

SēMA
BOLETÍN NÚMERO 35
Junio 2006

sumario

Editorial	5
Artículos	7
<i>About nonlinear geometric optics</i> , por E. Dumas	7
<i>Regularity and singularity in the three-dimensional Navier-Stokes equations</i> , por J. C. Robinson	43
<i>Modelos matemáticos en biología: un viaje de ida y vuelta</i> , por R. Álvarez-Nodarse	73
<i>Limited Flux Diffusion Equations</i> , por F. Andreu, V. Caselles y J. M. Mazón	113
<i>The parameterization method for invariant manifolds</i> , por E. Fontich	137
Historia de las Matemáticas	143
<i>Aspectos culturales en la historia de las matemáticas</i> , por R. Riaza ...	143
Noticias	159
Anuncios	161

Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada SĒMA

Grupo Editor

L. Ferragut Canals (U. de Salamanca) E. Fernández Cara (U. de Sevilla)
F. Andrés Pérez (U. de Salamanca) M.I. Asensio Sevilla (U. de Salamanca)
M.T. de Bustos Muñoz (U. de Salamanca) A. Fernández Martínez (U. de Salamanca)

Comité Científico

E. Fernández Cara (U. de Sevilla) A. Bermúdez de Castro (U. de Santiago)
E. Casas Rentería (U. de Cantabria) J.L. Cruz Soto (U. de Córdoba)
L. Ferragut Canals (U. de Salamanca) J.M. Mazón Ruiz (U. de Valencia)
I. Peral Alonso (U. Aut. de Madrid) J.L. Vázquez Suárez (U. Aut. de Madrid)
L. Vega González (U. del País Vasco) E. Zuazua Iriondo (U. Comp. de Madrid)

Responsables de secciones

Artículos: E. Fernández Cara (U. de Sevilla)
Matemáticas e Industria: M. Lezaun Iturralde (U. del País Vasco)
Educación Matemática: R. Rodríguez del Río (U. Comp. de Madrid)
Historia Matemática: J.M. Vegas Montaner (U. Comp. de Madrid)
Resúmenes: F.J. Sayas González (U. de Zaragoza)
Noticias de SĒMA: C.M. Castro Barbero (Secretario de SĒMA)
Anuncios: Ó. López Pouso (U. de Santiago de Compostela)

Página web de SĒMA

<http://www.sema.org.es/>

Dirección Editorial: Boletín de SĒMA. Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37008. Salamanca. boletin_sema@usal.es.

ISSN 1575-9822.

Depósito Legal: AS-1442-2002.

Imprime: Gráficas Lope. C/ Laguna Grande, parc. 79, Políg. El Montalvo II 37008. Salamanca.

Diseño de portada: Luis Ferragut Alonso.

Consejo Ejecutivo de la Sociedad Española de Matemática Aplicada
SĕMA

Presidente

Juan Ignacio Montijano Torcal

Vicepresidente

Mikel Lezaun Iturralde

Secretario

Carlos Manuel Castro Barbero

Tesorera

María Pilar Laburta Santamaría

Vocales

Rafael Bru García

Jose Antonio Carrillo de la Plata

Javier Chavarriga Soriano

Inmaculada Higuera Sanz

Pablo Pedregal Tercero

Ireneo Peral Alonso

Enrique Zuazua Iriondo

About nonlinear geometric optics

ERIC DUMAS

Institut Fourier, UMR 5582 (CNRS-UJF)
100 rue des Mathématiques
Domaine Universitaire
BP 74, 38402 Saint Martin d’Hères - France

edumas@ujf-grenoble.fr

Abstract

We give an idea of the evolution of mathematical nonlinear geometric optics from its foundation by Lax in 1957, and present applications in various fields of mathematics and physics.

1 Introduction

Geometric optics goes back at least to the XVIIth Century, with Fermat, Snell and Descartes, who described the “paths” (rays) followed by the light. Nowadays, Physics tells us that we may reasonably replace the waves from Quantum Mechanics with classical particles, in the semi-classical approximation (when considering Planck’s constant \hbar , or the wavelength, as infinitely small). The mathematical transcription of these problems consists in studying the asymptotic behavior of solutions to partial differential equations where different scales (represented by small parameters) are present, often in a high frequency oscillatory context.

We present the first historical results of the field, and then review some extensions and applications of the method. We shall see how geometric optics applies to Maxwell’s equations (from optics, ferromagnetism, ...), to the wave or Klein-Gordon equation, to fluid dynamics and plasma physics, to general hyperbolic systems and conservation laws, as well as to nonlinear Schrödinger equations, among others. Furthermore, we shall see that it does not apply to oscillatory problems only, but also to boundary layers, shocks and long waves problems.

Quoting some reviews and introductory texts may be useful. A review on nonlinear geometric optics in 1998 is due to Joly, Métivier and Rauch [108], and

Fecha de recepción: 11/5/05

the online book of Rauch [146] is a nice introduction to the subject. Majda [132] made major contributions in the 80ies. Good Physics textbooks on nonlinear optics are Newell and Moloney [142] and Boyd [17]. Kalyakin [113] and Hunter [94] review many questions, methods and applications about these multi-scale problems, and Whitham [170] had pioneering contributions in the modeling of nonlinear waves.

2 First steps

2.1 Linear geometric optics

The first rigorous result in mathematical geometric optics is due to Lax [125], who shows that strictly hyperbolic systems admit *WKB* (for Wentzel, Kramers and Brillouin) solutions. These have the *phase-amplitude* representation

$$u^\varepsilon(t, x) = a^\varepsilon(t, x) e^{i\varphi(t, x)/\varepsilon}.$$

The wavelength corresponds to the small parameter $\varepsilon > 0$, and the amplitude a^ε admits an asymptotic (in general not convergent) expansion,

$$a^\varepsilon \sim \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n a_n(t, x), \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

In particular, Lax uses such solutions to study the well-posedness of the Cauchy problem.

The geometric information is contained in the *eikonal equation* (of Hamilton-Jacobi type) determining the phase φ (plane waves correspond to phases which are linear in (t, x) ; spherical waves, to phases which are functions of t and $|x|$ only). The amplitudes a_n are solutions to *transport equations* along the rays associated with the eikonal equation. The asymptotic expansion is valid for times before rays focus.

2.2 Weakly nonlinear geometric optics

Trying to generalize Lax's approach to nonlinear systems, one immediately faces several problems. First, a family $(a(x)e^{i\varphi(x)/\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ is not bounded in any Sobolev space H^s with $s > 0$, so that the time of existence of the considered exact solution u^ε may shrink to zero as ε goes to zero. In the same spirit, the size of u^ε must be adapted, large enough to allow nonlinear features at first order, but sufficiently small to prevent blow-up. Finally, the main interest and difficulty of nonlinear models comes from interactions: one hopes to incorporate in the asymptotic description the self-interaction of a wave (leading for example to generation of harmonics) as well as the possibility of (resonant) interaction of several waves.

Thus, the extension to nonlinear systems goes through *profiles* $U_n(t, x, \theta)$ which are periodic or almost periodic w.r.t. $\theta \in \mathbb{R}^q$,

$$u^\varepsilon \sim \underline{u}(t, x) + \varepsilon^m \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n(t, x, \vec{\varphi}(t, x)/\varepsilon), \quad (1)$$

where \underline{u} is a given groundstate, and $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ is a collection of phases.

The usual strategy of nonlinear geometric optics consists in: 1-defining a *formal* solution, *i.e.* solvable equations for the profiles; truncating the series in (1) defines an approximate solution (a function approximately solution to the equation); 2-showing that for any initial data close to the initial value of the approximate solution, an exact solution exists on a time interval independent of ε ; 3(*stability*)-showing that the exact solution is well approximated by the formal one.

In order to observe some nonlinear behavior, the magnitude ε^m of oscillations is chosen so that cumulated effects of nonlinearities become of the same order as the wave on the typical time T of propagation. A fixed T (w.r.t. ε) leads to *nonlinear geometric optics*. Once rescaled, the system of partial differential equations takes the form

$$L(t, x, u^\varepsilon, \varepsilon\partial)u^\varepsilon = F(t, x, u^\varepsilon), \quad (2)$$

where the operator L is in general a first order symmetric hyperbolic system on some domain in $\mathbb{R}_{t,x}^{1+d}$,

$$\begin{aligned} L(t, x, u, \varepsilon\partial) u &= \varepsilon\partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j(t, x, u)\varepsilon\partial_{x_j} u^\varepsilon + L_0(t, x) u \\ &=: L_1(t, x, u, \varepsilon\partial) u + L_0(t, x) u. \end{aligned} \quad (3)$$

The smooth functions F , B and A_j take values in \mathbb{C}^N , in the space of $N \times N$ matrices, and in the space of $N \times N$ symmetric matrices, respectively. Furthermore, we will distinguish the hyperbolic case, when $L_0 = 0$, and the dispersive case, when L_0 is skew-symmetric (the dissipative case, when $L_0 + L_0^* \geq 0$, will be considered only in Section 7). This coefficient L_0 reflects the interaction between the wave and the material medium, so that, in the dispersive case, the group velocity (see (9)) depends on the frequency. The above mentioned exponent m is then defined as follows. Let $J \geq 2$ be the order of nonlinearities,

$$|\alpha| \leq J - 2 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\underline{u}\underline{u}}^\alpha A_j|_{u=0} = 0, \quad |\beta| \leq J - 1 \quad \Rightarrow \quad \partial_{\underline{u}\underline{u}}^\beta F|_{u=0} = 0.$$

The standard amplitude of weakly nonlinear geometric optics corresponds to

$$m = \frac{1}{J - 1} \quad (4)$$

(so that $m = 1$ for quadratic semi- or quasilinear systems). As an example, Euler equations for compressible and entropic gas dynamics form a quasilinear hyperbolic system ($L_0 = 0$), and Maxwell-Bloch equations, a semilinear dispersive one (describing the propagation of an electromagnetic wave (E, B) in a medium with polarization vector P ; for a two-level quantum medium, N is

the difference of the populations of the energy levels), which reads

$$\begin{cases} \partial_t B + \text{curl } E = 0, \\ \partial_t E - \text{curl } B = -\partial_t P, \\ \partial_t N = E \cdot \partial_t P, \\ \varepsilon^2 \partial_t^2 P + P = (N_0 - N)E. \end{cases} \quad (5)$$

It may be written in the form (2) for the unknowns $B, E, N, P, \varepsilon \partial_t P$.

2.3 Profile equations

The formal derivation of profile equations is similar in any dimension, and for any number of phases. Plug expansion (1) into equation (2), and let the expansion of $Lu - F(u)$ vanish. This gives an infinite set of equations,

$$L(d\vec{\varphi} \cdot \partial_\theta) U_0 = 0,$$

and for $n \geq 0$,

$$L(d\vec{\varphi} \cdot \partial_\theta) U_{n+1} + L_1(\partial) U_n + F_n(U_0, \dots, U_n) = 0, \quad (6)$$

with $d\vec{\varphi} \cdot \partial_\theta = \sum_{k=1}^q d\varphi_k \partial_{\theta_k}$.

The analysis is based on formal Fourier series in θ , so that for $U = \sum_\alpha U^\alpha e^{i\alpha \cdot \theta}$,

$$0 = L(d\vec{\varphi} \cdot \partial_\theta) U = \sum_\alpha L(\text{id}(\alpha \cdot \vec{\varphi})) U^\alpha e^{i\alpha \cdot \theta} \iff U = \Pi U = \sum_\alpha \pi_\alpha U^\alpha e^{i\alpha \cdot \theta},$$

where π_α is the orthogonal projector on the kernel of $L(\text{id}(\alpha \cdot \vec{\varphi}))$. In order to get non-trivial solutions, this projector is assumed not to vanish at least for one multi-index α . This means that the function $\alpha \cdot \vec{\varphi}$ satisfies the equation

$$\det L(\text{id}(\alpha \cdot \vec{\varphi})) = 0, \quad (7)$$

so that $\alpha \cdot \vec{\varphi}$ must satisfy one of the eikonal equations,

$$\partial_t(\alpha \cdot \vec{\varphi}) + \lambda_k(t, x, \partial_x(\alpha \cdot \vec{\varphi})) = 0.$$

Here, we denote by $\lambda_k(t, x, \xi)$, $1 \leq k \leq N$, the N eigenvalues of the symmetric matrix

$$\frac{1}{i} L(t, x, 0, (0, i\xi)) = \sum_{j=1}^d \xi_j A_j(t, x, 0) + \frac{1}{i} L_0(t, x).$$

In particular, a single initial phase $\varphi^0(x)$ may generate N eikonal phases $\varphi_k(t, x)$ (except when initial profiles are prepared, *i.e.* polarized on a single mode).

When the linear combination $\alpha \cdot \vec{\varphi}$ is not trivial, *i.e.* contains linearly independent φ_k 's, equation (7) expresses a *resonance* between these phases.

Such resonances must involve at least three phases, and thus occur for systems of size at least 3.

Profile equations are then obtained recursively, splitting (6) thanks to the projectors Π and $(1 - \Pi)$,

$$(1 - \Pi) U_0 = 0, \quad \text{and for } n \geq 0, \quad (8a)$$

$$\Pi L_1(\partial) \Pi U_n + \Pi F_n = 0, \quad (8b)$$

$$(1 - \Pi) U_{n+1} = -L(d\vec{\varphi} \cdot \partial_\theta)^{-1} [L_1(\partial) U_n + F_n]. \quad (8c)$$

Equation (8a) is a *polarization* constraint on the first profile U_0 , and (8b) gives the evolution for the polarized part ΠU_n of U_n in the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+d}$ considered. The first equation (8b) (for the first profile U_0) is nonlinear, while the others (for $n \geq 1$) are linear. The operator $L(d\vec{\varphi} \cdot \partial_\theta)^{-1}$ is formally defined by the symbol $L(id(\alpha \cdot \vec{\varphi}))^{-1}$, the partial inverse of $L(id(\alpha \cdot \vec{\varphi}))$ on its range.

The description of the operator $\Pi L_1 \Pi$ depends on the geometry of the characteristic variety,

$$\mathcal{C} = \{(t, x, \tau, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{1+d} \mid \det L(t, x, \tau, \xi) = 0\},$$

viewed as a differentiable manifold. In the hyperbolic case ($L_0 = 0$), this characteristic variety is homogeneous in (τ, ξ) : for the wave equation, it is the light cone $\mathcal{C} = \Omega \times \{\tau^2 = |\xi|^2\}$. In the dispersive case ($L_0 = L_0^* \neq 0$), only few harmonics of an eikonal (τ, ξ) are eikonal in general: for Klein-Gordon equation, $\mathcal{C} = \Omega \times \{\tau^2 = |\xi|^2 + 1\}$.

When for all $(t, x) \in \Omega$, the vector $d(\alpha \cdot \vec{\varphi})(t, x)$ is a smooth point of a sheet $\tau = \lambda(\tau, \xi)$ of \mathcal{C} , the principal part of $\pi_\alpha L_1(\partial) \pi_\alpha$ is simply the (scalar) *transport operator* at the *group velocity*,

$$\vec{v}_\alpha(t, x) = -\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}(t, x, \partial_x(\alpha \cdot \vec{\varphi})(t, x)); \quad (9)$$

(for the wave equation, $\partial_\xi(\pm|\xi|) = \pm\xi/|\xi|$ does not depend on $|\xi|$, whereas for Klein-Gordon equation, $\partial_\xi(\pm\sqrt{|\xi|^2 + 1}) = \pm\xi/\sqrt{|\xi|^2 + 1}$ does). Precisely ([125], [61]),

$$\pi_\alpha L_1(\partial) \pi_\alpha = \partial_t + \vec{v}_\alpha \cdot \partial_x + \pi_\alpha (L_1(\partial) \pi_\alpha).$$

This reduction clearly explains the “light rays” picture; it is however not necessary in the justification of the asymptotics (1); as an example, Joly, Métivier and Rauch perform this justification [102] in the case of an eigenvalue λ which changes multiplicity (crossing in the characteristic variety), which gives a model for conical refraction of light. Moreover, this description is clarified by Lannes [119], in the case of isolated singular points of a dispersive \mathcal{C} : the characteristic variety of $\pi_\alpha L_1(\partial) \pi_\alpha$ is then the tangent cone to \mathcal{C} . A systematic approach to such “algebraic lemmas” is given by Texier [168] *via* perturbation theory of complex eigenvalues under a slightly different smoothness assumption (found by Métivier and Rauch [138] to be actually the same in the hyperbolic case). This approach also generalizes the one of Lannes, and applies to “all order algebraic lemmas” (see Section 6).

2.4 Rigorous results

One easily suspects, in view of the term $L(d\vec{\varphi} \cdot \partial_\theta)^{-1}$ in (8c), that resonances may cause troubles. That is the reason why monophasic expansions (with profiles polarized on a single mode) have been studied first.

In [45], Choquet-Bruhat constructs formal such expansions for quasilinear systems, and applies these to computations on the model of relativistic perfect fluids. Single-phase weakly nonlinear geometric optics is justified in space dimension d , for semilinear systems, by Joly and Rauch [112] in the non-dispersive case, by Donnat and Rauch [61], [62] in the dispersive case, and by Guès [83] for quasilinear non-dispersive systems. Their strategy consists in constructing an approximate solution $u_{\text{app}}^\varepsilon$, sum of a high number of smooth profiles (or with infinitely accurate asymptotics, *via* Borel's summation technique), so as to absorb the oscillations of the residual $Lu_{\text{app}}^\varepsilon - F(u_{\text{app}}^\varepsilon)$. Existence of exact solutions u^ε and stability are then obtained *via* energy estimates on $u^\varepsilon - u_{\text{app}}^\varepsilon$.

The formal study of propagation and interactions of oscillations for quasilinear systems, particularly for fluid dynamics, is done in the works of Hunter and Keller [95] in the non interacting case, of Majda and Rosales [134] in the one dimensional resonant case, of Hunter, Majda and Rosales [97] and Pego [144] in the multidimensional resonant case. In these works, a finiteness assumption is made on the number of (directions of) eikonal phases. But in [111], Joly and Rauch show that resonances may generate dense oscillations in the characteristic variety.

This finiteness hypothesis is shown unnecessary in [100], where Joly, Métivier and Rauch justify rigorously the weakly nonlinear geometric optics approximation in space dimension 1, for both semi- and quasilinear systems (before shock formation), under a weaker transversality assumption between real combinations s of phases and the propagation fields X_k ($X_k s \equiv 0$, or $X_k s \neq 0$ almost everywhere on the domain Ω). They use the method initiated by Joly [99] for semilinear multidimensional systems with constant coefficients and linear phases, estimating (by stationary and non-stationary phase method) the difference $u_\varepsilon^k - \varepsilon^m U_0^k(t, x, \vec{\varphi}/\varepsilon)$ between the k -th Picard iterates obtained from the resolution of (2) and of the first profile equation, respectively. This leads to a first order approximation,

$$u^\varepsilon(t, x) = \varepsilon^m U_0(t, x, \vec{\varphi}(t, x)/\varepsilon) + o(\varepsilon^m),$$

which is valid in L^p for all $p < \infty$. It holds in L^∞ when transversality is imposed (almost everywhere) along integral curves of each propagation field X_k . Guès shows [84] that on the contrary, when weak resonances are present (a linear combination of phases is eikonal on a set with one dimensional positive measure, but is a.e. not eikonal on Ω), they may lead to the creation of stationary waves preventing from L^∞ approximation.

Concerning results in space dimension one, we have the earlier works (for linear phases) of Kalyakin [113], and also of Tartar *et al.* [166], [167], [131], by the compensated compactness method applied to Young measures –links

between nonlinear geometric optics and compensated compactness are very clearly enlightened in [139] and [104].

Furthermore, still in space dimension one, several papers deal with (global) weak solutions (with bounded variations) of conservation laws. The formal study is due to Majda and Rosales [134]; DiPerna and Majda obtain $L_t^\infty L_x^1$ global in time asymptotics –even when shocks occur–, using L^1 stability and BV decay properties of solutions (constructed by Glimm’s scheme) to conservation laws, for BV initial data with compact support. This result is extended by Schochet [157] to periodic BV data using WKB expansions, and then by Cheverry [38], [39] to general BV data. Sablé-Tougeron [148] treats the initial-boundary value problem, for linear non-interacting phases, and data with compact support.

Now, the multidimensional case for semi- or quasilinear interacting waves is treated by Joly, Métivier and Rauch [103]. In space dimension greater or equal to 2, the new phenomenon is the *focusing* of oscillations, corresponding to singularities of phases (see Section 4). It may lead to blow-up, and to the ill-posedness of the Cauchy problem. Joly, Métivier and Rauch distinguish “direct focusing” of principal phases and “hidden focusing” resulting from several interactions. They define a *coherence* criterium so as to separate clearly eikonal and non-eikonal phases.

Definition 1 *A real vector space $\Phi \subset C^\infty(\Omega)$ is L -coherent when for all $\varphi \in \Phi \setminus \{0\}$, one of the following conditions holds:*

- (i) $\det L(t, x, d\varphi(t, x)) = 0$ and $d\varphi(t, x) \neq 0$ for every $(t, x) \in \Omega$,
- (ii) $\det L(t, x, d\varphi(t, x))$ does not vanish on Ω .

The typical example of L -coherence is for linear phases and constant coefficient operator L . Coherence is not easy to check on a given set of phases, but it allows to prove (locally, on truncated cones $\Omega_T = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, |x| + t/\delta \leq \rho\}$, for small $\delta, \rho > 0$), for a symmetric hyperbolic system with constant multiplicity, the following result.

Theorem 1 *Consider initial phases $\vec{\varphi}^0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_q^0)$ such that $d\varphi_k^0$ does not vanish on Ω_0 . Consider eikonal phases $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ generated by these initial phases ($\forall k, \varphi_k(0, x) = \varphi_k^0(x)$), and assume that their linear span Φ is L -coherent, and contains a timelike phase $\varphi_0: \varphi_0(0, x) = 0$, and $\partial_t \varphi_0$ does not vanish. Then, for any initial data*

$$h^\varepsilon(x) = \varepsilon^m \mathcal{H}^\varepsilon(x, \vec{\varphi}^0/\varepsilon), \tag{10}$$

with $(\mathcal{H}^\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq 1}$ a bounded family in the Sobolev space $H^s(\overline{\Omega_0} \times \mathbb{T}^q)$ for some $s > 1 + (d + q)/2$, we have

- (i) *There is $T > 0$ such that for all $\varepsilon \in]0, 1]$, the Cauchy problem (2), (10) has a unique solution $u^\varepsilon \in C^1(\Omega_T)$.*
- (ii) *There is a profile $\mathcal{U}(t, x, \tau, \theta) \in C^1(\Omega_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^q)$, almost periodic in (τ, θ) (and determined by the profile equations (8a), (8b)) such that*

$$u^\varepsilon(t, x) - \varepsilon^m \mathcal{U}(t, x, \varphi_0/\varepsilon, \vec{\varphi}^0/\varepsilon) = o(\varepsilon^m) \text{ in } L^\infty.$$

The new idea in their proof consists in looking for exact solutions of the form

$$u^\varepsilon(t, x) = \varepsilon^m \mathcal{U}^\varepsilon(t, x, \vec{\varphi}/\varepsilon).$$

It is then sufficient (for u^ε to be a solution to (2)) that the profile \mathcal{U}^ε be solution to the *singular system*

$$L_1(\partial_{t,x}) \mathcal{U}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{k=1}^q L_1(d\varphi_k) \partial_{\theta_k} + L_0 \right) \mathcal{U}^\varepsilon = F^\varepsilon(t, x, \mathcal{U}^\varepsilon),$$

and L -coherence precisely allows energy estimates in H^s .

The result of Joly, Métivier and Rauch on singular systems generalizes the ones of Klainerman and Majda [114], [115] and Schochet [158]. It is worth noting that the analysis of such singular systems appears in many multi-scale problems. In particular, for rapidly rotating fluids in oceanology, meteorology, and Magneto-Hydro-Dynamics; see [5], [78], [70], [140]; several applications are described by Klein [116]. This method also provides an efficient tool for numerics: see the works of Colin and Nkonga about propagation of wave trains [53] and pulses (see section 3) [54] in optical media, and Colin and Torri [55] about pulse propagation over diffractive scales (see section 6.2).

A work close to the method exposed here may be found in the paper [47] by Colin and Colin, studying rigorously and numerically Raman scattering for a semi-classical quasilinear Zhakarov system from plasma physics in the weakly nonlinear geometric optics regime, with three-wave resonances. There, the system lacks hyperbolicity, which is compensated by dispersion.

It is in fact possible to achieve infinitely accurate asymptotics for these multidimensional nonlinear interacting waves with nonlinear phases, by adding to the coherence assumption on phases a generically satisfied “not too small divisors” hypothesis (or Diophantine hypothesis on wave vectors, in the case of linear phases), see [101].

3 Other kinds of profiles

As we have seen, the natural dependence of the profiles $U(t, x, \theta)$ on the fast variable $\theta \in \mathbb{R}^q$ is periodic, quasi- or almost periodic. This allows to define an oscillating spectrum [99], [102] which is localized on the frequencies given by the Fourier transform of $U(t, x, \cdot)$. Now, WKB asymptotics with profiles having other behaviors w.r.t. θ may be relevant, depending on the context. The formal computations are in general very similar to the ones of usual geometric optics, but at least, the functional tools (such as average operators) must be re-defined, and interactions may take a different form.

In order to model the optical Raman scattering, for which light is emitted in a continuum of directions, Lannes [119] introduces profiles with continuous spectra, and gives the analogue of usual rigorous weakly nonlinear geometric optics in this context, with a precise analysis of resonances.

In fact, this formalism also includes (see Barrailh and Lannes [6]) the one of “ultrashort pulses” (from laser physics) considered by Alterman and Rauch [3], where profiles have a compact support in θ (see also sections 4 and 6 about focusing and diffraction of pulses).

Sometimes, profiles may also have different limits as the variable $\theta \in \mathbb{R}$ goes to $\pm\infty$, in order to match boundary conditions (see Section 5.2), or to describe transitions like the ones of [68], between light and shadow (see Section 6); this is also the case of the solitary waves in [84].

4 Caustics

In space dimension greater or equal to 2, singularities appear, even in the case of linear geometric optics, in the resolution of the eikonal equation: when rays have an envelope (called a caustic; the example of the cusp $\{(t, x_1) \in [0, \infty[\times \mathbb{R} \mid t^{2/3} = x_1^{2/3} + 1\}$ from the wave equation in space dimension 2 and $\varphi(0, x) = x_2 + x_1^2$ is shown on Figure 1), the second derivative of the phase φ becomes singular. In this case, the amplitude is also singular [130].

In order to solve the eikonal equation globally in time, one considers the Lagrangian manifold foliated by the Hamiltonian flow associated with $L(t, x, \tau, \xi)$, starting from points $(0, x, 0, d\varphi(0, x))$. Caustic crossing induces a phase shift determined by Maslov’s index, and generates new phases (see Duistermaat [64]; one phase before the cusp of Figure 1 corresponds to three phases beyond the cusp).

Following these ideas, Joly, Métivier and Rauch have studied the caustic crossing for semilinear geometric optics. In [105], they show that, for superlinear nonlinearities and focusing at a point, oscillations may lead to explosion, whereas in the case of dissipative equations (for which exact solutions are globally defined), they may be absorbed (*i.e.* only a non-oscillating term remains after reflection on the caustic). In [109], for dissipative equations, they extend this result to general caustics. They exhibit a critical exponent p_c , defined by the geometry of the caustic so that, if the nonlinearity is stronger than $|u|^{p_c}$ at infinity, absorption occurs, and else, oscillations persist. In [106], for uniformly Lipschitzean nonlinearities (for which, again, exact solutions are globally defined), they show that oscillations go through the caustic.

More precisely, to a single-phase expansion before the caustic (case considered here just for notational simplicity; several initial phases are allowed),

$$u^\varepsilon(t, x) = \varepsilon^m \mathcal{U}(t, x, \varphi/\varepsilon) + o(1),$$

corresponds a multiphase expansion beyond the caustic,

$$u^\varepsilon(t, x) = \varepsilon^m \underline{u}(t, x) + \varepsilon^m \sum_j \mathcal{U}(t, x, \varphi_j/\varepsilon) + o(1),$$

with phases φ_j defined as in the linear case, matching φ on the caustic. In particular, this provides examples of asymptotics with non-coherent phases.

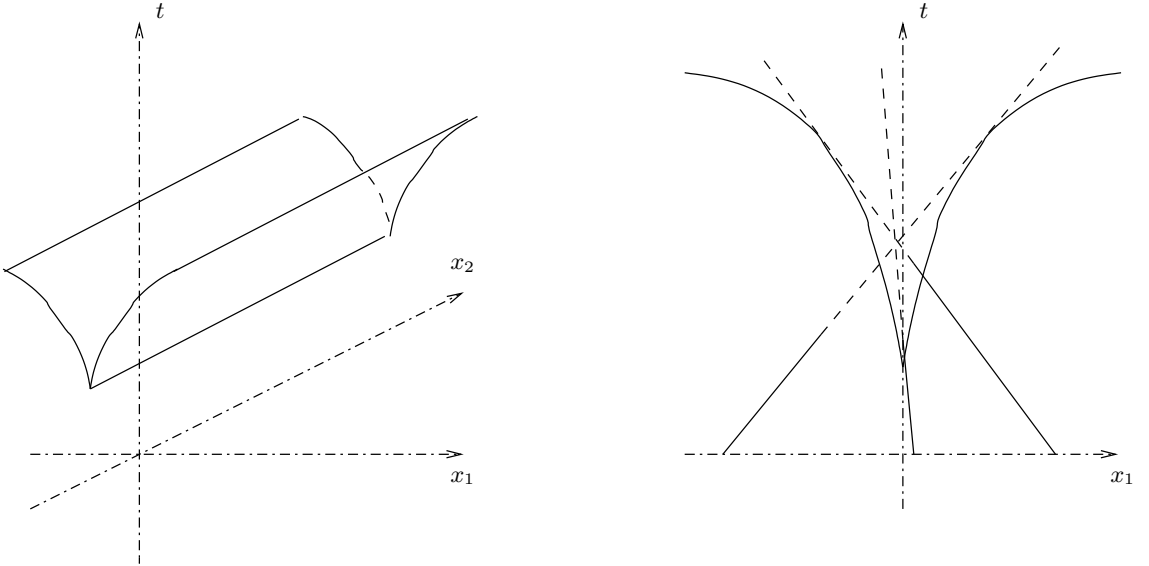


Figure 1: The cusp. Through each (t, x) point pass only one ray before the caustic, and three rays beyond the caustic.

This approximation is in L^2 in [104] and [106], and in all L^p 's, $p < \infty$, in [109]. It is based on the oscillating integral representation

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t, x) &= \varepsilon^m \underline{u}(t, x) + \varepsilon^m \int e^{i\phi(t, x, y, \xi)/\varepsilon} \mathcal{A}(t, x, \varphi/\varepsilon) dy d\xi + o(1) \\ &=: \varepsilon^m \underline{u}(t, x) + \varepsilon^m I^\varepsilon(\mathcal{A}) + o(1). \end{aligned}$$

Outside the caustic, expanding a smooth $\mathcal{A}(t, x, \theta)$ in Fourier series in θ and performing the usual stationary phase asymptotics (the assumption that the phases φ_j are non-resonant is needed) gives

$$I^\varepsilon(\mathcal{A}) \sim \sum_j J_j^\varepsilon(\mathcal{A}),$$

where the sum corresponds to the several pre-images of critical points of the phase, and $J_j^\varepsilon(\mathcal{A})(t, x)$ is the evaluation at $(t, x, \varphi_j/\varepsilon)$ of some profile $\mathcal{U}_j(t, x, \theta)$ obtained from \mathcal{A} *via* a Hilbert transform.

Here, the amplitude \mathcal{A} belongs to L^p , so that the profiles \mathcal{U}_j are in fact better defined as “weak profiles” (in particular, $\mathcal{U}_j(t, x, \varphi_j/\varepsilon)$ has an asymptotic sense only). They are weak limits of u^ε , using $J_j^\varepsilon(\mathcal{B})$ as test function, for smooth $\mathcal{B}(t, x, \theta)$,

$$\forall \mathcal{B}(t, x, \theta), \quad \int \overline{u^\varepsilon} J_j^\varepsilon(\mathcal{B}) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int \overline{\mathcal{U}_j} \mathcal{B} dx d\theta.$$

Profile equations are then obtained as weak limits of the original equation, using a nice “no propagated oscillations” lemma ([109], section 5.2) for nonlinearities.

Strong convergence then follows from energy estimates and L^p estimates on oscillatory integrals.

These results are refined (in L^∞ instead of L^p) and extended to conservative systems by Carles, for simpler geometries. Essentially, Carles considers focusing on a point for the wave equation,

$$\square u^\varepsilon + a|\partial_t u^\varepsilon|^{p-1}\partial_t u^\varepsilon = 0, \quad p > 1, \quad a \in \mathbb{C}, \quad (11)$$

($a > 0$, $a < 0$, $a \in i\mathbb{R}$ corresponds to the dissipative, accretive and conservative case, respectively) with radially symmetric initial data, or the semiclassical nonlinear Schrödinger equation (NLS),

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta u^\varepsilon = \varepsilon^\alpha |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon, \quad \alpha \geq 1, \quad \sigma > 0, \quad (12)$$

with initial data of the form

$$u^\varepsilon|_{t=0} = f(x)e^{-i|x|^2/2\varepsilon}.$$

Hunter and Keller [96] give a formal classification of the qualitative properties of weakly nonlinear geometric optics for (11), separating linear and nonlinear propagation, and linear and nonlinear effects of the caustic. Carles has rigorously explained this classification. In [20], for $1 < p < 2$, he improves the results of [109] ([105] corresponds to $a > 0$, $p > 2$) with an L^∞ description of radial waves in \mathbb{R}^3 . He shows that the profiles are really singular, and that new amplitudes (of size ε^{1-p}) must be added to the one in [96] near the caustic.

In a series of papers [33], [34], [35], Carles and Rauch study the focusing of spherical pulse solutions to (11) in space dimension 3, for various powers p and sizes (ε^m) of initial data. In particular, they show how pulses get wider after reflection on the caustic; they also treat the analogue of [105] ($a \in \mathbb{R}$) and find the same results (dissipation or growth) as for wavetrains. Carles and Lannes generalize these results [28] to dispersive semilinear systems such as Klein-Gordon and Hartree's equations. Again for (11), they obtain [27] the focusing (at $t = 1$) of a pulse with "random phase shift" $\ln((1-t)/\varepsilon)$ –in the conservative case, for nonlinear propagation and a nonlinear caustic.

Concerning NLS (12), Carles investigates all the behaviors with different powers $\alpha \geq 1$ and $\sigma > 0$. In [23], he shows the possibility of "random phase shift". In [21] ($\alpha = d\sigma > 1$, in space dimension d), he notices that nonlinear effects take place near the focal point only; thus, in [25], [26], he answers with his co-authors the converse question "for which kind of initial data can we get nonlinear effects at first order?". He also considers [22] focusing on a line instead of a point.

Other extensions of [21] concern the description of Bose-Einstein condensates, *via* the addition to (12) of a polynomial potential [24], [31], [32], or Hartree-type nonlinearities $((1/|x|) \star |u|^2)u$ [30] for the Schrödinger-Poisson model.

The method of Carles consists in a precise control of the solution outside the caustic *via* WKB expansions and Gagliardo-Nirenberg estimates, then rescaling

the problem around the focal point so as to use nonlinear scattering arguments (with short-range or long-range interpretation, according to the power of the nonlinearity).

We may mention that caustics are subject to many numerical works, such as the ones of Benamou *et al.*, [13], [10], [9], [11], [12], based on a Eulerian –or ray tracing– approach. See also the review of Gosse [76] –about (NLS), mostly with kinetic methods– and references therein.

5 Boundary problems

5.1 Reflection on a boundary

The formal study of reflections of weakly nonlinear waves is done by Artola and Majda in [133]. In the case of transverse reflection, rigorous results are due to Chikhi [44] for equations with two speeds of propagation, and to Williams [171] for general resonant interactions.

The first order tangential reflection corresponds to diffractive points in the cotangent bundle of the boundary, and leads to the formation of a shadow zone (in fact, a caustic forms in the obstacle, so that phases become singular at the tangency point). The linear case is treated by Friedlander [69] and Melrose [136], [137]. Weakly nonlinear geometric optics is justified, at first order, with nonlinear incident and reflected phases, by Cheverry [37] for globally Lipschitz nonlinearities (constructing smooth profiles, solutions to singular ODE’s along the broken flow of the rays), and by Dumas [65] for a dissipative nonlinear Klein-Gordon equation (using weak profiles as described in section 4).

Higher order tangency is studied by Williams [171], [174], in the case of a simpler geometry (flat boundary, constant coefficient operators and linear phases). He obtains L^∞ asymptotics at all orders, incorporating in the description boundary layer profiles (see section 5.2) involving a third scale $\sqrt{\varepsilon}$: profile equations are then of Schrödinger type (see section 6).

5.2 Boundary layers

Boundary layers are a usual feature in the study on partial differential equations on domains with boundaries: they stem from large variations of the solution in a small region near the boundary. They often appear in vanishing viscosity models, since the boundary conditions are not the same for the viscous (parabolic) and inviscid (hyperbolic) equations.

Guès [85] describes such boundary layers for viscous perturbations ($-\varepsilon^2 \mathcal{E}$, with $\mathcal{E}(t, x, \partial)$ a second order elliptic operator) of semilinear mixed problems (associated with a linear hyperbolic operator $L(t, x, \partial)$). He constructs exact solutions with infinitely accurate WKB asymptotics of the form

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \sum_{n \geq 0} \sqrt{\varepsilon}^n \mathcal{U}_n(t, x, \varphi/\sqrt{\varepsilon}, \varphi/\varepsilon),$$

$$\mathcal{U}_n(t, x, \theta, z) = \underline{\mathcal{U}}_n(t, x) + \mathcal{V}_n(t, x, \theta) + \mathcal{W}_n(t, x, z) + \chi_n(t, x, \theta, z),$$

where the phase φ is transverse to the boundary, and functions of $\theta, z \geq 0$ decay rapidly at $+\infty$ (so that $\underline{u}_n = \lim_{\theta, z \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_n$). Profile equations are analogue to the ones of geometric optics (but of parabolic type), with polarization conditions. When the boundary is non-characteristic for the hyperbolic operator L , the dependence on $\theta = \varphi/\sqrt{\varepsilon}$ is not necessary, and the boundary layer has size ε ; in the characteristic case, the boundary layer is wider, of size $\sqrt{\varepsilon}$. Grenier [79] considers the quasilinear case with characteristic boundary, and Grenier and Guès [81], the non-characteristic quasilinear case. Extensions may be found in the work of Sueur for semilinear systems [160], [161], [164], or quasilinear systems [162], [163].

When oscillations are present in the interior domain, they may interact with boundary layers. This occurs for example in the study of glancing oscillations by Williams [174]. It also occurs for rotating fluid models (see the books of Greenspan [77] and Pedlovsky [143] about oceanography and meteorology, and Dormy [63] about magneto-hydro-dynamics), which in the incompressible case typically have the form

$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} R u^\varepsilon - \varepsilon \Delta u^\varepsilon = -\nabla p^\varepsilon,$$

where p^ε is the pressure, u^ε is the divergence free velocity field, and the operator R is skew-symmetric (for example, $Ru = e \times u$ with a fixed vector e for Coriolis effect). Initial data are well-prepared when they correspond to admissible data for the limit problem. Otherwise, fast time oscillations appear in the interior domain, and are taken into account in the profiles through a dependence on the variable t/ε . For such studies in the well-prepared case, see [82]; in the ill-prepared case, see [135], [36], [18], [73]; Gérard-Varet emphasizes the link with geometric optics in [74] and [75].

This technique is also used for micromagnetism. Carbou, Fabrie and Guès [19] describe the magnetization of a ferromagnetic medium, given by Landau-Lifshitz equation [118], as the exchange coefficient goes to zero; Sanchez [149] studies the diffraction of an electromagnetic wave by a conducting domain, as the conductivity goes to infinity.

5.3 Shocks

Shock waves entering the framework of weakly nonlinear geometric optics are weak shocks, since their amplitude goes to zero with ε . Such an oscillatory shock is a perturbation of a non-oscillating shock ($\underline{u}^\pm, \underline{\psi}$), and is given (in space dimension d , with $x = (x', x_d)$) by a \mathcal{C}^1 hypersurface,

$$x_d = \psi^\varepsilon(t, x') \sim \underline{\psi}(t, x) + \varepsilon^m \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \psi_n(t, x', \vec{\varphi}^0(t, x')/\varepsilon),$$

and on each side $x_d \gtrless \psi^\varepsilon(t, x')$, a \mathcal{C}^1 solution u_\pm^ε to a system of conservation laws,

$$u_\pm^\varepsilon(t, x) \sim \underline{u}^\pm(t, x) + \varepsilon^m \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \mathcal{U}_n^\pm(t, x, \vec{\varphi}^\pm(t, x)/\varepsilon),$$

together with the usual Rankine-Hugoniot jump conditions. Of course, the unknowns are u_{\pm}^{ε} and ψ^{ε} , so that this is a free-boundary problem.

A formal description is due to Artola and Majda [133]. Rigorous results in space dimension one are given by Corli [56] in a multiphase context, with curved phases, using the same ‘‘Picard iterates’’ method as in [100] (and the same transversality assumptions on phases). Williams [173] obtains, in the spirit of [101], multidimensional infinitely accurate asymptotics with smooth profiles, around a planar shock ($\underline{u}^{\pm} = cst$, $\underline{\psi} = \sigma t$), which is uniformly stable in the sense of Kreiss. This is done for linear phases (with a Diophantine assumption on their gradients), whose restrictions to the shock surface are entire multiples of a single phase φ^0 .

We also mention the work of Guès, Métivier, Williams and Zumbrun on the existence and stability of multidimensional viscous shocks [86]. These (non-oscillating) shocks are not weak ones (their size does not depend on a small parameter), and the system of conservation laws is perturbed by a viscous term $-\varepsilon\Delta u^{\varepsilon}$, so that the solution u^{ε} is smooth. The question is ‘‘are the shock solutions of the inviscid system approximated by solutions of the viscous system?’’. The answer is ‘‘yes’’ [87], under the assumption of the existence of a spectrally stable wave profile $U(x', (x_d - \psi)/\varepsilon)$ solution to the viscous system such that $U(x', z) \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} u^{\pm}$. These authors also study [88], [89] the long time stability of planar shocks, using WKB asymptotics for the viscous problem.

6 Three (and more) scale expansions: diffractive optics

So far, we have essentially presented problems where only two scales appear (at least at first sight). But more scales may be present (remember how a third scale appears with boundary layers in section 5.2). In this section, we shall see that a third scale leads to supplement the transport equations (with finite propagation speed) for the profiles with a Schrödinger-type equation (with infinite propagation speed!) taking diffraction into account; this is the usual ‘‘paraxial approximation’’ of laser physics in Kerr media.

6.1 Some three-scale problems

In Donnat’s thesis [58], a model of ‘‘light cigars’’ is described for laser propagation. These are modulated oscillating wavetrains with frequency $1/\varepsilon$, with anisotropic ‘‘support’’, *i.e.* of typical size 1 along a direction, and $\sqrt{\varepsilon}$ along another. Such profiles are used by Boucherès, Colin, Nkonga, Texier and Bourgeade [16] to describe the interaction of a laser with a gas, giving an approximation of Maxwell-Bloch equations (5) by a nonlinear Schrödinger-Bloch system.

‘‘Singular rays’’ of weakly nonlinear geometric optics may also be analysed with three-scale asymptotics. They are hypersurfaces (defined as $\psi(t, x) = 0$ for an unknown function ψ) constituted by rays meeting an obstacle tangentially or at a corner. They model transitions between light and shadow (or sound

and silence, in the case of acoustic waves). Hunter [92] introduces formal WKB expansions,

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \varepsilon^m \sum_{n \geq 0} \sqrt{\varepsilon}^n U_n(t, x, \psi/\sqrt{\varepsilon}, \vec{\varphi}/\varepsilon), \quad (13)$$

with profiles periodic w.r.t. $\theta = \varphi/\varepsilon$, and with limits as $\eta = \psi/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow \pm\infty$ (such a u^ε may be understood as an smooth approximation of a contact discontinuity, *i.e.* a characteristic shock along $\psi = 0$). With an approach close to the one of [60], Dumas [68] validates this asymptotics rigorously, introducing new coherence assumptions on the phases $(\tilde{\psi}, \tilde{\varphi})$, where $\tilde{\psi} = (t, \psi)$ –it turns out that an intermediate phase $\psi_0 = t$ is in general necessary for the profile equations to be well-posed. Profile equations are then transport equations in variables (t, x) , and Schrödinger equations with time $\tau = t/\sqrt{\varepsilon}$ and space variables x .

Three-scale asymptotics of the form (13) also describe oscillations according to perturbed phases (in a more restricted sense than in [80]). For initial data such as

$$u|_{t=0}^\varepsilon = \varepsilon^m \mathcal{U}^0(x, \varphi_\varepsilon^0/\varepsilon) \text{ with } \varphi_\varepsilon^0 = \varphi^0 + \sqrt{\varepsilon}\psi^0,$$

the solution to the Cauchy problem cannot in general be approximated in L^∞ by a two-scale geometric optics description, but profiles as above, satisfying a NLS equation on a torus, achieve such an approximation –see Dumas [66].

Now, we turn to the problem of long-time validity for geometric optics, in which the third scale is not present initially, but naturally comes up. This is the context where first rigorous three-scale asymptotics were proven in nonlinear optics.

6.2 Long-time behavior

A priori, asymptotics from section 2 are valid only on some fixed time interval $[0, t_0]$. In fact, when the profiles are globally defined, uniformly bounded in space-time, and have H^s norms with polynomial growth in time, Lannes and Rauch prove [122] that weakly nonlinear geometric optics is valid up to times $t \sim C \ln(1/\varepsilon)$ –in the linear case, see the study of propagation on this so-called Ehrenfest time for semi-classical Schrödinger equations by De Bièvre and Robert [59].

Diffractive optics. However, in order to describe oscillatory waves with frequency $1/\varepsilon$ on larger propagation scales, one must adapt the geometric optics approach (even in the linear case). First, the cumulated effects of nonlinearities over longer times leads to consider smaller amplitudes. The first natural long-time scale is then the *diffractive time scale* $1/\varepsilon$, and formula (4) is replaced with

$$m = \frac{2}{J-1}. \quad (14)$$

Next, new variables are introduced so as to capture evolution up to $t \sim 1/\varepsilon$, $X = \varepsilon x$ and the slow time $T = \varepsilon t$.

Note that a solution to the eikonal equation is in general not smooth globally in time, unless the operator L has constant coefficients and the phase is linear, of the form $\varphi(t, x) = \beta \cdot x - \omega t$.

Formal three-scale asymptotics for solutions u^ε to (2) are given by Donnat [58],

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \varepsilon^m \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n(T, X, t, x, \theta) |_{(T, X, \theta) = (\varepsilon t, \varepsilon x, (\beta \cdot x - \omega t) / \varepsilon)}. \quad (15)$$

The natural dependence of the profiles U_n (periodic in θ) in the variable X (and x) is of Sobolev type, and continuous (thus bounded) in $T \in [0, T_0]$, whereas for consistency of the Ansatz, *i.e.* $|\varepsilon U_{n+1}| \ll |U_n|$, *sublinear growth* in $t = T/\varepsilon$ is required,

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{t} \|U_n\|_\infty \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Donnat, Joly, Métivier and Rauch [60] give a rigorous justification of this monophasic approximation, for semilinear hyperbolic (non-dispersive) systems, and profiles with no non-oscillating part (assuming that the Taylor expansion of the nonlinearities contains odd parts only). The Schrödinger profile equation (see (18)) is interpreted as a diffractive correction to geometric optics on long times, by analogy with Fresnel's diffraction.

In order to get faster numerics for nonlinear optics, Colin, Gallice and Laurieux (Barraillh) [49] introduce intermediate models between geometric and diffractive optics, keeping a dependence of the eigenvalue λ on ε , instead of Taylor expanding up to the order 2, so that the group velocity becomes a pseudo-differential operator $v(k + \varepsilon \partial_x)$.

Rectification. For general systems, even if the initial data is purely oscillatory, a non-oscillating mode (or mean field) will be created. This is optical *rectification*. In [107], Joly, Métivier and Rauch allow such a phenomenon, still for non-dispersive systems. The case of semilinear dispersive systems is treated by Lannes [119]. We now illustrate the difficulty caused by interaction of oscillating and non-oscillating modes, and simply look at the obtention of the first profile equations.

In the dispersive case, $\pi_0 \neq \text{Id}$ (the origin belongs to the characteristic variety \mathcal{C} of L) and the set of nonzero eikonal frequencies,

$$\mathcal{E} = \{\alpha \in \mathbb{Z}^* \mid \alpha(-\omega, k) \in \mathcal{C}\},$$

is finite, in general. We assume that the only singular point of \mathcal{C} in $\{\alpha(-\omega, k) \mid \alpha \in \mathcal{E}\}$ is the origin. Splitting profiles $U_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} U_n^\alpha(T, X, t, x) e^{i\alpha\theta}$ into average U_n^0 and oscillations $U_n^* = U_n - U_n^0$, one gets from the first powers of ε in the formal expansion of $Lu^\varepsilon - F(u^\varepsilon)$,

$$\Pi U_0^* = U_0^*, \quad \pi_0 U_0^0 = U_0^0, \quad (16a)$$

$$\pi_0 L_1(\partial_{t,x}) \pi_0 U_0^0 = 0, \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} \pi_0 L_1(\partial_{T,X}) \pi_0 U_0^0 - \pi_0 L_1(\partial_{t,x}) L_0^{-1} L_1(\partial_{t,x}) \pi_0 U_0^0 \\ + \pi_0 F_0(U_0^*, U_0^0) = -(\partial_t + \vec{v}_\alpha \cdot \partial_x) U_1^\alpha, \end{aligned} \quad (16c)$$

and $\forall \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$(\partial_t + \vec{v}_\alpha \cdot \partial_x) U_0^\alpha = 0, \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} (\partial_T + \vec{v}_\alpha \cdot \partial_X) U_0^\alpha - \pi_\alpha L_1(\partial_{t,x}) L(i\alpha\beta)^{-1} L_1(\partial_{t,x}) \pi_\alpha U_0^* \\ + \pi_\alpha F_\alpha(U_0^*, U_0^0) = -(\partial_t + \vec{v}_\alpha \cdot \partial_x) U_1^\alpha. \end{aligned} \quad (17b)$$

As for the transport operator at the group velocity, an ‘‘algebraic lemma’’ [168] shows that the second order operator $\pi_\alpha L_1(\partial_{t,x}) L(i\alpha\beta)^{-1} L_1(\partial_{t,x}) \pi_\alpha$ is in fact $\frac{i}{2} \partial_\xi^2 \lambda(\alpha\beta) \cdot (\partial_x, \partial_x)$. On the other hand, the operator $\pi_0 L_1(\partial_{t,x}) \pi_0$, corresponding to low frequencies, and called ‘‘long-wave operator’’, is symmetric hyperbolic, but is not a transport operator, since the origin is a singular point of the characteristic variety \mathcal{C} of L . We simply know [119] that its characteristic variety \mathcal{C}_{LW} is the tangent cone to \mathcal{C} at the origin. This cone may contain hyperplanes $\{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d} \mid \tau + \vec{v}_\alpha \cdot \xi = 0\}$; this is precisely the rectification criterium.

The difficulty now lies in the compatibility of the profile equations. Lannes [119] defines nice average operators, which are the analytic analogue of the algebraic projector Π . They identify and separate the various propagation modes at scale (T, X) and give necessary and sufficient conditions for the profile equations to be solvable, with a t -sublinear corrector U_1 . Split the set of eikonal frequencies \mathcal{E} into the resonant set

$$\mathcal{E}_R = \{\alpha \in \mathcal{E} \mid \{\tau + \vec{v}_\alpha \cdot \xi = 0\} \subset \mathcal{C}_{LW}\},$$

–denoting $U_0^{0,\alpha}$ the corresponding modes of U_0^0 , and $U_0^{0,\alpha'}$, $\alpha' \in \mathcal{E}'$, the others– and the non-resonant set, $\mathcal{E}_{NR} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_R$. Now, the above mentioned conditions consist in replacing (16c), (17b), for a resonant mode $\alpha \in \mathcal{E}_R$, with

$$\pi_0 L_1(\partial_{T,X}) \pi_0 U_0^{0,\alpha} - \pi_0 L_1(\partial_{t,x}) L_0^{-1} L_1(\partial_{t,x}) \pi_0 U_0^{0,\alpha} + \pi_0 F_0(U_0^\alpha, U_0^{0,\alpha}) = 0, \quad (18a)$$

$$(\partial_T + \vec{v}_\alpha \cdot \partial_X) U_0^\alpha - \frac{i}{2} \partial_\xi^2 (\alpha\beta) \cdot (\partial_x, \partial_x) U_0^\alpha + \pi_\alpha F_\alpha(U_0^\alpha, U_0^{0,\alpha}) = 0, \quad (18b)$$

whereas equations for non-resonant modes ($\alpha \in \mathcal{E}_{NR}, \alpha' \in \mathcal{E}'$) are decoupled from the others,

$$\pi_0 L_1(\partial_{T,X}) \pi_0 U_0^{0,\alpha'} - \pi_0 L_1(\partial_{t,x}) L_0^{-1} L_1(\partial_{t,x}) \pi_0 U_0^{0,\alpha'} + \pi_0 F_0(0, U_0^{0,\alpha'}) = 0, \quad (19a)$$

$$(\partial_T + \vec{v}_\alpha \cdot \partial_X) U_0^\alpha - \frac{i}{2} \partial_\xi^2 (\alpha\beta) \cdot (\partial_x, \partial_x) U_0^\alpha + \pi_\alpha F_\alpha(U_0^\alpha, 0) = 0. \quad (19b)$$

The corrector ΠU_1 absorbs the difference between these equations and (16c), (17b),

$$\begin{aligned} \pi_0 L_1(\partial_{t,x}) \pi_0 U_1^0 &= \pi_0 \left[F_0(U_0^*, U_0^0) - \sum_{\alpha \in \mathcal{E}} F_0(U_0^\alpha, U_0^{0,\alpha}) \right], \\ (\partial_t + \vec{v}_\alpha \cdot \partial_x) U_1^\alpha &= \pi_\alpha [F_\alpha(U_0^*, U_0^0) - F_\alpha(U_0^\alpha, U_0^{0,\alpha})], \quad \forall \alpha \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

This mode decoupling produces a solvable system of profile equations (polarization (16a), linear hyperbolic evolution (16b), (17a), slow nonlinear evolution (18)), (19)), and clearly explains the rectification effect: even if U_0^0 vanishes initially, non-oscillating modes may be created by nonlinear interactions in (18a). The asymptotics is then only at first order: the profile U_0 is constructed, together with correctors U_1, U_2 , whose secular growth (see [121]) prevents from higher order asymptotics.

The analogue study for hyperbolic systems with variable coefficients is done by Dumas [66], [68], for WKB expansions with several nonlinear phases: a rescaling in (13) leads to a “weakly nonplanar” version of long-time diffraction,

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \varepsilon^m \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n(\varepsilon t, \varepsilon x, \vec{\psi}(\varepsilon t, \varepsilon x)/\varepsilon, \vec{\varphi}(\varepsilon t, \varepsilon x)/\varepsilon^2).$$

The validation of such asymptotics necessitates coherence assumptions on the phases $\vec{\varphi}, \vec{\psi}$ relatively to the operator L as well as to the tangent operators $\pi_\alpha L \pi_\alpha$.

Self-focusing. Solutions to a (focusing) nonlinear Schrödinger equation may blow up in finite time, and this is usually interpreted in laser physics as the self-focusing of the laser beam [165]. Now, if the solution to the original Maxwell equations describing the beam is globally defined, what does this singularity mean? In [67], Dumas shows that the diffractive profile blow-up corresponds to focusing for a perturbed weakly nonlinear geometric optics model, and Schrödinger approximation is valid at least up to a time t_ε of the order of a negative power of $\ln(1/\varepsilon)$ before blow-up. This shows that, even if each solution u^ε is defined globally in time, it undergoes, between $t = 0$ and $t = t_\varepsilon$, an amplification by a positive power of $\ln(1/\varepsilon)$.

Pulses and continuous spectra. The propagation of pulses over diffractive times is described by Alterman and Rauch in the linear [2] and nonlinear case [4]. The profiles from (15) then have compact support in θ . An important difference with diffractive optics for oscillatory wave trains resides in the profile equations

$$\partial_T \partial_z U - \frac{1}{2} \partial_\xi \lambda(\partial_z)(\partial_x^2 + \partial_y^2) U = F(U).$$

The operator ∂_z^{-1} is not defined on the space of profiles considered, which can be seen, by Fourier transform, as a small divisors problem. Alterman and Rauch solve this difficulty using “infrared cut-offs”: they define approximate profiles by truncating the low frequencies in the equation, and then show the convergence of the approximate solution based on these approximate profiles. See also [154]: even if Schneider and Uecker do not compare their results with the ones from the WKB method, they address the problem of existence and stability of diffractive pulse solutions to nonlinear optics Maxwell’s equations, using a center manifold reduction (so that they get exponential asymptotic stability, but only around some particular family of solutions).

In [6], Barraillh and Lannes extend this approach to profiles with continuous spectra, which model Raman scattering and lasers with large spectrum.

6.3 Transparency and larger amplitudes

Transparency. The analysis above enlightens the nonlinear interactions leading to rectification. Unfortunately, computations on physical models, such as Maxwell-Bloch equations, or ferromagnetic Maxwell equations, reveal that the nonlinearities in (18a) simply vanish! This phenomenon, called *weak transparency*, is expressed as,

$$\forall U \in \mathbb{C}^N, \forall \alpha \in \mathbb{Z}, \quad \pi_\alpha \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} F_\alpha(\pi_\beta U, \pi_{\alpha-\beta} U) = 0.$$

In order to reach nonlinear regimes, one may then increase the observation time, or the amplitude. The latter is studied (for geometric optics time $\mathcal{O}(1)$) by Joly, Métivier, Rauch in [110] for semilinear systems of Maxwell-Bloch type (including the physical ferromagnetism system in space dimension one),

$$\begin{cases} L(\varepsilon \partial) u^\varepsilon + \varepsilon f(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = 0, \\ M(\varepsilon \partial) v^\varepsilon + g(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon h(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (20)$$

with L and M symmetric hyperbolic operators as in (3), and f, g, h bilinear nonlinearities. When weak transparency occurs, they look for solutions with larger amplitude than the usual ones ($\mathcal{O}(1)$ instead of ε). They show that weak transparency is necessary to construct formal WKB expansions, and give a necessary and sufficient criterium (strong transparency) for the stability of these WKB solutions. Strong transparency and the particular structure of the system in fact allow a nonlinear change of unknowns which brings back to the weakly nonlinear setting.

The same transparency property allows Jeanne [98] to construct geometric optics asymptotics of large solutions to (semilinear) Yang-Mills equations from general relativity.

Using Joly-Métivier-Rauch's method, Colin [46] rigorously derives Davey-Stewartson (DS) systems (coupling of (NLS) and a hyperbolic or elliptic equation, modeling for example shallow-water, starting from Euler equations with free surface) from Maxwell-Bloch type systems, over diffractive times. In space dimension one, Schneider [151], [152] obtains similar results *via* normal form techniques. Colin also shows that the obstruction for such a derivation from general hyperbolic systems comes from rectification effects. Next, Colin and Lannes [52] perform the extension to general systems, and apply their results to the Maxwell-Landau-Lifshitz ferromagnetism model (see Landau and Lifshitz [118]), getting mean-field generation. This corresponds to the physics papers of Leblond on pulse propagation, deriving (NLS) [127], combining with an expansion of optical susceptibilities [126], or deriving (DS) in ferromagnetic media [129], [128].

For ill-prepared data allowing rectification, they build a (DS) approximation (valid only over times of the order of $\ln(1/\varepsilon)$). To this end, they need a long-wave correction to the original Ansatz. Furthermore, they assume (in order for the limit (DS) system to be well-posed, *i.e.* to be a Schrödinger-elliptic coupling) that long-wave–short-wave resonance (CROLOC, in French) does not occur, which means that the characteristic varieties of the long-wave operator and of the original operator are not tangent away from the origin. In order to reach $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ times with rectification, they consider [51] solutions with size $\sqrt{\varepsilon}$ (intermediate between 1 and ε), and use four-scale profiles to obtain their CROLOC. A numerical study of long-wave–short-wave resonance is due to Besse and Lannes [14].

Some works on waves in plasmas rely on similar techniques. The basic model is then the quasilinear Euler-Maxwell system (see Sulem and Sulem [165]). Colin, Ebrard, Gallice and Texier [48] study a simpler model, a Klein-Gordon-wave coupling, for which a change of unknowns leads to a semilinear system with weak transparency property. The diffractive time approximation is the Zakharov system, for electromagnetic field u , and ion population n ,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = nu, \\ \partial_t^2 n - \Delta n = \Delta|u|^2. \end{cases}$$

For the full Euler-Maxwell system, Texier [169] rigorously derives, in the geometric optics regime, a weak form of the above system (where ε stands in front of the terms Δu and nu , thanks to “generalized WKB asymptotics”, *i.e.* without eliminating the residual from profile equations.

Conservation laws with a linearly degenerate field. Cheverry, Guès and Métivier have adapted the notion of transparency above to quasilinear systems of conservation laws. They classify nonlinear regimes on times $\mathcal{O}(1)$ with asymptotics

$$u^\varepsilon(t, x) \sim u_0(t, x) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^{k/l} U_k(t, x, \varphi/\varepsilon).$$

The value $l = 1$ corresponds to weakly nonlinear regime; $l = 2$, to *strong oscillations*; $l \geq 3$, to *turbulent oscillations*; $l = \infty$, to *large amplitude* (*i.e.* $\mathcal{O}(1)$) oscillations (more singular solutions are the stratified solutions of Rauch and Reed [147], studied in the quasilinear case by Corli and Guès [57]). A difficulty in WKB analysis, when dealing with amplitudes larger than the weakly nonlinear ones, comes from the fact that the hierarchy of profile equations changes. In particular, a coupling appears between phase and amplitude in the eikonal equation.

In [42], they show that linear degeneracy of one of the fields is a weak transparency condition that ensures existence of formal strong solutions. In [43], they study existence and stability of large amplitude (polarized) waves, under a stronger transparency assumption (existence of a good symmetrizer

and constant multiplicity of the linearly degenerate eigenvalue) that relates the system to Euler non-isentropic gas dynamics equations –see Métivier and Schochet [140] about the stability of large oscillations in time for the entropy. Earlier results on this topic were only formal ones (Serre [159]), or in space dimension one: see Peng [145], Heibig [91], Corli and Guès [57], and Museux [141].

Chevry continues this work, in connection with turbulence. In [40], he proves that (vanishing) viscosity can compensate the lack of transparency. In [41], he converts the stability problem into a “cascade of phases” phenomenon, where the phase has an asymptotic expansion, whose coefficients are coupled with amplitudes.

Supercritical WKB solutions to (NLS). Coupling between phase and amplitude also occurs for large amplitude oscillating solutions to nonlinear Schrödinger equations. Existence of such solutions before caustics is obtained by Grenier [80] for a single nonlinear phase φ , with infinitely accurate WKB expansions (extending results of Gérard [72]), thanks to a “perturbed phase” technique, $\varphi \sim \sum_k \varepsilon^k \varphi_k$.

7 Long waves

We finally mention the situation *a priori* opposite to highly oscillatory problems, where wavelength is large. This is the typical framework of water waves, modelled by Euler equations with free surface, (EFS); see [165]. However, here again come into play the coupling with a mean field, and the “long wave operator”, as for diffractive optics rectification effects from previous section. This explains, for example, the formation of pairs of waves travelling in opposite directions.

Due to symmetries, the second-order differential terms vanish, in long-time asymptotic models, and the limit equations take the form of Korteweg-de Vries (KdV) equations. For one-dimensional quadratic quasilinear dispersive systems of type (2), the appropriate Ansatz is

$$u^\varepsilon(t, x) \sim \varepsilon^2 \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_n(\varepsilon^2 t, t, x),$$

and profiles satisfy transport equation at scale (t, x) so that,

$$U_0(\varepsilon^2 t, t, x) = V_0(T, y)|_{T=\varepsilon^2 t, y=x \pm t}.$$

Furthermore, they are solutions to (KdV) in variables (T, y) ,

$$\partial_T V_0 + \frac{1}{6} \partial_y^3 V_0 + \frac{3}{4} \partial_y (V_0^2) = 0.$$

Ben Youssef and Colin [7], as well as Schneider [153], derive this asymptotics for simplified general systems, getting decoupled equations for each mode. The

case of (EFS) is treated by Schneider and Wayne with [156] or without [155] surface tension.

The case of transverse perturbations is more singular, since it leads (for profiles $U(\varepsilon^2 t, \varepsilon x_2, t, x_1)$) to a Kadomtsev-Petviashvili-type equation (KP),

$$\partial_T V + \frac{1}{6} \partial_y^3 V + \frac{1}{2} \partial_y^{-1} \partial_Y^2 V + \frac{3}{4} \partial_y (V^2) = 0.$$

This is obtained by Gally and Schneider for unidirectional waves, and then by Ben Youssef and Lannes [8] for pairs of waves. Note that (KP) equations are singular with respect to low frequency (in y) solutions. The “infrared cut-off” technique from section 6.2 is thus useful here –and this singularity poses the problem of consistency of the approximate solution, since residuals $Lu^\varepsilon - F(u^\varepsilon)$ may not be small (see Lannes [124]).

The equations are asymptotically decoupled, but coupling appears at least when propagation takes place in a bounded domain (or for periodic solutions). Taking coupling into account also improves convergence rates. Ben Youssef and Lannes highlight such coupling effects between (KP) equations simply using “generalized WKB expansions” as described in paragraph 6.2. A well-known coupled approximation of (EFS) is the Boussinesq system. In fact, Bona, Colin and Lannes [15] obtain, in 2 or 3 space dimension, a result ensuring the simultaneous validity (or non-validity) of a whole three-parameters family of such systems, including Boussinesq. For numerics on this topic, see Labbé and Paumond [117].

The same regime is of interest in micromagnetism, *i.e.* for Maxwell-Landau-Lifshitz system (where the medium responds to the electromagnetic field *via* magnetization). Colin, Galusinski and Kaper [50] study the propagation of pairs of travelling waves in space dimension one, and derive a semilinear heat equation, whereas for two-dimensional perturbations, Sanchez [150] obtains Khokhlov-Zabolotskaya equations.

References

- [1] ALÌ, GIUSEPPE AND HUNTER, JOHN K., *Nonlinear surface waves on a tangential discontinuity in magnetohydrodynamics*, Quart. Appl. Math., Vol. 61, 2003, No. 3, p. 451–474.
- [2] ALTERMAN, DEBORAH AND RAUCH, JEFFREY, *The linear diffractive pulse equation*, Methods Appl. Anal., Vol. 7, 2000, No. 2, p. 263–274.
- [3] ALTERMAN, DEBORAH AND RAUCH, JEFFREY, *Nonlinear geometric optics for short pulses*, J. Differential Equations, Vol. 178, 2002, No. 2, p. 437–465.
- [4] ALTERMAN, DEBORAH AND RAUCH, JEFFREY, *Diffractive nonlinear geometric optics for short pulses*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 34, 2003, No. 6, p. 1477–1502.

- [5] BABIN, ANATOLI V. AND MAHALOV, ALEX AND NICOLAENKO, BASIL, *Resonances and regularity for Boussinesq equations*, Russian J. Math. Phys., Vol. 4, 1996, No. 4, p. 417–428.
- [6] BARRAILH, KAREN AND LANNES, DAVID, *A general framework for diffractive optics and its applications to lasers with large spectrums and short pulses*, SIAM J. Math. Anal., FJOURNAL = SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 34, 2002, No. 3, p. 636–674.
- [7] BEN YOUSSEF, WALID AND COLIN, THIERRY, *Rigorous derivation of Korteweg-de Vries-type systems from a general class of nonlinear hyperbolic systems*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., Vol. 34, 2000, No. 4, p. 873–911.
- [8] BEN YOUSSEF, WALID AND LANNES, DAVID, *The long wave limit for a general class of 2D quasilinear hyperbolic problems*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 27, 2002, No. 5-6, p. 979–1020.
- [9] BENAMOU, JEAN-DAVID, *An introduction to Eulerian geometrical optics (1992–2002)*, J. Sci. Comput., Vol. 19, 2003, No. 1-3, p. 63–93.
- [10] BENAMOU, JEAN-DAVID AND HOCH, PHILIPPE, *GO++: a modular Lagrangian/Eulerian software for Hamilton Jacobi equations of geometric optics type*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., Vol. 36, 2002, No. 5, p. 883–905.
- [11] BENAMOU, J.-D. AND LAFITTE, O. AND SENTIS, R. AND SOLLIEC, I., *A geometrical optics-based numerical method for high frequency electromagnetic fields computations near fold caustics. I*, J. Comput. Appl. Math., Vol. 156, 2003, No. 1, p. 93–125.
- [12] BENAMOU, J.-D. AND LAFITTE, O. AND SOLLIEC, I. AND SENTIS, R., *A geometric optics method for high-frequency electromagnetic fields computations near fold caustics. II. The energy*, J. Comput. Appl. Math., Vol. 167, 2004, No. 1, p. 91–134.
- [13] BENAMOU, JEAN-DAVID AND SOLLIEC, IAN, *An Eulerian method for capturing caustics*, J. Comput. Phys., Vol. 162, 2000, No. 1, p. 132–163.
- [14] BESSE, CHRISTOPHE AND LANNES, DAVID, *A numerical study of the long-wave short-wave resonance for 3D water waves*, Eur. J. Mech. B Fluids, Vol. 20, 2001, No. 5, p. 627–650.
- [15] BONA, JERRY AND COLIN, THIERRY AND LANNES, DAVID, *Long wave approximations for water waves*, in “Mathematical and numerical aspects of wave propagation—WAVES 2003”, p. 489–494, Springer, Berlin, 2003.
- [16] BOUCHERÈS, THOMAS AND COLIN, THIERRY AND NKONGA, BONIFACE AND TEXIER, BENJAMIN AND BOURGEADE, ANTOINE, *Study of a mathematical model for stimulated Raman scattering*, Math. Models Methods Appl. Sci., Vol. 14, 2004, No. 2, p. 217–252.

- [17] BOYD, ROBERT W., *Nonlinear optics*, Academic Press, 2003, p. xvi+578.
- [18] BRESCH, DIDIER AND DESJARDINS, BENOÎT AND GÉRARD-VARET, DAVID, *Rotating fluids in a cylinder*, Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. 11, 2004, No. 1, p. 47–82.
- [19] CARBOU, GILLES AND FABRIE, PIERRE AND GUÈS, OLIVIER, *Couche limite dans un modèle de ferromagnétisme*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 27, 2002, No. 7-8, p. 1467–1495.
- [20] CARLES, RÉMI, *Comportements précisés près d'une caustique en optique géométrique non linéaire*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 23, 1998, No. 11-12, p. 1929–1967.
- [21] CARLES, RÉMI, *Geometric optics with caustic crossing for some nonlinear Schrödinger equations*, Indiana Univ. Math. J., Vol. 49, 2000, No. 2, p. 475–551.
- [22] CARLES, RÉMI, *Focusing on a line for nonlinear Schrödinger equations in \mathbf{R}^2* , Asymptot. Anal., Vol. 24, 2000, No. 3-4, p. 255–276.
- [23] CARLES, RÉMI, *Geometric optics and long range scattering for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys., Vol. 220, 2001, No. 1, p. 41–67.
- [24] CARLES, RÉMI, *Semi-classical Schrödinger equations with harmonic potential and nonlinear perturbation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, Vol. 20, 2003, No. 3, p. 501–542.
- [25] CARLES, RÉMI AND FERMANIAN KAMMERER, CLOTILDE AND GALLAGHER, ISABELLE, *On the role of quadratic oscillations in nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal., Vol. 203, 2003, No. 2, p. 453–493.
- [26] CARLES, RÉMI AND KERAANI, SAHBI, *On the role of quadratic oscillations in nonlinear Schrödinger equations II. The L^2 -critical case*, Trans. AMS, to appear.
- [27] CARLES, RÉMI AND LANNES, DAVID, *Focusing of a pulse with arbitrary phase shift for a nonlinear wave equation*, Bull. Soc. Math. France, Vol. 131, 2003, No. 2, p. 289–306.
- [28] CARLES, RÉMI AND LANNES, DAVID, *Focusing at a point with caustic crossing for a class of nonlinear equations*, Colloque franco-tunisien, Hammamet, 2003.
- [29] CARLES, RÉMI AND MARKOWICH, PETER A. AND SPARBER, CHRISTOF, *Semiclassical asymptotics for weakly nonlinear Bloch waves*, J. Statist. Phys., Vol. 117, 2004, No. 1-2, p. 343–375.

- [30] CARLES, RÉMI AND MAUSER, NORBERT J. AND STIMMING, HANS P., *(Semi)classical limit of the Hartree equation with harmonic potential*, SIAM J. Appl. Math., to appear.
- [31] CARLES, RÉMI AND MILLER, LUC, *Semiclassical nonlinear Schrödinger equations with potential and focusing initial data*, Osaka J. Math., Vol. 41, 2004, No. 3, p. 693–725.
- [32] CARLES, RÉMI AND NAKAMURA, YOSHIHISA, *Nonlinear Schrödinger equations with Stark potential*, Hokkaido Math. J., Vol. 33, 2004, No. 3, p. 719–729.
- [33] CARLES, RÉMI AND RAUCH, JEFFREY, *Focusing of spherical nonlinear pulses in \mathbb{R}^{1+3}* , Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 130, 2002, No. 3, p. 791–804.
- [34] CARLES, RÉMI AND RAUCH, JEFFREY, *Focusing of spherical nonlinear pulses in \mathbb{R}^{1+3} . II. Nonlinear caustic*, Rev. Mat. Iberoamericana, Vol. 20, 2004, No. 3, p. 815–864.
- [35] CARLES, RÉMI AND RAUCH, JEFFREY, *Focusing of spherical nonlinear pulses in R^{1+3} . III. Sub and supercritical cases*, Tohoku Math. J. (2), Vol. 56, 2004, No. 3, p. 393–410.
- [36] CHEMIN, JEAN-YVES AND DESJARDINS, BENOÎT AND GALLAGHER, ISABELLE AND GRENIER, EMMANUEL, *Ekman boundary layers in rotating fluids*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., Vol. 8, 2002, p. 441–466.
- [37] CHEVERRY, CHRISTOPHE, *Propagation d’oscillations près d’un point diffractif*, J. Math. Pures Appl. (9), Vol. 75, 1996, No. 5, p. 419–467.
- [38] CHEVERRY, CHRISTOPHE, *Oscillations de faible amplitude pour les systèmes 2×2 de lois de conservation*, Asymptotic Anal., Vol. 12, 1996, No. 1, p. 1–24.
- [39] CHEVERRY, CHRISTOPHE, *Justification de l’optique géométrique non linéaire pour un système de lois de conservation*, Duke Math. J., Vol. 87, 1997, No. 2, p. 213–263.
- [40] CHEVERRY, CHRISTOPHE, *Propagation of oscillations in real vanishing viscosity limit*, Comm. Math. Phys., Vol. 247, 2004, No. 3, p. 655–695.
- [41] CHEVERRY, CHRISTOPHE, *Cascade of phases in turbulent flows*, Bull. SMF, to appear.
- [42] CHEVERRY, CHRISTOPHE AND GUÈS, OLIVIER AND MÉTIVIER, GUY, *Oscillations fortes sur un champ linéairement dégénéré*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), Vol. 36, 2003, No. 5, p. 691–745.
- [43] CHEVERRY, C. AND GUÈS, O. AND MÉTIVIER, G., *Large-amplitude high-frequency waves for quasilinear hyperbolic systems*, Adv. Differential Equations, Vol. 9, 2004, No. 7-8, p. 829–890.

- [44] CHIKHI, JAMEL, *Sur la réflexion des oscillations pour un système à deux vitesses*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., Vol. 313, 1991, No. 10, p. 675–678.
- [45] CHOQUET-BRUHAT, YVONNE, *Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, J. Math. Pures Appl. (9), Vol. 48, 1969, p. 117–158.
- [46] COLIN, THIERRY, *Rigorous derivation of the nonlinear Schrödinger equation and Davey-Stewartson systems from quadratic hyperbolic systems*, Asymptot. Anal., Vol. 31, 2002, No. 1, p. 69–91.
- [47] COLIN, THIERRY AND COLIN, MATHIEU, *A numerical model for the Raman Amplification for laser-plasma interaction*, J. Comp. Appl. Math., to appear.
- [48] COLIN, THIERRY AND EBRARD, GÉRALDINE AND GALLICE, GÉRARD AND TEXIER, BENJAMIN, *Justification of the Zakharov model from Klein-Gordon-wave systems*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 29, 2004, No. 9-10, p. 1365–1401.
- [49] COLIN, THIERRY AND GALLICE, GÉRARD AND LAURIOUX, KAREN, *Intermediate models in nonlinear optics*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 36, 2005, No. 5, p. 1664–1688.
- [50] COLIN, THIERRY AND GALUSINSKI, CÉDRIC AND KAPER, HANS G., *Waves in ferromagnetic media*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 27, 2002, No. 7-8, p. 1625–1658.
- [51] COLIN, THIERRY AND LANNES, DAVID, *Long-wave short-wave resonance for nonlinear geometric optics*, Duke Math. J., Vol. 107, 2001, No. 2, p. 351–419.
- [52] COLIN, THIERRY AND LANNES, DAVID, *Justification of and long-wave correction to Davey-Stewartson systems from quadratic hyperbolic systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. 11, 2004, No. 1, p. 83–100.
- [53] COLIN, THIERRY AND NKONGA, BONIFACE, *A numerical model for light interaction with a two-level atom medium*, Phys. D, Vol. 188, 2004, No. 1-2, p. 92–118.
- [54] COLIN, THIERRY AND NKONGA, BONIFACE, *Multiscale numerical method for nonlinear Maxwell equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, Vol. 5, 2005, No. 3, p. 631–658.
- [55] COLIN, THIERRY AND TORRI, VINCENT, *Numerical scheme for the 2D Maxwell-Bloch equations modeling ultrashort pulses*, Preprint, 2005.
- [56] CORLI, ANDREA, *Weakly non-linear geometric optics for hyperbolic systems of conservation laws with shock waves*, Asymptotic Anal., Vol. 10, 1995, No. 2, p. 117–172.

- [57] CORLI, ANDREA AND GUÈS, OLIVIER, *Stratified solutions for systems of conservation laws*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 353, 2001, No. 6, p. 2459–2486.
- [58] DONNAT, PHILIPPE, *Quelques contributions mathématiques en optique non linéaire*, Thèse, Ecole Polytechnique, 1994.
- [59] DE BIÈVRE, STEPHAN AND ROBERT, DIDIER, *Semiclassical propagation on $|\log \hbar|$ time scales*, Int. Math. Res. Not., 2003, No. 12, p. 667–696.
- [60] DONNAT, PHILIPPE AND JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Diffractionnelle non linéaire géométrique*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1995–1996, p. Exp. No. XVII, 25, 1996.
- [61] DONNAT, PHILLIPE AND RAUCH, JEFFREY, *Dispersive nonlinear geometric optics*, J. Math. Phys., Vol. 38, 1997, No. 3, p. 1484–1523.
- [62] DONNAT, PHILLIPE AND RAUCH, JEFFREY, *Modeling the dispersion of light*, in “Singularities and oscillations (Minneapolis, MN, 1994/1995)”, IMA Vol. Math. Appl., Vol. 91, p. 17–35, Springer, New York, 1997.
- [63] Dormy, Emmanuel, *Modélisation dynamique de la dynamo terrestre*, Thèse, Institut de Physique du Globe, Paris, 1997.
- [64] DUISTERMAAT, JOHANNES J., *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 27, 1974, p. 207–281.
- [65] DUMAS, ÉRIC, *Propagation of oscillations near a diffractive point for a dissipative and semilinear Klein-Gordon equation*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 27, 2002, No. 5-6, p. 953–978.
- [66] DUMAS, ÉRIC, *Periodic multiphase nonlinear diffractive optics with curved phases*, Indiana Univ. Math. J., Vol. 52, 2003, No. 3, p. 769–810.
- [67] DUMAS, ÉRIC, *An example of catastrophic self-focusing in nonlinear optics?*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 35, 2003, No. 1, p. 268–278.
- [68] DUMAS, ÉRIC, *Nonlinear diffractive optics with curved phases: beam dispersion and transition between light and shadow*, Asymptot. Anal., Vol. 38, 2004, No. 1, p. 47–91.
- [69] FRIEDLANDER, F. G., *The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., Vol. 79, 1976, No. 1, p. 145–159.
- [70] GALLAGHER, ISABELLE, *Applications of Schochet’s methods to parabolic equations*, J. Math. Pures Appl. (9), Vol. 77, 1998, No. 10, p. 989–1054.

- [71] GALLAY, THIERRY AND SCHNEIDER, GUIDO, *KP description of unidirectional long waves. The model case*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, Vol. 131, 2001, No. 4, p. 885–898.
- [72] GÉRARD, PATRICK, *Remarques sur l'analyse semi-classique de l'équation de Schrödinger non linéaire*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1992–1993, p. Exp. No. XIII, 13, École Polytech., Palaiseau, 1993.
- [73] GÉRARD-VARET, DAVID, *Highly rotating fluids in rough domains*, J. Math. Pures Appl. (9), Vol. 82, 2003, No. 11, p. 1453–1498.
- [74] GÉRARD-VARET, DAVID, *A geometric optics type approach to fluid boundary layers*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 28, 2003, No. 9–10, p. 1605–1626.
- [75] GÉRARD-VARET, DAVID, *Formal derivation of boundary layers in fluid mechanics*, J. Math. Fluid Mech., Vol. 7, 2005, No. , p. 179–200.
- [76] GOSSE, LAURENT, *A case study on the reliability of multiphase WKB approximation for the one-dimensional Schrödinger equation*, Preprint HYKE2005-037, 2005.
- [77] GREENSPAN, HARVEY PHILIP, *The theory of rotating fluids*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [78] GRENIER, EMMANUEL, *Oscillatory perturbations of the Navier-Stokes equations*, J. Math. Pures Appl. (9), Vol. 76, 1997, No. 6, p. 477–498.
- [79] GRENIER, EMMANUEL, *Boundary layers for parabolic regularizations of totally characteristic quasilinear parabolic equations*, J. Math. Pures Appl. (9), Vol. 76, 1997, No. 10, p. 965–990.
- [80] GRENIER, EMMANUEL, *Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 126, 1998, No. 2, p. 523–530.
- [81] GRENIER, EMMANUEL AND GUÈS, OLIVIER, *Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems*, J. Differential Equations, Vol. 143, 1998, No. 1, p. 110–146.
- [82] GRENIER, EMMANUEL AND MASMOUDI, NADER, *Ekman layers of rotating fluids, the case of well prepared initial data*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 22, 1997, No. 5-6, p. 953–975.
- [83] GUÈS, OLIVIER, *Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilinéaires*, Asymptotic Anal., Vol. 6, 1993, No. 3, p. 241–269.

- [84] GUÈS, OLIVIER, *Ondes solitaires engendrées par interaction d'ondes oscillantes non linéaires*, J. Math. Pures Appl. (9), Vol. 74, 1995, No. 3, p. 199–252.
- [85] GUÈS, OLIVIER, *Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), Vol. 45, 1995, No. 4, p. 973–1006.
- [86] GUÈS, OLIVIER AND MÉTIVIER, GUY AND WILLIAMS, MARK AND ZUMBRUN, KEVIN, *Boundary layer and long time stability for multidimensional viscous shocks*, Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. 11, 2004, No. 1, p. 131–160.
- [87] GUÈS, OLIVIER AND MÉTIVIER, GUY AND WILLIAMS, MARK AND ZUMBRUN, KEVIN, *Multidimensional viscous shocks. II. The small viscosity limit*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 57, 2004, No. 2, p. 141–218.
- [88] GUÈS, OLIVIER AND MÉTIVIER, GUY AND WILLIAMS, MARK AND ZUMBRUN, KEVIN, *Multidimensional viscous shocks. I. Degenerate symmetrizers and long time stability*, J. Amer. Math. Soc., Vol. 18, 2005, No. 1, p. 61–120.
- [89] GUÈS, OLIVIER AND MÉTIVIER, GUY AND WILLIAMS, MARK AND ZUMBRUN, KEVIN, *Existence and stability of multidimensional shock fronts in the vanishing viscosity limit*, Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 175, 2005, No. 2, p. 151–244.
- [90] GUÈS, OLIVIER AND WILLIAMS, MARK, *Curved shocks as viscous limits: a boundary problem approach*, Indiana Univ. Math. J., Vol. 51, 2002, No. 2, p. 421–450.
- [91] HEIBIG, ARNAUD, *Error estimates for oscillatory solutions to hyperbolic systems of conservation laws*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 18, 1993, No. 1-2, p. 281–304.
- [92] HUNTER, JOHN K., *Transverse diffraction of nonlinear waves and singular rays*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 48, 1988, No. 1, p. 1–37.
- [93] HUNTER, JOHN K., *Nonlinear surface waves*, in “Current progress in hyperbolic systems: Riemann problems and computations” (Brunswick, ME, 1988), Contemp. Math., Vol. 100, p. 185–202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [94] HUNTER, JOHN K., *Asymptotic equations for nonlinear hyperbolic waves*, in “Surveys in applied mathematics”, Vol. 2, Surveys Appl. Math., Vol. 2, p. 167–276, Plenum Press, New York, 1995
- [95] HUNTER, JOHN K. AND KELLER, JOSEPH B., *Weakly nonlinear high frequency waves*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 36, 1983, No. 5, p. 547–569.

- [96] HUNTER, JOHN K. AND KELLER, JOSEPH B., *Caustics of nonlinear waves*, Wave Motion, Vol. 9, 1987, No. 5, p. 429–443.
- [97] HUNTER, JOHN K. AND MAJDA, ANDREW AND ROSALES, RODOLFO R., *Resonantly interacting, weakly nonlinear hyperbolic waves. II. Several space variables*, Stud. Appl. Math., Vol. 75, 1986, No. 3, p. 187–226.
- [98] JEANNE, PIERRE-YVES, *Optique géométrique pour des systèmes semi-linéaires avec invariance de jauge*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.), Vol. 90, 2002, p. 160.
- [99] JOLY, JEAN-LUC, *Sur la propagation des oscillations par un système hyperbolique semi-linéaire en dimension 1 d'espace*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., Vol. 296, 1983, No. 15, p. 669–672.
- [100] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Resonant one-dimensional nonlinear geometric optics*, J. Funct. Anal., Vol. 114, 1993, No. 1, p. 106–231.
- [101] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Generic rigorous asymptotic expansions for weakly nonlinear multidimensional oscillatory waves*, Duke Math. J., Vol. 70, 1993, No. 2, p. 373–404.
- [102] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Coherent nonlinear waves and the Wiener algebra*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), Vol. 44, 1994, No. 1, p. 167–196.
- [103] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), Vol. 28, 1995, No. 1, p. 51–113.
- [104] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Trilinear compensated compactness and nonlinear geometric optics*, Ann. of Math. (2), Vol. 142, 1995, No. 1, p. 121–169.
- [105] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Focusing at a point and absorption of nonlinear oscillations*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 347, 1995, No. 10, p. 3921–3969.
- [106] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Nonlinear oscillations beyond caustics*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 49, 1996, No. 5, p. 443–527.
- [107] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Diffraction nonlinear geometric optics with rectification*, Indiana Univ. Math. J., Vol. 47, 1998, No. 4, p. 1167–1241.
- [108] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Recent results in non-linear geometric optics*, in “Hyperbolic problems: theory, numerics, applications”, Vol. II (Zürich, 1998), Internat. Ser. Numer. Math., Vol. 130, p. 723–736, Birkhäuser, Basel, 1999.

- [109] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Caustics for dissipative semilinear oscillations*, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 144, 2000, No. 685, p. viii+72.
- [110] JOLY, JEAN-LUC AND MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Transparent nonlinear geometric optics and Maxwell-Bloch equations*, J. Differential Equations, Vol. 166, 2000, No. 1, p. 175–250.
- [111] JOLY, JEAN-LUC AND RAUCH, JEFFREY, *Nonlinear resonance can create dense oscillations*, in “Microlocal analysis and nonlinear waves” (Minneapolis, MN, 1988–1989), IMA Vol. Math. Appl., Vol. 30, p. 113–123, Springer, New York, 1991.
- [112] JOLY, JEAN-LUC AND RAUCH, JEFFREY, *Justification of multidimensional single phase semilinear geometric optics*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 330, 1992, No. 2, p. 599–623.
- [113] KALYAKIN, LEONID A., *Long-wave asymptotics. Integrable equations as the asymptotic limit of nonlinear systems*, Uspekhi Mat. Nauk, Vol. 44, 1989, No. 1(265), p. 5–34, 247.
- [114] KLAINERMAN, SERGIU AND MAJDA, ANDREW, *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 34, 1981, No. 4, p. 481–524.
- [115] KLAINERMAN, SERGIU AND MAJDA, ANDREW, *Compressible and incompressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 35, 1982, No. 5, p. 629–651.
- [116] KLEIN, RUPERT, *Asymptotic analyses for atmospheric flows and the construction of asymptotically adaptive numerical methods*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., Vol. 80, 2000, No. 11-12, p. 765–777.
- [117] LABBÉ, STÉPHANE AND PAUMOND, LIONEL, *Numerical comparisons of two long-wave limit models*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., Vol. 38, 2004, No. 3, p. 419–436.
- [118] LANDAU, LEV D. AND LIFSHITZ, EVGENIJ M., *Électrodynamique des milieux continus*, Physique théorique (008), Mir, New York, 1969.
- [119] LANNES, DAVID, *Dispersive effects for nonlinear geometrical optics with rectification*, Asymptot. Anal., Vol. 18, 1998, No. 1-2, p. 111–146.
- [120] LANNES, DAVID, *Nonlinear geometrical optics for oscillatory wave trains with a continuous oscillatory spectrum*, Adv. Differential Equations, Vol. 6, 2001, No. 6, p. 731–768.
- [121] LANNES, DAVID, *Secular growth estimates for hyperbolic systems*, J. Differential Equations, Vol. 190, 2003, No. 2, p. 466–503.

- [122] LANNES, DAVID AND RAUCH, JEFFREY, *Validity of nonlinear geometric optics with times growing logarithmically*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 129, 2001, No. 4, p. 1087–1096.
- [123] LANNES, DAVID, *Secular growth estimates for hyperbolic systems*, J. Differential Equations, Vol. 190, 2003, No. 2, p. 466–503.
- [124] LANNES, DAVID, *Consistency of the KP approximation*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 2003, No. suppl., p. 517–525.
- [125] LAX, PETER D., *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems*, Duke Math. J., Vol. 24, 1957, p. 627–646.
- [126] LEBLOND, HERVÉ, *Mixed perturbative expansion: the validity of a model for the cascading*, J. Nonlinear Math. Phys., Vol. 9, 2002, No. 2, p. 126–143.
- [127] LEBLOND, HERVÉ, *Rigorous derivation of the NLS in magnetic films*, J. Phys. A, Vol. 34, 2001, No. 45, p. 9687–9712.
- [128] LEBLOND, HERVÉ, *Electromagnetic waves in ferromagnets: a Davey-Stewartson-type model*, J. Phys. A, Vol. 32, 1999, No. 45, p. 7907–7932.
- [129] LEBLOND, HERVÉ, *Electromagnetic waves in ferrites: from linear absorption to the nonlinear Schrödinger equation*, J. Phys. A, Vol. 29, 1996, No. 15, p. 4623–4639.
- [130] LUDWIG, DONALD, *Uniform asymptotic expansions at a caustic*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 19, 1966, p. 215–250.
- [131] MCLAUGHLIN, DAVID AND PAPANICOLAOU, GEORGE AND TARTAR, LUC, *Weak limits of semilinear hyperbolic systems with oscillating data*, in “Macroscopic modelling of turbulent flows” (Nice, 1984), Lecture Notes in Phys., Vol. 230, p. 277–289, Springer, Berlin, 1985.
- [132] MAJDA, ANDREW, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 53, Springer-Verlag, New York, 1984, p. viii+159.
- [133] MAJDA, ANDREW J. AND ARTOLA, MIGUEL, *Nonlinear geometric optics for hyperbolic mixed problems*, Analyse mathématique et applications, p. 319–356, Gauthier-Villars, Montrouge, 1988.
- [134] MAJDA, ANDREW AND ROSALES, RODOLFO, *Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves. I. A single space variable*, Stud. Appl. Math., Vol. 71, 1984, No. 2, p. 149–179.
- [135] MASMOUDI, NADER, *Ekman layers of rotating fluids: the case of general initial data*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 53, 2000, No. 4, p. 432–483.
- [136] MELROSE, RICHARD B., *Local Fourier-Airy integral operators*, Duke Math. J., Vol. 42, 1975, No. 4, p. 583–604.

- [137] MELROSE, RICHARD B., *Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems*, Duke Math. J., Vol. 42, 1975, No. 4, p. 605–635.
- [138] MÉTIVIER, GUY AND RAUCH, JEFFREY, *Real and complex regularity are equivalent for hyperbolic characteristic varieties*, Differential Integral Equations, Vol. 16, 2003, No. 8, p. 993–999.
- [139] MÉTIVIER, GUY AND SCHOCHET, STEVEN, *Trilinear resonant interactions of semilinear hyperbolic waves*, Duke Math. J., Vol. 95, 1998, No. 2, p. 241–304.
- [140] MÉTIVIER, GUY AND SCHOCHET, STEVEN, *The incompressible limit of the non-isentropic Euler equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 158, 2001, No. 1, p. 61–90.
- [141] MUSEUX, ALEXIS, *Stratified weak solutions of the 1-D Lagrangian Euler equations are viscosity solutions*, Adv. Differential Equations, Vol. 9, 2004, No. 11-12, p. 1395–1436.
- [142] NEWELL, ALAN C. AND MOLONEY, JEROME V., *Nonlinear optics*, in “Advanced Topics in the Interdisciplinary Mathematical Sciences”, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1992, p. xii+436.
- [143] PEDLOVSKY, J., *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [144] PEGO, ROBERT L., *Some explicit resonating waves in weakly nonlinear gas dynamics*, Stud. Appl. Math., Vol. 79, 1988, No. 3, p. 263–270.
- [145] PENG, YUE-JUN, *Solutions faibles globales pour l'équation d'Euler d'un fluide compressible avec de grandes données initiales*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 17, 1992, No. 1-2, p. 161–187.
- [146] RAUCH, JEFFREY, *Lectures on Geometric Optics*,
<http://www.math.lsa.umich.edu/~rauch/oldnlgonotes.pdf>, 1996, p. 150.
- [147] RAUCH, JEFFREY AND REED, MICHAEL, *Bounded, stratified and striated solutions of hyperbolic systems*, in “Nonlinear partial differential equations and their applications”, Collège de France Seminar, Vol. IX (Paris, 1985–1986), Pitman Res. Notes Math. Ser., Vol. 181, p. 334–351, Longman Sci. Tech., Harlow, 1988.
- [148] SABLÉ-TOUGERON, MONIQUE, *Justification de l'optique géométrique faiblement non linéaire pour le problème mixte: cas des concentrations*, Asymptotic Anal., Vol. 12, 1996, No. 3, p. 169–186.
- [149] SANCHEZ, DAVID, *Boundary layer on a high-conductivity domain*, Commun. Pure Appl. Anal., Vol. 1, 2002, No. 4, p. 547–564.

- [150] SANCHEZ, DAVID, *Long waves in ferromagnetic media, Khokhlov-Zabolotskaya equation*, J. Differential Equations, Vol. 210, 2005, No. 2, p. 263–289.
- [151] SCHNEIDER, GUIDO, *Approximation of the Korteweg-de Vries equation by the nonlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations, Vol. 147, 1998, No. 2, p. 333–354.
- [152] SCHNEIDER, GUIDO, *Justification of modulation equations for hyperbolic systems via normal forms*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., Vol. 5, 1998, No. 1, p. 69–82.
- [153] SCHNEIDER, GUIDO, *The long wave limit for a Boussinesq equation*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 58, 1998, No. 4, p. 1237–1245.
- [154] SCHNEIDER, GUIDO AND UECKER, HANNES, *Existence and stability of modulating pulse solutions in Maxwell's equations describing nonlinear optics*, Z. Angew. Math. Phys., Vol. 54, 2003, No. 4, p. 677–712.
- [155] SCHNEIDER, GUIDO AND WAYNE, C. EUGENE, *The long-wave limit for the water wave problem. I. The case of zero surface tension*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 53, 2000, No. 12, p. 1475–1535.
- [156] SCHNEIDER, GUIDO AND WAYNE, C. EUGENE, *The rigorous approximation of long-wavelength capillary-gravity waves*, Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 162, 2002, No. 3, p. 247–285.
- [157] SCHOCHET, STEVEN, *Resonant nonlinear geometric optics for weak solutions of conservation laws*, J. Differential Equations, Vol. 113, 1994, No. 2, p. 473–504.
- [158] SCHOCHET, STEVEN, *Fast singular limits of hyperbolic PDEs*, J. Differential Equations, Vol. 114, 1994, No. 2, p. 476–512.
- [159] SERRE, DENIS, *Oscillations non-linéaires hyperboliques de grande amplitude; $\dim \geq 2$* , in “Nonlinear variational problems and partial differential equations”, p. 245–294, Harlow, Longman Sci. Tech., Isola d’Elba (1990), 1995.
- [160] SUEUR, FRANCK, *Couches limites semilinéaires*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, to appear.
- [161] SUEUR, FRANCK, *Perturbations visqueuses de solutions discontinues de systèmes hyperboliques semilinéaires*, Annales de l’Institut Fourier, to appear.
- [162] SUEUR, FRANCK, *Couches limites: un problème inverse*, Communications in Partial Differential Equations, to appear.
- [163] SUEUR, FRANCK, *Entropy boundary layers*, Preprint, 2005.

- [164] SUEUR, FRANCK, *Remarks about a theorem by J. Rauch*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 54, 2005, No. 4, p. 1107–1144.
- [165] SULEM, CATHERINE AND SULEM, PIERRE-LOUIS, *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*, in “Applied Mathematical Sciences”, Vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [166] TARTAR, LUC, *Solutions oscillantes des équations de Carleman*, Goulaouic-Meyer-Schwartz Seminar, 1980–1981, p. Exp. No. XII, 15, École Polytech., Palaiseau, 1981.
- [167] TARTAR, LUC, *Étude des oscillations dans les équations aux dérivées partielles non linéaires*, in “Trends and applications of pure mathematics to mechanics” (Palaiseau, 1983), Lecture Notes in Phys., Vol. 195, p. 384–412, Springer, Berlin, 1984.
- [168] TEXIER, BENJAMIN, *The short-wave limit for nonlinear symmetric hyperbolic systems*, Adv. Differential Equations, Vol. 9, 2004, No. 1-2, p. 1–52.
- [169] TEXIER, BENJAMIN, *WKB asymptotics for the Euler-Maxwell equations*, Asymptot. Anal., Vol. 42, 2005, No. 3-4, p. 211–250.
- [170] WHITHAM, GERALD B., *Linear and nonlinear waves*, in “Pure and Applied Mathematics” (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1999.
- [171] WILLIAMS, MARK, *Resonant reflection of multidimensional semilinear oscillations*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 18, 1993, No. 11, p. 1901–1959.
- [172] WILLIAMS, MARK, *Nonlinear geometric optics for hyperbolic boundary problems*, Comm. Partial Differential Equations, Vol. 21, 1996, No. 11-12, p. 1829–1895.
- [173] WILLIAMS, MARK, *Highly oscillatory multidimensional shocks*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 52, 1999, No. 2, p. 129–192.
- [174] WILLIAMS, MARK, *Boundary layers and glancing blow-up in nonlinear geometric optics*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), Vol. 33, 2000, No. 3, p. 383–432.

Regularity and singularity in the three-dimensional Navier-Stokes equations*

JAMES C. ROBINSON

Mathematics Institute, University of Warwick,
Coventry, CV4 7AL. U.K.

`jcr@maths.warwick.ac.uk`

Abstract

This survey article aims to describe, in a relatively informal way, some of the rigorous results that are currently available concerning the existence, uniqueness, and regularity of solutions of the three-dimensional Navier-Stokes equations. It also discusses various results that limit the size of the set of possible space-time singularities.

1 The problem of regularity

The modern theory of the Navier-Stokes equations began in the 1930s with Leray's pioneering work (e.g. Leray, 1934). Despite some moderate advances since, in essence our understanding remains much as it did then: even for the case of zero forcing in a geometry free from boundaries there is currently no result guaranteeing the existence of unique solutions for all time.

The purpose of this paper is to introduce some of the mathematical ideas used in the current theory – many of which are to be found in Leray's 1934 paper – and then to give a broad overview of our present understanding, including recent results that limit the size of the set of possible singularities. The presentation aims to be accessible to those without a background in functional analysis, but nevertheless give an accurate picture. Generally formal definitions and mathematical technicalities are confined to the footnotes, although at times they are unavoidable when seeking to make precise statements of the results.

*This paper is dedicated to all at the Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico at the Universidad de Sevilla, whose hospitality I have enjoyed frequently in recent years. I would like to thank Masoumeh Dashti, Daniel Peralta-Salas, and Oliver Tearne for their helpful comments on a preliminary version of this paper, and to Enrique Fernández-Cara for detailed comments on my (almost) final version. I am currently a Royal Society University Research Fellow and would also like to thank the Society for all their support.

Fecha de recepción: 2/11/05

A more detailed treatment than is possible here, which avoids excessive technicalities by using Fourier series throughout is given in the book by Doering and Gibbon (1995). Of the more technical texts on the Navier-Stokes problem, that by Temam (1977), recently updated (2001), is a standard reference, and that by Constantin and Foias (1988) stands out as concise and precise. A nice summary of existence and uniqueness results for the Navier-Stokes and related equations has been given by Fernández-Cara (2005) in a recent volume of this Bulletin.

2 The existence and uniqueness problem

Our first task is to describe the problem mathematically. We will do so in the simplest possible case, but even for this situation satisfactory existence and uniqueness results are still beyond our current reach.

Since the presence of boundaries complicates the mathematical treatment, the theory is often developed in the first instance either in the whole space or with periodic boundary conditions. Here we choose to concentrate on the periodic case (cf. Temam (1983): "... it is interesting to consider another boundary condition which has no physical meaning"). However, with a little additional work all the theory that will now be described can be applied in the case of Dirichlet ('no slip') boundary conditions on a bounded domain.

We will consider the incompressible Navier-Stokes equations

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

subject to periodic boundary conditions on $Q = [0, L]^3$ and with a given initial condition $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$. Here $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is the vector-valued velocity field, ν is the kinematic viscosity, and $p = p(\mathbf{x}, t)$ is the pressure. Note that in addition to avoiding the 'problem' of boundaries we are imposing no forces on the fluid. In this case any initial disturbance dies down and the fluid eventually to come to rest. Nevertheless, a rigorous result guaranteeing the existence of a unique solution is still unavailable.

For mathematical convenience we will also assume that the total momentum of the fluid is zero, or equivalently that the average of \mathbf{u} over the box vanishes,

$$\int_Q \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 0.$$

This assumption can be relaxed, but it greatly eases the presentation.

2.1 Energy and enstrophy – spaces of admissible solutions

Two quantities which are important both physically and mathematically are the (kinetic) energy and the enstrophy (the square integral of the vorticity).

The *kinetic energy* is one half of the "kinetic energy norm"

$$\|\mathbf{u}\|^2 := \int_Q |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

The collection of all possible divergence-free flow fields with finite kinetic energy we will denote by H ,

$$H = \{\mathbf{u} : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \int_Q \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \text{and} \quad \|\mathbf{u}\|^2 < +\infty\},$$

and this forms one possible choice of ‘admissible flow fields’.

The *enstrophy* is the square integral of the vorticity $\text{curl } \mathbf{u}$,

$$\int_Q |\text{curl } \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x},$$

and is equal to the square integral of the sum of all the first derivatives: writing ϵ_{ijk} for the totally antisymmetric 3-tensor and using the Einstein summation convention (sum over repeated indices) we have

$$\begin{aligned} \int_Q |\text{curl } \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} &= \int_Q \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_Q (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_Q \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)^2 - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \right] \, d\mathbf{x} \\ &= \int_Q \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)^2 - \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \int_Q \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)^2 \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

since $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. We will adopt the notation $|D\mathbf{u}|^2 = \sum_{j,k=1}^3 (\partial u_j / \partial x_k)^2$ as a convenient shorthand; in particular the corresponding integral

$$\|D\mathbf{u}\|^2 = \int_Q |D\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x},$$

which the above calculation shows is equal to $\|\text{curl } \mathbf{u}\|^2$, will be used repeatedly in what follows.

We will denote by V the space of all permissible flow fields with finite enstrophy,

$$V = \{\mathbf{u} : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \int_Q \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \text{and} \quad \|D\mathbf{u}\|^2 < +\infty\}.$$

We will see in the next section that finite enstrophy implies finite energy,

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq \lambda_1^{-1} \|D\mathbf{u}\|^2 \quad \text{for all} \quad \mathbf{u} \in V, \quad (2)$$

so that in particular any flow field in V is also an element of H ($V \subset H$).

We will also make use of the space of flow fields whose Laplacian is square integrable:

$$H^2(Q) = \{\mathbf{u} : \|\Delta\mathbf{u}\|^2 = \int_Q |\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty\}. \quad (3)$$

We will write H^2 (rather than $H^2(Q)$) when the meaning is clear from the context (for an explanation of the notation $H^2(Q)$ see Section 2.3, below).

2.2 Fourier series

One great advantage of considering flows with periodic boundary conditions is that we can use Fourier series in order to represent the solutions of the equation. We will expand $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in terms of an infinite sum of complex exponentials,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k} \in \dot{\mathbb{Z}}^3} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} / L} \quad (4)$$

(since $\int_Q \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0$ we sum only over $\dot{\mathbb{Z}}^3$ which denotes the set of all triplets of integers with $(0, 0, 0)$ excluded), where in order for $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ to be real we require

$$\hat{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)^* \quad (5)$$

(z^* denotes the complex conjugate of z).

We note immediately that

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{\mathbf{k} \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 \quad \text{and} \quad \|D\mathbf{u}\|^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sum_{\mathbf{k} \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2, \quad (6)$$

and hence, since $\mathbf{k} = 0$ is not included in either sum,

$$\|\mathbf{u}\|^2 \leq \lambda_1^{-1} \|D\mathbf{u}\|^2 \quad \text{where} \quad \lambda_1 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2, \quad (7)$$

i.e. a bound on the enstrophy implies a bound on the kinetic energy as in (2) above. The comparison in (7) is known as the Poincaré inequality, and although simple to prove it is a powerful tool.

The similar inequality

$$\|D\mathbf{u}\|^2 \leq \lambda_1^{-1} \|\Delta\mathbf{u}\|^2. \quad (8)$$

follows from the identity

$$\|\Delta\mathbf{u}\|^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^4 \sum_{\mathbf{k} \in \dot{\mathbb{Z}}^3} |\mathbf{k}|^4 |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2, \quad (9)$$

(assuming again that $\int_Q \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0$) and shows that any divergence-free flow field in $H^2(Q)$ with zero momentum is also in V (and in H).

2.3 Sobolev spaces

The expressions for $\|\mathbf{u}\|^2$, $\|D\mathbf{u}\|^2$, and $\|\Delta\mathbf{u}\|^2$ above ((6) and (9)) all involve weighted sums of Fourier coefficients of the form

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} |\mathbf{k}|^{2s} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2.$$

It is therefore natural to consider the collections of all functions for which these sums are finite, and define

$$H^s(Q) = \left\{ \mathbf{u} : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} / L}, \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} |\mathbf{k}|^{2s} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 < +\infty \right\}$$

along with the appropriate condition (5) to ensure that \mathbf{u} is a real function. Note that in the case $s = 2$ this agrees with the definition in (3) above.

Much of the modern theory of partial differential equations is couched in the language of such *Sobolev spaces*. The summability condition on the Fourier coefficients is equivalent to an integrability condition for \mathbf{u} and its derivatives, but in fact allows us to generalise exactly what we mean by a ‘derivative’ to include some functions that are not classically differentiable¹.

A natural question is how we can hope to obtain smooth classical solutions of a PDE if we are working with collections of functions whose (perhaps weak) derivatives are only square integrable and not necessarily continuous. The answer is provided by various results (the ‘Sobolev embedding theorems’) that deduce smoothness from integrability of derivatives, and an example of such a result is easy to prove in the context of periodic functions.

In order to do this as simply as possible, and to emphasise that such results concern general functions, rather than only solutions of the Navier-Stokes equations (or other PDEs), we will consider a general periodic scalar function $f(\mathbf{x})$ where \mathbf{x} belongs to the d -dimensional periodic domain $\Omega = [0, 2\pi]^d$. In this case the Sobolev space $H^s(\Omega)$ is defined as

$$H^s(\Omega) = \left\{ f : f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|^{2s} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 < +\infty \right\}$$

¹A scalar function F defined on \mathbb{R} has weak derivative f if $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (i.e. $f \in L^1(I)$ for any bounded interval I in \mathbb{R}) and

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (10)$$

for every infinitely differentiable function φ with compact support ($\varphi = 0$ outside some finite interval). Clearly (10) holds for functions that are differentiable in the standard sense after integrating by parts.

The Sobolev space $W^{k,p}(\mathbb{R})$ consists of all those functions whose (weak) derivatives up order k are p th power integrable: for a real function of a single scalar variable, this means that

$$W^{k,p}(\mathbb{R}) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j=0}^k \frac{d^j f}{dx^j}(x) \right)^p dx < +\infty \right\}$$

(with the convention that $d^0 f / dx^0 = f$).

(and the reality condition $\hat{f}(-\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k})^*$).

How large must s be to guarantee that the Fourier series for an $f \in H^s(\Omega)$ converges to a continuous function? The function f will certainly be continuous if its Fourier series converges uniformly: since $|e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}| = 1$ this is guaranteed if

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(\mathbf{k})| < \infty.$$

Using the Cauchy-Schwarz inequality,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 \right)^{1/2}, \quad (11)$$

we can write

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(\mathbf{k})| &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{(1 + |\mathbf{k}|^{2s})^{1/2}} (1 + |\mathbf{k}|^{2s})^{1/2} |\hat{f}(\mathbf{k})| \\ &\leq \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{1 + |\mathbf{k}|^{2s}} \right)^{1/2} \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} (1 + |\mathbf{k}|^{2s}) |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

and so the left-hand side is finite if the two terms on the right-hand side are finite. By comparing the first term to the integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mathbf{k}}{1 + |\mathbf{k}|^{2s}} = \omega_{d-1} \int_0^{\infty} \frac{k^{d-1} dk}{1 + k^{2s}}$$

(where ω_{d-1} is the surface area of the unit sphere in \mathbb{R}^d) one can see that it is finite if and only if $2s > d$; while the second term is finite, by definition, when $f \in H^s(\Omega)$.

In consequence, any function $f \in H^s(\Omega)$ with $s > d/2$ is continuous². Generalising the argument one can show that if $f \in H^s(\Omega)$ with $s > r + d/2$ then $f \in C^r(\Omega)$, i.e. f and all its derivatives up to order r are continuous. In particular, a function f that belongs to $H^s(\Omega)$ for every s is infinitely differentiable.

The standard reference for the theory of Sobolev spaces is the book by Adams, recently updated (Adams and Fournier, 2003). A readable account is also given in Renardy and Rogers's lovely *Introduction to Partial Differential Equations* (1992).

2.4 The Navier-Stokes equations in terms of Fourier coefficients

We now show how to write the Navier-Stokes equations in terms of the coefficients in the Fourier expansion of the velocity alone. We have

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} / L},$$

²Strictly speaking any such function is equal almost everywhere to a continuous function, but we will rarely make this distinction in what follows, preferring to replace f by its continuous 'representative' at all times.

and if we also expand p as a Fourier series,

$$p(\mathbf{x}, t) = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k} \in \dot{\mathbb{Z}}^3} \hat{p}(\mathbf{k}, t) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} / L},$$

then the $e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} / L}$ component of the momentum balance equation in (1) is

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) + \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) + i \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ \mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \dot{\mathbb{Z}}^3}} [\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \cdot \mathbf{k}''] \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}'', t) + i \mathbf{k} \hat{p}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (12)$$

while the same component of the incompressibility condition $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ is simply

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = 0.$$

If we take the scalar product of the momentum equation with \mathbf{k} then we can use the incompressibility condition to obtain

$$i \mathbf{k} \cdot \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} [\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \cdot \mathbf{k}''] \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}'', t) + i |\mathbf{k}|^2 \hat{p}(\mathbf{k}, t) = 0,$$

and so

$$\hat{p}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \left(\mathbf{k} \cdot \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} [\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \cdot \mathbf{k}''] \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}'', t) \right).$$

We can therefore eliminate the pressure to obtain an equation for the Fourier coefficients of \mathbf{u} alone,

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) + \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) + \left(1 - \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} \right) i \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} [\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \cdot \mathbf{k}''] \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}'', t) = 0. \quad (13)$$

This yields an explicitly “infinite-dimensional” system, in that it consists of an infinite set of coupled ordinary differential equations³ for the Fourier coefficients of \mathbf{u} .

³If we multiply each equation by $e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} / L}$ and add them again we obtain

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \Pi[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = 0,$$

where Π denotes the projection onto divergence-free fields, which we have defined via Fourier components as $(\Pi \phi)^\wedge(\mathbf{k}) = [1 - (\mathbf{k} \mathbf{k}^T / |\mathbf{k}|^2)] \hat{\phi}(\mathbf{k})$. Much of the literature on the Navier-Stokes equations essentially treats the problem in this form, further simplifying the notation slightly by defining a linear operator $A\mathbf{u} = -\Delta \mathbf{u}$ and writing $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Pi[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}]$, so that the equation appears as a differential equation in V^* (the dual of V),

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nu A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

Kato and Fujita (1962) recast this equation as an integral equation and treated the problems of existence and uniqueness using a fixed point approach (cf. Henry, 1984).

2.5 The Galerkin approximation

The use of the Galerkin method – essentially approximation via truncated Fourier series – to prove existence of solutions for the Navier-Stokes equations goes back to Hopf (1951), and is now the standard way to present the proof. It improves on Leray’s original approach since it reduces the approximating problems to finite systems of coupled ordinary differential equations rather than simpler PDE problems (which was Leray’s method).

Truncating both the Fourier series expansion of \mathbf{u} ,

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = L^{-3/2} \sum_{|\mathbf{k}| \leq n} \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}, t) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} / L}, \quad (14)$$

and the coupled system in (13) one obtains a *finite* system of ordinary differential equations for $\mathbf{u}_n(\mathbf{k}, t)$ with $|\mathbf{k}| \leq n$, known as the Galerkin approximation:

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}, t) + \nu |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}, t) + \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2}\right) i \sum_{\substack{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k} \\ |\mathbf{k}'|, |\mathbf{k}''| \leq n}} [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}', t) \cdot \mathbf{k}''] \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}'', t) = 0. \quad (15)$$

The divergence free condition $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}, t) = 0$ is automatically preserved under the evolution of (15). However, note that the restriction on \mathbf{k}' and \mathbf{k}'' in the nonlinear term means that \mathbf{u}_n does *not* coincide with the truncation of the true solution (4), even assuming that such a solution exists.

Standard results for systems of ordinary differential equations can be used for each such finite truncation to guarantee the existence and uniqueness of solutions, at least for small intervals of time. In order to show that such solutions exist for all positive times, we need to show that they cannot blow up. To do this we take the inner product of the equation with $\hat{\mathbf{u}}_n^*(\mathbf{k}, t)$, sum over \mathbf{k} , and add the complex conjugate. The nonlinear term vanishes, since

$$\begin{aligned} & \sum_{|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}| \leq n} [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{l}] [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{l}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n^*(\mathbf{k})] + [\hat{\mathbf{u}}_n^*(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{l}] [\hat{\mathbf{u}}_n^*(\mathbf{l}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k})] \\ &= \sum_{|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}| \leq n} [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{l}] [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{l}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n^*(\mathbf{k})] + [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{l} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{l}] [\hat{\mathbf{u}}_n(-\mathbf{l}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n^*(-\mathbf{k})] \\ &= \sum_{|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}| \leq n} [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{l}] [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{l}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n^*(\mathbf{k})] + [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot (-\mathbf{l})] [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{l}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_n^*(\mathbf{k})] \\ &= 0, \end{aligned}$$

and we are left with

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{|\mathbf{k}| \leq n} |\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k})|^2 = -\nu \sum_{|\mathbf{k}| \leq n} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k})|^2.$$

Integrating with respect to time between 0 and T it follows that

$$\sum_{|\mathbf{k}| \leq n} |\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}, T)|^2 + \nu \int_0^T \left(\sum_{|\mathbf{k}| \leq n} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}, t)|^2 \right) dt = \sum_{|\mathbf{k}| \leq n} |\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}, 0)|^2,$$

and so, neglecting the second term on the left-hand side, we can deduce that the sums of squares of the Fourier coefficients remain bounded and hence that the solutions must exist for all (positive) times.

However, because \mathbf{u}_n is not the truncation of the true solution \mathbf{u} it is a non-trivial matter to deduce the convergence of the (what we hope are) approximate solutions $\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t)$ to the ‘actual solution’ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. The analysis proceeds by obtaining estimates on these approximate solutions that are independent of the level of the truncation, and using these to find a subsequence of the approximate solutions that must converge. For example, if we reconstruct the function $\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t)$ from the Fourier coefficients $\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}, t)$ using (14), the above analysis shows that for any $t > 0$

$$\|\mathbf{u}_n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|D\mathbf{u}_n(t)\|^2 dt = \|\mathbf{u}_n(0)\|^2 \quad (16)$$

(this is the Galerkin energy equality), and since $\|\mathbf{u}_n(0)\|^2 \leq \|\mathbf{u}(0)\|^2$ we obtain

$$\|\mathbf{u}_n(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|D\mathbf{u}_n(t)\|^2 dt \leq \|\mathbf{u}(0)\|^2, \quad (17)$$

where the right-hand side of this estimate *is independent of n* .

However, although we obtain in this way a bound on the energy $\|\mathbf{u}_n(t)\|^2$ that is uniform for each $t \in [0, T]$,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_n(t)\|^2 \leq \|\mathbf{u}_0\|^2,$$

the bound we obtain on the enstrophy (i.e. the spatial derivatives of \mathbf{u}_n) only holds if we integrate with respect to time,

$$\nu \int_0^T \|D\mathbf{u}_n(t)\|^2 dt \leq \|\mathbf{u}_0\|^2. \quad (18)$$

In the following section we consider how we might use such uniform bounds to pass to a limit in our sequence of approximate solutions.

2.6 Subsequences and weak convergence

Ideally we would consider how to use a bound such as

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t)\|^2 \leq M \quad \text{for all } n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

to extract a limit from the sequence $\{\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t)\}$. However, we will treat a simpler problem here, and it is important to emphasise the main difference arising from this simplification. In searching for a solution of the Navier-Stokes equations we have obtained a sequence of approximate solutions $\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t)$ which are continuous functions of both \mathbf{x} and t . In passing to any limit we need to take care how the limit is approached with respect to $\mathbf{x} \in Q$ and over the time interval $[0, T]$.

In our discussion here we will retain the \mathbf{x} dependence but neglect the dependence on t . We will show (in an even simpler setup) that the bound

$$\|\mathbf{u}_n(\mathbf{x})\|^2 \leq M \quad \text{for all } n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

is enough to guarantee that there is a subsequence for which all the Fourier coefficients converge. However, it is not the case that the bound in (19) implies that such convergence holds for every $t \in [0, T]$ – some of the uniformity in time is lost in the limiting process⁴.

We first recall the model for all such results, the Bolzano-Weierstrass Theorem (see Rudin, 1976, for example).

Theorem 1 (Bolzano-Weierstrass) *Given a bounded sequence of real numbers $\{a_j\}$ with*

$$|a_j| \leq M \quad \text{for all } j = 1, 2, \dots \quad (\text{for some } M),$$

one can find a subsequence a_{j_n} (j_n are integers satisfying $j_{n+1} > j_n$) such that

$$a_{j_n} \rightarrow a^*, \quad \text{where } |a^*| \leq M.$$

To simplify things further we will consider a sequence of periodic scalar functions defined on $[0, 1]$ (rather than 3-component vector valued functions on Q) given by the Fourier series⁵

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_n(k) \sin \pi k x$$

and assume that we only know (cf. (20)) that

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_n(k)|^2 \leq M^2. \quad (21)$$

(A very similar argument to what follows works for the three-dimensional vector-valued functions $\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$ that are our main concern, but keeping track of the three-component Fourier indices \mathbf{k} is a little messy.)

It is clear from (21) that each individual Fourier coefficient $\hat{f}_n(k)$ is bounded by M , irrespective of the value of n and k . In particular $|\hat{f}_n(1)| \leq M$ for all

⁴Given (19) one can deduce that there exists a subsequence such that for any Fourier coefficient (i.e. for any choice of \mathbf{k})

$$\int_0^T \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}, t) \phi(t) dt \rightarrow \int_0^T \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) \phi(t) dt$$

for any scalar function $\phi \in L^1(0, T)$ (any ϕ such that $\int_0^T |\phi(s)| ds < +\infty$).

⁵There is no assumption in what follows that these functions are continuous, or even defined for every $x \in [0, 1]$. This problem was addressed – in part – in Section 2.3. Note, however, that in many ways this is an advantage, in that by using Fourier expansions we are in fact developing methods that work for a very large class of functions.

n , so using the Bolzano-Weierstrass Theorem we can find a subsequence $f_{n_{1,j}}$ such that $\hat{f}_{n_{1,j}}(1)$ converges to some $\hat{f}(1)$. Clearly we still have the bound $|\hat{f}_{n_{1,j}}(2)| \leq M$ for all j , so we can find a further subsequence $f_{n_{2,j}}$ ($f_{n_{2,j}}$ is a subsequence of the sequence $f_{n_{1,j}}$) such that

$$\hat{f}_{n_{2,j}}(2) \rightarrow \hat{f}_2 \quad \text{and we still have} \quad \hat{f}_{n_{2,j}}(1) \rightarrow \hat{f}_1.$$

We can keep taking subsequences of subsequences so that after doing this m times we have

$$\hat{f}_{n_{m,j}}(i) \rightarrow \hat{f}(i) \quad \text{as} \quad j \rightarrow \infty \quad \text{for all} \quad i = 1, \dots, m.$$

The argument is concluded with a trick, which is to consider the ‘diagonal subsequence’ given by $f_{n_{j,j}}$. Since for $j > m$ this is a subsequence of $f_{n_{m,j}}$, it follows that

$$\hat{f}_{n_{j,j}}(k) \rightarrow \hat{f}(k) \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{for all} \quad k = 1, 2, \dots$$

To summarise, the uniform bounds in (21) are enough to find a subsequence $f_{n_{j,j}}(x)$ for which every Fourier coefficient converges, $\hat{f}_{n_{j,j}}(k) \rightarrow \hat{f}(k)$.

However, convergence of the Fourier coefficients is not enough to deduce convergence of the sum in a conventional sense. As an example consider the sequence

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin n\pi x. \quad (22)$$

While it is clear that

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = 1,$$

and since $\hat{f}_n(k) = \delta_{nk}$ every Fourier coefficient is eventually zero, $f_n(x)$ oscillates ever more rapidly on $[0, 1]$ between the values $+1$ and -1 .

Nevertheless, given the convergence of all Fourier coefficients to zero we would like to say that f_n ‘converges to’ zero in some weak sense. Formally, if $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ is a sequence of square integrable functions⁶ we say that f_n converges weakly to f , written $f_n \rightharpoonup f$, if for any square integrable function ϕ (i.e. $\int |\phi(x)|^2 < \infty$) we have

$$\int_0^1 f_n(x)\phi(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x)\phi(x) dx.$$

⁶Weak convergence can be defined in a much more general way. A sequence $\{u_n\}$ in a Banach space X converges weakly to u if $\rho(u_n) \rightarrow \rho(u)$ for any continuous linear map ρ from X into \mathbb{R} . A fundamental result in functional analysis, the Riesz representation theorem, guarantees that in a Hilbert space H any such linear map can be expressed as (u_ρ, \cdot) for some $u_\rho \in H$, i.e. one can replace any continuous linear map from X into \mathbb{R} by ‘the inner product with any $u \in H$ ’: this is essentially what we have done here, since the inner product of two elements u, v in the space $L^2(0, 1)$ of square integrable functions on $(0, 1)$ is just $\int_0^1 u(x)v(x) dx$. For more details see Robinson (2001), for example.

For sequences whose ‘kinetic energy’ $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx$ is uniformly bounded this is precisely equivalent to convergence of all the individual Fourier coefficients. In the context of our approximate Navier-Stokes solutions, the following formulation, which is still a precise definition of “weak convergence in H ”, is perhaps the most intuitive:

A sequence $\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$ converges weakly to $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ if the kinetic energy is uniformly bounded and the individual Fourier coefficients converge.

Although the example in (22) appears pathological it illustrates the important point that weak limits preserve inequalities, but in general do not preserve equalities: we had a sequence $\{f_n\}$ with $\|f_n\| = 1$ but $f_n \rightharpoonup 0$. In general one can only guarantee that

$$f_n \rightharpoonup f \quad \Rightarrow \quad \|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|. \quad (23)$$

2.7 Convergence of the approximate solutions

Using techniques related to those of the previous section we can find a subsequence such that the Fourier coefficients of \mathbf{u}_n converge (in some appropriate sense, see Footnote 4) to those of some limiting function \mathbf{u} .

However, convergence of some subsequence of the \mathbf{u}_n to some \mathbf{u} is not enough on its own, since we need to guarantee that the resulting \mathbf{u} does indeed verify the original equation. In particular we need to show – at the very least – that each term in the equation converges as $n \rightarrow \infty$ (note that \mathbf{u} itself does not occur alone in the equation). Neglecting the time derivative for the moment, we consider how we might do this for the nonlinear term.

If we consider the \mathbf{k} th Fourier coefficient in the nonlinear term,

$$\hat{\mathbf{b}}_n(\mathbf{k}) = \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2}\right) \mathbf{i} \sum_{\substack{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k} \\ |\mathbf{k}'|, |\mathbf{k}''| \leq n}} [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}', t) \cdot \mathbf{k}''] \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k}'', t),$$

then we can estimate

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{b}}_n(\mathbf{k})| &\leq \left| \sum_{|\mathbf{l}| \leq n} [\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{l}] \hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{l}) \right| \\ &\leq \sum_{|\mathbf{l}| \leq n} |\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l})| |\mathbf{l}| |\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{l})| \\ &\leq \left(\sum_{|\mathbf{l}| \leq n} |\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{k} - \mathbf{l})|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|\mathbf{l}| \leq n} |\mathbf{l}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_n(\mathbf{l})|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|\mathbf{u}_n\| \|D\mathbf{u}_n\|. \end{aligned}$$

While we know that $\|\mathbf{u}_n(t)\|$ is bounded for each t , we only know that the time integral $\int_0^T \|D\mathbf{u}_n(s)\|^2 ds$ is bounded. It follows that we can only bound the

time integral of $|\hat{\mathbf{b}}_n(\mathbf{k})|$,

$$\int_0^T |\hat{\mathbf{b}}_n(\mathbf{k}, s)|^2 ds \leq \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{u}_n(t)\|^2 \right) \left(\int_0^T \|D\mathbf{u}_n(s)\|^2 ds \right).$$

Even allowing that this is enough for us to extract further subsequence for which $\hat{\mathbf{b}}_n(\mathbf{k})$ converges (in some sense) to some $\hat{\beta}(\mathbf{k})$, it is now not at all clear why we should have

$$\hat{\beta}(\mathbf{k}) = \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} \right) \mathbf{i} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} [\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', t) \cdot \mathbf{k}''] \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}'', t),$$

i.e. that we obtain the Fourier components of the nonlinear term corresponding to the limiting function \mathbf{u} . It is possible to overcome this by obtaining a bound on the time derivative of the \mathbf{u}_n , which in turn allows us to extract a subsequence such that \mathbf{u}_n converges to some \mathbf{u} in a stronger sense⁷; but it is important to emphasise here the need to check carefully at every stage that we are obtaining what we need in order to obtain a *bona fide* ‘solution’ (even in some weakened sense) of the original problem.

3 Global existence of weak solutions

Since our estimates of the nonlinear term involve $\|D\mathbf{u}_n\|$, and we only have uniform bounds on this quantity in a time integrated form, it is unsurprising that we need to reinterpret the equation as an integral equation. Integrating between t_0 and t we obtain

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) &= \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t_0) - \nu \int_{t_0}^t |\mathbf{k}|^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, s) ds \\ &\quad - \int_{t_0}^t \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}^T}{|\mathbf{k}|^2} \right) \mathbf{i} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} [\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', s) \cdot \mathbf{k}''] \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}'', s) ds, \end{aligned} \quad (24)$$

and this is the formulation of the equation (Fourier component by Fourier component and integrated in time) for which we can prove the existence of solutions:

Given an initial condition with finite kinetic energy, there exists at least one solution whose kinetic energy remains finite for all positive time, and its Fourier coefficients evolve continuously in time.

Such solutions are termed ‘weak solutions’ since satisfying the equation Fourier component by Fourier component is equivalent to satisfying the equation

⁷One can show that $d\mathbf{u}_n/dt$ is bounded in $L^{4/3}(0, T; V^*)$, where V^* is the dual of V . Coupled with the uniform bound on \mathbf{u}_n in $L^2(0, T; V)$ this allows one to extract a subsequence that converges strongly in $L^2(0, T; H)$, which is enough to prove convergence of the nonlinear term – see Constantin and Foias (1988), Temam (1977), or Robinson (2001) for details.

in the so-called ‘weak form’ obtained by multiplying by a smooth divergence-free function φ and integrating by parts, more concretely

$$\begin{aligned} & \int_Q \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \nu \int_{t_0}^t \int_Q D\mathbf{u}(\mathbf{x}, s) : D\varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, ds \\ &= \int_Q \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{t_0}^t \int_Q [(\mathbf{u}(\mathbf{x}, s) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, s)] \cdot \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, ds. \end{aligned} \quad (25)$$

This is a standard technique in the theory of PDEs. The idea is to reformulate the original problem in a way that remains sensible for less smooth functions than are required initially, but whose solutions must be classical solutions provided that they are smooth enough. Usually the weak formulation of the problem is easier to solve, and one then hopes to show that the ‘weak solutions’ are indeed smooth enough to be classical solutions.

More formally, a weak solution is a function $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ with⁸

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$$

that satisfies (25) (i.e. whose Fourier coefficients satisfy (24)) for almost every $t_0, t \in [0, T]$. The solutions that we obtain via the Galerkin approximations have an additional (and physically desirable) property that they satisfy a form of energy conservation:

Theorem 2 *Given $\mathbf{u}_0 \in H$ there exists at least one weak solution such that the energy inequality*

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|D\mathbf{u}(s)\|^2 \, ds \leq \|\mathbf{u}_0\|^2 \quad (26)$$

holds for all $t \geq 0$. Furthermore $(\mathbf{u}(t), \phi)$ is continuous for every $\phi \in H$.

Note that if we assume that the solution is smooth (we have not proved this) then taking the inner product of the momentum balance equation with \mathbf{u} and integrating over Q gives

$$\frac{d}{dt} \int_Q |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} + \nu \int_Q |D\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} + \int_Q [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \int_Q \nabla p \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0.$$

Since an integration by parts and use of the fact that $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ give

$$\int_Q (u_j \partial_j u_i) u_i \, d\mathbf{x} = - \int_Q [\partial_j u_j] u_i^2 \, d\mathbf{x} - \int_Q u_j u_i \partial_j u_i \, d\mathbf{x} = - \int_Q (u_j \partial_j u_i) u_i \, d\mathbf{x}$$

⁸For $1 \leq p < \infty$ the notation $\mathbf{u} \in L^p(0, T; X)$ means that $\mathbf{u}(t) \in X$ for almost every $t \in [0, T]$ and that

$$\int_0^T \|\mathbf{u}(s)\|_X^p \, ds < +\infty.$$

If $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; X)$ then again $\mathbf{u}(t) \in X$ for a.e. $t \in [0, T]$ but now $\|\mathbf{u}(t)\|_X \leq M$ for some $M \geq 0$, for almost every $t \in [0, T]$. So $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ is essentially just (26) with the right-hand side replaced by some finite constant.

and similarly

$$\int_Q \nabla p \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = - \int_Q p(\nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad (27)$$

it follows that

$$\frac{d}{dt} \int_Q |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} + \nu \int_Q |D\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} = 0,$$

which after integration yields the energy *equality*

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|D\mathbf{u}(s)\|^2 \, ds = \|\mathbf{u}_0\|^2.$$

However, this equality does not follow rigorously from our analysis, since taking a weak limit means that the Galerkin energy equality (16) could potentially turn it into an inequality (see (23)). It is not known whether there are weak solutions (which could perhaps be obtained by some other approximation procedure) that do not satisfy this energy inequality.

Although we have obtained the existence of a solution that exists for all time, we are unable to prove that such a solution is unique. In order to prove uniqueness we currently require smoother solutions, to whose existence we now turn.

4 Strong solutions

By making additional estimates on the sequence of Galerkin approximations we can prove the existence of smoother solutions, known as ‘strong solutions’. For these solutions the enstrophy stays finite, and this is enough smoothness for us to be able to guarantee their uniqueness. However, we can only show that such solutions exist for a small interval of time:

Given an initial condition with finite enstrophy, there exists a solution whose enstrophy remains finite for some (possibly small) time interval, and while this is the case there are no other solutions.

We now state this more mathematically, and give a sketch of the proof. The key is showing that the enstrophy $\|D\mathbf{u}\|$ remains finite. The argument in the proof is ‘formal’ – which is a polite way of saying not rigorous – in that it assumes that the functions with which we are dealing are as smooth as we like so that all manipulations (such as integration by parts) are valid. Provided that such arguments are based on inequalities (which are preserved under weak limits) they can generally be made rigorous by some appropriate regularisation (smoothing) procedure (e.g. considering the Galerkin approximations and then passing to the limit).

Both the proof of the bound on the enstrophy and that of uniqueness rely on the following inequality for the nonlinear term⁹

$$\left| \int_Q [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \right| \leq c_1 \|D\mathbf{u}\| \|D\mathbf{v}\|^{1/2} \|\Delta \mathbf{v}\|^{1/2} \|\mathbf{w}\|. \quad (28)$$

First we prove that strong solutions exist for some finite time, and then prove their uniqueness. We use c_1, c_2, \dots for absolute numerical constants that do not depend on ν and \mathbf{u}_0 .

Theorem 3 *Given $\mathbf{u}_0 \in V$ there is a time $T > 0$ such that there exists a solution with*

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2),$$

i.e.

$$\sup_{t \in [0, T]} \|D\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu \int_0^T \|\Delta \mathbf{u}(s)\|^2 \, ds < +\infty.$$

Proof. We show that if $\|D\mathbf{u}_0\|$ is finite then $\|D\mathbf{u}(t)\|$ is finite on some finite time interval. Taking the inner product of the equation with $-\Delta \mathbf{u}$ and integrating over Q we obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D\mathbf{u}\|^2 + \nu \|\Delta \mathbf{u}\|^2 + \int_Q [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0, \quad (29)$$

where the first term has been integrated by parts and the pressure term vanishes since

$$\int_Q \nabla p \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = - \int_Q p \Delta(\nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = 0, \quad (30)$$

using the fact that \mathbf{u} is divergence free.

In order to estimate the nonlinear term we use (28) in the form

$$\left| \int_Q [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \right| \leq c_1 \|D\mathbf{u}\|^{3/2} \|\Delta \mathbf{u}\|^{3/2}. \quad (31)$$

This gives

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D\mathbf{u}\|^2 + \nu \|\Delta \mathbf{u}\|^2 &\leq c_1 \|D\mathbf{u}\|^{3/2} \|\Delta \mathbf{u}\|^{3/2} \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|\Delta \mathbf{u}\|^2 + \frac{c_2}{\nu^3} \|D\mathbf{u}\|^6, \end{aligned}$$

⁹The proof is relatively simple, relying on Hölder's inequality and the Sobolev embedding $H^1(Q) \subset L^6(Q)$: first use the generalised Hölder inequality with $(p, q, r) = (6, 3, 2)$ to give

$$\int [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^6} \|D\mathbf{v}\|_{L^3} \|\mathbf{w}\|_{L^2},$$

and then use the 'Lebesgue interpolation' result $\|\mathbf{z}\|_{L^3} \leq \|\mathbf{z}\|_{L^2}^{1/2} \|\mathbf{z}\|_{L^6}^{1/2}$ (obtained once again via Hölder's inequality). Since $H^1(Q) \subset L^6(Q)$ the norms in L^6 can be replaced by the L^2 norms of the corresponding derivatives, which yields (28).

where we have split up the right-hand side using Young's inequality,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{with} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

with $p = 4/3$ and $q = 4$. Therefore

$$\frac{d}{dt} \|D\mathbf{u}\|^2 + \nu \|\Delta\mathbf{u}\|^2 \leq \frac{c_3}{\nu^3} \|D\mathbf{u}\|^6. \quad (32)$$

Writing $X(t) = \|D\mathbf{u}(t)\|^2$ and dropping the $\nu \|\Delta\mathbf{u}\|^2$ term we have

$$\frac{dX}{dt} \leq \frac{c_3}{\nu^3} X^3.$$

It follows that

$$\frac{1}{X(0)^2} - \frac{1}{X(t)^2} \leq \frac{2c_3}{\nu^3} t$$

Therefore

$$\|D\mathbf{u}(t)\|^2 \leq \frac{\|D\mathbf{u}_0\|^2}{\sqrt{1 - 2c_3 t \|D\mathbf{u}_0\|^4 / \nu^3}}. \quad (33)$$

This bound is only finite while $2c_3 t \|D\mathbf{u}_0\|^4 < \nu^3$.

If we return to (32) and keep the term involving $\|\Delta\mathbf{u}\|^2$ then we can integrate between $t = 0$ and $t = T$ to obtain

$$\|D\mathbf{u}(t)\|^2 + \nu \int_0^T \|\Delta\mathbf{u}(s)\|^2 ds \leq \|D\mathbf{u}(0)\|^2 + \frac{c_3}{\nu^3} \int_0^T \|D\mathbf{u}(s)\|^6 ds,$$

which shows that $\int_0^T \|\Delta\mathbf{u}(s)\|^2 ds < +\infty$, since $\|D\mathbf{u}(s)\|$ is uniformly bounded on $[0, T]$. \square

We now show that strong solutions are unique. In fact, if there is a strong solution then it is also the only weak solution: in particular this implies that the strong solution is the solution obtained via the Galerkin procedure.

Theorem 4 *Let \mathbf{u} be a strong solution of the 3D Navier-Stokes equations, i.e.*

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2).$$

Then \mathbf{u} is unique in the class of all weak solutions.

Again we only give a formal proof; a rigorous proof, due to Sather and Serrin, can be found in the revised version (2001) of Temam (1977).

Proof. We consider the equation for the difference of two solutions, $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, where \mathbf{u} is a strong solution and \mathbf{v} is a weak solution, and obtain

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla(p_{\mathbf{u}} - p_{\mathbf{v}}) = 0.$$

Since

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= [(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla]\mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)[\mathbf{u} - \mathbf{v}] \\ &= (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} \end{aligned}$$

this gives

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} + \nabla(p_{\mathbf{u}} - p_{\mathbf{v}}) = 0.$$

Taking the inner product with \mathbf{w} , integrating over Q , and using the fact that

$$\int [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w}] \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = 0$$

(this follows after an integration by parts, using the divergence free condition) gives

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|^2 + \nu \|D\mathbf{w}\|^2 = \int_Q [(\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u}] \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \quad (34)$$

since the pressure term vanishes again as in (27). We now apply the inequality (28) to obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|^2 + \nu \|D\mathbf{w}\|^2 &\leq c_1 \|D\mathbf{w}\| \|D\mathbf{u}\|^{1/2} \|\Delta \mathbf{u}\|^{1/2} \|\mathbf{w}\| \\ &\leq \frac{\nu}{2} \|D\mathbf{w}\|^2 + \frac{c_4}{2\nu} \|D\mathbf{u}\| \|\Delta \mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|^2. \end{aligned}$$

Rewriting this as

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|^2 + \nu \|D\mathbf{w}\|^2 \leq \frac{c_4}{\nu} \|D\mathbf{u}\| \|\Delta \mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|^2,$$

and ignoring the $\nu \|D\mathbf{w}\|^2$ term gives

$$\|\mathbf{w}(t)\|^2 \leq \exp\left(\frac{c_4}{\nu} \int_0^t \|D\mathbf{u}(s)\| \|\Delta \mathbf{u}(s)\| \, ds\right) \|\mathbf{w}(0)\|^2. \quad (35)$$

Since

$$\int_0^t \|D\mathbf{u}(s)\| \|\Delta \mathbf{u}(s)\| \, ds \leq \left(\int_0^t \|D\mathbf{u}(s)\|^2 \, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \|\Delta \mathbf{u}(s)\|^2 \, ds\right)^{1/2},$$

and both quantities on the right-hand side are finite for all $t \in [0, T]$, it follows from (35) that if $\mathbf{w}(0) = 0$ then $\mathbf{w}(t) = 0$, which implies uniqueness. \square

Although in general these strong solutions only exist for short times, if the initial enstrophy is small enough then the solution can be guaranteed to exist for all time.

If the initial enstrophy is sufficiently small then there exists a unique strong solution that exists for all time.

We now give a precise statement of this, with a formal proof. The constant c_3 is that occurring in the inequality (32).

Theorem 5 *If $\mathbf{u}_0 \in V$ satisfies*

$$\|D\mathbf{u}_0\|^2 \leq c_3^{-1/2} \nu^2 \lambda_1^{1/2}$$

then there is a unique strong solution that exists for all time.

Proof. We return to (32), and use the Poincaré-type inequality (8):

$$\|\Delta \mathbf{u}\|^2 \geq \lambda_1 \|D\mathbf{u}\|^2.$$

It follows that

$$\frac{d}{dt} \|D\mathbf{u}\|^2 \leq \frac{c_3}{\nu^3} \|D\mathbf{u}\|^6 - \nu \lambda_1 \|D\mathbf{u}\|^2.$$

The right-hand side is non-positive provided that $\|D\mathbf{u}\|^4 \leq \lambda_1 \nu^4 / c_3$, which implies that under the condition in the statement of theorem

$$\|D\mathbf{u}(t)\|^2 \leq c_3^{-1/2} \nu^2 \lambda_1^{1/2} \quad \text{for all } t \geq 0$$

i.e. there is no blowup of the enstrophy and the solution exists for all time. \square

5 The importance of strong solutions

We saw above that if a strong solution exists then it is unique. We now give a further indication that strong solutions are central to the theory of the Navier-Stokes equations, by giving a precise statement of the following result¹⁰:

Strong solutions are as smooth as the data allows.

To make this more explicit, we need to recall the definition of the Sobolev space $H^s(Q)$ given in Section 2.3:

$$H^s(Q) = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} / L} : \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} |\mathbf{k}|^{2s} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|^2 < +\infty \right\},$$

which is equivalent to all the derivatives of \mathbf{u} up to order s being square integrable.

The rigorous result (see Constantin and Foias (1988) for a proof) states that if $\mathbf{u}_0 \in H^s(Q) \cap V$, i.e. if \mathbf{u}_0 has square integrable derivatives up to order s and is divergence free, then the solution \mathbf{u} is as smooth as \mathbf{u}_0 while it remains strong:

¹⁰It should be emphasised that while throughout this paper we are dealing with the unforced Navier-Stokes equations, the standard theory usually includes a forcing term $f(t)$ on the right-hand side. For us ‘the data’ consists only of the initial condition, but in the more general case the forcing must also be taken into account. The result of Theorem 6 stands provided that the forcing function satisfies $f \in L^2(0, T; H^{s-1}(Q) \cap V)$ (see Temam, 1983); in this case Corollary 7 becomes $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^s) \cap L^2(0, T; H^{s+1})$, i.e. whatever the regularity of the initial condition the solution is as smooth as the forcing allows for $t > 0$.

Theorem 6 *If $\mathbf{u}_0 \in H^s(Q) \cap V$ gives rise to a strong solution on $[0, T]$, i.e.*

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; H^2(Q)),$$

then in fact

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^s(Q)) \cap L^2(0, T; H^{s+1}(Q)).$$

This perhaps unsurprising result has a remarkable consequence, namely:

Strong solutions immediately become smooth.

To see this, observe that $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H^{s+1}(Q))$ implies that $\mathbf{u}(\tau) \in H^{s+1}(Q)$ for times τ arbitrarily close to $t = 0$. For any such τ we can consider the solution starting from time τ ; by assumption this solution is strong on $[\tau, T]$, and hence by Theorem 6 we must have

$$\mathbf{u} \in L^\infty(\tau, T; H^{s+1}(Q)) \cap L^2(\tau, T; H^{s+2}(Q)).$$

We can continue this process inductively (now $\mathbf{u}(\sigma) \in H^{s+2}(Q)$ for times σ arbitrarily close to τ) and deduce the following:

Corollary 7 *If \mathbf{u} is a strong solution on $[0, T]$ then for any $\epsilon > 0$*

$$\mathbf{u} \in L^\infty(\epsilon, T; H^s(Q)) \cap L^2(\epsilon, T; H^{s+1}(Q))$$

for any s .

We saw in Section 2.3 that if $\mathbf{u} \in H^s(Q)$ with $s > r + (3/2)$ then $\mathbf{u} \in C^r(Q)$. It follows therefore that $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is an infinitely differentiable¹¹ function of \mathbf{x} for all $t \in (0, T)$. This shows that in order to obtain smoothness of solutions it suffices to prove that they are strong. Since strong solutions are also unique, these are the class of solutions whose existence for all time we should strive to prove.

6 The singular behaviour of weak solutions

While weak solutions are known to exist for all time, their uniqueness cannot be guaranteed. On the other hand although uniqueness is assured for strong solutions, their existence can only be proved on short time intervals.

In this section we discuss further the relationship between weak and strong solutions. While the hope is that there are no singularities in the solutions of the Navier-Stokes equations, the best results currently available only manage to limit the size of the sets on which singularities can occur.

We begin, however, with a pleasing simplification.

¹¹In fact even more is true, and strong solutions immediately become real analytic functions of \mathbf{x} , see Foias and Temam (1989).

6.1 Unforced solutions are eventually strong

For our weak solutions constructed via the Galerkin method we know that for any $T > 0$

$$\nu \int_0^T \|D\mathbf{u}(t)\|^2 dt \leq \|\mathbf{u}_0\|^2$$

(this was (26)). In order for this bound to hold it follows that the enstrophy cannot be large very often, indeed, we must have

$$\mu \left(t \in \mathbb{R}^+ : \|D\mathbf{u}(s)\|^2 > c_3^{-1/2} \nu^2 \lambda_1^{1/2} \right) \leq \frac{c_3^{1/2}}{\nu^3 \lambda_1^{1/2}} \|\mathbf{u}_0\|^2,$$

where $\mu(E)$ denotes the Lebesgue measure of E .

It follows that on any time interval $[0, T]$ with

$$T > \frac{c_3^{1/2}}{\nu^3 \lambda_1^{1/2}} \|\mathbf{u}_0\|^2$$

there must exist a t_0 such that

$$\|D\mathbf{u}(t_0)\|^2 \leq c_3^{-1/2} \nu^2 \lambda_1^{1/2}.$$

We can now use Theorem 5 (small enough initial data yields a strong solution that exists for all time) to deduce that the solution is strong (and hence unique) for all $t \geq t_0$: in particular it must be strong for all $t \geq T$.

This shows that when the fluid is unforced all the singularities of weak solutions (if there are any) must occur within a finite time, after which the solution is regular. However, there is no guarantee of uniqueness before $t = T$, so there could in principle be many solutions with a given initial condition, all of which would eventually become strong after time T .

6.2 Intervals of regularity and the set of singular times

The key difference between weak solutions – which are known to exist for all time, but which cannot currently be shown to be unique – and strong solutions – whose long-time existence we cannot prove but are unique when they exist – is that while for weak solutions we can only obtain a bound on the time integral of the enstrophy,

$$\int_0^T \|D\mathbf{u}(s)\|^2 ds < +\infty, \tag{36}$$

for a solution to be strong we need a uniform bound on the enstrophy for each time t ,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|D\mathbf{u}(t)\| < +\infty.$$

Thus solutions are strong on intervals of time over which $\|D\mathbf{u}\|$ is bounded, and the concept of weak solution is only needed to cope with those times when

$\|D\mathbf{u}(t)\| = +\infty$. Since we have the integral bound in (36), the set of times for which the enstrophy is unbounded has zero measure, i.e. the enstrophy is finite almost always.

Since a finite enstrophy at time t_0 implies that the solution has finite enstrophy on an interval $[t_0, t_0 + \delta)$ for some $\delta > 0$ (this was Theorem 3), any such ‘point of regularity’ is contained in an ‘interval of regularity’. We expand every such interval to its maximal extent¹² to give a countable and disjoint collection of open intervals of regularity $J_q = (l_q, r_q)$. Since weak solutions in unforced flows are eventually strong, one of these intervals is of the form $J_0 = (l_0, \infty)$.

If there are only a finite number of such intervals then there are only a finite number of singular times; since this is relatively simple behaviour we will assume that there are an infinite number of regularity intervals, indexed by $q = 0, 1, \dots$ (with J_0 being the only interval of infinite length).

For $t \in J_q$ we have $\|D\mathbf{u}(t)\| < +\infty$ but $\|D\mathbf{u}(t)\| \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow r_q$. The set Σ of ‘singular times’ is given by

$$\Sigma = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{q=0}^{\infty} J_q$$

(i.e. all those times not contained in any of the intervals of regularity). We have already remarked that Σ has Lebesgue measure zero; we now give a lower bound on the rate of blowup which will enable us to limit further the size of Σ .

6.3 A lower bound on the rate of blowup

Leray observed that on an interval of regularity $J_q = (l_q, r_q)$ with $r_q < \infty$ the upper bound on the enstrophy in (33) shows that as $t \rightarrow r_q$ the enstrophy must blow up at least as fast as $(r_q - t)^{-1/2}$. Indeed, for $s \in [t, r_q)$ we have

$$\|D\mathbf{u}(s)\|^2 \leq \frac{\|D\mathbf{u}(t)\|^2}{\sqrt{1 - 2c_3(s-t)\|D\mathbf{u}(t)\|^4/\nu^3}},$$

and if $\|D\mathbf{u}(s)\| \rightarrow \infty$ as $s \rightarrow r_q$ we must have

$$2c_3(r_q - t)\|D\mathbf{u}(t)\|^4 \geq \nu^3,$$

i.e.

$$\|D\mathbf{u}(t)\|^2 \geq \frac{\nu^3}{2c_3}(r_q - t)^{-1/2}. \quad (37)$$

Note that the constants in (37) do not depend on the particular solution, nor the particular interval of regularity that we are considering.

Integrating (37) over J_q we obtain

$$\int_{l_q}^{r_q} \|D\mathbf{u}(t)\|^2 dt \geq \frac{\nu^3}{2c_3} \int_{l_q}^{r_q} (r_q - t)^{-1/2} dt = \frac{\nu^3}{c_3} (r_q - l_q)^{1/2},$$

¹²Given t_0 with $\|D\mathbf{u}(t_0)\| < \infty$, we let J be the maximal open interval containing t_0 such that for all closed intervals $I \subset J$ we have $\mathbf{u}|_I \in L^\infty(I; V) \cap L^2(I; H^2)$.

or more compactly

$$\int_{J_q} \|D\mathbf{u}(t)\|^2 dt \geq \frac{\nu^3}{c_3} |J_q|^{1/2},$$

where $|J_q| = (r_q - l_q)$ is the length of the interval J_q .

Since the set of singular points have zero measure

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left(\int_{J_q} \|D\mathbf{u}(t)\|^2 dt \right) = \int_0^{l_0} \|D\mathbf{u}(t)\|^2 dt < +\infty,$$

where (l_0, ∞) is the final semi-infinite interval of regularity (there are no singular times for $t > l_0$). It follows that

$$\sum_{q=1}^{\infty} |J_q|^{1/2} < +\infty. \quad (38)$$

We can use this to restrict further the possible size of the set of singular times.

6.4 Hausdorff measure of the set of singular times

We said above that the Lebesgue measure ('total length') of the set of singular times is zero. To make this precise, imagine covering Σ with a set of finite intervals I_j ,

$$\Sigma \subseteq \bigcup_j I_j.$$

Then certainly the 'length' of Σ should be at most the sum of the lengths of these intervals,

$$\mu(\Sigma) \leq \sum_j |I_j|.$$

By covering Σ with a family of smaller and smaller intervals we should be able to approximate its total length more and more accurately. In particular, if given any $\epsilon > 0$ we can cover Σ with intervals of length at most ϵ such that

$$\sum_j |I_j| < \epsilon \quad (39)$$

then the Lebesgue measure of Σ is zero.

Now, suppose that given any $\epsilon > 0$ we can cover Σ with intervals of length at most ϵ such that

$$\sum_j |I_j|^d < \epsilon \quad (40)$$

for some $d < 1$, rather than (39) which had $d = 1$. Since $|I_j| < \epsilon < 1$, we have $|I_j|^d > |I_j|$, and so making the sum in (40) arbitrarily small is a stronger

condition than having zero Lebesgue measure: we say that the d -dimensional Hausdorff measure¹³ of Σ is zero and write $\mathcal{H}^d(\Sigma) = 0$.

A simple argument due to Scheffer (1976) allows us to deduce from (38) that for the singular set we have $\mathcal{H}^{1/2}(\Sigma) = 0$, i.e. Σ has ‘less than zero’ Lebesgue measure.

Proposition 8 *The 1/2-dimensional Hausdorff measure of the singular set Σ is zero: $\mathcal{H}^{1/2}(\Sigma) = 0$.*

Proof. Given $\epsilon > 0$ we can find an n such that

$$\sum_{q=n+1}^{\infty} |J_q| \leq \epsilon \quad \text{and} \quad \sum_{q=n+1}^{\infty} |J_q|^{1/2} < \epsilon. \quad (41)$$

Denote by K_1, \dots, K_m the closed intervals that make up

$$\Sigma_n := \mathbb{R}^+ \setminus (J_0 \cup \dots \cup J_n).$$

Clearly $\Sigma_n \supset \Sigma$. The integers $\{n+1, n+2, \dots\}$ can be partitioned into sets of indices I_1, \dots, I_m such that

$$K_j = \left(\bigcup_{q \in I_j} J_q \right) \cup (K_j \cap \Sigma).$$

Since the Lebesgue measure of Σ is zero, $K_j \cap \Sigma$ cannot contribute to the length of the interval K_j , and so, as the J_q are disjoint, we must have

$$|K_j| = \sum_{q \in I_j} |J_q| \leq \epsilon \quad (42)$$

(using the first inequality in (41)).

Now, Σ_n , and so Σ itself, can be covered by the intervals K_1, \dots, K_m : using (42) it follows that

$$\sum_{i=1}^m |K_i|^{1/2} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{q \in I_i} |J_q| \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{q \in I_i} |J_q|^{1/2} = \sum_{q=n+1}^{\infty} |J_q|^{1/2} \leq \epsilon,$$

¹³For a rigorous definition of the d -dimensional Hausdorff measure, we take the best approximation of the ‘ d -dimensional volume’ of a set X using a covering of balls with radii no greater than ϵ , by setting

$$\mu(X, d, \epsilon) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} r_i^d : r_i \leq \epsilon \text{ and } X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \quad ,$$

where $B(x_i, r_i)$ denotes the ball of radius r_i centred at x_i . The d -dimensional Hausdorff measure of X , $\mathcal{H}^d(X)$, is given by

$$\mathcal{H}^d(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(X, d, \epsilon).$$

Since we will allow \mathcal{H}^d to take the value $+\infty$, the limit here exists since $\mu(X, d, \epsilon)$ is non-increasing in ϵ . For integer values of d , \mathcal{H}^d is proportional to d -dimensional Lebesgue measure. For more details see Falconer (1985).

using the second inequality in (41). Thus $\mathcal{H}^{1/2}(\Sigma) = 0$ as claimed. \square

7 Singularities of weak solutions in space and time

It is perhaps more natural, but more involved, to consider the way in which singularities might arise when $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is considered as a function of both space and time. Scheffer proved a result along these lines, but this was significantly improved by Caffarelli, Kohn, and Nirenberg (1982) and it is their result that we discuss here.

A point (\mathbf{x}, t) is said to be *regular* if $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is essentially bounded in a neighbourhood of (\mathbf{x}, t) , i.e. for some $M > 0$ we have

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)| \leq M$$

for almost every (\mathbf{y}, s) sufficiently close to (\mathbf{x}, t) . The result shows that if \mathbf{u} is a ‘suitable’ weak solution (such solutions, which satisfy the additional assumption $p \in L^{5/4}(Q)$, are shown to exist by Caffarelli et al.) then the set S of singular points, defined as

$$S = \{(\mathbf{x}, t) : (\mathbf{x}, t) \text{ is not a regular point}\}$$

cannot be too large.

The main ingredient of the proof is a local version of Theorem 5: if (in some sense) the ‘local enstrophy’ of \mathbf{u} is sufficiently small near (\mathbf{x}, t) then the solution is regular near (\mathbf{x}, t) . In the statement we denote by $Q_r(\mathbf{x}, t)$ the parabolic cylinder centred on the space-time point (\mathbf{x}, t) :

$$Q_r(\mathbf{x}, t) = \{(\mathbf{y}, s) : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r, t - r^2 < s < t + r^2\}. \quad (43)$$

Theorem 9 *There exists an $\epsilon > 0$ such that if (\mathbf{u}, p) is a suitable weak solution near (\mathbf{x}, t) for which*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{Q_r(\mathbf{x}, t)} |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{y}, s)|^2 \, d\mathbf{y} \, ds \leq \epsilon$$

then (\mathbf{x}, t) is a regular point.

It is a relatively simple consequence of this result that the one-dimensional measure of the singular set is zero. More precisely, we denote by \mathcal{P}^1 the one-dimensional parabolic Hausdorff measure in \mathbb{R}^4 : this is defined just as for the standard Hausdorff measure of Section 6.4 (see Footnote 13), except that the cover by intervals is replaced by a cover by parabolic cylinders. In particular we say that $\mathcal{P}^1(E) = 0$ if given any $\epsilon > 0$, E can be covered by a collection $\{Q_{r_i}(\mathbf{x}_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ of parabolic cylinders with $r_i \leq \epsilon$ such that $\sum_{i=1}^{\infty} r_i < \epsilon$.

Theorem 10 *The set S of space-time singularities of any suitable weak solution (\mathbf{u}, p) has $\mathcal{P}^1(S) = 0$.*

Note that if $(\mathbf{x}, t) \in S$ then Theorem 9 implies that

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_{Q_r(\mathbf{x}, t)} |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{y}, s)|^2 d\mathbf{y} ds > \epsilon.$$

Proof. Let G be a neighbourhood of S in \mathbb{R}^4 , and choose $\delta > 0$. For each $(\mathbf{x}, t) \in S$ choose a $Q_r(\mathbf{x}, t)$ with $r < \delta$ such that

$$\frac{1}{r} \int_{Q_r(\mathbf{x}, t)} |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{y}, s)|^2 d\mathbf{y} ds > \epsilon \quad \text{and} \quad Q_r(\mathbf{x}, t) \subset G. \quad (44)$$

By a fairly standard covering argument (see Caffarelli et al. (1982) for details) there exists a countable subfamily $\{Q_{r_i} = Q_{r_i}(\mathbf{x}_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ of the collection obtained in this way such that the Q_{r_i} are mutually disjoint and

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{5r_i}(\mathbf{x}_i, t_i).$$

We have from (44)

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i < \epsilon^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Q_{r_i}} |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} dt \leq \epsilon^{-1} \int_G |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} dt. \quad (45)$$

Since δ is arbitrary it follows that S has Lebesgue measure zero, while (45) also implies that

$$\mathcal{P}^1(S) \leq \frac{5}{\epsilon} \int_G |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} dt.$$

Since $|\nabla \mathbf{u}|^2$ is integrable and V is any neighbourhood of S , whose Lebesgue measure is zero, it follows that $\mathcal{P}^1(S) = 0$. \square

We can recover Scheffer's estimate $\mathcal{H}^{1/2}(\Sigma) = 0$ for the set of singular times that we obtained in the previous section from the result of Theorem 10. In order to do this, we will denote by $\Pi_t S$ the projection of S onto the time axis, i.e.

$$\Pi_t S = \{t \in \mathbb{R} : (\mathbf{x}, t) \in S \text{ for some } \mathbf{x} \in Q\}.$$

Relatively standard regularity estimates¹⁴ can be used to show that $\Pi_t S = \Sigma$. It follows that any cover of S by parabolic cylinders with radii $\{r_i\}$ produces a cover of Σ by intervals of length $\{s_i\}$ where $s_i = r_i^2$. Since $\mathcal{P}^1(S) = 0$, as these covers are refined $\sum r_i$ can be made as small as we like, and so $\sum s_i^{1/2}$ can be made arbitrarily small: hence we recover the result that $\mathcal{H}^{1/2}(\Sigma) = 0$.

¹⁴If t_0 is contained in one of the regularity intervals J_q then the regularity results given in Section 5 imply that $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is uniformly bounded for all $\mathbf{x} \in Q$ and all $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. It follows that $\Pi_t S \cap J_q = \emptyset$ for every q , and so $\Pi_t S \subseteq \Sigma$.

Conversely, using a compactness argument we can suppose that $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is uniformly bounded for all $\mathbf{x} \in Q$ for $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, i.e. that (\mathbf{x}, t_0) is regular for all $\mathbf{x} \in Q$. Then we can find $t_1 \in (t_0 - \epsilon, t_0 - \epsilon/2)$ such that $\|D\mathbf{u}(t_1)\| < \infty$ and return to (29)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D\mathbf{u}\|^2 + \nu \|\Delta \mathbf{u}\|^2 + \int_Q [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \Delta \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0,$$

8 Conclusion

This paper has given a brief summary of the rigorous existence and uniqueness results currently available for the three-dimensional Navier-Stokes equations. The existence of weak solutions is known for all time, but they are not smooth enough to enable a proof of uniqueness. On the other hand strong solutions are known to be unique, but their existence can only be proved for short time intervals. If the solutions do develop singularities, results of Scheffer and Caffarelli et al. significantly limit their extent.

A good general discussion of developments in the theory of the Navier-Stokes equations in the latter half of the twentieth century is given by Temam (2000). Further progress is possible if one is prepared to assume that strong solutions *do* exist for all time. In this case many of the results that can be shown for the two-dimensional Navier-Stokes equations, based on the dynamical systems approach, carry over. For more details see, for example, Gibbon and Titi (1997) or Robinson (2005). A sophisticated and rigorous statistical theory for three-dimensional turbulence, without the assumption of regularity, has been developed over a number of years and is reported in the recent monograph by Foias, Manley, Rosa, and Temam (2001).

The difficulty in proving existence and uniqueness results for this fundamental physical model was recognised by the Clay Foundation's inclusion of the problem in their list of seven Millennium Prize Problems. Along with the other six, the historical significance and mathematical challenge of the problem is perhaps a greater spur to a solution than the offer of a million dollars.

References

- [1] 2003adams R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Kidlington, Oxford, 2003.
- [2] 1982CKN L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35: 771–831, 1982.
- [3] 1988CF P. Constantin and C. Foias. *Navier-Stokes Equations*. University of Chicago Press, Chicago, 1988.

now using the fact that \mathbf{u} is uniformly bounded to write

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D\mathbf{u}\|^2 + \nu \|\Delta\mathbf{u}\|^2 &\leq \|\mathbf{u}\|_\infty \|D\mathbf{u}\| \|\Delta\mathbf{u}\| \\ &\leq \frac{1}{2\nu} \|\mathbf{u}\|_\infty^2 \|D\mathbf{u}\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\Delta\mathbf{u}\|^2, \end{aligned}$$

and so

$$\frac{d}{dt} \|D\mathbf{u}\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \|\mathbf{u}\|_\infty^2 \|D\mathbf{u}\|^2.$$

This implies that $\|D\mathbf{u}(t)\|^2$ remains finite on $(t_0 - \epsilon/2, t_0 + \epsilon/2)$, and hence that $t_0 \in J_q$ for some q , and thus $\Sigma \subseteq \Pi_t S$. It follows that $\Pi_t S = \Sigma$.

- [4] 1995DG C.R. Doering and J.D. Gibbon. *Applied Analysis of the Navier-Stokes Equations*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] 1985Falconer K.J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge Tracts in Mathematics 85, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [6] 2005Enrique E. Fernández-Cara. A review of basic theoretical results concerning the Navier-Stokes and other similar equations. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* 32:45–73, 2005.
- [7] 1989FT89 C. Foias and R. Temam. Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations. *J. Funct. Anal.*, 87:359–369, 1989.
- [Foias et al.] 2001FMRT C. Foias, O. Manley, R. Rosa, and R. Temam. *Navier-Stokes equations and turbulence*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 83, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [8] 1997Gibbon-TitiJ.D. Gibbon and E.S. Titi. Attractor dimension and small length scale estimates for the three-dimensional Navier-Stokes equations. *Nonlinearity* 10:109–119, 1997.
- [9] 1984HenryD. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer Lecture Notes in Mathematics Volume 840, Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [10] 1951Hopf E. Hopf. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. *Math. Nachr.*, 4: 213–231, 1951.
- [11] 1962KF1962 T. Kato and H. Fujita. On the nonstationary Navier-Stokes system. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 32:243–260, 1962.
- [12] 1934L34 J. Leray. Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 63:193–248, 1934.
- [13] 1992RR M. Renardy and R.C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Texts in Applied Mathematics Volume 13., Springer Verlag, New York, 1992.
- [14] 2001JCRred J.C. Robinson. *Infinite-dimensional dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [15] 2005JCR2005 J.C. Robinson. Parametrisation of global attractors, experimental observations, and turbulence. Submitted for publication, 2005.
- [16] 1976Rudin W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, Tokyo, 1976.

- [17] 1976Scheffer76 V. Scheffer. Turbulence and Hausdorff dimension, in *Turbulence and Navier Stokes Equation, Orsay 1975*, Springer LNM 565: 174–183, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [18] 1977T77 R. Temam. *Navier-Stokes Equations*. North Holland, Amsterdam, 1977. Reprinted by AMS Chelsea, 2001.
- [19] 1983T83 R. Temam. *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1983.
- [20] 2000T00 R. Temam. Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th Century. *Développments de mathématiques au cours de la seconde moitié du XXeme siècle* (J.P. Pier, ed.). Birkhäuser, Basel: reprinted in Temam (2001).

Modelos matemáticos en biología: un viaje de ida y vuelta

R. ÁLVAREZ-NODARSE

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

ran@us.es <http://euler.us.es/~renato/>

A Renato Alejandro y a Niurka, por el tiempo que les he robado

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar la provechosa interacción entre la Biología y la Matemática. Para ellos mostraremos cómo, por una parte, la Matemática es una herramienta sumamente interesante para entender distintos fenómenos biológicos como la dinámica del ADN, el crecimiento de tumores, dinámica de poblaciones, etc., y estos, a su vez, son una fuente de problemas matemáticos difíciles.

Palabras clave: *modelos matemáticos en biología, dinámica de poblaciones, modelos matemáticos del ADN, modelos de crecimiento de tumores*

Clasificación por materias AMS: *92B05, 92C05, 92D20, 92D25*

Introducción

El objetivo de este *breve* trabajo es mostrar la provechosa interacción entre las matemáticas y las ciencias biológicas, ese camino de ida y vuelta: ida pues las matemáticas pueden ayudarnos a entender (e intentar predecir) muchos fenómenos biológicos, y vuelta, pues recorriendo ese camino los matemáticos tienen una inagotable fuente de problemas difíciles –a ese respecto véase el magnífico artículo [18]–. No en balde muchos científicos afirman que si bien el siglo XX fue el siglo de la Física, este siglo, el XXI, será el de la Biología. El trabajo está dividido en cuatro apartados. En el primero describiremos algunos modelos de poblaciones. En el segundo apartado daremos una breve introducción a la biología celular y molecular necesarios para entender mejor los modelos discutidos en los apartados 3 y 4.

1 Modelos de poblaciones

Los primeros modelos matemáticos aplicados en Biología han sido quizá los modelos que intentan describir la dinámica de poblaciones. Vamos a discutir aquí brevemente algunos de ellos. Para más detalles ver [9, 21]. Por simplicidad vamos a centrarnos en modelos para una única especie.

Fecha de recepción: 10/11/05

1.1 El modelo de Fibonacci

Quizá el modelo más antiguo de crecimiento de poblaciones es el modelo que Leonardo de Pisa (o Fibonacci, como se le conoce desde el siglo XVIII) utilizó para describir el crecimiento de una población de conejos y que describió en su famoso libro sobre la Aritmética, *Liber abaci*, de 1202. El problema es el siguiente: Partiendo de una pareja de conejos (macho y hembra) ¿cuántas parejas habrá al principio de cada temporada?, es decir, ¿qué cantidad hay después de n temporadas?

Para resolverlo Fibonacci supuso ciertas *reglas*:

1. Comenzamos con una única pareja de conejos (macho y hembra).
2. Cada pareja de conejos (macho y hembra) madura (pueden reproducirse) pasado cierto tiempo T (una temporada de crianza).
3. Cada pareja madura de conejos *produce* una única nueva pareja de conejos (macho y hembra) cada temporada de crianza (o sea pasado el tiempo T).
4. Los conejos son inmortales.

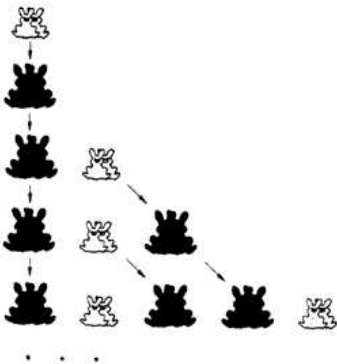


Figura 1: Los conejos de Fibonacci. En cada fila se representan las parejas de conejos por temporada. Las parejas maduras son las de color negro.

la solución en forma $N_t = \lambda^t$, sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5});$$

así, puesto que es una ecuación lineal de orden dos, su solución general es

$$N_t = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t,$$

Si denotamos por N_t el número de parejas (macho y hembra) de conejos al principio de cada temporada y por t la correspondiente temporada, entonces la población de conejos se describe por la *ecuación en diferencias* (recurrencia)

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

Si empezamos por $t = 1$ con las condiciones iniciales $N_0 = N_1 = 1$, la fórmula anterior nos genera la famosa sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

La solución general de dicha ecuación es muy sencilla pues es una ecuación en diferencias lineal y homogénea. Si buscamos

que usando las condiciones iniciales $N_0 = N_1 = 1$ nos da:

$$N_t = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{t+1} - \lambda_2^{t+1}).$$

Nótese que si t es suficientemente grande $N_t \approx \lambda_1^{t+1}/\sqrt{5}$. Un hecho curioso es que $N_{t+1}/N_t \approx (1 + \sqrt{5})/2$, que es la famosa razón áurea.

No vamos a detenernos aquí en el análisis de cuán real es el modelo de Fibonacci (especialmente si tenemos en cuenta la regla 4) y vamos a ver otros modelos *más realistas*.

1.2 El modelo malthusiano o exponencial

Imaginemos que tenemos una población de cierta especie (consideraremos que tenemos un número bastante alto de individuos) y sea $p(t)$ el número de individuos de dicha especie en el momento t (evidentemente $p(t) \in \mathbb{N}$). Supongamos que la población está aislada (o sea, no hay emigración ni inmigración). Sea $r(t, p)$ la diferencia entre la razón de natalidad y mortalidad de la población. Entonces la variación $p(t+h) - p(t)$ es proporcional a $p(t)h$ siendo el coeficiente de proporcionalidad $r(t, p)$. Luego

$$p(t+h) - p(t) = r(t, p)p(t)h,$$

de donde, tomando límites cuando $h \rightarrow 0$ queda

$$p'(t) = r(t, p)p(t).$$

La ecuación más sencilla posible se obtiene si consideramos $r(t, p) = r$, constante. Así, la población de individuos de la especie puede ser modelizada mediante el problema de valores iniciales (PVI)

$$p'(t) = rp(t), \quad p(t_0) = p_0, \quad r > 0, \quad (1)$$

cuya solución $p(t) = p_0 e^{r(t-t_0)}$. El modelo anterior se conoce como modelo de Malthus o modelo malthusiano pues fue propuesto por el economista inglés Thomas R. Malthus (1766–1834). Si $r < 0$, la especie está condenada a la extinción y, si $r > 0$, ésta crece en proporción geométrica.

Veamos un ejemplo. Según estimaciones del Departamento de Comercio de los EEUU, la Tierra estaba habitada en 1965 por $3,34 \cdot 10^9$ personas. Según estudios realizados durante varios años, se cree que el índice de crecimiento es de un 2% anual, o sea $r = 0,02$. Entonces la evolución de la población mundial es

$$p(t) = 3,34 \cdot 10^9 e^{0,02(t-1965)}. \quad (2)$$

Por ejemplo, la ecuación nos predice para el año 1989 la cantidad $5,39 \cdot 10^9$ que se acerca bastante a la estimada de $5,18 \cdot 10^9$, y para el año 2004 de $7,29 \cdot 10^9$ (la

cifra “real” es $6,45 \cdot 10^9$). Además, la fórmula anterior nos dice que la población se duplica cada

$$2N = Ne^{0,02T}, \quad T = 50 \log 2 = 34,6 \text{ años.}$$

¿Es realista este modelo? Para responder a esta pregunta vamos a ver qué ocurre en el año 2515, por ejemplo. Usando la fórmula (2) tenemos $p(2515) = 3,34 \cdot 10^9 \exp(0,02 \cdot 535) = 2 \cdot 10^{14}$, que es un número bastante grande. Veamos cómo estará repartida. La superficie de la tierra es de aproximadamente $5,1 \cdot 10^8 \text{ Km}^2 = 5,1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$, así que la densidad de población será de un habitante por cada $0,4 \text{ m}^2$, o sea un cuadrado de menos de 65 cm de lado, y eso sin contar que el 80% de la superficie terrestre es agua, que nos da apenas un cuadrado de 28 cm de lado. ¿Qué ocurrirá en el 2550?¹

El modelo discreto correspondiente es $p(t+h) - p(t) = rp(t)$, que reescribimos convenientemente en la forma

$$p(t+1) = \lambda p(t) \quad \implies \quad p(t) = p_0 \lambda^t.$$

Este modelo es, por tanto, muy similar al modelo continuo que hemos discutido antes.

1.3 El modelo logístico

Aunque hemos visto que el modelo funciona razonablemente bien para poblaciones grandes, hay que hacer varias correcciones pues si $p(t)$ empieza a crecer demasiado habrá muchos otros factores como la falta de espacio o de alimentos que frenará el crecimiento. Así pues, varios años después, en 1837, un matemático y biólogo holandés, P. F. Verhulst, propuso un modelo algo más realista conocido como el modelo logístico (lo publicó 10 años más tarde). Verhulst razonó que, como estadísticamente el encuentro de dos individuos es proporcional a p^2 (¿por qué?) entonces al término rp de la ecuación (1) habría que sustraerle el término cp^2 . Así, que el PVI que modeliza el crecimiento de la población será

$$p'(t) = rp(t) - cp^2(t), \quad p(t_0) = p_0, \quad r, c > 0. \quad (3)$$

En general c ha de ser mucho más pequeño que r ya que si r no es muy grande la ecuación (1) es una aproximación bastante buena, pero si p comienza a crecer demasiado entonces el término $-cp^2$ no se puede obviar y termina frenando el

¹Malthus, en su ensayo de 1798 “*Acerca de los fundamentos de la población*”, abusando de su ecuación, predijo un colapso socioeconómico pues proclamó que la capacidad procreadora de los humanos es tan grande que siempre nacen más niños que los que pueden sobrevivir, lo cual se agrava por el hecho de que la cantidad de alimentos no crece exponencialmente (Malthus creía que dicho crecimiento era aritmético). Así Malthus concluyó que un gran número de humanos está predestinado a sucumbir en la lucha por la existencia. Aunque hoy día no se consideran ciertas las teorías malthusianas, en su momento tuvieron gran influencia; de hecho fue la lectura del ensayo de Malthus lo que inspiró a Darwin el mecanismo de selección natural universalmente aceptado hoy día.

crecimiento exponencial. Usualmente c se escribe como el cociente r/K donde K es la capacidad de carga que está ligada a los recursos del hábitat.

La EDO (3) es una ecuación separable luego

$$\frac{dp}{p(r - cp)} = dt \Rightarrow \int \frac{dp}{p(r - cp)} = \frac{1}{r} \log \left| \frac{p}{r - cp} \right| = t + C \Rightarrow$$

$p/(r - cp) = Ce^{rt}$ y, por tanto, la solución del PVI (3) es

$$p(t) = \frac{rp_0 e^{r(t-t_0)}}{r - cp_0 + cp_0 e^{r(t-t_0)}} = \frac{rp_0}{cp_0 + (r - cp_0)e^{-r(t-t_0)}}.$$

Nótese que $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = r/c$ independientemente del valor inicial p_0 . En el caso $0 < p_0 < r/c$, la evolución de la población está representada en la gráfica 2. Un ejercicio sencillo resulta comprobar que $p = 0$ es un punto de equilibrio inestable de (3), mientras que $p(t) = K$ es estable. También varía la forma de la curva si $p_0 > K$ o $p_0 < K$; además, en este último caso hay que discernir dos posibilidades $K/2 \leq p_0 < K$ y $0 < p_0 < K/2$.

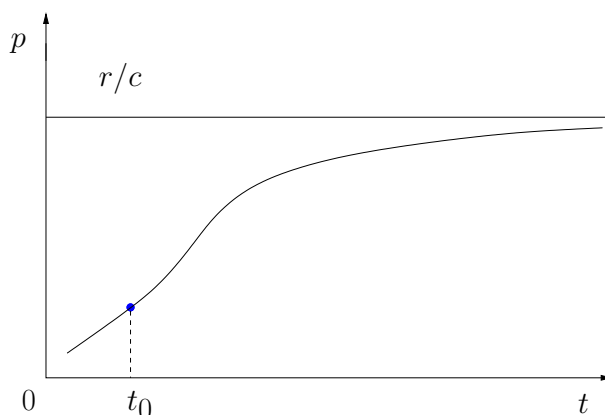


Figura 2: Evolución de la población según el modelo logístico (3) cuando $p_0 < r/c$.

Este modelo se ha comprobado con varias especies y ha dado muy buenos resultados. En particular, el hecho de que la población se estabilice ha sido comprobado en distintos experimentos con paramecios, obteniéndose una gran concordancia entre los resultados teóricos y experimentales.

Vamos a aplicar el modelo logístico a la población mundial. Según los ecologistas, el valor “natural” de r es de 0,029, así que si tomamos los datos de 1965 tenemos que $p'/p = r - cp$ y, como hemos dicho antes, el incremento anual en 1965 era $p'/p \approx 0,02$, luego $0,02 = 0,029 - c(3,34 \cdot 10^9)$ y por tanto

$c = 2,695 \cdot 10^{-12}$. Entonces el modelo logístico predice que la población mundial se estabilizará en torno a la cantidad $p_\infty = r/c = 1,07 \cdot 10^{10}$, lo cual ocurrirá según la ley malthusiana en el 2024.

Obviamente este modelo sigue siendo muy simple ya que no tiene en cuenta ni las guerras (habituales desde hace cientos de años) ni las epidemias.

Un ejercicio interesante es aplicar el modelo logístico en España. Si usamos los datos de los censos de 1940 a 1990 nos da que $r = 0,008$. Si tomamos $p(1940) = 2,62 \cdot 10^7$ podemos encontrar el número de habitantes en 1998 y compararlo con el número censado $p = 3,98 \cdot 10^7$ personas. ¿Cuál será la población en España en el 2500 si sigue la misma tendencia? Como ejercicio al lector, proponemos que haga una estimación del número de habitantes que han de estabilizarse en España (suponiendo que la razón real representa el mismo porcentaje que en el caso de la población mundial y que no haya emigración ni inmigración).

El modelo logístico tiene una versión discreta muy interesante determinada por la ecuación (la hemos escrito convenientemente)

$$u(t+1) = ru(t)(1-u(t)), \quad r > 0, \quad (4)$$

y donde se asume que $u_0 \in (0, 1)$. Este modelo, aparentemente sencillo, esconde bifurcaciones y caos [21]. En la figura 3 podemos apreciar varias soluciones de la ecuación (4) para diferentes valores de r . Para $r = 2$ vemos que la solución tiende muy rápidamente al valor $u^* \approx 1/2$. Al aumentar r la solución comienza a oscilar, primero entre dos valores, cuatro, etc, hasta convertirse en caótica para $r \approx 3,9$.

1.4 Modelos generales

En general, los modelos discretos de poblaciones más usados tienen la forma

$$u(t+1) = f(u(t)) = u(t)F(u(t)),$$

donde f es una función no lineal. Las soluciones estacionarias u^* del modelo corresponden a $u^* = 0$ o $F(u^*) = 1$. Un análisis general de este tipo de ecuaciones está fuera del propósito de este trabajo. Una magnífica discusión, en particular las condiciones de estabilidad de las soluciones estacionarias, se puede consultar en [21, §2.2]. Los correspondientes modelos continuos son del tipo $p'(t) = f(p)$ donde f es generalmente una función no lineal.

Para terminar quisiéramos mencionar cómo un, aparentemente inocente, experimento de Biología ha llevado a desarrollar toda una rama de investigación matemática dentro de las ecuaciones en diferencias: las ecuaciones en diferencias no lineales forzadas periódicamente. En [14] Jillson describe un experimento muy interesante. El experimento consistía en estudiar cómo evolucionan dos

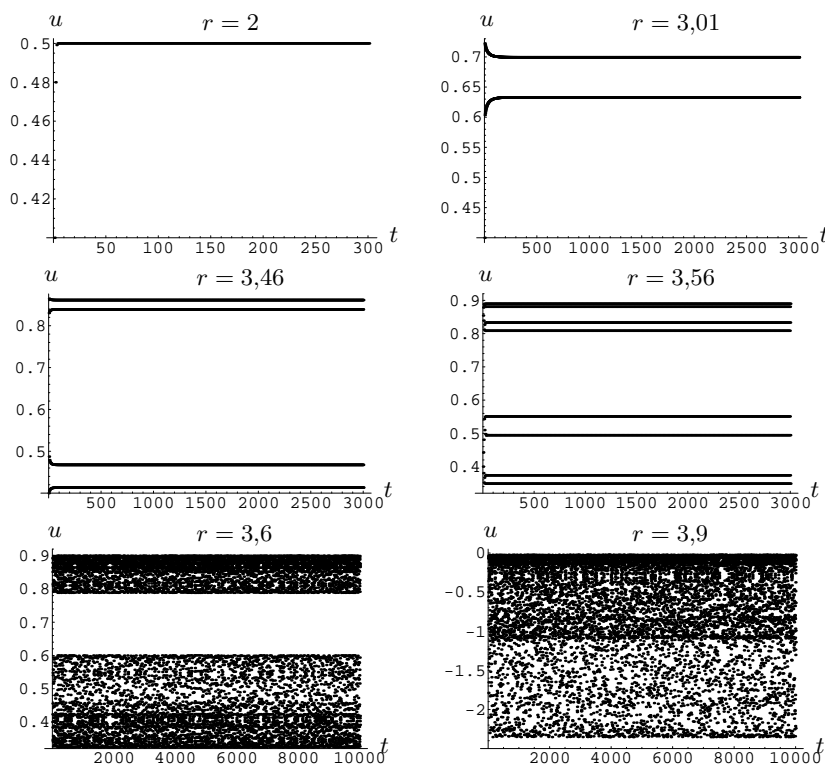


Figura 3: Caos en el modelo logístico discreto (4).

poblaciones de escarabajos en dos medios muy diferentes. En un medio se mantenía una cantidad fija de flores (que constituían el alimento de los escarabajos): 20 gramos; mientras que en el otro medio la cantidad de flores alternaba entre 32 y 8 gramos cada dos semanas. El resultado fue que el número total de los escarabajos del medio oscilante era mucho mayor (más de dos veces) que el número de individuos del medio de control constante.

Entre las ecuaciones candidatas para explicar el fenómeno de Jillson estaban las ecuaciones en diferencias del tipo

$$u(t+1) = r u(t) \left(1 - \frac{u(t)}{K(t)} \right), \quad r > 0, \quad K(t) > 0.$$

Nótese que, si K es constante, recuperamos la ecuación (4). El primer intento fallido de encontrar una ecuación que modelara el fenómeno de Jillson es usar

$$K(t) = K(1 - a(-1)^t), \quad a \in (0, 1),$$

aunque no se obtuvieron los resultados deseados. Otra opción también fallida

fue usar la ecuación de Beverton-Holt

$$u(t+1) = \frac{\mu K(t)u(t)}{K(t) + (\mu - 1)u(t)}, \quad K(t) > 0,$$

donde μ es la razón de crecimiento *per capita*.

Otro modelo de poblaciones, objeto de un intensivo estudio en la actualidad, es el modelo LPA (ver e.g. [8]) basado en ecuaciones en diferencias de la forma

$$u(t+1) = [F(t, u(t)) + T(t, u(t))]u(t),$$

donde T y F son términos correspondientes a la *transición* y *fertilidad*, respectivamente.

2 Breve introducción a la biología celular y molecular

Antes de pasar a discutir algunos modelos matemáticos para describir la dinámica interna del ADN y el crecimiento y control tumoral, debemos hacer una breve incursión por la biología celular y molecular.

2.1 La célula

Célula [DRAE] (Del lat. *cellŭla*, dim. de *cella*, hueco). *f. Biol. Unidad fundamental de los organismos vivos, generalmente de tamaño microscópico, capaz de reproducción independiente y formada por un citoplasma y un núcleo rodeados por una membrana.*

Célula [Alberts et al. [1]]. *Es el vehículo a través del cual se transmite la información hereditaria que define cada especie y que además contiene la maquinaria necesaria para obtener materiales del ambiente y generar una nueva célula a su imagen, que contendrá una nueva copia de la información hereditaria.*

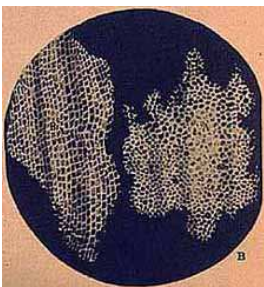


Figura 4: Las células del corcho. Foto del texto *Micrografía* de R. Hooke.

Todos los organismos vivos están compuestos por células. De hecho son estas estructuras los ladrillos sobre los cuales se construyen todos los organismos vivos que conocemos en la naturaleza, ya sean uni o pluricelulares. Por tanto es evidente esperar que el estudio de sus componentes químicos y la interacción entre los mismos pueda arrojar alguna luz sobre su funcionamiento.

El primero en observar (descubrir) las células (aunque muertas) fue Robert Hooke, quien observó con un microscopio un delgado corte de corcho. Hooke notó que el material era poroso. Esos

poros, en su conjunto, formaban cavidades poco profundas a modo de cajas a las que llamó células (del latín “cella”: cámara, espacio vacío). Sus observaciones las publica en 1665 en el libro *Micrografía*. Unos años más tarde, Marcelo Malpighi, anatomista y biólogo italiano, observó células vivas. Pasarían todavía más de 100 años hasta que en 1838, y gracias al perfeccionamiento de los microscopios, el biólogo Mathias Jakob Schleiden y el médico Theodor Schwann sentaron las bases de la moderna teoría celular que establece que todos los organismos vivos están constituidos por células.

Esencialmente existen dos tipos fundamentales de células: las **procariotas** y las **eucariotas**. Las primeras son mucho más simples y carecen de un núcleo definido y su organización interna es muy sencilla, mientras que las segundas poseen una estructura interna más complicada y poseen un núcleo bien definido y limitado por una membrana.

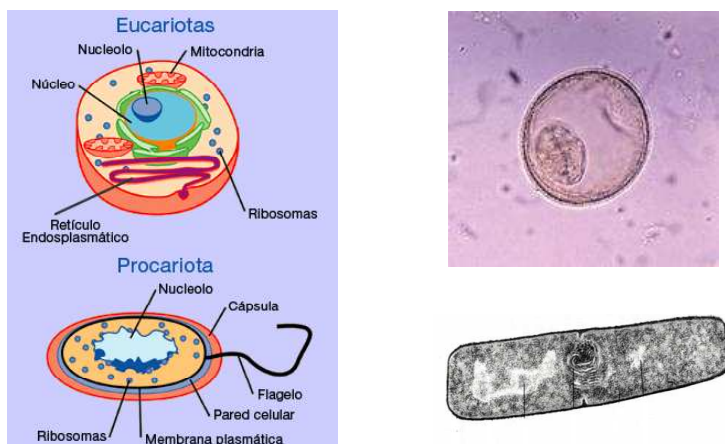


Figura 5: Clasificación de las células: procariotas (abajo) y eucariotas (arriba). Esquema (izquierda) y foto (derecha).

Debido a que las células viven en un medio acuoso y están constituidas casi en su totalidad de agua, es preciso que haya una frontera bien definida que limite a la célula: la membrana plasmática (constituida por lípidos) dentro de la cual se encuentra el citosol –fase acuosa sin estructura del citoplasma.

Las procariotas tienen su ADN condensado en la región central y poseen varios ribosomas –partículas sintetizadoras de las proteínas en la célula–. Las eucariotas son mucho más complejas ya que contienen un sinnúmero de organelos: el núcleo, las mitocondrias –donde ocurre casi todo el metabolismo energético–, aparato de Golgi, los lisosomas –degradan los componentes celulares desgastados y los innecesarios–, etc.

Todas las células guardan la información de la misma forma: **codificada en forma de moléculas de ADN**. Es por ello que nuestra atención se centrará el estudio de dichas moléculas.

2.2 Estructura del ADN

En este apartado vamos a describir brevemente qué es el ADN y qué lo hace tan especial. Una información más completa se puede encontrar en [1, 17].

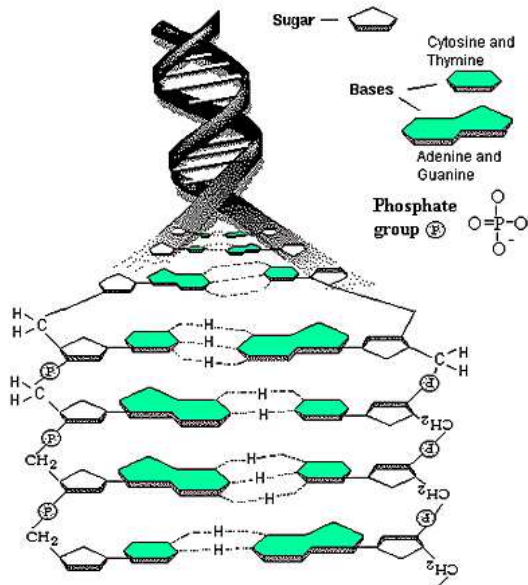


Figura 6: Estructura del ADN.

La molécula de ADN (ácido desoxirribonucleico) está formada por (ver figura 6) dos cadenas de nucleótidos o monómeros compuestos por un azúcar (la desoxirribosa) unida a un grupo fosfato PO_4 que conforman el denominado esqueleto de azúcar-fosfato. A este esqueleto van unidas las bases que pueden ser la adenina (A), la citosina (C), la guanina (G) o la timina (T). Cada azúcar de la cadena está unida a la siguiente mediante el grupo fosfato y de ella sobresale la base.

La molécula de ADN no existe como una cadena libre sino que se junta con otra cadena de ADN formando una de doble hélice tridimensional con las bases colocadas hacia el interior (ver figura 6). Formalmente cada cadena simple puede estar constituida por una secuencia aleatoria de bases. No obstante, en la célula no hay semejantes cadenas simples y el ADN no se sintetiza como una cadena libre aleatoria, sino que lo hace a partir de la cadena original que es usada como molde o patrón. La razón fundamental se debe a que, debido a la

estructura química de las bases, sólo se juntan las bases A con las T (mediante un enlace doble de puente de hidrógeno), y las G con las C (enlace triple).

Así pues, la doble cadena original se separa en dos cadenas simples a partir de las cuales se sintetizan dos nuevas cadenas dobles. Además, el procedimiento es muy sencillo: las bases de la nueva cadena (cadena complementaria) se van uniendo a las bases de la cadena patrón siguiendo el esquema preestablecido: A-T y C-G.

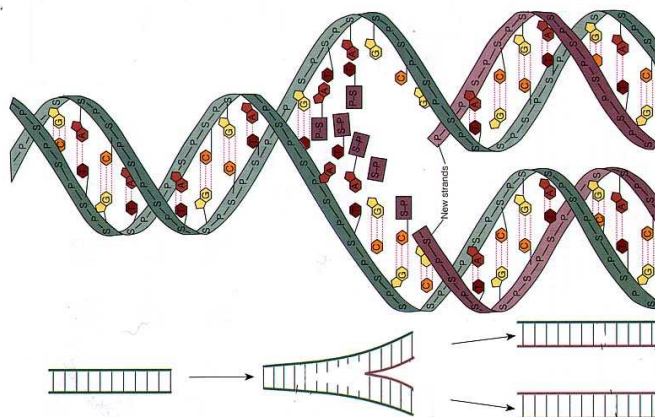


Figura 7: Autorreplicación del ADN.

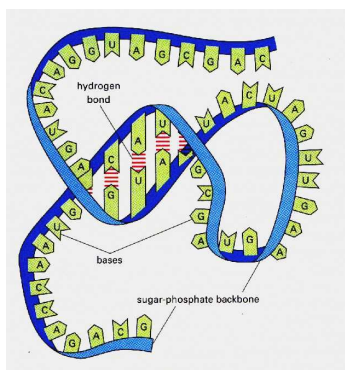


Figura 8: Estructura del ARN.

Aquí hay que destacar un punto de vital importancia: Resulta que los enlaces entre las bases (puentes de hidrógeno) son mucho más débiles que los enlaces azúcar- PO_4 . Esto precisamente permite que se rompa la doble cadena y queden las dos cadenas simples. Además, por la forma de unirse las bases es evidente que ambas cadenas no son independientes sino complementarias (ver la figura 7), de forma que al final quedan dos cadenas de ADN idénticas a la cadena original. El proceso anterior se conoce como la replicación del ADN y justifica el porqué la base de la *vida* –tal y como la conocemos hoy día– radica precisamente en el ADN.

Aparte de autorreplicarse, el ADN debe

expresar la información que contiene utilizándola para dirigir la síntesis de otras moléculas de la célula. Este proceso es bastante complejo pero se puede resumir en dos fases:

1. La **transcripción**: El ADN sintetiza una molécula de ARN (ácido ribonucleico) muy similar en estructura al propio ADN (ver figura 8), pero más corta, constituida por otro azúcar (ribosa) y cuatro bases, A, C, G, y U (uracilo) reemplazando, este último, a la timina T.

2. La **traducción**: El ARN se utiliza para sintetizar proteínas.

El proceso físico de la transcripción es bastante complicado ya que se requiere la interacción de distintos agentes químicos (moléculas) que pueden variar de célula a célula, pero su esencia es la misma. Nosotros nos limitaremos a describir brevemente el cómo ocurre traducción.

2.3 Las proteínas

Las proteínas son otras moléculas esenciales para la vida. Están constituidas por una larga cadena de nucleótidos, distintos de los del ADN y el ARN, denominados aminoácidos. Todos estos aminoácidos (hay 20 tipos distintos) tienen una estructura central por la que pueden juntarse unos con otros (estructura primaria). Unida a dicha estructura central, el aminoácido tiene una estructura lateral (secundaria), que es la que les confiere las características químicas propias (α -hélices y β -láminas).

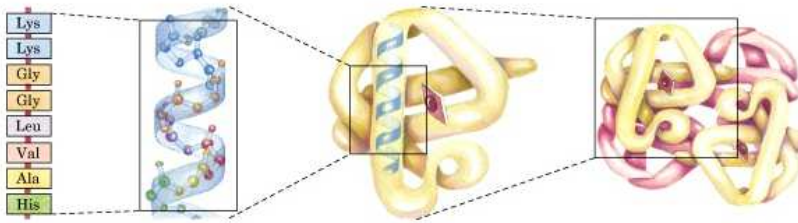


Figura 9: Estructuras primaria, secundaria (α -hélice), terciaria y cuaternaria de una proteína.

Además, las proteínas se pliegan sobre sí mismas en una estructura tridimensional compacta (estructura terciaria) que en su superficie tiene varios grupos reactivos. Son estos grupos los que precisamente se juntan a otras moléculas y actúan como enzimas catalizando las reacciones químicas en las que se rompen o se crean enlaces covalentes –enlaces formados cuando varios átomos comparten electrones–. Finalmente, varias proteínas se pueden juntar (estructura cuaternaria) formando moléculas compactas (ver figura 9).

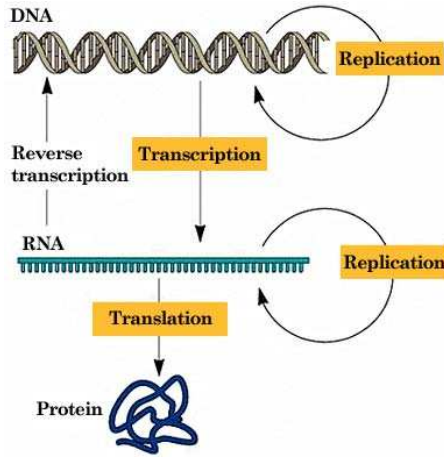


Figura 10: El dogma central de la biología molecular.

De esta forma las proteínas *dirigen* casi todos los procesos químicos de la célula, en particular la propia síntesis del ADN, la del ARN y la de ellas mismas, es decir tenemos un esquema de retroalimentación. En ello se basa el dogma central de la biología (ver figura 10) que consiste en la creencia de que el ADN se transcribe en ARN y éste se traduce en proteínas, encargadas de la mayoría de las funciones biológicas, pero no a la inversa.

2.4 ¿Cómo se traduce el ARN en proteínas?

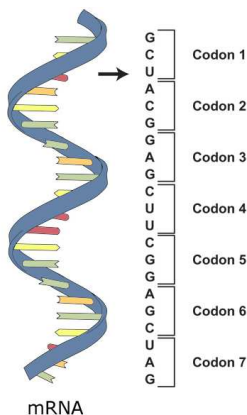


Figura 11: Los codones del mRNA

El proceso de traducción del alfabeto de 4 letras del ADN al de 20 de las proteínas es sumamente complicado por lo que sólo daremos un breve bosquejo del mismo.

Lo primero que hace el ADN es transcribir una parte de él en una cadena simple de ARN denominado ARN mensajero o mRNA que contiene la información de la proteína a sintetizar. La información contenida en el mRNA se lee en grupos de tres nucleótidos: el triplete o codón. Cada codón codifica un aminoácido. Como tenemos $4 \times 4 \times 4 = 64$ posibles codones y sólo 20 aminoácidos, tendremos varios codones distintos que codifican al mismo aminoácido.

El segundo paso es cuando al mRNA se le une un ARN muy corto conocido como ARN de transferencia o tARN. La estructura del tARN es tal que en un extremo (físico) tiene un aminoácido, y, en el otro, un anticodón, de forma que el codón del mRNA se junta con el anticodón del tARN y se va formando la secuencia de proteínas. En la figura 12 se muestra un esquema del proceso. Resumiendo, una molécula de ADN contiene la codificación de miles

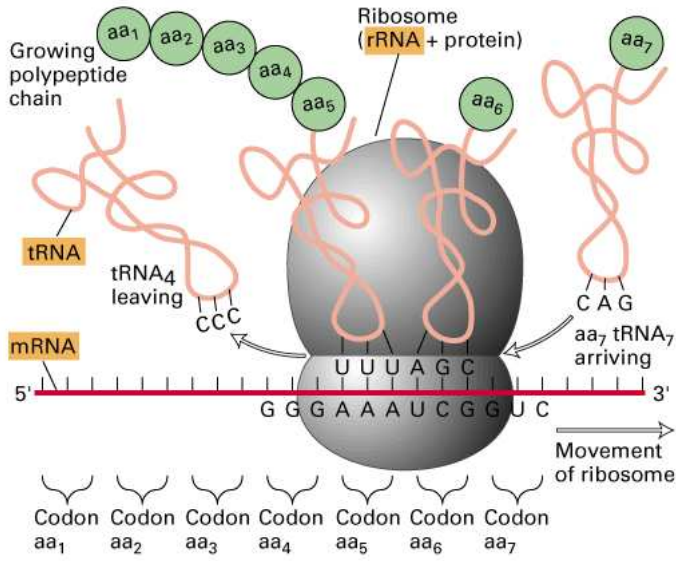


Figura 12: Síntesis de proteínas: el mRNA y el tARN

de proteínas. Esta información se traslada a un mRNA que es quien codifica la proteína al juntarse de una única forma con los tARN en cuyos extremos *viajan* los nucleótidos (aminoácidos) de la correspondiente proteína.

2.5 ¿Qué es un gen?

Ya estamos en condiciones de definir el **gen**. Un **gen** es un fragmento o secuencia del ADN que corresponde a una determinada proteína, o a una molécula de ARN (ver figura 13). Además, se dice que un gen se *expresa* o está *expresado* si la proteína o ARN que dicho gen codifica está presente en la célula en un determinado instante de tiempo.

Lo sorprendente es que el ADN no sólo sintetiza las proteínas, sino que también regula el momento de tiempo cuando dicha proteína debe ser sintetizada. Es decir, la célula, mediante su ADN, ajusta la velocidad de transcripción y traducción de los distintos genes de forma distinta en función de sus necesidades. Lo anterior implica que, aparte de los genes, en el ADN tienen que haber secuencias no codificantes. Estas regiones se denominan ADN regulador –secuencias que regulan la velocidad de transcripción–, y otras regiones

que funcionan como signos de puntuación: indican el inicio y final de la información para la síntesis de una proteína dada.

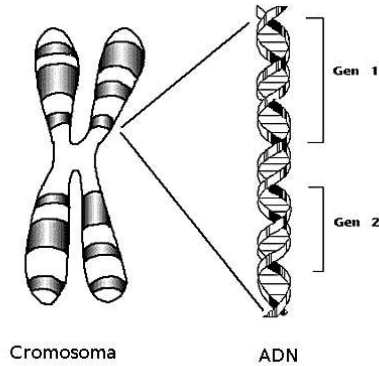


Figura 13: Un gen es una secuencia del ADN que codifica una proteína o ARN.

Así, la totalidad de la información genética incluida en la secuencia completa de ADN, denominada *genoma* de una célula, dicta no sólo qué moléculas han de sintetizarse, sino dónde y cuándo.

2.6 El ciclo celular

La célula de cualquier organismo adulto es un sistema en un perfecto estado de equilibrio. El proceso de transcripción del ADN en mRNA y de estos en proteínas está extremadamente bien regulado de forma que la célula no cambia ni su tamaño ni su función. Esta visión aparentemente estática de la célula es, sin embargo, errónea. De hecho, las células “nacen”, se “desarrollan” y “mueren” como cualquier organismo vivo. Una célula nueva se origina de dos maneras: por fusión –como el espermatozoide y el ovocito– o por división celular. En ambos casos se inicia un complejo programa de replicación celular codificado por el ADN y ejecutado por las correspondientes proteínas. Aquí nos centraremos en el segundo de los casos: la división celular.

El crecimiento y división celular es un proceso muy bien regulado que es consecuencia de una necesidad del organismo. Por ejemplo, el crecimiento de las células musculares como consecuencia del ejercicio físico o el aumento de los eritrocitos debido a las grandes alturas. Si este proceso falla pueden producirse alteraciones muy peligrosas. Así, si las células empiezan a dividirse y crecer sin necesidad, pueden terminar formando tumores malignos o **cánceres**.

Antes de discutir las bases de esta temida enfermedad, veamos brevemente cómo está constituido el ciclo celular.

El ciclo celular eucariota consta de dos fases fundamentales. La fase *S* (de síntesis), que dura unas 12 horas en un mamífero, y la *M* de mitosis, con una

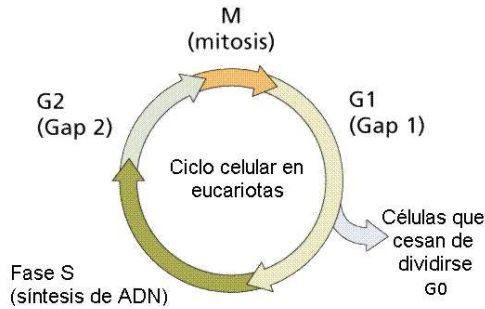


Figura 14: El ciclo celular eucariota.

duración de menos de una hora. A estas dos fases se le intercalan dos periodos de *descanso* que le permiten a la célula crecer: La fase G_1 entre M y S y la G_2 entre S y M . Usualmente a las fases G_1 , S , y G_2 se les denomina *interfase*. La interfase tiene una duración total de 23 horas en un mamífero. Además de estas fases, muchas células, después de la mitosis, entran en un estado latente o de reposo llamado G_0 , que puede durar días e incluso años.

2.7 Cáncer

El cuerpo de un organismo vivo pluricelular, e.g. el hombre, se comporta como una sociedad o ecosistema cuyos miembros son células de distintos tipos y funciones que se reproducen por división celular y que están organizadas en tejidos. Lo anterior indica que, para su descripción, podemos aplicar las técnicas de dinámica de poblaciones que engloban tanto los nacimientos y muertes celulares, como los hábitats, límites territoriales, tamaño de las poblaciones, etc. También, como cualquier sistema vivo, en estas poblaciones tiene lugar el proceso de *selección natural*.

En general, todas las células del organismo están comprometidas en un equilibrio en el cual se *cuentan* unas a otras –mediante distintas señales químicas que emiten e interpretan– lo que tienen que hacer en cada momento: quedarse en estado latente G_0 , dividirse M , diferenciarse, o morir (*apoptosis*). Las alteraciones moleculares que rompen esta armonía pueden ser extremadamente perjudiciales para el organismo. Por ejemplo, en el cuerpo humano hay unas 10^{14} células y ocurren 10^9 mutaciones diarias. Normalmente la célula tiene un mecanismo de control y reparación de los daños en su ADN; el problema aparece cuando algunas de esas mutaciones proporcionan a la célula una ventaja evolutiva frente a sus compañeras del tejido permitiendo, por ejemplo, que se dividan más deprisa, y creando un clúster de células *anómalas* en crecimiento. Si además estos clústers empiezan a proliferar a expensas de las células vecinas pueden terminar por destruir toda la *sociedad celular*. Cuando esto ocurre estamos en presencia de un *cáncer*.

Así pues, el *cáncer* consiste en el crecimiento descontrolado y diseminación

de células anómalas en el organismo, que invaden y dañan tejidos y órganos.

Debemos hacer hincapié aquí en que el cáncer **no** es una única enfermedad, sino un grupo de al menos 100 enfermedades distintas aunque relacionadas, a menudo con causas diferentes. La aparición de un cáncer no se debe a un único factor sino a la combinación de varios factores que se engloban en dos grupos: la herencia genética y el ambiente. Se ha demostrado que la herencia de versiones anormales de algunos genes es responsable de la predisposición a padecer algunos tipos de cáncer.

Las células cancerosas se caracterizan fundamentalmente por dos propiedades hereditarias:

1. Se reproducen a pesar de las restricciones normales (e.g. ignoran las señales celulares para que no ocurra la división celular).
2. Invaden y colonizan territorios reservados a otras células.

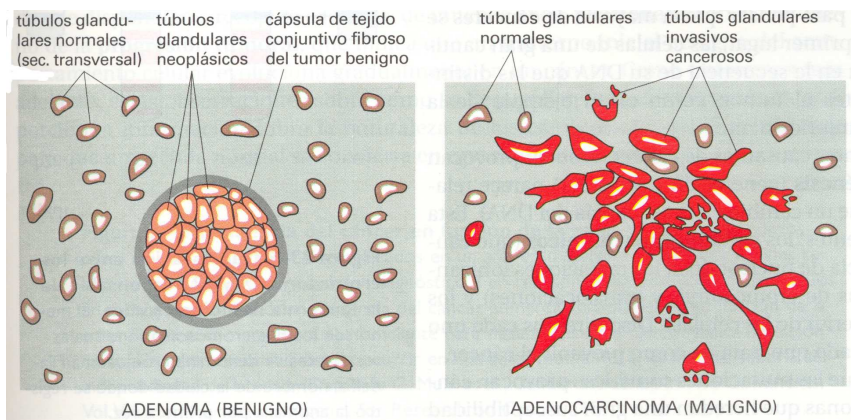


Figura 15: Tipos de tumor.

Si una célula normal no prolifera más que sus vecinas no se produce ningún daño sustancial, pero si su proliferación está fuera de control entonces se produce un tumor o neoplasma –masa de células anómalas que crece de forma inexorable–. Si estas células anormales se mantienen agrupadas en una única masa, usualmente limitada por una membrana de tejido conjuntivo fibroso, se dice que el tumor es benigno (se suelen extirpar y problema resuelto). El verdadero problema surge cuando las células del tumor invaden el tejido circundante, en particular, si son capaces de liberarse y viajar por los vasos sanguíneos o linfáticos y formar tumores secundarios en otras partes del organismo (ver figura 15).

Así, la carcinogénesis o aparición de un cáncer es el resultado de dos procesos sucesivos:

1. El aumento descontrolado de la proliferación de un grupo de células que da lugar a un tumor o neoplasia.
2. La posterior adquisición por estas células de capacidad invasiva, que les permite diseminarse desde su sitio natural en el organismo y colonizar y proliferar en otros tejidos u órganos (proceso conocido como **metástasis**).

Este último es precisamente el más peligroso y el causante de que un cáncer sea mortal.

Cuando un tumor es detectable ha adquirido ya un tamaño considerable (alrededor de 0,5 cm de diámetro para su detección por rayos X, y de 1 cm por palpación) y está constituido por un elevado número de células (de 100 a 1.000 millones). Existen muchas pruebas científicas que indican que la mayoría de los tumores, benignos o malignos, derivan de una sola célula. Para que finalmente aparezca el tumor, los descendientes de esa célula han de continuar cambiando de forma que, para que alguna de ellas se vuelva cancerosa, han de ocurrir una enorme cantidad de alteraciones y mutaciones adicionales. Todo esto suele ocurrir a lo largo de muchos años. Hoy día se piensa que desde el inicio del proceso hasta que un cáncer puede ser diagnosticado transcurren una o más décadas. Así, el proceso de progresión tumoral se compone de cambios genéticos (mutaciones) y selección progresiva de células cada vez más anormales en su crecimiento y comportamiento, adquiriendo la capacidad de invadir el tejido circundante y, posteriormente, de originar metástasis.

2.8 Bioinformática

Como hemos visto a lo largo de esta sección, el ADN contiene toda la información necesaria para el correcto funcionamiento de la célula. Es por ello que no es de extrañar que se haya invertido tanto esfuerzo y dinero en su **secuenciación**, es decir, en descubrir el orden en el que se encuentran sus bases. Este es el punto de partida para luego identificar los correspondientes genes, lo cual tendría repercusiones inimaginables.

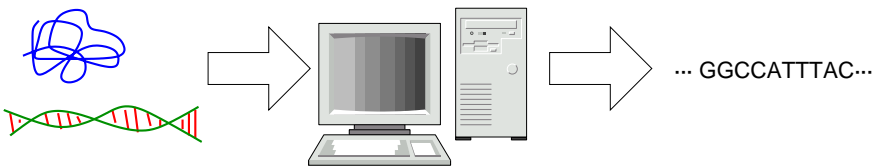


Figura 16: ¿Qué es la bioinformática?

A partir de 1955 los científicos comienzan a disponer de las primeras secuencias completas de algunas proteínas: la hormona peptídica *insulina* [26], o la enzima *ribonucleasa* [13]. En 1965 ya se conocían las secuencias de unas 20 proteínas; en 1980, de unas 1500, en 1999 de 300000; en el 2005 unas 510000

(según la base de datos NCBI²). La situación se complica si queremos secuenciar el ADN, pues las cadenas de ADN son mucho más largas –la del hombre, por ejemplo, tiene entre $5,5 \times 10^7$ y 25×10^7 pares de bases (una proteína tiene muchas menos bases ~ 2000)–. A lo anterior hay que añadir que es técnicamente imposible secuenciar (al menos hoy día) una cadena tan larga, por lo que en la práctica hay que romperla en cadenas más cortas (usualmente de unos 500 pares de bases) para luego secuenciarlas y finalmente recomponer la cadena original.

Todo este proceso genera una ingente cantidad de datos (las secuencias de bases, o cadenas de letras, como la que se muestra en la figura 17) que hay que analizar, cotejar, almacenar, etc., por lo que se hace imprescindible el uso de potentes ordenadores y avanzadas técnicas informáticas.

```

1   cctcgacgtc gacgtaacg gtaccgagct tgtggcagtt taaggcgggc gtccctgccc
61  ccaccctccg ggccgttgct tcgcaacgtt caaatccgct cccggcggat ttgtcctact
121 caggagagcg ttcaccgaca aacaacagat aaaacgaaag gcccagcttt tcgactgagc
181 ctttcgtttt atttgatgct tcaagctcgg tacctcgagg gaattccgga tccggcatca
241 tggttcgacc attgaaactgc atcgtcgcgg tgtcccaaaa tatggggatt ggcaagaacg
301 gagacctacc ctggcctccg ctcaggaacg agttcaagta cttccaaaga atgaccacaa
361 cctcttcagt ggaaggtaaa cagaatctgg tgattatggg taggaaaacc tggttctcca
421 ttcttgagaa gaatcgacct ttaaaggaca gaattaatat agttctcagt agagaactca
481 aagaaccacc acgaggagct cttttcttg ccaaagttt ggatgatgcc ttaagactta
541 ttgaacaacc ggaattggca agtaaagtag acatggtttg gatagtcgga gccagttctg
601 ttaccagga agccatgaat caaccaggcc accttagact ctttgtagaca aggatcatgc
661 aggaatttga aagtacacg tttttccag aaattgattt ggggaaatat aaacttctcc
721 cagaataccc aggcgtcctc tctgaggtcc aggaggaaaa aggcatcaag tataagtttg
781 aagtctacga gaagaagac taacaggaag atgctttcaa gttctctgct cccctctaa
841 agctatgcat ttttataaga ccatgggact ttgctggct ttgatccgg ccaagcttgg
901 actcctgttg atagatccag taatgacctc agaactccat ctggatttgt tcagaacgct
961 cggttgcgcg cgggcgtttt ttattggtga gaatccaaag cttggcgaga ttttcaggag

```

Figura 17: Fragmento de la secuencia del plásmido pDS3 (primeras 1020 bases)

Esta necesidad se ha llevado a la aparición de una nueva ciencia: la Bioinformática, término acuñado a mitad de los 80 (del siglo XX) para definir el conjunto de técnicas y aplicaciones informáticas (y ordenadores) usadas en las ciencias biológicas. En particular, existen en la WWW distintas bases de datos de libre acceso que contienen gran cantidad de información: secuencias completas de proteínas, genomas de algunas especies, etc. Algunas de ellas son:

1. <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/> (The National Center for Biotechnology Information, Estados Unidos).
2. <http://www.ebi.ac.uk/Databases/> (The European Bioinformatics Institute, Reino Unido).

²Véase la página web <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/gquery/>.

3. <http://au.expasy.org/> (The ExPASy –Expert Protein Analysis System–, Suiza).
4. <http://www.rcsb.org/pdb/> (The Research Collaboratory for Structural Bioinformatics, Estados Unidos).
5. <http://www.ensembl.org/> (The Ensembl Genome Browser).

Una magnífica introducción en castellano a la Bioinformática se puede encontrar en la WWW

http://bvs.isciii.es/bib-gen/Actividades/curso_virtual/esquema.htm

Algunos textos interesantes sobre Bioinformática son [2, 3, 24].

3 Modelos matemáticos de la dinámica interna del ADN

De la discusión anterior es fácil adivinar que modelos realistas que describan la dinámica interna del ADN y permitan entender los procesos de transcripción, etc. son prácticamente inviables. Por ejemplo, un modelo cuántico realista debería incluir las interacciones de miles de millones de partículas (los átomos), con el agravante de que no está claro el potencial de interacción para describir los enlaces por puentes de hidrógeno, por citar alguna de las muchas interacciones internas. Es por ello que vamos a considerar algunos modelos sencillos y los problemas matemáticos que surgen a partir de ellos. La referencia básica para este apartado es [29].

Antes de comenzar debemos recordar que la molécula de ADN está formada por dos cadenas de átomos muy largas enrolladas una sobre la otra en forma de doble hélice. La estructura de las cadenas es bastante regular y contiene 4 bases repetidas con gran precisión. Esta estructura es muy similar a la de los casi-cristales unidimensionales [7], pero, a diferencia de éstos, el ADN es *bastante flexible*.

3.1 Modelos lineales

3.1.1 Una única cadena

Supongamos que tenemos una cadena única de ADN (o ARN). Un modelo sencillo consiste en cambiar las bases por discos (cilindros) y suponer que la interacción de las mismas es una interacción armónica. Consideraremos únicamente los movimientos longitudinales y rotacionales de los discos.

Sea $u_n(t)$ el desplazamiento longitudinal del n -ésimo disco de su posición de equilibrio en el instante de tiempo t y sea $\varphi_n(t)$ el correspondiente desplazamiento angular (ver figura 18). Por simplicidad asumiremos que tanto las masas (y los momentos de inercia, respectivamente) como las constantes elásticas y de torsión son las mismas (cadena homogénea). Entonces, si suponemos que las amplitudes de oscilación internas no son muy grandes,

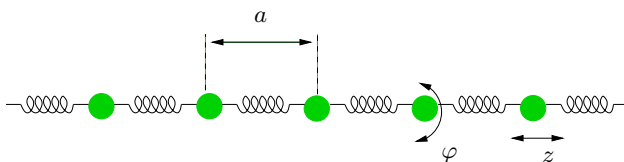


Figura 18: Modelo lineal de una cadena: movimientos longitudinal y angular.

podemos escribir el Hamiltoniano del sistema en la aproximación armónica, es decir, en la forma³

$$H = H_l + H_r + H_{l-r},$$

donde

$$\begin{aligned} H_l &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m \dot{u}_n^2 + \frac{1}{2} k (u_{n+1} - u_n)^2, \\ H_r &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_n^2 + \frac{1}{2} \varkappa (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

siendo N el número total de monómeros de la cadena, m la masa del disco, I su momento de inercia, k la constante elástica, \varkappa la constante de torsión, y donde H_{l-r} representa el Hamiltoniano de la interacción entre ambos movimientos. Usualmente se imponen condiciones de frontera periódicas

$$u_n = u_{n+N}, \quad \varphi_n = \varphi_{n+N}.$$

En primera aproximación se puede suponer que H_{l-r} es constante.

Bajo estas condiciones, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m \ddot{u}_n - k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) &= 0, \\ I \ddot{\varphi}_n - \varkappa(\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

El sistema anterior es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales desacopladas (independientes). Las soluciones típicas del sistema anterior son las ondas viajeras planas

$$u_n(t) = u_{0n} e^{i(qna - \omega_t t)}, \quad \varphi_n(t) = \varphi_{0n} e^{i(qna - \omega_r t)}, \quad (7)$$

donde q es el número de onda y a es la distancia entre dos discos cualesquiera (que suponemos constante a lo largo de la cadena). Sustituyendo (7) en (6) obtenemos las relaciones de dispersión para las frecuencias longitudinales y rotacionales

$$\omega_t = \frac{2k}{m} (1 - \cos qa), \quad \omega_r = \frac{2\varkappa}{I} (1 - \cos qa).$$

³En adelante, por $\dot{f}(t)$ denotaremos la derivada con respecto al tiempo de f .

Veamos el límite continuo de las ecuaciones anteriores, es decir pasemos del modelo discreto de discos a un modelo continuo tipo cuerda elástica. Comenzaremos reescribiendo la primera de las ecuaciones (6) en la forma

$$\frac{m}{a} \ddot{u}_n = (ka) \frac{u_{n+1} - u_n}{a^2} - (ka) \frac{u_n - u_{n-1}}{a^2}.$$

Tomemos $a \rightarrow 0$ y denotemos por ρ la densidad de masa por unidad de longitud; entonces, teniendo en cuenta que

$$u_n(t) = u(na, t) \rightarrow u(z, t),$$

tenemos

$$\frac{m}{a} \rightarrow \rho, \quad ka \rightarrow K, \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{a^2} - \frac{u_n - u_{n-1}}{a^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(z, t) = u_{zz}(z, t),$$

luego obtenemos la ecuación de ondas

$$\rho u_{tt} = K u_{zz},$$

cuya solución es $u(z, t) = u_0 e^{i(qz - \omega t)}$, que sustituida en la ecuación anterior nos da

$$\omega_l = \sqrt{\frac{K}{\rho}} q.$$

Para la segunda ecuación obtenemos, de forma análoga,

$$\iota \varphi_{tt} = \kappa \varphi_{zz},$$

cuya solución es

$$\varphi(z, t) = \varphi_0 e^{i(qz - \omega_r t)}, \quad \omega_r = \sqrt{\frac{\kappa}{\iota}} q,$$

siendo ι la densidad lineal del momento de inercia y $\kappa = \lim_{a \rightarrow 0} \alpha a$. En ambos casos el número de onda se encuentra en el intervalo $[-\pi/a, \pi/a]$.

De lo anterior se deduce que a través de la cadena se desplaza una onda viajera cuyas velocidades longitudinal y rotacional son

$$v_l = \frac{\partial \omega_l}{\partial q} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad v_r = \frac{\partial \omega_r}{\partial q} = \sqrt{\frac{\kappa}{\iota}},$$

respectivamente.

El modelo anterior tiene una clara deficiencia: No tiene en cuenta el movimiento perpendicular al eje z (ver figura 19). Si tenemos en cuenta este movimiento se puede probar que el desplazamiento perpendicular al eje z , que denotaremos por y , satisface la ecuación

$$S \rho y_{tt} = -\kappa \iota y_{zzzz},$$

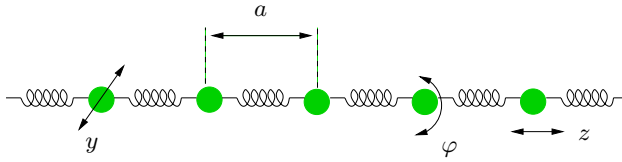


Figura 19: Modelo lineal de una cadena: movimientos longitudinal, angular y transversal.

donde S es el área de la base del cilindro. Como ejercicio dejamos al lector que deduzca la expresión de la relación de dispersión y la velocidad de onda de las correspondientes ondas transversales.

Otra importante deficiencia del modelo es que la energía no está localizada ya que la solución onda plana corresponde a una energía uniformemente distribuida a lo largo del medio (en este caso la cadena de ADN). Por tanto, si pretendemos que el modelo explique el fenómeno de la transcripción, por ejemplo, es esencial que no ocurra lo anterior, es decir, la onda viajera ha de estar muy localizada de forma que la energía se localice en unos pocos pares de bases. A lo anterior hay que agregarle otra importante deficiencia y es que, para romper la doble cadena, se necesita además que la amplitud de la onda sea lo suficientemente grande, lo cual está en abierta contradicción con la suposición inicial de que podemos aproximar las interacciones mediante términos armónicos. Estas deficiencias se resuelven parcialmente en los modelos no lineales que discutiremos posteriormente.

3.1.2 Una cadena doble

Supongamos que tenemos una doble cadena de ADN. Un modelo sencillo consiste nuevamente en cambiar las bases por discos y suponer que tanto la interacción entre los nucleótidos como la de las bases de ambas cadenas es una interacción armónica. Consideraremos los movimientos longitudinales u , transversales y y rotacionales φ de los discos. En este caso, el Hamiltoniano se

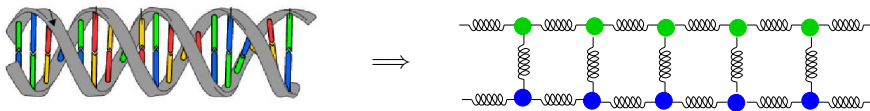


Figura 20: Modelo lineal de una doble cadena.

escribe como

$$H = H_l^{(1)} + H_l^{(2)} + H_t^{(1)} + H_t^{(2)} + H_r^{(1)} + H_r^{(2)} + H^{(1-2)},$$

donde $H_l^{(j)}$, $H_t^{(j)}$ y $H_r^{(j)}$, $j = 1, 2$, representan los movimientos longitudinales, transversales y rotacionales de cada una de las dos cadenas, respectivamente, y $H^{(1-2)}$ es la interacción entre ambas.

Para los dos primeros Hamiltonianos tenemos una expresión análoga a (5), de forma que

$$\begin{aligned} H_l^{(j)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m \dot{u}_{n,j}^2 + \frac{1}{2} k (u_{n+1,j} - u_{n,j})^2, \\ H_r^{(j)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} I \dot{\varphi}_{n,j}^2 + \frac{1}{2} \kappa (\varphi_{n+1,j} - \varphi_{n,j})^2, \\ H_t^{(j)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m \dot{y}_{n,j}^2 + \frac{1}{2} b (y_{n+1,j} - y_{n,j})^2. \end{aligned}$$

La interacción entre cadenas pueden modelarse, en primera aproximación, mediante los términos

$$H^{(1-2)} = \sum_{n=1}^N \frac{\alpha}{2} (u_{n,1} - u_{n,2})^2 + \sum_{n=1}^N \frac{\beta}{2} (\varphi_{n,1} - \varphi_{n,2})^2 + \sum_{n=1}^N \frac{\gamma}{2} (y_{n,1} - y_{n,2})^2,$$

donde α , β y γ son ciertas constantes. Así, obtenemos un sistema de seis ecuaciones acopladas dos a dos:

$$\begin{cases} m \ddot{u}_{n,1} - k(u_{n+1,1} - 2u_{n,1} + u_{n-1,1}) - \alpha(u_{n,2} - u_{n,1}) = 0, \\ m \ddot{u}_{n,2} - k(u_{n+1,2} - 2u_{n,2} + u_{n-1,2}) - \alpha(u_{n,1} - u_{n,2}) = 0, \\ I \ddot{\varphi}_{n,1} - \kappa(\varphi_{n+1,1} - 2\varphi_{n,1} + \varphi_{n-1,1}) + \beta(\varphi_{n,2} - \varphi_{n,1}) = 0, \\ I \ddot{\varphi}_{n,2} - \kappa(\varphi_{n+1,2} - 2\varphi_{n,2} + \varphi_{n-1,2}) + \beta(\varphi_{n,2} - \varphi_{n,1}) = 0, \\ m \ddot{y}_{n,1} - b(y_{n+1,1} - 2y_{n,1} + y_{n-1,1}) - \gamma(y_{n,2} - y_{n,1}) = 0, \\ m \ddot{y}_{n,2} - b(y_{n+1,2} - 2y_{n,2} + y_{n-1,2}) - \alpha(y_{n,1} - y_{n,2}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Nuevamente buscamos las soluciones del tipo onda plana. Aquí nos restringiremos a la primera de las ecuaciones acopladas de (8),

$$u_{n,j}(t) = u_{0j} e^{i(qna - \omega_{l,j}t)}.$$

Sustituyéndolas en (8) obtenemos las relaciones de dispersión

$$\omega_{l,1} = \sqrt{\frac{4k}{m} \sin^2(qa/2)}, \quad \omega_{l,2} = \sqrt{\frac{4k \sin^2(qa/2) + 2\alpha}{m}}.$$

Si, como en el caso anterior, tomamos el límite cuando $a \rightarrow 0$ (límite continuo) obtenemos las ecuaciones

$$\rho u_{1tt} = K u_{1zz} + \alpha(u_2 - u_1), \quad \rho u_{2tt} = K u_{2zz} + \alpha(u_1 - u_2).$$

Sus soluciones tipo onda plana son

$$u_1(z, t) = u_{01}e^{i(qz - \omega_{1,1}t)}, \quad u_2(z, t) = u_{02}e^{i(qz - \omega_{1,2}t)},$$

que nos conducen a las relaciones de dispersión:

$$\omega_{1,1} = \sqrt{\frac{ka^2q^2}{m}}, \quad \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{ka^2q^2 + 2\alpha}{m}}.$$

Para las otras dos ecuaciones los cálculos son similares y los omitiremos (se dejan como ejercicio al lector).

Limitaciones.

Esta claro que estos son los modelos más simples y por tanto tienen un sinnúmero de limitaciones. Esencialmente hemos considerado en la cadena de ADN los nucleótidos como una única partícula, cuando en realidad son mucho más complicados ya que constan de un azúcar, un grupo fosfato y una base heterocíclica de carbono (5-carbono). Por lo tanto, un modelo más realista debería tener en cuenta esta estructura. En la figura 21 se muestra un modelo donde se separa el esqueleto de carbón-fosfato (rectángulo), el azúcar (círculo intermedio –claro–) y la base (círculo exterior –oscuro–). Mediante líneas continuas se representan las interacciones internas de cada cadena y por la discontinua la interacción entre cadenas por puente de hidrógeno. Además, como ya mencionamos; la energía no está localizada, por lo que no es posible utilizar modelos lineales para dar una explicación del proceso de transcripción, por citar un ejemplo.

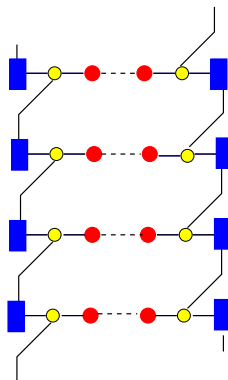


Figura 21: Modelo lineal de una doble cadena: segunda aproximación.

Denotemos, como antes, los movimientos longitudinales, transversales y rotacionales de las bases por u , y y φ , respectivamente; y denotemos por v

los transversales entre el azúcar y el grupo fosfato. Suponiendo que podemos usar la aproximación armónica podemos escribir el Hamiltoniano de la forma

$$H = \sum_{i=1,2} \left(H_l^{(j)} + H_t^{(j)} + H_r^{(j)} + H_{ab}^{(j)} \right) + H_l^{(1-2)} + H_t^{(1-2)} + H_r^{(1-2)} + H_{fa}^{(1-2)},$$

donde los términos son similares a los de antes pero ahora $H_{fa}^{(j)}$ representa la nueva interacción fosfato-azúcar. Como ejercicio se deja al lector encontrar las ecuaciones de movimiento en este caso, así como las relaciones de dispersión. El modelo más exacto corresponde a la estructura atómica real de ADN (ver figura 22).

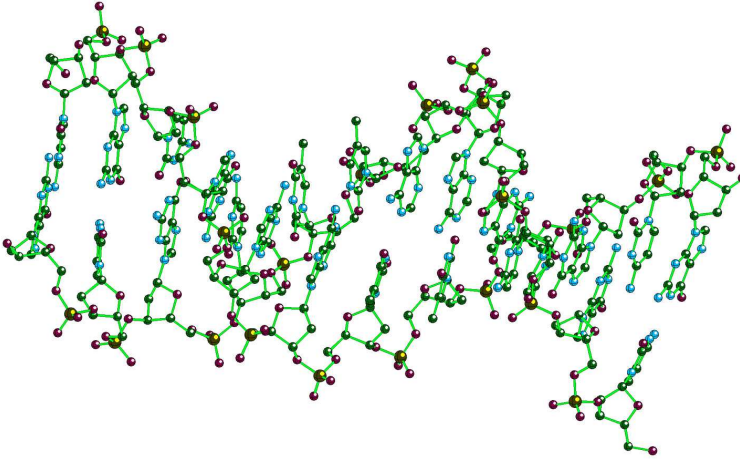


Figura 22: Modelo lineal más exacto de una doble cadena de ADN.

En todos estos casos también hay que tener en cuenta que el Hamiltoniano se está considerando en su aproximación armónica, es decir cuando las oscilaciones de las correspondientes partículas son suficientemente pequeñas. Nuevamente esto constituye una limitación para explicar la apertura o rotura de la doble cadena de ADN. Si estas amplitudes no son pequeñas, entonces entran a jugar un papel fundamental los efectos anarmónicos (o no lineales). Este tipo de modelos no lineales son de enorme interés como veremos en la próxima sección. Finalmente, debemos mencionar que los Hamiltonianos de interacción aquí supuestos no corresponden a los reales, los cuales son desconocidos.

3.2 Modelos no lineales

De entre los muchos modelos no lineales vamos a tratar aquí los más sencillos. Incluso en estos modelos veremos las dificultades matemáticas que aparecen cuando queremos hacerlos más *realistas*. Nuevamente la referencia básica será [29].

3.2.1 Modelo de Englander et al. [12].

Vamos a comenzar por un modelo mecánico muy sencillo propuesto en 1980 por S.W. Englander et. al. para describir los estados abiertos del ADN (es decir, los estados cuando están rotos los enlaces de puente de hidrógeno entre las bases de las cadenas del ADN). La idea de Englander et al. se basa en el modelo mecánico de Scott, que consiste en modelar el esqueleto azúcar-fosfato por una cadena de osciladores y las bases por péndulos (ver figura 24). Por simplicidad se considerarán sólo los movimientos giratorios, despreciando el resto. Además, supondremos que la aportación de la segunda cadena consiste en crear un potencial efectivo V_e sobre la primera.

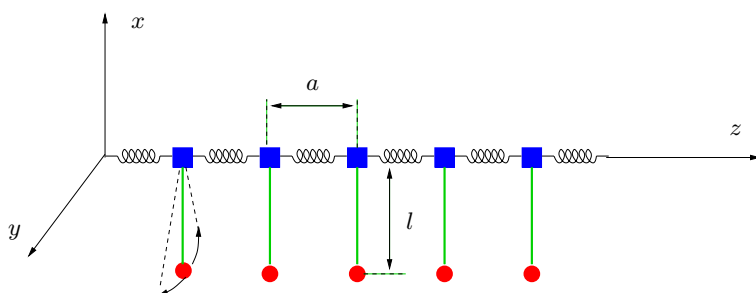


Figura 23: Modelo mecánico de una doble cadena de ADN.

Así, tenemos una cadena de péndulos que pueden rotar en el plano xy (ver la figura 23).

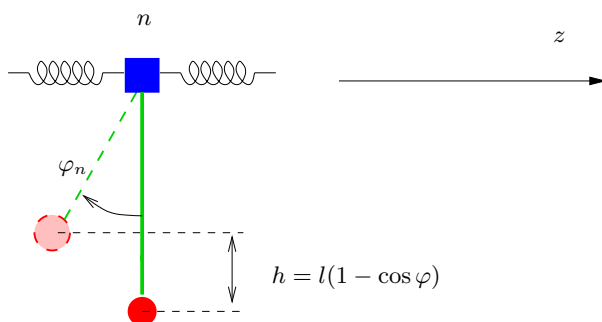


Figura 24: Movimiento de rotación en el modelo mecánico de una doble cadena de ADN.

Sea I el momento de inercia de las bases y \varkappa el coeficiente de torsión de los nucleótidos. Entonces el Hamiltoniano del sistema es

$$H = \sum_n \frac{I}{2} \dot{\varphi}_n^2 + \sum_n \frac{\varkappa l^2}{2} (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^2 + V_e(\varphi_1, \dots, \varphi_N).$$

Las ecuaciones del movimiento son

$$I\ddot{\varphi}_n = \kappa l^2(\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}) + \frac{\partial V_e}{\partial \varphi_n}. \quad (9)$$

Englander et. al. consideraron en caso más sencillo, en el que $V_e = -mgh$, i.e., un campo constante análogo al campo gravitatorio. Así, tenemos la ecuación

$$I\ddot{\varphi}_n = \kappa l^2(\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}) - mgl \operatorname{sen} \varphi_n.$$

Si ahora suponemos que la distancia a entre los nucleótidos es lo suficientemente pequeña, la ecuación difero-diferencial (9) se puede aproximar por la ecuación en derivadas parciales

$$I\varphi_{tt} = \kappa a^2 l^2 \varphi_{zz} + \frac{\partial V_e}{\partial \varphi},$$

que, en *coordenadas adimensionales*, tiene la forma

$$\varphi_{TT} = \varphi_{ZZ} + \frac{\partial V_e}{\partial \varphi}. \quad (10)$$

Así pues, escogiendo el potencial de Englander et al., y teniendo en cuenta que $I = ml^2$, obtenemos la ecuación en derivadas parciales

$$\varphi_{tt} = \frac{\kappa a^2}{m} \varphi_{zz} - \frac{g}{l} \operatorname{sen} \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi_{tt} = \omega^2 \varphi_{zz} - \omega^2 \operatorname{sen} \varphi,$$

o, equivalentemente, en *coordenadas adimensionales*

$$\varphi_{ZZ} - \varphi_{TT} = \operatorname{sen} \varphi,$$

que no es más que la conocida ecuación de sine Gordon o sG [27, §3.2].

De entre las muchas soluciones de esta ecuación destacan las denominadas kink y antikink [27, pág. 73]

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \exp\left(\pm \frac{Z - VT}{\sqrt{1 - V^2}}\right), \quad |V| < 1.$$

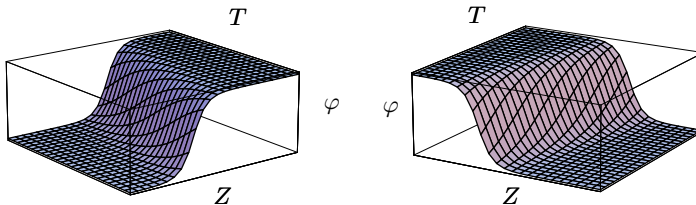


Figura 25: Soluciones kink y antikink de la ecuación sG.

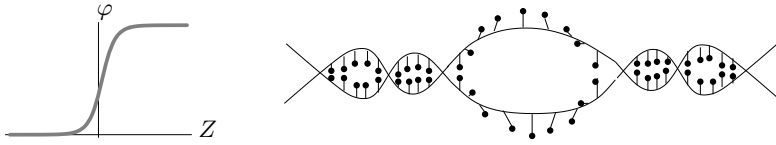


Figura 26: Interpretación del modelo mecánico de Englander et. al.

Estas soluciones son ondas viajeras con una importante particularidad: tienen muy localizada su energía (alrededor del centro del kink). Una interpretación de estos resultados es que el kink y antikink corresponden a la propagación de los estados abiertos en el ADN (ver figura 26).

Imaginemos ahora que tenemos dos cadenas y supongamos que cada una de ellas genera un potencial efectivo $V_e(\varphi_{n,j}) = mg_i l \cos \varphi_{n,j}$ sobre la otra. En este caso es fácil comprobar que las ecuaciones de movimiento son dos ecuaciones sG desacopladas

$$\begin{cases} \varphi_{1tt} = \varpi_1^2 \varphi_{1zz} - \omega_1^2 \sin \varphi_1, \\ \varphi_{2tt} = \varpi_2^2 \varphi_{2zz} - \omega_2^2 \sin \varphi_2. \end{cases}$$

3.3 Otros modelos no lineales

Una limitación evidente de los dos modelos anteriores es que la interacción entre cadenas se supone que sólo depende de una de las cadenas y no de ambas. Es por ello que se han introducido otros modelos que generalizan a los anteriores.

Por ejemplo, L. Yakushevich en [28] propone utilizar en (10) el potencial efectivo

$$V_e(\varphi_1, \varphi_2) = A(1 - \cos \varphi_1) + A(1 - \cos \varphi_2) - B(1 - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

lo que le conduce a las siguientes dos ecuaciones acopladas cuya solución analítica en forma de onda solitaria (el kink y antikink son casos particulares de estas ondas) es por el momento desconocida (algunos experimentos numéricos indican que semejante solución ha de existir):

$$\begin{cases} \varphi_{1TT} = \varphi_{1ZZ} - A \sin \varphi_1 + B \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \\ \varphi_{2TT} = \varphi_{2ZZ} - A \sin \varphi_2 + B \sin(\varphi_1 + \varphi_2). \end{cases}$$

Un último ejemplo antes de terminar esta sección se debe a Yomosa [30], quien propone el potencial efectivo

$$V_e(\varphi_1, \varphi_2) = A(1 - \cos \varphi_1) + A(1 - \cos \varphi_2) + B(1 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2).$$

Dejamos al lector que como ejercicio obtenga las correspondientes ecuaciones de movimiento.

Antes de terminar debemos hacer dos comentarios importantes. El primero es acerca de las limitaciones de estos modelos. En primer lugar, la afirmación de que el movimiento predominante en el proceso de transcripción es el rotatorio no es del todo correcto ya que las oscilaciones transversales (a lo largo del eje de los enlaces puente de hidrógeno) son del mismo orden, por lo que un modelo más coherente tendría que tener en cuenta ambos movimientos. Para el segundo caso, Peyrard y Bishop [22] introdujeron un modelo estadístico basado en estos desplazamientos transversales (ver el interesante *survey* [23]).

El segundo comentario está relacionado con las interacciones consideradas. Modelos mecánicos más realistas (aun siendo simples) deben tener en cuenta todas las interacciones relevantes y la interacción entre ambas, así han de existir términos para la interacción entre los movimientos longitudinales y transversales, longitudinales y rotacionales, e incluso térmicos (el ADN está en una disolución acuosa con temperatura). Así, en general, tendremos ecuaciones no lineales de la forma

$$y_{TT} = y_{ZZ} + \left[\begin{array}{c} \text{términos} \\ \text{no lineales} \end{array} \right] + v_{l-t}(y) + v_{l-r}(y) + \left[\begin{array}{c} \text{efectos} \\ \text{térmicos} \end{array} \right].$$

Este último tipo de ecuaciones constituye un reto para los matemáticos de hoy día.

4 Modelos de crecimiento tumoral

En esta última parte vamos a describir algunos modelos matemáticos de crecimiento tumoral con el objetivo de mostrar el tipo de problemas y técnicas matemáticas que suele aparecer.

4.1 Modelo de un tumor cuerda estacionario

En la fase vascular de muchos tumores, las células cancerígenas rodean los capilares sanguíneos formando una estructura *cilíndrica* como la representada en la figura 27, donde el cilindro interior de radio r_0 representa al vaso sanguíneo y el cilindro exterior de radio R al tumor.

Este tipo de tumores, conocidos como tumores cuerda, crece radialmente alejándose del centro de vaso. A medida que aumenta de tamaño, las células del borde se alejan del vaso y por tanto de su principal fuente de oxígeno y nutrientes, por lo que la mayoría entran en fase latente G_0 . Esto conduce a un equilibrio entre el número de células activas (situadas en el interior del tumor, cerca del capilar) y las latentes (más alejadas del capilar); que conlleva a un equilibrio dinámico acorde con las observaciones clínicas para este tipo de tumores.

Vamos a describir un modelo matemático introducido por Dyson et. al. [10] que trata de explicar este tipo de comportamiento.

Supongamos que en el instante de tiempo t el tumor está compuesto por células activas dividiéndose y células en estado latente cuyos números

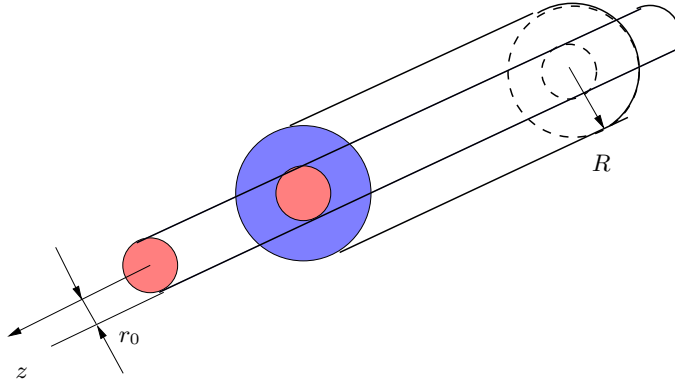


Figura 27: Modelo de un tumor cuerda alrededor de un vaso sanguíneo

denotaremos por $p(x, r, t)$ y $q(x, r, t)$, respectivamente, donde $r \in [r_0, R]$ es la distancia de la célula cancerígena al centro del vaso y $x \in [0, 1]$ es la madurez de la célula ($x = 0$ es una célula recién nacida y $x = 1$ es una célula a punto de dividirse). Denotemos por $\theta(r, t)$ la fracción de células que se dividen en la posición r (estamos asumiendo que el tumor tiene una simetría radial) en el momento t y por $v(x)w(r)$ la fracción de células con madurez x en la posición r (el cociente de madurez). Como el cociente de madurez depende de r , la duración de los ciclos celulares a distintas distancias es, en principio, distinta. Un caso más sencillo consiste en considerar este cociente constante e independiente de r (todas las células tumorales tienen el mismo periodo de división celular). Sea $u(r, t)$ el flujo radial de células tumorales a través de la superficie (que se asume independiente de la madurez).

Con todas estas suposiciones, las ecuaciones de evolución del tumor son las siguientes [10]: para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, r, t) + \frac{\partial}{\partial x} (v(x)w(r)p(x, r, t)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u(r, t)p(x, r, t)) &= 0, \\ v(0)w(r)p(0, r, t) = 2\theta(r, t)v(1)w(r)p(1, r, t), \quad x \in [0, 1], \quad r \in [r_0, R], \\ p(x, r, 0) = \Phi(x, r), \quad x \in [0, 1], \quad r \in [r_0, R], \\ \frac{\partial}{\partial t} q(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u(r, t)q(r, t)) &= 2(1 - \theta(r, t))v(1)w(r)p(1, r, t), \\ q(r, 0) = \Psi(r), \quad r \in [r_0, R]. \end{aligned} \tag{11}$$

Supongamos que la densidad total de células en la posición r viene dada por

$$n(r, t) = \int_0^1 p(x, r, t) dx + q(x, r, t).$$

Entonces, de (11) se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t} n(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u(r, t)n(r, t)) = v(1)w(r)p(1, r, t).$$

Una suposición habitual es que el flujo de células a través de la pared del capilar es despreciable (no existe), i.e., $u(r_0, t) = 0$ y $n(r, t) \equiv N$. Entonces $\frac{\partial}{\partial t}n(r, t) = 0$ y la ecuación anterior se traduce en

$$r u(r, t) = \frac{1}{N} \int_{r_0}^r \zeta v(1) w(\zeta) p(1, \zeta, t) d\zeta.$$

Tal y como mencionamos, este tipo de tumores a partir de cierto tiempo t_e se encuentra en una fase de equilibrio (“steady state” o régimen permanente o estable) por lo que el problema de evolución (11) se transforma en el siguiente problema estacionario donde $\nu(x, r) = p(x, r)/N$ representa la densidad de células activas en el estado estable del tumor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(v(x)w(r)\nu(x, r)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu(x, z) \int_{r_0}^r \zeta w(\zeta) v(1) \nu(1, \zeta) d\zeta \right) &= 0, \\ v(0)w(r)\nu(0, r) = 2\theta(r)v(1)w(r)\nu(1, r), \quad x \in [0, 1], \quad r \in [r_0, R]. \end{aligned} \quad (12)$$

Por comodidad introduciremos la función $\varphi(x, r) = \nu(x, r)v(x)$. De (12) se deduce que φ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, r) + \frac{1}{r w(r) v(x)} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(x, r) \int_{r_0}^r \zeta w(\zeta) \varphi(1, \zeta) d\zeta &= -\frac{\varphi(x, r) \varphi(1, r)}{v(x)}, \\ \varphi(0, r) = 2\theta(r) \varphi(1, r), \quad x \in [0, 1], \quad r \in [r_0, R]. \end{aligned} \quad (13)$$

Para probar que la solución del problema anterior existe Dyson et al. transforman el problema en un problema de punto fijo para $\varphi(1, r)$ y prueban que, bajo ciertas condiciones *razonables*,

1. $w(r) > 0$ es continua y con derivada continua en $[r_0, R]$ y tal que $rw(r)$ es creciente,
2. $v(x) > 0$ es continua y con derivada continua en $[0, 1]$,
3. $\theta(r) : [r_0, R] \mapsto [0, 1]$ es una función de Lipschitz y existe $r_1 \in (r_0, R]$ tal que $\theta(r) = \theta(r_0) = \theta_0$ en $[r_0, r_1]$ con $\theta_0 < 1/2$,

existe una única solución. Es decir, desde el punto de vista matemático la ecuación (13) tiene solución única, lo que indica que, efectivamente, el modelo es capaz de describir el estado estable del tumor.

Un problema abierto más complicado es el estudio de la evolución temporal. Es todo un reto encontrar la solución del problema general (11) y probar que, asintóticamente, en efecto se tiene la solución predicha por el problema estacionario aquí descrito. Este problema ha sido parcialmente resuelto por los mismos autores en [11].

4.2 Modelo para protocolos de quimioterapia

Vamos a describir un modelo que intenta describir la acción de la quimioterapia sobre un tumor. En particular, de la solución del problema matemático se puede

extraer un protocolo de actuación para las sesiones de quimioterapia usualmente usadas en medicina.

La idea biológica es la siguiente: Dentro del ciclo celular existen dos etapas bien diferenciadas: la interfase (G_1 , S y G_2) y la mitosis M (ver apartado 2.6). Durante la fases G_2 y M la célula resulta más vulnerable (en particular en M la célula es más porosa y su pared celular más fina), por lo que es un momento muy apropiado para aplicar dosis de medicamentos o agentes externos (quimioterapia) que eviten la división celular y que, a ser posible, aniquilen a las células cancerígenas. Este es un protocolo habitual en las terapias actuales contra el cáncer. El principal problema radica en que la quimioterapia no sólo mata a células tumorales, sino que también lo hace con muchas de las células sanas de los tejidos que rodean al tumor. Es por ello que es muy importante saber cuánto y cuándo hay que aplicar las dosis.

Comencemos describiendo un modelo para el crecimiento del tumor. Vamos a diferenciar dos estados dentro del ciclo celular de las células tumorales: el estado E_1 y E_2 correspondientes a las fases G_1, S y G_2, M , respectivamente. Sean N_1 y N_2 el número de células en cada estado E_1 y E_2 , respectivamente.

El modelo más sencillo de crecimiento tumoral corresponde al modelo exponencial o malthusiano que postula que el número de células cancerígenas salientes de cada fase es proporcional a N_i , $i = 1, 2$. Así, para el estado E_2 tenemos

$$\dot{N}_2(t) = -a_2 N_2(t) + a_1 N_1(t),$$

donde \dot{f} indica la derivada temporal de f . Para el estado E_1 hay que tener en cuenta que entran el doble de células procedentes de la división celular, luego

$$\dot{N}_1(t) = -a_1 N_1(t) + 2a_2 N_2(t).$$

En ambas expresiones a_1 y a_2 son dos parámetros que tienen que ver con los tiempos de duración de ambos estados. Usualmente el sistema se escribe en su forma matricial

$$\dot{N} = AN, \quad N(t_0) = N_0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 2a_2 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix}.$$

La solución de esta ecuación es

$$N(t) = N(t_0) \exp((t - t_0)A),$$

donde $\exp(zA)$ es la función exponencial de una matriz (ver e.g. [4]). Como ejercicio al lector se deja el estudio de la estabilidad del sistema anterior en función de los parámetros a_1 y a_2 .

Introduzcamos ahora la droga o, matemáticamente hablando, el control. Sea $u(t)$ la dosis de droga introducida en el sistema en el momento t . Supondremos que $u(t) = 0$ indica que no se suministra droga, y $u(t) = 1$ que se aplica la dosis máxima. Se asume que la dosis de droga está en relación directa con la fracción

de células que mueren en el estado E_2 , así que en la fase E_1 sólo entrará la fracción $2(1 - u(t))a_2N_2$. Esto nos conduce al problema [15]

$$\dot{N} = (A + uB)N, \quad u = (u(t), 0)^t, \quad N(t_0) = N_0,$$

donde A es la matriz de antes y B viene dada por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El problema consiste en minimizar el funcional

$$J(u) = r_1N_1(T) + r_2N_2(T) + \int_{t_0}^T u(t)dt$$

sobre el conjunto de todas las funciones medibles u que toman los valores sobre $[0, 1]$ donde r_1 y r_2 son ciertos números que representan sendos pesos relativos para el número total de células en el instante final T . Además, se supone que el control modela también el número de células del tejido sano que mueren por la acción de la quimioterapia.

Nótese que al ser la norma de la matriz $A + uB$ acotada para todo control admisible, entonces la ecuación diferencial matricial siempre tiene solución. En particular se tiene que si $N_1(t_0) > 0$ y $N_2(t_0) > 0$, entonces $N_1(t) > 0$ y $N_2(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$. La prueba es directa: basta acotar la matriz $A + uB$ y usar la solución en forma de matriz exponencial.

Este problema se puede generalizar a n dimensiones (que corresponderían a más divisiones del ciclo celular) de la siguiente forma [16]:

Sea $N = (N_1, N_2, \dots, N_n)^t$ el vector de estado cuyas coordenadas corresponden al número de células en la fase E_k , $k = 1, 2, \dots, m$. Sea u el vector $(u_1, u_2, \dots, u_m)^t$ siendo u_k , la correspondiente dosis de medicamento, que asumiremos no negativa, es decir, para todo $k = 1, 2, \dots, m$, $u_k(t) \in [0, 1]$, donde como antes 0 implica que no hay medicación y 1 que se ha aplicado la dosis máxima. Sea $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ y $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ dos vectores de números positivos y no negativos, respectivamente. En este caso tenemos que minimizar el funcional

$$J(u) = rN(T) + \int_{t_0}^T s u(t)dt$$

sobre todas las funciones medibles u que cumplan la ecuación dinámica

$$\dot{N} = \left(A + \sum_{k=1}^m u_k B_k \right) N, \quad N(t_0) = N_0.$$

En el caso general hay que asumir que tanto las matrices A , B_k y el control u son tales que la matriz $A + \sum_{k=1}^m u_k B_k$ tiene elementos diagonales negativos y el resto no negativos. Cuando esto ocurre se dice que las matrices A y B_k satisfacen la condición **M**.

Una condición necesaria de optimalidad viene dada por el principio del máximo de Pontryagin [25], que establece que si $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ es un control óptimo, entonces existe una función (vector fila) continua λ que satisfice la ecuación adjunta

$$\dot{\lambda} = -\lambda \left(A + \sum_{k=1}^m u_k^* B_k \right), \quad \lambda(T) = r,$$

tal que el control óptimo minimiza el Hamiltoniano

$$H = \lambda AN + \sum_{k=1}^m u_k (s_k + \lambda B_k N).$$

Si suponemos que las matrices A y B_k satisfacen la condición **M**, entonces se tiene que tanto $N_k(t)$ como $\lambda_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, son positivas en $[0, T]$ (probar como ejercicio).

Para resolver el problema se define la función de conmutación (switching function)

$$\Phi(t) = (\Phi_1(t), \dots, \Phi_m(t)), \quad \Phi_k = s_k + \lambda B_k N,$$

de forma que el control óptimo queda definido por las expresiones

$$u_k^*(t) = \begin{cases} \alpha_k & \text{si } \Phi_k(t) > 0, \\ \beta_k & \text{si } \Phi_k(t) < 0. \end{cases}$$

Nótese que a priori los controles no se determinan por la condición del mínimo si $\Phi_k(t) = 0$. Ahora bien, si $\Phi_k(t)$ se anula en todo un abierto (a_k, b_k) , entonces todas sus derivadas también deben anularse en dicho intervalo. Este tipo de controles se denominan controles singulares. Los controles constantes a trozos se conocen como controles de salto (*bang-bang*).

Recuperemos el caso $n = 2$ de antes. En este caso en [15] se prueba que los controles singulares no son nunca óptimos, por lo que la única opción es buscar controles de salto. Además, en el caso de dimensión 2 se tiene $u = (u(t), 0)$, $s = (1, 0)$, y el control óptimo tiene la forma

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi(t) > 0, \\ 1 & \text{si } \Phi(t) < 0, \end{cases} \quad \Phi = 1 + \lambda BN.$$

Esto es precisamente el protocolo usado en la actualidad en la quimioterapia: se alternan periodos de aplicación de máximas dosis de drogas con periodos de descanso sin aplicación de ningún agente químico. El problema es personalizar el tratamiento, es decir, saber cuántos periodos y por cuánto tiempo hay que aplicar los correspondientes controles para que el tratamiento sea óptimo. Es justo aquí donde este modelo podría ayudar a los médicos corrigiendo los correspondientes tiempos de quimioterapia y descansos para hacer el tratamiento lo más cercano al óptimo.

Para finalizar debemos mencionar que aunque el modelo predice justamente el mismo tipo de protocolo que el que se usa actualmente, todavía está lejos de poder ser aplicado. En primer lugar es un modelo, con todo lo que ello implica. En segundo lugar, hay que encontrar los parámetros correctos correspondientes a cada caso (paciente), lo cual sigue siendo algo bastante complicado y subjetivo hasta el momento.

4.3 Un modelo fractal para el crecimiento de tumores

Nuestro último ejemplo se basa en varios trabajos de Brú et al. [5, 6].

La idea de Brú et al. consiste en asumir que el borde de un tumor crece siguiendo las pautas de la geometría fractal [19] y por tanto se puede usar el análisis de escala para medir la rugosidad de la frontera del tumor. A partir de dicho análisis se postula que la dinámica de crecimiento del tumor se puede describir usando la ecuación diferencial estocástica que modela el MBE (Molecular Beam Epitaxy). A partir de la ecuación MBE, que es una ecuación de difusión, se deduce que la dinámica de crecimiento tumoral posee tres características fundamentales:

1. Que la mayor parte de la actividad celular del tumor se concentra muy cerca del borde (ver figura 28).
2. El crecimiento del tumor ocurre por **difusión superficial** de las células tumorales. Es decir, que las nuevas células se mueven por la frontera del tumor hasta que encuentran una posición cóncava donde estén rodeadas por una mayor cantidad de células tumorales (ver figura 29).
3. El crecimiento del tumor, pasado algún tiempo, deja de ser exponencial y se convierte en lineal, es decir, el radio del tumor crece linealmente con el tiempo.

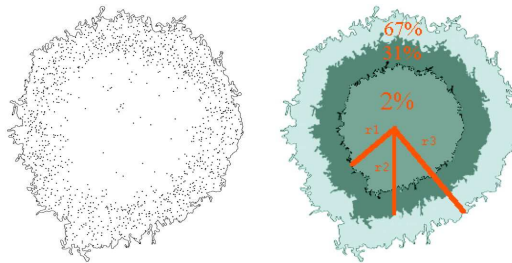


Figura 28: Actividad celular de un tumor. Con puntos negros se localizan las células marcadas que tienen gran actividad celular. Los anillos concentran un 2%, 31% y 67% de la actividad celular, respectivamente (de dentro a fuera). (Esta figura está tomada de [5]).

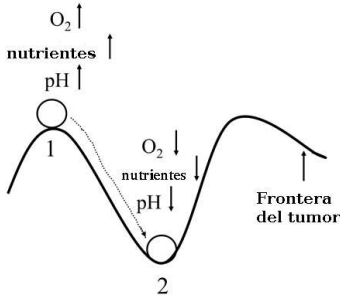


Figura 29: Difusión de células tumorales según la dinámica MBE. La célula nace en la posición 1 y se difunde hasta la posición 2.

Veamos una forma sencilla de explicar que el crecimiento del tumor es radial si la actividad celular se concentra casi en su totalidad en el borde del mismo. Por sencillez asumiremos que el tumor es esférico. Sea R el radio del tumor y r_0 el de la célula (que también aproximaremos por una esfera). Si $r_0 \ll R$, entonces el número total de células del tumor N_T es del orden

$$N_T \sim \frac{4/3\pi R^3}{4/3\pi r_0^3} = \left(\frac{R}{r_0}\right)^3.$$

Si asumimos que las células se multiplican sólo en el borde, entonces la velocidad de crecimiento dN_T/dt ha de ser proporcional al número de células en la frontera $N_F \sim 4\pi R^2/(\pi r_0^2) = 4(R/r_0)^2$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{dN_T}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{r_0}\right)^3 = 3\frac{R^2}{r_0^3} \frac{dR}{dt} = K\frac{R^2}{r_0^2} \Rightarrow \\ \frac{dR}{dt} &= Kr_0 \Rightarrow R(t) = R(t_0) + Kr_0(t - t_0). \end{aligned}$$

Discutamos brevemente las bases matemáticas del modelo de Brú et al. La ecuación MBE multidimensional tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\vec{r}, t) = -K\Delta^2 h(\vec{r}, t) + F + \eta(\vec{r}, t),$$

donde \vec{r} es el radio vector de la posición del borde de la superficie en crecimiento y Δ es el laplaciano multidimensional. Para dimensión 1 la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = -K\frac{\partial^4}{\partial x^4} h(x, t) + F + \eta(x, t), \tag{14}$$

donde $h(x, t)$ representa la altura de la superficie, F es una constante (que en la teoría de Brú et al. representa el coeficiente de división celular) y $\eta(x, t)$ es un ruido aleatorio de media cero y función de correlación $\langle \eta(x, t), \eta(x', t') \rangle = 2\nu\delta(x - x')\delta(t - t')$. Esquemáticamente el crecimiento de la superficie según la ecuación (14) está representado en la figura 30.

Este tipo de ecuaciones es bien conocido en Física por los modelos de crecimiento de cristales. Además, la geometría fractal de estos objetos viene determinada por los exponentes de rugosidad α y de crecimiento β . Dichos coeficientes son calculados en [6] para el borde de un tumor y se obtienen los valores $\alpha = 3/2$ y $\beta = 3/8$. Estos coeficientes de rugosidad corresponden a la ecuación unidimensional (14) y son la clave de la teoría de Brú et al. para explicar la dinámica de los tumores antes descrita.

El problema principal radica en que la ecuación (14) es unidimensional (describe el crecimiento de una superficie en una única dirección tal y como se muestra en la figura 30), por lo que no es aplicable a un caso bi o tridimensional como es el de un tumor. De hecho, para un caso de dimensión 2, por ejemplo, a la ecuación MBE bidimensional le corresponden los coeficientes rugosidad y crecimiento $\alpha = 1$ y $\beta = 1/4$, respectivamente (una magnífica introducción a la ecuación MBE se puede encontrar en [20]), que no coinciden con los valores obtenidos en [6].

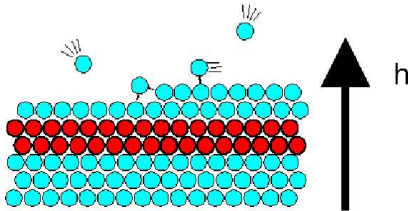


Figura 30: Esquema del crecimiento de una superficie según la ecuación MBE (14).

tumor primero destruye el tejido huésped y luego lo invade, que es justo lo inverso de lo que es aceptado actualmente por la mayoría de los especialistas. Una consecuencia directa, en caso de que esta nueva dinámica fuese confirmada experimentalmente y aceptada, sería un cambio radical en las terapias actuales para el tratamiento de la enfermedad.

Para terminar notemos que este modelo difiere radicalmente del que discutimos anteriormente, donde el crecimiento es claramente exponencial y no se restringe sólo al borde. Lo más llamativo de la dinámica propuesta es que las células cancerígenas no atacan directamente a las células sanas intentando conseguir oxígeno y nutrientes, sino que se difunden buscando espacio vital, es decir, el

Agradecimientos. Estas notas están basadas en el curso homónimo que tuvo lugar en la Universidad Internacional de Andalucía en el verano de 2005. Quiero expresar mi agradecimiento a la UNIA por la invitación a co-organizar dicha escuela y en particular a Antonio Durán por su apoyo incondicional. Quiero agradecer también a N.R. Quintero por sus comentarios sobre el apartado §3, a A. Sánchez y E. Moro por su ayuda para entender el modelo descrito en el §4.3 y a M. Pérez y J. C. García por sus sugerencias. A Juan Luis Varona le agradezco su cuidadosa lectura y la infinidad de comentarios y correcciones que me han ayudado a que este trabajo sea legible. Agradezco a Enrique Fernández Cara su cordial invitación a publicar estas notas en el Boletín de SEMA. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España (proyecto BFM-2003-6335-C03-01) y la Junta de Andalucía (proyecto FQM-262).

Referencias

- [1] Alberts B., Johnson A., Lewis J., Raff M., Roberts K., Walter P., *Biología Molecular de la Célula*. Omega, 2004.

- [2] Attwood T.K., Parry-Smith D.J., *Introducción a la Bioinformática*. Prentice Hall, 2002.
- [3] Baxevanis A.D., Francis Ouellette B.F., *Bioinformatics: A Practical Guide to the Analysis of Genes and Proteins*. 3^a ed., Wiley, 2004.
- [4] Braun M., *Differential Ecuations and their Applications*. 4^a ed., Springer Verlag, 1993.
- [5] Brú A., Albertos S., Subiza J.L., López García-Asenjo J., Brú I., The Universal Dynamics of Tumor Growth, *Biophysical Journal* **85** (2003), 2948-2961.
- [6] Brú A., Pastor J.M., Fernaud I., Melle S., Brú I., Super-rough dynamics on tumour growth. *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998), 4008-4011.
- [7] Bunn Ch., *Crystals. Their role in Nature and Science*. Academic Press, 1964.
- [8] Cushing J.M., The LPA model. *Fields Institute Communications* **43** (2004), 29-55.
- [9] Cushing J.M., Population Dynamics. In *The Encyclopedia of Nonlinear Science*, (A. Scott, editor), Routledge, Taylor and Francis Group, 2004.
- [10] Dyson J., Villella-Bressan, R., Webb G.F., The steady state of a maturity structured tumor cord cell population. *Discr. Cont. Dyn. Sys. B* **4** (2004), 115-134.
- [11] Dyson J., Villella-Bressan R., Webb G.F., The evolution of a tumor cord cell population, *Comm. Pure Appl. Anal.* **3** (2004), 331-352.
- [12] Englander S.W., Kallenbach N.R., Heeger A.J., Krumhans, A.J., Litwin A., Nature of the open state in long polynucleotide double helices: possibility of soliton excitations. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **77** (1980), 7222-7226.
- [13] Hirs C.H.W., Moore S., Stein W.H., The Sequence of the Amino Acid Residues in Performic Acid-oxidized Ribonuclease. *Journal of Biological Chemistry* **235** (1960), 633-647.
- [14] Jillson D., Insect populations respond to fluctuating enviroments. *Nature* **288** (1980), 699-700.
- [15] Ledzewicz U., Schättler H., Optimal bang-bang controls for a 2-compartment model in cancer chemotherapy. *Journal of Optimization Theory and Applications* **114** (2002), 609-637.
- [16] Ledzewicz U., Schättler H., Swierniak A., Optimal control for a class of compartmental models in cancer chemotherapy. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **13** (2003), 357-368.

- [17] Lodish H., Berk A., Zipursky S.L., Matsudaira P., Baltimore V., Darnell J., *Biología Celular y Molecular*. Editorial panamericana, 2003.
- [18] Mackey M.C., Santillán M., Mathematics, Biology, and Physics: Interactions and Interdependence. *Notices of the AMS* **52** (2005), 832-840.
- [19] Mandelbrot B., *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, 1982.
- [20] Moro E., *Estudio analítico y numérico de ecuaciones diferenciales estocásticas: Aplicación a la Mecánica Estadística*. Tesis doctoral. Universidad Carlos III de Madrid, 1999 (ver <http://gisc.uc3m.es/~moro/profesional.html>).
- [21] Murray J.D., *Mathematical biology. I & II*. 3^a ed., Interdisciplinary Applied Mathematics **17**. Springer-Verlag, 2002.
- [22] Peyrard M., Bishop A.R., Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA denaturation. *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989), 2755-2758.
- [23] Peyrard M., Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA. *Nonlinearity* **17** (2004), R1-R40.
- [24] Pevsner J., *Bioinformatics and Functional Genomics*. Wiley, 2003.
- [25] Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. MacMillan, 1964.
- [26] Ryle A.P., Sanger F., Smith L.F., Kitai R., The disulphide bonds of insulin. *Biochemical Journal* **60** (1955), 541-556.
- [27] Scott A., *Nonlinear Science*. 2^a ed., Oxford University Press, 2003.
- [28] Yakushevich L.V., Nonlinear DNA dynamics: a new model. *Phys. Letters A* **136** (1989) 413-417.
- [29] Yakushevich L.V., *Nonlinear Physics of DNA*. Wiley, 2004.
- [30] Yomosa S., Solitary excitations in deoxyribonuclei acid (DNA) double helices. *Phys. Rev. A* **30** (1984) 474-480.

Limited Flux Diffusion Equations

F. Andreu ¹, V. Caselles ² and J. M. Mazón ³

Abstract

We summarize in this paper some of our recent results on limited flux diffusion equations. These equations have been introduced to correct the infinite speed of propagation predicted by the classical theory of heat conduction.

1 Diffusion equations with finite speed of propagation

The classical theory of heat conduction is based on Fourier's law

$$\mathbf{q}(t, x) = -k\nabla u(t, x), \quad (1)$$

which relates the heat flux \mathbf{q} to the temperature u . Together with the conservation of energy equation,

$$u_t + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0,$$

this gives the linear parabolic heat equation

$$u_t = k\Delta u. \quad (2)$$

As one can easily deduce from the representation formula for the solution of the initial value problem for the heat equation (2),

$$u(t, \cdot) = G_t \star u_0,$$

where G_t is the heat kernel

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi kt)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}},$$

solutions for which the initial datum $u_0 \geq 0$ has compact support become everywhere positive for arbitrary small $t > 0$, i.e., the propagation speed for these classical linear diffusion based models is infinite. Einstein [29] criticized such diffusion models in 1906 as being physically unrealistic for small times.

Carlo Cattaneo [21] was the first to build up an explicit mathematical theory to correct the infinite speed of propagation of Fourier's theory of heat diffusion.

Cattaneo used arguments from the kinetic theory of gases and a second-order correction of this, of his own, to derive the following evolution equation for the flux \mathbf{q} of heat in one space dimension

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -k\mathbf{q} - k^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3)$$

where u is the temperature, k is the conductivity, and $\tau > 0$ is a relaxation time. He wrote the energy evolution equation in one space dimension

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x}, \quad (4)$$

where γ is the heat capacity of the gas. Equations (3) and (4) imply that the temperature u satisfies the telegraph equation

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k^2}{\gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

The propagation speed associated with this equation is

$$c = \sqrt{\frac{k^2}{\gamma\tau}}.$$

Observe that if we take the relaxation time $\tau = 0$, Cattaneo's law (3) reduces to Fourier's law, and equation (5) coincides with the classical heat equation.

Cattaneo did not refer to Maxwell work [36] who was the first to modify the Fourier's law. Equation (3) is a truncated form of an equation derived by Maxwell who casted out the time derivative term with the casual remark that "*may be neglected, as the rate of conduction will rapidly establish itself*". Maxwell never pursued the analysis of short-time relaxation effects. His book, *Theory of Heat* [37], is based on diffusion and Fourier's law. An excellent survey of the criticisms to Fourier's law and of the alternative theories proposed until 1990 can be found in the papers [32], [33] by D.D. Joseph and L. Preziosi.

In 1992, M.B. Rubin [45] showed that Cattaneo's model of hyperbolic heat conduction violates the second law of thermodynamics because it predicts that heat may flow from cold to hot regions during finite time periods.

Another approach to correct the infinite speed of propagation of the classical diffusion equation was started by Ph. Rosenau and his colaborators in 1989 [43]. In this paper they considered a flux-limited diffusion process

$$u_t = [G(u_x)]_x, \quad (6)$$

where

$$G(0) = 0, \quad G(\infty) < \infty,$$

and

$$G(-s) = -G(s), \quad G'(s) \geq 0, \quad \text{for all } s.$$

Since $\mathbf{q} = -G(u_x)$ is the flux, the above conditions ensure that the flux is a monotone function of the gradient which saturates as a finite value as the gradient becomes infinite. One of the examples considered in [43] is

$$G(s) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}},$$

for which equation (6) becomes

$$u_t = \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{7}$$

The speed of sound is the highest admissible free velocity in a medium. This property is lost in the classical transport theory that predicts the nonphysical divergence of the flux with the gradient (as it happens with Fourier's law). To overcome this problem Ph. Rosenau ([44]) proposed to change the classical flux

$$\mathbf{q} = -D_0 u_x$$

associated with the Fokker-Plank equation

$$u_t = [D_0 u_x]_x, \tag{8}$$

by a flux that saturates as the gradient becomes unbounded. To do that, he associated u and the flux \mathbf{q} through the velocity v defined by

$$\mathbf{q} = uv.$$

Then

$$v = -D_0 \frac{u_x}{u}. \tag{9}$$

According to (9), if $|\frac{u_x}{u}| \uparrow \infty$, so will do v . However, the inertia effects impose a macroscopic upper bound on the allowed free speed, namely, the acoustic speed C . With this aim, Rosenau modified (9) by taking

$$D_0 \frac{u_x}{u} = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}. \tag{10}$$

The postulate (10) forces v to stay in the subsonic regime. The sonic limit is approached only if $|\frac{u_x}{u}| \uparrow \infty$. Solving (10) for v , we obtain

$$\mathbf{q} = uv = \frac{-D_0 u_x}{\sqrt{1 + \left(\frac{D_0 u_x}{Cu}\right)^2}}. \tag{11}$$

Using this new flux (11) in the conservation energy equation,

$$u_t = \left[\frac{D_0 u u_x}{\sqrt{u^2 + \frac{D_0^2}{C^2} u_x^2}} \right]_x \tag{12}$$

is obtained. Equation (12) is the main result of [44]. In [26] an alternative derivation of the saturated diffusion equation (12) is given. The idea is based in the following facts: a) any flux driving diffusion has an upper bound, b) particles cannot travel faster than in a free flight. Thus, given a classical gradient driven flux $\mathbf{q} = -D_0 u_x$, where u is the particle density, the upper limit for transfer of energy is given by $\mathbf{q}_* = Cu$, where C is the free streaming speed. To construct a flux function that interpolates between the low gradient regime and the upper limit, the authors proposed that the effective flux magnitude can not depend on the direction. With this aim, they defined the effective flux function \mathbf{q}_{eff} via the second order harmonic average

$$\frac{1}{\mathbf{q}_{eff}^2} = \frac{1}{\mathbf{q}^2} + \frac{1}{\mathbf{q}_*^2}.$$

Thus,

$$\mathbf{q}_{eff} = \frac{-D_0 u_x}{\sqrt{1 + \left(\frac{D_0 u_x}{Cu}\right)^2}}, \quad (13)$$

and the flux (11) is again obtained.

Equation (12) was derived by Y. Brenier by means of Monge-Kantorovich's mass transport theory ([20]) and he named it as the *relativistic heat equation*. Many well-known equations for probability densities can be recovered in the formalism of gradient flows with respect to the optimal transport differential structure. This point of view was introduced by F. Otto in a series of pioneering papers [39, 40, 41] and there are at least two different approaches to make it rigorous. One of them is to decide that a gradient flow is an equation of the form

$$\frac{d\rho_t}{dt} \in \partial^- F(\rho_t),$$

where ∂^- stands for some appropriate notion of subdifferential. This approach was considered in [3], for instance. Another strategy is to proceed with a time-discretization. This was the approach first used by Jordan, Kinderlehrer and Otto [34] for the linear Fokker-Planck equation and it does not require any study of tangent spaces, subdifferentiability or related concepts. This subject has been considered in depth in Agueh's PhD thesis [1], where the following general equation

$$u_t + \operatorname{div}(uV_u) = 0 \quad (14)$$

is studied. Here

$$V_u := -\nabla k^*[\nabla(F'(u))]$$

denotes the vector field describing the average velocity of a fluid evolving with the continuity equation (14), and the unknown $u(t, x)$ is the mass density of the fluid at time t and position x . k^* denotes the Legendre-Fenchel transform of the cost function $k : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$, that is,

$$k^*(z) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \{x \cdot z - k(x)\}.$$

The free energy associated with the fluid at time $t \in [0, \infty)$ is given by

$$E(u(t)) := \int_{\mathbb{R}^N} F(u(t, x)) dx.$$

Problem (14) includes the following well-known equations

- *The Heat equation*

$$u_t = \Delta u,$$

where $k(z) = \frac{|z|^2}{2}$, $z \in \mathbb{R}^N$, and $F(x) = x \log(x)$, $x \in (0, \infty)$.

- *The Porous Medium equation*

$$u_t = \Delta u^m, \quad m > 1,$$

where $k(z) = \frac{|z|^2}{2}$, $F(x) = \frac{x^m}{m-1}$.

- *The parabolic p -Laplacian equation*

$$u_t = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

where $k(z) = \frac{|z|^{p'}}{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $p > 1$, and $F(x) = \frac{x^m}{m(m-1)}$, $m = 1 + \frac{p-2}{p-1}$.

Let $\mathcal{P}_a(\mathbb{R}^N)$ denote the set of all probability density functions $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$. In [1], (14) is interpreted as the “steepest descent” of the internal energy functional

$$\mathcal{P}_a(\mathbb{R}^N) \ni \rho \mapsto E(\rho) := \int_{\mathbb{R}^N} F(\rho(x)) dx$$

against the Monge-Kantorovich work W_k^h defined by

$$W_k^h(\rho_0, \rho_1) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} k \left(\frac{x-y}{h} \right) d\gamma(x, y) : \gamma \in \Gamma(\rho_0, \rho_1) \right\},$$

where $h > 0$ is the time-step size and $\Gamma(\rho_0, \rho_1)$ denotes the set of probability measures in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ having ρ_0 and ρ_1 as their marginals, i.e., for any Borel set $A \subset \mathbb{R}^N$,

$$\gamma(A \times \mathbb{R}^N) = \rho_0(A) \quad \text{and} \quad \gamma(\mathbb{R}^N \times A) = \rho_1(A).$$

In other words, given the mass density ρ_{n-1}^h of the fluid at time $t_{n-1} = (n-1)h$, we define the mass density ρ_n^h at time $t_n = nh$ to be the unique minimizer of the variational problem

$$(P_n^h) : \quad \inf_{\rho \in \mathcal{P}_a(\mathbb{R}^N)} \{ h W_k^h(\rho_{n-1}^h, \rho) + E(\rho) \}. \quad (15)$$

So, at each time t , the system tends to decrease its internal energy $E(\rho)$, while trying to minimize the work to move from the state $\rho(t)$ to state $\rho(t+h)$.

We compute the Euler-Lagrange equation of (P_n^h) and deduce that

$$\frac{\rho_n^h - \rho_{n-1}^h}{h} = \operatorname{div} \{ \rho_n^h \nabla k^* [\nabla (F'(\rho_n^h))] \} + A_n(h) \quad (16)$$

holds in a weak sense, for $n \in \mathbb{N}$, where $A_n(h)$ tends to 0, as h goes to 0. Equation (16) shows clearly why (15) is a discretization of (14).

We define the approximate solution ρ^h of (14) as the time-discrete function

$$\begin{cases} \rho^h(t, x) = \rho_n^h(x) & \text{if } t \in ((n-1)h, nh] \\ \rho^h(0, x) = \rho_0, \end{cases}$$

and we deduce from (16) that ρ^h satisfies

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho^h}{\partial t} = \operatorname{div} \{ \rho^h \nabla k^* [\nabla (F'(\rho^h))] \} + A(h) & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \\ \rho^h(0, x) = \rho_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (17)$$

in a weak sense, where $A(h)$ is showed to be an $O(h)$ as h goes to 0.

Now, one lets h go to 0 in (17), and tries to prove that the sequence $(\rho^h)_h$ converges to a function u , which solves (14) in a weak sense.

In [1] the above program is developed when the cost function $k : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ is strictly convex, $0 = k(0) < k(z)$, for $z \neq 0$, k is coercive, and verifies

$$\beta|z|^q \leq k(z) \leq \alpha(|z|^q + 1), \quad \text{for } z \in \mathbb{R}^N, \quad \alpha, \beta > 0, \text{ and } q > 1.$$

Besides the most important cost functions, namely $k(z) = |z|$, which corresponds to the original Monge problem, and $k(z) = \frac{|z|^2}{2}$, which corresponds to the Monge-Ampère equations – and is related to PDEs as different as the Euler equations of incompressible flows [18], [19] and the heat equation [34] – more general cost functions have been considered in the literature (see for instance [31], [1] or [46]). Surprisingly, an important cost function had been neglected, in spite of its obvious geometric and relativistic flavor, namely

$$k(z) := \begin{cases} c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{|z|^2}{c^2}} \right) & \text{if } |z| \leq c \\ +\infty & \text{if } |z| > c. \end{cases} \quad (18)$$

This cost function was considered by Y. Brenier in [20], where he derived a *relativistic heat equation* as a gradient flow of the Boltzmann entropy for the metric corresponding to the cost (18). More precisely, if we take

$$F(x) = \nu(\log(x) - 1)x,$$

since

$$k^*(z) = c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{|z|^2}{c^2}} - 1 \right),$$

we have

$$V_u := -\nabla k^*[\nabla(F'(u))] = -\nabla k^*[\nabla(\nu \log(u))] = -\nu \left(\frac{Du}{\sqrt{u^2 + \frac{\nu^2}{c^2}|Du|^2}} \right),$$

and, consequently, for this cost function equation (14) becomes

$$u_t = \nu \operatorname{div} \left(\frac{uDu}{\sqrt{u^2 + \frac{\nu^2}{c^2}|Du|^2}} \right). \tag{19}$$

Observe that in the one dimensional case equation (19) is similar to the equation (12) derived by Ph. Rosenau. As Brenier pointed out in [20], this relativistic heat equation is one among the various *flux limited diffusion equations* used in the theory of radiation hydrodynamics [38]. The flux limiter merely enforces the physical restriction that the flux cannot exceed energy density times the speed of light, that is, the flux cannot violate causality. The idea is to modify the diffusion-theory formula for the flux in such a way to yield the standard result in the high opacity limit, while simulating free streaming (at light speed) in transparent regions. For example, one of the expressions suggested for the flux of the energy density u , due to J.R. Wilson (in an unpublished work, see [38]), is

$$\mathbf{q} = -\nu u \frac{Du}{u + \nu c^{-1}|Du|} \tag{20}$$

(where ν is a constant representing a kinematic viscosity) which, in the limit $\nu \rightarrow \infty$, yields the flux $\mathbf{q} = -cu \frac{Du}{|Du|}$. Observe also that when $c \rightarrow \infty$, the flux tends to $\mathbf{q} = -\nu Du$, and the corresponding diffusion equation formally becomes the heat equation, which has an infinite speed of propagation.

The diffusion equation corresponding to (20) is

$$u_t = \nu \operatorname{div} \left(\frac{uDu}{u + \frac{\nu}{c}|Du|} \right) \tag{21}$$

which formally interpolates ([20]) between the usual heat equation (when $c \rightarrow \infty$) and the diffusion equation in transparent media (when $\nu \rightarrow \infty$) with constant speed of propagation c

$$u_t = c \operatorname{div} \left(u \frac{Du}{|Du|} \right). \tag{22}$$

Note that in order to rewrite equation (22) in the form (14), taking $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, we need to consider a cost function k satisfying

$$-c \frac{Du}{|Du|} = V_u = -\nabla k^*[\nabla(F'(u))] = -\nabla k^*[\nabla(u)].$$

Consequently,

$$k^*(z) = c|z|$$

and

$$k(z) = k^{**}(z) = I_{B_c(0)}(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } |z| \leq c \\ +\infty & \text{if } |z| > c. \end{cases}$$

2 The Cauchy Problem for a Strongly Degenerate Quasi-linear Equation

2.1 Introduction

Consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du) & \text{in } Q_T = (0, T) \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (23)$$

where $0 \leq u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathbf{a}(z, \xi) = \nabla_\xi f(z, \xi)$ and f is a function with linear growth as $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Particular instances of problem (23) have been studied in [14],[15] and [25], when $N = 1$. Let us describe their results in some detail. In these papers the authors considered the problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (\varphi(u)\mathbf{b}(u_x))_x & \text{in } (0, T) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (24)$$

corresponding to (23) when $N = 1$ and $\mathbf{a}(u, u_x) = \varphi(u)\mathbf{b}(u_x)$, where $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ is smooth and strictly positive, and $\mathbf{b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth odd function such that $\mathbf{b}' > 0$ and $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_\infty$. Such models appear as models for heat and mass transfer in turbulent fluids [12], or in the theory of phase transitions where the corresponding free energy functional has a linear growth rate with respect to the gradient, [42]. As the authors observed, in general, there are no classical solutions of (23), indeed, the combination of the dependence on u in $\varphi(u)$ and the constant behavior of $\mathbf{b}(u_x)$ as $u_x \rightarrow \infty$ can cause the formation of discontinuities in finite time (see [14], Theorem 2.3). As noticed in [14], the parabolicity of (24) is so weak when $u_x \rightarrow \infty$ than solutions

become discontinuous and behave like solutions of the first order equation $u_t = \mathbf{b}_\infty(\varphi(u))_x$ (which can be formally obtained differentiating the product in (24) and replacing $\mathbf{b}(u_x)$ by \mathbf{b}_∞). For this reason, they defined the notion of entropy solution and proved existence ([14]) and uniqueness ([25]) of entropy solutions of (24). Existence was proved for bounded strictly increasing initial conditions $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\mathbf{b}(u'_0) \in C(\mathbb{R})$ (where $\mathbf{b}(u'_0(x_0)) = \mathbf{b}_\infty$ if u_0 is discontinuous at x_0), $\mathbf{b}(u'_0(x)) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \pm\infty$ [14]. The entropy condition was written in Oleinik's form and uniqueness was proved using suitable test functions constructed by regularizing the sign of the difference of two solutions. Moreover, the authors showed that there exist functions φ and initial conditions u_0 for which there exist solutions of (24) which do not satisfy the entropy condition ([14], Theorem 2.2). Thus, uniqueness cannot be guaranteed without an additional condition like the entropy condition.

In [16],[17], the author considered the Neumann problem in an interval of \mathbb{R}

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (\mathbf{a}(u, u_x))_x & \text{in } (0, T) \times (0, 1) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{in } x \in (0, 1) \end{cases} \quad (25)$$

for functions $\mathbf{a}(u, v)$ of class $C^{1,\alpha}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ such that $\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{a}(u, v) < 0$ for any $(u, v) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, $\mathbf{a}(u, 0) = 0$ (and some other additional assumptions). After observing that there are no, in general, classical solutions of (23), the author associated an m -accretive operator to $-(\mathbf{a}(u, u_x))_x$ with Neumann boundary conditions, and proved the existence and uniqueness of a semigroup solution of (25). However, the accretive operator generating the semigroup was not characterized in distributional terms. An example of the equations considered in [16],[17] is the so called *plasma equation* (see [28])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{u^{5/2} u_x}{1 + u|u_x|} \right)_x \quad \text{in } (0, T) \times (0, 1), \quad (26)$$

where the initial condition u_0 is assumed to be positive. In this case u represents the temperature of electrons and the form of the conductivity $\mathbf{a}(u, u_x) = \frac{u^{5/2} u_x}{1 + u|u_x|}$ has the effect of limiting heat flux. Thus, existence and uniqueness results for higher dimensional problems were not considered. This was the purpose of our papers [4] and [5] in which we studied the Neumann problem for Lagrangians f satisfying the coercivity and linear growth condition

$$C_0 \|\xi\| - D_0 \leq f(z, \xi) \leq M_0(1 + \|\xi\|) \quad (27)$$

for some positive constants C_0, D_0, M_0 . Now, there are some relevant cases like the *relativistic heat equation* (see Section 1)

$$u_t = \nu \operatorname{div} \left(\frac{|u| Du}{\sqrt{u^2 + \frac{\nu^2}{c^2} |Du|^2}} \right), \quad (28)$$

for which the Lagrangian $f(z, \xi) = \frac{c^2}{\nu} |z| \sqrt{z^2 + \frac{\nu^2}{c^2} |\xi|^2}$ does not satisfy (27) but verifies

$$C_0(z) \|\xi\| - D_0(z) \leq f(z, \xi) \leq M_0(z) (\|\xi\| + 1) \tag{29}$$

for any $(z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, and some positive and continuous functions C_0, D_0, M_0 , such that $C_0(z) > 0$ for any $z \neq 0$. The purpose of the papers [7] and [8] was to extend the results of [4] and [5] to the case of Lagrangians satisfying (29).

We proved in [5] existence and uniqueness results for the Cauchy problem (23). For that, we considered in [4] the elliptic problem

$$u - \operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du) = v \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \tag{30}$$

we defined a notion of entropy solution for it, and we proved existence and uniqueness results when the right hand side $0 \leq v \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. With this, we associated an accretive operator B in $L^1(\mathbb{R}^N)$ whose domain is contained in $(L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))^+$ (which amounts to consider the right hand side v of (30) in $(L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))^+$) whose closure \mathcal{B} is accretive in $L^1(\mathbb{R}^N)$ and generates a non-linear contraction semigroup $T(t)$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ ([13],[22], [23]). However, \mathcal{B} is not characterized in distributional terms. In spite of this, the knowledge of the operator B and the fact that, if u is the entropy solution of (30), we have $\|u\|_\infty \leq \|v\|_\infty$, allowed to use Crandall-Liggett's iteration scheme and define

$$u(t) := T(t)u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{n} B \right)^{-n} u_0, \quad u_0 \in (L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))^+.$$

Then we proved that $u(t)$ is an entropy solution of (23) (a notion that will be defined later), and that entropy solutions are unique. As a technical tool we used some lower semi-continuity results for energy functionals whose density is a function $g(x, u, Du)$ convex in Du with a linear growth rate as $|Du| \rightarrow \infty$, which were proved in [24] and [27].

2.2 Basic assumptions

Assume that the Lagrangian $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfies the following assumptions, which we shall refer collectively as (H):

(H₁) f is continuous on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ and is a convex differentiable function of ξ such that $\nabla_\xi f(z, \xi) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$. Further we require f to satisfy the linear growth condition

$$C_0(z) \|\xi\| - D_0(z) \leq f(z, \xi) \leq M_0(z) (\|\xi\| + 1) \tag{31}$$

for any $(z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, and some positive and continuous functions C_0, D_0, M_0 , such that $C_0(z) > 0$ for any $z \neq 0$. Let f^0 denote the recession function of f , defined by

$$f^0(z, \xi) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t f \left(z, \frac{\xi}{t} \right). \tag{32}$$

We consider the function $\mathbf{a}(z, \xi) = \nabla_{\xi} f(z, \xi)$ associated to the Lagrangian f . By the convexity of f , we have

$$\mathbf{a}(z, \xi) \cdot (\eta - \xi) \leq f(z, \eta) - f(z, \xi), \quad (33)$$

and the following monotonicity condition is satisfied

$$(\mathbf{a}(z, \eta) - \mathbf{a}(z, \xi)) \cdot (\eta - \xi) \geq 0. \quad (34)$$

Moreover, it is easy to see that for each $R > 0$, there is a constant $M = M(R) > 0$, such that

$$\|\mathbf{a}(z, \xi)\| \leq M \quad \forall (z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, |z| \leq R. \quad (35)$$

We also assume that $\mathbf{a}(z, 0) = 0$ for all $z \in \mathbb{R}$, and $\mathbf{a}(z, \xi) = z\mathbf{b}(z, \xi)$ with

$$\|\mathbf{b}(z, \xi)\| \leq M_0 \quad \forall (z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, |z| \leq R. \quad (36)$$

We consider the function $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$h(z, \xi) := \mathbf{a}(z, \xi) \cdot \xi.$$

By (34), we have

$$h(z, \xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, z \in \mathbb{R}. \quad (37)$$

Moreover we assume that

$$h(z, \xi) \leq M(z)\|\xi\| \quad (38)$$

for some positive continuous function $M(z)$ and for any $(z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. On the other hand, from (33) and (31), it follows that

$$C_0(z)\|\xi\| - D_1(z) \leq h(z, \xi) \quad (39)$$

for any $(z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ where $D_1(z) = D_0(z) + f(z, 0)$. We assume that there exist constants $A, B > 0$ and $\alpha, \beta \geq 1$, such that

$$|D_1(z)| \leq A|z|^\alpha + B|z|^\beta \quad \text{for any } z \in \mathbb{R}^N. \quad (40)$$

(H₂) We assume that $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \xi_i}(z, \xi) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ for any $i = 1, \dots, N$.

(H₃) $h(z, \xi) = h(z, -\xi)$, for all $z \in \mathbb{R}$ and $\xi \in \mathbb{R}^N$ and h^0 exists.

Observe that we have

$$C_0(z)\|\xi\| \leq h^0(z, \xi) \leq M(z)\|\xi\| \quad \text{for any } (z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, |z| \leq R.$$

(H₄) $f^0(z, \xi) = h^0(z, \xi)$, for all $\xi \in \mathbb{R}^N$ and all $z \in \mathbb{R}$.

(H₅) $\mathbf{a}(z, \xi) \cdot \eta \leq h^0(z, \eta)$ for all $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, and all $z \in \mathbb{R}$.

(H₆) We assume that $h^0(z, \xi)$ can be written in the form $h^0(z, \xi) = \varphi(z)\psi^0(\xi)$ with φ a Lipschitz continuous function such that $\varphi(z) > 0$ for any $z \neq 0$, and ψ^0 being a convex function homogeneous of degree 1.

(H₇) For any $R > 0$, there is a constant $C > 0$ such that

$$|(\mathbf{a}(z, \xi) - \mathbf{a}(\hat{z}, \hat{\xi})) \cdot (\xi - \hat{\xi})| \leq C|z - \hat{z}|\|\xi - \hat{\xi}\| \tag{41}$$

for any $z, \hat{z} \in \mathbb{R}$, $\xi, \hat{\xi} \in \mathbb{R}^N$, with $|z|, |\hat{z}| \leq R$.

Observe that, by the monotonicity condition (34) and using (41), it follows that

$$(\mathbf{a}(z, \xi) - \mathbf{a}(\hat{z}, \hat{\xi})) \cdot (\xi - \hat{\xi}) \geq -C|z - \hat{z}|\|\xi - \hat{\xi}\| \tag{42}$$

for any $(z, \xi), (\hat{z}, \hat{\xi}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $|z|, |\hat{z}| \leq R$.

Remark 1 The function $f(z, \xi) = \frac{c^2}{\nu}|z|\sqrt{z^2 + \frac{\nu^2}{c^2}|\xi|^2}$ satisfies the assumptions (H₁)-(H₇), with $\mathbf{a}(z, \xi) = \nu \frac{|z|\xi}{\sqrt{z^2 + \frac{\nu^2}{c^2}|\xi|^2}}$. This particular case corresponds to the *relativistic heat equation* (19). The Lagrangian

$$f(z, \xi) := cz \left(|\xi| - \frac{cz}{\nu} \log \left(1 + \frac{\nu}{cz} |\xi| \right) \right)$$

is associated with the flux limited diffusion equation (21) and satisfies also the assumptions (H₁)-(H₇). The Lagrangian $f(z, \xi) = |z|^{3/2}|\xi| - |z|^{1/2} \ln(1 + |z||\xi|)$, which corresponds to the so called *plasma equation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{u^{5/2}u_x}{1 + u|u_x|} \right)_x,$$

satisfies also the assumptions (H₁)-(H₇).

The notion of solution of the Cauchy problem (23) is certainly complex due to assumption (31) and to give it we need some preliminaries.

2.3 Functions of bounded variations and some generalization

Due to the linear growth condition on the Lagrangian, the natural energy space to study the problems we are interested in is the space of functions of bounded variation. Recall that if Ω is an open subset of \mathbb{R}^N , a function $u \in L^1(\Omega)$ whose gradient Du in the sense of distributions is a vector valued Radon measure with finite total variation in Ω is called a *function of bounded variation*. The class of such functions will be denoted by $BV(\Omega)$. For $u \in BV(\Omega)$, the vector measure Du decomposes into its absolutely continuous and singular parts $Du = D^a u + D^s u$. Then $D^a u = \nabla u \mathcal{L}^N$, where ∇u is the Radon-Nikodym derivative of the measure Du with respect to the Lebesgue measure \mathcal{L}^N . We

also split $D^s u$ in two parts: the *jump* part $D^j u$ and the *Cantor* part $D^c u$. It is well known (see for instance [2]) that

$$D^j u = (u^+ - u^-) \nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_u,$$

where J_u denotes the set of approximate jump points of u , and $\nu_u(x) = \frac{Du}{|Du|}(x)$, $\frac{Du}{|Du|}$ being the Radon-Nikodym derivative of Du with respect to its total variation $|Du|$. For further information concerning functions of bounded variation we refer to [2], [30] or [47].

Due to the lack of coercivity, we need to consider the following truncature functions. For $a < b$, let $T_{a,b}(r) := \max(\min(b, r), a)$. As usual, we denote $T_k = T_{-k,k}$. We also consider truncature functions of the form $T_{a,b}^l(r) := T_{a,b}(r) - l$ ($l \in \mathbb{R}$). We denote

$$\mathcal{T}_r := \{T_{a,b} : 0 < a < b\},$$

$$\mathcal{T}^+ := \{T_{a,b}^l : 0 < a < b, l \in \mathbb{R}, T_{a,b}^l \geq 0\},$$

and

$$\mathcal{T}^- := \{T_{a,b}^l : 0 < a < b, l \in \mathbb{R}, T_{a,b}^l \leq 0\}.$$

We need to consider the function space

$$TBV^+(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^1(\mathbb{R}^N)^+ : T(u) \in BV(\mathbb{R}^N), \forall T \in \mathcal{T}_r\},$$

and to give a sense to the Radon-Nikodym derivative (with respect to the Lebesgue measure) ∇u of Du for a function $u \in TBV^+(\mathbb{R}^N)$. Using chain's rule for BV-functions we obtain the following result.

Lemma 1 *For every $u \in TBV^+(\mathbb{R}^N)$ there exists a unique measurable function $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ such that*

$$\nabla T_{a,b}(u) = v \chi_{[a < u < b]} \quad \mathcal{L}^N - \text{a.e.}, \quad \forall T_{a,b} \in \mathcal{T}_r. \tag{43}$$

Thanks to this result we define ∇u for a function $u \in TBV^+(\mathbb{R}^N)$ as the unique function v which satisfies (43). This notation will be used in the sequel.

To prove the existence of solution of the Cauchy problem (23) we use the nonlinear semigroup theory, so we need to study first the elliptic problem

$$u - \lambda \operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du) = v \in (L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))^+. \tag{44}$$

To give a sense to the the differential operator $\operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du)$ we need several ingredients.

2.4 A generalized Green’s formula

In order to give a meaning to integrals of bounded vector fields with divergence in L^1 integrated with respect to the gradient of a BV function, we need several results from Anzellotti [11] (see also [6]). Following Anzellotti, we denote

$$X_1(\mathbb{R}^N) = \{ \mathbf{z} \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) : \operatorname{div}(\mathbf{z}) \in L^1(\mathbb{R}^N) \}. \tag{45}$$

If $\mathbf{z} \in X_1(\mathbb{R}^N)$ and $w \in BV(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, we define the functional $(\mathbf{z}, Dw) : \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ by the formula

$$\langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle := - \int_{\mathbb{R}^N} w \varphi \operatorname{div}(\mathbf{z}) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} w \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx. \tag{46}$$

Then (\mathbf{z}, Dw) is a Radon measure in \mathbb{R}^N , and

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{z}, Dw) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{z} \cdot \nabla w \, dx, \quad \forall w \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{47}$$

Moreover, (\mathbf{z}, Dw) is absolutely continuous with respect to $|Dw|$. We have the following *Green’s formula* for $\mathbf{z} \in X_1(\mathbb{R}^N)$ and $w \in BV(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} w \operatorname{div}(\mathbf{z}) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{z}, Dw) = 0. \tag{48}$$

To prove uniqueness of solutions of the elliptic problem (44), we use Kruzkov’s technique of doubling variables ([35]). For that we need some entropy inequalities, and to derive these entropy inequalities we multiply (44) by $T(u)S(u)\phi$ and integrate by parts. So, we need to give sense to expressions of the form

$$\mathbf{a}(u, Du) \cdot D(S(u)T(u)) = S(u)\mathbf{a}(u, Du) \cdot DT(u) + T(u)\mathbf{a}(u, Du) \cdot DS(u).$$

This is possible if we observe that if

$$J_q(r) = \int_0^r q(s)ds,$$

then

$$S(u)\mathbf{a}(u, Du) \cdot DT(u) = \mathbf{a}(u, Du) \cdot DJ_{T'S}(u)$$

$$T(u)\mathbf{a}(u, Du) \cdot DS(u) = \mathbf{a}(u, Du) \cdot DJ_{S'T}(u)$$

and we use Anzellotti’s results to give sense to pairings between gradients of BV functions and bounded measurable vector fields with divergence in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Now, to do all this rigorously we need to introduce the following functional calculus.

2.5 A functional calculus

Inspired in the relaxed energy functionals introduced by Dal Maso ([24]) for functions with linear growth, we define the following Radon measures.

Assume that $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty[$ is a Borel function such that

$$C\|\xi\| - D \leq g(z, \xi) \leq M(1 + \|\xi\|) \quad \forall (z, \xi) \in \mathbb{R}^N, |z| \leq R, \quad (49)$$

for some constants $C, D, M \geq 0$ which may depend on R . Given a function $u \in BV(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, we define the Radon measure $g(u, Du)$ in \mathbb{R}^N by

$$\begin{aligned} \langle g(u, Du), \phi \rangle := & \\ & \int_{\Omega} g(u(x), \nabla u(x)) \phi(x) dx + \int_{\Omega} g^0 \left(\tilde{u}(x), \frac{Du}{|Du|}(x) \right) \phi(x) |D^c u| \\ & + \int_{J_u} \left(\int_{u_-(x)}^{u_+(x)} g^0 s, \nu_u(x) \right) ds \phi(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x), \quad \forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^N), \end{aligned} \quad (50)$$

where g^0 is the recession function of g , and \tilde{u} is the approximated limit of u .

Let us observe that if $g^0(z, \xi) = \varphi(z)\psi^0(\xi)$, where φ is Lipschitz continuous and ψ^0 is an homogeneous function of degree 1, by applying the chain rule for BV-functions, we have

$$\langle g(u, Du), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) g(u, \nabla u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) \psi^0 \left(\frac{Du}{|Du|} \right) |D^s J_\varphi(u)|. \quad (51)$$

In this case we get

$$g(u, Du)^s = \psi^0 \left(\frac{Du}{|Du|} \right) |D^s J_\varphi(u)|. \quad (52)$$

Let $T \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$. Then there is some $T_{a,b} \in \mathcal{T}_r$ and a constant $c \in \mathbb{R}$ such that $T = T_{a,b} - c$. For $u \in TBV^+(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ and $T = T_{a,b} - c$, we define the Radon measure $g(u, DT(u))$ in \mathbb{R}^N by

$$\begin{aligned} \langle g(u, DT(u)), \phi \rangle := & \langle g(u, DT_{a,b}(u)), \phi \rangle + \int_{[u \leq a]} \phi(x) (g(u(x), 0) - g(a, 0)) dx \\ & + \int_{[u \geq b]} \phi(x) (g(u(x), 0) - g(b, 0)) dx. \quad \forall \phi \in C_c(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \quad (53)$$

Recall that the function $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by

$$h(z, \xi) := \mathbf{a}(z, \xi) \cdot \xi.$$

We denote by \mathcal{P} the set of Lipschitz continuous functions $p : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfying $p'(s) = 0$ for s large enough. We write $\mathcal{P}^+ := \{p \in \mathcal{P} : p \geq 0\}$.

Let $u \in TBV^+(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $S \in \mathcal{P}^+$ and $T \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$. We denote by $h_S(u, DT(u))$, the Radon measure defined by (53) with $g(z, \xi) := S(z)h(z, \xi)$. If $-S \in \mathcal{P}^+$ and $T \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$, by definition we set $h_S(u, DT(u)) := -h_{(-S)}(u, DT(u))$.

Since $h(z, 0) = 0$ for all $z \in \mathbb{R}$, given $S, T \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$ with $T = T_{a,b} - c$, we have

$$h_S(u, DT(u)) = h_S(T_{a,b}(u), DT(u)) = h_S(T_{a,b}(u), DT_{a,b}(u)). \tag{54}$$

Moreover, since $h^0(z, \xi) = \varphi(z)\psi^0(\xi)$, with φ being Lipschitz continuous and ψ^0 an homogeneous function of degree 1, then, by (52), we have

$$\begin{aligned} (h_S(u, DT(u)))^s &= (h_S(u, DT_{a,b}(u)))^s \\ &= \psi^0 \left(\frac{DT_{a,b}(u)}{|DT_{a,b}(u)|} \right) |D^s J_{S\varphi}(T_{a,b}(u))| \quad \text{if } S \in \mathcal{T}^+, \end{aligned} \tag{55}$$

and

$$\begin{aligned} (h_S(u, DT(u)))^s &= (h_S(u, DT_{a,b}(u)))^s \\ &= -\psi^0 \left(\frac{DT_{a,b}(u)}{|DT_{a,b}(u)|} \right) |D^s J_{(-S)\varphi}(T_{a,b}(u))| \quad \text{if } S \in \mathcal{T}^-. \end{aligned} \tag{56}$$

We observe that formally we have $\mathbf{a}(u, Du) \cdot DJ_{T'S}(u) = h_S(u, DT(u))$. When it comes to a rigorous proof, we have been able to prove only that $\mathbf{a}(u, Du) \cdot DJ_{T'S}(u) \geq h_S(u, DT(u))$, but this is sufficient to derive Kruzkov's inequalities and prove uniqueness of entropy solutions with Kruzkov's technique.

2.6 An existence and uniqueness result for the elliptic problem

We give the following concept of solution for the elliptic problem

$$v = -\operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du) \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \tag{57}$$

Definition 1 Given $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$, $v \geq 0$, we say that $u \geq 0$ is an *entropy solution* of (57) if $u \in TBV^+(\mathbb{R}^N)$, and $\mathbf{a}(u, \nabla u) \in X_1(\mathbb{R}^N)$ satisfies

$$v = -\operatorname{div} \mathbf{a}(u, \nabla u) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \tag{58}$$

$$h_S(u, DT(u)) \leq (\mathbf{a}(u, \nabla u), DJ_{T'S}(u)) \quad \text{as measures } \forall S \in \mathcal{P}^+, T \in \mathcal{T}^+, \tag{59}$$

$$h(u, DT(u)) \leq (\mathbf{a}(u, \nabla u), DT(u)) \quad \text{as measures } \forall T \in \mathcal{T}^+. \tag{60}$$

In [7] we obtain the following result.

Theorem 2 ([7]) *Assume that assumptions (H) hold. Then, for any $0 \leq v \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ there exists a unique entropy solution $u \in TBV^+(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ of the problem*

$$u - \operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du) = v \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \tag{61}$$

Moreover, given $v, \bar{v} \in (L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N))^+$, if u, \bar{u} are bounded entropy solutions of the problems

$$u - \operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du) = v \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N$$

and

$$\bar{u} - \operatorname{div} \mathbf{a}(\bar{u}, D\bar{u}) = \bar{v} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N,$$

respectively, then

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u - \bar{u})^+ \leq \int_{\mathbb{R}^N} (v - \bar{v})^+.$$

From the above result, using Crandall-Liggett's Theorem we obtain that problem (23) has a unique mild-solution. The main difficulty is to characterize these mild-solutions in more classical terms.

2.7 The notion of entropy solution. Existence and uniqueness

To explain the notion of entropy solution, let us collect several observations:

a) We know that there are solutions which are discontinuous on a front which moves at the speed of light. In that case u_t is not a function and the best regularity we can expect is that u_t is a Radon measure (see [10]).

b) Admitting that we were able to prove that u_t is a Radon measure, we would obtain that $\operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du)$ is a Radon measure. In the formal computations we required the use of test functions of the form $T(u)$ for some Lipschitz function T . Observe that $T(u)$ is at most in $BV(\mathbb{R}^N)$, hence we need that the Radon measure $\operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du)$ can be integrated against BV functions. To be able to circumvent this difficulty we observe that, being the divergence of a bounded measurable vector field, the expression $\operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du)$ defines an element of $BV(\mathbb{R}^N)^*$, i.e, the dual of $BV(\mathbb{R}^N)$, and we can use test functions in $BV(\mathbb{R}^N)$. To be more precise, the time dependence has to be included and we have that $\operatorname{div} \mathbf{a}(u, Du) \in (L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)))^*$ and we can use test functions in $L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N))$. To integrate by parts we have to extend Anzellotti's integration by parts formula to the time dependent case.

The above Remarks explain the requirements in the definition of entropy solution.

To make precise our notion of solution we need to recall several definitions. We define the space

$$Z(\mathbb{R}^N) := \{(\mathbf{z}, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \times BV(\mathbb{R}^N)^* : \operatorname{div}(\mathbf{z}) = \xi \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)\}.$$

We need to consider the space $BV(\mathbb{R}^N)_2$, defined as $BV(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ endowed with the norm

$$\|w\|_{BV(\mathbb{R}^N)_2} := \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + |Dw|(\mathbb{R}^N).$$

It is easy to see that $L^2(\mathbb{R}^N) \subset BV(\mathbb{R}^N)_2^*$ and

$$\|w\|_{BV(\mathbb{R}^N)_2^*} \leq \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad \forall w \in L^2(\mathbb{R}^N). \tag{62}$$

By $L_w^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N))$ we denote the space of weakly measurable functions $w : [0, T] \rightarrow BV(\mathbb{R}^N)$ (i.e., $t \in [0, T] \rightarrow \langle w(t), \phi \rangle$ is measurable for every $\phi \in BV(\mathbb{R}^N)^*$) such that $\int_0^T \|w(t)\| dt < \infty$.

Definition 2 Let $\Psi \in L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N))$. We say Ψ admits a weak derivative in the space $L_w^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(Q_T)$ if there is a function $\Theta \in L_w^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(Q_T)$ such that $\Psi(t) = \int_0^t \Theta(s) ds$, the integral being taken as a Pettis integral.

Definition 3 Let $\xi \in (L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)_2))^*$. We say that ξ is the time derivative in the space $(L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)_2))^*$ of a function $u \in L^1((0, T) \times \mathbb{R}^N)$ if

$$\int_0^T \langle \xi(t), \Psi(t) \rangle dt = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(t, x) \Theta(t, x) dx dt$$

for all test functions $\Psi \in L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N))$ with compact support in time, which admit a weak derivative $\Theta \in L_w^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(Q_T)$.

Note that if $w \in L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(Q_T)$ and $\mathbf{z} \in L^\infty(Q_T, \mathbb{R}^N)$ is such that there exists $\xi \in (L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)))^*$ with $\text{div}(\mathbf{z}) = \xi$ in $\mathcal{D}'(Q_T)$, we can define, associated to the pair (\mathbf{z}, ξ) , the distribution (\mathbf{z}, Dw) in Q_T by

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{z}, Dw), \phi \rangle &:= - \int_0^T \langle \xi(t), w(t) \phi(t) \rangle dt \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{z}(t, x) w(t, x) \nabla_x \phi(t, x) dx dt. \end{aligned} \tag{63}$$

for all $\phi \in \mathcal{D}(Q_T)$.

Definition 4 Let $\xi \in (L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)_2))^*$ and $\mathbf{z} \in L^\infty(Q_T, \mathbb{R}^N)$. We say that $\xi = \text{div}(\mathbf{z})$ in $(L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)_2))^*$ if (\mathbf{z}, Dw) is a Radon measure in Q_T such that

$$\int_{Q_T} (\mathbf{z}, Dw) + \int_0^T \langle \xi(t), w(t) \rangle dt = 0,$$

for all $w \in L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty(Q_T)$.

Our concept of solution for problem (23) is the following one.

Definition 5 A measurable function $u : (0, T) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ is an entropy solution of (23) in $Q_T = (0, T) \times \mathbb{R}^N$ if $u \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N))$, $T_{a,b}(u(\cdot)) \in L_{loc,w}^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N))$ for all $0 < a < b$, and there exists $\xi \in (L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)_2))^*$ such that

- (i) $(\mathbf{a}(u(t), \nabla u(t)), \xi(t)) \in Z(\mathbb{R}^N)$ a.e. in $t \in [0, T]$,
- (ii) ξ is the time derivative of u in $(L^1(0, T; BV(\mathbb{R}^N)_2))^*$ in the sense of Definition 3,
- (iii) $\xi = \operatorname{div} \mathbf{a}(u(t), \nabla u(t))$ in the sense of Definition 4, and
- (iv) the following inequality is satisfied

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \phi h_S(u, DT(u)) dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \phi h_T(u, DS(u)) dt \\ & \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} J_{TS}(u(t)) \phi'(t) dx dt \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{a}(u(t), \nabla u(t)) \cdot \nabla \phi T(u(t)) S(u(t)) dx dt \end{aligned}$$

for truncatures $S, T \in \mathcal{T}^+$ and any nonnegative smooth function ϕ of compact support, in particular of the form $\phi(t, x) = \phi_1(t)\rho(x)$, $\phi_1 \in \mathcal{D}((0, T))$, $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

In [8] we have obtained the following existence and uniqueness result.

Theorem 3 ([8]) *Assume we are under assumptions (H). Then, for any initial datum $0 \leq u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ there exists a unique entropy solution u of (23) in $Q_T = (0, T) \times \mathbb{R}^N$ for every $T > 0$ such that $u(0) = u_0$. Moreover, if $u(t), \bar{u}(t)$ are the entropy solutions corresponding to initial data $u_0, \bar{u}_0 \in (L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N))^+$, respectively, then*

$$\| (u(t) - \bar{u}(t))^+ \|_1 \leq \| (u_0 - \bar{u}_0)^+ \|_1 \quad \text{for all } t \geq 0. \tag{64}$$

3 The evolution of the support of the solutions of the relativistic heat equation

In [9] we have proved that the support of solutions of the relativistic heat equation evolves at constant speed, identified as light's speed c . For that we constructed entropy sub- and super-solutions which are fronts evolving at speed c and proved the corresponding comparison principle between entropy solutions and sub- and super-solutions, respectively. This enables us to prove the existence of discontinuity fronts moving at light's speed.

3.1 Sub and super-solutions. Comparison principles

Definition 6 *Given $0 \leq u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$, we say that a measurable function $u : (0, T) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ is an entropy super-solution (respectively, entropy sub-solution) of the Cauchy problem (23) in $Q_T = (0, T) \times \mathbb{R}^N$ if $u \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N))$, $u(0) \geq u_0$ (resp. $u(0) \leq u_0$), $T_{a,b}(u(\cdot)) \in$*

$L^1_{loc,w}(0, T, BV(\mathbb{R}^N))$ for all $0 < a < b$, $\mathbf{a}(u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \in L^\infty(Q_T)$, and the following inequality is satisfied:

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} h_S(u, DT(u))\phi + \int_{Q_T} h_T(u, DS(u))\phi \\ & \leq \int_{Q_T} J_{TS}(u)\phi' - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{a}(u(t), \nabla u(t)) \cdot \nabla \phi T(u(t))S(u(t))dxdt, \end{aligned} \tag{65}$$

(resp. with \geq sign instead of \leq) for any $\phi \in \mathcal{D}((0, T) \times \mathbb{R}^N)$, $\phi \geq 0$, and any $T \in \mathcal{T}^+$, $S \in \mathcal{T}^-$.

Note that taking $T(r) = 1$ and $S(r) = -1$, for all $r \in \mathbb{R}$, from (65), we get

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \operatorname{div} \mathbf{a}(u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \quad \text{in } \mathcal{D}'(Q_T). \tag{66}$$

We can not take these truncation functions directly, instead we can use $T = T_{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}} + 1$ and $S = T_{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}} - 1$, and then obtain (66) by a limit process.

We have the following comparison principle between entropy super-solutions and entropy solutions.

Theorem 4 ([9]) *Assume that there is some constant $C > 0$ such that the function $M(z)$ in (38) satisfies $M(z) \leq Cz$ for $z \geq 0$ small enough. Assume that u is an entropy solution of (23) corresponding to initial datum $u_0 \in (L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N))^+$, and \bar{u} is an entropy super-solution (or an entropy sub-solution) of (23) corresponding to initial datum $\bar{u}_0 \in (L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N))^+$ such that $\bar{u}(t) \in BV(\mathbb{R}^N)$ for almost all $0 < t < T$. Then*

$$\|(u(t) - \bar{u}(t))^+\|_1 \leq \|(u_0 - \bar{u}_0)^+\|_1 \quad \text{for all } t \geq 0. \tag{67}$$

3.2 Some entropy super-solutions and sub-solutions of the relativistic heat equation

To study the evolution of the support of entropy solutions of the relativistic heat equation, we need to compute some explicit entropy super and sub-solutions.

Proposition 5 ([9]) *Let $C \subset \mathbb{R}^N$ a compact set, $0 < \alpha \leq \beta$. For $s > 0$, let $C(s) := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, C) \leq s\}$. Then $u(t, x) := \beta \chi_{C(ct)}(x)$ is an entropy super-solution of the Cauchy problem for the relativistic heat equation (19) with $u_0 = \alpha \chi_C$ as initial datum.*

Proposition 6 ([9]) *Given $R_0, \alpha_0 > 0$ and $\gamma_0 \geq 0$, there are values $\beta_1, \beta_2 > 0$ large enough such that*

$$u(t, x) = \begin{cases} e^{-\beta_1 t - \beta_2 t^2} \left(\alpha_0 \frac{c}{v} \sqrt{R(t)^2 - |x|^2} + \gamma_0 \right) & \text{if } |x| < R(t) \\ 0 & \text{if } |x| \geq R(t), \end{cases}$$

where $R(t) = R_0 + ct$, is an entropy sub-solution of (19).

3.3 The evolution of the support

Theorem 7 ([9]) *Let C be an open bounded set in \mathbb{R}^N . Let $u_0 \in (L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))^+$ with support equal to \overline{C} . Let $u(t)$ be the entropy solution of the Cauchy problem for the relativistic heat equation (19) with u_0 as initial datum. Then*

$$\text{supp}(u(t)) \subset C(ct) \quad \text{for all } t \geq 0. \quad (68)$$

Moreover, if we assume that () for any closed set $F \subseteq C$, there is a constant $\alpha_F > 0$ such that $u_0 \geq \alpha_F$ in F , then*

$$\text{supp}(u(t)) = C(ct) \quad \text{for all } t \geq 0.$$

Finally, the following result can be derived from Proposition 6 and the comparison principle with sub-solutions.

Proposition 8 ([9]) *Let $u_0 \in (L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))^+$ and let u be the entropy solution of the Cauchy problem for the equation (19) with u_0 as initial datum. Assume that $u_0(y) \geq \alpha > 0$ for any $y \in B_R(x)$, $R > 0$. Then $u(t, y) \geq \alpha(t)$ for any $y \in B_{R+ct}(x)$ and any $t > 0$, for some function $\alpha(t) > 0$. In particular, if u_0 is continuous at $x \in \mathbb{R}^N$ and $u_0(x) > 0$, then $u(t, x) > 0$ for any $t > 0$.*

This result implies the propagation of discontinuity fronts for any $t > 0$.

Acknowledgement *The first and third authors have been partially supported by EC through the RTN Programme Nonlinear Partial Differential Equations Describing Front propagation and other Singular Phenomena, HPRN-CT-2002-00274, and by PNP GC project, reference BFM2002-01145. The second author acknowledges partial support by the Departament d'Universitats, Recerca i Societat de la Informació de la Generalitat de Catalunya and by PNP GC project, reference BFM2003-02125.*

References

- [1] M. Agueh, *Existence of solutions to degenerate parabolic equations via the Monge-Kantorovich Theory*, PhD Thesis, Georgia Tech, Atlanta, 2001.
- [2] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, 2000.
- [3] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Spaces of Probability Measures*, Lect. in Math. ETH Zürich, Birkhäuser, 2005.
- [4] F. Andreu, V. Caselles, and J.M. Mazón, *A Strong Degenerate Quasilinear Equation: the Elliptic Case*, Scuola Norm. Sup. Pisa. Serie V. Vol. III, Fasc. 3 (2004), 555-587.

- [5] F. Andreu, V. Caselles, and J.M. Mazón, *A Strong Degenerate Quasilinear Equation: the Parabolic Case*, Arch. Rat. Mech. Anal. **176** (2005), 415-453.
- [6] F. Andreu, V. Caselles, and J.M. Mazón, *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals*, Progress in Mathematics, vol. 223, 2004. Birkhauser.
- [7] F. Andreu, V. Caselles, and J.M. Mazón, *A Strongly Degenerate Quasilinear Elliptic Equation*, Nonlinear TMA. **61** (2005), 637-669.
- [8] F. Andreu, V. Caselles, and J.M. Mazón, *The Cauchy Problem for a Strongly Degenerate Quasilinear Equation*, J. European Math. Soc. **7** (2005), 361-393.
- [9] F. Andreu, V. Caselles, J.M. Mazón and S. Moll *Finite Propagation Speed for Limited Flux Diffusion Equations*, To appear in Arch. Rat. Mech. Anal.
- [10] F. Andreu, V. Caselles and J.M. Mazón, *Radially symmetric solutions of a tempered diffusion equation*, in preparation.
- [11] G. Anzellotti, *Pairings Between Measures and Bounded Functions and Compensated Compactness*, Ann. di Matematica Pura ed Appl. IV (135) (1983), 293-318.
- [12] G.I. Barenblatt, M. Bertsch, R. Dal Passo, V.M. Prostokishin, and M. Ughi, *A Mathematical Model of Turbulent Heat and Mass Transfer in Stable Stratified Shear Flow*, J. Fluid Mechanics **253** (1993), 341-358.
- [13] Ph. Bénilan, M.G. Crandall and A. Pazy, *Evolution Equations Governed by Accretive Operators*, book in preparation.
- [14] M. Bertsch and R. Dal Passo, *Hyperbolic Phenomena in a Strongly Degenerate Parabolic Equation*, Arch Rational Mech. Anal. **117** (1992), 349-387.
- [15] M. Bertsch and R. Dal Passo, *A Parabolic Equation with Mean-Curvature Type Operator*, In Progres Nonlinear Differential Equation Appl. **7** (F. Browder, ed.) Birkhäuser 1992, 89-97.
- [16] Ph. Blanc, *On the regularity of the solutions of some degenerate parabolic equations*, Comm. in Part. Diff. Equat. **18** (1993), 821-846.
- [17] Ph. Blanc, *Sur une classe d'equations paraboliques degenerées a une dimension d'espace possédant des solutions discontinues*, Ph.D. Thesis, number 798, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 1989.
- [18] Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*, Comm. Pure Appl. Math. **64** (1991), 375-417.
- [19] Y. Brenier, *Derivation of the Euler equations from a caricature of Coulomb interaction*, Comm. Math. Physics **212** (2000), 93-104.

- [20] Y. Brenier, *Extended Monge-Kantorovich Theory*, in Optimal Transportation and Applications: Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, L.A. Caffarelli and S. Salsa (eds.), Lecture Notes in Math. 1813, Springer-Verlag, 2003, 91-122.
- [21] C. Cattaneo, *Sulla conduzione del calore*, Atti. del Semin. Matem. Univ. di Modena **3** (1948), 83-101.
- [22] M.G. Crandall, *Nonlinear Semigroups and Evolution Governed by Accretive Operators*, In Proceeding of Symposium in Pure Mat., Part I (F. Browder, ed.) A.M.S., Providence 1986, 305-338.
- [23] M.G. Crandall and T.M. Liggett, *Generation of Semigroups of Nonlinear Transformations on General Banach Spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), 265-298.
- [24] G. Dal Maso, *Integral representation on $BV(\Omega)$ of Γ -limits of variational integrals*, Manuscripta Math. **30** (1980), 387-416.
- [25] R. Dal Passo, *Uniqueness of the entropy solution of a strongly degenerate parabolic equation*, Comm. in Part. Diff. Equat. **18** (1993), 265-279.
- [26] A. Chertock, A. Kurganov and P. Rosenau, *Formation of discontinuities in flux-saturated degenerate parabolic equations*, Nonlinearity **16** (2003), 1875-1898.
- [27] V. De Cicco, N. Fusco, and A. Verde, *On L^1 -lower semicontinuity in BV* , J. Convex Anal. **12** (2005), 173-185.
- [28] J.J. Duderstadt and G.A. Moses, *Inertial Confinement Fusion*, John Wiley and Sons, 1982.
- [29] A. Einstein, *Zur Theorie der Brownschen Bewegung*, Annalen der Physik. **19** (1906), 371-381.
- [30] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Math., CRC Press, 1992.
- [31] W. Gangbo and R. McCann, *The geometry of optimal transportation*, Acta Math. **177** (1996), 113-161.
- [32] L. Joseph and D.D. Preziosi, *Heat waves*, Rev. Mod. Physics **61** (1989), 41-73.
- [33] L. Joseph and D.D. Preziosi, *Addendum to the paper: Heat waves*, Rev. Mod. Physics **62** (1990), 375-391.
- [34] R. Jordan, D. Kinderlehrer and F. Otto *The variational formulation of the Fokker-Planck equation*, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), 1-17.

- [35] S.N. Kruzhkov, *First order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR-Sb. **10** (1970), 217-243.
- [36] J.C. Maxwell, *On the dynamical theory of gases*, Philos. Trans. R. Soc. London **157** (1867), 3749-101.
- [37] J.C. Maxwell, *Theory of Heat*, Logmans, Green and Co. London, 1972.
- [38] D. Mihalas and B. Mihalas, *Foundations of radiation hydrodynamics*, Oxford University Press, 1984.
- [39] F. Otto, *Dynamics of labyrinthine pattern formation in magnetic fluids: a mean-field theory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **141** (1998), 63-103.
- [40] F. Otto, *Evolution of microstructure in unstable porous medium flow: a relaxational approach*, Comm. Pure Appl. Math., **52** (1999), 873-915.
- [41] F. Otto, *The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation*, Comm. in Part. Diff. Equat. **26** (2001), 101-174.
- [42] P. Rosenau, *Free Energy Functionals at the High Gradient Limit*, Phys. Review A **41** (1990), 2227-2230.
- [43] P. Rosenau, P.S. Hagan, R.L. Northcutt and D.S. Cohen *Delayed Diffusion due to Flux Limitation*, Phys. Letters A **142** (1989), 26-30.
- [44] P. Rosenau, *Tempered Diffusion: A Transport Process with Propagating Front and Inertial Delay*, Phys. Review A **46** (1992), 7371-7374.
- [45] M.B. Rubin, *Hyperbolic Heat Conduction and the Second Law*, Int. J. Engng. Sci. **30** (1992), 1665-1676.
- [46] C. Villani, *Topic in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Math. **56**, Amer. Math. Soc 2003.
- [47] W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, GTM 120, Springer Verlag, 1989.

The parameterization method for invariant manifolds *

E. FONTICH

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona

fontich@mat.ub.es

Abstract

We describe the parameterization method and we illustrate its application in two cases to obtain two results on invariant manifolds.

Key words: *invariant manifolds, parameterization method, resonant manifolds, parabolic points.*

AMS subject classifications: *37D10.*

1 Introduction

One of the main aims of the theory of dynamical systems is to provide tools for the study and the description of the phase space of diffeomorphisms and differential equations. For the description of the phase space the knowledge of the invariant objects and their invariant manifolds is fundamental.

The parameterization method for invariant manifolds consists of determining simultaneously a parameterization of the invariant manifold and a representation of the system restricted to the manifold.

2 The parameterization method

Maps. We consider the case of a map with a fixed point. Given $F : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ defined in an open set U , with $0 \in U$ and $F(0) = 0$, we look for an invariant manifold of 0 by F modelled on a subspace $E \subset \mathbb{R}^d$ as the range of a parameterization $K : U_1 \subset E \rightarrow \mathbb{R}^d$, $K(0) = 0$, $DK(0)E = E$, such that

$$F \circ K = K \circ R, \tag{1}$$

* We acknowledge the support of MCYT Grant BFM2003-09504-C02-01 and CIRIT Grant 2001 SGR-70.

for a certain map $R : U_1 \subset E \rightarrow E$ which we have to find simultaneously.

Condition (1) implies that the range of K is invariant by F and establishes that F restricted to the range of K is conjugated to R . Hence R must belong to the conjugacy class of F restricted to the range of K , which, among other things depends on the degree of regularity we are considering. In the simplest cases we can take as R a linear map, in others a polynomial.

Studying equation (1) in different settings we can prove the existence and properties of several invariant manifolds.

Equation (1) can be rewritten as

$$\mathcal{T}(F, K, R) := F \circ K - K \circ R = 0. \quad (2)$$

Once we have determined $R = R(F)$, we can try to apply the Implicit Function Theorem to (2) to find K . For that we have to deal with the derivative of \mathcal{T} with respect to K . The formal derivative is

$$D_2\mathcal{T}(F, K, R)\Delta = (DF \circ K)\Delta - \Delta \circ R$$

which becomes a true derivative in some function spaces.

In a first approximation or if we are not interested in obtaining optimal results, specially in what concerns to regularity, the application of the Implicit Function Theorem leads to results in a fairly quick way.

To obtain optimal results it is convenient to use more general tools as fixed point theorems applied to spaces with norms well adapted to the problem as well as some supplementary arguments.

A widely used method to study invariant manifolds is the graph transform method. It looks for the manifold as the graph of a function φ from the subspace where it must be tangent to a complementary subspace. If we write $F = (F_1, F_2)$ the invariant condition is expressed as

$$F_2(x, \varphi(x)) = \varphi(F_1(x, \varphi(x))). \quad (3)$$

From the analytical point of view the invariance equation (1) of the parameterization method has advantages with respect to equation (3). The main difficulty of (3) is that in the right-hand term there is a composition of φ with an expression that depends on φ . It is well known that the model operator $\varphi \mapsto \varphi \circ \varphi$ is not differentiable in any space of differentiable functions. Therefore it is impossible to apply the Implicit Function Theorem to (3) and also makes it difficult to get the necessary estimates for the application of a fixed point theorem.

Another advantage of the parameterization method is that K can represent the manifold in domains where it folds and loses to be a graph. In some examples the parameterization K is defined in the whole space and represents the global manifold.

Moreover the parameterization method permits efficient numerical implementations and “a posteriori” estimates of the error.

Obviously the parameterization method can be applied to maps defined in Banach spaces. Haro and de la Llave have applied the method to study invariant manifolds of invariant tori in quasi-periodic systems.

Differential equations. We consider the case of a differential equation with an equilibrium point. Let $x' = \mathcal{X}(x)$, where \mathcal{X} is a vector field on $U \subset \mathbb{R}^d$, $0 \in U$, $\mathcal{X}(0) = 0$. If E is a subspace of \mathbb{R}^d invariant by $D\mathcal{X}(0)$, we look for a parameterization $K : U_1 \subset E \rightarrow \mathbb{R}^d$ with $K(0) = 0$, $DK(0)E = E$, and a vector field R on $U_1 \subset E$ such that

$$\mathcal{X} \circ K = DK \cdot R.$$

This condition expresses that on the range of K , the vector field \mathcal{X} is tangent to the range of K . Hence it is invariant by the flow of \mathcal{X} .

We also can say that the vector field \mathcal{X} on the range of K is the “pull forward” of the vector field R on E .

In case of uniqueness of the manifolds we are interested in, they can be obtained from the corresponding ones for maps by an abstract argument. However it is interesting to have direct proofs because from those we can extract “a posteriori” bounds of the numerical approximations. See [4] for a more detailed description of the method as well as for several applications.

3 Non-resonant manifolds

Given a map F such that $F(0) = 0$ we can ask how many invariant manifolds passing through 0 it has. If it has an invariant manifold parameterized by K , verifying $F \circ K = K \circ R$, if we differentiate and we evaluate at 0 we obtain

$$DF(0)DK(0) = DK(0)DR(0),$$

that is, the range of $DK(0)$ is invariant by $DF(0)$. Therefore, each invariant subspace of $DF(0)$ is a candidate to have an invariant manifold tangent to it. The questions are if for each one of them there exists a manifold tangent to it and, if it exists, what properties it has. The answer depends on the spectrum of $DF(0)$, the spectrum of $DF(0)$ restricted to the subspace and the regularity we ask to the manifold.

Consider the following simple example: $F(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{4}y + x^2)$. The origin is fixed and

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

$DF(0, 0)$ has two one-dimensional invariant subspaces: E_1, E_2 . E_2 corresponds to the strong stable manifold. If we look for an invariant manifold tangent to E_1 , in the form graph φ , we find the condition $\varphi(x/2) = \varphi(x)/4 + x^2$. If we assume that $\varphi \in C^2$ and differentiate twice we obtain $(1/4)\varphi''(x/2) = \varphi''(x)/4 + 2$. Evaluating at $x = 0$ we get a contradiction.

Theorem 1 *Let $F : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ be a C^r map on U , $0 \in U$, with $F(0) = 0$, and $r \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Let $A = DF(0)$, $L \in \mathbb{N}$ and $L \geq 1$. We assume*

- 1) There exists $E \subset \mathbb{R}^d$ such that $A(E) \subset E$. Then there exists a decomposition $\mathbb{R}^d = E \oplus C$ and A takes the form

$$A = \begin{pmatrix} A_E & B \\ 0 & A_C \end{pmatrix};$$

- 2) $\text{Spec}(A_E) < 1$; 3) $(\text{Spec}(A_E))^j \cap \text{Spec}(A_C) = \emptyset$ for $j = 2, \dots, L$;
 4) A is invertible; 5) $(\text{Spec}(A_E))^{L+1} \text{Spec}(A^{-1}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;
 6) $L + 1 \leq r$.

Then there exists a C^r map, $K : U_1 \subset E \rightarrow \mathbb{R}^d$, $0 \in U_1 \subset E$, and a polynomial $R : E \rightarrow E$ of degree (less or equal than) L , such that

$$F \circ K = K \circ R \quad \text{on} \quad U_1,$$

and $K(0) = 0$, $DK(0) = (\text{Id}, 0)$, $R(0) = 0$, $DR(0) = A_E$.

This statement is a simplified version of one of the main results in [2], which is a slight generalization of the main result in [7]. However the proof is different. A simple proof applying the Implicit Function Theorem, which needs one more order of differentiability for F is in [4]. Related weaker results are [6, 5]. A study of the dependence with respect to parameters is in [3].

Considering F^{-1} we can study submanifolds of the unstable manifold.

Here we do not use that the spaces E, C are spectral subspaces neither that \mathbb{R}^n decomposes as sum of two invariant subspaces. We only need that E is invariant. For instance if $DF(0)$ is

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

there exists a manifold tangent to the first axis.

The manifolds associated to a subspace corresponding to an open ring of the spectrum of outer radius one in this context are called slow manifolds and are important in applications, for instance in chemical kinetics.

The proof of Theorem 1 is based on looking K and R , with K of the form $K = K^{\leq} + K^>$ in such a way that K^{\leq} and R are polynomials of degree L and $K^> = o(|x|^L)$. Then one writes and solves an equation for $K^>$.

4 One-dimensional invariant manifolds associated to parabolic points

We consider maps F with the fixed point $0 = F(0)$ such that $DF(0) = \text{Id}$. In this case a neighbourhood of 0 is the center manifold. However there may be invariant submanifolds which behave topologically as stable or unstable

manifolds. These manifolds appear in problems of Celestial Mechanics and Fluid Mechanics.

The Lipschitz and analytical cases have been studied in a variety of situations. See [1] for references.

The next result deals with one-dimensional manifolds for differentiable maps.

Theorem 2 *Let $F = (F^1, F^2) : U \subset \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^{1+n}$ be a map of class C^r , $r \geq 2$ or $r = \infty$, such that $F(0, 0) = (0, 0)$ and $DF(0, 0) = \text{Id}$. We assume*

- 1) $D^j F^1(0, 0) = 0$ for $2 \leq j \leq N - 1$, $D^j F^2(0, 0) = 0$ for $2 \leq j \leq M - 1$, $N \leq M$;
- 2) $(\partial^N / \partial x^N) F^1(0, 0) < 0$, $(\partial^M / \partial x^M) F^2(0, 0) = 0$, for some $2 \leq N, M \leq r$;
- 3) $\text{Spec} (\partial^M / \partial x^{M-1} \partial y) F^2(0, 0) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$;
- 4) $r > 2N - 1$.

Then there exists a map $K : [0, t_0) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1+n}$, of class C^p with $p = r - N$, of class C^r on $(0, t_0)$ and a polynomial $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $F \circ K = K \circ R$.

Moreover $K(t) = (t, 0) + O(t^2)$ and $R(t) = t + d_N t^N + O(t^{2N-1})$ with $d_N = \frac{\partial^N F^1}{\partial x^N}(0, 0) < 0$.

We point out that hypotheses 2) and 3) provide some weak hyperbolicity through the nonlinear terms. For the proof, in a more general case, see [1].

References

- [1] I. Baldomá, E. Fontich, R. de la Llave and P. Martín. The parameterization method for one dimensional invariant manifolds of higher dimensional parabolic fixed points. *Preprint mp-arc 05-307*, 2005.
- [2] X. Cabré, E. Fontich and R. de la Llave. The parameterization method for invariant manifolds I: manifolds associated to non-resonant subspaces. *Indiana Univ. Math. J.* 52: 283–328, 2003.
- [3] X. Cabré, E. Fontich and R. de la Llave. The parameterization method for invariant manifolds II: regularity with respect to parameters. *Indiana Univ. Math. J.* 52: 329–360, 2003.
- [4] X. Cabré, E. Fontich and R. de la Llave. The parameterization method for invariant manifolds III: overview and applications. *J. of Differential Equations*, 218: 444–515, 2005.
- [5] M. Chaperon. Invariant manifolds revisited. *Proc. Steklov Inst. Math.* 236: 415–433, 2002.
- [6] M.S. ElBialy. Sub-stable and weak-stable manifolds associated with finitely non-resonant spectral subspaces. *Math. Z.* 236: 717–777, 2002.
- [7] R. de la Llave. Invariant manifolds associated to nonresonant spectral subspaces. *J. Statist. Phys.* 87: 211–249, 1997.

Aspectos culturales en la historia de las matemáticas

RICARDO RIAZA

Depto. Matemática Aplicada a las Tecnologías de la Información
ETSI Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid

rrr@mat.upm.es

Resumen

Distintos estudios de la ciencia plantean la relevancia que los factores sociales y culturales tienen en la vertiente epistemológica de las disciplinas científicas. En el presente trabajo se recogen, en primer lugar, algunas aportaciones en esta dirección de E. Lizcano, que en un análisis histórico estudia cómo la emergencia de ciertos conceptos matemáticos está íntimamente vinculada a las formas de racionalidad de las culturas en las que surgen. En segundo lugar, la voluntad desmitificadora de la matemática como discurso de la verdad, presente en el análisis de Lizcano y en otros estudios culturales, es puesta en cuestión apelando a que ese discurso asumiría un modelo platónico en cierto modo “ingenuo” de las matemáticas. Tal modelo no refleja muchas de las limitaciones planteadas desde las matemáticas mismas. El enfoque purista que cuestionan los estudios culturales se manifiesta también en una forma particular de escribir la historia de la ciencia, según la cual las matemáticas serían el producto de una evolución dificultosa pero irresistible hacia un edificio perfecto y universal; en esta dirección, se recogen algunas muestras de otras formas de escribir la historia de las matemáticas, alejadas de ese planteamiento universalista y teleológico.

1 Introducción

Posiblemente, un gran número de matemáticos suscribiría la idea de que la historia de las matemáticas es casi en su totalidad una historia de ideas, puramente intelectual. Este punto de vista, que en la terminología de Kuhn y Lakatos podría entenderse como *internalista* [5], ha sido cuestionado en las últimas décadas por historiadores, filósofos y sociólogos. En particular, apuntando más allá del entramado social de instituciones, financiación, tecnología, etc. en el que la ciencia se desarrolla, diversos investigadores procedentes del ámbito de la denominada *sociología del conocimiento científico* enfatizan la relevancia que factores culturales y sociales tienen en la vertiente *epistemológica* de la ciencia [3, 7, 8, 14].

En el contexto de estos estudios culturales sobre la ciencia, algunos trabajos se dirigen específicamente a las matemáticas [3, 15, 16, 17, 18, 19]. Tales estudios apuntan más allá del hecho de que éstas sean evidentemente (¿el producto de?) una actividad humana y como tales sean, al menos en parte, sociales, o de que el entorno sociocultural contribuya a que las matemáticas se muevan en una dirección u otra. A modo de ejemplo, analizan también el que para amplios colectivos sociales la matemática aparezca revestida de un halo de certidumbre o exactitud que parece dotarla de un estatus epistemológicamente privilegiado.

La historia de las matemáticas no es ajena a estas consideraciones. Diversos estudios culturales analizan cómo tal historia se (re)escribe frecuentemente en términos teleológicos, de necesidad o incluso como *historia sagrada*: en este sentido, Lizcano recoge en [16, p. 40] el siguiente párrafo de Lakatos [13]: “La historia de la matemática ha sido distorsionada por filosofías falsas aún más de lo que lo ha sido la historia de la ciencia. Dicha historia todavía es considerada por muchos como una acumulación de verdades eternas; las teorías o los teoremas falsos son desterrados al oscuro limbo de la prehistoria o se los archiva como lamentables errores que sólo tienen interés para los coleccionistas de curiosidades. De acuerdo con ciertos historiadores de la matemática, la historia de las matemáticas en sentido propio empieza con aquellas obras que se conforman a los estándares que ellos consideran definitivos. Otros descienden hasta las edades prehistóricas sólo para entresacar de la basura fragmentos luminosos de la verdad eterna.”

Algunas ideas procedentes de la sociología del conocimiento científico han sido crudamente cuestionadas por los científicos, habiéndose escenificado una auténtica “guerra de las ciencias” en episodios como el denominado *asunto Sokal*: en 1996, el físico norteamericano Alan Sokal envió a la revista *Social Text* un artículo constituido por una extravagante serie de ideas y citas filosóficas, sociológicas y científicas que parecen abundar en tesis aparentemente próximas a los estudios culturales de la ciencia, tales como la de que la realidad física es una construcción lingüística y social o que el conocimiento científico refleja las ideas y las relaciones de poder de las culturas en las que surge. El artículo fue aceptado y publicado [22], y unos meses después sería revelado por el propio autor [23] (véase también [24]) como una parodia con la que pretendía combatir determinados abusos del discurso posmoderno y del constructivismo social.

Uno de los muchos aspectos de la polémica generada por el artículo de Sokal y la posterior publicación de [25] (véanse también, en este sentido, [2, 5, 9] y la bibliografía ahí recogida) puede resumirse, muy simplificada, como un enfrentamiento entre cierta forma de positivismo científico y un escepticismo radical basado en nociones (filosóficamente) relativistas sobre la “verdad” y la “realidad”. Sin embargo, las matemáticas parecen haberse mantenido al margen de esta polémica, quizá porque en matemáticas la verdad lo es en un sentido lógico, y la realidad, fuera de una visión platónica, no va más allá de la definida por unos axiomas. En este sentido, la “autoacotación” del alcance de las matemáticas en cierto modo las dejaría asépticamente fuera de esa guerra.

Pero esa autoacotación puede ser vista en sí misma como *ideológica* [18], y probablemente sería discutida también desde la perspectiva de la matemática

aplicada. En este contexto, posiblemente muchos investigadores defenderían la idea de que las matemáticas en cierto sentido describen “la” *realidad*, por lo que la anterior asepsia entra en cuestión. De hecho, dos de los problemas centrales a los que se enfrenta la sociología del conocimiento científico están muy próximos al quehacer actual en matemática aplicada: estos problemas son la capacidad predictiva de la ciencia y la posibilidad de sustentar una tecnología en ella [7]. Buena parte de las predicciones en ciencias naturales se basan en el análisis y simulación de modelos desarrollados en el ámbito de la matemática aplicada, que contribuye también al desarrollo tecnológico a través del diseño y la optimización de sistemas. Las consideraciones realizadas desde los estudios culturales de la ciencia no son extrañas, por tanto, al ámbito más específico de la matemática aplicada.

El propósito de estas páginas es doble. En primer lugar, pretendemos acercar a la comunidad matemática algunas de las reflexiones sobre los aspectos culturales y sociales de las matemáticas planteados desde los estudios culturales de la ciencia. Dado lo amplio de tal objetivo, hemos optado por centrarlo en la discusión de algunos aspectos culturales presentes en episodios históricos concretos de las matemáticas china, griega clásica y alejandrina, analizados en profundidad por E. Lizcano en su libro *Imaginario colectivo y creación matemática* [16]: estos aspectos se resumen en la sección 2.

En segundo lugar, pretendemos discutir críticamente algunas otras ideas más generales desarrolladas por Lizcano, ideas que consideramos una muestra representativa y bien argumentada de algunas tendencias en la sociología del conocimiento científico. Como se detalla al final de la sección 2, Lizcano plantea que el olvido de las metáforas originarias de los conceptos matemáticos es responsable de dos mitos: el de la verdad intemporal de las matemáticas y el de su independencia de los orígenes. Singularizando estos mitos intentamos sintetizar, quizá simplificando en exceso, la voluntad desacralizadora de las matemáticas presente en el análisis de Lizcano.

La idea central que desarrollamos en secciones posteriores es que tal mitificación (o mistificación, en el sentido de falseamiento) de las matemáticas expresa un modelo en cierto modo “ingenuo” de las mismas. Este modelo apunta a una visión platónica distante del quehacer matemático real o habitual, al menos en el contexto occidental actual (si es que es posible hablar de tal contexto con esta generalidad); esa visión no contempla las limitaciones que son conocidas y asumidas desde las matemáticas mismas, como se plantea en las secciones 3 y 4, e ignora la perspectiva de *otras* historias de las matemáticas, de las que algunas muestras se recogen en la sección 5.

La preocupación sobre los fundamentos de las matemáticas, el significado de *verdad*, etc., ha sido expresada desde el seno de la comunidad matemática por escuelas matemáticas como la logicista, la formalista o la constructivista, habiendo centrado buena parte de los desarrollos matemáticos del siglo XX. Algunos de los problemas epistemológicos a los que apunta la sociología del conocimiento científico han sido abordados desde la matemática misma: parece por ello pertinente un acercamiento o un diálogo entre ambos tipos de perspectivas, y desde este punto de vista creemos que pueden ser de

interés algunas consideraciones sobre las reflexiones acerca de las matemáticas hechas desde los estudios culturales de la ciencia. Es importante resaltar que la discusión crítica de estas ideas generales no pretende desacreditarlas globalmente: no pretendemos discutir que la visión de las matemáticas como edificio universal y perfecto esté arraigada en amplios colectivos, sino destacar que un número relevante de matemáticos e historiadores de las matemáticas precisamente plantean lo equívoco o al menos lo matizable de esa imagen. Y muy lejos de nuestro objetivo está el que esta discusión desvirtúe el análisis previo, más concreto y en mi opinión profundamente acertado, de la presencia fundamental del sustrato cultural y de las formas de racionalidad específicas de cada sociedad en las matemáticas china y griega.

2 *Imaginario colectivo y creación matemática*

El análisis desarrollado por E. Lizcano en [16] se centra en distintas formas de negatividad (o en la ausencia de las mismas) en la matemática china de la época de los Han (ss. II y I a.C.), en la matemática griega clásica, y en la obra de Diofanto. El término *negatividad*, deliberadamente impreciso, pretende “evitar la ilusión de identidad de unos ‘números negativos’ cuya mítica búsqueda de los orígenes y posteriores cumplimientos se estuviera investigando” (p. 18). A continuación se resumen algunas de las ideas vertebradoras de su estudio, con todas las reservas que conlleva el sintetizar en unos pocos párrafos una serie de consideraciones desarrolladas en un texto de más de doscientas páginas. Un resumen de los aspectos que aquí recogemos, mucho más amplio y elaborado por el propio autor, puede encontrarse en [17].

La discusión se estructura a partir de los comentarios de Liu Hui (s. III d.C.) al octavo de los *Nueve capítulos del arte matemático* (*Jiu zhang suanshu*), centrado en el denominado método *fang cheng* que se correspondería, en términos matemáticos modernos, con el método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Como se describe en [16, p. 84], “la ‘receta central’ del método *fang cheng* está en conseguir triangular a base de huecos la matriz que define la disposición de los coeficientes en el tablero de cálculo. Y a ello se va a subordinar hasta la propia consideración de los objetos que se tendrán por ‘números’. A lo cual favorecerá, sin duda, la no construcción por la matemática ni la filosofía chinas de una metafísica explícita del número que, como en Grecia, delimite las fronteras de lo que puede pensarse como tal.”

El extracto anterior pretende ilustrar la dirección argumental del estudio de Lizcano, en el que se plantea que ciertas conceptualizaciones emanan de unas formas de racionalidad específicas de cada cultura. En el caso chino, “restar ‘3–4’ supone [...] disponer una batalla sobre un tapiz situado en el suelo en el que tres palillos rojos se enfrentan a cuatro negros: se van oponiendo por parejas, y éstas se aniquilan entre sí. Queda un palillo negro sin oponente y sale victorioso: es el vencedor/resultado de la resta/batalla. A ese palillo negro/yin resultante hoy nosotros le llamamos ‘menos uno’ o ‘–1’ ” [17, p. 4]. Operando mediante la destrucción mutua de números/palillos opuestos con el fin de crear un vacío en

el espacio de representación, de forma natural surgen en la matemática china de la época Han los conceptos que, de nuevo en términos de la matemática occidental moderna, describiríamos como “positivo” (*zheng*), “negativo” (*fu*) y “cero” (*wu*). La cuestión es que la emergencia de estos conceptos se basa en una forma de pensar basada en la oposición, la simetría y la analogía, en la que prima un principio de sincronidad para el que lo significativo son las concurrencias [17]: las nociones matemáticas anteriormente referidas están, por tanto, profundamente asociadas al sustrato cultural y al imaginario colectivo del que surgen.

Esa forma de pensar es muy distinta a la de la Grecia clásica, basada en la concepción del espacio de representación como espacio extenso, con el consiguiente prerequisite de perceptibilidad sensible para objetos, procedimientos y condiciones (*diorismoí*) en que la solución a un problema se tiene por existente o representable [16, p. 150]. La forma de racionalidad griega clásica se articula en torno a principios de causalidad y no contradicción, y el papel de la *abstracción* en ella es central. Para Lizcano, es clarificador el hecho de que los verbos *sustraer*, *abstraer* y *extraer* coinciden con el griego *aphairéd*: el que no se pueda extraer más de lo que hay justifica la ausencia de una conceptualización de lo negativo en esta matemática. Así, “para Euclides, una resta como ‘3 – 4’ es un absurdo, una operación imposible [...] porque restar es extraer, abstraer. Si yo tengo tres y de esos tres saco uno, saco dos ... saco tres, ya me he quedado sin nada, ¿de dónde saco el cuarto?” [17, p. 4].

Comparando ambas formas de operar, Lizcano apunta que “cada una de ambas restas ha sido una operación metafórica, antes que matemática, y cada una de ambas metáforas –la extractiva y la opositiva– arraigan en lo más profundo de cada una de ambas culturas, son previas y manantiales de sus respectivas formas de pensar” [17, p. 4]. “Frente a la verticalidad, ascendente o descendente, del pensamiento por deducción o inducción propia de la *episteme* griega, pretendemos mostrar la horizontalidad del modelo de pensar analógico, el trasiego de metáforas, semejanzas y equivalencias característico de la *episteme* china; frente a esa voluntad griega de clausura, de una definición precisa que excluya todos los sentidos menos uno, esa otra apertura a una radical polisemia, a situar cada concepto/objeto en una encrucijada de sentidos” [16, pp. 16-17].

Por último, la obra de Diofanto se analiza en el contexto histórico del alejandrinismo tardío (s. III d.C.), en el que la tradición aristotélica-eucléida se resquebraja. Esta crisis del ideal clásico posibilita la emergencia de nuevos significados, entrelazados en parte con otras tradiciones como la egipcia o la babilónica: la *Aritmética* de Diofanto “expresa de modo ejemplar una lucha individual por encontrar un sentido, escarbando entre restos que ya lo han perdido y organizando materiales a los que aún no se les ha otorgado. Es en esa intersección de imaginarios colectivos, cada uno con su propia inercia y su propia coherencia, donde Diofanto acierta a balbucear ciertas formas efímeras de negatividad matemática. Y lo hace al modo del *bricoleur* del que habla Lévi-Strauss, ensamblando fragmentos heterogéneos, residuos de diferentes discursos, ensayando verter significados aún sin concepto en significantes ya vacíos de contenido” [16, p. 17]. El derrumbarse del marco conceptual clásico posibilita el

surgimiento de las primeras formas de negatividad en la matemática occidental.

Las ideas someramente expuestas en los párrafos anteriores pretenden servir de ejemplo, en estas páginas, sobre cómo el análisis histórico, hermenéutico, simbólico y también matemático¹ desarrollado en el libro de Lizcano sustenta la tesis central de su estudio, esto es, la posibilidad de “pensar los objetos matemáticos como histórica y culturalmente determinados, al tiempo que como reveladores de los cortes y tránsitos en las formas de racionalidad,” con el ánimo de discutir “cómo construye cada sociedad la barra que escinde –y enlaza– lo posible y lo imposible, [...], lo verdadero y lo falso” [16, p. 16]. Esta acertada ubicación de las matemáticas (o de algunas matemáticas) en su contexto cultural permitiría desmontar una visión de la matemática como única y universalmente verdadera. Un enunciado muy claro de ese talante puede encontrarse en [17, p. 2], donde Lizcano afirma que “es urgente y necesario desenmascarar la mentira de una sola matemática [...] como siempre lo será hacerlo con cualquier discurso que se presente como discurso de la verdad.”

Esa voluntad desacralizadora o desmitificadora, impecable desde mi punto de vista frente a un platonismo “ingenuo”, encuentra no obstante una limitación importante: la visión que los propios matemáticos o muchos de ellos tienen de su actividad dista mucho de ese “edificio perfecto” que pretende desmontarse. El planteamiento anterior entra en cuestión si las matemáticas no reclaman para sí una “esencia” única y universalmente verdadera; no habría entonces mentira que desenmascarar. Podría haberla en cierta forma de escribir la historia de las matemáticas, forma que se ilustra perfectamente en algunas citas recogidas en [16] (pp. 41, 211-214); pero pueden mostrarse, como veremos posteriormente, otras formas de escribir la historia de las matemáticas ciertamente alejadas de tal perspectiva.

Estas ideas se estructurarán en las secciones siguientes a partir de una reflexión concreta recogida en [16] (p. 46). Remitiéndose a Nietzsche, Lizcano plantea que el olvido de las metáforas originarias de los conceptos matemáticos sustenta dos mitos, a saber: el mito de la verdad sin tiempo ni lugar de las matemáticas, y el mito de su independencia de los orígenes. Las secciones que siguen están orientadas a plantear que, desde cierto punto de vista, ambos mitos requieren una discusión más amplia. Pretendemos formular algunas preguntas en esta dirección y aportar algunas ideas desde la propia perspectiva de las matemáticas.

En primer lugar, ¿cuáles son los grupos en los que operan estos mitos? En la actualidad, ambas creencias pueden estar arraigadas en amplios colectivos sociales, pero no en el quehacer de (buena parte de) los matemáticos. Argumentaremos que las propias matemáticas “se han peleado” duramente en el siglo XX con la propia idea de verdad, en sentido filosófico y también en sentidos técnicos que se le han dado a tal término desde las matemáticas mismas.

Por otra parte, si, como se apuntaba anteriormente, esta mi(s)tificación encierra un *enmascaramiento*, con la connotación de engaño que esto parece

¹La formación matemática de Lizcano define una notable diferencia con otros autores como p.ej. Latour y Woolgar, que en [14] adoptan un punto de vista deliberadamente *extraño* al objeto que estudian.

expresar, ¿quién pone la máscara?² ¿En qué medida las matemáticas *se presentan* como discurso de la verdad? A tal mistificación contribuye una cierta forma entre muchas posibles de escribir la historia de las matemáticas; por otra parte, la “pelea” anteriormente referida (o, con mayor generalidad, la crisis de fundamentos del siglo XX) puede verse precisamente como una lucha por desembarazarse de esa máscara. Plantearemos además que la independización de los orígenes se puede entender en el quehacer matemático contemporáneo como un acto deliberado, pero no orientado a hacer una reconstrucción racional a posteriori de ese pretendido edificio perfecto. Combinando las tres preguntas anteriores, y sin querer caer en lecturas conspirativas, cabría por último discutir si en los “enmascaradores” operan los propios mitos arriba referidos, lo que les haría inconscientes de su propia mentira.

No debe entenderse esta discusión como una reacción ante la “pureza amenazada” de quienes profesan una “fe en la ciencia” [16, p. 213], sino como una contribución a esa contextualización de las matemáticas aportando un punto de vista desde las matemáticas mismas: desde esta perspectiva, no hay “pureza” que amenazar, dada la relatividad a los principios de partida (es decir, la verdad con tiempo y lugar) asumida por los propios matemáticos. Frente a lo que se plantea en [18], nótese también que este “hablar de sí mismas” no excluye que las matemáticas puedan por supuesto estar de distintas formas afectadas (¿“contaminadas”?) por lo real y por intereses sociales y políticos.

3 El mito de la verdad sin tiempo ni lugar de las matemáticas

¿Mito para quién? Entendiendo por “mito” una “cosa a la que se le atribuyen cualidades o excelencias que no tiene”, en una de las acepciones de la RAE³, tal atribución de verdad sin tiempo ni lugar difícilmente sería hecha por un matemático, en la medida en que la verdad lo es relativamente a unos supuestos –axiomas– y a unas formas de razonar implícitas en una lógica –p.e. algo es “absurdo” frente a unos supuestos–. Fuera de una visión platónica y teleológica de las matemáticas, en la que ciertos objetos estarían “en algún sitio” esperando a ser descubiertos, esta relatividad define a priori una diferencia sustancial entre las matemáticas y otras disciplinas como la física, la química o la biología, en las que el conflicto con la “realidad” es, dicho simplemente, mucho más palpable.

La pérdida de la verdad de las matemáticas, en el sentido de pérdida de la capacidad de hacer afirmaciones verdaderas sobre algún tipo de “realidad” externa, está en gran medida asumida en las matemáticas del S. XX: es muy revelador el cuestionamiento de la verdad de la aritmética hecho por Helmholtz en el último tercio del S. XIX [12, 43.4]. Para el círculo de Viena, los enunciados de las matemáticas y de la lógica son *analíticos*, es decir, se reducen

²Véase, en este sentido, la triple mistificación asociada al autor, al lector y a las sucesivas reelaboraciones formales planteada en [16, p. 54].

³De nuevo, posiblemente simplificando en exceso: véase el análisis de Schuster de la “operación mitologizante” en los textos de Descartes citado por Lizcano [16, p. 31].

a transformaciones tautológicas dentro de un lenguaje y carecen, por tanto, de un contenido informativo acerca del mundo [5]. Para el matemático, “dos más dos son cuatro” no es una verdad universal, sino algo que se deriva de la noción de suma en los números naturales; igualmente, el teorema de Pitágoras es una propiedad implícita en la noción de triángulo rectángulo en la geometría plana.

Es importante observar que, de hecho, el propio significado de “verdad” ha sido indagado en el seno de las matemáticas y de la lógica, en el contexto de la preocupación de los propios matemáticos sobre los fundamentos de su actividad, como prueban los trabajos de la escuela formalista, el constructivismo, los desarrollos de la lógica formal, las axiomáticas modernas, etc. [10, 12]. Muchos matemáticos tienen presentes las limitaciones y dificultades que ofrecen las matemáticas y pocos suscribirían la idea de ese “edificio perfecto”: R. Fraïssé propone el nombre de “complejo de Descartes” para hacer referencia a la ilusión de tal edificio fundamentado en la lógica [6]. Las limitaciones del logicismo son recogidas por Kline en estos términos: “la formalización del programa logicista no parece representar la matemática en ningún sentido real. Nos presenta la cáscara pero no la sustanciosa semilla” [12, 51.5].

Asimismo, el hecho de que el programa formalista da cuenta de lo encontrado pero no del encontrar, en la medida en que la axiomatización es *a posteriori*, como apunta el propio Lizcano remitiéndose a Cassirer [16, p. 52], da también cuenta de las dificultades que la axiomatización encuentra para fundamentar una noción filosófica más modesta de la verdad matemática. En el prólogo a su libro *Das Kontinuum*, de 1918, Hermann Weyl escribe lo siguiente [20, p. 139]: “En este escrito no se trata de revestir la ‘roca segura’ sobre la que se funda el edificio del análisis con una armazón externa de madera, al modo del formalismo, para al final asegurar al lector y a fin de cuentas a uno mismo: he ahí el verdadero fundamento. Aquí se defenderá más bien la opinión de que aquel edificio está, en buena medida, construido sobre arena. Creo poder reemplazar este terreno movedizo por puntales de solidez fidedigna; pero no son capaces de soportar todo aquello que hoy suele considerarse seguro. Renuncio al resto, porque no veo ninguna otra posibilidad.”

El platonismo al que se enfrenta el análisis de Lizcano queda, en mi opinión, sintéticamente de manifiesto en [19], cuando propone que “Más riguroso [...] sería asumir que el número no tiene una significación en sí...”. Por supuesto que hay otras conceptualizaciones o significaciones posibles del número, muchas de ellas desarrolladas en otras culturas, y que la noción de número en la matemática occidental contemporánea es una más y no puede aspirar a ningún tipo de universalidad ontológica. Pero tal conceptualización occidental, que podemos concretar en la axiomática de Peano de los números naturales, precisamente desprende al número de una significación “en sí” para definirlo *relacionalmente* y no en términos de ninguna supuesta esencia. La propuesta de Lizcano recogida al principio de este párrafo debe dirigirse, entonces, no tanto a la matemática occidental actual sino a ciertas interpretaciones o visiones en cierto modo superficiales de la misma.

De nuevo es importante destacar que las ideas anteriores no niegan el que amplios colectivos puedan suscribir la validez absoluta de la afirmación “dos

más dos son cuatro” o que “las matemáticas son universales”. Estas ideas tampoco reclaman el que las matemáticas puedan arrogarse en exclusividad el pronunciamiento sobre la noción de verdad. Aunque pueda parecer paradójico, las consideraciones anteriores apuntan, en parte, en la misma dirección desacralizadora de Lizcano, en la medida en que las propias matemáticas desmitifican esa presunción de verdad universal; el matiz diferencial reside en que no parece haber necesidad de desenmascaramiento, en el sentido planteado en la sección anterior.

4 El mito de la independencia de los orígenes

Lizcano analiza brillantemente cómo en el quehacer matemático “cada nuevo concepto redistribuye significados y reorganiza sentidos, remueve el suelo que alimentó a cuantos aparecen ahora relacionados con él y borra así cualquier rastro suyo. No dis-curso, sino re-curso, la matemática no tiene otra génesis que su génesis lógica” [16, p. 52]. Estudia también la acotación de sentidos en términos de sintaxis formal y la transformación de símbolo en *signo* asociada a la pérdida de la marca simbólica original. Este proceso de pérdida de significados está relacionado, desde su punto de vista, con el hecho de que “cualquier ciencia reescribe la historia de su hacerse en términos de hechos cerrados y afirmaciones limpias, borrando cualquier huella desde la que pueda rastrearse el temblor de su construcción” (p. 54). Desde esta perspectiva, las matemáticas no parecen ser ajenas a esa reconstrucción racional a posteriori.

Reconociendo el alcance de estas ideas, es importante destacar que esto es muchas veces *deliberado* y explícito en el caso de las matemáticas; en términos generales, el proceso de abstracción precisamente lo que persigue es captar las estructuras comunes en sistemas diversos. Así, la composición de permutaciones o la suma de números algebraicos tienen, aparte de sus muchas diferencias, unas propiedades compartidas: la noción de *grupo* refleja esa estructura común mediante la *definición* de un objeto abstracto que recoge esas propiedades; no es que la idea de grupo estuviera en algún lugar esperando a ser descubierta, sino que surge (como también podría no haber surgido, o haber surgido de otra forma, con otras propiedades y/o otros nombres) de la observación de ciertas regularidades en sistemas previamente definidos. A la ilusión de universalidad contribuye también el que en textos o en el ejercicio docente el camino se recorra frecuentemente en sentido inverso, introduciendo como punto de partida la definición abstracta de grupo para luego presentar las permutaciones o los números algebraicos como ejemplos particulares; pero esta no es sino *una forma* de presentar la teoría.

Ese proceso de abstracción evidentemente conlleva, de hecho de forma voluntaria y asumida, la pérdida de significados adicionales específicos de las permutaciones o de los números algebraicos. En ese terreno abstracto, el matemático se puede permitir clasificar de forma parcial o completa objetos como los grupos, las bifurcaciones, las singularidades, las variedades topológicas, etc., con la generalidad que esa misma abstracción posibilita. Es posible incluso

caracterizar disciplinas matemáticas como la geometría en términos de esas clasificaciones [11].

Desde esta perspectiva, la voluntad del matemático no es “adornarse de un halo protector” [16, pp. 15-16], no es *rehacer* sino *hacer* su teoría de forma cerrada y limpia, apuntando en el sentido opuesto al de la sociología en la medida en que ésta pretende, entre otras cosas, rastrear esos significados originarios concretos. Quizá esto constituya un factor más en la explicación de la aparente impermeabilidad de las matemáticas a los estudios de la ciencia y, más general, a las ciencias sociales. En la misma actividad del matemático (con los riesgos que esta generalización entraña) está la desposesión de sentidos concretos; por supuesto estas marcas simbólicas están ahí en su origen, pero es en muchas ocasiones la voluntad explícita del matemático desprenderse de ellas. Hilbert plantea en 1926 que los objetos del pensamiento matemático son los símbolos mismos; los símbolos son ahora la esencia y ya no representan objetos físicos idealizados [12, 51.7]

De hecho, esa “limpieza” responde a un espíritu concreto en la actividad matemática que se podría calificar como *minimalista*: muchas nociones resultan de abstraer un conjunto mínimo de propiedades del que se pueda deducir un resultado o en el que se pueda formalizar un concepto. Pueden ser ilustrativos en este sentido algunos desarrollos de la topología conjuntista en las primeras décadas del S. XX (véase p.e. [12, 50.2]): en 1906, Fréchet introduce la noción de espacio métrico, basado en la idea de *distancia*, que permite formalizar la noción de punto límite o punto de acumulación de un conjunto. La clave para esta formalización es la noción de *entorno* de un punto. Evidentemente, se pueden enunciar muchas propiedades de los entornos de un punto en un espacio métrico: el salto conceptual lo da Hausdorff cuando, en 1914, extrae *algunas* de esas propiedades de los entornos para definir, en un proceso de abstracción, los espacios topológicos⁴. Esas propiedades mínimas permiten también introducir la idea de punto límite (y muchas otras) en un contexto más general, desposeyendo a este contexto de otras propiedades específicamente vinculadas a la distancia. Esas otras propiedades son innecesarias para definir conceptos como el de punto límite, aunque puedan necesitarse para formalizar otras nociones (p.e., la de completitud).

Con este ejemplo se pretende mostrar una interpretación alternativa de esa “independización de los orígenes”, que resultaría de un proceso concreto dentro de una forma característica de hacer matemáticas, más que de una voluntad de ocultamiento de tales orígenes. Obsérvese también que esta forma de hacer matemáticas, vinculada nuevamente al quehacer occidental contemporáneo (al menos en algunas disciplinas), no reivindica que todas las matemáticas *se hagan así* ni, mucho menos, que *deban necesariamente* hacerse así.

El ejemplo anterior ilustra, por otra parte, que la génesis de muchos conceptos modernos es en buena medida interna a las matemáticas mismas. El impacto epistemológico del sustrato cultural en este contexto parece mucho más indirecto y se antoja más difícilmente discernible. Así, estudios análogos al interesante

⁴Más precisamente, lo que actualmente se denominan espacios topológicos T_2 .

análisis filológico del término *leĩpsis* (que Diofanto emplea para nombrar esa “falta” característica de lo que posteriormente se denominará como negativo [16, pp. 236 y ss.]) o al del origen de la expresión *raíz* cuadrada, posiblemente aportarían poco en relación a los significados técnicos de los conceptos modernos en las especializadas teorías en las que éstos se enmarcan, aun reconociendo las aportaciones en cuanto a motivaciones, interrelaciones, etc. que tales estudios pueden proporcionar.

En esta misma dirección, ideas como la de que “las matemáticas se construyen desde ese saber común que todos los moradores de una cultura compartimos” [16, p. 17] no se ajustan, a mi entender, a la complejidad que alcanza la matemática a partir del Renacimiento, en especial desde el siglo XIX, ni al nivel de especialización actual. Incidentalmente, el análisis de Lizcano se limita a tres periodos históricos muy concretos y en cierto modo remotos. De hecho, en el capítulo dedicado a Diofanto se apunta cómo la quiebra del ideal clásico en la que se enmarca su obra permite la emergencia de nuevos significados. Pero ya en ese momento histórico tal quiebra no consigue, hasta donde alcanzo a ver, dar cuenta de los conceptos *concretos* que emergen: el quitar el cerco a los caballos hace que se escapen, pero no explica adónde van.

5 Formas de escribir la historia de las matemáticas

La ilusión del edificio matemático universal e independiente de los orígenes es achacada por Lizcano, en parte, a cierta manera de escribir la historia de las matemáticas. Esta idea está expuesta con absoluta nitidez en [16, p. 212], donde se enfatiza lo desafortunado de la metáfora del *río de la historia*: las represas, aceleraciones y estancamientos de tal río parecen expresar una evolución dificultosa pero irrefrenable hacia un destino único. Lizcano argumenta que “no hay ningún cálculo algebraico que [...] hubiera permanecido estancado, avasallado por la Geometría, para luego ser liberado en estado puro por un Diofanto que [según Bourbaki] ‘no complicándose con representaciones geométricas de los «números» que considera, se ve llevado *de modo natural* a desarrollar las reglas del cálculo algebraico abstracto’ [...] ¿Qué naturalidad suprahistórica es ésa que permite a una mente en blanco captar de súbito la esencia de unas reglas puras?”.

Sin pretender defender la forma de escribir la historia de las matemáticas del colectivo Bourbaki, obsérvese que la contraargumentación de Lizcano *añade* unas connotaciones de *pureza* que no están presentes en el extracto de Bourbaki: esa pretendida pureza parece interpretar nuevamente una lectura platónica de las matemáticas por parte del historiador. En cualquier caso, y con independencia de esta discusión sobre el platonismo del libro de Bourbaki, la cuestión es que hay otras formas de escribir la historia de las matemáticas, mucho más sutiles, que deben ser tenidas en cuenta en una lectura *generalizada* de las matemáticas como discurso de la verdad.

Buena parte de esas otras visiones de las matemáticas se enmarcan en lo que Lizcano, remitiéndose a Foucault, perfila como una *arqueología de*

las matemáticas o del saber matemático, expresión con la que se manifiesta una voluntad de distanciamiento de esa historia de las matemáticas que, aparentemente centrada en los “meros hechos”, no deja de proyectar sobre éstos el sesgo de sus propias metáforas [16, p. 22]. En esta dirección, Lizcano se declara deudor de autores como Wittgenstein, Spengler, Foucault, Serres o Bloor (pp. 22-33).

La idea de que las matemáticas se presentan a las ciencias sociales casi sin excepción como discurso sagrado toma como punto de partida la siguiente cita de Serres, en relación a la “espontaneidad irreflexiva que suele caracterizar la concepción general de la historia de las ciencias” [16, p. 35]: “En el fondo esa espontaneidad tiene una doble raíz: la admiración beata, literalmente religiosa, aunque a veces justificada, hacia todo lo que se llama científico y que, por lo mismo, sigue siendo intocable, y simétrica adoración por la historia. Incluso si se pretenden ateos o liberados, nuestros contemporáneos sacrifican de buen grado ante estos dos altares o se inclinan ante esta doble jerarquía. [...] Son dos tabúes de nuestro tiempo. Por consiguiente, la historia espontánea de las ciencias se reduce a menudo a una historia sacra o más bien sacralizada.” [21, pp. 12-13].

Reconociendo nuevamente el valor de perspectivas como las de los autores arriba citados o la del propio Lizcano, es importante también destacar que las posibilidades no se agotan ahí. Aunque Lizcano evidentemente no sostiene que *todas* las historias de la matemática se escriban desde ese prisma purista, en su análisis apenas aparecen visiones “desacralizadas” de la historia planteadas desde las propias matemáticas. Así, la excepción de Kline figura en [15, /1, p. 130] como una de las “pocas historias heterodoxas”, y en [16] las propuestas que aparecen (como la de R. L. Wilder (pp. 47-48)) presentan evidentes limitaciones. A continuación se recogen tres breves muestras de otras visiones de (episodios concretos de) la historia de las matemáticas que, desde las matemáticas mismas, se alejan mucho del planteamiento platónico y universalista arriba referido.

La primera de ellas hace referencia a la idea de que, en el presunto edificio perfecto de las matemáticas, la lógica y la teoría de conjuntos proporcionarían los cimientos en los que se basaría el resto de la estructura. Pues bien, en su artículo [10] sobre la historia de la teoría de conjuntos (en el periodo 1870-1970) Kanamori plantea (p. 46) que “... la investigación matemática rebajaría gradualmente las visiones e iniciativas metafísicas iniciales con una avalancha de nuevos modelos, hipótesis y proposiciones, y *despojándose de su carga fundacional* la teoría de conjuntos devendría en un campo fascinante de las matemáticas donde versiones formalizadas de la verdad y la consistencia se convierten en objetos a manipular...” (la traducción y la cursiva son nuestras). La misma base de tal edificio epistemológico estaría como tal cuestionada desde dentro.

Desde otro punto de vista, y en relación a ese “atenerse a los meros hechos” aludido arriba, es interesante observar la forma en que Schappacher [20, p. 148] se refiere a la disputa entre Kronecker y Klein sobre las *consecuencias* del teorema del primero respecto a la inexistencia de resolventes uniparamétricas para la ecuación polinómica general de quinto grado. Schappacher enfatiza que, estando ambos matemáticos “plenamente de acuerdo respecto a los

hechos”, esta disputa ilustra “cómo la mera constatación de la coherencia y del consenso respecto a los hechos matemáticos pasa por alto el punto esencial.” El historiador sugiere que “para comprender la controversia, debería más bien realizarse el esfuerzo de emplear categorías psicológicas, sociológicas y de política disciplinar, a propósito de la comunidad de matemáticos en aquel tiempo.”

Finalmente, Aubin y Dahan Dalmedico, en su recorrido [1] por buena parte de la historia de los sistemas dinámicos y la teoría del caos desde los trabajos de Poincaré, plantean diversas cuestiones historiográficas, filosóficas y sociológicas que muestran un punto de vista muy alejado de esa forma teleológica y platónica de escribir la historia de las matemáticas que cuestiona Lizcano. Así, afirman que “el modelo de una *ciencia pura* que progresa autónomamente y –sólo a continuación y siguiendo la corriente– genera aplicaciones ha sido en gran medida abandonado por los historiadores de la ciencia” (p. 277, traducción nuestra). Estos autores hacen un interesante análisis sobre la forma de escribir la historia de la disciplina hecha por los actores principales de la misma, y en particular por Steve Smale. Indican que el camino conceptual que plantea Smale explica el origen de muchos conceptos matemáticos, pero que tal descripción constituye una reconstrucción epistemológica (p. 295) esencialmente interna (p. 299). Discuten también la emergencia de distintos conceptos en términos de la convergencia de varias disciplinas, que incluyen la mecánica de fluidos, la teoría topológica de sistemas dinámicos, la meteorología, la teoría de singularidades y otras procedentes de la física, la química y la computación. Puede verse que esta forma de escribir la historia está muy alejada de una visión purista y platónica de las matemáticas.

6 Conclusión

Las muestras extraídas de [1, 10, 20] en la sección anterior no excluyen otras que efectivamente defiendan ese modelo de la matemática única y perfecta al que alude Lizcano. Podría argumentarse, en este sentido, que los tres ejemplos anteriores constituyen casos aislados o poco significativos, pero esto parece poco sostenible a la vista de la afirmación extractada de [1] en el párrafo anterior. En cualquier caso, esto debería ser objeto de un estudio historiográfico en el que no pueden ignorarse diferentes puntos de vista que contribuyen también a desmitificar la pureza de las matemáticas, entre los cuales los tres recogidos en la sección 5 no son sino un botón de muestra. Algunos de estos puntos de vista proceden de los estudios sociales de la ciencia. Pero, como se ha tratado de ilustrar en las secciones 3 y 4, también desde las matemáticas mismas surgen argumentos que cuestionan el mito de su verdad universal y su pretendida pureza. La incorporación de estas perspectivas a las aportaciones simbólicas, hermenéuticas y culturales de estudios como el de Lizcano podría generar una muy fructífera visión social de las matemáticas y su historia.

Referencias

- [1] D. Aubin and A. Dahan Dalmedico, Writing the History of dynamical systems and chaos: *Longue durée* and revolution, disciplines and cultures, *Historia Mathematica* **29** (2002) 273-339.
- [2] J. R. Blanco, Guerras de la ciencia, imposturas intelectuales y estudios de la ciencia, *Revista Española de Investigaciones Sociológicas* **94** (2001) 129-152.
- [3] D. Bloor, *Conocimiento e imaginario social*, Gedisa, 1998.
- [4] N. Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza, 1976.
- [5] A. Diéguez, *Filosofía de la ciencia*, Universidad de Málaga, 2005.
- [6] R. Fraïssé, ¿Son las axiomáticas sólo un juego?, en R. Apéry *et al.*, *Pensar la matemática*, Tusquets, 1998.
- [7] J. M. Iranzo, Visiones del poder desde la sociología del conocimiento científico, en J. M. Iranzo *et al.*, *Sociología de la ciencia y la tecnología*, pp. 283-302, CSIC, 1995.
- [8] J. M. Iranzo y J. R. Blanco, *Sociología del conocimiento científico*, CIS/Universidad Pública de Navarra, 1999.
- [9] B. Jurdant (ed.), *Imposturas científicas*, Cátedra, 2003.
- [10] A. Kanamori, The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen, *The Bulletin of Symbolic Logic* **2** (1996) 1-71.
- [11] F. Klein, Consideraciones comparativas sobre las investigaciones geométricas modernas, Disertación, Universidad de Erlangen, 1872.
- [12] M. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza, 1992.
- [13] I. Lakatos, *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza, 1981.
- [14] B. Latour y S. Woolgar, *La vida en el laboratorio. La construcción de los hechos científicos*, 2^a ed., Alianza, 1986.
- [15] E. Lizcano, ¿Es posible una crítica del discurso matemático?/1, *Archipiélago* **2** (1989) 116-132; *ibid.* /2, *Archipiélago* **3** (1989) 123-153.
- [16] E. Lizcano, *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia*, Gedisa, 1993.
- [17] E. Lizcano, Ser/no ser y yin/yang/tao. Dos maneras de sentir, dos maneras de contar, *Congreso de Filósofos Jóvenes*, Valencia, 1996.
- [18] E. Lizcano, La ideología científica, *Nómadas* **0**, 1999.

- [19] E. Lizcano, Las matemáticas de la tribu europea: un estudio de caso, *2nd Intl. Conf. on Ethnomathematics*, Ouro Preto, Brasil, 2002.
- [20] N. Schappacher, Lo político en matemáticas: un intento de rastreo, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* **8.1** (2004) 129-157.
- [21] M. Serres (ed.), *Historia de las ciencias*, Cátedra, 2^a ed., 1998.
- [22] A. Sokal, Transgressing the boundaries: Towards a transformative hermeneutics of quantum gravity, *Social Text* **46/47** (1996) 217-252.
- [23] A. Sokal, A physicist experiments with cultural studies, *Lingua Franca* **6** (1996) 62-64.
- [24] A. Sokal, Papers on the “*Social Text* affair”, <http://www.physics.nyu.edu/faculty/sokal/#papers>
- [25] A. Sokal y J. Bricmont, *Imposturas intelectuales*, Paidós, 1999.

Estimados socios:

Os comento algunas noticias que pueden ser de vuestro interés. Recordad que podéis consultar esta información desde la página web de SEMA (www.sema.org.es).

1. Premio Richard Von Misses. Hace algunas semanas la sociedad alemana de matemática aplicada y mecánica (GAMM) falló el premio que concede anualmente al joven investigador. En esta edición el premio ha recaído en nuestro colega José Antonio Carrillo, propuesto para el premio por SEMA.

2. Premio ECCOMAS. Este año el premio a la mejor Tesis en métodos computacionales en ciencias aplicadas e ingeniería ha sido concedido a Gianluigi Rozza (EPFL, Lausanne, Switzerland).

3. XII Escuela Jacques-Louis Lions Hispano-Francesa. Os recuerdo que se celebrará en Castro Urdiales, del 18 al 22 de diciembre de 2006 (<http://www.ehu.es/escuelahispanofrancesacastro/>).

4. XX CEDYA 2007. El comité organizador ha abierto un plazo de propuestas de sesiones monográficas hasta el próximo 16 de Junio de 2006 (<http://www.us.es/cedya2007/>).

Un cordial saludo,

Carlos Castro.

Tipo de evento:	Curso
Nombre:	JORNADES D'INTRODUCCIÓ ALS SISTEMES DINÀMICS I A LES EDP'S (JISD2006)
Lugar:	Barcelona
Fecha:	del 19 al 23 de junio y del 10 al 14 de julio de 2006
Organiza:	Programa de Doctorado en "Matemática Aplicada" de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)
E-mail:	tere.m-searaupc.edu
WWW:	www.ma1.upc.edu/recerca/seminaris/JISD2006/indexjisd2006.html

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	XII ESCUELA JACQUES-LOUIS LIONS HISPANO-FRANCESA DE SIMULACIÓN NUMÉRICA EN FÍSICA E INGENIERÍA
Lugar:	Castro Urdiales, Cantabria
Fecha:	del 18 al 22 de septiembre de 2006
Organiza:	
Información:	Profesor Mikel Lezaun Iturralde
E-mail:	mikel.lezaun@ehu.es
WWW:	www.ehu.es/escuelahispanofrancesacastro

Tipo de evento:	Congreso
Nombre:	CONFERENCE ON MATHEMATICAL METHODS IN SCIENCE AND ENGINEERING (CMMSE2006)
Lugar:	
Fecha:	del 20 al 23 de septiembre de 2006
Organiza:	Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Rey Juan Carlos y Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Salamanca
E-mail:	conference.cmmse2006@urjc.es
WWW:	www.urjc.es/cmmse2006

Tipo de evento:	Curso
Nombre:	INTRODUCCIÓN A LA SIMULACIÓN MATEMÁTICA EN CIENCIA Y TECNOLOGÍA (SIMUMAT)
Lugar:	Madrid
Fecha:	del 3 al 7 de julio de 2006
Organiza:	Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid (UAM)
Información:	José Ramón Berrendero
E-mail:	joser.berrendero@uam.es
WWW:	www.simumat.es



Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

XII Escuela Jacques-Louis Lions Hispano-Francesa de
Simulación Numérica en Física e Ingeniería
 Castro Urdiales, 18-22 de septiembre de 2006



Cursos

Integración Geométrica

Jesús Sanz Serna, Universidad de Valladolid

Shape and topology structural optimization

Grégoire Allaire, École Polytechnique, Paris

Modelos y Algoritmos para problemas de localización y rutas

Elena Fernández Aréizaga, Universidad Politécnica de Cataluña

An introduction to the mathematical modelling of dispersed two-phase flows

Philippe Villedieu, ONERA, Université Paul Sabatier, Toulouse

Comité científico

Michel Bernadou
INRIA y Pôle Universitaire Léonard de Vinci, Paris

María Paz Calvo
Universidad de Valladolid

Tomás Chacón
Universidad de Sevilla

Miguel Escobedo
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

Luis Alberto Fernández
Universidad de Cantabria

Mikel Lezaun
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

Francisco Ortegón
Universidad de Cádiz

Luis Vega
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

Comité organizador

Responsables de la organización:

Michel Bernadou
Luis Vega

Comité organizador local:

Miguel Escobedo
Luis Alberto Fernández
Mikel Lezaun
Luis Vega

e-mail: mikel.lezaun@ehu.es



<http://www.ehu.es/escuelahispanofrancesacastro/>

Barceló Valcárcel, Juan Antonio

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* A: Harmónico. Problemas inversos – UNIV. POLITÉCNICA DE MADRID – E.T.S.I. Caminos – Dpto. de Matemáticas e Informática – Ciudad Universitaria; 28040 Madrid.
Tlf.: 913366766. *Fax:* .
e-mail: juanantonio.barcelo@upm.es

Barrio Gil, Roberto

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Métodos Numéricos para EDO's. Sistemas Dinámicos – UNIV. DE ZARAGOZA – Fac. de Ciencias – Dpto. de Matemática Aplicada – Plz. de San Francisco, s/n; 50009 Zaragoza.
Tlf.: 976762480. *Fax:* 976761140.
e-mail: rbarrio@unizar.es

Benita Bordes, José Manuel

Líneas de investigación: – UNIV. POLITÉCNICA DE CATALUNYA – ETSEIB – Dpto. de Matemática Aplicada I – Avda. Diagonal, 647; 08028 Barcelona.
Tlf.: 661128998. *Fax:* .
e-mail: jose.manuel.benita@upc.edu

González Pinto, Severiano

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Análisis Numérico en Ecuaciones Diferenciales – UNIV. DE LA LAGUNA – Fac. de Matemáticas – Dpto. de Análisis Matemático – C/ Astrofísico Francisco Sánchez, s/n; 38206 La Laguna.
Tlf.: 922318201. *Fax:* 922318195.
e-mail: spinto@ull.es
<http://pmap.unizar.es/~odes/Personal.htm>

Hernández Abreu, Domingo

Estudiante (Becario). *Líneas de investigación:* Análisis Numérico en Ecuaciones Diferenciales – UNIV. DE LA LAGUNA – Fac. de Matemáticas – Dpto. de Análisis Matemático – C/ Astrofísico Francisco Sánchez, s/n; 38206 La Laguna.
Tlf.: 922318201. *Fax:* 922318195.
e-mail: dhabreu@ull.es
<http://pmap.unizar.es/~odes/Personal.htm>

Herrero Debón, Alicia

Profesor Colaborador. *Líneas de investigación:* Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, relatividad, gravitación, teoría de control, álgebra lineal – UNIV. POLITÉCNICA DE VALENCIA – E.T.S. de Ingeniería del Diseño – Dpto. de Matemática Aplicada – Camino de Vera, s/n; 46022 Valencia.

Tlf.: 963877007. *Fax:* 963877189.

e-mail: aherrero@mat.upv.es

Lapazaran Izargain, Javier Jesús

Prof. Adjunto. *Líneas de investigación:* Elementos Finitos. Métodos Numéricos en Glaciología – UNIV. POLITÉCNICA DE MADRID – Ingeniería Informática – Dpto. de Matemática Aplicada, Inteligencia Artificial y Compiladores – C/ Ramiro de Maeztu, 7; 28040 Madrid.

Tlf.: . *Fax:* .

e-mail: javierlapazaran@iies.es

Martínez Finkelshtein, Andrei

Prof. Titular de Universidad. *Líneas de investigación:* Teoría de aproximación, polinomios ortogonales, análisis numérico, funciones especiales – UNIV. DE ALMERÍA – Fac. CC. Experimentales – Dpto. de Estadística y Matemática Aplicada – Ctra. de Sacramento, s/n; 04120 Almería.

Tlf.: 950015217. *Fax:* 950015167.

e-mail: andrei@ual.es

<http://www.ual.es/~andrei>

Pérez Rodríguez, Soledad

Prof. Asociado. *Líneas de investigación:* Análisis Numérico en Ecuaciones Diferenciales – UNIV. DE LA LAGUNA – Fac. de Matemáticas – Dpto. de Análisis Matemático – C/ Astrofísico Francisco Sánchez, s/n; 38206 La Laguna.

Tlf.: 922319071. *Fax:* 922319230.

e-mail: sperezr@ull.es

<http://pcmap.unizar.es/~odes/Personal.htm>

Direcciones útiles

Consejo Ejecutivo de SēMA

Presidente:

Juan Ignacio Montijano. (monti@unizar.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Facultad de Ciencias. Edificio de Matemáticas. Ciudad Universitaria s/n. 50016 Zaragoza. *Tel:* 976 761 120.

Secretario:

Carlos Castro Barbero. (ccastro@caminos.upm.es).

Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:* 91 336 6664.

Tesorera:

María Pilar Laburta Santamaría. (laburta@unizar.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Pol. Superior. Univ. de Zaragoza. Edificio Torres Quevedo. C/ María de Luna 3. 50018 Zaragoza. *Tel:* 976 762 006.

Vocales:

Rafael Bru García. (rbru@mat.upv.es)

Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S.I. Agrónomos. Univ. Politécnica de Valencia. Camí de Vera, s/n. 46022 Valencia. *Tel:* 963 879 669.

José Antonio Carrillo de la Plata. (carrillo@mat.uab.es)

Dpto. de Matemáticas. Univ. Autónoma de Barcelona. Edifici C. 08193 Bellaterra (Barcelona). *Tel:* 93 581 2413.

Javier Chavarriga Soriano. (chava@eup.udl.es).

Dpto. de Matemática. E.U. Politécnica. Univ. de Lleida. Avda. Jaume II, 69. 25001 Lleida. *Tel:* 973 702 777.

Inmaculada Higuera Sanz. (higuera@unavarra.es).

Dpto. de Matemática e Informática Univ. Pública de Navarra. Campus de Arrosadía, s/n. *Tel:* 948 169 526. 31006 Pamplona.

Pablo Pedregal Tercero. (Pablo.Pedregal@uclm.es).

Dpto. de Matemáticas. E.T.S.I. Industriales Univ. de Castilla-La Mancha. Avda. Camilo José Cela, s/n. 13071 Ciudad Real.

Ireneo Peral Alonso. (ireneo.peral@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 204.

José Javier Valdés García. (valdes@orion.ciencias.uniovi.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. de Oviedo. Avda. de Calvo Sotelo, s/n. 33007 Oviedo. *Tel:* 985 103 340.

Enrique Zuazua Iriondo. (enrique.zuazua@uam.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 368.

Comité Científico del Boletín de SēMA

Enrique Fernández Cara. (cara@us.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Alfredo Bermúdez de Castro. (mabermud@usc.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de Compostela. Campus Univ.. 15706 Santiago (A Coruña) *Tel:* 981 563 100.

Eduardo Casas Rentería. (eduardo.casas@unican.es).

Dpto. de Matemática Aplicada y C.C.. E.T.S.I. Ind. y Telec. Univ. de Cantabria. Avda. de Los Castros s/n. 39005 Santander. *Tel:* 942 201 427.

José Luis Cruz Soto. (jlacruz@uco.es).

Dpto. de Informática y An. Numérico. Univ. de Córdoba. Campus de Rabanales. Edificio C-2. 14071 Córdoba. *Tel:* 957 218 629.

José Manuel Mazón Ruiz. (Jose.M.Mazon@uv.es).

Dpto. de Análisis Matemático. Fac. de Matemáticas. Univ. de Valencia. Dr. Moliner, 50. 46100 Burjassot (Valencia) *Tel:* 963 664 721.

Ireneo Peral Alonso. (ireneo.peral@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 204.

Luis Ferragut Canals. (ferragut@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400 ext. 1522.

Juan Luis Vázquez Suárez. (juanluis.vazquez@uam.es).

Dpto. de Matemáticas, C-XV. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 935.

Luis Vega González. (mtpvegol@lg.ehu.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Aptdo. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

Enrique Zuazua Iriondo. (enrique.zuazua@uam.es).

Dpto. de Matemáticas. Fac. de Ciencias. Univ. Aut. de Madrid. Cantoblanco, Ctra. de Colmenar, km. 14. 28049 Madrid. *Tel:* 913 974 368.

Grupo Editor del Boletín de SĒMA

Luis Ferragut Canals. (ferragut@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400, ext. 1522.

Enrique Fernández Cara. (caraus.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Francisco Andrés Pérez. (franc@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400 ext. 1537.

M. Isabel Asensio Sevilla. (mas@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias Químicas. Univ. de Salamanca. Plaza de la Merced, s/n. 37006 Salamanca. *Tel:* 923 294 400 ext. 1537.

M. Teresa de Bustos Muñoz. (tbustos@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. E.T.S. Ing. Ind. de Béjar. Univ. de Salamanca. Avda. Fernando Ballesteros, 2. 37700 Béjar, Salamanca. *Tel:* 923 408 080 ext. 2263.

Antonio Fernández Martínez. (anton@usal.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. E. Politécnica Superior Zamora. Univ. de Salamanca. Avda. Requejo, 33. Campus Viriato. 49022 Zamora. *Tel:* 980 545 000 ext. 4459.

Responsables de secciones del Boletín de SĒMA

Artículos:

Enrique Fernández Cara. (caraus.es).

Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y An. Numérico. Fac. de Matemáticas. Univ. de Sevilla. Tarfia, s/n. 41012 Sevilla. *Tel:* 954 557 992.

Matemáticas e Industria:

Mikel Lezaun Iturralde. (mpleitm@lg.ehu.es).

Dpto. de Matemática Aplicada, Estadística e I. O. Fac. de Ciencias. Univ. del País Vasco. Apto. 644. 48080 Bilbao (Vizcaya). *Tel:* 944 647 700.

Educación Matemática:

Roberto Rodríguez del Río. (rr_delrio@mat.ucm.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Químicas. Univ. Compl. de Madrid. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid. *Tel:* 913 944 102.

Historia Matemática:

José Manuel Vegas Montaner. (JM_Vegas@ucm.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Ciencias Matemáticas. Univ. Compl. de Madrid.

Resúmenes de libros:

Fco. Javier Sayas González. (jsayas@posta.unizar.es).

Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior . Universidad de Zaragoza. C/María de Luna, 3. 50015 Zaragoza. *Tel:* 976 762 148.

Noticias de SĕMA:

Carlos Castro Barbero. (ccastro@caminos.upm.es).
Dpto. de Matemática e Informática. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos.
Univ. Politécnica de Madrid. Av. Aranguren s/n. 28040 Madrid. *Tel:* 91 336 6664.

Anuncios:

Óscar López Pouso. (oscarlp@usc.es).
Dpto. de Matemática Aplicada. Fac. de Matemáticas. Univ. de Santiago de
Compostela. Campus sur, s/n. 15782 Santiago de Compostela *Tel:*
981 563 100, ext. 13228.

Responsables de otras secciones de SĕMA**Gestión de Socios:**

María Pilar Laburta Santamaría. (laburta@unizar.es).
Dpto. de Matemática Aplicada. Centro Politécnico Superior. Univ. de Zaragoza.
Edificio Torres Quevedo. C/ María de Luna 3. 50018 Zaragoza. *Tel:* 976 762 006.

Página web: www.sema.org.es/:

J. Rafael Rodríguez Galván. (rafael.rodriguez@uca.es).
Dpto. de Matemáticas. Fac. de CC. EE. y Empresariales. Univ. de Cádiz. C/ Duque
de Nájera, 6. 11002 Cádiz. *Tel:* 956 015 478.

1. Los artículos publicados en este Boletín podrán ser escritos en español o inglés y deberán ser enviados por correo certificado a

Prof. E. FERNÁNDEZ CARA
Presidente del Comité Científico, Boletín SēMA
Dpto. E.D.A.N., Facultad de Matemáticas
Aptdo. 1160, 41080 SEVILLA

También podrán ser enviados por correo electrónico a la dirección

`boletin_sema@usal.es`

En ambos casos, el/los autor/es deberán enviar por correo certificado una carta a la dirección precedente mencionando explícitamente que el artículo es sometido a publicación e indicando el nombre y dirección del autor corresponsal. En esta carta, podrán sugerirse nombres de miembros del Comité Científico que, a juicio de los autores, sean especialmente adecuados para juzgar el trabajo.

La decisión final sobre aceptación del trabajo será precedida de un procedimiento de revisión anónima.

2. Las contribuciones serán preferiblemente de una longitud inferior a 24 páginas y se deberán ajustar al formato indicado en los ficheros a tal efecto disponibles en la página web de la Sociedad (<http://www.sema.org.es/>).

3. El contenido de los artículos publicados corresponderá a un área de trabajo preferiblemente conectada a los objetivos propios de la Matemática Aplicada. En los trabajos podrá incluirse información sobre resultados conocidos y/o previamente publicados. Se anima especialmente a los autores a presentar sus propios resultados (y en su caso los de otros investigadores) con estilo y objetivos divulgativos.

Ficha de Inscripción Individual

Sociedad Española de Matemática Aplicada SēMA

Remitir a: SEMA, Despacho 520, Facultad de Matemáticas,
Universidad Complutense. 28040 Madrid.
Fax: 913 944 607. CIF: G-80581911

Datos Personales

- Apellidos:
- Nombre:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: DNI/CIF:
- Fecha de inscripción:

Datos Profesionales

- Departamento:
- Facultad o Escuela:
- Universidad o Institución:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: Fax:
- Correo electrónico:
- Página web: <http://>
- Categoría Profesional:
- Líneas de Investigación:
-

Dirección para la correspondencia: **Profesional** **Personal**

Cuota anual para el año 2005

- Socio ordinario: 30 EUR. Socio de reciprocidad con la RSME: 12 EUR.
- Socio estudiante: 15 EUR. Socio extranjero: 25 EUR.

Datos bancarios

...de de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SĒMA (Sociedad Espa nola de Matemática Aplicada) sean pasados al cobro en la cuenta cuyos datos figuran a continuación

Entidad (4 dígitos)	Oficina (4 dígitos)	D.C. (2 dígitos)	Número de cuenta (10 dígitos)

- Entidad bancaria:
- Domicilio:
- C.P.: Población:

Con esta fecha, doy instrucciones a dicha entidad bancaria para que obren en consecuencia.

Atentamente,

Fdo.

Para remitir a la entidad bancaria

...de de 200..

Muy Sres. Míos:

Ruego a Uds. que los recibos que emitan a mi cargo en concepto de cuotas de inscripción y posteriores cuotas anuales de SĒMA (Sociedad Espa nola de Matemática Aplicada) sean cargados a mi cuenta corriente/libreta en esa Agencia Urbana y transferidas a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244
Bankinter
C/ Hernán Cortés, 63
39003 Santander

Atentamente,

Fdo.

Ficha de Inscripción Institucional

Sociedad Española de Matemática Aplicada SEMA

Remitir a: SEMA, Despacho 520, Facultad de Matemáticas,
Universidad Complutense. 28040 Madrid.
Fax: 913 944 607. CIF: G-80581911

Datos de la Institución

- Departamento:
- Facultad o Escuela:
- Universidad o Institución:
- Domicilio:
- C.P.: Población:
- Teléfono: DNI/CIF:
- Correo electrónico:
- Página web: **http://**
- Fecha de inscripción:

Forma de pago

La cuota anual para el año 2005 como Socio Institucional es de 150 EUR.
El pago se realiza mediante transferencia bancaria a

SEMA: 0128 - 0380 - 03 - 0100034244
Bankinter
C/ Hernán Cortés, 63
39003 Santander