

Experimentelle Untersuchungen an verschieden stark konvergenten, schlanken Rotationskörpern bei mäßig hohen Überschallgeschwindigkeiten

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH
ZUR ERLANGUNG DER
WÜRDE EINES DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

Hans Rudolf Voellmy

Dipl. Masch.-Ing. ETH
von Basel und Sissach (BL)

Referent: Herr Prof. Dr. J. Ackeret

Korreferent: Herr Prof. Dr. R. Sängler



Erscheint als Nr. 24 der Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik
an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich
Herausgegeben von Prof. Dr. J. Ackeret

Verlag Leemann Zürich

Inhalt

1. Vorwort	7
2. Einleitung	7
3. Experimentelle Methodik	8
3.1. Auswahl der Meßkörper	8
3.2. Die Meßeinrichtungen	10
3.2.1. Die Kräftermessungen	10
3.2.2. Die Einrichtungen zur Druckverteilungsmessung am Körper 2	16
4. Theorie	18
4.1. Allgemeines	18
4.2. Grundlegende Differentialgleichung der räumlichen Strömung	18
4.3. Das Störpotential	19
4.4. Linearisierung der Potentialgleichung.	20
4.5. Die Lösung der linearisierten Differentialgleichung für Überschallströmung	20
4.5.1. Aufspaltung in Längs- und Queranströmung	20
4.5.2. Geschlossene Lösungen für den Kreiskegel	25
4.5.3. Zulässigkeit vereinfachender Annahmen	27
4.5.4. Elementare Theorie (slender body theory)	28
4.5.5. Geschlossene Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung an den fünf Körpern	29
4.5.6. Schrittweise Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung an allge- meinen Rotationskörpern	32
4.6. Berechnung der Druckverteilung	33
4.6.1. Genaue und angenäherte Berechnung des Druckkoeffizienten.	33
4.6.2. Druckberechnung bei Geradanströmung	33
4.6.3. Druckberechnung bei Schräganströmung	34
4.6.4. Druckdifferenz zwischen Schräg- und Geradanströmung	35
4.6.5. Druckverteilung an Rotationskörpern	35
4.7. Die Integration der Druckverteilung zur Berechnung von Kräften und Momenten	37
4.7.1. Axialkraftbeiwert c_T	37
4.7.2. Normalkraftbelastung $\frac{dc_N^*}{dx}$, Normalkraftbeiwert c_N , Längsmomen- tenbeiwert c_M und Lage des Druckzentrums e	38
5. Meßergebnisse	41
5.1. Resultate der Druckmessungen am Körper 2	41
5.1.1. Geradanströmung	41
5.1.2. Schräganströmung	43
5.2. Waageresultate an den fünf Körpern 0—4	57
5.2.1. Geradanströmung	57
5.2.2. Schräganströmung	59

6. Berücksichtigung der Zähigkeit	68
6.1. Einfluß bei Geradanströmung	68
6.1.1. Veränderung der Druckverteilung	68
6.1.2. Widerstandsbeiwerte	69
6.2. Einfluß bei Schräganströmung	70
6.2.1. Abschätzung des Normalkraftgradienten bei kleinen Anstellwinkeln (Nullgradient)	70
6.2.2. Normalkraftverteilung, Kräfte und Momente bei größeren Anstell- winkeln	72
6.2.3. Einfluß auf die Axialkräfte	79
7. Zusammenfassung und Ausblick	80

Liste der Symbole

Symbol	Bedeutung	Definition
A	Konstante Quellintensität	
A	Auftriebskraft	Senkrecht zu V
D	Körperkaliber	$D = 2 R_0$
F	Körperquerschnittsfläche	$F = \pi R^2$
G	Körpervolumen	
L	Körperlänge	$L = 1,5 h$
M	Machzahl	$M = V/a$
M	Längsmoment	
N	Normalkraft	senkrecht zur Körperachse
N_1, N_2	Normalkräfte an den Normalkraftwaagen }	
R	Querschnittsradius der Körper	
T	Axialkraft	Parallel zur Körperachse
V	Anströmgeschwindigkeit	
W, W_1, W_2, W_3	Resultierende Geschwindigkeiten	Fig. 11
W	Widerstandskraft	Parallel zu V
a	Schallgeschwindigkeit der ungestörten Strömung	
c_{1-6}	Konstanten der Auswertformeln	Kraft/Skalenteil
c_A, c_W, c_N	Aerodynamische Beiwerte	z. B. $c_N = \frac{N}{\frac{\rho}{2} V^2 F_0}$
c_p	Druckkoeffizient	$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} V^2}$
e	Abstand Druckzentrum-Bezugspunkt	
f	Quellintensität	
g	Dipolintensität	
h	Länge der Körperspitze bis zum Größtquerschnitt	$h = \frac{2}{3} L$
k_i	Körperparameter	siehe Gl. (1)
n_1, n_2	Anzahl Skalenteile des Waage-Instrumentes für die Normalkräfte N_1, N_2	
p	Lokaler Druck	
p_∞	Druck der ungestörten Strömung	
r	Radialabstand von der x -Achse	Fig. 11
t	Zeit	
t	Anzahl Skalenteile des Waageinstrumentes für die Axialkraft T	
u', v'	Störgeschwindigkeiten der Quellfunktion f	
u'', v'', w''	Störgeschwindigkeiten der Dipolfunktion g	
x	Koordinate in Richtung der Rumpfachse	
Φ	Geschwindigkeitspotential der Strömungs-DG	

Symbol	Bedeutung	Definition
φ	Linearisiertes Geschwindigkeitspotential der Störströmung	
Ψ	Querströmanteil des lin. Störpotentials	
Ω	Geschwindigkeitspotential der Störströmung	
α	Anstellwinkel	Fig. 11
β	Äquivalente Größe zu M	$\beta = \sqrt{M^2 - 1}$
γ	Halber Konusöffnungswinkel	
δ	Grenzschichtdicke am Rotationskörper	
δ^*	Verdrängungsdicke der Grenzschicht am Rotationskörper	
δ_p^*	Verdrängungsdicke an der ebenen Platte	
ϵ	Kleiner Wert	$\epsilon \ll 1$
η	Dimensionsloser Querschnittsradius	$\eta = \frac{R}{R_0}$
θ	Meridianwinkel	Fig. 11
κ	Isentropenexponent	
λ	Machscher Winkel	$\text{ctg } \lambda = \beta$
ξ	Integrationsvariable in x -Richtung	
ρ	Luftdichte (im Rahmen der linearisierten Theorie konstant)	
σ	Dimensionslose Integrationsvariable in x -Richtung	$\sigma = \frac{\xi}{R_0}$

Bedeutung der Indice

Indice	Zugehörig zu:
A	Auftrieb, senkrecht zur Anströmrichtung
B	Boden (Endquerschnitt)
M	Längsmoment
N	Normalkraft, senkrecht zur Körperachse
P	Zur ebenen Platte gehörend
Q	Querkraft
T	Axialkraft, parallel zur Körperachse
W	Widerstand, parallel zur Anströmrichtung
0	Geradanströmung ($\alpha = 0$)
0	Größtquerschnitt
i	Körper Nr.
i	fortlaufende Nummerierung der Integrations Schritte
k	
p	Druck
n	Letzter Integrations Schritt
r	Ableitung nach r
s	Seitliche Projektion
sp	Schwerpunkt
v	Spezifisches Volumen
x	Ableitung nach x
θ	Ableitung nach θ

Bedeutung der Exponenten

'	Zugehörig zu Quellpotential
"	Ableitung nach der x -Richtung
"	Zugehörig zu Dipolpotential

1. Vorwort

Die Anregung zur Durchführung der vorliegenden experimentellen Arbeit erhielt ich von Herrn Prof. Dr. J. Ackeret, Leiter des Institutes für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich.

Das Ziel der Untersuchungen bestand darin, den Gültigkeitsbereich einiger einfacher Gleichungen zur Berechnung der Kräfte auf schlanke Rotationskörper im Überschallbereich durch das Experiment abzuklären.

Es ist mir eine besondere Freude, an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. J. Ackeret für die Zurverfügungstellung des Überschallkanals des Institutes sowie für die vielen wertvollen Anregungen zu danken. Ferner möchte ich nicht verfehlen, den Herren Direktoren Dr. A. Gerber und Dr. M. Lattmann der Contraves AG, Zürich, für die Möglichkeit zu danken, die von dieser Firma gebaute elektrische Windkanalwaage und das Analog-Auswertegerät für meine in der Freizeit durchgeführte Arbeit zu benützen.

2. Einleitung

Die meisten der heute bekannten Flugkörper für sehr hohe Fluggeschwindigkeiten bestehen zur Hauptsache aus einem möglichst schlanken Rumpf und verhältnismäßig sehr kleinen Trag- und Stabilisierungsflächen. Dies allein deutet schon darauf hin, daß der Tragfähigkeit des Rumpfes bei großen Geschwindigkeiten einige Bedeutung zukommt.

Zunächst scheint diese Tatsache im Widerspruch mit potentialtheoretischen Überlegungen zu stehen, die in der einfachsten Form schon *M. Munk* [1]*) bekannt waren und welche besagen, daß der Normalkraftbeiwert c_N eines schlanken Körpers dem Anstellwinkel α und der Bodenfläche F_B proportional sei:

$$c_N = 2\alpha \frac{F_B}{F_0}$$

In den letzten Jahren sind einige Arbeiten veröffentlicht worden, welche insgesamt zeigen, daß obige Formel zwar für kleine Anstellwinkel bis zu einigen wenigen Graden gute Näherungswerte liefert, für größere Anstellwinkel jedoch völlig versagt, indem die gemessenen Werte weit über den berechneten liegen. Der Übergang zu Potentialtheorien höherer Ordnung [2] ergibt bessere Annäherungen an die Messungen, besonders für Rotationskörper, deren Oberflächen sich dem Machschen Kegel nähern, vermag aber bei größeren Anstellwinkeln die Lücke zwischen Messung und Theorie nicht zu überbrücken.

Druckverteilungsmessungen und Strömungsbetrachtungen zeigen, daß die

*) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Strömung auf der Rückseite des stark angestellten Körpers Wirbel bildet. Damit sind die Voraussetzungen der Potentialströmung nicht mehr erfüllt. Es sind heute von verschiedenen Autoren zähigkeitsabhängige Zusatzglieder zu den potentialtheoretisch berechneten Normalkraft- und Momentenbeiwerten angegeben worden, welche die gemessenen Werte bedeutend besser annähern [3].

Im Verlaufe vieler routinemäßig durchgeführter Windkanalmessungen an schlanken Rotationskörpern im Überschallkanal des Institutes für Aerodynamik der ETH im Auftrag der Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon, Bührle & Co. und der Contraves AG, Zürich, wurde der Verfasser nicht nur auf die oben genannten großen c_N -Werte bei großen Anstellwinkeln aufmerksam, vielmehr fielen auch Abweichungen der c_N -Werte bei ganz kleinen Anstellwinkeln auf.

Unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. J. Ackeret wurde eine besondere Versuchsserie an schlanken Rotationskörpern mit verschiedenen großen Bodenflächen durchgeführt, welche die Abweichung von der Potentialtheorie auch bei kleinen Anstellwinkeln erfassen sollte.

3. Experimentelle Methodik

3.1. Auswahl der Meßkörper

Als Parameter für eine Familie von fünf Rotationskörpern wurde *die Bodenfläche* gewählt, um durch das Experiment die von der Potentialtheorie vorausgesagte *lineare Abhängigkeit* des Normalkraftgradienten mit der Bodenfläche überprüfen zu können.

Als Ausgangskörper für die Variation der Bodenfläche wurde ein Rotations-

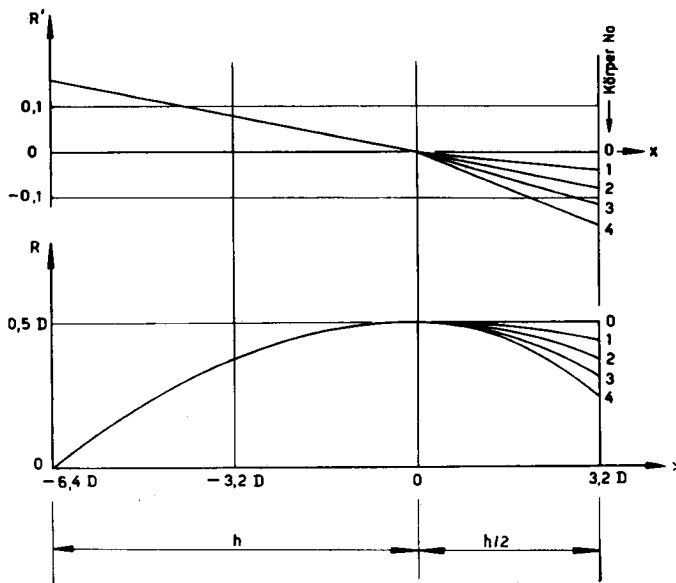


Fig. 1. Meridianschnitte R und Oberflächenneigungen R' der fünf Versuchskörper.

körper gewählt, an welchem in einer früheren Institutsarbeit [4] Druckmessungen im Unterschallbereich durchgeführt wurden. In der Diskussion der Resultate werden diese Unterschallresultate als Vergleichswerte beigezogen werden. Diesem hier mit Nr. 2 bezeichneten Körper gesellen sich vier weitere Körper 0, 1, 3 und 4 zu, welche die gleiche Spitzenform wie Nr. 2 aufweisen, jedoch verschieden stark konvergente Heckteile haben.

Im unteren Teil der Fig. 1 sind die fünf Meridianschnitte $R(x)$ über der Körperachse (x) in dimensionsloser Form aufgezeichnet. Der Größtdurchmesser der Körper (Kaliber) ist mit D bezeichnet. Die Meridianschnitte bestehen aus Parabelstücken, deren Scheitel beim größten Körperdurchmesser ($x=0$) liegen.

Der Schlankheitsgrad, also das Verhältnis von Kaliber ($D=25$ mm) zu Länge ($L=240$ mm) beträgt für alle Körper 0,1042. Auch die Spitzenform, welche zwei Drittel der Gesamtlänge ausmacht, ist für alle Körper dieselbe. Sie läßt sich näherungsweise als sog. Ogivalspitze mit dem konstanten Krümmungsradius von 41 Kalibern ($41D$) darstellen.

In dimensionsloser Form lassen sich die parabelförmigen Erzeugenden wie folgt darstellen:

$$\frac{R_i}{R_0} = 1 - k_i \left(\frac{x}{R_0} \right)^2 \quad (1)$$

wobei $R_0 = \frac{D}{2}$.

Die Tangentenneigungen an jeder Stelle x der Körper betragen somit:

$$R_i' = -2 k_i \frac{x}{R_0} \quad (2)$$

Wie der obere Teil der Fig. 1 erkennen läßt, wurde zur Darstellung der fünf Versuchskörper der Parameter k_i im Heckteil, also für $x > 0$, linear variiert, während für die Spitze stets derselbe k -Wert gilt. Die fünf Körper werden im folgenden durch die Nummern 0 bis 4 gekennzeichnet, wobei die Konvergenz der Heckteile vom Körper 0 aus (zylindrisches Heck) bis zum Körper 4 (kleinste Bodenfläche) zunimmt.

Für den Körper 2 gilt für Spitze und Heck der gleiche k_i -Wert (k_2).

In der folgenden Tabelle I sind die effektiven k_i -Werte der Versuchskörper aufgeführt, welche infolge kleiner Herstellungsungenauigkeiten mit wachsender Körperzahl nicht genau linear zunehmen. Aus dem gleichen Grund sind die k_i -Werte des Körpers 2 von Spitze und Heckteil nicht gleich groß. In der Tabelle sind ferner die auf R_0 bezogenen Endradien R_B/R_0 , die Tangentenneigungen im Endquerschnitt R_B' und die Verhältnisse Bodenfläche zu Größtquerschnitt F_B/F_0 angegeben:

Tabelle I

Körper Nr.	k_i -Spitze	k_i -Heck	R_B/R_0	R_B'	F_B/F_0
0	$6,10 \cdot 10^{-3}$	0	1,0000	0	1,000
1	$6,10 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-3}$	0,8752	-0,0390	0,766
2	$6,10 \cdot 10^{-3}$	$6,14 \cdot 10^{-3}$	0,7483	-0,0786	0,560
3	$6,10 \cdot 10^{-3}$	$9,09 \cdot 10^{-3}$	0,6277	-0,1164	0,394
4	$6,10 \cdot 10^{-3}$	$12,45 \cdot 10^{-3}$	0,4899	-0,1594	0,240

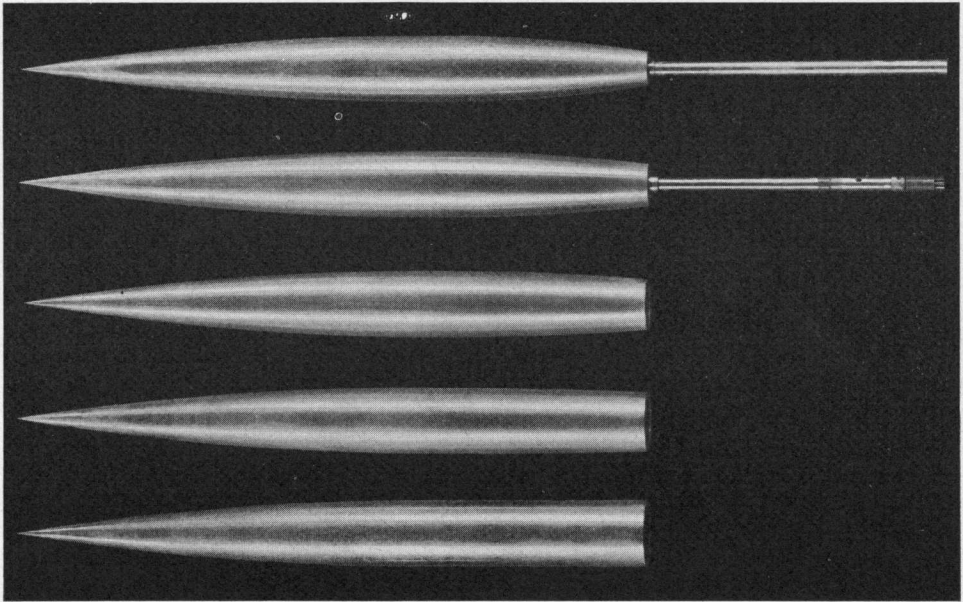


Fig. 2. Ansicht der fünf Versuchskörper mit verschieden stark konvergenten Heckteilen.
Im Körper 3 befindet sich die Straingagewaage.

In Fig. 2 sind die fünf Körper abgebildet. Im zweitobersten Körper (3) ist die Dreikomponentenwaage eingebaut, welche im Abschnitt 3.2.1.3 genau beschrieben ist. Die Aluminiumkörper wurden an einer Kopierdrehbank nach Schablonen hergestellt.

3.2. Die Meßeinrichtungen

3.2.1. Die Kräftermessungen

3.2.1.1. Der Windkanal

Alle Messungen wurden im Überschallkanal des Institutes für Aerodynamik an der ETH durchgeführt (Meßquerschnitt $0,4 \text{ m} \times 0,4 \text{ m}$). In Fig. 3 ist die geöffnete Meßstrecke mit Überschalldüse für Machzahl 2 und die Waageeinrichtung sichtbar. Eine detaillierte Beschreibung dieses Kanals befindet sich in den Institutsmittellungen [5]. Während allen Versuchen war die Lufttrocknungsanlage im Betrieb, so daß die Luftfeuchtigkeit nicht größer als $1,5 \text{ g H}_2\text{O/kg Luft}$ war. Die auf die Länge der Körper bezogene Reynoldssche Zahl betrug durchgehend $1,2 \cdot 10^6$. Abweichungen von dieser *Re*-Zahl um einen Faktor 2 nach unten oder 1,5 nach oben bewirkten keine systematischen Änderungen der Resultatwerte.

3.2.1.2. Die Waageaufhängung

Die Dreikomponentenmessungen wurden mittels einer vom Verfasser konstruierten Straingage-Waage durchgeführt, welche sich im Innern des Modelles befindet. Aus Fig. 4 ist die Aufhängung der Waage (rechts) sowie die Waage selbst (links) ersichtlich.

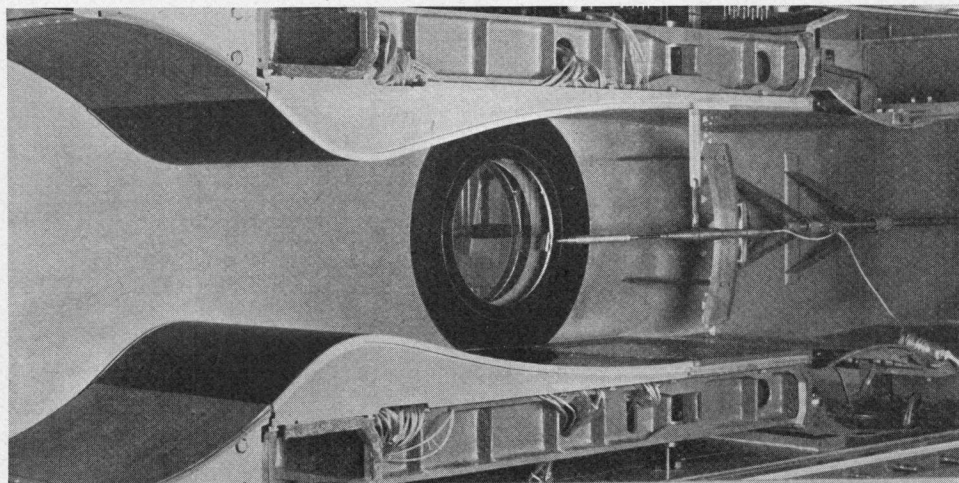


Fig. 3. Die geöffnete Meßstrecke des Überschallkanals der ETH läßt vorne die Düse für Machzahl 2 erkennen. Stromabwärts sind die Waage samt Aufhängung und die Stützen der axialen Sonde sichtbar.

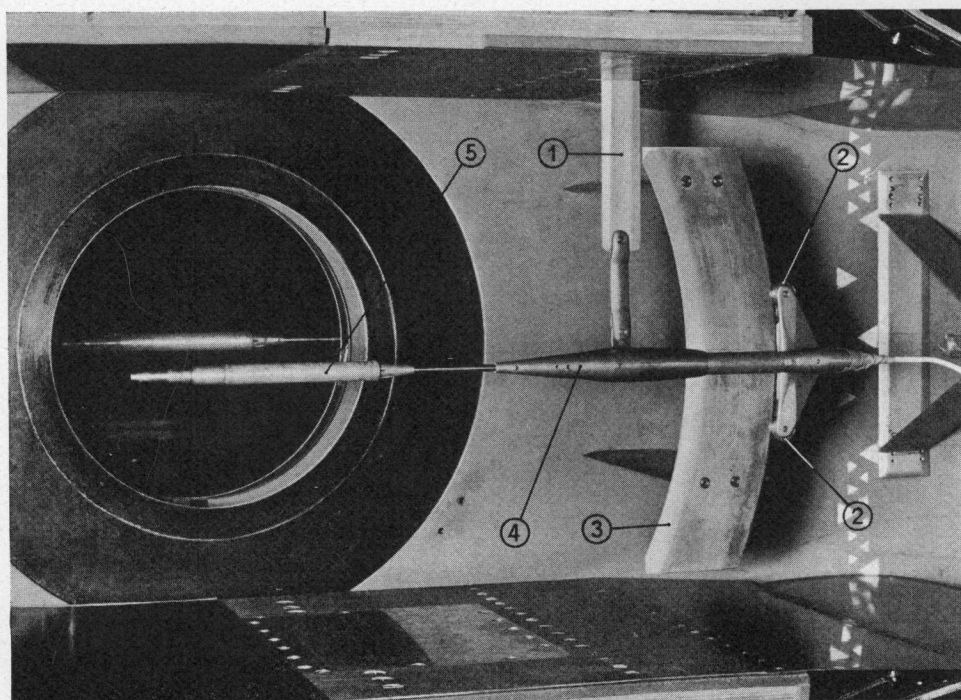


Fig. 4. Ansicht der internen Dreikomponenten-Straingagewaage (in der Fensterachse) und ihrer verstellbaren Aufhängung (rechts). Bei Anstellwinkeländerungen dreht sich das Modell um die Mittelachse des Fensters.

Das mittels Elektromotor senkrecht verschiebbare Schwert (1) schiebt die auf Rollen (2) am Kreisringstück (3) gelagerte Waagehalterung (4) in die gewünschte Anstellwinkel-Stellung. Das über die Waage (5) geschobene Modell dreht sich dabei um die Mittelachse des Blickfeldes (Fensterachse genannt) der Schlierenoptik. Die Stütze erlaubt Anstellwinkel von $+15^\circ$ bis -10° , wobei aus waagetechnischen Gründen die positiven (größeren) Anstellwinkel mit Spitze nach unten ausgeführt werden. Mit Ausnahme des Körpers 4 können alle Modelle ohne Ausbau der Waage montiert werden, indem sie über die Waage geschoben werden und durch einen Klemmring gegen evtl. negative Schubkräfte (beim Durchgang des Verdichtungsstoßes!) gesichert werden. Wegen des kleinen Enddurchmessers mußte der Körper 4 dreiteilig hergestellt werden. Zur Montage des hinteren Drittels wird die Waage aus dem Halter gezogen. Der am Ende des Waagestieles angebrachte 6-polige Miniaturstecker von 5,5 mm Durchmesser erlaubt, diesen Prozeß ohne Lötarbeit rasch ausführen zu können.

3.2.1.3. Die interne Straining-Waage

Zunächst vermittelt Fig. 5 einen Eindruck von der Kleinheit der internen Dreikomponentenwaage, beträgt der eigentliche Waagekörper ohne Hülse doch nur 9 mm. Die in die Hülse eingebaute Waage hat einen Durchmesser von 14 mm und eine Gesamtlänge (ohne Stiel) von 197 mm. Der grundsätzliche Aufbau geht aus Fig. 6 hervor und ist der folgende:

Die an der Waagehülse angreifenden, normal zur Waageachse stehenden Kräfte stützen sich über die beiden hülsenfesten unteren Gelenklager (1), über die kurzen Gelenkarme (2) und über die an den Federköpfen (4) gelagerten oberen Gelenklager (3) auf die Waagefedern (5) ab, welche beide am zentralen Waagelager (7) befestigt sind. Die auf die beiden Waagefedern (5) aufgeklebten Straining-Paare (6) messen die in den betreffenden Gelenklagern (1) wirkenden Normalkräfte N_1 und N_2 . Dabei muß beachtet werden, daß die Gelenkarme (2) als Zughebel ausgebildet sind, so daß die Waage hauptsächlich für positiv gerichtete Normalkräfte (nach unten!) dimensioniert ist. In beschränk-

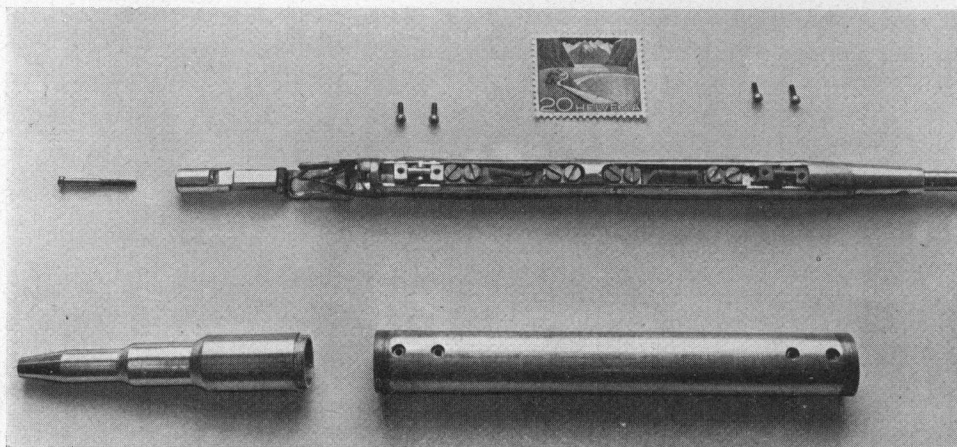


Fig. 5. Zerlegte Strainingwaage im Größenvergleich mit einer Briefmarke.

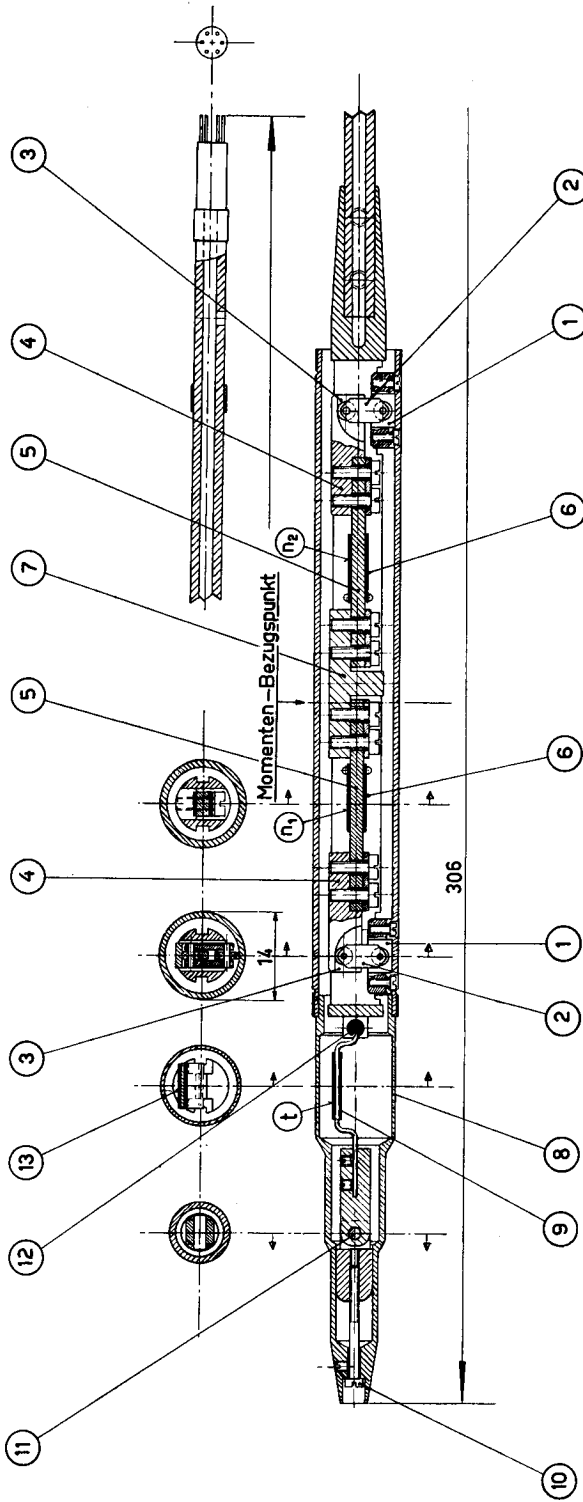


Fig. 6. Schnitt durch die Straingewage. Mittels dreier Federelemente (t, n_1, n_2) können die drei Komponenten Axialkraft, Normalkraft und Längsmoment gemessen werden. Erklärung der Einzelteile im Text.

tem Maße dürfen allerdings auch negative Normalkräfte gemessen werden, so daß es möglich ist, die Kräftesymmetrie symmetrischer Körper um die Nullanströmrichtung zu kontrollieren.

Der Vorteil der Verwendung von Kugellagern an Stelle von Federgelenklagern liegt vor allem in der Vermeidung statisch unbestimmter Konstruktionselemente und damit in der Vermeidung von temperaturabhängigen Nullpunktsfehlern der Waage. Gleichzeitig erreicht man, daß die gesamte Axialkraft T von der Axialkraftwaage aufgenommen werden muß, so daß deren Empfindlichkeit größer ist als bei Verwendung von Federgelenken bei den Gelenkarmen.

Aus der bisher beschriebenen Anordnung geht hervor, daß die Hülse über die kurzen Gelenkarne parallelogrammartig mit dem Waageinnern verbunden ist. Der stufenartig verjüngte Hülsenkopf (8) enthält die zentrisch gelagerte, aber exzentrisch ausgebogene Waage-Feder (9), über welche die axialen Waagekräfte vom Hülsenkopf (8) über die Justierschraube (10) und über vorderes (11) und hinteres (12) Waagelager an den inneren kanalfesten Teil der Waage geleitet werden. Das Straingagepaar (13) mißt infolge der exzentrischen Lage der Feder (9) das Biegemoment dieser Feder, welches ein Maß für die Axialkraft ist.

Der Meßbereich der Waage beträgt für die Normalkräfte N_1 und N_2 je 0,5 kg, für die Axialkraft 0,25 kg.

3.2.1.4. Mechanische Justierung der Waage

Zunächst könnte man glauben, daß durch diese Anordnung (ohne Gelenkfedern) Axialkräfte und Normalkräfte sauber getrennt sind. Bei gleichzeitigem Auftreten beider Kräfte erkennt man, daß eine gegenseitige Beeinflussung stattfindet. Bei einer axialen Belastung T wird sich die Hülse infolge des Ausbiegens der Feder (9) etwas nach rückwärts bewegen können. Dadurch stehen aber die Gelenkarne (2) nicht mehr senkrecht zur Waageachse. Die Normalkraft N wird je nach Vorzeichen versuchen, die Gelenkarne noch schräger oder wieder senkrecht zu stellen. Die dadurch entstehende Axialkomponente wird aber von der Axialwaage in vollem Umfange mitgemessen! Die so entstehende gegenseitige Beeinflussung kann durch einen kleinen Trick für den bekannten Meßbereich vermieden werden, indem die Gelenkarne mittels der Justierschraube (10) vor der Messung ganz wenig schräg gestellt werden. Während der Messung stehen die Gelenkarne bei richtiger Vorjustierung genau senkrecht. Die Beeinflussung der Axialkraftmessung durch die Normalkraft N kann auf diese Weise unter 1% von N gehalten werden.

3.2.1.5. Der elektrische Teil der Meßeinrichtung

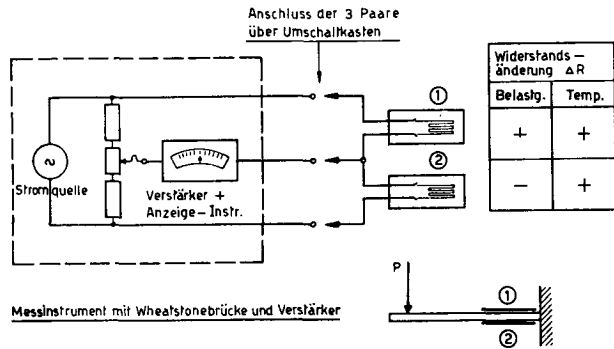
Als Straingage-Meßelemente wurden durchgehend die handelsüblichen Philips-Dehnungsmeßstreifen GM 4474 verwendet. Entgegen jeder Empfehlung mußten aus Platzgründen die Streifen für die Normalkraftwaagen der Länge nach gefaltet werden!

Als Meßinstrument diente die direktanzeigende Philips-Meßbrücke GM 5536 mit vorgeschaltetem Umschaltkasten GM 5545.

Die ganze Meßeinrichtung erwies sich nach einer Einlaufzeit von ca. 30 Minuten als äußerst stabil und temperaturunabhängig. Besonders dem letzten Punkt wurde bei der Konstruktion der Waage Rechnung getragen, indem

prinzipiell Biegemomente an relativ dünnen Federn gemessen werden. Die auftretenden Zug- und Druckspannungen (Ober- und Unterseite der Feder) erlauben, beide Meßelemente in die bekannte Brückenschaltung nach Wheatstone einzubeziehen. Einerseits wird dadurch der Meßausschlag verdoppelt, andererseits wird die an sich große Temperaturabhängigkeit der aufgeklebten Elemente weitgehend kompensiert, wie dies in Fig. 7 angedeutet ist.

Fig. 7. Schaltschema der Straingage-Meßeinrichtung. In die Wheatstonesche Brücke sind zwei aktive Meßelemente (Straingages) eingeschaltet. Dadurch wird die Meßempfindlichkeit erhöht und die Temperaturabhängigkeit stark vermindert.



Als mittlere Meßgenauigkeit der ganzen Apparatur kann 1% des Größtwertes angegeben werden. Die Nullpunktsgenauigkeit ist etwas schlechter (1–3%), die Ermittlung von Gradienten eher genauer als 1%.

3.2.1.6. Die Auswertung der Waageresultate

Die an der Meßbrücke abgelesenen Meßwerte n_1 , n_2 und t müssen, zusammen mit den eingestellten Größen α^* und der Bezugsgröße $\frac{\rho}{2}V^2$, in die gewünschten dimensionslosen Kräfte- und Momentenbeiwerte umgerechnet werden. Die in dieser Arbeit interessierenden Beiwerte der Normalkraft (c_N) und des Momentes um eine Querachse (Längsmoment c_M) folgen leicht aus den Meßwerten n_1 und n_2 der zwei modellfest gemessenen Normalkräfte N_1 und N_2 :

$$c_N = \frac{c_3 n_1 + c_4 n_2}{\frac{\rho}{2} V^2 F_0} \quad (3)$$

Die Koeffizienten c sind feste Konversionskonstanten. F_0 gibt die Bezugsfläche πR_0^2 des Beiwertes an und R_0 stellt den Größtradius des Körpers dar.

Der Längsmomentenbeiwert c_M folgt ebenso einfach aus:

$$c_M = \frac{-c_1 n_1 + c_2 n_2}{\frac{\rho}{2} V^2 F_0} \frac{1}{L} \quad (4)$$

wobei L die Gesamtlänge des Rotationskörpers ist. Als Bezugspunkt wurde der Schnittpunkt der größten Querschnittsfläche mit der Körperachse gewählt ($x=0$). Der effektive Anstellwinkel α folgt aus dem eingestellten Anstellwinkel α^* und dem durch die Normalkräfte N_1 und N_2 bewirkten zusätzlichen Anstellwinkel $\Delta\alpha$ infolge Durchbiegung der relativ dünnen Stütze.

$$\alpha = \alpha^* + \Delta\alpha \quad (5)$$

wobei

$$\Delta\alpha = c_5 N_1 + c_6 N_2$$

Für die sofortige Auswertung der Resultate konnte ein von der Firma Contraves AG, Zürich, und vom Verfasser entwickeltes elektronisches Auswertegerät benutzt werden (Fig. 8). Dieses Gerät gestattet außerdem, die modellfest gemessenen Kräfte in die in der Aerodynamik üblichen windfesten Kräftebeiwerte c_A und c_W umzurechnen. Bei der Auswertung von c_W wird die mitgemessene Komponente des Modellgewichtes eliminiert. Eine eingehendere Beschreibung des Auswertegerätes befindet sich in der Zeitschrift ZAMP [6].

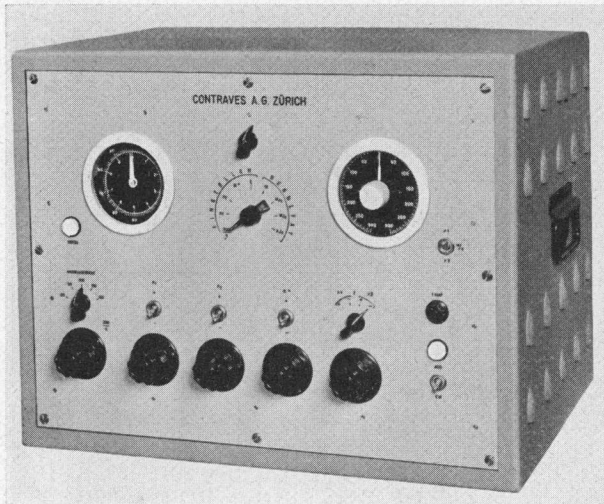


Fig. 8.
Das Analog-Auswertegerät (Contraves AG, Zürich) rechnet die Waageablesungen direkt in die gesuchten aerodynamischen Beiwerte um. Die Anstellwinkelvergrößerung infolge der Modellbelastung durch die Windkräfte wird automatisch berücksichtigt.

Die sofortige Kontrolle der Resultate gestattet vor allem, bei besonders kritisch erscheinenden Meßphasen die Anzahl der Meßpunkte verdichten zu können. Diese rasche Resultatkontrolle ist aber wiederum nur möglich dank der direkten Kraftmessung am Modell mittels der eingebauten Waage.

3.2.2. Die Einrichtungen zur Druckverteilungsmessung am Körper 2

3.2.2.1. Verteilung der Druckmeßstellen

Zusätzlich zu den Dreikomponenten-Wägungen der fünf Meßkörper wurden am Körper Nr. 2 Druckmessungen im Überschallbereich ausgeführt, welche damit die Fortsetzung der Druckmessungen im hohen Unterschallgebiet am

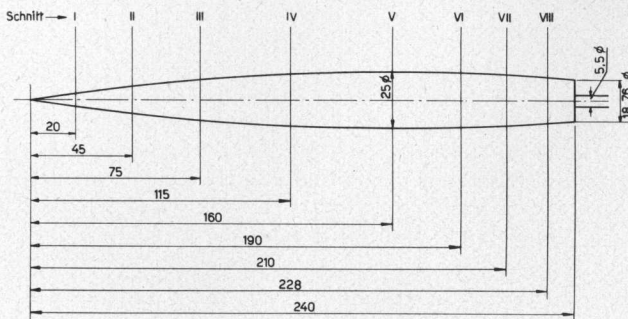


Fig. 9.
Lage der Druckmeßstellen am Körper 2. Schnitt V befindet sich beim Größtdurchmesser.

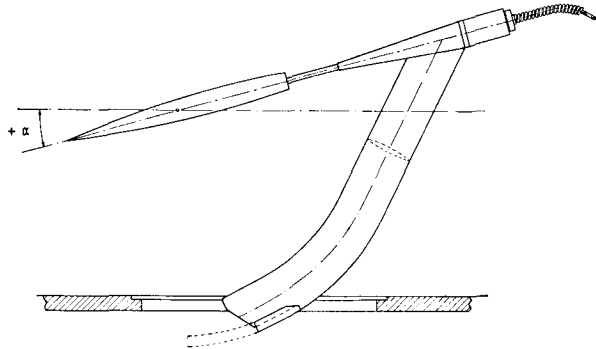
gleichen Körper darstellen, die im Jahre 1949 im hiesigen Institut durchgeführt wurden [4].

Fig. 9 zeigt die Anordnung der Meßstellen am Körper Nr. 2. Acht Druckmeßstellen liegen in den mit I bis VIII bezeichneten Schnitten, wobei die Löcher zur Vermeidung von Interferenzerscheinungen spiralförmig in Winkelabständen von 30° angeordnet sind. Die Meßstelle VIII wurde erst nach der Auswertung der Druckverteilung bei $M = 1,38$ angebracht, so daß die Resultate dieser Meßstelle erst bei der Messung mit $M = 1,67$ zu finden sind.

3.2.2.2. Aufhängung und Verstellmechanismus

Im Gegensatz zu den Kraftmessungen an den fünf verschiedenen konvergen-ten Rotationskörpern wurde für die Druckverteilungsmessung am Körper 2 eine aus dem Kanalboden ragende Stütze verwendet. In Fig. 10 ist die Ansicht

Fig. 10.
Modellaufhängung zur Mes-
sung der Druckverteilung
am Körper 2. Mittels der
rechts sichtbaren, flexiblen
Welle läßt sich der Körper
von außen her um seine
Längsachse drehen, unab-
hängig von der Anstellwinkel-
Einstellung α .



der Meßeinrichtung dargestellt. Die 10% dicke Stütze mit linsenförmigem Profil trägt am oberen Ende das Lager, welches gestattet, den an einer 6 mm dicken Hohlwelle befestigten Meßkörper um seine Längsachse zu drehen. Diese Drehung um den Meridianwinkel θ geschieht mittels einer flexiblen Hohlwelle, welche stromabwärts seitlich aus dem Kanal führt. Um bei allen Anstellwinkeln und auch Kraftbeanspruchungen genau reproduzierbare Meridianwinkel einstellen zu können, ist im erwähnten Wellenlager eine Schnappkupplung eingebaut, welche das Modell in θ -Winkelschritten von 18° festhält, so daß pro volle Umdrehung 20 Meridianwinkel eingestellt werden können.

Da alle acht Meßlöcher in den gemeinsamen Hohlraum des Modelles münden, müssen die sieben nicht verwendeten Löcher mittels Wachs zugeschlossen werden. Über die Hohlwelle führt die Druckmeßleitung durch den flexiblen Schlauch nach außen zum Manometer.

Mit der angeschlossenen Druckmeßstelle können nun die Drücke für sämtliche Anstellwinkel in allen Meridianstellungen bei der durch die Lavaldüse gegebenen Machzahl im gleichen Kanallauf gemessen werden.

3.2.2.3. Kanaldruckverteilung und Meßinstrumente

Die zu erwartenden kleinen Druckdifferenzen am äußerst schlanken Meßkörper Nr. 2 erfordern, die Druckverteilung der ungestörten Grundströmung genau zu kennen. Leider muß hier gesagt werden, daß trotz größter Sorgfalt

im Ausebnen der Kanalwände die Druckverteilungsschwankungen nicht unter 1% von p_0 gesenkt werden konnten. Mittels elliptischen und schwach konischen axial und transversal verschiebbaren Druckmeßsonden wurde die Verteilung des Kanaldruckes aufgenommen und als Korrekturgröße gegenüber einem gut ausgemessenen seitlichen Kanaldruck aufgezeichnet.

Um die Richtigkeit der an den Meßresultaten angebrachten Korrekturen zu überprüfen, wurde das ganze Modell stromaufwärts verschoben, so daß alle Meßstellen an andere Kanalstellen zu liegen kamen. Im allgemeinen ergaben die Auswertungen gute Übereinstimmungen.

Als Druckmeßinstrumente wurden die bewährten Quecksilber- und Wassermikromanometer des Institutes verwendet, deren Konstruktion in der Institutsmitteilung Nr. 8 beschrieben ist [5]. Die Ablesegenauigkeit beträgt 0,05 mm Hg resp. H_2O .

4. Theorie

4.1. Allgemeines

Die folgenden theoretischen Betrachtungen stützen sich auf das sog. Singularitätenverfahren, welches die Potentialströmung um vorgegebene Körper durch Überlagerung der Grundströmung mit geschickt verteilten Strömungsfeldern von Strömungssingularitäten (Quellen, Dipole) darstellt. Diese Darstellungsweise erlaubt ohne besonderen Mehraufwand die Berechnung schräg angeblasener Rotationskörper, während das sog. Charakteristikenverfahren für Geradanströmung zwar genauere Resultate liefert, für Schräganströmung jedoch noch wenig entwickelt ist.

Für ein eingehenderes Studium der Potentialströmung um schlanke Rotationskörper wird auf die in Klammern beigefügten Literaturangaben hingewiesen.

4.2. Grundlegende Differentialgleichung der räumlichen Strömung

Für die beabsichtigte Behandlung schlanker Rotationskörper eignet sich die Darstellung in Zylinderkoordinaten x , r und θ . Die x -Achse ist zugleich die Rotationsachse des Körpers; r gibt den kürzesten Abstand eines Punktes P zur Rotationsachse an und θ stellt den Azimuth- oder Meridianwinkel dar (Fig. 11).

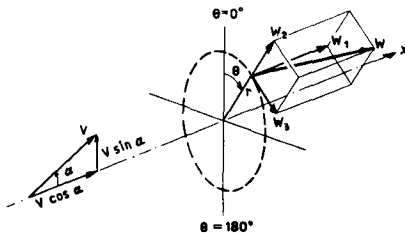


Fig. 11. Bezeichnung der Achsen, Winkel, Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitskomponenten im zylindrischen Koordinatensystem.

Unter den in der Gasdynamik üblichen Voraussetzungen der Reibungsfreiheit, der Vernachlässigung der Schwerkraft sowie der Wirbelfreiheit läßt sich ein ortsabhängiges Geschwindigkeitspotential $\Phi(x, r, \theta)$ angeben, dessen Gradient den Geschwindigkeitsvektor angibt:

$$W = \text{grad } \Phi: W_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x, \quad W_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \Phi_r, \quad W_3 = \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = \frac{1}{r} \Phi_\theta \quad (6)$$

Die drei orthogonalen Komponenten von W (W_1, W_2, W_3) genügen zusammen mit der örtlichen Schallgeschwindigkeit a der nichtlinearen Differentialgleichung [7] („Differentialgleichung“ im folgenden kurz „DG“ genannt):

$$\begin{aligned} & \Phi_{xx} \left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}\right) + \Phi_{rr} \left(1 - \frac{\Phi_r^2}{a^2}\right) + \frac{1}{r^2} \Phi_{\theta\theta} \left(1 - \frac{\Phi_\theta^2}{r^2 a^2}\right) \\ & + \frac{\Phi_r}{r} \left(1 - \frac{\Phi_\theta^2}{r^2 a^2}\right) - 2 \Phi_{r\theta} \frac{\Phi_r \Phi_\theta}{r^2 a^2} - 2 \Phi_{\theta x} \frac{\Phi_\theta \Phi_x}{r^2 a^2} - 2 \Phi_{xr} \frac{\Phi_x \Phi_r}{a^2} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Bei idealen Gasen folgt die örtliche Schallgeschwindigkeit a aus der Schallgeschwindigkeit der ungestörten Strömung a_0 nach:

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} (W^2 - V^2) \quad (8)$$

wobei

$$W^2 = \Phi_x^2 + \Phi_r^2 + \frac{1}{r^2} \Phi_\theta^2 \text{ ist}$$

Ferner bedeuten $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ den Isentropenexponenten und V die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung.

4.3. Das Störpotential

Das allgemeine Potential Φ wird nun aufgeteilt in das Potential der ungestörten Parallelströmung Φ_0 und ein durch den Körper bedingtes Störpotential Ω .

Um den Fall des schräg angeströmten Rotationskörpers darzustellen, denkt man sich die Parallelströmung unter dem Winkel α in der Ebene des Nullmeridians ($\theta=0$) gegen die Rotationsachse des Körpers (x -Achse) geneigt (Fig. 11).

Das Potential der Parallelströmung ist somit:

$$\Phi_0 = Vx \cos \alpha + Vr \sin \alpha \cos \theta$$

Das gesamte Potential Φ ist danach:

$$\Phi(x, r, \theta) = V(x \cos \alpha + r \sin \alpha \cos \theta) + \Omega(x, r, \theta) \quad (9)$$

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors W folgen aus den Ableitungen von Φ in axialer, radialer und azimuthaler Richtung:

$$\begin{aligned} W_1 &= \Phi_x = V \cos \alpha + \Omega_x \\ W_2 &= \Phi_r = V \sin \alpha + \Omega_r \\ W_3 &= \frac{1}{r} \Phi_\theta = -V \sin \alpha \sin \theta + \frac{1}{r} \Omega_\theta \end{aligned} \quad (10)$$

Setzt man diese Komponenten in die DG (7) ein und berücksichtigt noch die Gleichungen (8), so entsteht die vollständige DG für das Störpotential.

4.4. Linearisierung der Potentialgleichung

Die hier nicht angeschriebene vollständige räumliche Störpotentialgleichung ergibt nach Ordnen der Glieder folgendes Bild:

$$\beta^2 \Omega_{.xx} - \Omega_{.rr} - \frac{1}{r} \Omega - \frac{1}{r^2} \Omega_{\theta\theta} = \mathfrak{R} \quad (11)$$

Dabei ist
$$\beta = \sqrt{M^2 - 1} = \text{ctg} \lambda \quad (11a)$$

wobei $M = \frac{V}{a}$ die Machzahl der ungestörten Strömung und λ den Machschen Winkel bedeuten.

Die mit \mathfrak{R} bezeichnete rechte Seite der DG (11) enthält noch lineare Glieder des Störpotentials Ω , wie z. B. $\frac{1}{r} \Omega_r \sin \alpha \sin \theta$, jedoch hauptsächlich Glieder höherer Ordnung.

Aus der Literatur sind verschiedene Lösungsmöglichkeiten bekannt. Die beste Approximation stammt von *van Dyke* [2], der die Lösung für die DG „zweiter Ordnung“ gefunden hat.

In dieser Arbeit sollen die experimentellen Werte mit der im folgenden kurz wiederholten „linearisierten Theorie“ sowie deren einfachster Form, der „elementaren Theorie“, verglichen werden.

Unter der Voraussetzung kleiner Anströmwinkel α und der Behandlung nur schlanker, vorne spitzer Körper, deren Tangentenneigungen also klein gegenüber 1 sind, werden bei der Linearisierung die zweiten und höheren Ordnungen der Störgrößen vernachlässigt.

Hierbei würden die in \mathfrak{R} vorkommenden linearen Glieder $\frac{1}{r} \Omega_r \sin \alpha \sin \theta$ etc. stehen bleiben. Wegen der vorgeschriebenen Kleinheit von α werden diese Glieder in der Literatur jedoch weggelassen (*Karman-Moore* [8], *Tsien* [9]).

Lighthill [10] hat gezeigt, daß für mäßig hohe Machzahlen und schlanke Körper diese Vernachlässigung statthaft ist. *Van Dyke* nennt diese gekürzte Linearisierung eine „Theorie erster Ordnung“ (first order theory).

Nach Weglassen der rechten Seite der DG (11) lautet die derart „linearierte“ DG nun:

$$\beta^2 \varphi_{.xx} - \varphi_{.rr} - \frac{1}{r} \varphi_r - \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} = 0 \quad (12)$$

4.5. Die Lösung der linearisierten Differentialgleichung für Überschallströmung

4.5.1. Aufspaltung in Längs- und Queranströmung

Wiederum wird, wie bereits in Gleichung (9), das Gesamtpotential φ in Teilpotentiale aufgespalten. Dem Potential der Grundströmung φ_0 überlagert sich ein Störpotential, welches aus einem achsensymmetrischen Anteil φ' und einem asymmetrischen Anteil Ψ zur Darstellung der Schräganströmung aufgebaut ist:

$$\varphi(x, r, \theta) = \varphi_0 + \varphi'(x, r) + \Psi(x, r, \theta) \quad (13)$$

wobei wieder
$$\varphi_0 = V(x \cos \alpha + r \sin \alpha \cos \theta) \quad (13a)$$

das Potential der Parallelströmung darstellt.

Glücklicherweise läßt sich Ψ durch eine mit $\cos \theta$ multiplizierte Funktion φ'' ausdrücken [11], wobei φ'' nur von x und r abhängt:

$$\Psi(x, r, \theta) = \varphi''(x, r) \cos \theta$$

Es ist also:

$$\varphi(x, r, \theta) = \varphi_0 + \varphi'(x, r) + \varphi''(x, r) \cos \theta \quad (14)$$

Gleichung (14) in die DG (12) eingesetzt, ergibt:

$$\left[\beta^2 \varphi'_{xx} - \varphi'_{rr} - \frac{1}{r} \varphi'_r \right] + \cos \theta \left[\beta^2 \varphi''_{xx} - \varphi''_{rr} - \frac{1}{r} \varphi''_r + \frac{1}{r^2} \varphi'' \right] = 0$$

Nach Nullsetzen der Klammerausdrücke erhält man zwei völlig unabhängige DG für die Störpotentiale φ' und φ'' .

Für das achsensymmetrische Störpotential φ' gilt:

$$\beta^2 \varphi'_{xx} - \varphi'_{rr} - \frac{1}{r} \varphi'_r = 0 \quad (15)$$

und für das Potential der Queranströmung:

$$\beta^2 \varphi''_{xx} - \varphi''_{rr} - \frac{1}{r} \varphi''_r + \frac{1}{r^2} \varphi'' = 0 \quad (16)$$

Die DG (15) entspricht der DG der von einem Wellenzentrum ausgehenden zweidimensionalen Wellen, deren Lösung bekannt ist [12].

Leitet man die DG (15) nach r partiell ab, so entsteht eine DG der Form (16), wobei φ'' der Größe φ'_r entspricht.

Die Lösung der linearisierten DG (12) hat daher die Form:

$$\varphi(x, r, \theta) = \varphi_0 + \varphi'(x, r) + \varphi'_r(x, r) \cos \theta. \quad (17)$$

Der gefundene Lösungsansatz (17) läßt sich physikalisch interpretieren: Die Aufspaltung der DG (12) in zwei unabhängige DG (15) und (16) entspricht der getrennten Berechnung der Längs- und Queranströmung des schräg angeblasenen Körpers. Dabei läßt sich $\varphi'_r(x, r)$, wie im folgenden gezeigt werden wird, mittels einer „quellartigen“ Singularitätenverteilung längs der x -Achse erzeugen.

Daß das Störpotential Ψ der Queranströmung aus der Ableitung des „Quellpotentials“ φ' nach r entstanden ist, deutet darauf hin, daß Ψ als das Potential einer „dipolartigen“ Singularitätenverteilung verstanden werden kann: Ordnet man Quellen und Senken in der Ebene $\theta=0$ längs der x -Achse an und bildet den Grenzübergang für beliebige Annäherung der Quellen und Senken, wobei das Dipolmoment (Quellstärke mal Abstand der Singularitäten) konstant gehalten wird, dann erhält man genau die Form

$$\Psi(x, r, \theta) = \varphi'_r \cos \theta$$

als Störpotential der Queranströmung.

Für Unterschallströmungen, wo $\beta^2 = M^2 - 1$ negativ ist, lassen sich die Zusatzpotentiale φ' und φ'' aus eigentlichen Quell- und Dipolbelegungen darstellen. Bei den hier zu behandelnden Überschallströmungen müssen die Ausdrücke „quell- und dipolartig“ verwendet werden, da die Wirkungen dieser Singularitäten auf gewisse Abhängigkeitszonen beschränkt bleiben. Außerhalb dieser Zonen sind die Lösungen nicht mehr reell.

4.5.1.1. Lösung für Geradanströmung

Die von *Karman* und *Moore* [8] angegebene Lösung der DG (15) lautet auf der Oberfläche des Körpers (Meridian $R(x)$):

$$\varphi'(x, R) = - \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} \quad (18)$$

ξ ist eine freie Variable auf der x -Achse, β entspricht dem Kotangens des Machschen Winkels λ , $f(\xi)$ ist eine bei der Spitze beginnende Verteilungsfunktion quellartiger Singularitäten auf der x -Achse und R ist der Abstand eines Punktes der Oberfläche von der x -Achse.

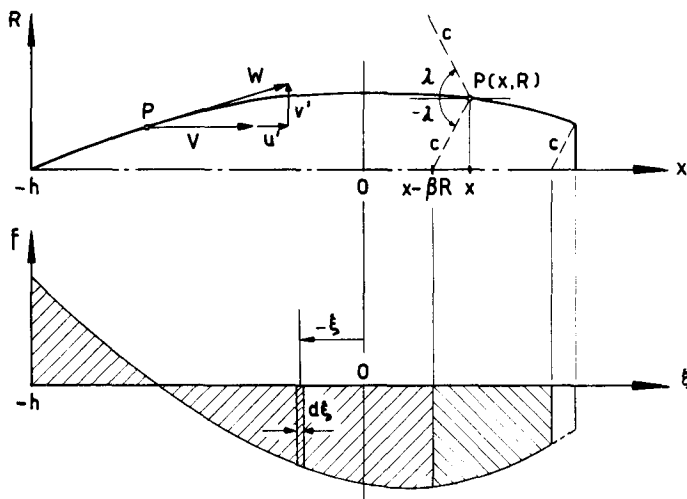


Fig. 12.
Darstellung des Integrationsbereiches für einen Aufpunkt P und Bezeichnung der Störgeschwindigkeitskomponenten bei Geradanströmung.

Das Störpotential φ' im Punkt P (Fig. 12) kann nur von den Quellbelegungen im sog. Abhängigkeitskegel von P beeinflusst werden, der durch stromaufwärts zeigende Machsche Linien c begrenzt wird. Die Integration erfolgt deshalb von der Spitze ($\xi = -h$) nur bis zum Punkt $\xi = x - \beta R$. Da infolge der Linearisierung der DG (11) die örtliche Schallgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit der ungestörten Strömung ist, bleiben der Machsche Winkel λ und damit auch β konstant.

Die Störgeschwindigkeiten in axialer Richtung u' und in radialer Richtung v' auf der Körperoberfläche folgen aus der Differentiation von φ' nach x resp. r : Die Resultate der Differentiationen sind:

$$u' = \varphi_{x'} = - \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{f'(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} \quad (19)$$

$$v' = \varphi_{r'} = \frac{1}{R} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi) f'(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}}$$

wobei

$$f'(\xi) = \frac{df(\xi)}{d\xi}$$

Die Randbedingung zur Darstellung eines vorgegebenen Rotationskörpers besagt, daß das Geschwindigkeitsfeld an der Oberfläche des Körpers tangential liegen muß.

Aus Fig. 12 folgt:

$$\frac{dR}{dx} = R' = \frac{v'}{V + u'} \quad (20a)$$

Da u' gegenüber V für schlanke Körper klein ist, wird oft auch die vereinfachte Tangentenbedingung benützt:

$$R' = \frac{v'}{V} \quad (20b)$$

Die Einführung der Randbedingungen (20) führt auf Integralgleichungen für $f'(\xi)$, welche im allgemeinen nicht elementar lösbar sind.

Lighthill [13] hat mittels einer Größenordnungsbetrachtung gezeigt, daß im Rahmen der linearisierten Theorie die Quellbelegungsfunktion $f(\xi)$ durch die Querschnittsänderung $\frac{dF}{dx} = F'(x)$ ausgedrückt werden kann.

Für sehr schlanke Körper kann dieser Zusammenhang einfach erklärt werden:

Die radiale Störgeschwindigkeit v' ist für $R \rightarrow 0$ und vorne spitze Körper nach Gl. (19):

$$v'_{R \rightarrow 0} = \frac{1}{R} \int_{-h}^x f'(\xi) d\xi = \frac{f(x) - f(-h)}{R} = \frac{f(x)}{R}$$

Aus der Randbedingung $v' = V R'$ folgt der gesuchte Zusammenhang:

$$f(x) = V R R' = \frac{V}{2\pi} F'(x)$$

oder, wieder durch die unabhängige Variable ξ ausgedrückt:

$$f(\xi) = \frac{V}{2\pi} F'(\xi) \quad (21)$$

Das Störpotential φ' wird also zu:

$$\varphi'(x, R) = -\frac{V}{2\pi} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{F'(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} \quad (22)$$

Es besteht hier die Möglichkeit, diese Ausdrücke noch umzuformen in Formeln, welche an Stelle der Wurzel logarithmische Ausdrücke enthalten. Im folgenden wird von dieser Darstellung Umgang genommen und lediglich auf die entsprechende Literatur hingewiesen [8], [10], [13], [19].

Die Störgeschwindigkeiten u' und v' des gerade angeströmten Rotationskörpers lauten:

$$\begin{aligned}
 u' &= -\frac{V}{2\pi} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{F''(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} \\
 v' &= \frac{V}{2\pi R} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi) F''(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Wenn sich $F(\xi)$ durch eine analytische Funktion ausdrücken läßt, können die Integrale geschlossen gelöst werden, wovon im Abschnitt 4.5.5 zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung an Kegel und Rotationsparaboloid Gebrauch gemacht wird.

4.5.1.2. Lösungen für Queranströmung

Wie schon im Abschnitt 4.5.1 gezeigt, folgt das Störpotential der Querströmung Ψ aus φ' nach

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \varphi_r' \cos \theta, \\
 \text{oder} \quad \Psi &= \frac{\cos \theta}{R} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi) g(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

wobei $g(\xi)$ die Dipolverteilungsfunktion bedeutet und wegen der von der Geradanströmung abweichenden Randbedingung nicht mit $f'(\xi)$ identisch ist.

Die hier nicht durchgeführten Ableitungen nach x , r und θ ergeben die Störgeschwindigkeiten u'' , v'' und w'' auf der Körperoberfläche:

$$\begin{aligned}
 u'' &= \Psi_x'' = \frac{\cos \theta}{R} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi) g'(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} \\
 v'' &= \Psi_r'' = -\frac{\cos \theta}{R^2} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi)^2 g'(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} \\
 w'' &= \frac{1}{r} \Psi_\theta'' = -\frac{\sin \theta}{R^2} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi) g(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}}
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Zur Darstellung der Randbedingung für reine Queranströmung benötigt man die radiale Komponente der Anströmgeschwindigkeit, welche aus Gl. (13a) durch Ableiten von φ_0 nach r folgt:

$$\varphi_{0,r} = V \sin \alpha \cos \theta$$

Die Randbedingung lautet damit

$$R' = \frac{V \sin \alpha \cos \theta + v''}{u''}$$

$$\text{oder} \quad V \sin \alpha \cos \theta = R' u'' - v'' \tag{26a}$$

Da sowohl R' als auch u'' für schlanke Körper klein gegenüber $V \sin \alpha \cos \theta$ sind, lautet die vereinfachte Randbedingung:

$$V \sin \alpha \cos \theta = -v'' \quad (26b)$$

Wiederum führen die Randbedingungen (26) im allgemeinen auf nicht geschlossen lösbare Integralgleichungen zur Bestimmung der Dipolverteilungsfunktion $g'(\xi)$.

Diese kann in ähnlicher Weise wie die Quellverteilungsfunktion $f(\xi)$ durch die Querschnittsänderung F' angenähert ausgedrückt werden, indem v'' einerseits durch den Grenzübergang für $R \rightarrow 0$ berechnet wird und andererseits die Randbedingung (26b) benützt wird. Man erhält dann:

$$g(\xi) = \frac{V}{\pi} F'(\xi) \sin \alpha \quad (27)$$

damit wird:

$$\Psi = \frac{V \cos \theta \sin \alpha}{\pi R} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi) F'(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}}$$

und folglich:

$$u'' = \frac{V \cos \theta \sin \alpha}{\pi R^2} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi) F''(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}}$$

$$v'' = -\frac{V \cos \theta \sin \alpha}{\pi R^2} \int_{-h}^x \frac{\beta R (x-\xi)^2 F''(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} \quad (28)$$

$$w'' = -\frac{V \sin \theta \sin \alpha}{\pi R^2} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi) F'(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}}$$

4.5.2. Geschlossene Lösungen für den Kreiskegel

4.5.2.1. Exakte Lösung der linearisierten DG

Setzt man die Quellbelegungsfunktion $f(\xi)$ und Dipolbelegungsfunktion $g(\xi)$ in den Gl. (18) und (24) als lineare Funktionen von ξ an, so lassen sich alle vorkommenden Integrale geschlossen lösen.

Da die Lösungen vom Verhältnis ξ/R abhängen, erhält man sog. konische Strömungsfelder. Soll die Strömung die Oberfläche eines Kreiskegels mit dem halben Öffnungswinkel γ berühren, so ergeben sich mittels der genauen Randbedingungen (20a) und (26a) folgende Verteilungsfunktionen:

$$f(\xi) = \frac{V \operatorname{tg}^2 \gamma}{\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} + \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \gamma}} \xi$$

$$g(\xi) = \frac{2V \sin \alpha \operatorname{tg}^2 \gamma}{(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \gamma) \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \gamma}} \xi \quad (29)$$

Daraus berechnen sich die Störgeschwindigkeiten auf der Körperoberfläche, von der Geradanströmung herrührend, zu:

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{-V \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \gamma}}{\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} + \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \gamma}} \\
 v' &= \frac{V \operatorname{tg} \gamma}{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \gamma}}{\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}}}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Für die Queranströmung lauten die axialen und tangentialen Störgeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}
 u'' &= 2V \sin \alpha \cos \theta \frac{\operatorname{tg} \gamma \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}}{\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \gamma) + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \gamma}} \\
 w'' &= -V \sin \alpha \cos \theta \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \gamma}}{\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \gamma) + \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \gamma}}
 \end{aligned} \tag{31}$$

Diese recht komplizierten Ausdrücke weisen eine nur scheinbare Genauigkeit auf. Im nächsten Abschnitt wird dies anhand der Größenordnungen gezeigt werden.

4.5.2.2. Größenordnungen der Störgeschwindigkeiten

ϵ sei eine gegen eins kleine Größe. Betrachtet man nur schlanke Körper bei mäßigen Überschallgeschwindigkeiten, so gelten folgende Vergleiche:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \gamma \left(\text{allg. } \frac{dR}{dx} = R' \right) &\sim \epsilon \\
 \sin \alpha &\sim \epsilon
 \end{aligned}$$

Ferner gelten dann die folgenden Annäherungen:

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Cos} \frac{1}{\beta \operatorname{tg} \gamma} \cong \ln \frac{2}{\beta \gamma} \sim -\ln \beta \epsilon$$

$$\text{und:} \quad \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} \cong 1$$

Die letzte Annäherung bedingt zusätzlich, daß β die Größenordnung 1 habe, was im Gebiet der mäßig hohen Unterschallmachzahlen der Fall ist.

Betrachtet man in der Reihenentwicklung der Ausdrücke für die Störgeschwindigkeiten am Kreiskegel nur die ersten Glieder bis zur Größenordnung ϵ^2 und $\epsilon^2 \ln \epsilon$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{u'}{V} &\cong -\gamma^2 \ln \frac{2}{\beta \gamma} \sim \epsilon^2 \ln \epsilon \\
 \frac{v'}{V} &\cong \gamma \sim \epsilon \\
 \frac{u''}{V} &\cong 2\gamma \alpha \cos \theta \sim \epsilon^2
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\frac{v''}{V} &\cong -\alpha \cos \theta \sim \epsilon \\ \frac{w''}{V} &\cong -\alpha \sin \theta \sim \epsilon\end{aligned}\tag{32}$$

Daß diese am Kreiskegel gewonnene Größenordnungsbetrachtung auch für andere schlanke Rotationskörper gültig ist, wird im folgenden Abschnitt gezeigt.

4.5.3. Zulässigkeit vereinfachender Annahmen

Die Größenordnungsbetrachtung gestattet, zu beurteilen, welche vereinfachenden Annahmen im Rahmen der linearisierten Theorie zulässig sind.

4.5.3.1. Ersetzen der Winkelfunktionen sin und tg durch die Bogen

Da die nächsten Glieder der Reihenentwicklung von $\sin \epsilon$ oder $\operatorname{tg} \epsilon - \frac{\epsilon^3}{6}$ resp. $+\frac{\epsilon^3}{6}$ lauten, ist der Ersatz dieser Winkelfunktion durch die Bogen im Rahmen der linearisierten Theorie erlaubt.

Der Kosinus ϵ kann nicht ohne genaue Überprüfung der Größenordnung der mit ihm verbundenen Faktoren durch die Zahl eins ersetzt werden, da das nächste Glied der Reihenentwicklung noch quadratisch ist.

Im folgenden wird der Ersatz von sin und tg durch die Bogen bereits durchgeführt werden.

4.5.3.2. Vereinfachte Randbedingungen

Die genaue Randbedingung (20 a) der Geradanströmung unterscheidet sich von der ungefähren Randbedingung (20 b) durch das Glied $R' \frac{u'}{V} \sim \epsilon^3 \ln \epsilon$. Im Rahmen der linearisierten Theorie genügt also die ungefähre Randbedingung nach Gl. (20 b):

$$R' = \frac{v'}{V}$$

Ebenso unterscheiden sich die Randbedingungen der Queranströmung nur durch $R' \frac{u''}{V} \sim \epsilon^3$, so daß die einfache Randbedingung (26 b) genügt:

$$\begin{aligned}v'' &= -V \sin \alpha \cos \theta \\ &\cong -V \alpha \cos \theta\end{aligned}$$

4.5.3.3. Benützung des Querschnittverlaufes als Quellfunktion

Der Ersatz der Quell- resp. Dipolverteilungsfunktionen durch die im Abschnitt 4.5.1 besprochene Änderung F' des Körperquerschnittes längs der Rotationsachse sei wiederum am Kreiskegel ausgeführt:

$$\begin{aligned}\text{Mit der Erzeugenden:} \quad R &= \xi \operatorname{tg} \gamma \cong \xi \gamma \\ \text{wird} \quad F'(\xi) &= 2 \pi \operatorname{tg}^2 \gamma \xi \cong 2 \pi \gamma^2 \xi \\ \text{und} \quad F''(\xi) &= 2 \pi \operatorname{tg}^2 \gamma \cong 2 \pi \gamma^2\end{aligned}\tag{33}$$

Mit Hilfe der Gl. (21) und (27) ergeben sich folgende Ausdrücke für die Verteilungsfunktionen:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{V}{2\pi} F'(\xi) = V\gamma^2 \xi \\ g(\xi) &= \frac{V}{\pi} F'(\xi) \alpha = 2V\alpha\gamma^2 \xi \end{aligned} \quad (34)$$

Diese Ausdrücke stehen in den Zählern der genauen Lösung gemäß Gl. (29), wobei die Nenner die Größenordnungen $1 + \epsilon^2 \ln \epsilon + \epsilon^2$ haben, wenn β nahe bei eins liegt. Wegen der Größenordnungen ϵ^2 resp. ϵ^3 der Zähler betragen die absoluten Fehler beim Ersetzen der genauen Singularitätsfunktionen am Kreiskegel durch die der Querschnittsänderung proportionalen Funktionen (21) und (27):

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{V}{2\pi} F'(\xi) + 0(\epsilon^4 \ln \epsilon + \epsilon^4 + \dots) \\ g(\xi) &= \frac{V}{\pi} F'(\xi) \alpha + 0(\epsilon^5 \ln \epsilon + \epsilon^5 + \dots) \end{aligned} \quad (35)$$

Dieser Ersatz ist demnach im Rahmen der linearisierten Theorie gerechtfertigt.

4.5.3.4. Anwendung vereinfachter Druckgleichungen

Im Zusammenhang mit den im Rahmen der linearisierten Theorie gestatteten Vereinfachungen ist es richtig, die Druckberechnung nicht nach der genauen Isentropengleichung, sondern nach den ersten Gliedern einer Entwicklung durchzuführen. Hierauf wird im Abschnitt 4.6 (Berechnung der Druckverteilung) eingegangen.

4.5.4. Elementare Theorie (slender body theory)

Will man im Rahmen der linearisierten Theorie konsequenterweise nur Störglieder bis zur Größenordnung ϵ^2 und $\epsilon^2 \ln \epsilon$ berücksichtigen, so zeigt es sich, daß alle Integrale der Störgeschwindigkeiten vereinfacht werden können, welche im Zähler des Integranden den Faktor $(x - \xi)$ oder $(x - \xi)^2$ aufweisen. Außer der Störgeschwindigkeit u' betrifft dies alle übrigen Störgeschwindigkeiten. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi) F'' d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} \cong \int_{-h}^x F'' d\xi = F'(x) - \underbrace{F'(-h)}_0 = F'(x) \\ \text{resp.} &\int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi) F' d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} \cong \int_{-h}^x F' d\xi = F(x) - \underbrace{F(-h)}_0 = F(x) \\ \text{und} &\int_{-h}^{x-\beta R} \frac{(x-\xi)^2 F'' d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} \cong \int_{-h}^x (x-\xi) F'' d\xi \cong \int_{-h}^x F' d\xi = F(x) \end{aligned} \quad (36)$$

Die vereinfachten Lösungen für die Störgeschwindigkeiten lauten demnach:

$$\frac{u'}{V} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{F''(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}}$$

$$\frac{v'}{V} = \frac{1}{2\pi R} 2\pi R R' = R' \quad (37)$$

$$\frac{u''}{V} = \frac{\sin \alpha \cos \theta}{\pi R} 2\pi R R' \cong 2 R' \alpha \cos \theta$$

$$\frac{v''}{V} = -\frac{\sin \alpha \cos \theta}{\pi R^2} \pi R^2 \cong -\alpha \cos \theta \quad (38)$$

$$\frac{w''}{V} = -\frac{\sin \alpha \sin \theta}{\pi R^2} \pi R^2 \cong -\alpha \sin \theta$$

Diese mit den Resultaten der Theorie sehr schlanker Rotationskörper (slender body theory) identischen Ausdrücke enthalten besonders in den Störgeschwindigkeiten der Queranströmung keine machabhängigen Glieder mehr.

Die Größenordnungen der Störgeschwindigkeiten stimmen mit den am Kreiskegel abgeleiteten Werten genau überein *).

Die Störgeschwindigkeiten der Queranströmung lassen sich leicht anschaulich erklären: Für sehr schlanke Körper müssen die Störgeschwindigkeiten eng mit der lokalen Geometrie verbunden sein, so daß in erster Näherung die einzelnen Querschnitte eben berechnet werden können. Das ebene Geschwindigkeitspotential der Kreiszyylinderumströmung lautet:

$$\varphi_z = 2 V R \sin \alpha \cos \theta \quad (39)$$

und folglich

$$u_z'' = 2 V R' \sin \alpha \cos \theta \cong 2 V R' \alpha \cos \theta$$

$$w_z'' = -2 V \sin \alpha \sin \theta \cong -2 V \alpha \sin \theta \quad (40)$$

w_z'' ergibt sich hier als der doppelte Wert von Gl. (38), da bei der Zylinderumströmung die Komponente der Parallelströmung $-V \sin \alpha \sin \theta$ in w_z'' enthalten ist.

Die Komponente v'' folgt aus der in Gl. (26 b) festgehaltenen vereinfachten Randbedingung.

Wegen ihrer physikalisch einfachen Verständlichkeit wird die „slender body theory“ hier kurz „elementare Theorie“ genannt.

4.5.5. Geschlossene Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung an den fünf Körpern

Dank der mathematisch einfachen Darstellungsform (Parabeln) der Meridianschnitte aller fünf Körper und damit auch der Querschnittsfunktionen läßt sich das Integral in der Störgeschwindigkeitsgleichung (37) für u' geschlossen lösen.

*) An dieser Stelle sei auf die Arbeiten von *Sears* [14] und *Haack* [16] verwiesen, welche mit Hilfe der „slender body theory“ das Problem des minimalen Geschößwiderstandes behandeln.

Mit dem dimensionslosen Ansatz für den Körperradius des Körpers i :

$$\eta_i = \frac{R_i}{R_0} = 1 - k_i \sigma^2 \quad (41)$$

und
$$\sigma = \frac{\xi}{R_0} \quad (42)$$

ergibt sich die zweite Ableitung der Querschnittsfunktion zu:

$$\frac{F_i''(\sigma)}{2\pi} = 2k_i(3k_i\sigma^2 - 1) \quad (43)$$

Mit Ausnahme des Körpers 2 weisen diese zweiten Ableitungen beim Größtquerschnitt ($x = \sigma = 0$) Sprünge auf. Das Integral der Gl. (37) muß deshalb in zwei Teile aufgespalten werden.

Zunächst sei der Geschwindigkeitsverlauf u'/V für den Körper 2 mit durchgehend gleichem Parabelkoeffizienten k_2 angegeben.

In dimensionsloser Form lautet Gl. (37):

$$\frac{u'}{V} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\sqrt{k_2}}}^{\sigma_P - \beta \eta_P} \frac{F_2''(\sigma) d\sigma}{(\sigma_P - \sigma)^2 - \beta^2 \eta_P^2} \quad (44)$$

wobei die Indizes P die σ - und η -Werte des zu untersuchenden Punktes bezeichnen.

Nach Einsetzen der „Quellfunktion“ F'' aus Gl. (43) und Weglassen der Glieder höherer Ordnung erhält man:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u'}{V}\right)_2 &= \frac{(-6\sigma_P^2 k_2^2 + 2k_2)}{-F''(\sigma_P)} \ln \frac{2\left(\sigma_P + \frac{1}{\sqrt{k_2}}\right)}{\beta \eta_P} \\ &+ 3(3\sigma_P^2 k_2^2 + 2k_2^{3/2} \sigma_P - k_2) + 0(\epsilon^3) + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Um die Gleichung nicht unnötig zu komplizieren, wurde die Meridianordinate η_P nicht ausgeschrieben (vgl. Gl. (41)).

Das Argument des Logarithmus, mit R_0 erweitert, ergibt die anschauliche Größe:

$$\frac{2\left(\sigma_P + \frac{1}{\sqrt{k_2}}\right)}{\beta \eta_P} = \frac{2(x+h)}{\beta R} \quad (46)$$

welche im Spitzenpunkt $x = -h$ (oder $\sigma_P = -\frac{1}{\sqrt{k_2}}$) dem Grenzwert $\frac{2}{\beta \gamma} = \frac{1}{\beta \sqrt{k_2}}$ zustrebt. $\gamma = 2\sqrt{k_2}$ ist hierbei der halbe Öffnungswinkel des die Spitze berührenden Kreiskegels.

Setzt man zur Kontrolle der Formel (45) den σ -Wert des Spitzenpunktes ein ($\sigma_P = -\frac{1}{\sqrt{k_2}}$), so erhält man unter Berücksichtigung des eben angegebenen Grenzwertes die aus Gl. (32) bekannte Störgeschwindigkeit u'/V am Kreiskegel. Weiterhin kann für $\sigma_P = 0$ sogleich die Störgeschwindigkeit beim Größtdurchmesser abgelesen werden:

$$\left(\frac{u'}{V}\right)_{\sigma_P=0} = 2k_2 \ln \frac{2}{\beta\sqrt{k_2}} - 3k_2 \quad (46a)$$

In der anschaulicheren Größe γ dargestellt, wobei γ wiederum der halbe Öffnungswinkel des die Spitze berührenden Kreiskegels ist, ergibt sich:

$$\left(\frac{u'}{V}\right)_{x=0} = \frac{\gamma^2}{2} \left(\ln \frac{4}{\beta\gamma} - \frac{3}{2} \right) \quad (46b)$$

Die Verwandtschaft mit der Störgröße an der Spitze erlaubt, folgende einfache Beziehung aufzustellen:

$$\left(\frac{u'}{V}\right)_{x=0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{u'}{V}\right)_{Spitze} - 0,403\gamma^2 \quad (47)$$

Für die Überschallströmung ist es typisch, daß die axiale Störgeschwindigkeit beim Größtquerschnitt nicht gleichzeitig die größte sog. Übergeschwindigkeit ist, wie dies vom Unterschallgebiet her bekannt ist. Diese Stelle verschiebt sich bei Überschall nach ca. drei Vierteln der vollen Länge des Rotationsparaboloides, also in die Nähe des Körperendes des Körpers 2.

Die Quellverteilungsfunktionen der übrigen Körper weichen von derjenigen des Körpers 2 vom Einflußpunkt des Größtdurchmessers an ($\sigma = -\beta$) um die Beträge $\frac{1}{2\pi}(F_i'' - F_2'')$ ab. Entsprechend müssen die Integrationen von diesem Punkt an neu durchgeführt werden. Die Störgeschwindigkeiten in Punkten σ_P der Heckteile lauten damit

$$\left(\frac{u'}{V}\right)_i = \left(\frac{u'}{V}\right)_2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\sigma_P - \beta} \frac{(F_i'' - F_2'') d\sigma}{\sqrt{(\sigma_P - \sigma)^2 - \beta^2} \eta_P^2} \quad (48)$$

Die Berechnung des Integrales in Gl. (48) führt, wiederum nach Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung, zu folgender Gleichung für die Störgeschwindigkeit am Körper i :

$$\begin{aligned} \left(\frac{u'}{V}\right)_i &= \left(\frac{u'}{V}\right)_2 + [-6\sigma_P^2(k_i^2 - k_2^2) + 2(k_i - k_2)] \ln \frac{2(\sigma_P + \beta)}{\beta\eta_P} \\ &+ 3(k_i^2 - k_2^2)[3\sigma_P^2 + 2\beta\sigma_P] + 0(\epsilon^3) + \dots \end{aligned} \quad (49)$$

Die nach dieser Formel durchgeführten Berechnungen sind hier nicht direkt graphisch dargestellt. Die Berechnung der Druckverteilungen an den fünf Körpern hingegen wurde einerseits mit Hilfe obiger Formel, andererseits aber mittels dem im folgenden Abschnitt beschriebenen schrittweisen Verfahren durchgeführt und in Fig. 26 verglichen (Kurven A und B). Die Übereinstimmung ist im Spitzenteil als außerordentlich gut, im Heckteil als mäßig gut zu bezeichnen.

Die durch die Größe β noch vorhandene Machzahlabhängigkeit ergibt auch hier nur eine scheinbare Genauigkeitserhöhung. Wählt man beispielsweise $\beta = 1$, so entspricht dies der Machzahl $M = \sqrt{2}$. Die Abweichungen von diesem Wert für β fallen für den betrachteten, mäßig hohen Überschallbereich bereits unter die vernachlässigbaren Größenordnungen. Interessehalber wurden die in Fig. 26 dargestellten Druckverteilungskurven jedoch mit den richtigen Werten von β durchgeführt.

4.5.6. Schrittweise Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung an allg. Rotationskörpern

Ersetzt man die Funktionen $f'(\xi)$ und $g'(\xi)$ durch Treppenkurven, so lassen sich die Integrale der Gl. (19) und (25) für die jetzt stückweise konstanten Funktionen $f'(\xi)$ und $g'(\xi)$ angeben. Aus den Randbedingungen (20) und (26) folgen, von der Spitze her beginnend, schrittweise die Stufenwerte für die Funktionen $f'(\xi)$ und $g'(\xi)$.

Den linearen Ansätzen für die Verteilungsfunktionen der Strömungssingularitäten entsprechen konische Strömungsfelder. Die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung an allgemeinen Rotationskörpern wird damit auf die Überlagerung konischer Strömungsfelder zurückgeführt. Diese Berechnungsmethoden wurden für Geradanströmung erstmals von *Karman* und *Moore* [8], für Schräganströmung von *Tsien* [9] und *Ferrari* [15] angegeben. Später vereinfachten *Sauer* [7] und *Haack* [17] die Rechenmethoden.

Anhand der schrittweisen Berechnung der Störgeschwindigkeit u' seien die verschiedenen Rechenmethoden erläutert:

Mit $f'(\xi) = A_i$ als stückweise konstante Größe läßt sich das Integral nach Gl. (19) in eine Summe verwandeln (*Karman-Moore*):

$$\begin{aligned} u' &= - \sum_{i=1}^n A_i \int_{i-1}^i \frac{d\xi}{\sqrt{(x_n - \xi_i)^2 - \beta^2 R_n^2}} \\ &= - \sum_{i=1}^n A_i \left[\text{Ar Cos } \frac{x_n - \xi_i}{\beta R_n} - \text{Ar Cos } \frac{x_n - \xi_{i-1}}{\beta R_n} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

Bei der Summierung treten die Ar Cos-Werte doppelt auf. Durch Zusammenziehen der gleichen Ar Cos-Werte entsteht die von *Sauer* angegebene Form:

$$\begin{aligned} u' &= + \sum_{i=1}^n (A_i - A_{i-1}) \text{Ar Cos } \frac{x_n - \xi_{i-1}}{\beta R_n} \\ &= + \sum_{k=0}^{n-1} f_k' \text{Ar Cos } \frac{x_n - \xi_k}{\beta R_n} \end{aligned} \quad (51)$$

wenn $i-1 = k$ und $A_i - A_{i-1} = f_k'$ gesetzt wird.

Um das Aufsuchen vieler Ar Cos-Werte zu vermeiden, ersetzt *Haack* [17] die genaue Integration des i -ten Intervalls durch die Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung. Für das letzte, also n -te Intervall ist wegen der Nullstelle im Nenner des Integranden jedoch die genaue Integration notwendig. Ausgehend von der Karmanschen Schreibweise (Gl. (50)) erhält man:

$$\begin{aligned} u' &= - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i (\xi_i - \xi_{i-1})}{\sqrt{(x_n - \bar{\xi})^2 - \beta^2 R_n^2}} - A_n \int_{n-1}^n \frac{d\xi}{\sqrt{(x_n - \xi)^2 - \beta^2 R_n^2}} \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i (\xi_i - \xi_{i-1})}{\sqrt{(x_n - \bar{\xi})^2 - \beta^2 R_n^2}} - A_n \text{Ar Cos } \frac{x_n - \xi_{n-1}}{\beta R_n} \end{aligned} \quad (52)$$

wobei $\bar{\xi}$ den ξ -Wert der jeweiligen Intervallmitte bezeichnet.

Indem für alle Geschwindigkeitskomponenten die eben beschriebene Rechenmethode durchgeführt wird, gelingt es, ein Rechenschema aufzustellen,

mit dessen Hilfe es möglich ist, die Geschwindigkeits- und damit Druckverteilung eines schräg angeströmten Rotationskörpers an beispielsweise 20 Punkten in einem Tag zu berechnen.

Dieses Verfahren ist jedoch nur dann von Vorteil, wenn sich die Meridiankurve nicht in einfacher Form mathematisch darstellen läßt. In Fig. 25 zeigen die Kurven B die Resultate der nach dem schrittweisen Verfahren berechneten Druckverteilungen. Zum Vergleich sind im gleichen Diagramm die Druckkurven eingetragen, welche mittels der im vorangegangenen Abschnitt besprochenen Methode berechnet wurden (Kurven A). Die Übereinstimmung ist im allgemeinen sehr gut.

4.6. Berechnung der Druckverteilung

4.6.1. Genaue und angenäherte Berechnung des Druckkoeffizienten

Aus den bisherigen Betrachtungen sind die der Parallelströmung zu überlagernden Störgeschwindigkeiten bekannt. Die vektorielle Addition aller Geschwindigkeitskomponenten ergibt den resultierenden Geschwindigkeitsvektor der Größe W . Aus ihm folgt, unter der Bezugnahme auf die Voraussetzung der Strömung eines idealen Gases ohne Wärmeaustausch (isentropie Strömung), der gesuchte Druckkoeffizient c_p . Die Definition des Druckkoeffizienten c_p lautet:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} V^2} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \kappa p_\infty M^2} \quad (53)$$

Dabei bedeuten p den örtlichen Druck, p_∞ den Druck in der ungestörten Strömung der Geschwindigkeit V (resp. Machzahl M) und der Dichte ρ , und κ den Isentropenexponenten.

Der genaue Zusammenhang zwischen c_p und der örtlichen Geschwindigkeit W ist aus der Gasdynamik bekannt:

$$c_p = \frac{2}{\kappa M^2} \left\{ \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \left(1 - \frac{W^2}{V^2} \right) \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} - 1 \right\} \quad (54)$$

Für inkompressible Strömung vereinfacht sich der Ausdruck von Gl. (54) zu:

$$c_{p_i} = 1 - \frac{W^2}{V^2} \quad (55)$$

Entwickelt man Gl. (54) in eine Reihe, so lautet der Anfang:

$$c_p = c_{p_i} + \frac{M^2}{4} c_{p_i}^2 + \dots \quad (56)$$

Die Konvergenz ist für schlanke Körper bei mäßigen Machzahlen gut.

4.6.2. Druckberechnung bei Geradanströmung

Die Komponenten W_1 , W_2 , W_3 des resultierenden Geschwindigkeitsvektors W sind bei Geradanströmung die folgenden:

$$\begin{aligned}
W_1 &= V + u' && \sim V (1 + \epsilon^2 \ln \epsilon) \\
W_2 &= v' && \sim V \epsilon \\
W_3 &= 0
\end{aligned}$$

Unter Weglassen der Glieder höherer Ordnungen als ϵ^2 und $\epsilon^2 \ln \epsilon$ folgt zunächst c_{p_0} :

$$c_{p_0} = -2 \frac{u'}{V} - \left(\frac{v'}{V} \right)^2 \quad (57)$$

Die Berücksichtigung der genaueren Formel (56) für c_{p_0} ergibt zusätzliche Glieder der Ordnung ϵ^4 , so daß Gl. (57) den Druckkoeffizienten mit genügender Genauigkeit wiedergibt. Die Machzahlabhängigkeit basiert damit nur noch auf der noch zu besprechenden Machzahlabhängigkeit der Störgeschwindigkeiten.

In vielen Arbeiten findet man die Druckgleichung in der allereinfachsten Form:

$$c_{p_0} = -2 \frac{u'}{V} \quad (57a)$$

Im Abschnitt 4.6.5 wird anhand der bekannten Lösung für den Kreiskegel der Einfluß dieser Vereinfachung gezeigt werden (vgl. Fig. 13).

4.6.3. Druckberechnung bei Schräganströmung

Die aus der Geradanströmung berechneten Störgeschwindigkeiten u' und v' können weiterhin verwendet werden, wenn man berücksichtigt, daß beim Übergang von V auf $V \cos \alpha$ der Längsanströmung auch die Störgeschwindigkeiten mit $\cos \alpha$ multipliziert werden müssen, was direkt aus der Randbedingung 20a folgt.

Die Geschwindigkeitskomponenten von W sind zunächst die folgenden:

$$\begin{aligned}
W_1 &= V \cos \alpha + u' \cos \alpha + u'' \\
W_2 &= V \alpha \cos \theta + v' \cos \alpha + v'' \\
W_3 &= -V \alpha \sin \theta + w''
\end{aligned} \quad (58)$$

Nach der Randbedingung der Queranströmung darf keine zusätzliche Radialgeschwindigkeit entstehen, da

$$v'' = -V \alpha \cos \theta$$

gefordert wurde (Gl. (26 b)). Damit wird einfach:

$$W_2 = v' \cos \alpha$$

Da ferner die Komponente W_3 meist geschlossen als die Umfangskomponente w_z'' einer Zylinderumströmung dargestellt wird, lauten die Komponenten von W nun:

$$\begin{aligned}
W_1 &= V \cos \alpha + u' \cos \alpha + u'' && \sim V (1 + \epsilon^2 \ln \epsilon + \epsilon^2) \\
W_2 &= v' \cos \alpha && \sim V \epsilon \\
W_3 &= w_z'' && \sim V \epsilon
\end{aligned} \quad (59)$$

Berücksichtigt man wiederum nur Glieder bis ϵ^2 und $\epsilon^2 \ln \epsilon$, so erhält man als inkompressiblen Druckkoeffizienten c_p für die Queranströmung unter dem Anstellwinkel α :

$$c_p = \alpha^2 - 2 \frac{u'}{V} - 2 \frac{u''}{V} - \left(\frac{v'}{V} \right)^2 - \left(\frac{w_z''}{V} \right)^2 \quad (60a)$$

Beläßt man die getrennte Schreibweise der Komponente W_3 nach Gl. (58), so wird c_p zu:

$$c_p = \alpha^2 - 2 \frac{u'}{V} - 2 \frac{u''}{V} - \left(\frac{v'}{V} \right)^2 - \alpha^2 \sin^2 \theta + 2 \alpha \sin \theta \frac{w''}{V} - \left(\frac{w''}{V} \right)^2 \quad (60b)$$

Da alle Glieder die Ordnung ϵ^2 oder $\epsilon^2 \ln \epsilon$ haben, gibt die Berücksichtigung der genaueren Formel (56) wiederum keine Verbesserung der Genauigkeit von c_p .

4.6.4. Druckdifferenz zwischen Schräg- und Geradanströmung

Von besonderem Interesse ist die Bestimmung des bei Anstellung zusätzlich entstehenden Druckanteils, da dieser für die Erzeugung der Normalkraft und des Längsmomentes verantwortlich ist. Auch kann aus den Messungen zu Vergleichszwecken eine Druckdifferenz stets genauer bestimmt werden als ein absoluter Druck.

Die Differenz der Formeln (60a) und (57) ergibt den Druckkoeffizienten Δc_p :

$$\Delta c_p = \alpha^2 - 2 \frac{u''}{V} - \left(\frac{w_z''}{V} \right)^2 \quad (61a)$$

oder, aus (60b) und (57):

$$\Delta c_p = \alpha^2 (1 - \sin^2 \theta) - 2 \frac{u''}{V} + 2 \alpha \sin \theta \frac{w''}{V} - \left(\frac{w''}{V} \right)^2 \quad (61b)$$

4.6.5. Druckverteilung an Rotationskörpern

4.6.5.1. Geradanströmung

Die Gleichungen (37) und (57) gestatten nun, den Druckkoeffizienten c_{p0} für Geradanströmung anzuschreiben:

$$c_{p0} = \frac{1}{\pi} \int_{-h}^{x-\beta R} \frac{F''(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2 R^2}} - R'^2(x) \quad (62)$$

Mit den in den Gl. (32) und (49) bereits dargestellten Geschwindigkeitskomponenten u'/V für Kreiskegel und Rotationsparaboloide lassen sich die Druckkoeffizienten c_{p0} für diese Körper sogleich anschreiben. Der Fall des Kreiskegels ist dabei besonders aufschlußreich, da für ihn genaue Lösungen der nicht linearisierten Strömungs-DG vorliegen. Mittels den Gl. (32) und (57) erhält man für den Kreiskegel mit halbem Öffnungswinkel γ :

$$c_{p0} = 2\gamma^2 \ln \frac{2}{\beta\gamma} - \gamma^2 \quad (63)$$

In Fig. 13 ist der Resultatvergleich verschiedener Berechnungsmethoden für den Kreiskegeldruck dargestellt.

Die Kurve A stellt die exakte Lösung der DG dar, wie sie sich in tabellierter Form bei *Kopal* [18] findet. Kurve B zeigt die genaue Lösung der linearisierten DG, wobei zur Druckberechnung die genaue Gleichung verwendet wurde (Gl. (30) und (54)). Bei konsequenter Vernachlässigung höherer Ordnungen als ϵ^2 und $\epsilon^2 \ln \epsilon$ ergibt sich als Druckkoeffizient die Kurve C (Gl. (63)). Verwendet man jedoch nur die angenäherte Druckformel nach Gl. (57a), so entsteht Kurve D.

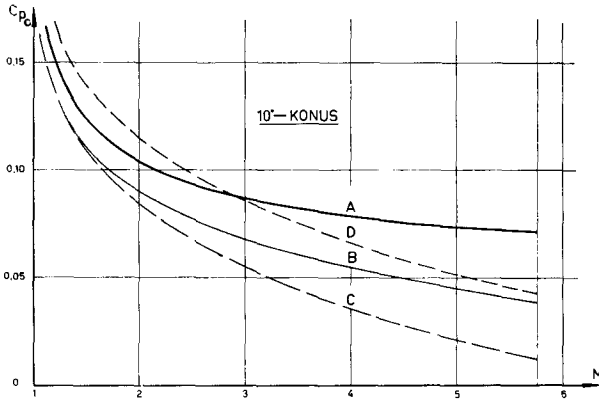


Fig. 13.
Theoretische Druckkoeffizienten c_{p0} am 10° -Konus als Funktion der Machzahl für

- A Exakte Lösung.
- B Lin. Theorie: exakte Lösung.
- C Lin. Theorie: vereinfachte Druckgleichung.
- D Lin. Theorie: einfachste Druckgleichung.

Auffallend ist sofort die gute Übereinstimmung der vereinfachten Druckberechnung (Kurve D) mit der exakten Lösung (Kurve A), was durchaus einem Zufall zuzuschreiben ist. Die der linearisierten Theorie genauigkeitsmäßig angepaßte Lösung nach Kurve C ergibt mit wachsender Machzahl eine stets größer werdende Differenz zur genauen Lösung. Für den 10° -Konus ist die Abweichung über Machzahl 2 bereits untragbar groß. Die genaue Lösung der linearisierten DG (Kurve B) weicht über Machzahl 2 ebenfalls erstaunlich stark von der genauen Lösung ab, wodurch zum Ausdruck kommt, daß die Linearisierung Fehler der Größenordnung ϵ^2 oder $\epsilon^2 \ln \epsilon$ in sich birgt!

Der Vergleich der Druckkoeffizienten am Kreiskegel nach exakter und linearisierter Theorie hat die Grenzen der linearisierten Theorie deutlich erkennen lassen. Zu entsprechenden Vergleichen der Berechnung der Druckverteilung am schlanken Rotationsparaboloid fehlen vorläufig exakt berechnete Druckkoeffizienten. Die Abweichung des linearisiert berechneten Druckverlaufes vom exakt berechneten wird sich jedoch im ähnlichen Rahmen halten wie die eben dargestellten Abweichungen am schlanken Kreiskegel.

Der hier nicht explizite angeschriebene Druckkoeffizient c_{p0} für die in dieser Arbeit verwendeten Rotationskörper folgt sofort aus den Geschwindigkeits- und Druckgleichungen (49) oder (52) und (57). Anlässlich der Besprechung der Meßresultate im Abschnitt 5 werden anhand der Fig. 25 die Druckverteilungskurven der fünf Körper besprochen.

4.6.5.2. Schräganströmung

Mittels der Gl. (61a), (32) und (40) berechnet sich der zusätzliche Druckkoeffizient Δc_p am Kreiskegel infolge der Schräganströmung unter dem Winkel α zu:

$$\Delta c_p = \alpha^2(1 - 4 \sin^2 \theta) - 4 \gamma \alpha \cos \theta \quad (64)$$

Für einen beliebigen, schlanken Rotationskörper ist in der obigen Formel lediglich γ durch die örtliche Neigung R' der Meridiantangente zu setzen, was sofort aus den vereinfachten Störgeschwindigkeiten des Abschnittes 4.5.3 folgt (Gl. (38)):

$$\Delta c_p = \alpha^2(1 - 4 \sin^2 \theta) - 4 R' \alpha \cos \theta \quad (65)$$

Verwendet man an Stelle der ungefähren die exakten Störgeschwindigkeiten des Kreiskegels nach Gl. (31), so wird auch hier der zusätzliche Druckkoeffizient Δc_p von der Machzahl abhängig. An Hand der in Abschnitt 4.7.2 besprochenen Auswirkung auf die Normalkraft kann gezeigt werden, daß diese Verfeinerung ihr Ziel verfehlt.

4.7. Die Integration der Druckverteilung zur Berechnung von Kräften und Momenten

Die Integration in und quer zur Achsrichtung des Rotationskörpers ergibt körperfeste axiale und normale Kräfte. Aus diesen Komponenten müssen über eine Transformation die windfesten Komponenten Widerstand und Auftrieb ermittelt werden. In dieser Arbeit werden jedoch vorzugsweise die Normalkräfte und nicht die Auftriebskräfte besprochen, da die Theorie sehr schlanker Körper direkt die Normalkraft liefert.

Für einen Rotationskörper der Erzeugenden $R(x)$ ergeben die Integrationen der Druckverteilung $c_p(x, \theta)$ folgende dimensionslosen Beiwerte:

4.7.1. Axialkraftbeiwert c_T

Für die Axialkraft T lautet der Beiwert c_T :

$$c_T = \frac{T}{\frac{\rho}{2} V^2 F_0} = \frac{1}{F_0} \int_{-h}^{h/2} R(x) R'(x) \int_0^{2\pi} c_p(x, \theta) d\theta dx \quad (66)$$

Bei Geradanströmung ist c_{p_0} von θ unabhängig:

$$\begin{aligned} c_{T_0} = c_{W_0} &= \frac{1}{F_0} \int_{-h}^{h/2} 2\pi R(x) R'(x) c_{p_0}(x) dx \\ &= \frac{1}{F_0} \int_{-h}^{h/2} F'(x) c_{p_0}(x) dx \end{aligned} \quad (67)$$

Für den Kreiskegel berechnet sich der Nullwiderstand besonders einfach, da der Druck auf der ganzen Mantelfläche konstant ist. Würde derselbe Druck auch auf die Bodenfläche des Kreiskegels wirken, so befände sich dieser im Kräftegleichgewicht. Ohne diesen Bodendruck ist der Widerstandskoeffizient c_{W_0} also gleich dem Druckkoeffizienten c_{p_0} von Gl. (63), was auch sofort aus Gl. (67) folgt. Die Diskussion von c_{p_0} am Kreiskegel gilt daher gleichermaßen für den Widerstandskoeffizienten c_{W_0} .

In der Praxis wird für beliebig geformte Rotationskörper der Druckwiderstand mittels des bereits berechneten Druckbeiwertes c_{p_0} gemäß Gl. (67) bestimmt werden.

Bei Anstellung entsteht eine Veränderung Δc_T des Axialkraftbeiwertes, welche wegen $\cos \alpha \cong 1$ auch als Widerstandsanteil Δc_W angesehen werden kann. Wird in Gl. (66) c_p durch Δc_p aus Gl. (65) ersetzt, so folgt nach kurzer Rechnung:

$$\Delta c_T = -\frac{F_B}{F_0} \alpha^2 \cong \Delta c_W \quad (68)$$

wobei F_B den Endquerschnitt des Körpers bedeutet.

Diese Saugkraft läßt sich nun mit der Normalkraft der Potentialtheorie in Verbindung bringen.

Wie in Abschnitt 4.7.2 gezeigt werden wird, beträgt der Normalkraftbeiwert für schlanke Rotationskörper ganz allgemein:

$$c_N = 2\alpha \frac{F_B}{F_0} \quad (69)$$

Die Saugkomponente der Axialkraft ist also:

$$\Delta c_T = -\frac{1}{2} c_N \alpha \cong \Delta c_W \quad (70)$$

Durch diese Saugkomponente wird bei der Widerstandsberechnung die Wirkung des aus der Normalkraft induzierten Widerstandes $c_N \alpha$ auf die Hälfte reduziert [19]:

$$c_W = c_{W_0} + \frac{1}{2} c_N \alpha \quad (71)$$

Die auf die Oberfläche eines schlanken Körpers wirkende resultierende Druckkraft (Bodenfläche nicht einberechnet) liegt in der durch Strömungsrichtung und Rumpfachse aufgespannten Ebene senkrecht zur Winkelhalbierenden dieser beiden.

4.7.2. Normalkraftbelastung $\frac{dc_N^*}{dx}$, Normalkraftbeiwert c_N , Längsmomentenbeiwert c_M und Lage des Druckzentrums e

Für die Darstellung der Normalkraftbelastung eignet sich eine schon von Ackeret, Degen und Rott [4] verwendete dimensionslose Schreibweise, welche hier mit $\frac{dc_N^*}{dx}$ bezeichnet wird. Der Stern soll daran erinnern, daß die Normalkraft durch den Anstellwinkel α dividiert ist:

$$\frac{dc_N^*}{dx} = \frac{\frac{dN}{dx}}{\frac{\rho}{2} V^2 4 R_0 \alpha} = \frac{dc_N}{dx} \frac{\pi R_0}{4 \alpha} \quad (72)$$

Zunächst ergibt die Integration über Scheiben der Dicke dx die auf den Größtquerschnitt F_0 bezogene Verteilung des lokalen Normalkraftbeiwertes:

$$\frac{dc_N}{dx} = -\frac{R}{F_0} \int_0^{2\pi} \Delta c_p(x, \theta) \cos \theta d\theta$$

Das Minuszeichen folgt aus der Definition des Winkels θ (vgl. Fig. 11).

Damit wird:
$$\frac{d c_N^*}{d x} = - \frac{R}{4 R_0 \alpha} \int_0^{2\pi} \Delta c_p(x, \theta) \cos \theta d \theta \quad (73)$$

Aus der Integration der Normalkraftbelastung folgt der Normalkraftbeiwert c_N :

$$c_N = \frac{N}{\frac{\rho}{2} V^2 F_0} = - \frac{1}{F_0'} \int_{-h}^{h/2} R(x) \int_0^{2\pi} \Delta c_p(x, \theta) \cos \theta d \theta d x \quad (74)$$

oder
$$c_N = \frac{4 \alpha}{\pi R_0} \int_{-h}^{h/2} \frac{d c_N^*}{d x} d x$$

Bei der Berechnung der Normalkraftbelastung nach Gl. (73) liefern die vom Meridianwinkel θ unabhängigen und die zu $\theta = 90^\circ$ (resp. 270°) symmetrischen Druckanteile in Gl. (65) keinen Beitrag. Mit dem verbleibenden Glied

$$\Delta c_p = -4 R' \alpha \cos \theta$$

berechnet sich die auf den Anstellwinkel bezogene Normalkraftbelastung zu

$$\frac{d c_N^*}{d x} = \frac{R}{4 R_0 \alpha} 4 \pi R' \alpha = \frac{F'}{2 R_0} \quad (75)$$

Die nochmalige Integration nach Gl. (74) ergibt den Normalkraftbeiwert

$$c_N = \frac{4 \alpha}{\pi R_0} \frac{1}{2 R_0} \int_{-h}^{h/2} F' d x = 2 \alpha \frac{F_B}{F_0} \quad (76)$$

Dieses bekannte Resultat der Theorie sehr schlanker Körper besagt, daß der Normalkraftbeiwert unabhängig von der Körperform und der Machzahl ist. Ausschlaggebend ist neben dem Anstellwinkel nur die Bodenfläche F_B des Körpers. Die Normalkraftbelastung hängt von der Änderung $F'(x)$ des Körperquerschnittes mit der Länge x des Körpers ab. Bei sich im Heckteil verjüngenden Körpern entstehen folglich negative Normalkräfte!

Diese einfachen Resultate folgen auch aus Impulsbetrachtungen der Strömungsvorgänge in voneinander unabhängigen, senkrecht zur Körperachse stehenden Luftschichten, wie schon *Munk* [1] gezeigt hat.

Wiederum läßt sich an Hand der beim Kreiskegel bekannten exakten Resultate der Vergleich mit den angenäherten Lösungen durchführen.

In Fig. 14 sind die Beiwerte der Normalkraftgradienten $\frac{d c_N}{d \alpha}$ für $\alpha = 0$ für einen Kreiskegel von 10° halbem Öffnungswinkel dargestellt. Nach dem Resultat der elementaren Theorie nach Gl. (76) ist dieser Beiwert unabhängig von der Machzahl gleich zwei! (Kurve 1.)

Bei der exakten Lösung der linearisierten Gleichung entsteht eine Abhängigkeit der Normalkraft von der Machzahl, welche der machabhängigen Geschwindigkeitskomponente u'' direkt proportional ist. In Gl. (31) ist u'' angeschrieben, wobei zur Berechnung die genaue Randbedingung nach Gl. (26a) verwendet wurde. Die entsprechende Normalkraftkurve 2 zeigt eine starke Abhängigkeit von der Machzahl. Kurve 4 stellt das Resultat der exakten

Theorie dar. Bis über Machzahl sechs hinaus erkennt man kaum eine Abhängigkeit von der Machzahl!

Die von der exakten Lösung der linearisierten Theorie angegebene Abhängigkeit der Normalkraft von der Machzahl erweist sich somit als ebenso unrichtig wie der zu hohe Wert der elementaren Theorie! Diese Feststellung bestätigt, daß es im Rahmen der linearisierten Theorie sinnlos ist, Glieder höherer Ordnung als ϵ^2 und $\epsilon^2 \ln \epsilon$ zu berücksichtigen.

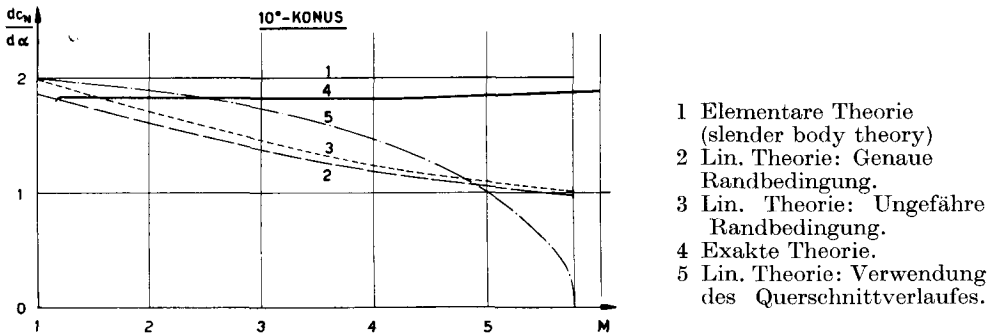


Fig. 14. Theoretische Normalkraftgradienten $\frac{d c_N}{d \alpha}$ für $\alpha = 0$ am 10°-Konus als Funktion der Machzahl.

Deshalb ist es beispielsweise sinnlos, die genaue Randbedingung nach Gl. (26a) zu wählen. Kurve 3 zeigt den Normalkraftgradienten $\frac{d c_N}{d \alpha}$ bei Verwendung der ungefähren Randbedingung nach Gl. (26b). Die Abweichung von der exakten Kurve ist bei Machzahlen über 1,3 sogar kleiner als bei Verwendung der genauen Randbedingung. Schließlich stellt Kurve 5 die $\frac{d c_N}{d \alpha}$ -Werte dar, welche entstehen, wenn an Stelle der genauen Dipolverteilungsfunktion $g(\xi)$ nach Gl. (29) die Änderung $F'(\xi)$ des Körperquerschnittes mit der Körperachse nach Gl. (34) eingesetzt wird.

Gesamthaft erkennt man, daß alle Resultate der linearisierten Theorie bei der Berechnung der Normalkraft an einem Kreiskegel von 10° halbem Öffnungswinkel unterhalb Machzahl 2 vom exakten Resultat bis ca. 12% abweichen.

Eine ähnliche Größenordnung der Abweichung muß auch bei schlanken Rotationskörpern ähnlicher Schlankheit im gleichen Machzahlbereich erwartet werden.

Der Momentenbeiwert c_M wird zum direkten Vergleich mit den Kraftmessungen um den Bezugspunkt der Dreikomponentenwaage ermittelt. Dieser liegt auf der Körperachse an der Stelle $x=0$ des größten Querschnittes (vgl. Fig. 12).

$$c_M = \frac{M}{\frac{\rho}{2} V^2 F_0 L} = \frac{1}{F_0 L} \int_{-h}^{h/2} x R(x) \int_0^{2\pi} \Delta c_p(x, \theta) \cos \theta d\theta dx \quad (77)$$

oder

$$c_M = -\frac{4\alpha}{\pi R_0} \int_{-h}^{h/2} x \frac{d c_N^*}{d x} dx$$

Positives c_M bei positiven Anstellwinkeln bedeutet ein aufbäumendes, also aerodynamisch instabiles Moment um die Querachse durch den Bezugspunkt.

Mit Hilfe der Gleichungen (77) und (75) berechnet sich der Längsmomentenbeiwert c_M zu:

$$c_M = -\frac{4\alpha}{\pi R_0 L} \frac{1}{2R_0} \int_{-h}^{h/2} x F' dx = \frac{2\alpha}{F_0 L} \left[\int_{-h}^{h/2} F dx - \frac{h}{2} F_B \right] \quad (78)$$

oder
$$c_M = \frac{2\alpha}{F_0 L} \left(G - F_B \frac{h}{2} \right)$$

wobei G das Körpervolumen, F_B die Bodenfläche und $\frac{h}{2}$ den Abstand des Momentenbezugspunktes von der Bodenfläche des Körpers der Länge L angeben.

Der Abstand e des Druckzentrums vom Momentenbezugspunkt folgt aus:

$$e = \frac{c_M}{c_N} L = \frac{G}{F_B} - \frac{h}{2} \quad (79)$$

Im Jahre 1949 wies *Ackeret* darauf hin [20], daß diese Resultate, welche in seiner Arbeit aus Impulsbetrachtungen gewonnen werden, prinzipiell von der Strömungsgeschwindigkeit unabhängig sind und somit sowohl für Unter- als auch Überschallgeschwindigkeit gelten.

Aufgabe der nachfolgenden Besprechung der Meßresultate wird es sein, die Grenzen der Anwendbarkeit dieser äußerst einfachen Formeln aufzuzeigen.

5. Meßresultate

5.1. Resultate der Druckmessungen am Körper 2

5.1.1. Geradanströmung

5.1.1.1. Druckverteilung längs einer Erzeugenden

In Fig. 15 sind die Meßergebnisse den Resultaten der linearisierten Theorie gegenübergestellt. Der nach den Formeln des Abschnittes 4.6.5.1 berechnete Druckverlauf ergibt durchwegs etwas tiefere Drücke als die Messungen anzeigen. Zu der Genauigkeit der Meßresultate seien die in Abschnitt 3.2.2.3 ausgeführten Vorbehalte in Erinnerung gerufen. Die in der Kanaldruckverteilung vorkommenden Druckschwankungen von 1% des Ruhedruckes bedeuten im Machzahlbereich der Messungen Änderungen von 2% im auf $\frac{\rho}{2} V^2$ bezogenen c_p -Wert! Die dargestellten Meßpunkte sind Mittelwerte verschiedener Messungen, welche mit in Achsrichtung verschobenen Modellagen durchgeführt wurden. Die Verbindung der Meßpunkte mit den nach Tabellen genau bekannten Spitzendrücken [18] (exakte Werte) läßt sich gut herstellen. Gegen das Rumpfe hin weichen die gemessenen Werte besonders deutlich von den berechneten ab. Die positiveren Meßdrücke zeigen das Vorhandensein einer in Achsrichtung anwachsenden Grenzschicht an.

Bei Machzahl 1,38 ist der Bodendruck eingetragen, welcher wegen der am Körperende noch stattfindenden Expansion tiefer liegt als der Druck am Körperende. Für $M=1,67$ ergab die Auswertung stark streuende Resultate, da die zu berücksichtigende Kanaldruckverteilung an dieser Stelle starke Druckgradienten aufwies (Störwellen). Aus diesem Grund werden im folgenden alle Resultate, welche den Axialwiderstand bei $M=1,67$ betreffen, weggelassen.

Zum Vergleich der Überschalldruckverteilung mit der Unterschalldruckverteilung sind in Fig. 15 die Meßresultate von *Ackeret, Degen und Rott* [4] eingetragen. Entsprechend der im Unterschallbereich anders gearteten Strömungs-DG ergeben sich wesentlich verschiedene Meßresultate dies- und jenseits der Schallgrenze. Im Überschallbereich ist der Druckabfall entlang einer Erzeugenden sanfter als im Unterschallbereich. Die örtliche relative Übergeschwindigkeit ist im Unterschallbereich, besonders in der vorderen Körperhälfte, größer als im Überschallbereich. Für meßtechnische Zwecke läßt sich die Tatsache ausnützen, daß es sowohl im Unter- wie auch im Überschallbereich je einen Körperquerschnitt gibt, an welchem der auf $\frac{\rho}{2} V^2$ bezogene Körperdruck (c_p -Wert) weitgehend unabhängig von der Machzahl ist.

Nach Gl. (45) ist dies im Überschallgebiet der Fall, wenn $F''(\sigma)=0$ ist. Von den zwei Lösungen ist hier die näher der Spitze gelegene wichtig. Beim Körper 2 ist $F''(\sigma)=0$ für $\sigma = -7,38$ (oder $\frac{x}{D} = -3,69$)

Die Messung zeigt tatsächlich einen Kreuzungspunkt sehr nahe bei dieser

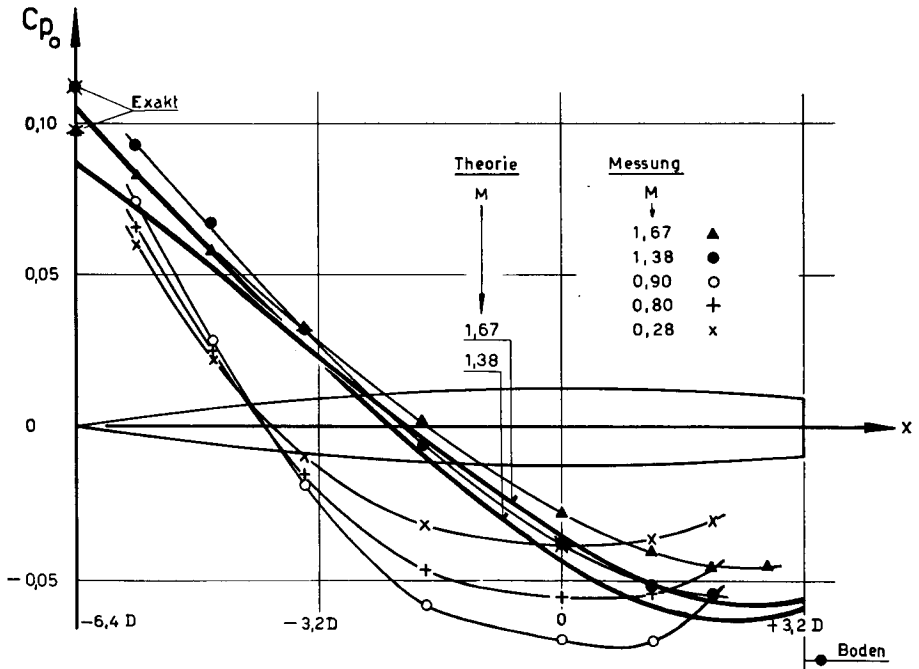


Fig. 15. Nach der linearisierten Theorie berechneter und gemessener Druckverlauf am Körper 2 bei Geradanströmung für die Machzahlen 1,38 und 1,67. Zum Vergleich sind ebenfalls die Unterschallmeßresultate eingetragen.

Stelle. Im Unterschallgebiet liegt die entsprechende Stelle etwas näher bei der Spitze.

Weiterhin gibt es, wie die Messungen zeigen, je einen benachbarten Körperquerschnitt, bei welchem sich mit einer Genauigkeit von ca. $\pm 0,5\%$ der Druck der ungestörten Strömung einstellt ($c_p = 0$).

Allerdings darf diese Tatsache nur bei Anstellwinkeln meßtechnisch ausgenützt werden, die sehr wenig von Null verschieden sind (ca. $\pm 2-3^\circ$). Nach den Messungen liegen diese Stellen für Unterschall bei $\sigma = -3,86$ und für Überschall bei $\sigma = -1,92$ (theor. $-2,14$).

5.1.1.2. Widerstandsbeiwerte

Die folgende Tabelle zeigt die Widerstandsbeiwerte aus der Druckintegration bei $M = 1,38$ sowie das Ergebnis der Wägung. Aus der Differenz zwischen Druckintegration (inkl. Bodendruck) und Wägung folgt der Reibwiderstand:

	c_W -Wert	
Totalwiderstand	$0,183 \pm 0,010$	(+)
Druckwiderstand	$0,058 \pm 0,005$	(-)
Bodenwiderstand	$0,042 \pm 0,008$	(-)
Reibwiderstand	$0,083 \pm 0,023$	(+)

Deutlich geht aus den angegebenen Toleranzen hervor, wie schwierig es bei sehr schlanken Körpern wird, den Reibwiderstand mit einiger Genauigkeit zu ermitteln.

Immerhin erkennt man aus den Größenordnungen der Zahlenwerte die große Bedeutung des Reibwiderstandes! Dieser beträgt beim obigen Beispiel 45% des Gesamtwiderstandes. Auf die Oberfläche des Rotationsparaboloides bezogen ergibt sich ein mittlerer Reibkoeffizient von $0,0029 \pm 0,0008$. Verglichen mit den Reibkoeffizienten der ebenen Platte liegt dieser Mittelwert im Übergangsbereich zwischen laminarer und turbulenter Reibung.

5.1.2. Schräganströmung

5.1.2.1. Zusätzliche Druckverteilung infolge Schräganströmung

In Fig. 16 sind die Druckkoeffizienten c_p (Definition vgl. Formel (53)) aufgetragen, welche an acht verschiedenen Körperquerschnitten I—VIII in Anstellwinkelsprüngen von 2° bis zu $\alpha = 12^\circ$ und bei zwei Überschallmachzahlen ($M = 1,38$ und $1,67$) gemessen wurden. Dabei wurde die Druckverteilung im vollen Umfang jedes Schnittes gemessen und als Funktion des Meridianwinkels θ dargestellt. Die Darstellung beginnt und endet beim Meridianwinkel $\theta = \pm 180^\circ$ auf der Druckseite. Bei $\theta = 0^\circ$ liegen die c_p -Werte der Abströmseite.

Abgesehen von einigen c_p -Werten bei den größeren Anstellwinkeln liegen die einzelnen Meßpunkte den Erwartungen entsprechend symmetrisch in bezug auf die Meridianebene $\theta = 0^\circ$ resp. 180° .

Der Einfluß der Machzahl erscheint klein und kann erst durch die weitere Auswertung erfaßt werden. Charakteristisch für alle Schnitte ist der bei großen Anstellwinkeln entstehende Druckanstieg auf der Abströmseite des Rumpfes ($\theta = 0^\circ$). Hauptsächlich durch diesen scharf begrenzten Druckanstieg unter-

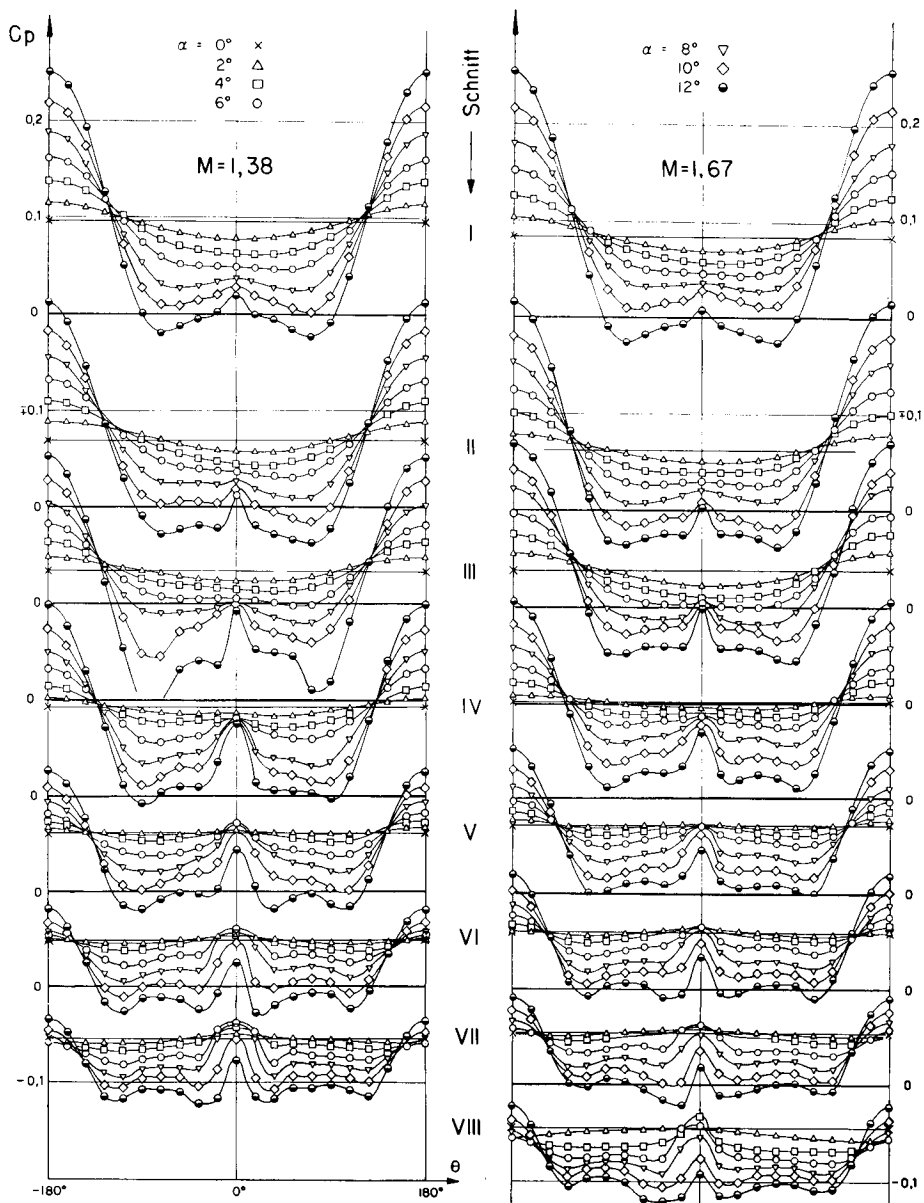


Fig. 16. Gemessener Verlauf der Druckkoeffizienten c_p im Überschallbereich ($M = 1,38$ und $1,67$) an allen Schnitten I—VIII des Körpers 2 in Anstellwinkelschritten von 2° (bis $\alpha = 12^\circ$), dargestellt über dem vollen Bereich des Meridianwinkels θ .

scheidet sich die Druckverteilung am schräg angeströmten Körper wesentlich von der im übrigen ähnlichen Druckverteilung am quer angeströmten Zylinder. Beim Zylinder entsteht infolge der bekannten wechselseitigen Wirbelablösung (Karmansche Wirbelstraße) eine *instationäre* Druckverteilung auf der Abströmseite. Auf der Abströmseite des schräg angeströmten Körpers bilden sich zwei *stationäre*, sich gegen innen aufrollende Wirbelschichten, welche erst bei sehr großen Anstellwinkeln in die instationären, wechselseitig ablösenden Wirbelschichten übergehen. Die Stelle $\theta = 0^\circ$ des gegenüber der Umgebung erhöhten Druckes liegt in der Symmetrieebene der Wirbelbildung, wo eine staupunktähnliche Aufstauung der Luft erfolgt.

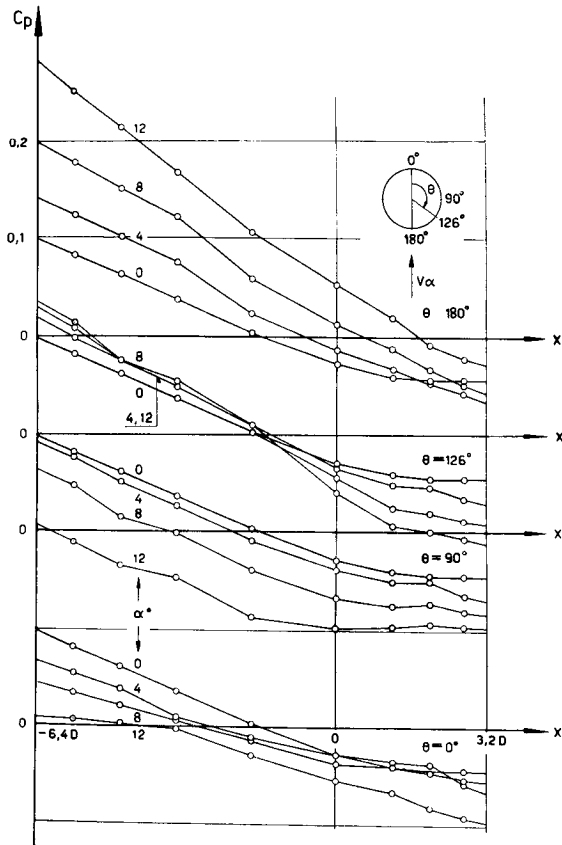


Fig. 17. Gemessener Verlauf der Druckkoeffizienten c_p bei $M = 1,67$ entlang vier Meridianschnitten θ , als Funktion der x -Achse dargestellt.

Aus der Darstellung der Druckverteilung entlang einzelner Meridiane (Fig. 17) geht hervor, daß der Druck mit Ausnahme der Heckpartie von der Spitze zum Heck ständig absinkt. Allerdings will dies noch nicht besagen, daß in Strömungsrichtung keine Druckerhöhungen vorkommen können. Besonders in der Heckpartie sind die Druckkurven bei den Meridianwinkeln $\theta = 126^\circ$ und 90° bereits sehr flach. Die aus Fig. 16 ersichtlichen starken Druckänderungen von Meridian zu Meridian zeigen, daß auf der Abströmseite des Heckteiles die gegen $\theta = 0^\circ$ tendierende Strömungsrichtung Druckerhöhungen ausgesetzt ist, welche auch tatsächlich zur Ablösung der Grenzschicht beiträgt.

Die Vergleiche der Meßresultate mit den machzahlunabhängigen Resultaten des Kapitels 4 sind in den folgenden Figuren durchgeführt:

Fig. 18 vergleicht die durch die Schräganströmung zusätzlich entstehenden Δc_p -Werte bei $M = 1,38$ mit den potentialtheoretischen Werten nach Gl. (65). Bei kleinen Anstellwinkeln ist die Übereinstimmung im Schnitt I sehr gut. Als Meßort wurde absichtlich der Schnitt I nahe der Spitze gewählt. Der Grenzschichteinfluß ist hier noch klein. Der Vergleich mit den Unterschallmeßwerten von *Ackeret, Degen und Rott* [4] zeigt, daß bis $\alpha = 6^\circ$ die Meßkurven der Unter- und Überschallversuche kaum voneinander zu unterscheiden sind! Die durch die Größenordnungsbetrachtung gefundene Machzahl-Unabhängigkeit der zusätzlichen Druckverteilung bei Schräganströmung wird somit weiterhin durch das Experiment bestätigt. Bei Anstellwinkeln über 6° weichen die gemessenen Werte mit wachsendem Anstellwinkel stets mehr von den theoretischen Kurven ab. Auf der Saugseite sind die Abweichungen wegen der beginnenden Ablösung der Wirbelschicht besonders stark.

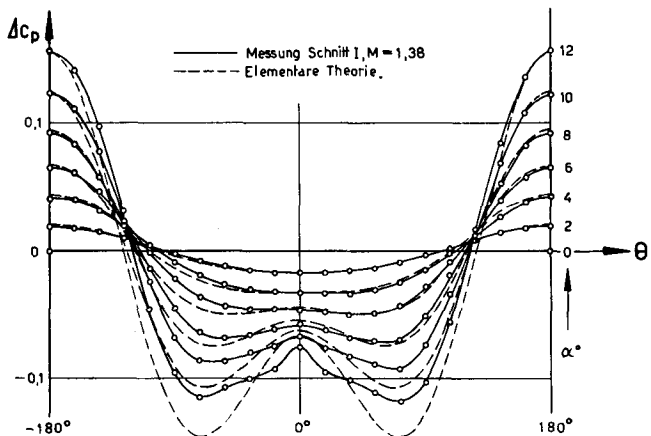


Fig. 18. Vergleich der gemessenen mit den theoretischen Druckunterschieden Δc_p zwischen Schräg- und Geradanströmung im Schnitt I des Körpers 2 bei 6 Anstellwinkeln α und bei $M = 1,38$, über dem Meridianwinkel θ dargestellt.

Die Abweichungen der Meßwerte von den theoretischen Druckverteilungen nach Formel (65) bei sämtlichen Schnitten I—VII (resp. VIII) sind für $\alpha = 6^\circ$ in Fig. 19a und für $\alpha = 10^\circ$ in Fig. 19b dargestellt. Mit steigendem Abstand von der Spitze (wachsende lokale Reynoldszahl) wird die Abweichung stets größer.

Überraschend ist die schlechte Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung auf der Druckseite bei $\theta = 0^\circ$. Der Vergleich mit den Werten der linearisierten Theorie ergab z.T. noch größere Abweichungen! Auch die Berücksichtigung der Verdrängungsdicke der Grenzschichtströmung führt nicht zu besserer Übereinstimmung.

Auf der Abströmseite läßt sich der gegen hinten breiter werdende Einfluß der Wirbelzone verfolgen (vgl. Fig. 19b). An der Spitze beginnt die Abweichung vom theoretischen Verlauf bei ca. $\theta = \pm 75^\circ$ während im Schnitt VIII die Wirbelzone bei ca. $\pm 125^\circ$ auf die Anströmseite übergreift. Im Schnitt des größten Körperquerschnittes (V) ist der Vergleich mit der bekannten inkompressiblen Druckverteilung am Kreiszyylinder am ehesten gestattet: Der Umschlag in die Wirbelzone beginnt dort bei $\theta = \pm 108^\circ$ oder, von der Anströmseite aus gemessen, $\pm 72^\circ$. Dies entspricht der Umschlagstelle für die unter-

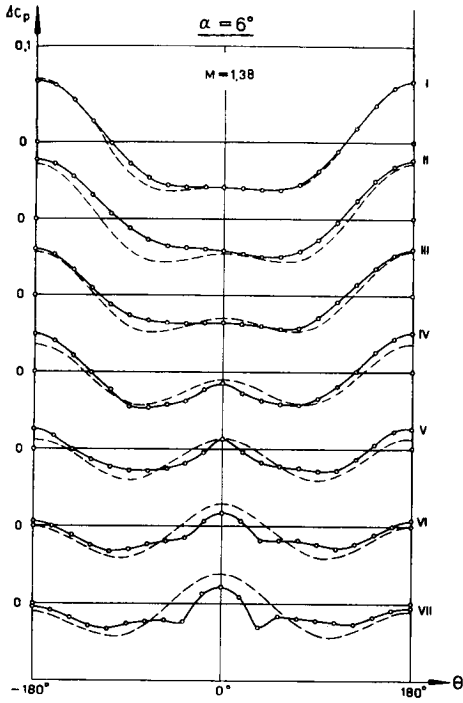


Fig. 19a.

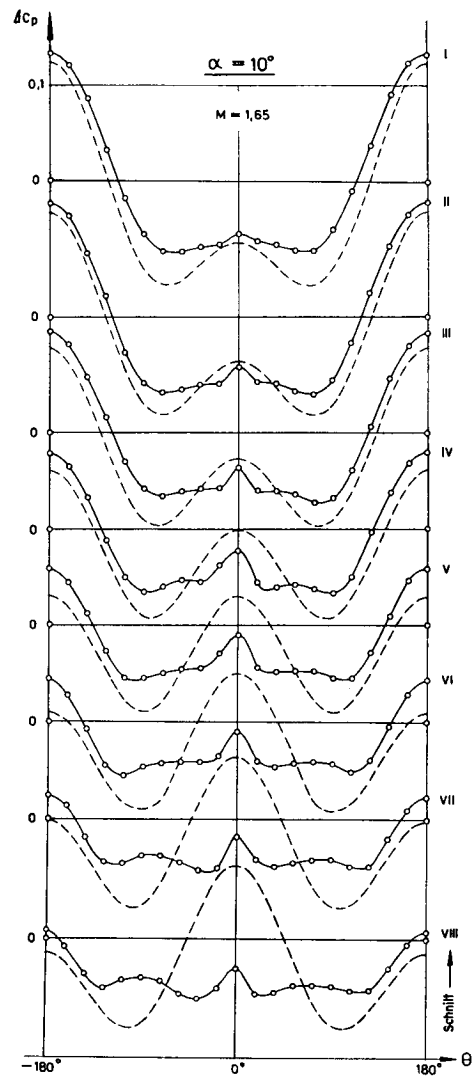


Fig. 19b.

Fig. 19. Vergleich der gemessenen mit den theoretischen Druckunterschieden (elementare Theorie) zwischen Schräg- und Gerad- anströmung für alle Schnitte I—VIII, bei konstanten Anstellwinkeln α , über dem Meridianwinkel θ dargestellt.

kritische Queranblasung des Kreiszyinders. Sowohl die Queranströmung als auch die Längsanströmung liegen bei den Messungen im Schnitt V im unterkritischen Bereich.

5.1.2.2. Normalkraftbelastung am Körper 2

Die nach der Definitionsgleichung (72) in der Figur 20 dargestellten Normalkraftgradienten $\frac{dc_N^*}{dx}$ stellen den auf den Anstellwinkel bezogenen Wert des lokalen Normalkraftgradienten dar. Bei völliger Linearität des Normalkraftbeiwertes mit dem Anstellwinkel müßte eine einzige Kurve entstehen, wie dies sowohl die elementare Theorie (Kurve a, Formel (75)) wie auch die linearisierte Theorie (b) (schrittweise Berechnung, vgl. Abschnitt 4.5.6) verlangen. Die

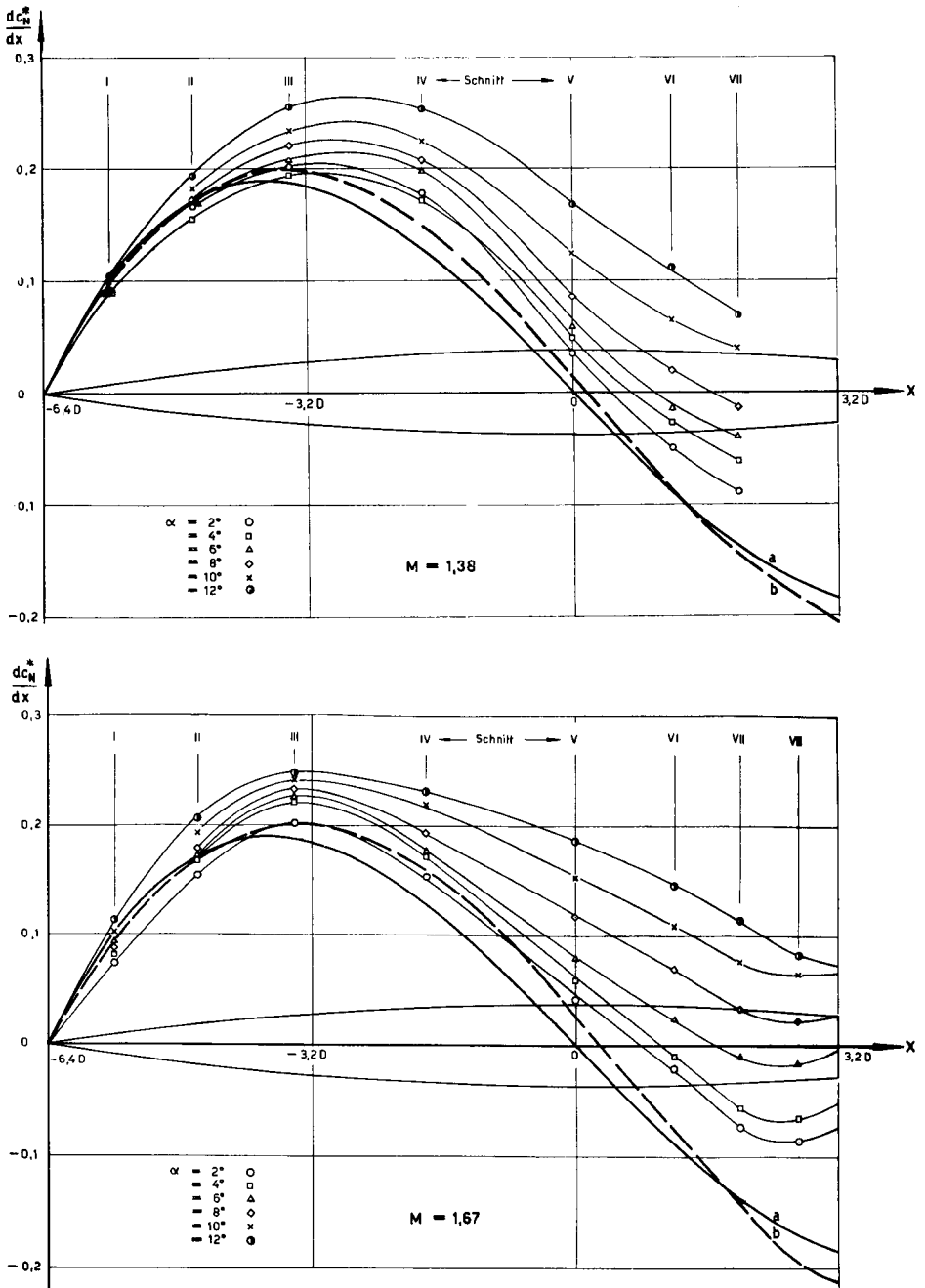


Fig. 20. Auf den Anstellwinkel bezogene, dimensionslose Darstellung der theoretischen und gemessenen Querkraftverteilungen $\frac{dc_N^*}{dx}$ am Körper 2 bei 6 Anstellwinkeln α und bei $M = 1,38$ (oben) und $M = 1,67$ (unten), als Funktion der x -Achse dargestellt.

Kurve a: Elementare Theorie Kurve b: Lin. Theorie

Integration der Druckverteilung zeigt, daß bei kleinen Anstellwinkeln die Übereinstimmung besonders in der vorderen Körperhälfte gut ist, wenn auch bei kleinen Anstellwinkeln sogar kleinere Normalkräfte gemessen wurden, als die Theorie angibt. Mit steigendem Anstellwinkel weichen die Meßresultate auch in der vorderen Körperhälfte stets mehr von den theoretischen Kurven ab. Der Grund für die Abweichung ist von den Druckverteilungsmessungen her bekannt: Die Ablösung der Wirbelschichten auf der Abströmseite verhindert den Druckanstieg und führt so zu größeren Normalkräften. Die Theorie verlangt im hinteren Körperdrittel wegen der abnehmenden Querschnittsfläche negative Normalkräfte. Tatsächlich stellen sich diese ein, jedoch nicht in der theoretischen Größe. Aus der Normalkraftverteilung bei $M = 1,67$ geht besonders deutlich hervor, wie stark der Grenzschichteinfluß im konvergenten hinteren Körperdrittel ist. Am Körperende beträgt die lokale Normalkraft bei nur 2° Anstellwinkel kaum die Hälfte des von der Theorie verlangten Wertes. Bei Anstellwinkeln über 6° sind die Normalkräfte bereits überall positiv.

Im Unterschallbereich wurden bei kleinen Machzahlen von *Ackeret*, *Degen* und *Rott* [4] wesentliche Abweichungen vom theoretischen Verlauf erst oberhalb 12° Anstellwinkel gemessen. Die Reynoldszahl jener Messungen war mit $1,4 \cdot 10^6$ etwas höher als bei den hier besprochenen Messungen ($1,2 \cdot 10^6$). Bei hohen Unterschallmachzahlen zeigen sich bei 3° Anstellwinkel nur im hinteren Drittel des Rumpfes Abweichungen, welche etwas kleiner sind als die hier bei Überschallgeschwindigkeit festgestellten Abweichungen. Leider wurden im schallnahen Unterschallgebiet über 3° Anstellwinkel keine Druckmessungen durchgeführt.

Immerhin kann ausgesagt werden, daß bis 3° Anstellwinkel die Abweichungen des Normalkraftverlaufes vom theoretischen Verlauf bei allen Machzahlen in der vorderen Körperhälfte klein sind. In der hinteren Körperhälfte steigen die Abweichungen mit steigender Machzahl. Die weitere Integration der Druckverteilung sowie Kraftmessungen bestätigen, daß die Normalkraft mit steigender Machzahl zunimmt.

5.1.2.3. Normalkraft am Körper 2

Während die elementare Theorie die Normalkraft als unabhängig von der Machzahl angibt (Gl. (76)), entsteht bei der Durchrechnung der Normalkraft gemäß der in Abschnitt 4.5.6 gezeigten genaueren Lösung der linearisierten DG (Kurven b) eine schwache Abhängigkeit von der Machzahl im Sinne steigender Normalkraftbeiwerte bei steigender Machzahl.

Für den Körper 2 betragen die theoretischen Gradienten der Normalkraftbeiwerte:

$\frac{dc_N}{d\alpha}$	M	1,38	1,67	1,98
Nach elementarer Theorie	a)	1,13	1,13	1,13
Nach linearer Theorie	b)	1,28	1,38	

Wie aber in Abschnitt 4.7.2 anhand des 10° -Kreiskegels gezeigt wurde, sind die Resultate exakt gelöster, linearisierter DG nicht genauer als die vereinfachten Lösungen der linearisierten Theorie.

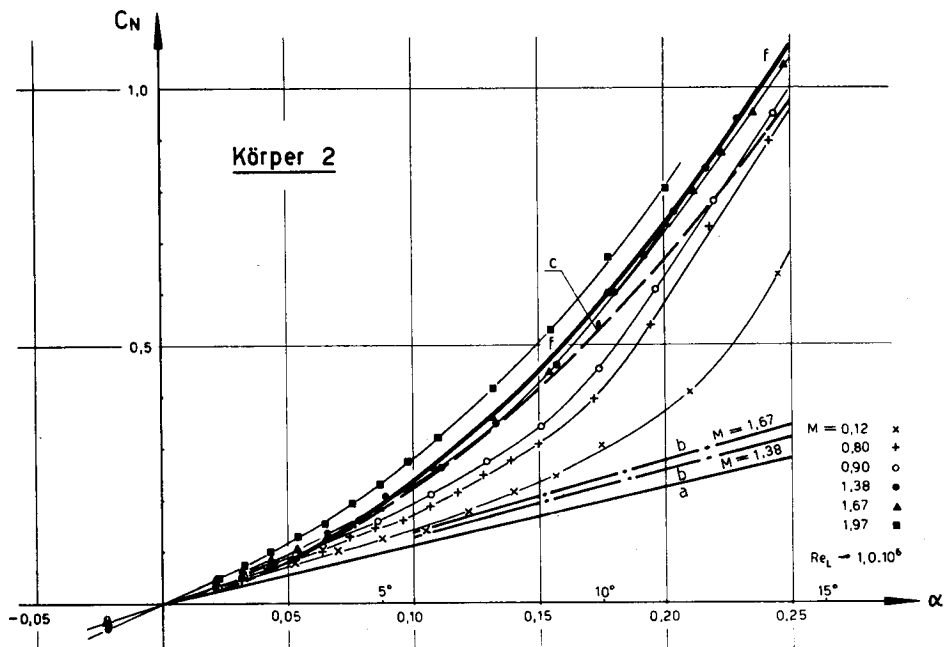


Fig. 21a.

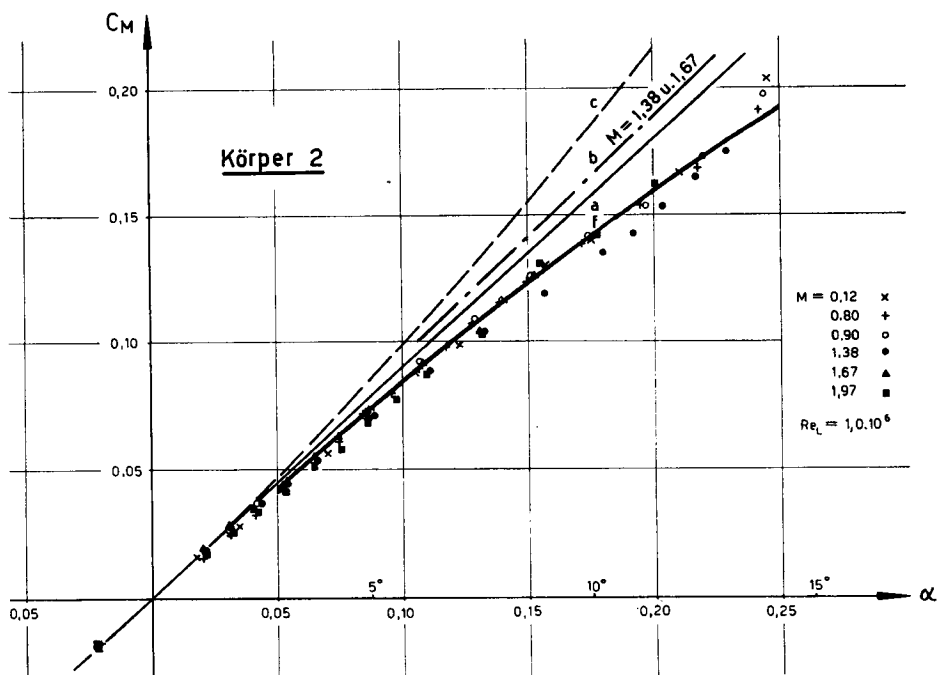


Fig. 21b.

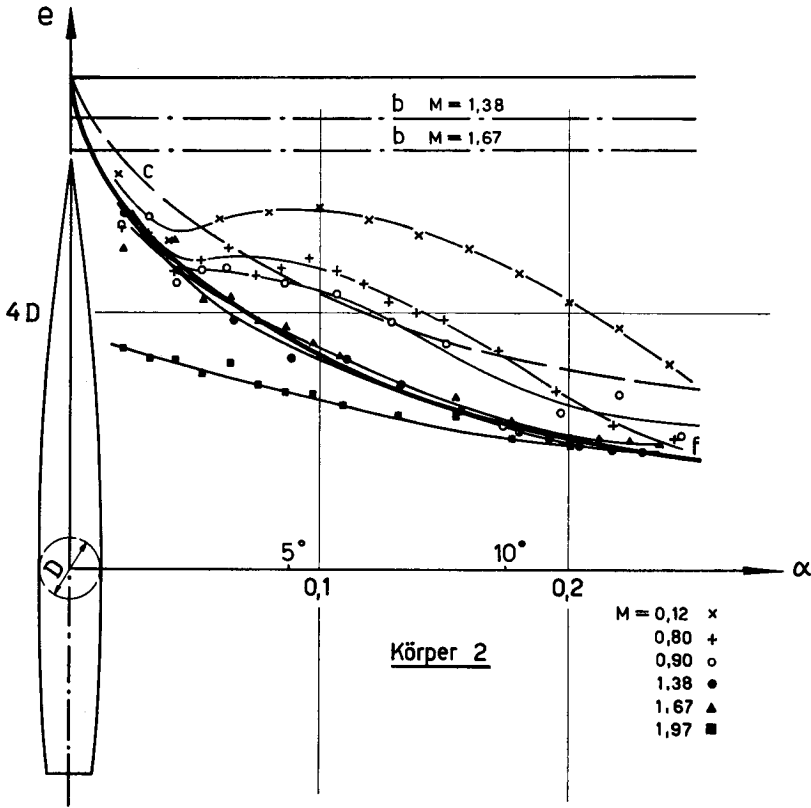


Fig. 21c.

Fig. 21a-c. Resultate der Wägungen am Körper 2 bei Unter- und Überschallgeschwindigkeit im Vergleich mit den theoretischen Werten.

- a: Elementare Theorie.
- b: Linearisierte Theorie.
- c: Elementare Theorie und Zähigkeitskorrektur ($c_{wq} = 1,2$), vgl. Abschnitt 6.2.2.1.
- f: Wie c, aber $c_{wq} = f(x)$, vgl. Abschnitt 6.2.2.3.

Die Resultate der Druckintegration (Punkte d) gemäß den Gl. (74) und (77) sind, zusammen mit der Wägung (w) desselben Körpers, in den Fig. 28 a, b und 29 c dargestellt. Die Abweichungen zwischen Wägung und Druckintegration betragen weniger als 5% der größten Beiwerte, woraus hervorgeht, daß die resultierenden Reibkräfte normal zur Körperachse sehr klein sein müssen.

Die folgenden Besprechungen der Beiwerte werden deshalb anhand der *Waageresultate* durchgeführt, welche sich über den Machbereich von $M = 0,12$ bis 1,98 erstrecken.

Fig. 21 a zeigt den Normalkraftbeiwert c_N als Funktion des Anstellwinkels α bei verschiedenen Machzahlen. Auffallend ist die außerordentlich starke Zunahme der Normalkraft mit wachsendem Anstellwinkel, besonders bei hohen Machzahlen. Die Abweichungen der Druckverteilung vom potentialtheoretischen Verlauf infolge der Ablösung der Wirbelschichten wirkt sich, wie erwartet,

sehr stark auf die Normalkraft aus: Beim Anstellwinkel $\alpha = 0,25$ ($14,3^\circ$) erreicht die Normalkraft gegenüber der elementaren Theorie etwa den vierfachen Betrag! Aber auch bei kleineren Anstellwinkeln sind die Abweichungen gegenüber den Resultaten der linearisierten Theorie noch derart groß, daß kaum von einer Übereinstimmung gesprochen werden kann.

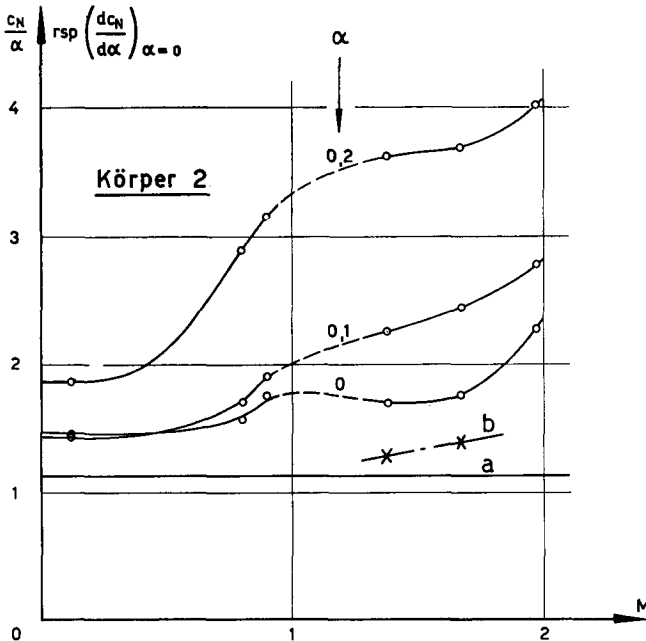


Fig. 22.
Gemessener Normalkraftgradient des Körpers 2 für drei Anstellwinkel als Funktion der Machzahl (Unter- und Überschallbereich) im Vergleich mit theoretischen Werten für den Nullgradienten:
a: Elementare Theorie.
b: Linearisierte Theorie.

Dies geht besonders deutlich aus Fig. 22 hervor, in welcher der Verlauf des Normalkraftgradienten $\frac{dc_N}{d\alpha}$ für $\alpha = 0^\circ$ und $\frac{c_N}{\alpha}$ für $\alpha = 0,1$ und $0,2$ über der Machzahl aufgetragen ist. Im ganzen Machbereich übersteigt der gemessene Normalkraftgradient sowohl den konstanten Wert der elementaren Theorie (a) wie auch machabhängige Werte nach der linearisierten Theorie (b) sehr beträchtlich, besonders ausgeprägt aber im Überschallgebiet. Offenbar wird schon bei kleinsten Anstellwinkeln durch die Erhöhung der Machzahl die Ablösung der Wirbelschicht begünstigt.

Für die größeren Anstellwinkel beginnt die große Abweichung vom potentialtheoretisch erwarteten Wert schon im Unterschallgebiet.

Zusammenfassend erkennt man, daß die Potentialtheorie bei Körpern, deren Grenzschichtströmung durch einen flachen Druckverlauf oder einen Druckanstieg in der Stabilität gefährdet ist, nur sehr bedingt in der Lage ist, die Normalkräfte anzugeben. Infolge der schon bei kleinen Anstellwinkeln eintretenden Wirbelschicht-Ablösungen sind die gemessenen Werte bedeutend (2- bis 4mal) höher als die theoretischen.

Allerdings gilt das eben Gesagte vor allem für Reynoldszahlen in der Nähe von $1 \cdot 10^6$. Für größere Reynoldszahlen, wie sie bei fliegenden Geschossen und Raketen vorkommen, werden die Zähigkeitskräfte weniger Gewicht haben, und somit werden die potentialtheoretischen Kräfte die wirklich auftretenden Kräfte etwas besser wiedergeben.

5.1.2.4. Längsmoment und Lage des Druckzentrums am Körper 2

Bei der Betrachtung der Längsmomente um den Schnittpunkt der Körperachse mit dem Größtquerschnitt in Fig. 21 b müssen nach dem bisher Gesagten die kleinen Abweichungen der Meßpunkte untereinander und auch vom theoretischen Verlauf erstaunen. Alle Meßwerte bis zum Anstellwinkel $\alpha = 0,1$ ($5,7^\circ$) scharen sich um eine Gerade mit der Neigung $\frac{dc_M}{d\alpha} = 0,815$, während die elementare Theorie (a) den Wert 0,90 und die linearisierte Theorie für die Machzahlen 1,38 und 1,67 den gemeinsamen Wert 0,94 liefern.

Daß diese relativ gute Übereinstimmung auf die Lage des Bezugspunktes für das Längsmoment zurückzuführen ist, erhellt aus den Fig. 20. Man erkennt dort, daß die Abweichungen der Normalkraftverteilung über der Körperachse vom theoretischen Verlauf vor und hinter dem Bezugspunkt mit ungefähr gleichen Momentenanteilen vorhanden sind. Diese Abweichungen heben sich daher weitgehend auf! Wählte man z. B. die Spitze als Momentenbezugspunkt, so würden den c_N -Werten ähnliche Momentenkurven entstehen.

Da in der Praxis der Schwerpunkt oft in der Nähe des hier gewählten Bezugspunktes liegen wird, heben sich tatsächlich gewisse Abweichungen vom theoretischen Normalkraftverlauf in bezug auf das Längsmoment gegenseitig auf.

Die verbreitete Anwendung der sog. Luftschiffformel (Gleichung (78), Kurve a) zur Stabilitätsberechnung schlanker Körper muß aus den oben erwähnten Gründen als gefährlich bezeichnet werden. Die Übereinstimmung kann wohl sehr gut, je nach Wahl des Bezugspunktes aber auch sehr schlecht sein. Bei weit vorne liegenden Bezugspunkten liefert diese Formel zu unstabile, bei weit hinten liegenden Bezugspunkten zu stabile Längsmomente.

Die Lage der resultierenden Kraft e ist in Fig. 21 c als Funktion des Anstellwinkels α und der Machzahl M dargestellt.

Die bereits besprochenen großen Abweichungen der gemessenen von den theoretisch erwarteten Normalkräften widerspiegeln sich hier deutlich auch in der Lage des aerodynamischen Zentrums e . Während im Unterschallbereich dieses Zentrum bis zu Anstellwinkeln von ca. $\alpha = 0,1$ ($5,7^\circ$) etwas hinter der Spitze liegt (ca. 1—2 Körperdurchmesser) und bei größeren Anstellwinkeln nach rückwärts wandert, verändert sich die Lage im Überschallbereich bereits bei kleinen Anstellwinkeln.

Immerhin stellt sich bei kleinen Anstellwinkeln einigermaßen die theoretisch erwartete Unabhängigkeit der Lage des aerodynamischen Zentrums von der Machzahl ein (ausgenommen die Messung bei $M = 1,98$).

Ganz allgemein geht aus den Kurven die große aerodynamische *Labilität* eines schlanken Rumpfes hervor, indem die resultierende Kraft weit vor dem Bezugspunkt $x = 0$ oder auch einem praktisch denkbaren Schwerpunkt liegt. Daß die konische Heckpartie bei kleinen Anstellwinkeln zu dieser Unstabilität beiträgt, geht aus den Kurven der Fig. 23 hervor, welche die Lage des aerodynamischen Zentrums und auch die Längsmomente der Spitze allein zeigen.

Als eindruckliches Resultat der Messungen an einem schlanken Körper bei mäßig hohen Überschallgeschwindigkeiten bei kleinen Anstellwinkeln (alles Voraussetzungen der Linearisierbarkeit der Strömungs-DG) muß festgehalten werden, daß die Übereinstimmung mit den theoretischen Resultaten mäßig bis schlecht ist. Die Druckverteilungsmessungen zeigen den Grund der großen

Abweichungen an: In der hinteren Körperhälfte verursachen die stark angewachsene Grenzschichtströmung und die beginnende Wirbelschichtbildung große Abweichungen der Meßwerte von den theoretischen Werten. Besonders stark sind diese Abweichungen am sich verjüngenden Heckteil des Körpers.

Im Unterschallgebiet sind bei kleinen Machzahlen wesentlich bessere Übereinstimmungen zwischen Theorie und Messung gefunden worden. Offenbar genügen geringste Einflüsse auf die Grenzschichtströmung, wie sie bei zunehmender Machzahl durch die zunehmende Kompressibilität der Luft entstehen, um bei Schräganströmung die Wirbelschichtbildung zu vergrößern, welche ihrerseits auf die Normalkraftverteilung einen sehr großen Einfluß hat.

Den an sich kleinen Wirkungen rein potentieller Kräfte auf schlanke Körper ist es also zuzuschreiben, daß die Auswirkungen der Grenzschichtströmung mit steigender Machzahl und wachsendem Anstellwinkel die potentiellen Kräfte übertreffen. Die Anwendung genauerer Lösungen der potentialtheoretisch ermittelten Strömungs-DG erweist sich daher als zwecklos.

5.1.2.5. Normalkraft, Längsmoment und Lage des Druckzentrums an der Spitze des Körpers 2

Im vorangegangenen Abschnitt 5.1.2 wurde gezeigt, daß die Druckmeßresultate nur an der Spitze des Körpers und nur bei kleinen Anstellwinkeln einigermaßen befriedigend mit den potentialtheoretisch ermittelten Druckwerten übereinstimmen. Es steht daher zu erwarten, daß die Integration der Drücke an der Spitze bis zum Größtquerschnitt Normalkräfte und Längsmomente liefert, welche besser mit den potentialtheoretischen Werten übereinstimmen, als dies bei entsprechendem Vergleich bei der Integration über den ganzen Körper der Fall war. Diese Teilintegration ist im Überschallbereich gestattet, da Punkte stromanwärts der oberen Integrationsgrenze auf den Integrationsbereich keinen Einfluß haben können.

In Fig. 23 sind die Resultate der Integrationen bei zwei Machzahlen den theoretischen Werten gegenübergestellt. Bei $\alpha = 0,034$ (2°) Anstellwinkel sind die Differenzen der c_N - und c_M -Werte noch sehr klein, während der entsprechende Vergleich am ganzen Körper bereits erhebliche Differenzen zeigt. Beim Anstellwinkel $0,1$ ($5,7^\circ$) ergibt die aus beiden Machzahlen gemittelte c_N -Kurve einen um 19% größeren Normalkraftbeiwert als nach der elementaren Theorie zu erwarten ist (ganzer Körper 110% mehr!). Derselbe Vergleich beim Anstellwinkel $0,2$ ($11,5^\circ$) ergibt 47% mehr für die Spitze und 230% mehr für den ganzen Körper!

Würde man die Druckintegration weiter vorne abbrechen, so würde die Übereinstimmung noch besser werden, was aus der Normalkraftverteilung hervorgeht.

Die obigen Zahlenwerte weisen deutlich auf die Grenzen des Anwendungsbereiches aller potentialtheoretisch berechneten Normalkraftbeiwerte hin. Diese stimmen bei zunehmendem Körperquerschnitt noch relativ gut mit den Meßwerten überein. Die größeren Abweichungen beginnen bei Körpern mit zylindrischen oder mit der Körperachse sehr wenig ändernden Querschnittsflächen. Sehr schlechte Übereinstimmung ergeben Körper mit abnehmenden Querschnittsflächen.

Dieselben Qualifikationen gelten prinzipiell auch für die Längsmomentenbeiwerte, welche mit Hilfe der ursprünglichen Körperlänge $L = 1,5$ h berech-

net wurden, um den direkten Vergleich mit den übrigen Körpern zu ermöglichen. Als Bezugspunkt der c_M -Werte der Figur 23 wurde wiederum der Mittelpunkt der Größtquerschnittsfläche gewählt. Wegen des weit hinten liegenden Bezugspunktes ergibt die Theorie zu stabile Längsmomente, da die durch die Wirbelschichten verursachten Normalkräfte vor dem Bezugspunkt liegen.

Verglichen mit den Druckmittelpunktlagen e am ganzen Körper ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung an der Spitze erstaunlich gut. Beim Anstellwinkel $\alpha = 0,2$ ($11,5^\circ$) beträgt die Lagedifferenz zwischen elementarer Theorie und Messung erst einen halben Körperdurchmesser, während beim ganzen Körper dieser Abstand ca. 5,7 Durchmesser beträgt!

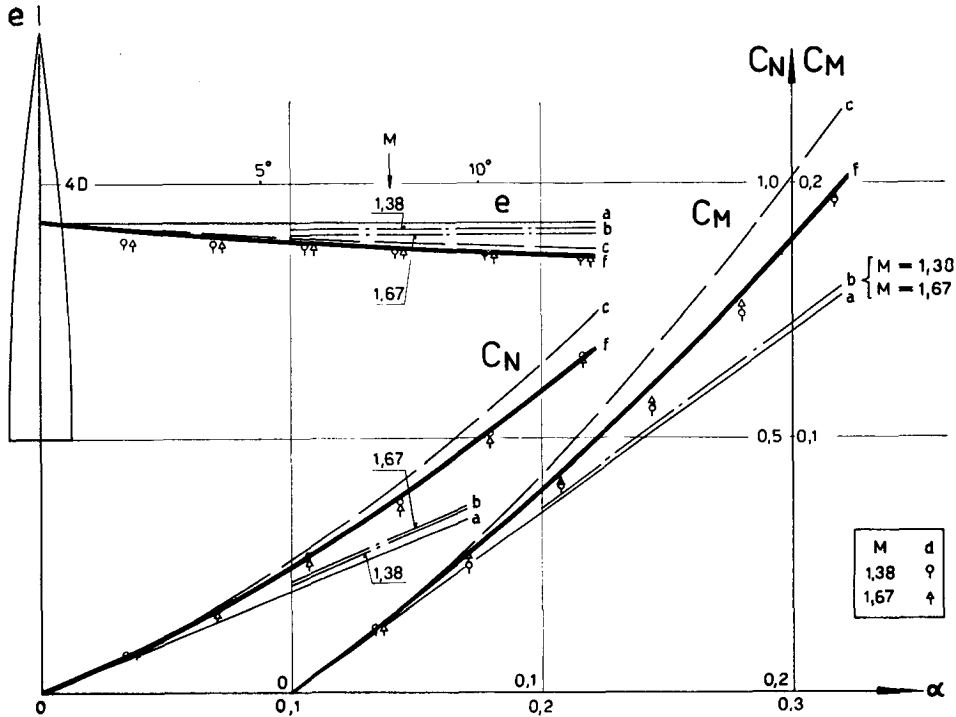


Fig. 23. Aus den Druckverteilungen integrierte Beiwerte für die Körperspitze (Punkte) im Vergleich mit theoretischen Werten bei $M = 1,38$ und $M = 1,67$.

- a: Elementare Theorie.
- b: Linearisierte Theorie.
- c: Elementare Theorie + Zähigkeitskorrektur ($c_{WQ} = 1,2$), vgl. Abschnitt 6.2.2.1.
- f: Wie c, aber $c_{WQ} = f(x)$, vgl. Abschnitt 6.2.2.3.

5.1.2.6. Axialkraft bei Schräganströmung am Körper 2

Die gesamte Axialkraft setzt sich aus den drei Teilen Druckwiderstand, Bodenwiderstand und Reibwiderstand zusammen (Fig. 24).

Nach Formel 68 sollte der Beiwert des axialen Druckwiderstandes proportional α^2 abnehmen. Die Druckintegration ergibt, daß der Axialwiderstand tatsächlich etwas abnimmt, aber nicht um den von der Theorie geforderten

Betrag. Die von der Theorie verlangten starken Überdruckgebiete auf der Abströmseite des Heckteiles stellen sich wegen der Wirbelbildung nicht ein.

Leider nimmt der Bodendruck mit wachsendem Anstellwinkel so stark ab, daß die entstehende Axialkraft die oben erwähnte „Saugkraft“ übertrifft. Der gesamte Druckanteil (Oberfläche + Boden) der Axialkraft nimmt daher mit steigendem Anstellwinkel zu.

Interessanterweise bleibt trotz starker Wirbelbildung der Anteil des Reibwiderstandes bei steigendem Anstellwinkel etwa konstant.

Als Gesamtaxialkraft ergibt sich somit eine mit kleinen Anstellwinkeln bis

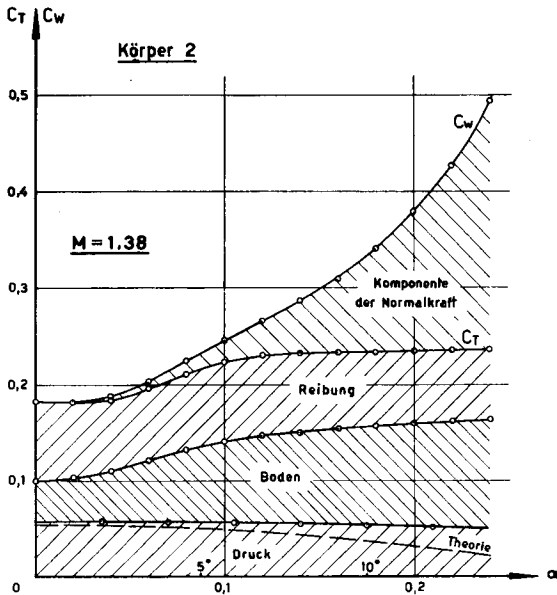


Fig. 24. Zusammensetzung des Axialwiderstandsbeiwertes c_T am Körper 2 aus den Anteilen Druckwiderstand, Bodenwiderstand und Reibwiderstand bei $M = 1,38$ in Funktion des Anstellwinkels α . Zur Bestimmung des Widerstandskoeffizienten c_w muß im wesentlichen die Komponente der Normalkraft $c_N \alpha$ addiert werden.

etwa $\alpha = 0,05$ ($2,9^\circ$) kaum ändernde Kraft. Zwischen $\alpha = 0,05$ und $\alpha = 0,2$ ($11,5^\circ$) findet der Übergang zu einer etwa 30% größeren Axialkraft statt, welche über $\alpha = 0,2$ nur noch sehr schwach ansteigt.

Zur Berechnung des c_w -Wertes gesellt sich noch die Komponente $c_N \alpha$ zu den bisherigen Kurven hinzu (wenn $\cos \alpha = 1$ und $\sin \alpha = \alpha$ gesetzt wird).

Der doppelte Widerstand stellt sich etwa bei $\alpha = 0,2$ ($11,5^\circ$) ein.

Zu den hier als Beispiel einer Axialkraftauswertung (bei $M = 1,38$, $Re = 1,2 \cdot 10^6$) aufgeführten Resultaten ist zu bemerken, daß sie wegen des starken Einflusses der Grenzschichtströmung nicht als charakteristisch für andere Reynoldszahlen betrachtet werden dürfen.

Schon bei der Auswertung verschiedener Einzelmessungen ergaben sich Streuungen in den c_w -Werten von ca. $\pm 0,02$, was beinahe $\pm 10\%$ des c_w -Wertes entspricht. Die genaue Messung des c_w -Wertes sehr schlanker Körper stellt an die gesamte Meßeinrichtung sowie an die Konstanz der Kanaldruckverteilung sehr hohe Anforderungen. Geringste Störwellen von Unebenheiten in den Kanalwänden verursachen sprunghafte Druckänderungen, welche auf die Modellgrenzschicht und damit besonders auf den Bodendruck Einfluß haben.

5.2. Waageresultate an den fünf Körpern 0—4

Im folgenden sind die Resultate der Kraftmessungen dargestellt, welche mittels der eingangs beschriebenen internen Straingagewaage durchgeführt wurden. Besondere Aufmerksamkeit wurde den Messungen des Körpers 2 geschenkt, um diese mit den Resultaten der Druckintegration vergleichen zu können. Dieser Körper wurde sowohl im Unterschallgebiet als auch bei drei Überschallmachzahlen zu Messungen verwendet.

Da der zylindrische Teil des Körpers 0 keinen axialen Druckwiderstand liefert, können die Wägungen des Widerstandes dieses Körpers ebenfalls mit den Resultaten der Druckintegration über die Spitze des Körpers 2 verglichen werden.

Die übrigen Körper, deren letzte Rumpfdrittel nach Fig. 1 verschieden stark konvergent ausgebildet sind, wurden bei den Überschallmachzahlen $M = 1,38$ und $M = 1,67$ gemessen. Gleichzeitig mit den Kraftmessungen wurde mittels einer Sonde der Bodendruck gemessen.

Für alle Körper wurden die theoretischen Druckverteilungen ausgewertet und vorgängig der Waageresultate dargestellt. Da von der linearisierten Theorie erwartet wird, daß sie die Kräfte sehr schlanker Körper besonders bei sehr kleinen Anstellwinkeln gut angebe, werden die Meßresultate bei kleinen Anstellwinkeln gesondert besprochen.

5.2.1. Geradanströmung

5.2.1.1. Theoretische Druckverteilung längs einer Erzeugenden

Zu Vergleichszwecken wurden die Druckverteilungen an den im Abschnitt 3.1 beschriebenen fünf Körpern sowohl nach der in Abschnitt 4.5.6 angeführten schrittweisen Berechnung (Kurven B) als auch in mathematisch geschlossener Form nach den Gleichungen des Abschnittes 4.5.5 (Kurven A) durchgeführt. In Fig. 25 sind die Druckkoeffizienten c_{p_0} für alle 5 Körper nach beiden Berechnungsmethoden für zwei Überschallmachzahlen dargestellt. Während für den Körper 2 die Übereinstimmung sehr gut ist, ergeben sich für die übrigen Körper Abweichungen, welche die Grenzen der Anwendbarkeit von $\frac{d^2 F}{dx^2}$ als Quellbelegungsfunktion aufzeigen. Bei der Widerstandsberechnung verlieren diese Differenzen an Bedeutung wegen der großen Anteile von Bodendruckwiderstand und Reibwiderstand.

Das scharfe Abknicken der Druckverteilungskurven beim größten Körperquerschnitt ist eine Folge der sprungartigen Änderung von $\frac{d^2 F}{dx^2}$ beim Übergang auf verschiedene Parabelbogen im Meridianschnitt. Beachtenswert sind beim Körper 4 mit schlankem Heck die großen Unterdruckwerte, welche zu großen Druckwiderständen führen. Auffallend ist auch der starke Druckanstieg beim Körper 0 beim Übergang von der Parabelspitze auf den zylindrischen Teil. Der frühzeitige Druckanstieg bei den Körpern 0 und 1 beeinflusst zunächst die Stabilität der bisher laminaren Grenzschicht. Da der Bodendruck seinerseits stark von der Ausbildung der Grenzschichtströmung der Heckpartie abhängt, beeinflusst die Form der Druckverteilungskurve direkt auch den Bodendruck.

Die Druckintegration zur Berechnung des Druckwiderstandes nach Gl. (67)

ergibt für $M = 1,38$ das erstaunliche Resultat, daß der Körper 4 mit der kleinsten Bodenfläche beinahe viermal mehr Druckwiderstand aufweist als der Körper 0 mit dem zylindrischen Heckteil! Die Folgen der starken Expansion am verjüngten Heck sind im Druckwiderstand sehr spürbar.

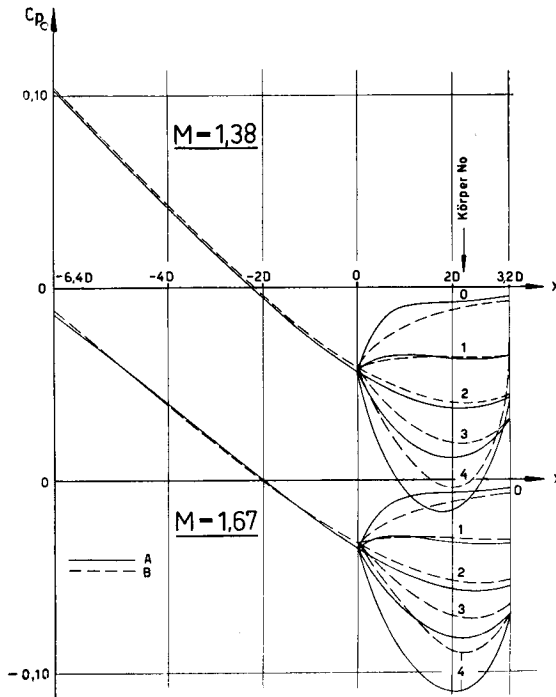


Fig. 25. Darstellung des theoretischen Druckverlaufes über der Rumpfachse x für alle fünf Körper bei $M = 1,38$ und $M = 1,67$ und Geradanströmung.

A: Mittels Querschnittsverlauf berechnet nach Abschnitt 4.5.5.
B: Resultate der schrittweisen Berechnung nach Abschnitt 4.5.6.

5.2.1.2. Widerstandsbeiwerte

Die oberste Kurve in Fig. 26 zeigt für $M = 1,38$ die mittels der Straingagewaage gemessenen Widerstandsbeiwerte c_W der fünf Körper, aufgetragen über dem Verhältnis Bodenfläche zu Größtquerschnitt. Offensichtlich erhält diese Kurve den Charakter durch den Verlauf des Bodenwiderstandes aufgeprägt, welcher bei den Körpern 3 und 4 zu Null wird (unterste Kurve). Den größten Bodenwiderstand weist der Körper 0 mit zylindrischem Heckteil auf.

Über der Kurve des Bodenwiderstandes ist der berechnete Anteil des Druckwiderstandes abgetragen. Die beiden eingetragenen Druckwiderstandswerte aus der Druckmessung zeigen, daß die Übereinstimmung zwischen Druckwiderstandsberechnung und Messung bei den Körpern 0 und 2 sehr gut ist. Bei den Körpern 3 und 4 wird die Übereinstimmung wegen der im Heckteil stark anwachsenden Grenzsichtdicken etwas schlechter sein.

Die strichpunktiert eingetragene Kurve dürfte etwa den Verlauf des wirklichen Druckwiderstandes widerspiegeln. Ob für die Druckberechnung die schrittweise Berechnung nach Abschnitt 4.5.6 oder die direkte Berechnung mittels F'' (Abschnitt 4.5.5) gewählt wird, hat auf den Druckwiderstand wenig Einfluß, wie die beiden mit B und A angeschriebenen Kurven zeigen.

Der übrig bleibende Reibwiderstand erweist sich als annähernd unabhängig von der Ausbildung des Heckteils.

Aus dieser Darstellung geht der dominierende Einfluß des Bodenwiderstandes bei den Körpern mit großen Bodenflächen deutlich hervor. Die Verkleinerung der Bodenfläche ergibt bis zu einer gewissen Grenze kleinere Widerstandsbeiwerte. Für $\frac{F_B}{F_0} < 0,25$ scheint der Widerstand wieder anzusteigen. Da der Konvergenzwinkel des Körpers 49° erreicht, bestätigt sich die Faustregel, wonach Heckneigungen von 8° nicht überschritten werden sollten.

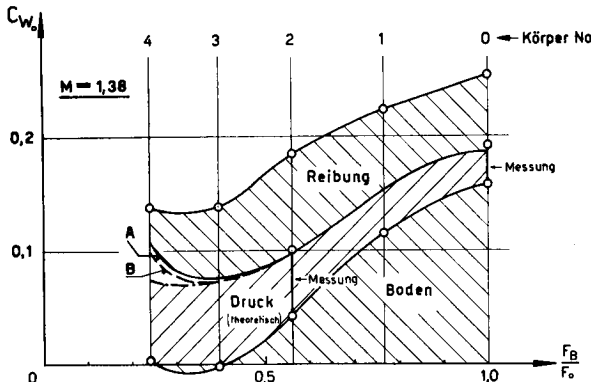


Fig. 26. Nullwiderstandsbeiwerte c_{w0} aller fünf Körper bei $M = 1,38$ über dem Verhältnis Bodenfläche F_B zu Größtquerschnittsfläche F_0 aufgetragen. Über dem gemessenen Bodenwiderstand ist der theoretische Druckwiderstand aufgetragen.

- A: Mittels Querschnittsverlauf berechnet.
- B: Schrittweise berechnet.

Bei den Körper 0 und 2 ist zum Vergleich der gemessene Druckwiderstand eingezeichnet. Als Differenz zum Gesamtwiderstand ergibt sich der Reibwiderstand.

Die Vorausberechnung eines Geschosses mit minimalem Widerstand erreicht jedenfalls eine gute Abschätzung des Bodenwiderstandes. Ohne diese Kenntnis erscheint die Minimalisierung des Druckwiderstandes allein sinnlos, hat doch der Körper 0 wohl den kleinsten Druckwiderstand, aber auch den größten Bodenwiderstand, während die Verhältnisse beim Körper 4 gerade umgekehrt liegen!

5.2.2. Schräganströmung

5.2.2.1. Theoretische Normalkraftbelastung

Vorgängig der Besprechung der Meßresultate bei Schräganströmung wird in Fig. 27 die nach verschiedenen Theorien berechnete Normalkraftbelastung an den fünf Körpern dargestellt. Die Integration dieser Verteilungen führt zu den theoretischen Vergleichskurven für die Normalkraftbeiwerte.

Nach der Theorie sehr schlanker Körper (elementare Theorie) ist die auf den Anstellwinkel bezogene Normalkraftbelastung $\frac{dc_x^*}{dx}$ dem Produkt aus Körperradius und Tangentenneigung proportional (Gl. (75)). Wegen der starken Heckneigung des Körpers 4 ergeben sich dort große negative Normal-

kräfte. Das zylindrische Heck des Körpers 0 liefert nach der elementaren Theorie keinen Beitrag zur Normalkraft.

Die bedeutend zeitraubendere schrittweise Berechnung nach Abschnitt 4.5.6 (lin. Theorie) liefert etwas abweichende und vor allem machzahlabhängige Verteilungskurven. Danach entsteht auch am zylindrischen Heck des Körpers 0 eine negative Normalkraftbelastung.

Zum Vergleich der berechneten und gemessenen Normalkraftverteilung am Körper 2 sei auf die Resultate des Abschnittes 5.1.2.2 verwiesen.

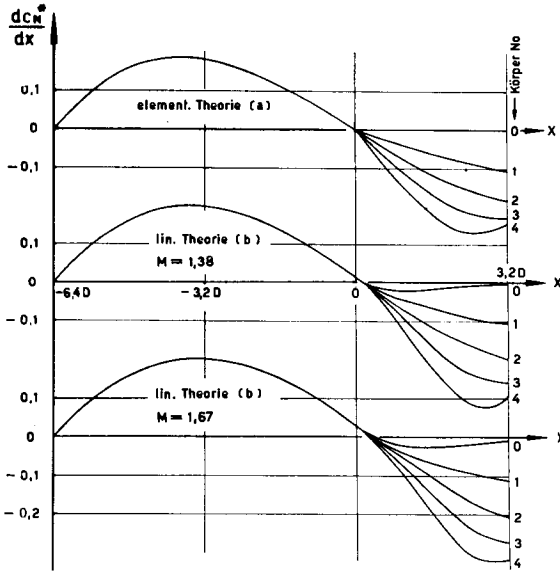


Fig. 27. Theoretische Normalkraftbelastung $\frac{d c_N^*}{d x}$ an den fünf Körpern entlang der Rumpfachse.

5.2.2.2. Normalkräfte bei kleinen Anstellwinkeln

In Figur 28a sind die Normalkraftbeiwerte c_N für alle Körper über dem Anstellwinkel α aufgetragen. Während Kurve a das Resultat der elementaren Theorie nach Gl. (76) darstellt, zeigt Kurve b die Auswertungen der nach der lin. Theorie berechneten Normalkraftverteilungen, welche in Fig. 27 dargestellt wurden.

Für kleine Anstellwinkel erwartet man eine gute Übereinstimmung von Theorie und Messung. Sowohl die Meßresultate bei $M = 1,38$ als auch bei $M = 1,67$ (Punkte w) zeigen jedoch, daß besonders bei den stark konvergierenden Körpern 3 und 4 die Neigungen der c_N -Kurven im Anstellwinkel-Nullpunkt bedeutend größer sind als die Neigungen der theoretischen Kurven a und b.

In Fig. 30 sind die Normalkraftgradienten $\frac{d c_N}{d \alpha}$ im Anstellwinkelnullpunkt als Funktion des Verhältnisses Bodenfläche F_B zu Größtquerschnittsfläche F_0 dargestellt (Kurve $\alpha = 0$). Nach Gleichung (76) liefert die elementare Theorie für $\frac{d c_N}{d \alpha}$ den Wert:

$$\left(\frac{d c_N}{d \alpha} \right)_{\alpha=0} = 2 \frac{F_B}{F_0}$$

Die linearisierte Theorie ergibt etwas größere Werte. Deutlich kommen in dieser Darstellungsweise die Abweichungen der Meßresultate von den theoretischen Kurven zur Geltung, die um so größer sind, je kleiner die Bodenfläche des Körpers ist. Während bei Körper 0 (zylindrisches Heck) der gemessene c_N -Gradient im Mittel beider Machzahlen etwa 28% größer ist als nach der elementaren Theorie erwartet wurde, steigt dieser Prozentsatz mit zunehmender Konvergenz des Heckteiles rasch an. Beim Körper 4 ist der gemessene Gradient im Mittel beider Machzahlen 3,6 mal größer!

Die Abweichungen der Messungen von der linearisierten Theorie sind etwas kleiner, jedoch kaum soviel kleiner, daß sich der beträchtlich größere Rechenaufwand lohnen würde. Zudem muß es nach den Vergleichen am Konus (Fig. 14) vielleicht als ein Zufall bezeichnet werden, daß die linearisierte Theorie bessere Resultate liefert als die elementare Theorie?

Die großen Abweichungen erklären sich aus dem Vorhandensein einer in Strömungsrichtung stark zunehmenden Grenzschichtdicke. Diese wird gegen das Körperende hin um so stärker, je mehr sich der Körper nach hinten verjüngt. Die Abschätzungen, die sich aus der Berücksichtigung der Körpergrenzschicht ergeben, sind in Abschnitt 6.2.1 zusammengefaßt.

Ein aufschlußreicher Vergleich läßt sich noch zwischen dem Nullgradienten des Körpers 0 (zylindrischer Heckteil) und demjenigen der Spitze allein machen. Nach elementarer Theorie müßten die Normalkraftgradienten wegen der gleich großen Bodenfläche gleich groß sein! Aus Fig. 30 erkennt man jedoch, daß der Nullgradient der Spitze allein beinahe mit dem elementaren Wert 2 übereinstimmt, während, wie bereits besprochen, der zylindrische Heckteil des Körpers 0 durch seine wachsende Grenzschichtdicke und die beginnende Wirbelschichtbildung ca. 28% größere Normalkraftbeiwerte liefert, als die elementare Theorie angibt.

5.2.2.3. Normalkräfte bei größeren Anstellwinkeln

Ein Blick auf Figur 28a zeigt, daß die gemessenen Normalkräfte aller Körper mit wachsendem Anstellwinkel um einen stets größer werdenden Faktor die theoretischen Werte übersteigen. Dieser Faktor erreicht z. B. beim Körper 4 bei $\alpha = 0,2$ ($11,5^\circ$) den Wert 7,6 gegenüber der elementaren Theorie oder 5,9 gegenüber der lin. Theorie! Die Gründe für diese starken Abweichungen sind aus den Druckverteilungsmessungen am Körper 2 bekannt.

Wegen der besonders im Heckteil abgelösten Körperströmung wirkt sich mit wachsendem Anstellwinkel die Form des Heckteils verhältnismäßig stets weniger aus, wie Fig. 30 deutlich zeigt: Körper 4 erreicht mit 24% der Bodenfläche des Körpers 0 bei $\alpha = 0,2$ ($11,5^\circ$) und bei den Machzahlen (1,38 und 1,67) 85% der Normalkraft des Körpers 0!

Daß sich das bloße Vorhandensein eines Heckteils jedoch stark auf die Normalkraft auswirkt, zeigt der Vergleich mit den Normalkraftbeiwerten der Spitze allein (Fig. 23). Obwohl nach der elementaren Theorie der zylindrische Teil des Körpers 0 keinen Beitrag liefern sollte, ergibt der in Fig. 30 durchgeführte Vergleich einen mit dem Anstellwinkel stets wachsenden Anteil. Bei $\alpha = 0,1$ ($5,7^\circ$) ergibt sich im Mittel der Machzahlen 1,38 und 1,67 ein Normalkraftanteil des Zylinders von 0,052, während dieser Wert beim doppelten Anstellwinkel bereits auf 0,236 gestiegen ist, also um den 4,5fachen Betrag! Im Abschnitt 6 wird eine Möglichkeit gezeigt, diese zusätzlichen Normalkräfte größenordnungsmäßig zu erfassen.

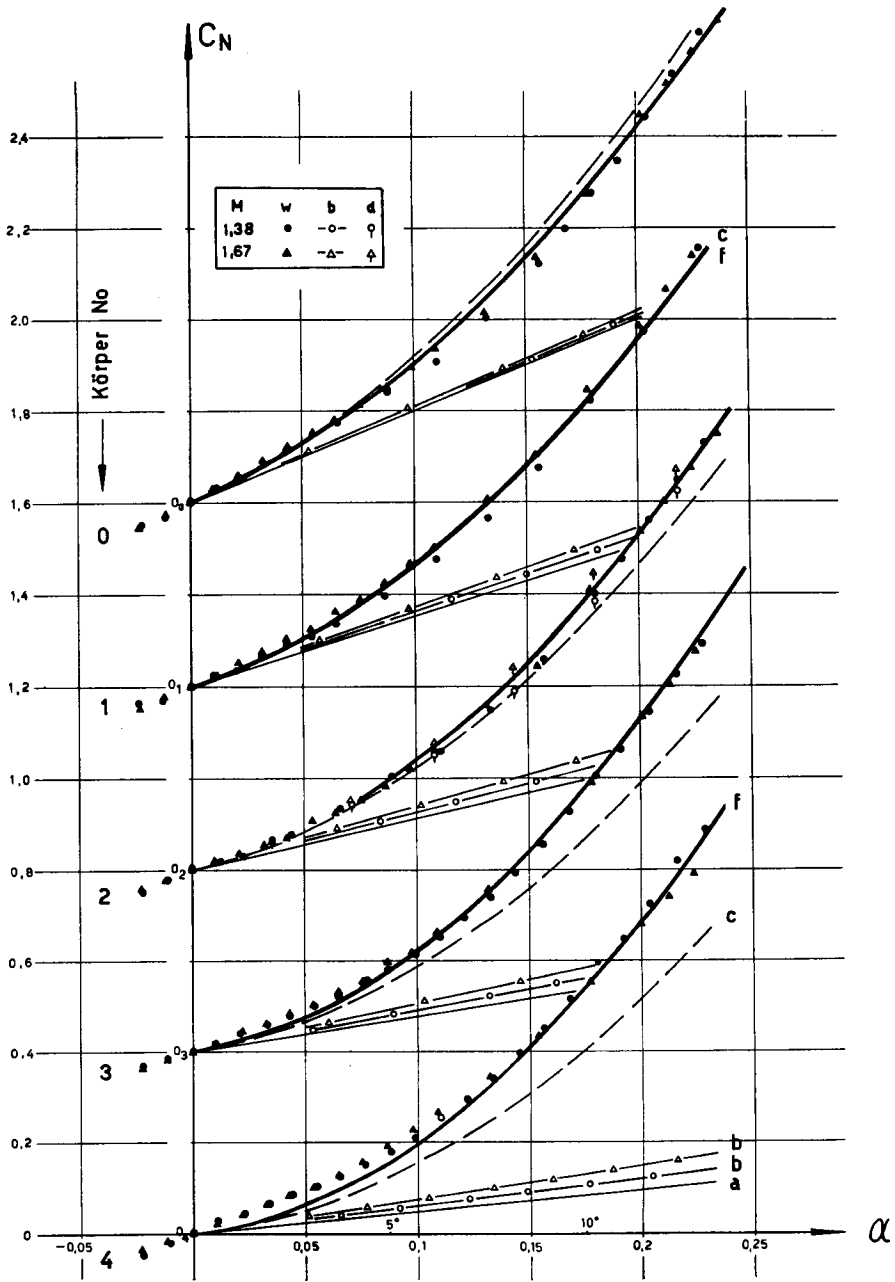


Fig. 28a.

Fig. 28a,b. Vergleich der gemessenen Normalkraft- und Längsmomentenbeiwerte c_N (28a) resp. c_M (28b) aller fünf Körper (Punkte) mit verschiedenen Theorien bei zwei Überschall-Machzahlen ($M = 1,38$ und $M = 1,67$).

- a: Elementare Theorie. b: Linearisierte Theorie.
- c: Elementare Theorie + Zähigkeitskorrektur ($c_{w_0} = 1,2$), vgl. Abschnitt 6.2.2.1.
- f: Wie c, aber $c_{w_0} = f(x, \text{Körper})$, vgl. Abschnitt 6.2.2.3.
- d: Resultate der Druckintegration.

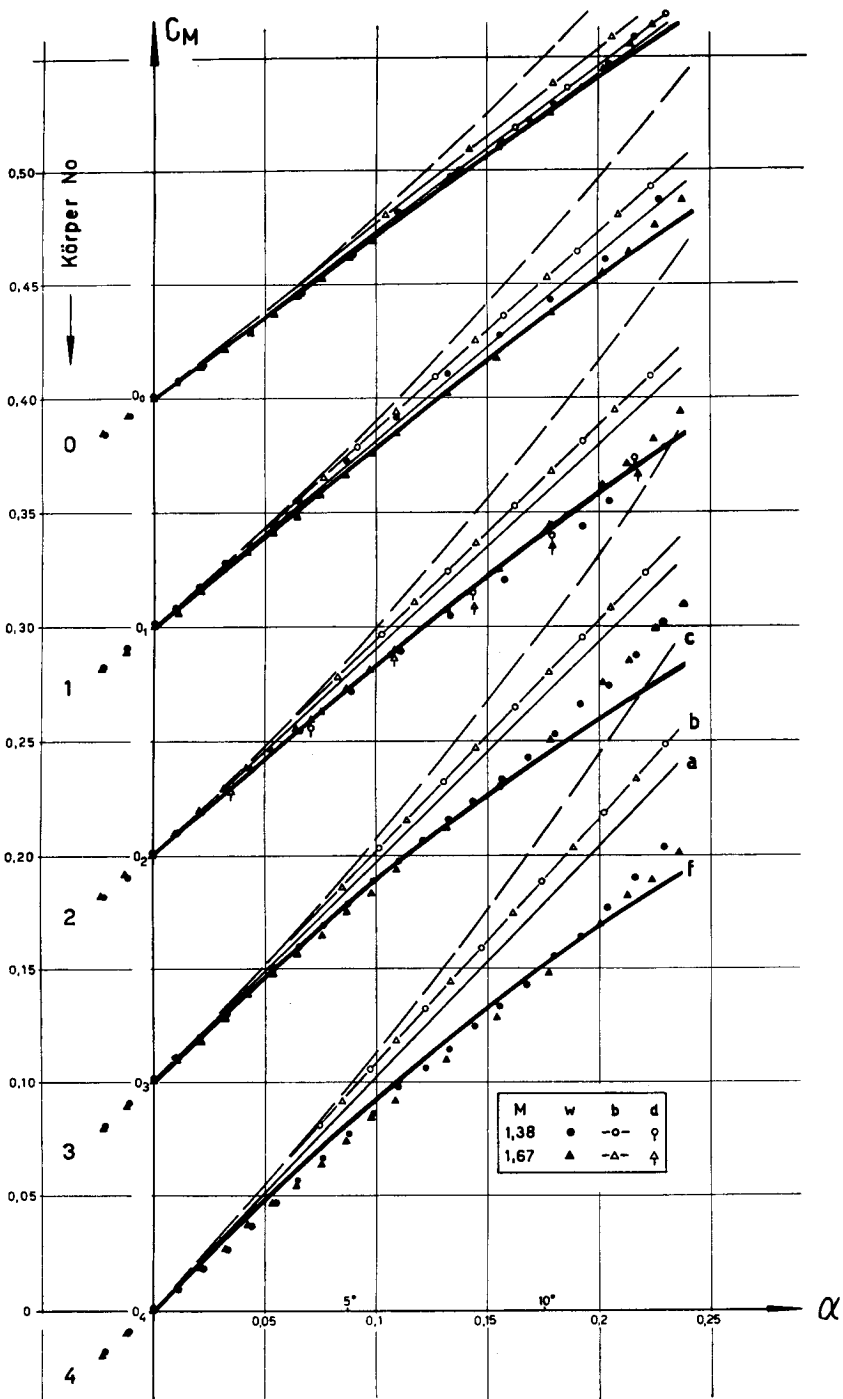


Fig. 28b.

5.2.2.4. Längsmomente und Lage des aerodynamischen Zentrums

In Figur 28b sind die Längsmomentenbeiwerte c_M aller fünf Körper für die Machzahlen 1,38 resp. 1,67 über dem Anstellwinkel α dargestellt. Wiederum fällt die in Abschnitt 5.1.2.4 beim Körper 2 bereits diskutierte relativ gute Übereinstimmung zwischen Theorie (Kurven a, b) und Messung (Punkte) auf, welche nur auf die glückliche Wahl des Momentenbezugspunktes zurückzuführen ist.

Die starken Abweichungen der wirklichen Normalkraftverteilungen von den theoretisch erwarteten vor und hinter dem Bezugspunkt halten sich z. B. beim Körper 0 bei beiden Machzahlen derart genau die Waage, daß sogar beim Anstellwinkel $\alpha = 0,2$ ($11,5^\circ$) noch keine Differenz zu der linearisierten (b) oder der elementaren Theorie (a) bemerkt werden kann, obwohl bei $\alpha = 0,2$ die Normalkraft die theoretischen Werte um mehr als das doppelte übersteigt!

Die in Fig. 23 dargestellten Längsmomentenbeiwerte c_M der Spitze allein lassen aus der Differenz zwischen den Resultaten der Druckintegration und der Theorie deutlich die vor dem Bezugspunkt wirkenden aufbäumenden Momente erkennen, die von der Potentialtheorie nicht erfaßt werden.

Die Messungen der ganzen Körper ergeben jedoch durchwegs stabilere Längsmomente als die theoretisch erwarteten, besonders ausgeprägt bei den Körpern mit kleiner Bodenfläche. Aus den beim Körper 2 gesammelten Erfahrungen weiß man, daß die großen negativen Normalkräfte an den verjüngten Heckteilen infolge der Wirbelbildung auf der Abströmseite nicht eintreten.

Nach den bei den Normalkraftmessungen bei kleinen Anstellwinkeln gesammelten Erkenntnissen wäre zu erwarten, daß auch der Längsmomentenwert bei diesen kleinen Anstellwinkeln schlecht mit den theoretischen Werten übereinstimmt. Auch hier verbessert die zufällig günstige Lage des Bezugspunktes das Bild, doch lassen sich bei den Körpern mit kleiner Bodenfläche deutlich starke Abweichungen erkennen.

Immerhin stimmt mit der Theorie wenigstens die Tatsache überein, daß der Körper 0 der stabilste ist. Mit abnehmender Bodenfläche sollte die statische Längsstabilität abnehmen. Bis zum Körper 2 ist dies der Fall. Die Stabilität des Körpers 3 ist jedoch nur sehr wenig kleiner als diejenige des Körpers 2, und der Körper 4 ist genau gleich stabil wie Körper 3! Die starke Verjüngung des Heckteiles hat also neben dem Vorteil des kleinen Widerstandsbeiwertes nicht unbedingt eine große statische Unstabilität zur Folge. Vergleicht man die c_M -Werte der fünf Körper mit demjenigen der Spitze allein, so sind, mit Ausnahme des Körpers 0, alle Körper bei kleinen Anstellwinkeln wie erwartet unstabiler als die Spitze allein. Bei wachsendem Anstellwinkel wirken sich die Heckteile der Körper jedoch wegen des wachsenden Einflusses der Wirbelschichten stets stabilisierender aus.

Über $\delta = 0,2$ ($11,5^\circ$) sind sämtliche fünf Körper stabiler als die Spitze allein! Es ist deshalb gefährlich, ein sich verjüngendes Heck zum vorneherein als ein entstabilisierendes Element anzusehen. Je nach der Stärke der durch Wirbelbildung vorhandenen Störung kann auch ein sich verjüngender Heckteil zusätzliche Stabilität erzeugen, und zwar mit um so größerer Wirkung, je näher der Schwerpunkt bei der Spitze liegt.

Eine aufschlußreiche Größe bei der Diskussion der Längsstabilität stellt auch die Lage des aerodynamischen Zentrums dar (Fig. 29).

Absichtlich wird hier bei der Besprechung der Waageresultate nicht vom

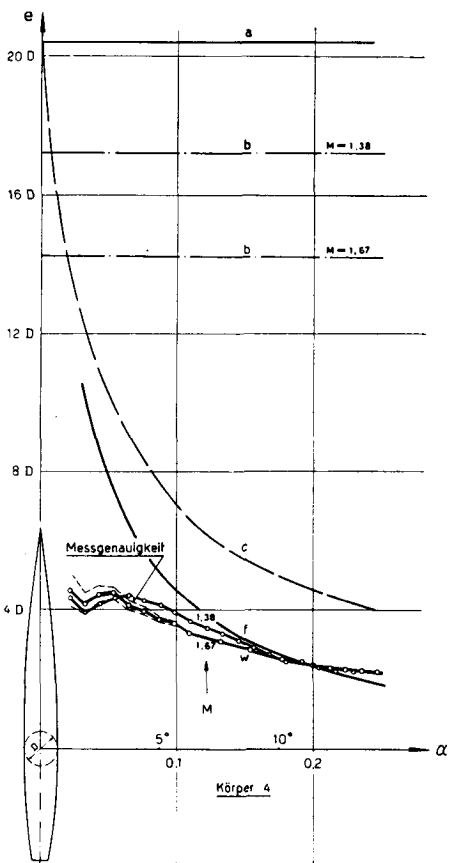
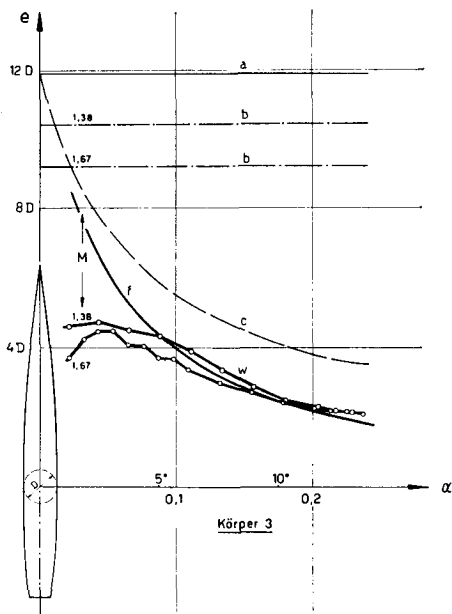
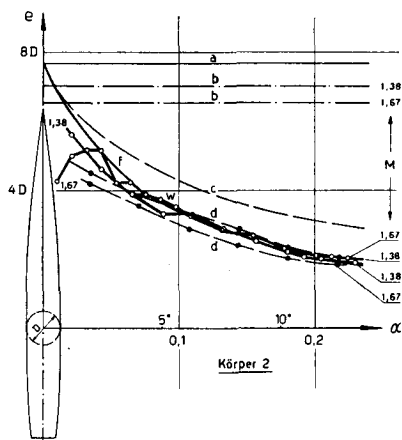
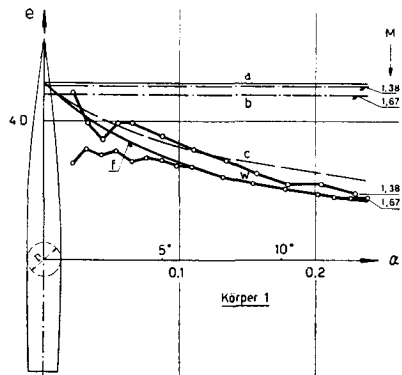
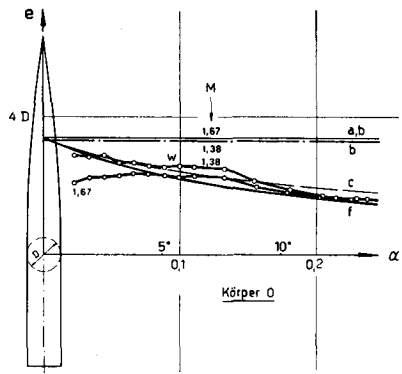


Fig. 29. Vergleich der gemessenen Lage der aerodynamischen Zentren e (Wägung) der fünf Körper mit verschiedenen Theorien bei den Machzahlen $M = 1,38$ und $1,67$.

- a: Elementare Theorie.
- b: Linearisierte Theorie.
- c: Elementare Theorie + Zähigkeitskorrektur ($c_{wQ} = 1,2$), vgl. Abschnitt 6.2.2.1.
- f: Wie c, aber $c_{wQ} = f(x, \text{Körper})$, vgl. Abschnitt 6.2.2.3.
- d: Resultate der Druckintegration.

Druckzentrum gesprochen, um damit anzudeuten, daß das aerodynamische Zentrum auch die Reibkräfte berücksichtigt. Allerdings zeigt der Vergleich am Körper 2, daß das Druckzentrum und das aerodynamische Zentrum im allgemeinen nie mehr als ein halbes Kaliber (R_0) voneinander entfernt sind, wobei das Vorzeichen bei den beiden Machzahlen erst noch verschieden ist. Leider verbietet also die Meß- und Auswertegenauigkeit (Druckmessungsauswertung!) die Bestimmung der Größe und des Vorzeichens des sicher vorhandenen Reibmomentes!

Für ein drallfreies, rotationssymmetrisches Geschloß gibt das aerodynamische Zentrum die Grenzlage des Körperschwerpunktes an, für welche die Längsstabilität gerade verschwindet. Für alle Schwerpunktslagen vor dem aerodynamischen Zentrum wirkt das aerodynamische Längsmoment rückstellend, also stabil.

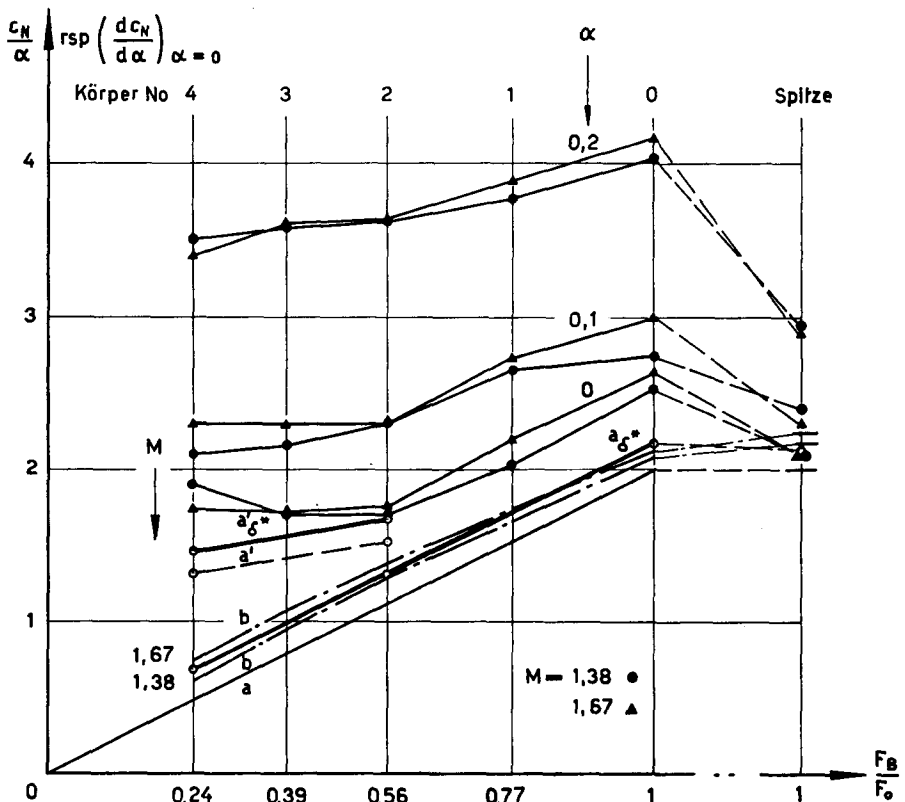


Fig. 30. Darstellung der bei $M=1,38$ und $M=1,67$ gemessenen Normalkraftgradienten der fünf Körper bei drei Anstellwinkeln (Nullgradient, $\alpha=0,1$ und $\alpha=0,2$). Vergleich der Nullgradienten mit verschiedenen Theorien:

- a: Elementare Theorie.
- a'_δ : Elementare Theorie, mit um Verdrängungsdicke vergrößerten Körpern.
- a' : Elementare Theorie, Integration der Normalkraft bei c_{pmin} abgebrochen.
- a'_δ : Elementare Theorie, wie a' , aber mit vergrößerten Körpern.
- b: Linearisierte Theorie.

Aus den in Fig. 29 über dem Anstellwinkel α aufgetragenen Kurven erkennt man zunächst, daß sowohl die linearisierte (b) als auch die elementare Theorie (a) von α unabhängige Lagen der aerodynamischen Zentren angeben, während alle Meßresultate eine deutliche Rückwanderung mit dem Anstellwinkel zeigen. Bei kleinen Anstellwinkeln ist erwartungsgemäß die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung am besten, allerdings nur für die Körper mit schwach konvergierenden Heckteilen. Für die Körper mit kleiner Bodenfläche ergibt die Theorie viel zu weit vorne liegende aerodynamische Zentren, da die von der Theorie verlangten großen negativen Normalkräfte an den konvergenten Heckteilen nicht vorkommen.

Bei großen Anstellwinkeln über $\alpha = 0,2$ ($11,5^\circ$) spielt die Form des Heckteiles keine wesentliche Rolle mehr, indem sich alle Kurven um ein mittleres aerodynamisches Zentrum sammeln, welches etwa zwei Kaliber vor dem Bezugspunkt liegt. Eine ähnliche Unempfindlichkeit gegenüber der Heckform zeigten auch die Normalkraft- und Längsmomentenbeiwerte.

Der Einfluß der Machzahl auf die Lage des aerodynamischen Zentrums ist vorwiegend bei kleinen Anstellwinkeln zu erkennen, darf aber angesichts der bei Körper 4 dargestellten Meßgenauigkeitsangabe nicht allzu ernst genommen werden. Immerhin ergibt sich bei kleinen Anstellwinkeln im Mittel eine Rückverlagerung des aerodynamischen Zentrums mit steigender Machzahl. Da aber die Normalkraft bei steigender Machzahl zunimmt, bleibt der Einfluß auf die Längsstabilität vernachlässigbar klein. Selbstverständlich gilt diese Argumentation nur für den gewählten Bezugspunkt.

Extrapoliert man die Lage des aerodynamischen Zentrums gegen Körper hin, deren Bodenflächen größer sind als der Querschnitt beim Bezugspunkt (divergente Heckpartie), so wird wegen der weiterhin positiven Normalkräfte im Heckteil das aerodynamische Zentrum nach rückwärts wandern. Derart ist es möglich, drallfreie Körper mit durchaus normalen (nicht in die Spitze verlegten) Schwerpunktslagen zu stabilisieren. Allerdings muß dabei ein stark erhöhter Widerstand in Kauf genommen werden.

5.2.2.5. Axialkräfte bei Schräganströmung

Bei der Wägung der Axialkraft der fünf Körper ergibt sich prinzipiell das ähnliche Bild wie bei der bereits im Abschnitt 5.1.2.6 besprochenen Axialkraft des Körpers 2:

Während der axiale Druckwiderstand infolge der bei Anstellung entstehenden Saugkomponente etwas zurückgeht, wächst die Saugkraft an der Bodenfläche. Die resultierende Axialkraft nimmt mit steigendem Anstellwinkel wegen der überwiegenden Wirkung des Bodensoges langsam zu, erreicht aber ca. bei $\alpha = 0,2$ ($11,5^\circ$) einen Schwellwert, der ca. 30% höher liegt als der Nullwiderstand. Da an den Körpern 0, 1, 3 und 4 keine Druckverteilungsmessungen vorgenommen wurden, läßt sich die Größe des Reibwiderstandes nicht ermitteln.

Für die Praxis ist nicht die Axialkraft, sondern der Widerstand maßgebend. Mit steigendem Anstellwinkel überwiegt dabei die Komponente $c_N \sin \alpha$ (oder vereinfacht $c_N \alpha$) den Einfluß der steigenden Axialkraft, wie dies aus Fig. 24 hervorgeht.

6. Berücksichtigung der Zähigkeit

Die bisherigen Vergleiche zwischen potentialtheoretisch berechneten Drücken, Kräften und Momenten an schlanken Rotationskörpern und den entsprechenden gemessenen Größen haben zum Teil sehr große Abweichungen erkennen lassen. Dabei hat sich gezeigt, daß diese Abweichungen kaum vermindert werden durch die Verfeinerung der mathematischen Lösungen der linearisierten Strömungsdifferentialgleichungen. Im Gegenteil erscheinen die bedeutend einfacher zu berechnenden Lösungen der Theorie sehr schlanker Körper (slender body theory) bei den hier verwendeten schlanken Körpern im mäßig hohen Überschallbereich als durchaus brauchbar.

Die großen Abweichungen entstehen durch die eingangs getroffene Berechnungsannahme der Vernachlässigbarkeit der Zähigkeit der Luft. Im Zusammenhang mit der Berechnung des Auftriebs von Flügeln hat *Betz* [22] erstmals auf den Zähigkeitseinfluß aufmerksam gemacht. Weitere Arbeiten über dieses Thema stammen von *Allen* [23], *van Dyke* [2] und *Flax* und *Lawrence* [24].

6.1. Einfluß bei Geradanströmung

6.1.1. Veränderung der Druckverteilung

Bei der Besprechung der Druckverteilung des Körpers 2 (Abschnitt 5.1.1.1) wurde auf die Schwierigkeit hingewiesen, genaue Druckmessungen an schlanken Körpern durchzuführen. Innerhalb der Meßgenauigkeit stimmen die gemessenen Druckverteilungen mit den nach der linearisierten Theorie berechneten Druckverteilungen überein. Leider kann dieser Vergleich kaum einen Hinweis auf den Einfluß der durch die Zähigkeit der Luft bedingten Körpergrenzschicht geben.

Theoretische Vergleichskurven müßten mittels genauerer Methoden (Charakteristikenverfahren) berechnet werden. Außerdem wäre eine Meßgenauigkeit (Konstanz der Kanaldruckverteilung) von ca. $\pm 1\%$ des Ruhedruckes erforderlich.

Um die Dicke der Grenzschicht abzuschätzen, wurde nach *Mangler* [21] die ebene laminare Grenzschichtströmung auf ein meridianfestes, gekrümmtes Koordinatensystem transformiert.

Hier sei nur die wesentliche Beziehung zwischen der Körpergrenzschichtdicke δ^* und der Grenzschichtdicke an der ebenen Platte δ_P^* bei gleichen Koordinaten entlang der Oberfläche angeben:

$$\delta^* = \delta_P^* \frac{1}{N(\bar{x})}$$

wobei

$$N(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\bar{x} R^2}{\int_0^{\bar{x}} R^2 d\bar{x}}} \quad (80)$$

und

$$\bar{x} = x + h \quad \text{bedeuten.}$$

Zur Berechnung der laminaren Verdrängungsdicke δ_P^* an der ebenen Platte wurde folgende von *Kelly* [26] angegebene Annäherungsformel benützt:

$$\delta_p^* = \bar{x} \frac{1}{\sqrt{Re}} (1,73 + 0,48 M^2) \quad (81)$$

Mit diesen Beziehungen ergeben sich die in Fig. 31 dargestellten Verdrängungsdicken δ^* an den drei Körpern 0, 2 und 4. Zum Vergleich ist die Verdrängungsdicke δ_p^* an der ebenen Platte eingetragen, welche besonders an der Spitze größere Werte ergibt. Je stärker jedoch die Heckteile konvergieren, desto rascher wächst die Körpergrenzschicht an. Beim Körper 2 ist die Verdrängungsdicke am Körperende bereits größer als die Verdrängungsdicke an der entsprechenden Stelle der ebenen Platte. Beim Körper 4 beträgt dieses Verhältnis sogar zwei zu eins.

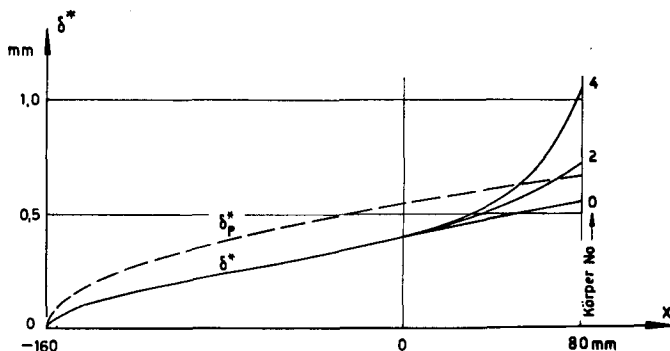


Fig. 31. Laminare Verdrängungsdicken δ^* an den Körpern 0, 2 und 4 bei $M = 1,5$ und $Re_L = 1,2 \cdot 10^6$ im Vergleich mit der Verdrängungsdicke δ_p^* der ebenen Platte.

Für den Körper 2 ergibt sich als verdickter Körper beinahe wiederum ein geom. ähnliches Rotationsparaboloid, dessen Durchmesser um ca. 3% zugenommen hat. Der Größtquerschnitt befindet sich daher etwas weiter hinten als beim ursprünglichen Körper. Die Druckverteilung müßte mit der gleichen axialen Verzerrung von 3% eingetragen werden. Diese relativ kleine Korrektur liegt jedoch weit innerhalb der Meßgenauigkeit sowie auch der Genauigkeit der Berechnung der Druckverteilung selbst, so daß ihre Anwendung fraglich erscheinen muß.

6.1.2. Widerstandsbeiwerte

In der Fig. 26 ist neben Boden- und Reibwiderstand auch der über die Körperoberfläche integrierte Druckwiderstand der fünf Körper dargestellt. Bemerkenswert ist der relativ kleine Unterschied der theoretisch erhaltenen Druckwiderstandswerte zu den zwei Werten bei den Körpern 0 und 2, welche aus den Integrationen der gemessenen Druckverteilung ermittelt wurden. Dies rührt zum Teil davon her, daß sich gleichsinnige Fehler an Spitze und Heck aufheben können. Wie schon im letzten Abschnitt erwähnt, ist eine Verfeinerung der Druckverteilungsberechnung durch Berücksichtigung der Verdrängungsdicke der Grenzschicht so lange unangebracht, als zur Druckberechnung die linearisierte Potentialtheorie zu Grunde gelegt wird.

Der primären, aber relativ unbedeutenden Auswirkung der Körpergrenzschicht auf den Druckwiderstand steht ein sekundärer, aber äußerst wirkungs-

voller Effekt der Grenzschicht auf den Bodenwiderstand gegenüber, worüber heute bereits umfangreiche Literaturangaben bestehen.

In dieser Arbeit wurde bewußt darauf verzichtet, diesen Einfluß explizite zu erfassen. Allein die Streuung der einzelnen Meßresultate hat erkennen lassen, welche dominierende Wirkung besonders bei Körpern mit großen Bodenflächen die Ausbildung der Körpergrenzschicht auf den Bodendruck und damit auf den Widerstandsbeiwert hat. Im kritischen Reynoldszahlbereich dieser Arbeit ($1,2 \cdot 10^6$) genügen kleinste Unterschiede in der Oberflächenbeschaffenheit oder Störungen durch von den Wänden ausgehende Stoßwellen, um die laminare Grenzschicht teilweise umschlagen zu lassen. Auch haben sich bei Anstellwinkelveränderungen gewisse Hysteresiserscheinungen gezeigt, indem beim gleichen Anstellwinkel je nach der Drehrichtung verschiedene Bodendrucke gemessen wurden.

Zusammenfassend muß gesagt werden, daß die Vorausberechnung des c_W -Wertes schwierig ist. Der Einfluß der Körpergrenzschicht soll vor allem bei der Berechnung des Reibwiderstandes und des Bodenwiderstandes berücksichtigt werden, während die Druckwiderstandsberechnung mit den geometrischen Körperabmessungen erfolgen kann.

6.2. Einfluß bei Schräganströmung

6.2.1. Abschätzung des Normalkraftgradienten bei kleinen Anstellwinkeln (Nullgradient)

Bei der Besprechung der Meßresultate der Normalkraftgradienten bei kleinen Anstellwinkeln im Abschnitt 5.2.2.2 wurde darauf hingewiesen, daß die z. T. großen Abweichungen der Meßresultate von den theoretischen Werten auf den Einfluß der Körpergrenzschicht zurückzuführen sind. Es erscheint naheliegend, die im vorausgegangenen Abschnitt berechneten Verdrängungsdicken zu den Meridiankoordinaten zu addieren und für die derart verdickten Körper wiederum die Normalkraftgradienten zu berechnen. Bei der Berechnung nach der elementaren Theorie (Formel (76)) ist die Bodenfläche F_B lediglich durch die um die Verdrängungsdicke erweiterte Endfläche zu ersetzen.

In Fig. 30 sind die entsprechend berechneten Werte für die Körper 0, 2 und 4 sowie auch für die Rumpfspitze eingetragen (Kurve a_{δ^*}). Die Übereinstimmung mit der Messung wird etwas besser, doch ist die Differenz besonders für den Körper 4 noch sehr beträchtlich. Die entsprechende Rechnung mittels der linearisierten Theorie wurde nicht durchgeführt, doch dürfte die Vergrößerung des Gradientenwertes etwa im gleichen Rahmen bleiben wie bei der elementaren Theorie. Dadurch ergäbe sich speziell für die Körper 0, 1 und 2 eine recht gute Übereinstimmung mit den Meßwerten. Für die Körper 3 und 4 jedoch bleiben die derart berechneten Normalkraftgradienten immer noch weit unter den Meßwerten.

Für die stark konvergierenden Körper bewährt sich eine bereits in der ZAMP [25] veröffentlichte Rechengrundlage besser, welche auf der Hypothese

beruht, daß von der Stelle des tiefsten Körperdruckes an die Strömung infolge der stark anwachsenden Grenzschichtdicke nicht weiter konvergent sei. An Stelle der Bodenfläche werde also der Querschnitt minimalen Körperdruckes in die Rechnung gesetzt (vgl. Fig. 25). Die entsprechenden Normalkraftgradienten, nach der elementaren Theorie berechnet, sind in Fig. 30 durch die gestrichelte Kurve (a') miteinander verbunden. Zwar ergeben die Druckberechnungen machabhängige Koordinaten des Minimaldruckes. Diese Feinheit liegt jedoch innerhalb der Rechengenauigkeit der linearisierten Theorie, so daß eine mittlere Lage dieser Druckminima angenommen werden darf. Wird dieselbe Überlegung für den verdickten Körper durchgeführt, so entstehen die wiederum etwas besseren Werte der Kurve a'_{δ^*} . Dieselben Berechnungen noch mittels der linearisierten Theorie durchzuführen, würde wohl zu noch besseren Annäherungen mit den Messungen führen, doch erscheint diese Verfeinerung angesichts der hypothetischen Annahme unangebracht.

Die Betrachtung der Grenzschichtausbildung entlang der Körper 0, 2 und 4 (Fig. 32) zeigt interessanterweise keine Ablösungserscheinungen beim Körper 4! Diese Aufnahmen wurden allerdings beim Anstellwinkel $\alpha = 0$ gemacht. Schon bei sehr kleinen Anstellwinkeln von $\alpha = 0,035$ (2°) zeigen Grenzschichtmessungen eine stark unsymmetrische Entwicklung der Verdrängungsdicke. Auf der Anströmseite wird die Grenzschichtdicke etwas kleiner, auf der Abströmseite jedoch bedeutend größer als bei Geradanströmung. Mit steigendem Anstellwinkel entwickelt sich diese Unsymmetrie immer stärker. Die sich in der Grenzschicht entwickelnde Wirbelbildung ergreift zunächst die Heckpartie und wirkt sich

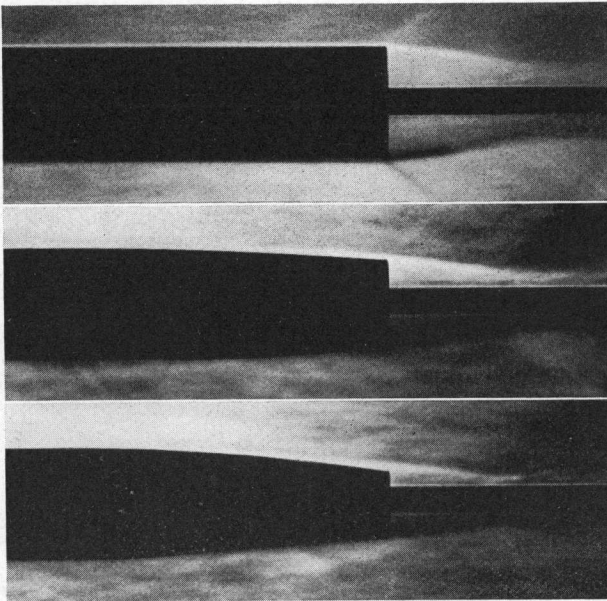


Fig. 32. Schlierenaufnahmen der Heckteile 0, 2 und 4 lassen die wachsende Grenzschichtdicke mit zunehmender Konvergenz der Heckteile erkennen ($M = 1,67$, $Re_L = 1,2 \cdot 10^6$).

bei größeren Anstellwinkeln auch bis in die Spitzenumströmung aus. Welchen Einfluß nun diese dreidimensionalen Grenzschichtströmungen auf die Druckverteilung und somit auf die am Körper wirkenden Kräfte haben, ist wohl sehr schwer vorauszusagen.

Abschließend muß festgestellt werden, daß sowohl wegen des starken Einflusses der Längsgrenzschicht als auch wegen der beginnenden Wirbelbildung bei stark konvergierenden Körpern der auf den Größtquerschnitt bezogene Normalkraftgradient $\frac{dc_N}{d\alpha}$ nicht wesentlich unter den Wert zwei sinkt und damit nicht mehr der Bodenfläche proportional ist.

6.2.2. Normalkraftbelastung, Kräfte und Momente bei größeren Anstellwinkeln

Die aus den Integrationen der Druckverteilungen am Körper 2 ermittelten Normalkraftverteilungen $\frac{dc_N^*}{dx}$ (Fig. 20) haben deutlich die mit wachsendem Abstand von der Körperspitze und mit steigendem Anstellwinkel stark zunehmende Normalkraftbelastung gezeigt.

Die bereits beim Anstellwinkel Null bestehende Grenzschicht wirkt in bezug auf die Normalkraft sozusagen als Katalysator, indem sie bei Schräganströmung die Wirbelbildung unterstützt. Mit wachsendem Anstellwinkel dehnt sich die Wirbelbildung vom Rumpfe her immer mehr gegen die Spitze aus.

Fig. 33 zeigt die in zwei Projektionen aufgenommenen Schlierenbilder des Körpers 3 bei $\alpha = 0,175$ (10°) und $M = 1,67$. Deutlich sind die mit Pfeilen bezeichneten Wirbelzöpfe auf der Rückseite des Heckteiles als starke Helligkeitsveränderungen zu erkennen. Die beiden senkrechten Projektionen wurden durch Drehen des Modelles um 90° bei unveränderter optischer Blickrichtung erhalten. Die Belichtungszeit des Funkenblitzes betrug ca. 10^{-5} Sekunden.

Um eine Vorstellung von der Größe der durch die Wirbelbildung zusätz-

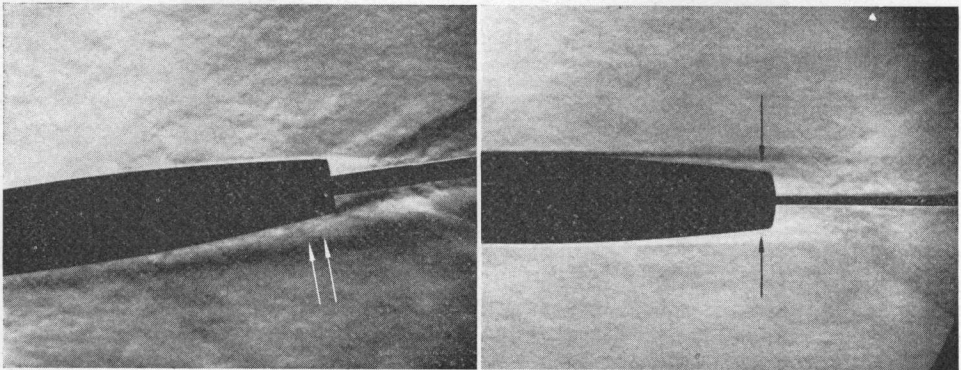


Fig. 33. Funkenblitz-Schlierenaufnahme der Wirbelzöpfe auf der Abströmseite des Körpers 3 (Pfeile) bei $\alpha = 10^\circ$ und $M = 1,67$, $Re_L = 1,2 \cdot 10^6$.

Links: 10° Anstellung in der Bildebene.

Rechts: 10° Anstellung senkrecht zur Bildebene.

lich entstehende Normalkraft zu bekommen, denke man sich die Anströmgeschwindigkeit V in die körperparallele Komponente $V \cos \alpha$ und die körpersenkrechte Komponente $V \sin \alpha$ ($\cong V \alpha$) aufgespalten. In Schnitten senkrecht zur Körperachse läßt sich die Körperumströmung näherungsweise als ebenes, instationäres Problem betrachten. In einer zunächst ungestörten Luftschicht verschiebt sich ein vorerst im Durchmesser wachsender, dann wieder abnehmender Kreiszyylinder mit der Geschwindigkeit $V \alpha$.

Die zum Aufbau des Strömungsfeldes erforderliche Energie wird bei der Verkleinerung des Zylinderdurchmessers im konvergenten Heckteil zum Teil wieder zurückgewonnen und entspricht somit positiven resp. negativen Widerstandsbeiwerten des Zylinders. Ins Räumliche zurückübertragen ergeben sich die aus der Potentialtheorie bekannten positiven resp. negativen Normalkräfte am Körper.

Die wegen der Zähigkeit des Strömungsmediums entstehenden Wirbel im Abströmfeld des Zylinders ergeben *zusätzliche* Widerstandsbeiwerte c_{W_Q} , welche im räumlichen Bild *zusätzlichen Normalkräften* entsprechen. Aus den Normalkraftverteilungen können somit aus der Differenz $\Delta \frac{dc_N^*}{dx}$ der gemessenen zu der potentialtheoretisch berechneten Verteilung die lokalen c_{W_Q} -Werte der Körperqueranströmung ermittelt werden. Diese beziehen sich auf den jeweiligen Körperdurchmesser $2R$ und eine Einheitslänge, um einen direkten Vergleich mit den bekannten stationären c_W -Werten von Zylindern zu erhalten.

Mittels der Definitionsgleichung (72) für c_N^* erhält man für c_{W_Q} :

$$c_{W_Q} = \frac{2 R_0}{\alpha R} \Delta \frac{dc_N^*}{dx} \quad (82)$$

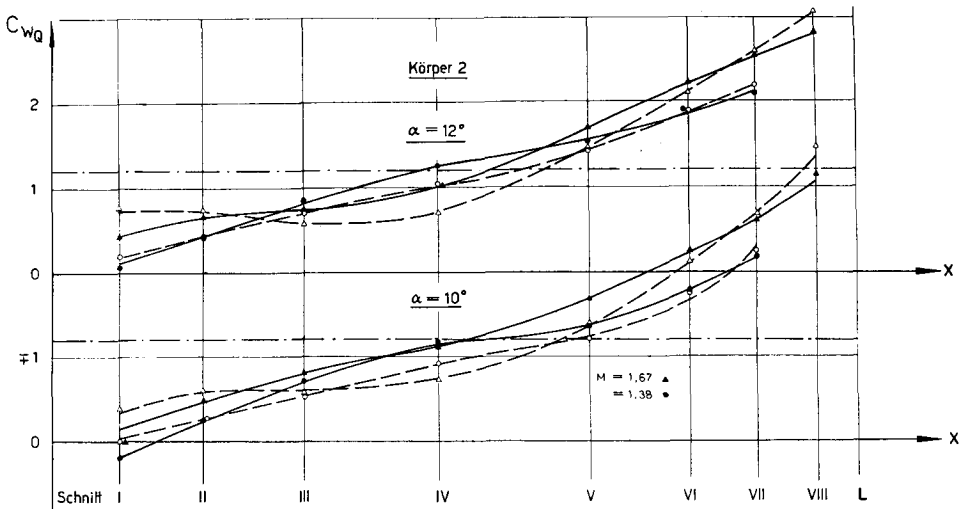


Fig. 34. Aus den Abweichungen zwischen Druckintegration und Theorie ermittelte Querwiderstandskoeffizienten c_{W_Q} am Körper 2 bei zwei größeren Anstellwinkeln ($\alpha = 10^\circ$ und 12°) und bei $M = 1,38$ und $1,67$, über der Körperachse aufgetragen.

c_{W_Q} aus der Abweichung von der elementaren Theorie ermittelt (ausgezogen).

c_{W_Q} aus der Abweichung von der linearisierten Theorie ermittelt (gestrichelt).

Fig. 34 zeigt das Resultat der Auswertung des lokalen Querwiderstandskoeffizienten c_{W_q} aus der Druckmessung am Körper 2 bei den Machzahlen 1,38 und 1,67. Dabei wurden als Vergleichswerte sowohl die nach der elementaren Theorie (a) wie auch nach der linearisierten Theorie (b) berechneten Normalkraftverteilungen benützt.

Für die hier unterkritische Queranströmung von kreisförmigen Querschnitten könnte man auf Grund stationärer Überlegungen c_{W_q} -Werte in der Nähe des Wertes 1 oder für endliche Zylinder etwa von 1,2 erwarten. An der Spitze ergeben sich jedoch bei den hier ausgewerteten Anstellwinkeln $\alpha = 10^\circ$ und 12° bedeutend kleinere Werte, während im Heckteil sogar der Wert 3 erreicht wird. Dies gilt gleichermaßen für die mittels elementarer wie auch linearisierter Theorie bestimmten theoretischen Vergleichswerte der Normalkraftverteilung. Die c_{W_q} -Werte bei den einzelnen Körperschnitten hängen jedoch z. T. stark von dieser Vergleichsbasis ab. Im zylindrischen Teil des Körpers 2 streuen die Werte um die Zahl eins. Als gesamter Mittelwert ergibt sich ein c_{W_q} -Wert von ca. 1,2.

6.2.2.1. Konstanter Querwiderstandskoeffizient

Der in Strömungsrichtung ansteigende c_{W_q} -Wert (vgl. Fig. 34) weist darauf hin, daß die instationäre Betrachtung der Strömungsvorgänge erfolgversprechend ist.

Zunächst soll jedoch versucht werden, mittels eines konstanten c_{W_q} -Wertes die Normalkräfte und Längsmomente der fünf Körper anzugeben, wie dies in ähnlicher Weise *Allen* und *Perkins* [23] versucht haben.

Die Formeln für die Koeffizienten c_N und c_M lauten dann:

$$\begin{aligned} c_N &= 2\alpha \frac{F_B}{F_0} + c_{W_q} \frac{F_s}{F_0} \alpha |\alpha| \\ c_M &= \frac{2\alpha}{F_0 L} \left(G - F_B \frac{h}{2} \right) + c_{W_q} \frac{F_s \Delta x}{F_0 L} \alpha |\alpha| \end{aligned} \quad (83)$$

wobei bedeuten:

- c_{W_q} Widerstandskoeffizient eines quer angeströmten Zylinders.
- $F_s = 2 \int_{-h}^{h/2} R dx$ seitliche Projektionsfläche des Körpers.
- $\Delta x = x_{sp} - x_s$ Abstand zwischen Momentenbezugspunkt (x_{sp}) und Flächenschwerpunkt der seitlichen Projektionsfläche (x_s).

Für den konstanten c_{W_q} -Wert 1,2 wurden die Beiwerte c_N , c_M sowie auch die Lage des Druckzentrums e für alle Körper berechnet und als die bisher nicht erklärten Kurven „c“ in sämtlichen Diagrammen eingetragen, welche diese Beiwerte darstellen.

Begonnen bei den Figuren 21 a, b, c, welche die Beiwerte des Körpers 2 bei einigen Unter- und Überschallmachzahlen als Funktion des Anstellwinkels zeigen, erkennt man, daß durch diese einfache Addition der Reibnormalkräfte der quadratische Verlauf der Normalkraftbeiwerte besonders für die Überschallmachzahlen gut wiedergegeben wird. Hingegen enttäuscht der durch die c-Kurve angegebene Verlauf des Längsmomentes c_M , welcher sogar mehr von den Messungen abweicht als die bisher nur mittels Potentialtheorie berechneten Werte! Dies ist die Folge des als durchgehend konstant angenommenen

c_{W_Q} -Wertes. Der Vergleich mit den gemessenen c_{W_Q} -Werten von Fig. 34 zeigt, daß durch die Annahme eines konstanten c_{W_Q} -Wertes über der ganzen Körperlänge der aufbäumende Momentenanteil der Spitze übertrieben wird, der stabilisierende Teil der Heckquerkraft jedoch unterbewertet wird. Dadurch entstehen die in Fig. 21 b eingetragenen, zu stark aufbäumenden (unstabilen) Längsmomentenbeiwerte.

In Fig. 21 c bestätigt Kurve c die bedeutend bessere Voraussage der Lage des Druckzentrums durch die Berücksichtigung des örtlichen Querwiderstandes. Für die hier besonders interessierenden Überschallmachzahlen ergeben sich im Anstellwinkelbereich zwischen $\alpha = 0,1$ und $0,2$ (oder ca. zwischen 5° und 10°) um ca. 1—2 Kaliber zu weit in Richtung der Spitze liegende Druckzentren, was gegenüber den bisherigen Fehlern von ca. 3 bis 4 Kalibern bereits eine große Verbesserung bedeutet.

Die Berechnung der Beiwerte an der Spitze mittels konstanter c_{W_Q} -Werte ergibt, wie erwartet, sowohl zu große Normalkraftbeiwerte c_N als auch zu instabile Längsmomentenbeiwerte c_M , wie aus Fig. 23 (Kurven c) hervorgeht. Immerhin nähert sich die Lage des Druckzentrums den gemessenen Werten.

Aus den Figuren 28 a, b sowie 29 läßt sich deutlich die Verbesserung der Voraussage der Beiwerte an allen fünf Körpern bei beiden Machzahlen ($M = 1,38$ und $1,67$) erkennen. Ganz besonders zutreffend erscheint dabei die Annahme eines konstanten c_{W_Q} -Wertes bei den Körpern 0 (zylindrisches Heck) und 1. Mit zunehmender Konvergenz des Heckteiles verschlechtert sich jedoch die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung, und zwar im Sinne zu kleiner theoretischer Längsmomente. Entsprechend liegen auch die berechneten Druckzentren zu weit vorne.

6.2.2.2. Instationärer Querwiderstandskoeffizient

In den vorangegangenen Abschnitten wurde bereits darauf hingewiesen, daß der lokale Querwiderstandskoeffizient nicht aus dem stationären Fall des quer angeströmten Zylinders entnommen werden sollte. Das Eindringen des Körpers in die ruhend gedachte, senkrecht zur Körperachse stehende Luftschicht hat in dieser Schicht einen instationären Strömungsvorgang zur Folge.

Ein Kreiszyylinder, dessen Durchmesser vom Wert Null aus bis auf den Größtdurchmesser des Körpers anwächst und nachher wieder abnimmt, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit durch diese Luftschicht. *Kelly* [26] vergleicht die am variablen Zylinder entstehenden Wirbelströmungen mit denjenigen des aus der Ruhe anfahrens Zylinders mit konstantem Durchmesser. Dabei stützt er sich auf Messungen von *Schwabe* [27], welche den instationären Widerstandskoeffizienten als Funktion des Verhältnisses des vom Stillstand an zurückgelegten Weges zum Zylinderradius angeben. An der Stelle x des Körpers beträgt diese Strecke $x \operatorname{tg} \alpha$ oder einfach $x \alpha$, so daß der in Fig. 35 dargestellte Widerstandskoeffizient $c_{W_{Q_{\text{instationär}}}}$ über der dimensionslosen Zahl $\frac{x \alpha}{R}$ dargestellt werden kann. Die hieraus für den Körper 2 entnommenen Widerstandsbeiwerte c_{W_Q} sind in derselben Figur für verschiedene Anstellwinkel als Funktion der Abszisse x aufgetragen.

Speziell stark ausgezogen ist die Kurve $\alpha = 0,2$, da die aus den Messungen ebenfalls für $\alpha = 0,2$ herausgeschälten c_{W_Q} -Werte (schraffiertes Gebiet) mit dieser Kurve verglichen werden können. Dieses Gebiet umfaßt sowohl die Auswertung

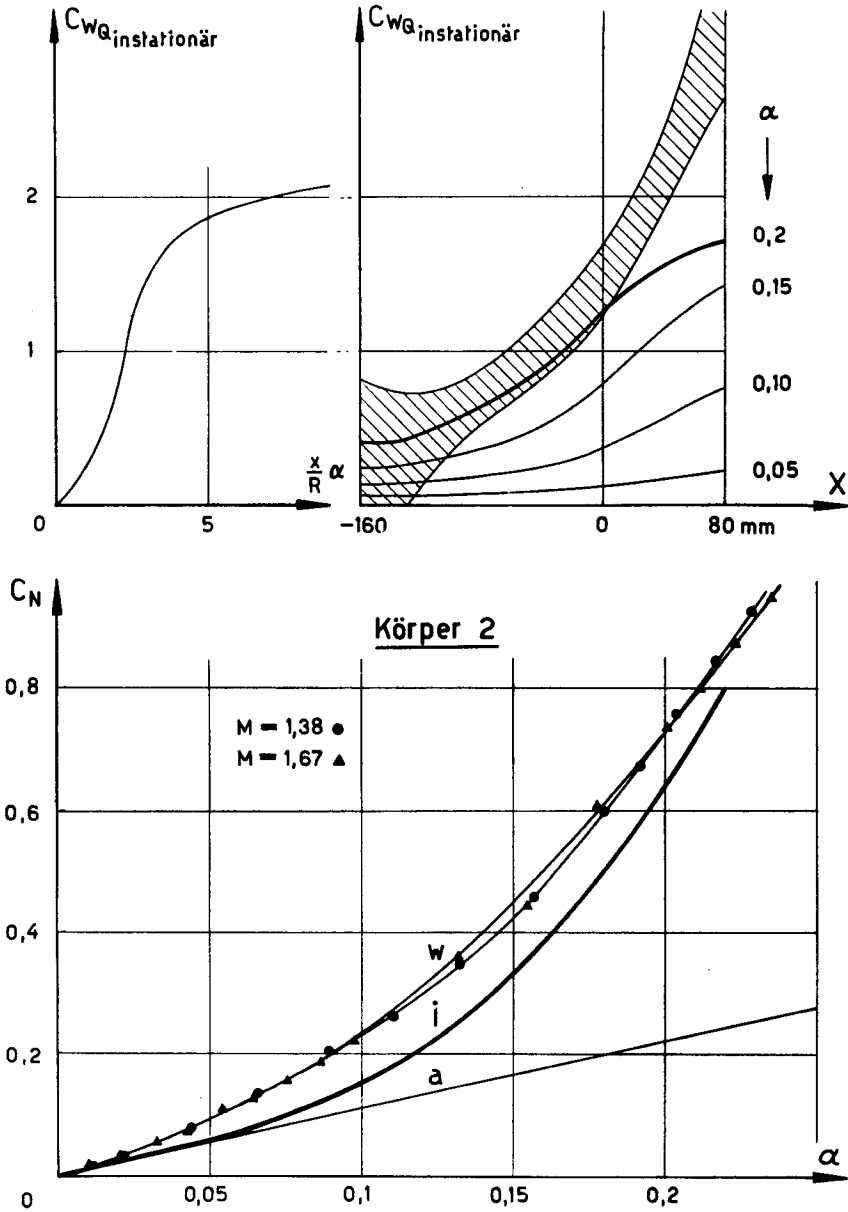


Fig. 35. Berechnung des instationären Querwiderstandskoeffizienten anhand der experimentellen Kurve von Schwabe (oben links). Vergleich mit den Meßresultaten (schraffiert) bei $\alpha=0,2$ (oben rechts) und Anwendung auf die Normalkraftberechnung (unten) am Körper 2 bei $M=1,38$ und $1,67$.

- a: Elementare Theorie.
- i: Resultat obiger Berechnung.
- w: Resultate der Wägung.

der beiden Machzahlen 1,38 und 1,67 als auch die beiden Vergleichstheorien (elementare oder linearisierte Theorie).

Dieser bei $\alpha = 0,2$ durchgeführte Vergleich zeigt in der Spitzenpartie eine gute Übereinstimmung, während im Heckteil die instationären Werte zu klein sind. Wegen der großen Streuung der Auswertung der c_{Wq} -Werte bei kleinen Anstellwinkeln aus der Druckverteilungsmessung sei die Beurteilung der instationären c_{Wq} -Werte anhand des Kräftevergleiches durchgeführt.

Für die Berechnung des zusätzlichen Normalkraftbeiwertes c_{Nq} gilt allgemein die Gleichung:

$$c_{Nq} = \frac{2\alpha|\alpha|}{F_0} \int_{-h}^{h/2} c_{Wq}(x) R(x) dx \quad (84)$$

In der gleichen Figur ist die Auswertung der c_N -Berechnung mit den Meßresultaten des Körpers 2 bei den beiden Machzahlen 1,38 und 1,67 dargestellt.

Hier entdeckt man, daß diese instationäre Betrachtungsweise für kleine Anstellwinkel versagt, indem die Normalkräfte zu klein werden. Für größere Anstellwinkel als $\alpha = 0,2$ ($11,5^\circ$) nähert sich die berechnete c_N -Kurve den Messungen, woraus geschlossen werden kann, daß die Strömungsvorgänge in Ebenen senkrecht zur Rumpfachse erst von diesem Anstellwinkel an den Strömungsbildern instationär bewegter Kreiszyylinder ähnlich sind.

Die Verwendung instationärer Querwiderstandskoeffizienten hat, kurz zusammengefaßt, bei Anstellwinkeln von $\alpha = 0,2$ die gemessene Normalkraftverteilung in der Spitzenpartie bis etwa zum Größtdurchmesser des Körpers 2 gut wiedergegeben. Im Heckteil jedoch ergeben sich zu kleine Normalkräfte.

Integriert über die Körperlänge entstehen für den Körper 2 nur bei größeren Anstellwinkeln als $\alpha = 0,2$ mit den Meßresultaten gut übereinstimmende Normalkraftkoeffizienten, während unterhalb dieses Winkels die berechneten Kräfte bedeutend zu klein ausfallen und durch die in Abschnitt 6.2.2.1 getroffene Annahme eines konstanten Querwiderstandskoeffizienten bedeutend besser wiedergegeben werden.

6.2.2.3. Annahme in Achsrichtung steigender Querwiderstandskoeffizienten in Abhängigkeit der Körperform

Die bisherigen Versuche zur Berechnung der zusätzlichen Normalkraftbelastung infolge der Wirbelschichtbildung auf der Rückseite der Rotationskörper haben keine für alle Anstellwinkelbereiche befriedigenden Resultate gezeigt. Durch die Annahme des konstanten Querwiderstandskoeffizienten von 1,2 (vgl. Abschnitt 6.2.2.1) konnten wohl die Normalkräfte, nicht aber die Längsmomente angenähert richtig vorausberechnet werden.

Ausgehend von der Ermittlung des Querwiderstandsverlaufes am Körper 2 wird nun versucht, für alle Körper eine vom Anstellwinkel unabhängige (d. h. stationäre) Verteilung zu finden, welche in einem möglichst großen Anstellwinkelbereich die Meßresultate gut annähert. Dabei liegt der Akzent auf der richtigen Wiedergabe der Normalkraft bei $\alpha = 0,2$ für den Machzahlbereich der vorliegenden Überschallmessungen.

Zunächst kann für die Spitze allein der Verlauf der c_{Wq} -Verteilung aus den Meßresultaten entnommen und vereinfacht als ein linearer Anstieg vom Wert Null an der Spitze bis zum Wert 1,4 beim Größtdurchmesser dargestellt wer-

den. Für die verschiedenen Heckteile der fünf Körper ist dadurch ein Anschlußpunkt beim Größtdurchmesser bereits gegeben. Als weiterer Verlauf werden wiederum lineare Anstiege angenommen, um den Parameter einfach zu gestalten.

In Fig. 36 sind die derart ermittelten Verteilungsfunktionen der Querwiderstandsbeiwerte über der x -Achse für alle fünf Körper dargestellt. Im oberen Teil der Figur (a) sind die Widerstandsbeiwerte dargestellt, welche sich auf die geometrischen Körperabmessungen beziehen, während im unteren Teil der Figur (b) die Beiwerte für die um die Verdrängungsdicke vergrößerten Körper gelten. Die Widerstandsbeiwerte wurden hier aus der Abweichung der gemessenen Kräfte von den nach elementarer Theorie berechneten Kräften ermittelt.

Daß diese Verteilung der Widerstandsbeiwerte zusammen mit der elementaren Potentialtheorie die Normalkraft- und vor allem Längsmomentenbeiwerte besonders im Bereich $0,1 < \alpha < 0,25$ sehr gut wiedergibt, geht sehr deutlich aus den Kurven f hervor, welche ebenfalls in alle bereits besprochenen Figuren der Beiwerte der fünf Körper (Fig. 21 a, b, c, 28 a, b und 29) eingetragen sind. Aus Fig. 21 a erkennt man, daß zur Annäherung der Unterschallbeiwerte kleinere Querwiderstandskoeffizienten c_{WQ} genügen würden.

Zunächst fällt in Fig. 36 die starke Zunahme der Querwiderstandsbeiwerte mit zunehmender Konvergenz des Heckteils auf. Selbst bei Berücksichtigung der Grenzschichtdicke ergeben sich Beiwerte in der Nähe der Zahl 4! Würden

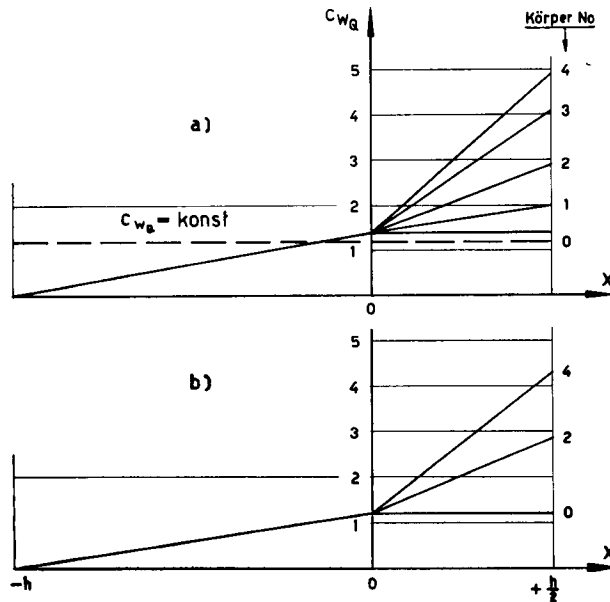


Fig. 36. Darstellung derjenigen Querwiderstandskoeffizienten c_{WQ} , welche zusammen mit der elementaren Theorie den Meßresultaten bei mittleren bis größeren Anstellwinkeln und bei Überschallgeschwindigkeit am besten entsprechen (Grundlage der Kurven f), aufgetragen über der x -Achse.

Zum Vergleich ist der konstante Wert $c_{WQ} = 1,2$ eingetragen (Grundlage der Kurven c).

- a: Gültig für die geometrischen Abmessungen der Körper.
- b: Gültig für die um die Verdrängungsdicke vergrößerten Körper.

die c_{Wq} -Werte aus den Abweichungen von der linearisierten Theorie berechnet, so ergäben sich stets noch Beiwerte zwischen 3 und 4 für den Körper 4.

Derartig hohe Widerstandsbeiwerte für Kreiszyylinder lassen sich nur als Folge einer äußerst starken Wirbelbildung im Abströmfeld erklären, welche im ebenen Fall trotz Auswertung instationärer Strömungsvorgänge nicht bekannt sind.

Im einzelnen betrachtet, ergibt sich für den Körper 0 im zylindrischen Heckteil eine konstante Verteilung des Querwiderstandskoeffizienten, welche zwischen den Werten 1,4 oder 1,2 schwankt, jenachdem der geometrische oder der um die Verdrängungsdicke vergrößerte Körper betrachtet wird. Es wird nun verständlich, daß der von verschiedenen Autoren verwendete c_{Wq} -Wert in der Nähe von eins bei den oft untersuchten Ogival-Zylinderkombinationen mit meist sehr langem zylindrischem Teil gute Übereinstimmung mit den Meßwerten gebracht hat. Sobald aber Querschnittsverminderungen auftreten, muß diese Berechnungsgrundlage versagen, wie die mit $c_{Wq} = 1,2$ berechneten Kurven c besonders beim Vergleich mit den Längsmomentenbeiwerten deutlich zeigen.

Für die zunehmend konvergenteren Heckteile der Körper 1 bis 4 nehmen die Widerstandsbeiwerte im Heckteil rasch zu. Prinzipiell stimmt diese Zunahme mit der in Abschnitt 6.2.2.2 durchgeführten instationären Betrachtung überein. Um so erstaunlicher erscheint daher die Tatsache, daß die Querwiderstandskurven vom Anstellwinkel unabhängig erscheinen, wie die weitgehende Übereinstimmung mit den Meßkurven im angegebenen Bereich von $0,1 < \alpha < 0,25$ zeigt.

6.2.3. Einfluß auf die Axialkräfte

In den Abschnitten 5.1.2.6 und 5.2.2.5 wurden die Einwirkungen der sich mit steigendem Anstellwinkel stets stärker ausbildenden Wirbelschichten auf die Axialkräfte bereits besprochen:

Kurz zusammengefaßt ergibt sich die Feststellung, daß infolge der Wirbelbildung von der theoretisch erwarteten Abnahme der Axialkraft mit steigendem Anstellwinkel wenig übrig bleibt. Der bei allen Körpern gemessene, mit α zunehmende Bodenwiderstand läßt, mit der von α weitgehend unabhängigen Reibkraft, die Axialkräfte aller Körper mit dem Anstellwinkel leicht zunehmen.

Für die Praxis ist jedoch nicht die axiale, sondern die windparallele Widerstandskraft maßgebend, welche noch die Komponente $c_N \sin \alpha$ enthält. Diese überwiegt bei größeren Anstellwinkeln jede der vorher aufgeführten Widerstandskomponenten.

Um einen Einblick in die Verhältnisse zwischen Auftrieb und Widerstand der fünf Körper im Überschallbereich zu erhalten, sind in Fig. 37 die Polaren dieser Körper bei $M = 1,38$ dargestellt. Diese Darstellungsweise zeigt deutlich die sehr rasche Zunahme des Widerstandes mit wachsendem Auftrieb.

Gegenüber den gewohnten parabelähnlichen Kurvenformen von Flügeln fällt hier die nach kurzer Krümmung sehr gestreckte Form der Polaren auf. Dafür verantwortlich ist der über dem Anstellwinkel ebenfalls parabelähnliche Anstieg der Normalkraft und damit auch des Auftriebs. Zusammen mit dem ebenfalls parabelähnlichen Anstieg des Widerstandes mit dem Anstellwinkel ergibt sich der gestreckte Verlauf.

Im Gegensatz zu Flügeln, welche den besten Gleitwinkel, also das größte

Verhältnis von Auftrieb zu Widerstand, bei kleinen Anstellwinkeln aufweisen, wächst hier der Gleitwinkel mit zunehmendem Anstellwinkel und hat bei den höchstgemessenen Winkeln von $\alpha = 0,25$ ($14,3^\circ$) den Bestwert noch nicht erreicht. Dieser beträgt für den in dieser Hinsicht günstigen Körper 4 nur ca. 2,4:1.

Abschließend stellt man fest, daß die schlanken Rotationskörper wegen der bei Anstellung sich stets stärker ausbildenden Wirbelbildung auf der Abströmseite Auftriebsbeiwerte aufweisen, welche beispielsweise bei Flugbahnberechnungen pendelnder Geschosse erheblich ins Gewicht fallen können.

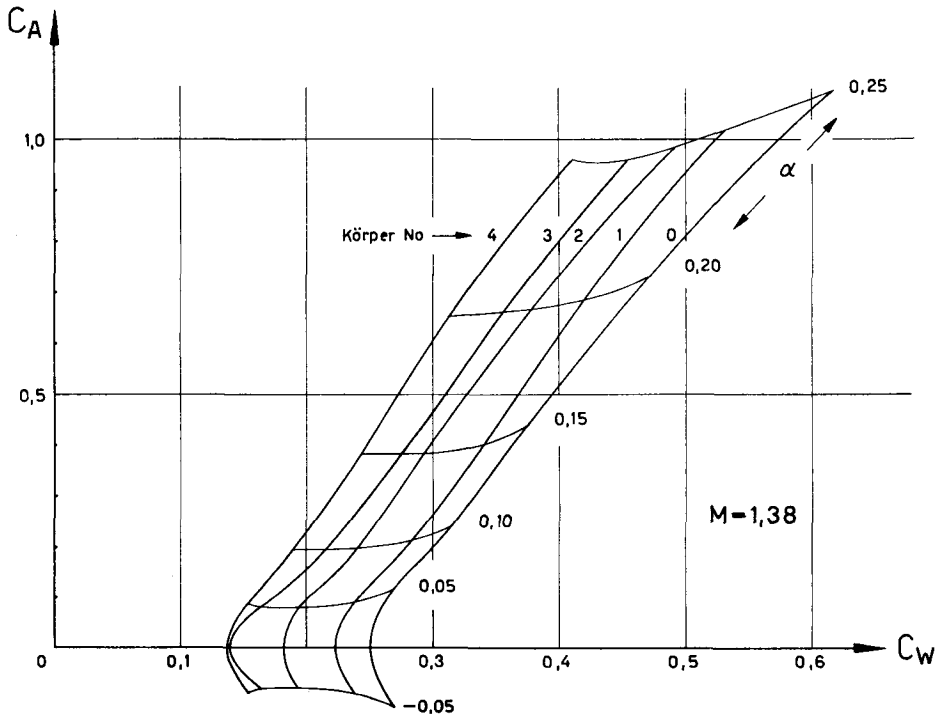


Fig. 37. Widerstands-Auftriebs-Polaren der fünf Körper bei $M = 1,38$.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser experimentellen Arbeit bestand darin, durch Messungen an einer Familie von schlanken Rotationskörpern den Gültigkeitsbereich der durch Linearisierung der Strömungsgleichungen erhaltenen Theorien zu prüfen.

Die Messungen haben gezeigt, daß Grenzschichteffekte die Umströmung der Körper derart stark beeinflussen, daß die durch die Potentialtheorie erfaßten Kräfte gegenüber den durch die Zähigkeit der Luft bedingten Kräften zurücktreten. Dieser Zustand tritt speziell dann ein, wenn die Stabilität der Grenzschicht gestört wird, sei es durch zu große Anstellung der Körper oder

sei es durch zu rasche Grenzsichtverdickungen infolge Konvergenz der Heckteile.

Für den gemessenen Reynoldszahlbereich von $1,0—1,2 \cdot 10^6$ läßt sich ausagen, daß der Anwendungsbereich der Potentialtheorie auf Körper beschränkt bleibt, deren Querschnitte in Strömungsrichtung zunehmen und deren Anstellung gegen die Strömungsrichtung kleiner als ca. 3° ist.

Bei den größeren Reynoldszahlen fliegender Geschosse und Raketen dürfte sich der Anwendungsbereich auch auf etwas größere Anstellwinkel und Körperformen mit zylindrischen Teilen ausdehnen. Die Feinheiten in der Wahl des Genauigkeitsgrades der potentialtheoretischen Berechnungen treten jedenfalls bei schlanken Körpern und mäßigen Machzahlen in den Hintergrund.

Wesentliche Verbesserungen der Berechnungen lassen sich erreichen, wenn zu den potentialtheoretischen Kräften Zähigkeitsabhängige Kräfte addiert werden. Die Messungen und Berechnungen zeigen, daß die räumliche Wirbelschichtbildung auf der Abströmseite der angestellten Körper bei konvergierenden Körperenden nicht durch die Darstellung aneinandergereihter ebener Strömungsbilder querangeströmter Zylinder wiedergegeben werden kann. Will man jedoch bei diesem Bild bleiben, so ergeben sich Widerstandskoeffizienten der zylindrischen Abschnitte, welche den aus instationären Messungen erhaltenen Wert von zwei weit übersteigen.

An dieser Stelle angelangt, sieht man sich versucht, neben Quellen und Dipolen auch variable Potentialwirbelintensitäten in das Bild der Störströmung einzubauen, wie dies bereits von mehreren Autoren bei der Berechnung von Randwirbeln an Tragflächen ausgeführt wurde.

Möge die vorliegende experimentelle Arbeit Gelegenheit geben, weitere theoretische Erkenntnisse auf ihre Anwendbarkeit hin prüfen zu können.

Literaturverzeichnis

1. *M. M. Munk*: The aerodynamic forces on airship hulls. NACA Rep. 184, 1924.
2. *M. D. van Dyke*: First- and second-order theorie of supersonic flow past bodies of revolution. J. aeron. Sci. 18 (1951), 3, p. 161—179.
3. Vgl. Literaturangaben des Abschnittes 6: [21] bis [27].
4. *J. Ackeret, M. Degen, N. Rott*: Über die Druckverteilung an schräg angeströmten Rotationskörpern bei Unterschallgeschwindigkeit. Aerotechnica XXXI/1 (1951), p. 11—19.
5. Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH, Nr. 8 (1943).
6. *H. R. Voellmy*: Elektronisches Rechenggerät zur Auswertung von Windkanalmessungen. ZAMP 3 (1952), p. 394—395.
7. *R. Sauer*: Einführung in die theoretische Gasdynamik. Springer-Verlag, Berlin 1951.
8. *Th. von Karman und N. B. Moore*: The resistance of slender bodies moving with supersonic velocities with special reference to projectiles. A.S.M.E. 54 (1932), p. 303—310.
9. *H. S. Tsien*: Supersonic flow over inclined body of revolution. J. aeron. Sci. 5 (1938), 12, p. 480—483.
10. *M. J. Lighthill*: Supersonic flow past slender bodies of revolution, the slope of whose meridian section is discontinuous. Quart. J. mech. and appl. math., Vol. 1 (1948), part 1, p. 90—102.
11. *W. F. Durand*: Aerodynamic Theory, Bd. 1. Munk: CVI, 2 (1934).
12. *H. Lamb*: Hydrodynamics, 6th Ed. Cambridge 1932, p. 298.
13. *M. J. Lighthill*: Supersonic flow past bodies of revolution. A.R.C.R. and M. No. 2003, 1945.
14. *W. S. Sears*: On projectiles of minimum wave drag. Quarterly of appl. mathematics 4 (1946), p. 191—193.
15. *C. Ferrari*: Linearisierte Potentialtheorie. Aerotechnica 17 (1937), p. 507—518.
16. *W. S. Haack*: Bericht Nr. 139 der Lilienthalgesellschaft (1941).
17. *W. S. Haack*: Interne Mitteilung der Firma Werkzeugmaschinenfabrik Bührle & Co.
18. *Z. Kopal*: Tables of supersonic flow around cones. MIT Techn. Rep. No. 1 (1947).
19. *G. N. Ward*: Linearized theory of steady high speed flow. Cambridge University Press, 1955.
20. *J. Ackeret*: Elementare Betrachtungen über die Stabilität der Langgeschosse. Helvetica physica acta XXII (1949), 2.
21. *W. Mangler*: Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten. ZAMP XXVIII/4 (1948), p. 97—103.
22. *A. Betz*: Aerodynamic theory. W. F. Durand, Berlin 1934—1936, Bd. 4, p. 69—72.
23. *H. J. Allen, E. W. Perkins*: A study of effect of viscosity on flow over slender inclined bodies of revolution. NACA Rep. 1048.
24. *A. H. Flax und H. R. Lawrence*: Proc. 3rd. Anglo-American Aeron. Conf. 1951, p. 363—398.
25. *H. R. Voellmy*: Aerodynamische Kräfte auf schlanke Rotationskörper. ZAMP 5 (1954), p. 263—269.
26. *H. E. Kelly*: The estimation of normal force, drag and pitching moment coefficients for bluntbased bodies of revolution at large angles of attack. J. aeron. Sci. 21 (1954), 8, p. 549ff.
27. *M. Schwabe*: Pressure distribution in nonuniform twodimensional flow. NACA TM 1039, 1943.

Lebenslauf

Am 18. Januar 1922 wurde ich in Basel geboren und besuchte dort die Primar- und Mittelschule. Im Herbst 1940 schloß ich die Schulzeit mit der am Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Gymnasium bestandenen Maturitätsprüfung ab. Eine halbjährige Lehre als Volontär bei der Firma Moser, Glaser & Co., Transformatorenfabrik, Basel, ergänzte die in vielen Bastlerstunden erworbenen praktischen Kenntnisse. Im Herbst desselben Jahres begann ich meine Studien an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich in der Abteilung für Maschineningenieurwesen und schloß das Studium im Herbst 1945 mit einer bei Herrn Prof. Dr. J. Ackeret durchgeführten Diplomarbeit in Aerodynamik ab.

In die während des zweiten Weltkrieges fallende Studienzeit schoben sich etliche Dienstage ein, welche ich unter anderem dazu benützte, die Artillerie-Offiziersschule zu besuchen.

Nach einer kurzen Tätigkeit als Assistent bei Herrn Prof. Dr. Ackeret im Institut für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule trat ich 1946 in die Firma Preß- und Stanzwerk AG., Eschen im Fürstentum Liechtenstein, ein. Ein Jahr später kehrte ich nach Zürich zurück und arbeite seither in der Firma Contraves AG.

Die stets rege Zusammenarbeit mit dem Institut für Aerodynamik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, insbesondere mit seinem Leiter, Herrn Prof. Dr. J. Ackeret, führte durch seine Anregung zur Durchführung der vorliegenden Arbeit.

Zürich, 27. Dezember 1956.