un hipergrafo simple $\mathcal{C}$ es recursivamente simplicial si $\mathcal{C}$ es vacío o tiene un vértice simplicial x tal que el menor $\mathcal{C}/x$ y los menores $\mathcal{C}/(e\backslash\{x\})$ para cada arista e que contiene a x, son recursivamente simpliciales.*

Corolario 3. *Sea $\mathcal{C}$ un hipergrafo simple recursivamente simplicial. Entonces $\mathcal{C}$ es escalonable.*

Demostración. Primeramente notemos que un hipergrafo vacío es escalonable. Si $\mathcal{C}$ no es vacío, se procede por inducción sobre el número de vértices. Sea x un vértice simplicial de $\mathcal{C}$. Por la hipótesis de inducción los menores $\mathcal{C}/x$ y $\mathcal{C}/(e\backslash\{x\})$ para cada arista e tal que $x \in e$, son escalonables. El teorema 3 asegura la escalonabilidad de $\mathcal{C}$. □

En [7] Van Tuyl y Villarreal establecieron la escalonabilidad de los hipergrafos simples con la propiedad de vértice libre. Un vértice x de un hipergrafo simple $\mathcal{C}$ es un vértice libre si tiene grado uno, es decir, si aparece en una sola arista de $\mathcal{C}$. Un hipergrafo simple $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de vértice libre si cada menor tiene un vértice libre. Como un vértice libre es un vértice simplicial, entonces un hipergrafo simple con la propiedad de vértice libre es recursivamente simplicial y su escalonabilidad se obtiene a partir del corolario anterior.

En [11] Woodroofe introdujo el concepto de hipergrafo simple cordal como un hipergrafo simple tal que cada uno de sus menores contiene un vértice simplicial y demostró que todo hipergrafo cordal es escalonable. Este resultado también se obtiene del corolario anterior pues un hipergrafo cordal es también recursivamente simplicial.

En el artículo citado en el párrafo anterior, Woodroofe extendió la definición de cara de descomposición a los complejos simpliciales no puros. Una cara de descomposición de un complejo simplicial Δ es una cara tal que ninguna cara de $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ es una careta de $\Delta\backslash\sigma$. Notemos que esta definición generaliza el concepto de vértice de descomposición. Este concepto le permitió a Woodroofe generalizar el lema de Wachs [9, Lema 6] al probar que si σ es una cara de descomposición de Δ y los subcomplejos $\Delta\backslash\sigma$ and $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ son escalonables, entonces Δ es escalonable [11, Lemma 3.4]. Además Woodroofe mostró que si x es un vértice simplicial de un hipergrafo $\mathcal{C}$ y e es una arista de este hipergrafo que contiene a x entonces el subconjunto de vértices $\sigma = e\backslash\{x\}$ es una cara de descomposición del complejo simplicial $\Delta_\mathcal{C}$ asociado a $\mathcal{C}$.

El resultado de Wachs para los enlaces de complejos simpliciales escalonables [2, Proposición 10.14] implica que si un hipergrafo simple $\mathcal{C}$ es escalonable, entonces la contracción $\mathcal{C}/\sigma$ es escalonable para cualquier conjunto independiente σ de $\mathcal{C}$. Sin embargo, el hecho de que $\mathcal{C}$ sea escalonable no implica que el subcomplejo $\Delta_\mathcal{C}\backslash\sigma$ (y por tanto su hipergrafo asociado $\mathcal{C}^\sigma$) sea escalonable para todo conjunto independiente σ. A continuación se demuestra que si $\mathcal{C}$ es escalonable y contiene un vértice simplicial x, la escalonabilidad de $\Delta_\mathcal{C}$ implica la escalonabilidad de $\Delta_\mathcal{C}\backslash\sigma$ si $\sigma = e\backslash x$, donde e es una arista que contiene a x. Notemos que en este caso σ es una cara de descomposición. El siguiente teorema generaliza entonces el corolario 2.

Corolario 4. *Si $\mathcal{C}$ es un hipergrafo escalonable y x un vértice simplicial de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}^\sigma$ es escalonable para cualquier $\sigma = e\backslash x$ donde e es una arista que contiene a x.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ escalonable, $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ los subconjuntos asociados a las aristas $e_1, \ldots, e_r$ que contienen a x y sea $\sigma = \sigma_r$. Por la demostración del teorema 3 se puede formar el escalonamiento

$$\begin{aligned}&F_{01} \cup \{x\}, \ldots, F_{0s_0} \cup \{x\}, F_{11} \cup \sigma_1, \ldots, F_{1s_1} \cup \sigma_1, \ldots,\\ &F_{r1} \cup \sigma_r, \ldots, F_{rs_r} \cup \sigma_r.\end{aligned}$$

Las caretas de $\Delta_\mathcal{C}\backslash\sigma_r$ son

$$\begin{aligned}&F_{01} \cup \{x\}, \ldots, F_{0s_0} \cup \{x\}, F_{11} \cup \sigma_1, \ldots, F_{1s_1} \cup \sigma_1, \ldots,\\ &F_{r-11} \cup \sigma_{r-1}, \ldots, F_{r-1s_{r-1}} \cup \sigma_{r-1}\end{aligned}$$

y este es un escalonamiento de $\Delta_{\mathcal{C}} \backslash \sigma_r$, por tanto el hipergrafo simple $\mathcal{C}^\sigma$ es escalonable. □

Utilizando el corolario 4 y el lema de Woodroofe [11, Lema 3.4], se puede dar otra caracterización para la escalonabilidad de los hipergrafos simples que contienen vértices simpliciales.

Teorema 4. *Sea $\mathcal{C}$ un hipergrafo con un vértice simplicial x y sea $\sigma = e\backslash x$ una cara de descomposición donde e es una arista que contiene a x. Entonces $\mathcal{C}$ es escalonable si y sólo si los hipergrafos $\mathcal{C}^\sigma$ y $\mathcal{C}/\sigma$ son escalonables.*

Demostración. Supongamos que el hipergrafo $\mathcal{C}$ es escalonable, por el corolario 4 $\mathcal{C}^\sigma$ es escalonable y el teorema 3 asegura la escalonabilidad de $\mathcal{C}/\sigma$.

En la otra dirección supongamos que $\mathcal{C}^\sigma$ y $\mathcal{C}/\sigma$ son escalonables. Como σ es una cara de descomposición de $\Delta_{\mathcal{C}}$ y los subcomplejos $\Delta_{\mathcal{C}} \backslash \sigma$ and $\text{link}_{\Delta_{\mathcal{C}}}(\sigma)$ asociados a los hipergrafos $\mathcal{C}^\sigma$ y $\mathcal{C}/\sigma$ son escalonables, entonces $\Delta_{\mathcal{C}}$ es escalonable por lema de Woodrofe [11, Lemma 3.4]. □

Agradecimientos

El financiamiento de este trabajo está soportado por el Proyecto de Investigación "Álgebras monomiales, complejos simpliciales e hipergrafos", 571CIEN, Universidad de Antioquia.

Referencias

[1] Björner, A. and Wachs, M.: Shellable nonpure complexes and poset I, Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996), pp. 1299-1327.

[2] Björner, A. and Wachs, M.: Shellable nonpure complexes and poset II, Trans. Amer. Math. Soc., 349 (1997), pp. 3945-3975.

[3] Cruz, R. and Estrada, M.: Vértices simpliciales y escalonabilidad de grafos, Morfismos, 12 (2008), pp. 17-32.

[4] Morey, S., Reyes, E. and Villarreal, R. H.: Cohen-Macaulay, shellable and unmixed clutters with a perfect matching of König type, J. Pure Appl. Algebra 212 (2008), pp. 1770-1786.

[5] Provan, J. S. and Billera, L. J.: Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra, Math. Oper. Res. 5 (1980), pp. 576-594.

[6] Stanley, R. P.: Combinatorics and Commutative Algebra (Second edition), Progress in Mathematics 41. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

[7] Van Tuyl, A. and Villarreal, R. H.: Shellable graphs and sequentially Cohe-Macaulay bipartite graphs, Journal of Combinatorial Theory Series A, 115 (2008), pp. 799-814.

[8] Villarreal, R. H.: Cohen-Macaulay graphs, Manuscripta Math. 66 (1990), pp. 277-293.

[9] Wachs, M. L.: Obstructions to shellability, Discrete Comput. Geom. 22 (1999), pp. 95-103.

[10] Woodroofe, R.: Vertex decomposable graphs and obstruction to shellability, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), pp. 3235-3246.

[11] Woodroofe, R., Chordal and sequentially Cohen-Macaulay clutters, (2010), Preprint. math CO/0911.4697v2.

Dirección de los autores

Iván Darío Castrillón — Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Medellín-Colombia

e-mail: `ivandcse@yahoo.es`

Roberto Cruz — Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Medellín-Colombia

e-mail: `rcruz@matematicas.udea.edu.co`