

Concours CGénial 2019



« Advanced Arago »

Maël Jeannot, Hugo Montan, Ségolène Mosser, Louise Richard, Antoine Tondu

Elèves de Terminale S du lycée Aragon d'Héricourt

Avec l'aide d'Alain Froidurot leur professeur de physique.

Lycée Aragon d'Héricourt 70400

Résumé

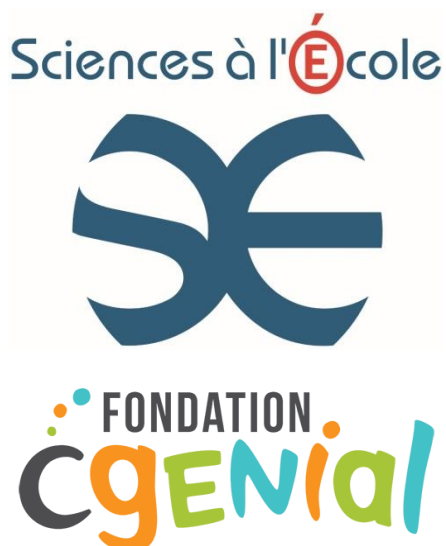
Les détecteurs américains LIGO et européen VIRGO ont permis dernièrement de détecter des ondes gravitationnelles issues de la fusion de trous noirs et d'étoiles à neutrons.

Depuis 2017 le club scientifique du lycée est parti à la découverte de ces ondes et de leur détection.

Sur le principe des interféromètres LIGO et VIRGO, nous simulons un détecteur d'ondes gravitationnelles en utilisant un faisceau d'ultrason plutôt qu'un faisceau laser.

La déformation simulée de l'espace-temps est détectée. Un gros travail d'analyse a été réalisé par des techniques similaires à celles utilisées réellement afin de déterminer les paramètres de l'évènement responsable : masse des objets fusionnant et distance à la Terre.

Tout comme LIGO et VIRGO, notre interféromètre ARAGO a subi plusieurs améliorations afin de détecter des signaux très faibles, d'où son nom Advanced ARAGO.



Sommaire

1. Introduction

2. Principe du détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles

3. Notre détecteur interférométrique : Arago

- Interféromètre à ultrason
- Les miroirs sphériques
- La séparatrice
- Essai de transmission et réflexion
- Le support
- L'interféromètre Advanced Arago
- Test de l'interféromètre

4. Miroirs de recyclage

- Pourquoi ?
- Recherche de la performance par simulation

5. Détection des ondes gravitationnelles

- Une onde gravitationnelle dans notre laboratoire
- Point de fonctionnement de l'interféromètre

6. Vibration de l'espace-temps, quelle fonction mathématique ?

- Allure de la vibration
- Fonction pour générer des ondes gravitationnelles
- Cas où les deux objets fusionnant ont la même masse m
- Vérification des calculs avec l'exemple donné
- Vérification de la théorie avec la réalité
- Application à la détermination de la masse totale d'objets fusionnant
- Simulation du passage d'une onde gravitationnelle

7. Détection de la vibration

8. Signaux reçus

9. Détermination des caractéristiques de l'événement détecté

- Analyse spectrale
- Comment déterminer la masse totale du système : M ?
- Comment déterminer la distance à la source : D ?

10. Sensibilité du détecteur

11. Conclusion

1. Introduction

En 1916, Albert Einstein émet une hypothèse : lorsque des masses subissent une accélération, elles font vibrer l'espace-temps, produisant une onde comparable aux rides qui se propagent à la surface de l'eau lorsqu'une pierre la frappe. C'est la fameuse onde gravitationnelle. Toutefois, la déformation de l'espace-temps est infime : dix mille fois plus petite que la taille d'un proton (10^{-18} à 10^{-19} m sur plusieurs km). Les ondes gravitationnelles suffisamment intenses pour être détectées sur Terre proviennent d'événements cataclysmiques, mettant en jeu de très grandes masses subissant de fortes accélérations.

Le 14 septembre 2015, les deux détecteurs de l'expérience Ligo installés aux États-Unis ont réagi au passage d'une onde gravitationnelle ayant pris sa **source à 1,3 milliard d'années-lumière de la Terre** correspondant à la fusion de **2 trous noirs de masse environ 30 fois la masse du Soleil** chacun.

D'où notre problématique :

Comment les scientifiques ont-ils pu détecter le phénomène et en déduire ses paramètres ?

Nous allons y répondre en simulant le phénomène, en le détectant et en l'analysant tout comme les équipes de Ligo et Virgo l'on fait.

L'an dernier, le club scientifique du lycée Aragon avait présenté un interféromètre acoustique pour montrer le principe de la détection des ondes gravitationnelles.

Cette année avec l'aide d'un chercheur à l'European Gravitational Observatory travaillant sur Virgo, nous avons réussi à simuler les mêmes vibrations de l'espace que celle réellement observées. Puis nous les avons détectées et analysées avec les mêmes méthodes utilisées par les scientifiques. À l'aide de programmes que nous avons réalisés, nous pouvons maintenant déduire les paramètres du phénomène responsable de la vibration détectée.

Dans un premier temps, nous rappelons le principe de notre interféromètre Arago en précisant ses améliorations (Advanced Arago), puis nous détaillerons la production et l'analyse des signaux.

2. Principe du détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles

Tout commence avec un interféromètre de Michelson géant permettant de détecter la très faible oscillation de l'espace-temps (Ligo aux Etats-Unis ou Virgo en Italie) : soit une variation de 10^{-18} m sur 3 km de longueur !



Détecteurs LIGO (à Hanford et Livingston, États-Unis) et le détecteur Virgo (Cascina, Italie).

LIGO Laboratory et Virgo / Nicola Baldocchi 2015

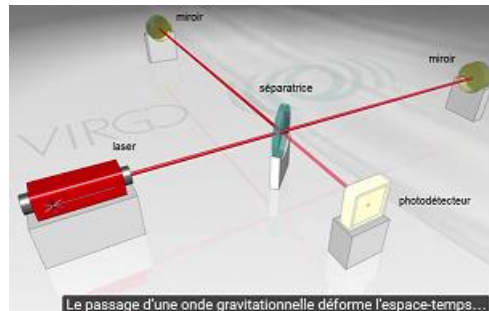


Schéma de base d'un détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles.
(Animation Virgo)

Nous avons réalisé un tel interféromètre, baptisé ARAGO, puis Advanced ARAGO après amélioration de ses performances !

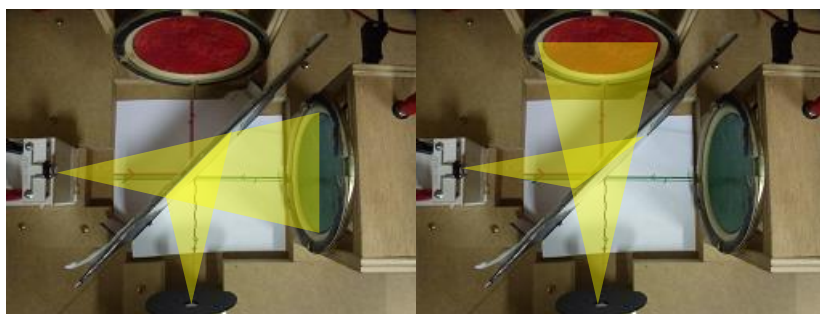
3. Notre détecteur interférométrique : Advanced Arago

Interféromètre à ultrason



Nous ne disposons pas d'interféromètre de Michelson au lycée. Aussi, pour réaliser notre interféromètre, nous remplaçons le faisceau laser par un faisceau d'ultrasons. Un émetteur d'ultrason alimenté par un générateur ajusté à 40kHz prend la place du laser et un détecteur d'ultrason relié à une carte d'acquisition Latispro celle du photodétecteur.

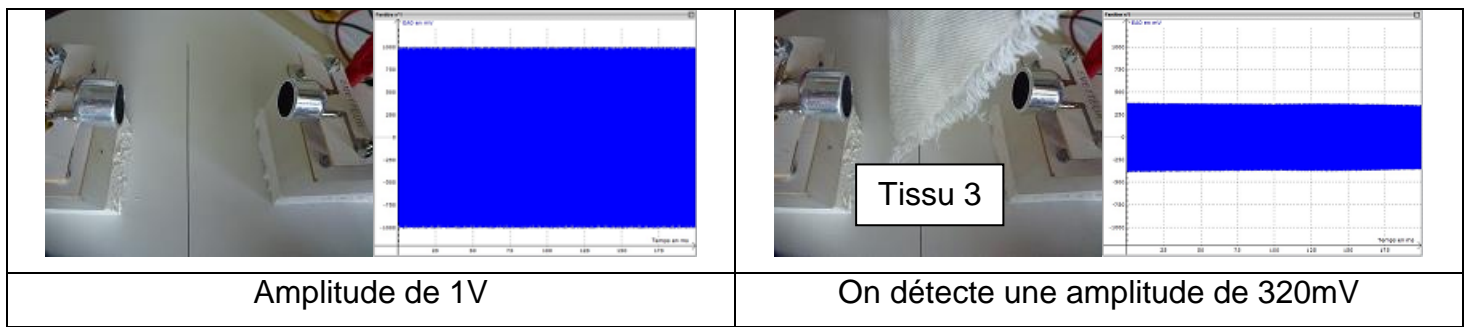
Les miroirs sphériques



Pour focaliser les faisceaux sur le récepteur, on réalise des miroirs sphériques dont le rayon correspond à la distance entre émetteur et miroir d'environ 20cm. Nous les fabriquons en papier mâché à l'aide d'un cul de poule emprunté aux cuisines de diamètre 40cm. Puis nous découpons et collons des calottes sphériques sur les membranes des deux haut-parleurs.

La séparatrice

Il faut trouver un matériau partiellement transparent pour les ultrasons. Nous testons plusieurs matériaux (film étirable, divers tissus) de façon à ce qu'environ 50% des ultrasons le traversent. Nous supposons que l'autre partie est réfléchi.



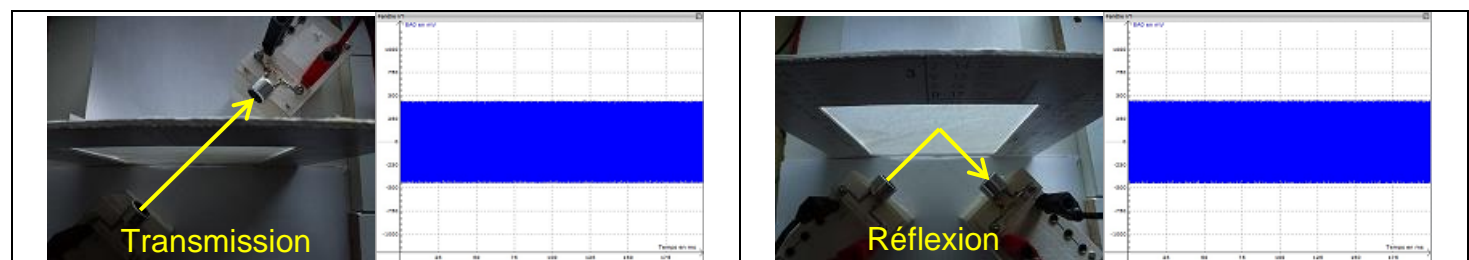
matériau	Film étirable	Tissu 1	Tissu 2	Tissu 3
Transmission	30%	63%	48%	32%

Nous choisissons le tissu 2 qui donne un pourcentage de transmission le plus proche de 50%. Nous le collons sur un cadre en carton (voir ci-dessous).

Essai de transmission et réflexion :

Si 50% des ultrasons sont transmis, est-ce que 50% sont réfléchis ?

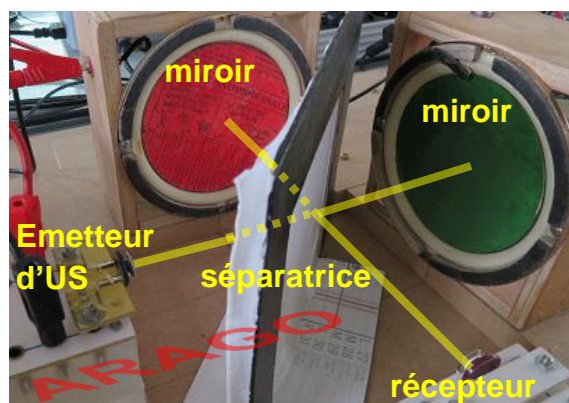
Nous essayons et le résultat est plus que satisfaisant !



Le support

La nouvelle version Advanced Arago est réalisée en MDF, les deux miroirs sont sur des supports coulissants. Des vis permettent de les déplacer finement de 0,8mm par tour.

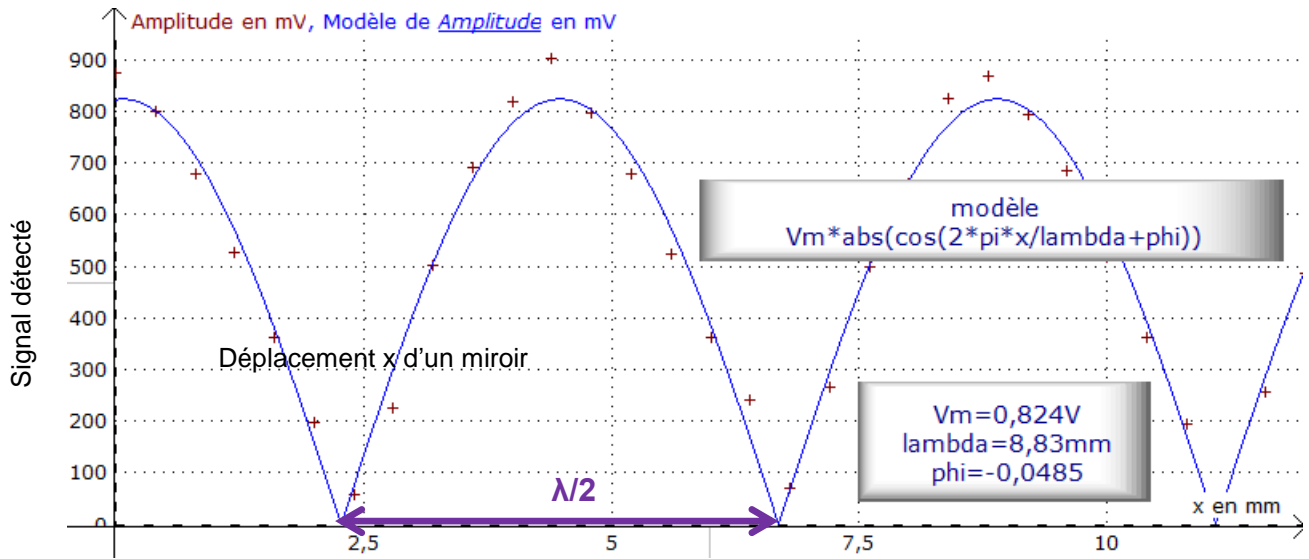
L'interféromètre Advanced Arago



Le faisceau d'ondes ultrasonores est divisé en deux par la séparatrice. Puis les deux faisceaux sont réfléchis par les miroirs sphériques et interfèrent ensuite. Le récepteur ultrasonore est relié à la carte d'acquisition Latispro.

Test de l'interféromètre :

Lorsque nous éloignons un des haut-parleurs, nous observons bien une alternance entre interférences constructives et destructives.



Lorsque les 2 bras ont la même longueur, les 2 ondes sont en phase et les interférences sont constructives, l'intensité est maximale. Si un miroir est éloigné de $x = \lambda/4$, lors de l'aller et retour, une des 2 ondes parcourt $\lambda/2$ de plus que l'autre, les 2 ondes sont en opposition de phase et les interférences sont destructives, l'intensité est nulle.

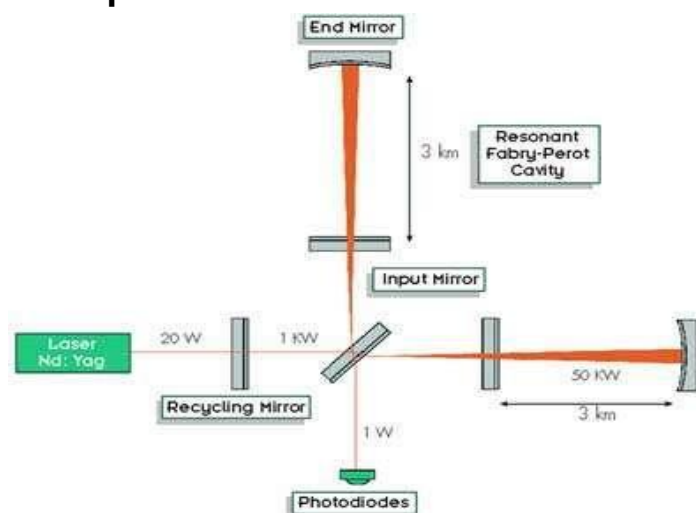
La modélisation de l'amplitude du signal détecté en fonction du déplacement d'un des miroirs donne une longueur d'onde $\lambda = 8,83 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Elle correspond bien à celle calculée à partir de la célérité du son dans l'air ($345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) :

$$\lambda = v/f = 345/39,2 \cdot 10^3 = 8,80 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

4. Miroirs de recyclage

Pourquoi ?



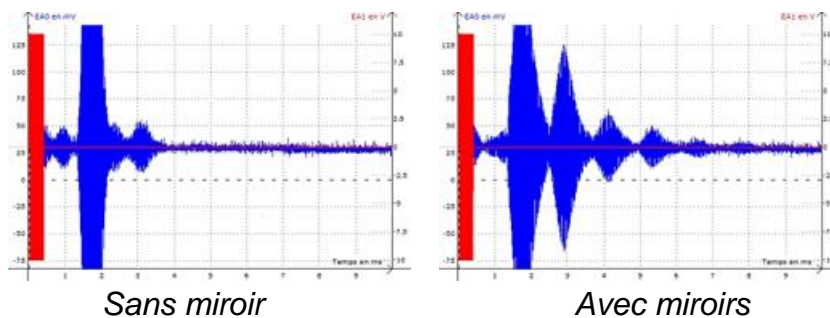
Pour optimiser Virgo, des miroirs supplémentaires créant une cavité résonante Fabry-Perot permettent d'augmenter l'intensité du faisceau lumineux, et de lui faire parcourir plusieurs centaines de fois les bras de l'interféromètre, afin d'amplifier le signal observable.

D'où l'idée dans Advanced Arago d'utiliser des miroirs de recyclage, pour créer une cavité résonante et peut être améliorer sa sensibilité.

Ceux-ci sont découpés dans les mêmes calottes sphériques que les miroirs. Nous perçons un trou en leur centre pour y placer l'émetteur et le récepteur.

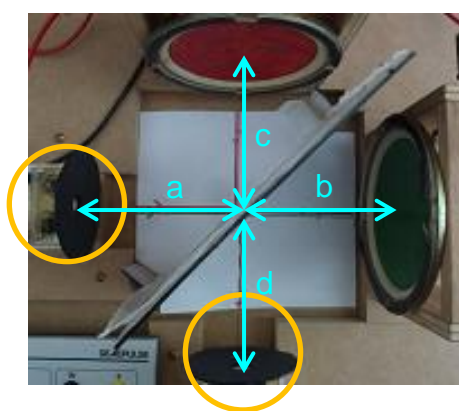
Pour tester leur efficacité, nous utilisons un émetteur de salves d'ultra-sons en présence d'un seul miroir.

On observe au moins 5 réflexions :



Les miroirs sont donc efficaces pour réfléchir une partie des ondes ultrasonores perdues.

Le sont-ils pour améliorer la sensibilité de l'interféromètre ?



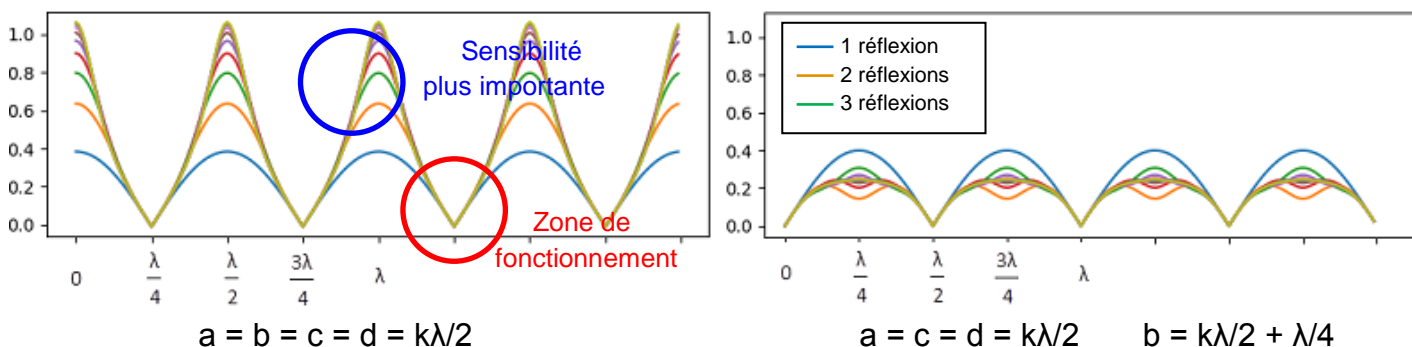
Miroirs de recyclage et longueurs de trajets a , b , c et d .

Ces miroirs doivent former une cavité résonnante, la longueur des multiples trajets des faisceaux interférant ne doit pas être quelconque. On constate d'ailleurs que l'état d'interférence au niveau du récepteur dépend des distances a et d . Se pose alors le problème du positionnement de ceux-ci. Nous résolvons ce problème à l'aide d'un simulateur programmé en Python. Il prend en compte les 8 parcours possibles des ultra-sons, chacun ayant un retard dépendant de la position des 4 miroirs. Exemples de parcours : $abdb$, $dbdb$, $acca$

On introduit un coefficient de réflexion au niveau des miroirs et des miroirs de recyclage.

Recherche de la performance par simulation

Pour différentes valeurs de a , b , c et d , on rajoute à b un déplacement x et on représente l'amplitude de l'onde reçue en fonction de x et en fonction du nombre de réflexion prises en compte :



$$a = b = c = d = k\lambda/2$$

$$a = c = d = k\lambda/2 \quad b = k\lambda/2 + \lambda/4$$

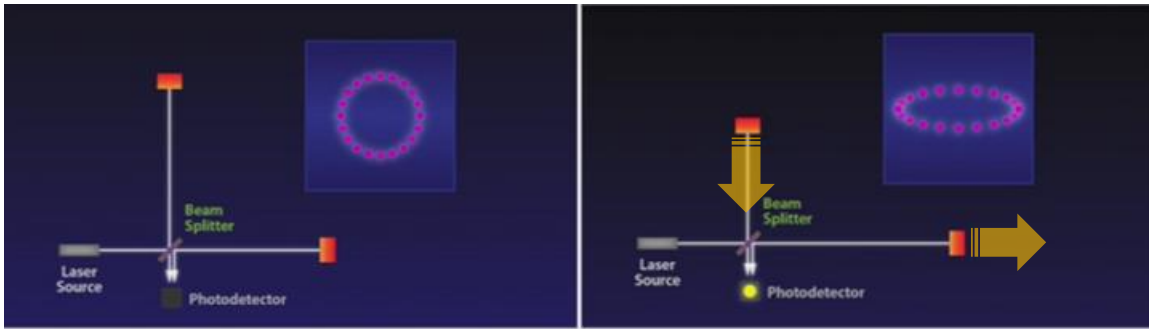
La première situation semble intéressante au niveau du cercle bleu. Le coefficient directeur de la courbe amplitude en fonction du déplacement est plus grand, d'où une sensibilité meilleure. C'est d'ailleurs ce que l'on observe. Mais l'amplitude importante du signal à cet endroit limite son amplification. Ce qui est gagné d'un côté est perdu de l'autre !

On verra plus loin que le point de fonctionnement de l'interféromètre doit se trouver dans la zone encerclée en rouge. On voit donc par cette simulation que dans le cas d'Advanced Arago, on ne gagne rien avec les miroirs de recyclage ! Nous les abandonnons à regret !

5. Détection des ondes gravitationnelles

Une onde gravitationnelle dans notre laboratoire

Lorsque les ondes gravitationnelles traversent la Terre, l'espace-temps est alternativement contracté et étiré dans les directions perpendiculaires à la direction de propagation.



Source : <http://physics.aps.org/assets/8cbf3dfb-7849-485b-8626-1276bc044ddf/video1.mp4>

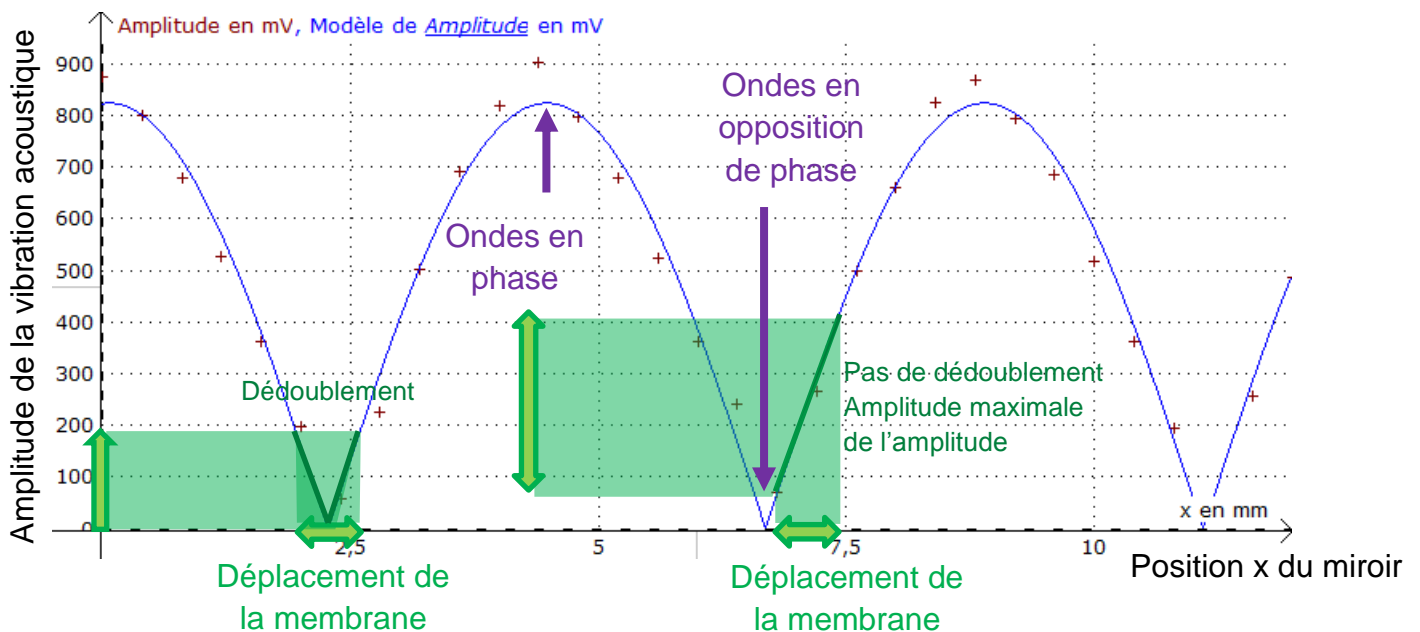
Lors du passage de l'onde dans l'interféromètre, le déphasage des deux faisceaux interférant est modifié, et l'intensité lumineuse reçue par le photo-détecteur change.

Pour simuler le passage d'une onde gravitationnelle dans notre interféromètre, nous avons alimenté les deux haut-parleurs avec deux tensions alternatives inversées. Lorsqu'une membrane se rapproche de la séparatrice, l'autre s'en éloigne et inversement.

Le capteur ultrason détecte alors une intensité ultrasonore variant avec la même fréquence que celle des haut-parleurs.

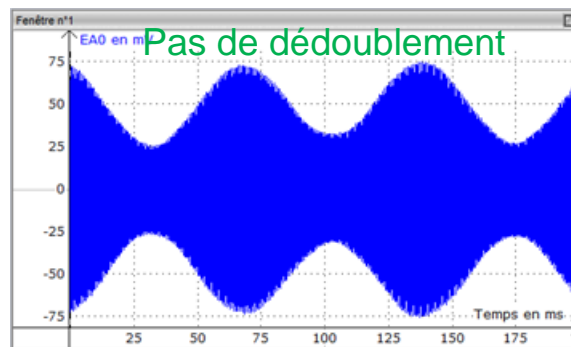
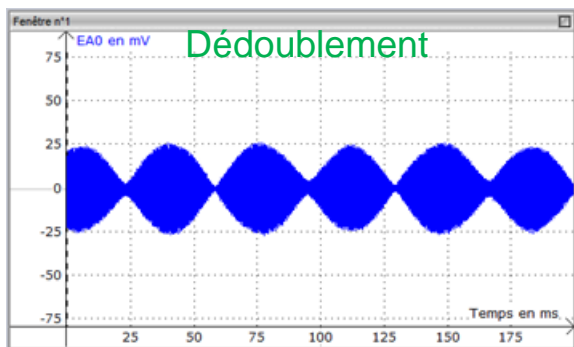


Point de fonctionnement de l'interféromètre :



Représentation de l'amplitude détectée en fonction de la position x d'un des miroirs.

Comme dans Virgo, il faut positionner les miroirs de telle sorte que les ondes interférant soient presque en opposition de phase. C'est à cet endroit que l'on pourra amplifier le plus les variations du signal détecté. Si les ondes sont en opposition de phase, on observe un dédoublement du signal.



6. Vibration de l'espace-temps, quelle fonction mathématique ?

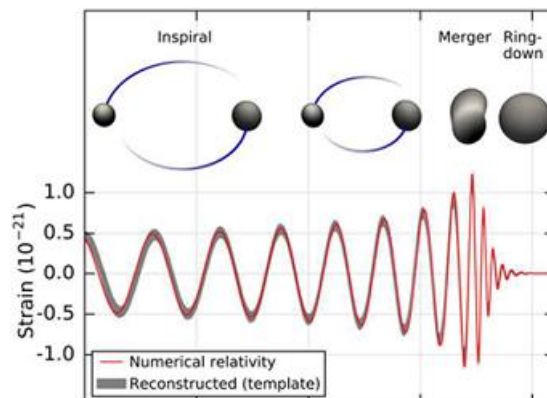
Allure de la vibration

Il faut simuler une onde gravitationnelle pour ensuite la détecter à l'aide de notre interféromètre.

Mais quelle fonction mathématique correspond à la vibration de l'espace-temps due à la fusion de 2 trous noirs par exemple ?

La publication PHYSICAL REVIEW LETTERS du 12 février 2016 donne l'allure de la fonction. Au cours de la fusion, les trous noirs tournent à une certaine fréquence, ils se rapprochent et tournent de plus en plus vite jusqu'à fusionner. Le phénomène s'arrête alors.

La vibration de l'espace-temps correspond à une fonction sinusoïdale dont la fréquence et l'amplitude augmentent comme l'indique ce schéma :



Source : PHYSICAL REVIEW LETTERS 12 février 2016

Pour simuler l'onde gravitationnelle, Nicolas Arnaud chercheur à l'observatoire européen des ondes gravitationnelles (EGO) nous fournit les documents nécessaires :

Tutorials on GW data analysis : Parameswaran Ajith and Archisman Ghosh

International Centre for Theoretical Sciences, Tata Institute of Fundamental Research, Bangalore 560012, India.(July 7, 2015)

Fonction pour générer des ondes gravitationnelles

Le document indique que le signal GW peut être calculé ainsi : $h(t) = A(t) \cos \varphi(t)$

$$\text{avec } A(t) = \frac{4\mathcal{M}^{5/3}\pi^{2/3}F(t)^{2/3}}{D} \text{ et } \varphi(t) = \varphi_0 - 2\left(\frac{1}{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}} - \frac{t}{5\mathcal{M}}\right)^{5/8}$$

où \mathcal{M} est la *chirp mass* : $\mathcal{M} = \mu^{3/5}M^{2/5}$

avec la masse réduite $\mu = \frac{m_1m_2}{M}$ et la masse totale $M = m_1 + m_2$

Ces relations permettent de déterminer la vibration de l'espace-temps par $h(t)$ (voir les calculs en annexe).

En prenant $\varphi_0 = 0$ on obtient :

$$\cos \varphi(t) = \cos \left((10,05 F_0 t_c) \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8} \right)$$

L'évolution de la fréquence est donnée par :

$$F(t) = \frac{F_0}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{3/8}}$$

t_c se nomme le temps de coalescence :

$$t_c = \frac{9,23 \cdot 10^{-4}}{F_0^{8/3} \mathcal{M}^{5/3}}$$

Cas où les deux objets fusionnant on la même masse m

$M = m_1 + m_2 = 2m$, $\mu = \frac{m_1m_2}{M} = \frac{M}{4}$ et $\mathcal{M} = \mu^{3/5}M^{2/5} = \frac{M}{4^{3/5}}$. Dans ce cas,

$$t_c = \frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{F_0^{8/3} M^{5/3}}$$

Dans ces relations, les grandeurs sont données en unités géométrisées :

$1M_\odot = 4,93 \cdot 10^{-6}$ s et $1\text{Mpc} = 1,03 \cdot 10^{14}$ s

D'où l'amplitude de la vibration :

$$A(t) = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{F_0^2 t_c D} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} \quad (\text{avec } D \text{ en Mpc})$$

Finalement :

$$h(t) = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{F_0^2 t_c D} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} \cos \left((10,05 F_0 t_c) \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8} \right)$$

Vérification des calculs avec l'exemple donné

Le document propose un exemple de fonction $h(t)$:

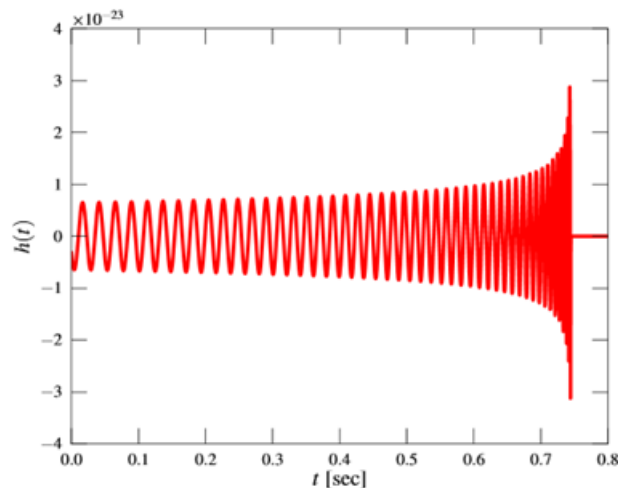
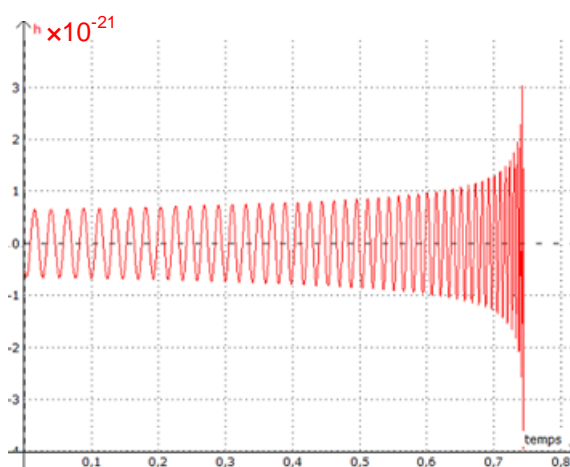


FIG. 1: An example of a “Newtonian chirp”, with chirp mass $M = 10M_{\odot}$, distance $D = 100$ Mpc, initial phase $\varphi_0 = 0$ and start frequency $F_0 = 40$ Hz.

si $M = 10M_{\odot}$ et $F_0 = 40$ Hz alors $M = \mathcal{M} \times 4^{3/5} = 23,0 M_{\odot}$ d'où $t_c = \frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{40^{8/3} (23,0 \times 4,93 \cdot 10^{-6})^{5/3}} = 0,744$ s

$$h(t) = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{40^2 \times 0,744 \times 100} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} \cos\left(\left(10,05 \times 40 \times 0,744\right) \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8}\right) = \frac{0,646 \cdot 10^{-21}}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} \cos\left(299 \times \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8}\right)$$

Voici la courbe $h(t)$ correspondante :



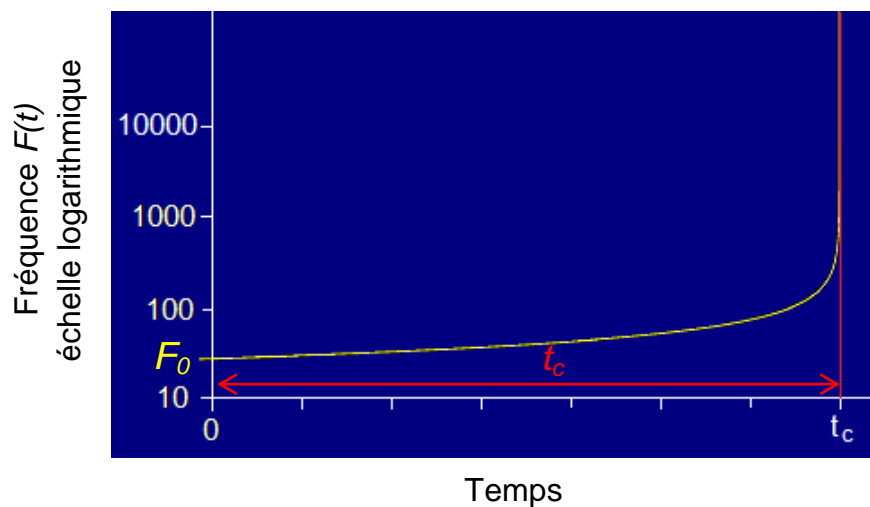
Courbe obtenue avec $D = 100$ Mpc; $F_0 = 40$ Hz et $t_c = 0,744$ s

Celle-ci est identique à celle donnée en exemple, ce qui valide nos calculs.

Vérification de la théorie avec la réalité

L'évolution de la fréquence est donnée par la relation (voir Annexes) :

$$F(t) = \frac{F_0}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{3/8}}$$



Évolution au cours du temps de la fréquence de la fonction $h(t)$

La fréquence de la fonction $h(t)$ égale à F_0 à un instant considéré comme initial augmente brusquement à l'instant de coalescence t_c , le spectrogramme correspond à ce graphique et est appelé « chirp » (littéralement gazouillis car l'évolution de la fréquence rappelle le cri d'un oiseau !).

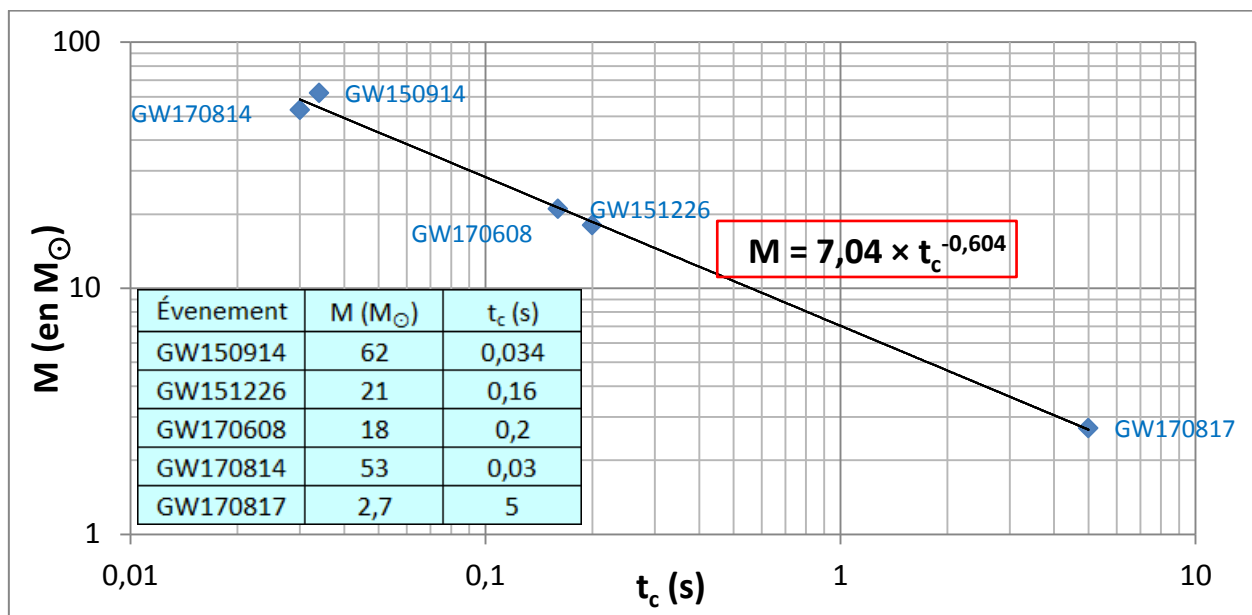
On peut ainsi déterminer l'un des deux paramètres connaissant l'autre sur des spectrogrammes de signaux réellement détectés et ainsi vérifier les équations théoriques.

Spectrogrammes des ondes gravitationnelles détectées par LIGO/Virgo

GW150914		
14 septembre 2015		Coalescence de deux trous noirs. $1,3 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 29 + 36 \rightarrow 62 (+ 3).
<p>Frequency (Hz) 512 256 128 64 32</p> <p>Hanford</p> <p>0.30 0.35 0.40 0.45</p> <p>Time (s)</p>	<p>Livingston</p> <p>0.30 0.35 0.40 0.45</p> <p>Time (s)</p>	
GW151226		
26 décembre 2015		Coalescence de deux trous noirs. $1,4 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 14,2 + 7,5 \rightarrow 20,8 (+ 1).
<p>Frequency (Hz) 512 256 128 64 32</p> <p>Hanford</p> <p>1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.0</p> <p>Time (s)</p>	<p>Livingston</p> <p>1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.0</p> <p>Time (s)</p>	
GW170608		
8 juin 2017		Coalescence de deux trous noirs. $0,7$ à $1,5 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 12 + 7 \rightarrow 18 (+ 1).
<p>Frequency (Hz) 500 100 50</p> <p>LIGO-Hanford</p> <p>-1.5 -1 -0.5 0</p> <p>Time (s)</p>	<p>LIGO-Livingston</p> <p>-1.5 -1 -0.5 0</p> <p>Time (s)</p>	
GW170814		
14 août 2017		Coalescence de deux trous noirs. $1,8 \times 10^9$ al ; bilan (M_{\odot}) : 25 + 31 \rightarrow 53 (+ 3).
<p>Frequency [Hz] 256 128 64 32 16</p> <p>LIGO-Hanford</p> <p>0.46 0.48 0.50 0.52 0.54 0.56</p> <p>Time [s]</p>	<p>LIGO-Livingston</p> <p>0.46 0.48 0.50 0.52 0.54 0.56</p> <p>Time [s]</p>	<p>Virgo</p> <p>0.46 0.48 0.50 0.52 0.54 0.56</p> <p>Time [s]</p>
GW170817		
17 août 2017		Coalescence de deux étoiles à neutrons. $1,3 \times 10^8$ al ; bilan (M_{\odot}) : 1,2 + 1,5 \rightarrow 2,7 (+ 0,025).
<p>Frequency (Hz) 500 100 50</p> <p>LIGO-Hanford</p> <p>-30 -20 -10 0</p> <p>Time (seconds)</p>	<p>LIGO-Livingston</p> <p>-30 -20 -10 0</p> <p>Time (seconds)</p>	<p>Virgo</p> <p>-30 -20 -10 0</p> <p>Time (seconds)</p>

On a repéré la fréquence $F_0 = 64$ Hz (en jaune) pour l'évaluation des temps de coalescence t_c .

Sur les 5 événements détectés par LIGO-VIRGO dont on dispose les spectrogrammes ainsi que les masses des deux astres fusionnant, on essaie de déterminer graphiquement le temps de coalescence t_c pour une fréquence initiale commune $F_0 = 64\text{Hz}$.



Modélisation de M en fonction de t_c (évalué) pour $F_0 = 64\text{Hz}$

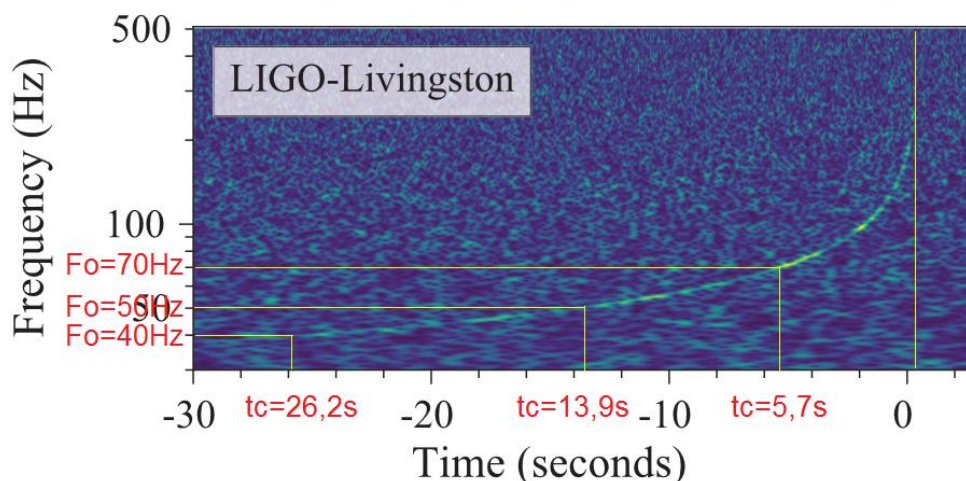
$$t_c = \frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{F_0^{8/3} M^{5/3}} \Rightarrow M = \frac{3,47 \cdot 10^{-2}}{t_c^{3/5} F_0^{8/5}}$$

Pour une fréquence initiale F_0 identique, on vérifie bien que la masse du système est proportionnelle à $t_c^{-3/5}$, soit :

$$M = k \times t_c^{-3/5} = k \times M^{-0,6}$$

Application à la détermination de la masse totale d'objets fusionnant

C'est avec la fusion de deux étoiles à neutrons, GW170817 que nous avons le « plus beau » chirp :



Source :Ligo.org

$M = \frac{3,47 \cdot 10^{-2}}{t_c^{3/5} F_0^{8/5}}$ donc $t_c^{3/5} F_0^{8/5}$ doit être constant en tout point du chirp.

F_0 (Hz)	40	50	70
t_c (s)	26,2	13,9	5,7
$t_c^{3/5} F_0^{8/5}$ (s^{-1})	2600	2540	2550

Pour ce signal, $t_c^{3/5} F_0^{8/5}$ est sensiblement constant, la théorie est donc vérifiée.

Sa valeur moyenne est $t_c^{3/5} F_0^{8/5} = 2560 \text{ s}^{-1}$.

On peut alors déterminer la masse totale M des étoiles à neutrons ayant fusionné :

$$M = \frac{3,47 \cdot 10^{-2}}{t_c^{3/5} F_0^{8/5}} = \frac{3,47 \cdot 10^{-2}}{2560} = 1,36 \cdot 10^{-5} \text{ s} = \frac{1,36 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{4,93 \cdot 10^{-6} \text{ s} / M_\odot} = 2,75 M_\odot$$

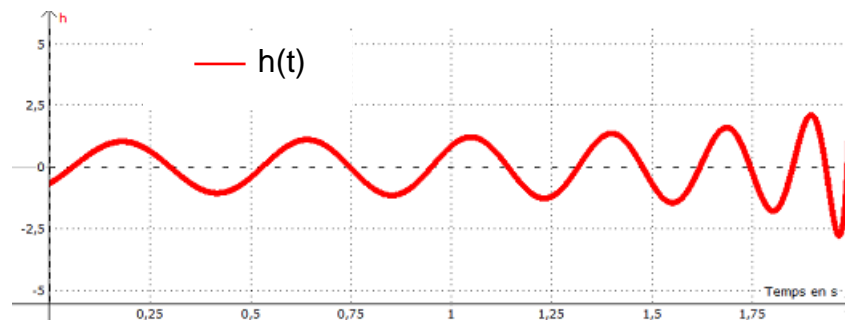
Elle correspond bien la valeur déterminée par les scientifiques : $M = 2,74 M_\odot$ (source Wikipédia)

Simulation du passage d'une onde gravitationnelle

A l'aide de la carte d'acquisition de LatisPro, on génère une tension U(t) produite ainsi :

$$h = 1 * (1 / (1 - \text{temps} / t_c)^{1/4}) * \cos(10,05 * F_0 * t_c * (1 - \text{temps} / t_c)^{5/8})$$

Cette tension amplifiée en puissance est envoyée aux haut-parleurs afin de créer le passage d'une onde gravitationnelle.



Vibration test : $F_0 = 2 \text{ Hz}$ et $t_c = 2 \text{ s}$

Les signaux émis pour moduler les ultrasons étant dans le domaine des ondes audibles, notre laboratoire se transforme en forêt amazonienne remplie de chants d'oiseaux exotiques !

7. Détection de la vibration

Pour cette partie, il faut réaliser un montage électronique permettant de démoduler le signal ultrasonore. Il comporte 5 parties :

- **Un amplificateur**

L'amplitude de la tension d'entrée est d'environ 100mV et le détecteur d'enveloppe ne fonctionne pas avec une si faible amplitude. Une amplification jusqu'à 100, avec $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ et $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ donne de bons résultats.

- **Un détecteur d'enveloppe**

La constante de temps $\tau = RC$ doit satisfaire :

$$\frac{T_{\text{minmodulation}}}{10} > \tau > 10 \cdot T_{\text{porteuse}}$$

$$T_{\text{minmodulation}} = 1/f_{\text{vibration}} \approx 1/1000 \text{ Hz} \approx 10^{-3} \text{ s}$$

$$T_{\text{porteuse}} = 1/f_{\text{ultrason}} = 1/40 \text{ kHz} = 2,5 \times 10^{-5} \text{ s}$$

$$RC = 10^{-4} \text{ est optimum. Avec } C = 0,1 \mu\text{F} = 10^{-7} \text{ F il faut } R = 10^{-4} / 10^{-7} = 10^3 \Omega = 1 \text{ k}\Omega$$

- **Un détecteur de variation**

Un condensateur de $1 \mu\text{F}$ ne transmet que les variations de tension et supprime la partie continue.

- **Un suiveur**

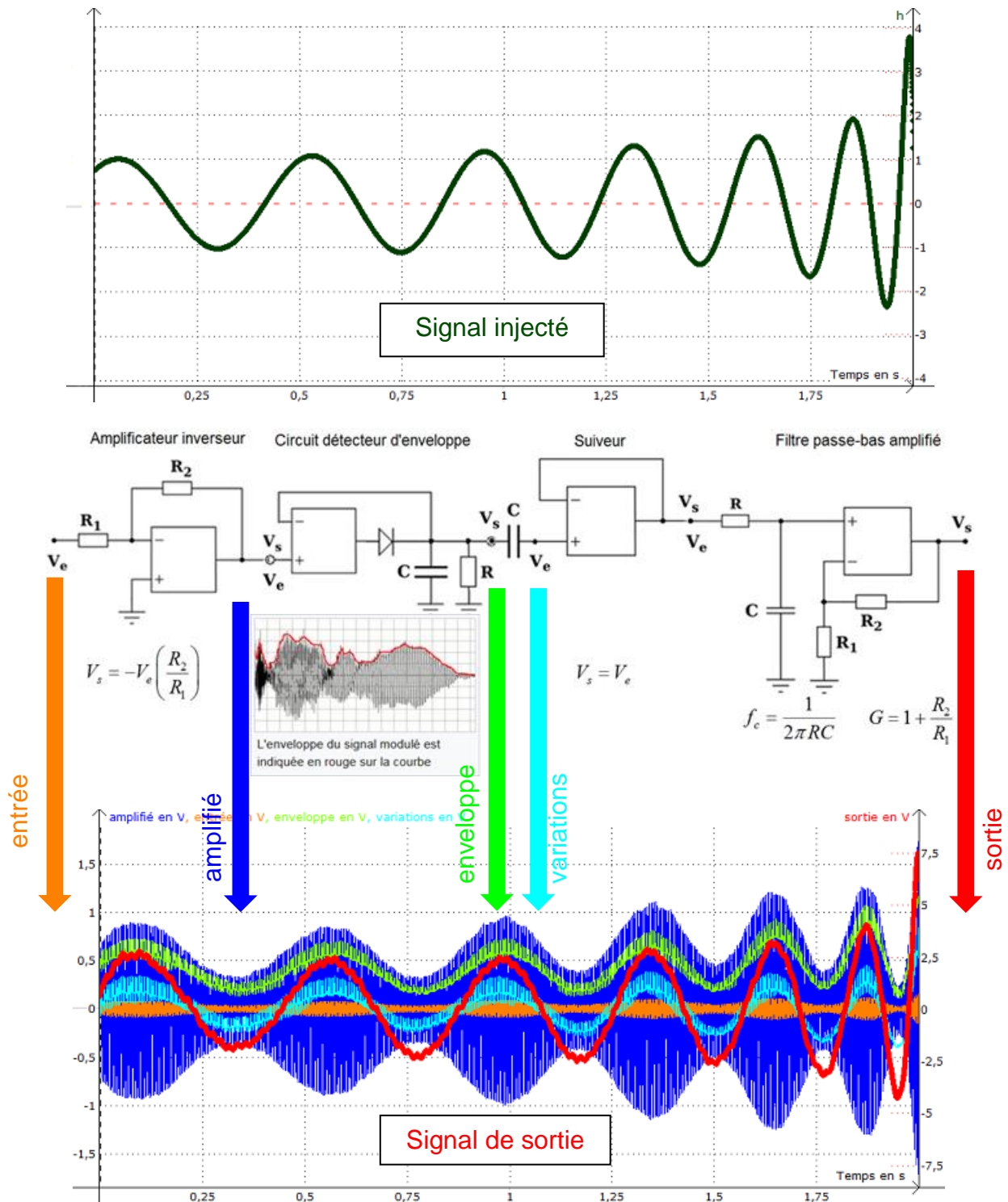
Pour isoler le condensateur de l'amplificateur suivant qui en modifie le fonctionnement.

- **Un filtre passe-bas amplificateur**

Sa fréquence de coupure est $f_c = 1/2\pi RC$. Il permet d'éliminer efficacement les restes de 40kHz.

Si on veut $f_c = 1\text{kHz}$, $2\pi RC = 10^{-3}$ s, avec $C = 20\text{nF}$, il faut $R \approx 10\text{ k}\Omega$.

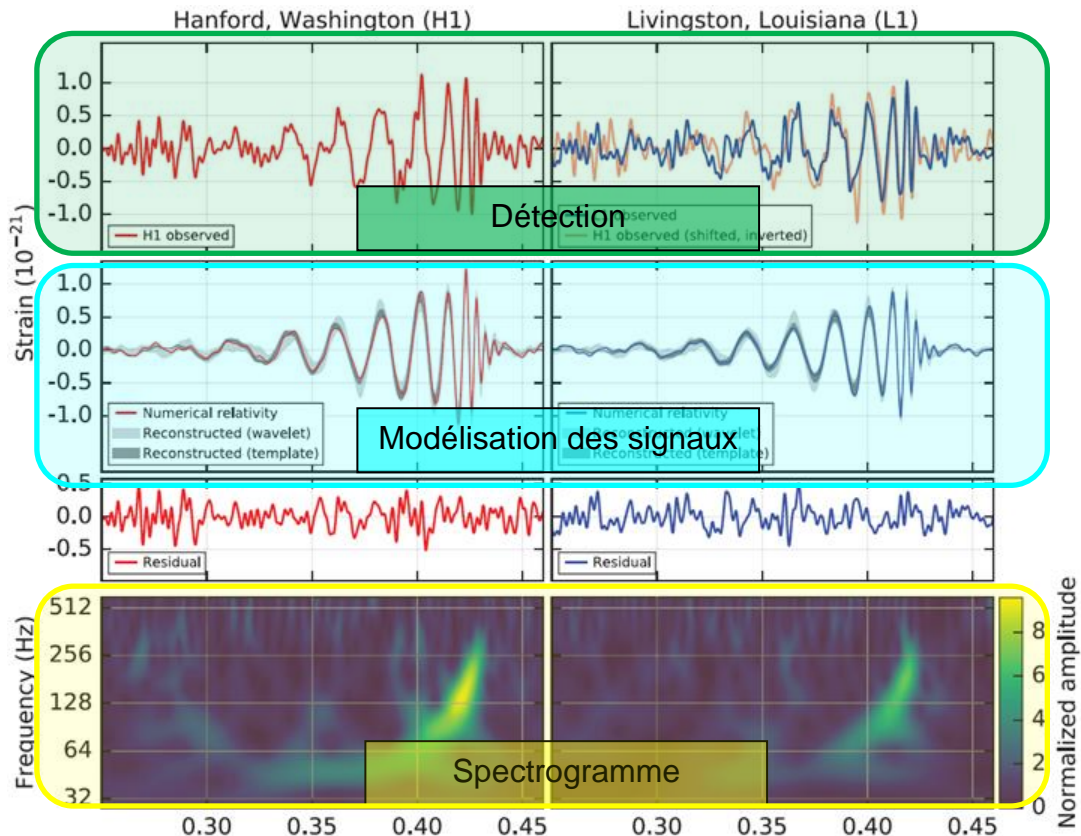
Le gain $G = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1 + \frac{10\text{k}\Omega}{1\text{k}\Omega} = 11$ multiplie par 11 la tension pour obtenir quelques volts d'amplitude en sortie.



Principe et circuit de détection des ondes gravitationnelles générées :

8. Signaux reçus

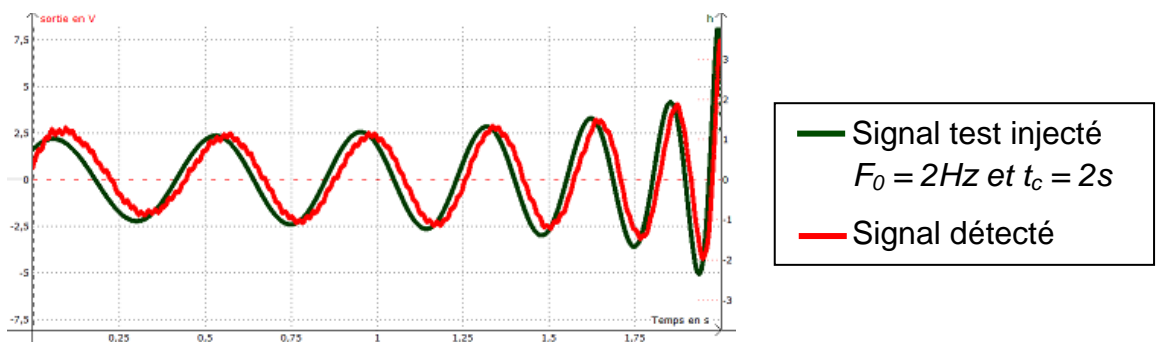
Voici les signaux détectés le 14 septembre 2015 par les détecteur LIGO :



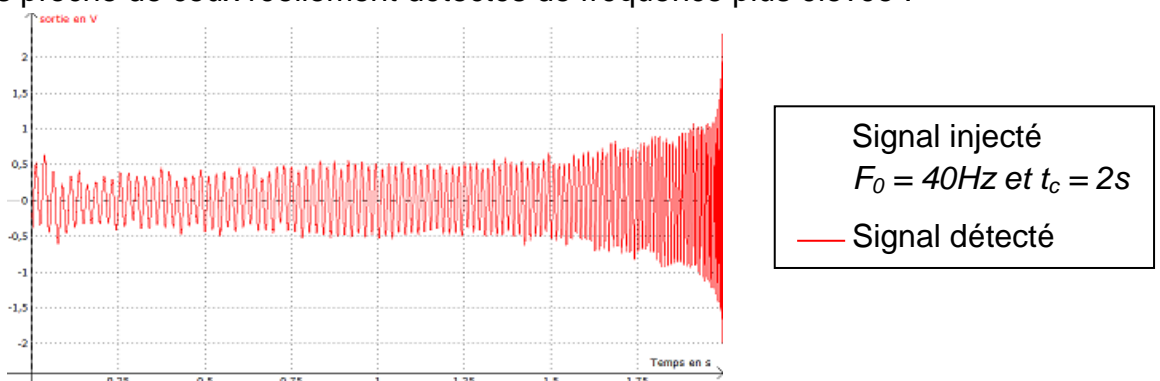
Source : PHYSICAL REVIEW LETTER 12 février 2016

Pour déterminer les paramètres de « l'événement cataclysmique » (masse des trous noirs : 30 masse solaire chacun, distance à la Terre : 1,3 milliard d'années-lumière), les scientifiques ont modélisé les signaux reçus (Numerical relativity). On fait de même sur notre signal reçu et sur son spectrogramme.

On travaille sur le signal test suivant :



Et sur un signal plus proche de ceux réellement détectés de fréquence plus élevée :

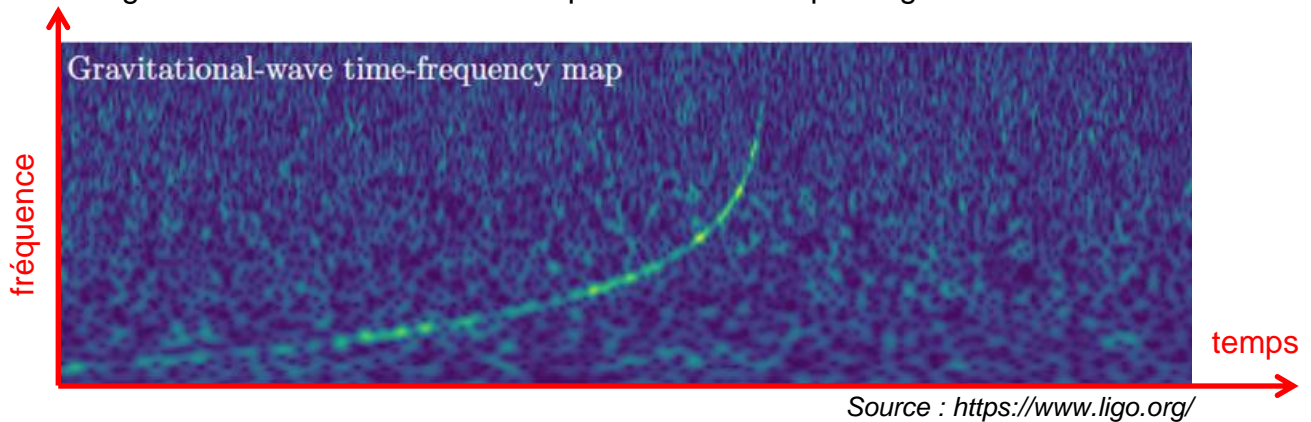


9. Détermination des caractéristiques de l'événement détecté

Analyse spectrale

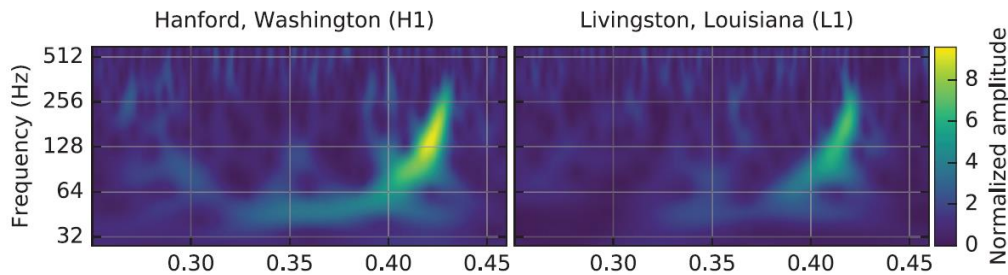
On procède utilise la technique de veille utilisée par LIGO et VIRGO :

L'évolution de la fréquence de la vibration en fonction du temps est caractéristique. Si on représente le spectre du signal détecté en fonction du temps on obtient le spectrogramme ci-dessous :



Cette allure particulière est la signature de la coalescence de deux corps célestes.

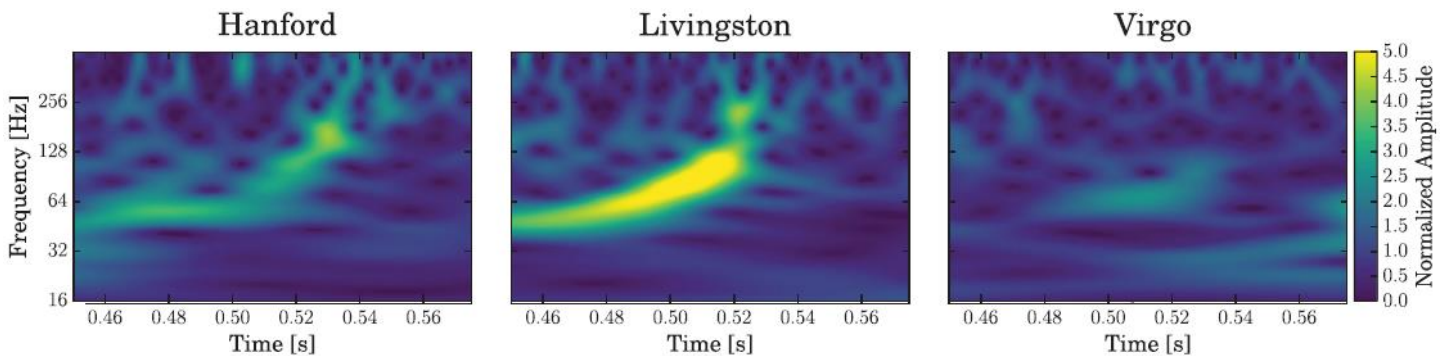
Événement du 14 septembre 2015 : PHYSICAL REVIEW LETTERS 12 février 2016



black hole masses are $36_{-4}^{+5}M_{\odot}$ and $29_{-4}^{+4}M_{\odot}$

distance of 410_{-180}^{+160} Mpc

Événement du 14 aout 2017 : PHYSICAL REVIEW LETTERS 6 octobre 2017



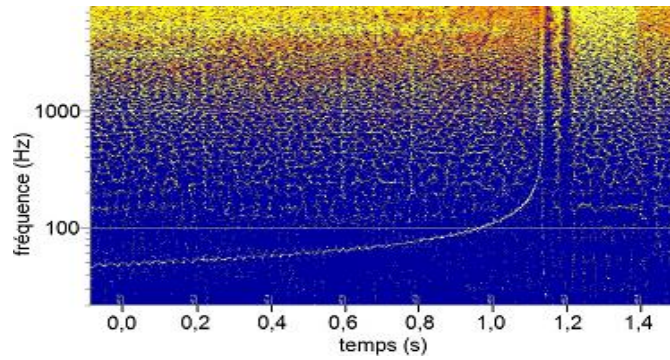
masses of the initial black holes are $30.5_{-3.0}^{+5.7}M_{\odot}$ and $25.3_{-4.2}^{+2.8}M_{\odot}$

distance of the source is 540_{-210}^{+130} Mpc.

Notree signal détecté est envoyé à la carte son d'un ordinateur, le logiciel SpectrumLab permet d'obtenir son spectrogramme avec beaucoup de finesse.

Événement du 15 novembre 2018 : CONCOURS CGénial 2019

Détecté uniquement au lycée Aragon (à l'aide du logiciel SpectrumLab)



masse totale $M = 12,7 M_{\odot}$

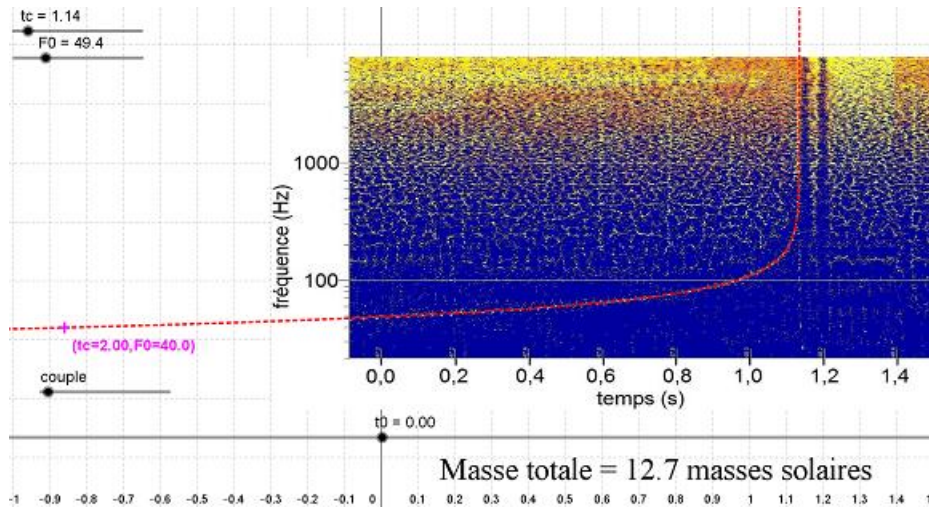
distance à la source : $D = 390\,000\text{ km}$

Comment déterminer la masse totale du système : M ?

L'évolution de la fréquence au cours du temps est donné par :

$$F(t) = \frac{F_0}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{3/8}}$$

Sur un logiciel de géométrie dynamique (Geogebra), nous avons modélisé cette courbe. On fait tout d'abord correspondre les abscisses (le temps) et les ordonnées (la fréquence). Puis, avec des curseurs agissant sur les paramètres F_0 et t_c du modèle, nous superposons celui-ci à notre spectrogramme. On obtient ainsi les caractéristiques du chirp :



En rouge : le modèle se superpose parfaitement

La modélisation donne : $t_c = 1,14\text{s}$ et $F_0 = 49,4\text{Hz}$ ce qui permet de calculer la masse totale du système fusionnant.

$$M = \frac{3,47 \cdot 10^{-2}}{t_c^{3/5} F_0^{8/5}} = \frac{3,47 \cdot 10^{-2}}{1,14^{3/5} 49,4^{8/5}} = 6,25 \cdot 10^{-5} s = \frac{6,25 \cdot 10^{-5} s}{4,93 \cdot 10^{-6} s / M_{\odot}} = 12,7 M_{\odot}$$

Comment déterminer la distance à la source : D ?

On peut maintenant utiliser F_0 et t_c dans la modélisation du signal détecté correspondant à $h(t)$:

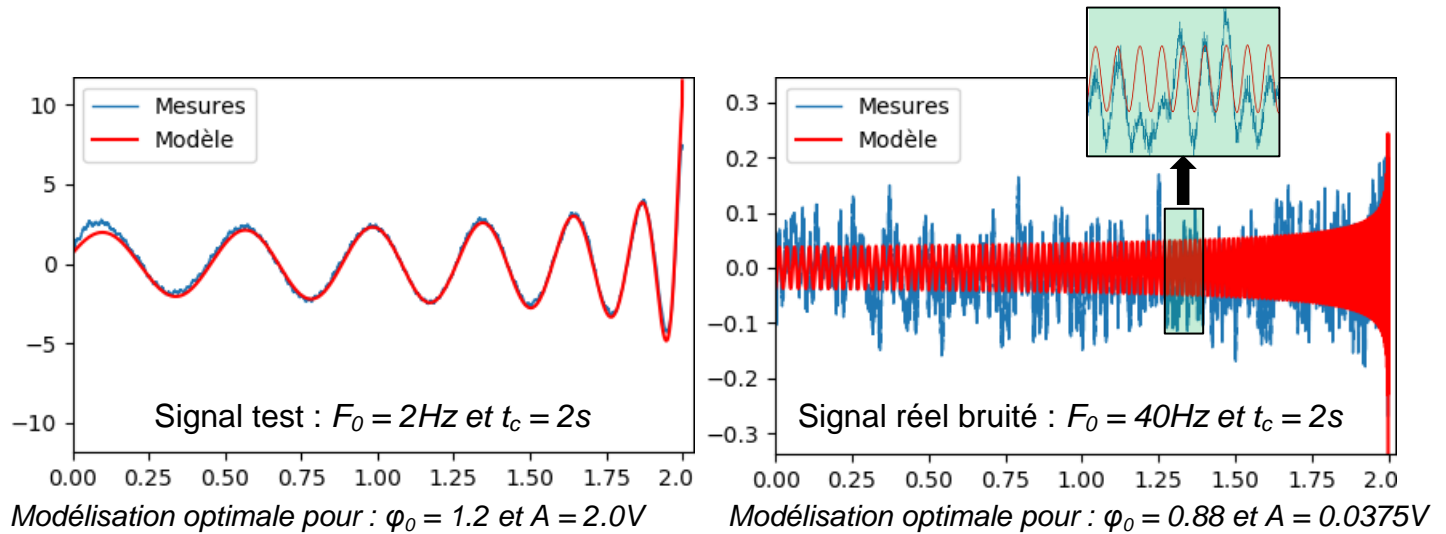
$$h(t) = \frac{A}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} \cos\left(\varphi_0 - (10,05 F_0 t_c) \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8}\right) \quad \text{avec} \quad A = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{F_0^2 t_c D}$$

pour rechercher l'amplitude A et ainsi déterminer la distance D à laquelle s'est produite la fusion.

L'outil de modélisation de LatisPro n'étant pas très performant et ne fonctionnant pas avec un signal trop bruité, nous réalisons notre propre outil de modélisation programmé en python.

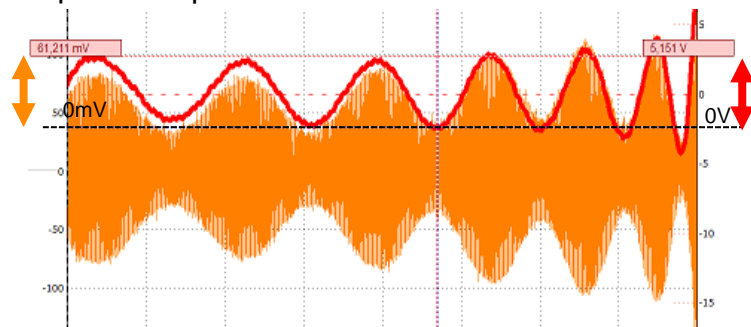
On rentre par l'intermédiaire d'un fichier csv les valeurs de la tension de sortie du détecteur au cours du temps et on récupère les paramètres optimaux pour la phase à $t=0$: φ_0 et pour l'amplitude : A .

Nous testons notre programme avec les signaux de fréquences F_0 et d'amplitudes différentes.



À gauche un signal test pour bien faire comprendre le principe, à droite un signal plus réel d'amplitude beaucoup plus faible correspondant à notre événement du 15 novembre 2018 !

On peut maintenant calculer à quelle distance s'est situé cet événement créant cette perturbation de l'espace-temps :



Notre montage amplifie une variation d'amplitude de la tension de 61mV (orange) en une tension d'amplitude 5,15V (rouge), soit une amplification par 84.

Compte tenu de l'amplification par 84 et de la sensibilité du détecteur : 0,86mm/V (voir paragraphe suivant), une amplitude du signal de sortie de 0,0375V correspond à une vibration de notre interféromètre de $(0,0375/84) \times 0,86 = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{mm} = 0,39 \mu\text{m}$

En fait A est l'amplitude relative. La longueur d'un bras de notre interféromètre étant de 20cm.

$$A = \frac{0,39 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-2}} = 1,9 \cdot 10^{-6}$$

Nous avons vu la relation entre l'amplitude A de la vibration de l'espace avec la distance D à laquelle a eu lieu le phénomène :

$$A = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{F_0^2 t_c D}$$

$$\text{D'où } D = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{F_0^2 t_c A} = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{40^2 \times 2 \times 1,9 \cdot 10^{-6}} = 1,3 \cdot 10^{-14} \text{Mpc}$$

Soit une distance $D = 390\,000 \text{ km}$ correspondant à la distance Terre-Lune !

Notre programme Python calcule directement cette distance à partir de l'amplitude A du modèle du signal détecté.

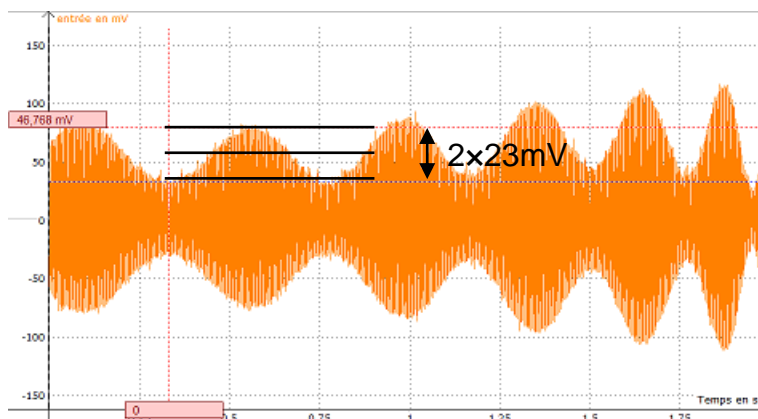
Un tel signal correspondrait donc à la fusion de 2 trous noirs de masse 6,3 fois la masse du Soleil à une distance de 390 000 km !

10. Sensibilité de l'interféromètre

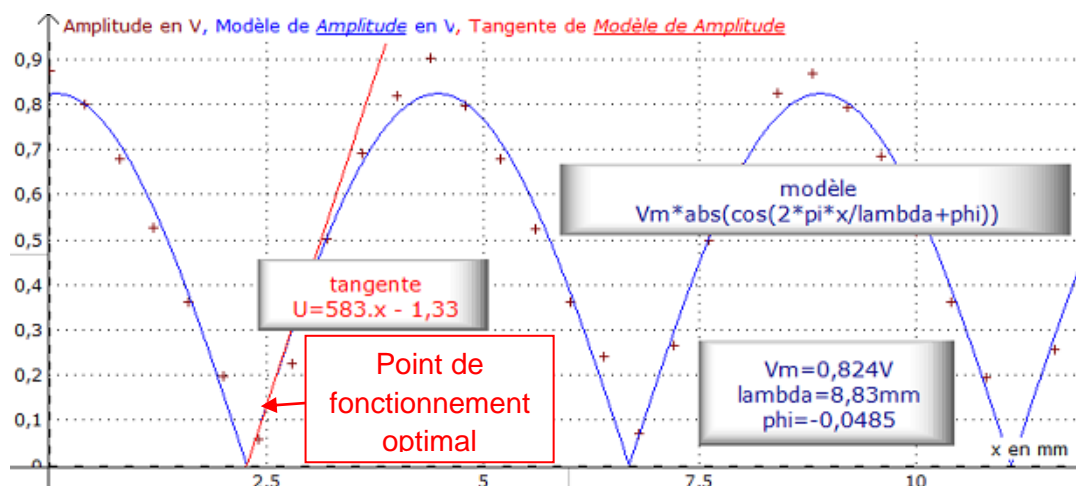
Pour une tension $U(t)$ envoyée aux haut-parleurs d'amplitude 1V à $t=0$:

$$h=1*(1/(1-\text{temps}/tc)^{(1/4)})*\cos(10,05*F0*tc*(1-\text{temps}/tc)^{(5/8)})$$

On récupère un signal d'amplitude 23mV à la même date.



La réponse du détecteur d'ultrasons est :



Au point de fonctionnement optimal, le coefficient directeur est d'environ **583mV/mm**, soit un déplacement de la membrane de $1/583 = 1,72\text{mm/V}$ ou la moitié lorsque les deux membranes sont en opposition : $0,86\text{mm/V}$

À 23mV correspond donc un déplacement de $0,023\text{V} \times 0,86\text{mm/V} = 0,020\text{mm}$ de chacune des deux. Ceci pour une tension de 1V envoyée aux haut-parleurs.

On génère des tensions sinusoïdales de fréquence f d'amplitude de plus en plus petite, jusqu'à ne plus pouvoir observer le spectrogramme de cette fréquence (un trait horizontal) dans Spectrumlab.

Exemple, pour $f = 100\text{Hz}$, bien que gêné par la première harmonique du 50 Hz, on arrive à observer le signal jusqu'à une tension envoyée aux haut-parleurs d'amplitude 0,01V.

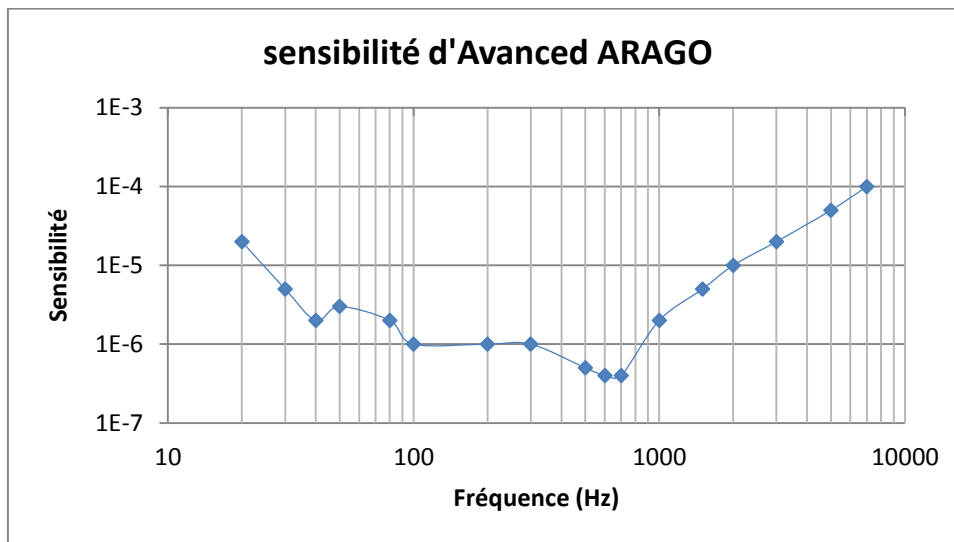
Cela correspond à un déplacement de chacune des membranes de :

$$0,01\text{V} \times 0,020\text{mm/V} = 0,0002\text{mm}$$

La longueur modeste de notre interféromètre est 20cm.

À la fréquence $f = 100\text{Hz}$, la sensibilité relative est donc $0,0002\text{mm} / 200\text{mm} = 10^{-6}$

On peut représenter cette sensibilité en fonction de la fréquence :



Celle-ci est limitée d'un côté par Spectrumlab dédié aux sons audibles qui ne nous permet pas une bonne analyse des signaux de basse fréquence et de l'autre par notre circuit de détection qui utilise un filtre passe bas pour éliminer le 40kHz.

Le 50Hz est un plus difficilement détectable à cause de sa pollution ambiante.

A 600Hz, on atteint une sensibilité de 4.10^{-7} , c'est-à-dire qu'on met en évidence des vibrations d'amplitude inférieure à $0,08\mu\text{m}$, soit le $100\,000^{\text{ème}}$ de la longueur d'onde des ultra-sons. On n'est pas au 10^{-21} d'Advanced Virgo ou d'Advanced Ligo, mais nous sommes tout de même fiers de notre détecteur Advanced Arago !

11. Conclusion

Ce projet a été très enrichissant pour chacun d'entre nous : il nous a donné l'occasion de nous plonger dans un domaine de la physique du XXI^{ème} siècle qui a eu un grand retentissement médiatique, avec notamment un prix Nobel. Nous avons en effet eu la chance d'assister aux balbutiements d'un tout nouveau domaine de l'astronomie. Ainsi, nous avons pu apporter notre pierre à la diffusion de ce savoir en proposant un montage très réaliste reproductible dans n'importe quel lycée. Nous avons également eu la chance d'échanger avec un chercheur spécialiste de la discipline qui s'est mis à notre niveau, nous a encouragés et nous a communiqué sa passion.

Ainsi, aujourd'hui nous sommes capables de comprendre et d'expliquer l'origine des ondes gravitationnelles et leur détection, ce qui nous semblait complètement inabordable il y a quelques mois.

Enfin, mener à bien ce projet nous a appris à travailler en équipe, résoudre les problèmes rencontrés, formuler des hypothèses, les tester, puis en tirer des conclusions rigoureuses. Autant de démarches qui sont à la base de toute science. Ainsi, au terme de ce projet, nous sommes habités par un sentiment de fierté. En effet, nous avons l'impression intime que pour la première fois, nous pouvons affirmer que nous nous sommes sentis comme de "vrais" scientifiques car ce projet ne consistait pas à reproduire simplement une expérience : personne n'a certainement jamais construit de "Michelson sonore", nous avançons dans l'inconnu, pionniers à notre échelle. Ainsi, ce projet a allumé en nous l'excitation émerveillée propre à la recherche et a exacerbé notre amour pour les sciences.

Remerciements

Pour nous avoir permis d'arriver au bout de ce projet, nous remercions vivement :

- Nicolas Arnaud, chercheur CNRS à l'European Gravitational Observatory sur VIRGO pour ses encouragements et pour les explications claires et rapides qu'il nous a fournies. Tout au long de nos travaux, il nous a apporté son aide dans la compréhension des phénomènes.
- Ludovic Py agent au lycée pour avoir réalisé les supports de notre interféromètre.
- Catherine et Patricia laborantines du lycée pour leur disponibilité à nous sortir du matériel, pour leur tolérance pour avoir envahi une partie du laboratoire pendant plus d'un an !
- Jean-Louis Rault de la Société Astronomique de France pour les échanges que nous avons eus afin d'utiliser SpectrumLab.
- Samuel Laurent notre professeur de mathématiques pour son aide sur les sommes de fonctions sinusoïdales.
- Alain Froidurot notre professeur de physique au lycée pour son enthousiasme communicatif et sa disponibilité.

Bibliographie :

- CNRS Communiqué de presse national du 11 février 2016
- Les défis du CEA N°206 avril 2016
- PHYSICAL REVIEW LETTERS - 12 february 2016
- PHYSICAL REVIEW LETTERS - 6 october 2017
- PHYSICAL REVIEW LETTERS - 20 october 2017

Sitographie :

- <https://lejournel.cnrs.fr>
- <https://www.ligo.org/>
- <http://www.virgo-gw.eu/>
- <https://physics.aps.org/assets/8cbf3dfb-7849-485b-8626-1276bc044ddf/video1.mp4>
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Circuit_d%C3%A9tecteur_d%27enveloppe
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Montages_de_base_de_l%27amplificateur_op%C3%A9rationnel
- <http://www.learningaboutelectronics.com/LesArticles/Calculatrice-de-filtre-passe-bas.php>
- Tutorials on GW data analysis :
https://www.nikhef.nl/~vdbroeck/GW_cursus/Werkcollege_5.pdf

ANNEXES

Fonction pour générer des ondes gravitationnelles (détail des calculs)

Le document indique que le signal GW peut être calculé ainsi $h(t) = A(t) \cos \varphi(t)$

avec $A(t) = \frac{4\mathcal{M}^{5/3} \pi^{2/3} F(t)^{2/3}}{D}$ et $\varphi(t) = \varphi_0 - 2 \left(\frac{1}{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}} - \frac{t}{5\mathcal{M}} \right)^{5/8}$

où \mathcal{M} est la chirp mass : $\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5}$

avec la masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ et la masse totale $M = m_1 + m_2$

Ces relations permettent de déterminer la vibration de l'espace-temps par $h(t)$.

$$\varphi(t) = \varphi_0 - 2 \left(\frac{1}{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}} - \frac{t}{5\mathcal{M}} \right)^{5/8} = \varphi_0 - 2 \left(\frac{1}{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}} \left(1 - \frac{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3} t}{5\mathcal{M}} \right) \right)^{5/8}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 - 2 \left(\frac{1}{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3}} \right)^{5/8} \left(1 - \frac{256(\pi\mathcal{M}F_0)^{8/3} t}{5\mathcal{M}} \right)^{5/8}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 - 2 \left(\frac{1}{2^5 (\pi\mathcal{M}F_0)^{5/3}} \right) \left(1 - \frac{256\mathcal{M}^{5/3} (\pi F_0)^{8/3} t}{5} \right)^{5/8} = \varphi_0 - \left(\frac{2^4 \pi F_0}{2^8 \mathcal{M}^{5/3} (\pi F_0)^{8/3}} \right) \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{5/8}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \left(\frac{2^4 \pi F_0}{5} t_c \right) \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{5/8} = \varphi_0 - (10,05 F_0 t_c) \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{5/8} \quad \text{avec} \quad t_c = \frac{5}{256(\pi F_0)^{8/3} \mathcal{M}^{5/3}} = \frac{9,23 \cdot 10^{-4}}{F_0^{8/3} \mathcal{M}^{5/3}}$$

t_c se nomme le temps de coalescence.

On prendra $\varphi_0 = 0$ d'où $\cos \varphi(t) = \cos \left(- (10,05 F_0 t_c) \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{5/8} \right) = \cos \left((10,05 F_0 t_c) \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{5/8} \right)$

L'évolution de la fréquence est donnée par : $F(t) = \frac{(\mathcal{M}F_0^9)^{1/8}}{\left[(\mathcal{M}F_0)^{1/3} - \frac{256F_0^3 \mathcal{M}^2 \pi^{8/3} t}{5} \right]^{3/8}}$

Ou encore $F(t) = \frac{(\mathcal{M}F_0^9)^{1/8}}{\left[(\mathcal{M}F_0)^{1/3} \left(1 - \frac{256F_0^{(3-1/3)} \mathcal{M}^{(2-1/3)} \pi^{8/3} t}{5} \right) \right]^{3/8}} = \frac{(\mathcal{M}F_0^9)^{1/8}}{(\mathcal{M}F_0)^{1/8} \left(1 - \frac{256F_0^{(3-1/3)} \mathcal{M}^{(2-1/3)} \pi^{8/3} t}{5} \right)^{3/8}}$

$F(t) = \frac{F_0}{\left(1 - \frac{256F_0^{8/3} \mathcal{M}^{5/3} \pi^{8/3} t}{5} \right)^{3/8}}$ soit plus simplement : $F(t) = \frac{F_0}{\left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{3/8}}$

Cas où les deux objets fusionnant ayant la même masse m (détail des calculs)

$$M = m_1 + m_2 = 2m, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{(M/2)^2}{M} = \frac{M}{4} \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5} = (M/4)^{3/5} M^{2/5} = \frac{M^{5/5}}{4^{3/5}} = \frac{M}{4^{3/5}}$$

$$\text{Dans ce cas, } t_c = \frac{5}{256(\pi F_0)^{8/3} \left(\frac{M}{4^{3/5}}\right)^{5/3}} = \frac{5 \times 4}{256(\pi F_0)^{8/3} M^{5/3}} = \frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{F_0^{8/3} M^{5/3}}$$

$$A(t) = \frac{4\mathcal{M}^{5/3} \pi^{2/3}}{D} F(t)^{2/3} = \frac{4\pi^{2/3}}{D} \cdot \frac{5}{256 t_c (\pi F_0)^{8/3}} \left(\frac{F_0}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{3/8}} \right)^{2/3} = \frac{20}{256\pi^2 F_0^2 t_c D} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}}$$

Il est indiqué que les grandeurs sont données en unités géométrisées :

$$1M_\odot = G M_\odot / c^3 = 4,93 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad \text{et} \quad 1\text{Mpc} = 3,086 \cdot 10^{16} \cdot 10^6 / c = 1,03 \cdot 10^{14} \text{ s}$$

$$A(t) = \frac{20}{256\pi^2 F_0^2 t_c D \times 1,03 \cdot 10^{14}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{F_0^2 t_c D} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} \quad (\text{avec } D \text{ en Mpc})$$

$$\text{D'où } h(t) = \frac{7,69 \cdot 10^{-17}}{F_0^2 t_c D} \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{1/4}} \cos \left((10,05 F_0 t_c) \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{5/8} \right)$$

Relation entre masse totale du système et temps de coalescence :

$$t_c = \frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{F_0^{8/3} M^{5/3}} \Rightarrow M^{5/3} = \frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{t_c F_0^{8/3}} \Rightarrow M = \left(\frac{3,69 \cdot 10^{-3}}{t_c F_0^{8/3}} \right)^{3/5} = \frac{3,47 \cdot 10^{-2}}{t_c^{3/5} F_0^{8/5}}$$