תכונות גאומטריות מפתיעות - החקר, ההוכחה וההכללה שלהן

משה סטופל
אבי סיגלר
עידן טל

פרופ׳ משה סטופל

בוגר הטכניון בכל שלושת התארים.

מרצה בכיר לחינוך מתמטי במכללות להכשרת מורים, בהן שאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

פרסם מאמרים רבים בכתבי עת שונים בארץ ובחו״ל.

עוסק בחקר יופייה של הגאומטרייה ובמשימות מתמטיות לפיתוח החשיבה. בעבר ראש חוג למתמטיקה ומנהל בי״ס שש-שנתי.

ד״ר אבי סיגלר

בוגר ומוסמך במתמטיקה מטעם האוניברסיטה העברית בירושלים וד״ר להוראת מדעים מטעם הטכניון חיפה.

מרצה במכללת אפרתה, ירושלים ובשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

פרסם מאמרים רבים בחינוך המתמטי בארץ ובעולם.

עידן טל

בוגר תואר ראשון במנהל עסקים ושיווק במכללה למנהל. בעל תעודת הוראה למתמטיקה (על-יסודי) בסמינר הקיבוצים. סטודנט לתואר שני בטכנולוגיות בחינוך בסמינר הקיבוצים. תחומי עיסוק עיקריים: שילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה.

תקציר

נערך חקר דינמי של שתי תכונות גאומטריות מפתיעות שבכל אחת מהן ישנן תכונות שימור אחרות. התכונה הראשונה שייכת לשני מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר צלעות ובעלי קודקוד משותף אחד. נמצא שכל הישרים המחברים קודקודים מתאימים של שני המצולעים, נחתכים בנקודה אחת. נקודה זו היא נקודת החיתוך השנייה של המעגלים החוסמים את המצולעים. התכונה השנייה שייכת למצב שבו בין שני מעגלים זרים המשיקים לשוקי זווית, ובהם משולש שווה שוקיים המשיק לשני המעגלים כך שבסיסו על שוק זווית אחת וקודקוד הראש שלו על השוק השנייה – סכום הרדיוסים של המעגלים – שווה לגובה המשולש.

הקדמה - הטמעת שימוש בטכנולוגיה ממוחשבת להוראת גאומטרייה איקלידית

מאז ימי המתמטיקאים הקדמוניים ועד ימינו חלה התפתחות עצומה בכמות הידע בתחום גאומטרייה איקלידית. תחום זה בנוי מאקסיומות יסוד והמשכן במשפטים הבנויים זה על גבי זה כשכל משפט מציין תכונת שימור מאפיינת. הוכחות ופתרון בעיות בגאומטרייה נשענים על שימוש במשפטים שיש בהם הנמקות לנכונות של כל שלב בדרך אל ההוכחה או פתרון הבעיה. בכל מאות השנים שבהן נחקרה הגאומטרייה נוסחו משפטים רבים מאוד ואף בימינו מתגלים מפעם לפעם משפטים ותכונות חדשות, וכן הוכחות אחרות ומפתיעות למשפטים ידועים. פעילות ענפה של חקר תכונות גאומטריות מתרחשת בנקודות רבות של העולם הגלובלי.

לימוד הגאומטרייה מחייב הכנה ושימוש באיורים של צורות גאומטריות למיניהן, אך בשלושים-ארבעים השנים האחרונות בשל כל מיני סיבות דעכה יכולת התלמידים להשתמש בכלי השרטוט המסורתיים: עיפרון, מחק, סרגל, מחוגה, משולשים לסוגיהם ומד-מעלות. היום תלמידים מתקשים להעתיק צורות גאומטריות מלוח הכיתה או מספרי הלימוד וגם לצייר משולש על פי אורכי צלעותיו. דבר זה מקשה עליהם להתמודד עם פתרון משימות גאומטריות.

לדוגמה כאשר נטען לפני התלמידים שתכונה בלתי מוכרת קיימת במרובע מסוים, מספיק לעבוד על ציור אחד ולהשתדל להוכיח את הטענה. אולם כאשר מדובר על מרובע כלשהו הרי שההוכחה מסובכת יותר, כיוון שיש בה דוגמאות רבות של מרובעים: קמור, קעור, טרפז, מקבילית, מעוין, דלתון, מרובע חסום במעגל, מרובע חוסם מעגל. כאשר קיים קושי להוכחת התכונה במרובע הכללי ביותר, יש צורך להכין ציורים עבור כל הפעמים המסוימות המתאימות – דבר המקשה על התמודדות עם הבעיה.

כדי להתמודד עם הבעיה הנזכרת לעיל ועם קשיי הבנה של תכונות גאומטריות, מחקרים בחינוך מחפשים דרכים לשפר את איכות ההוראה והלמידה, ומתוך כך הם מתמקדים גם בשילוב הטכנולוגיה בהוראה, ובעיקר בטכנולוגיה הממוחשבת המאפיינת תחומים רבים בחיי היום-יום. הכלי הטכנולוגי הממוחשב עשוי למשוך את תשומת ליבו של הלומד באמצעות היכולת שלו להציג אובייקטים מתמטיים הצגה דינמית ולתת משוב למשתמש במהלך פתרון בעיות ודיון בנושאים למיניהם. למידה המשלבת שימוש בתוכנה דינמית מאפשרת ללומדים לגלות מודלים מתמטיים, ייצוגים מגוונים וקשרים בין תיאורים גרפיים וצורות גאומטריות למושגים המתמטיים. בלמידה באמצעות הכלי הטכנולוגי התלמידים יכולים לתאר טוב יותר מושגים מתמטיים לעומת הוראה שאינה משלבת כלי טכנולוגי.

בעידן שלנו עומד לרשות החוקרים כלי ממוחשב שמאפשר להעלות השערות ובדיקתן מייד, בלי צורך להשתמש בכלי השרטוט המסורתיים, ובו כל שינוי, אף הקטן ביותר, מחייב הכנת איור חדש ולעיתים נדרשים גם חישובים מתמטיים.

השימוש בטכנולוגיה ממוחשבת מאפשר לבדוק מבחינה חזותית את נכונות ההשערה, אך אין להסתפק בכך ויש להוכיח אותה כמקובל במתמטיקה, בליווי ההנמקות הנדרשות (Leung, 2008; Martinovic & Manizade, 2014; Oxman & Stupel, 2018; Stupel, Sigler, & Tal, 2018; Wassie & Zergaw, 2018).

נתאר וננתח חקירת בשילוב תוכנה גאומטרית דינמית (DGS), של שתי בעיות גאומטריות שבהן מופיעות תכונות שימור מפתיעות ומעניינות (Ben-Chaim, Katz, & Stupel, 2016), עם יכולת להגיע להכללה. החקירה נבדקה בדיקה מאתגרת לעומק, אך לא מתסכלת.

התכונה הראשונה שייכת לקווים הנחתכים בנקודה מסוימת

תלמידי תיכון וכמובן פרחי הוראה ומורים למתמטיקה מכירים צורות גאומטריות שבהן קווים מסוימים נחתכים בנקודה אחת. לתזכורת נציין כמה מהן:

א. שלושת הגבהים של משולש נחתכים בנקודה אחת.

ב. שלושת התיכונים של משולש נחתכים בנקודה אחת (מרכז הכובד של המשולש).

ג. שלושת חוצי-הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת (מרכז המעגל החסום בו).

ד. שלושת האנכים האמצעיים של משולש נחתכים בנקודה אחת (מרכז המעגל החוסם אותו).

ה. חוצי-הזווית של מרובע חוסם מעגל נפגשים בנקודה אחת (מרכז המעגל החסום).

ו. כל האנכים האמצעיים לצלעות של מצולע כלשהו החסום במעגל נפגשים בנקודה אחת (מרכז המעגל החסום).

ז. הישרים של המשכי שוקי טרפז והישר המחבר את נקודות האמצע של בסיסי הטרפז, נחתכים בנקודה אחת – משפט שטיינר (Stupel & Ben-Chaim, 2013).

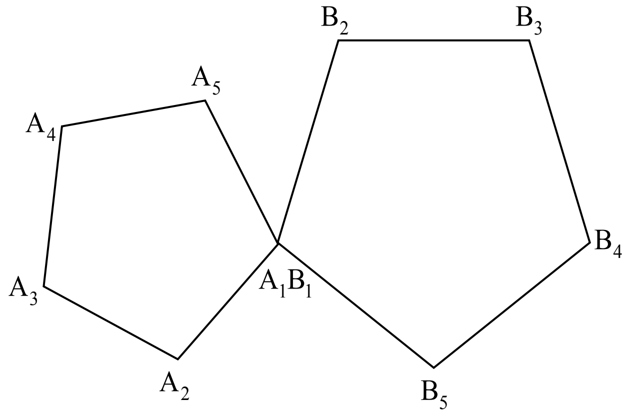
התכונה השנייה קשורה למעגלים המשיקים לשוקי זווית ומשיקים למשולש שווה שוקיים שכלוא ביניהם

גילוי תכונות גאומטריות לא מוכרות, לפחות לנו, מאפשר פעילות חקר רב-כיוונית לפרחי הוראה במתמטיקה בקורס מתקדם שעוסק בשילוב הטכנולוגיה ממוחשבת להוראת מתמטיקה. בכל שלב המחקר אפשר לשנות או להוסיף נתונים ולבדוק האם אכן התכונות המיוחדות נשמרות.

תכונה ראשונה

תכונת שימור גאומטרית מעניינת וההוכחה שלה – מצולעים משוכללים מחוברים בקודקוד אחד

בפעילות נמצאה תכונה מעניינת הקשורה לשני מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר של צלעות מחוברים זה לזה בקודקוד משותף. נמצא שקווים מתאימים נחתכים בנקודה אחת.

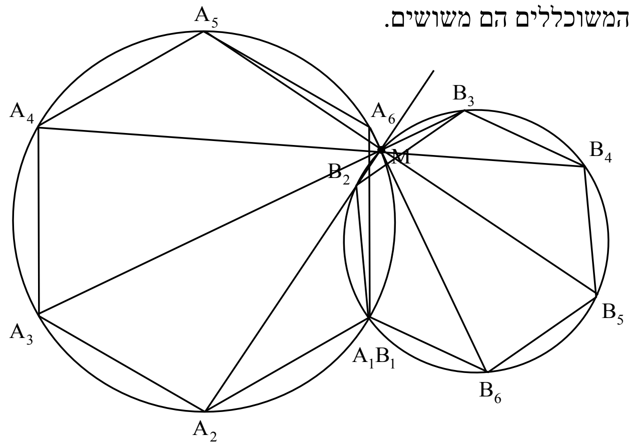


איור 1

נתונים שני מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר של צלעות, אך שונים באורך הצלעות שלהם. הם אינם חותכים זה את זה פרט לקודקוד משותף אחד, כנראה באיור 1, שבו המצולעים הם מחומשים משוכללים.

את הקודקודים של המצולעים מסמנים באותיות ובמספרים עם כיוון השעון, כאשר הקודקוד המשותף מסומן ב-A1 או ב-B1, ושאר הקודקודים של כל אחד מהמצולעים מסומנים ב- A2, A3, ... ,An או ב-B2, B3, ... ,Bn, כאשר n הוא מספר הצלעות של המצולע.

מאחר שמדובר במצולעים משוכללים, הרי שאפשר לחסום את כל אחד מהם במעגל. מעגל החסימה עובר בנקודה המשותפת לשני המצולעים $\langle A_1B_1 \rangle$ ונחתך בנקודה אחרת שמסומנת ב-M (ראו איור 2). מתברר שכאשר מחברים בישרים כל זוג קודקודים בעלי אותו מספר (A_k, B_k), הרי שכולם עוברים בנקודת החיתוך השנייה של המעגלים – הנקודה C, כנראה באיור 2 שבו המצולעים המשוכללים הם משושים.



איור 2

תיאור המשימה והמתודולוגיה שלה

בשלב הראשון התבקשו הסטודנטים להכין שרטוט של שני משושים משוכללים בעלי קודקוד משותף בעזרת הכלים המסורתיים: עיפרון, סרגל ומחוגה, על פי הידע שרכשו בקורס "בניות גאומטריות".

עם העברת הישרים בין הקודקודים המתאימים של שני המשושים, גילו הסטודנטים שאכן קיימת התכונה שכל הישרים עוברים בנקודת החיתוך השנייה של המעגלים החוסמים את המשושים. אכן תכונה מפתיעה.

בשלב השני ניתן לסטודנטים יישומון ג'אוג'ברה שיוצר שני מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר של צלעות ויש להם קודקוד משותף.

היישומון מאפשר את הפעילויות האלה:

א. יש לו סרגל המאפשר לשנות את מספר הצלעות n בתחום $n\leq8\geq3$.

ב. בכל מצולע קיים קודקוד שאפשר לגרור וכך לשנות את אורך צלעותיו.

ג. ביישומון מופיעים הקווים המחברים את הקודקודים המתאימים של שני המצולעים.

ד. מצולע אחד קבוע ואת המצולע השני אפשר לסובב סביב הקודקוד המשותף. אפשר לסובב אותו כך שיתלכד פנימית או חיצונית עם צלע של המצולע הראשון, שיתלכד פנימית עם שתי צלעות של המצולע הראשון, שחלקו יהיה תוך המצולע הראשון וחלקי האחר יהיה מחוץ למצולע. כמובן, המצב הראשון הוא שמצולעים חיצוניים אחד לשני פרט לקודקוד המשותף.

ה. קיים לחצן המאפשר לבטל את הצגת המעגלים החוסמים את המצולע. כאן רואים שעבור כל המצולעים והמצב ההדדי שלהם, הישרים שמחברים קודקודים מתאימים, נחתכים בנקודה אחת.

אל היישומון מגיעים בקישור הזה:

Link 1: **https://www.geogebra.org/m/zmcsucxx**

בפעילות קצרה עם יישומון נמצא שהתכונה הגאומטרית המפתיעה של חיתוך הישרים בנקודה אחת, שהיא נקודות החיתוך השנייה של המעגלים. כמו כן, התכונה קיימת כאשר שתי צלעות של המצולעים מתלכדות וגם כאשר נוצר שטח חפיפה בין שני המצולעים.

מובן שאין להסתפק בכלי הטכנולוגי הממוחשב כאישור מושלם לנכונות התכונה, ויש להוכיח אותה הוכחה מנומקת כמקובל במתמטיקה.

שלבי ההוכחה

התוכנה הדינמית הראתה שהתכונה קיימת עבור כל זוג מצולעים משוכללים בעלי אותו מספר של צלעות ובעלי קודקוד משותף. כמו כן, התכונה קיימת כאשר שתי צלעות של המצולעים מתלכדות וגם כאשר נוצר שטח חפיפה בין שני המצולעים.

מובן שאין להסתפק בראייה זו ויש להוכיח את התכונה בליווי הנמקות, כפי שמקובל במתמטיקה.

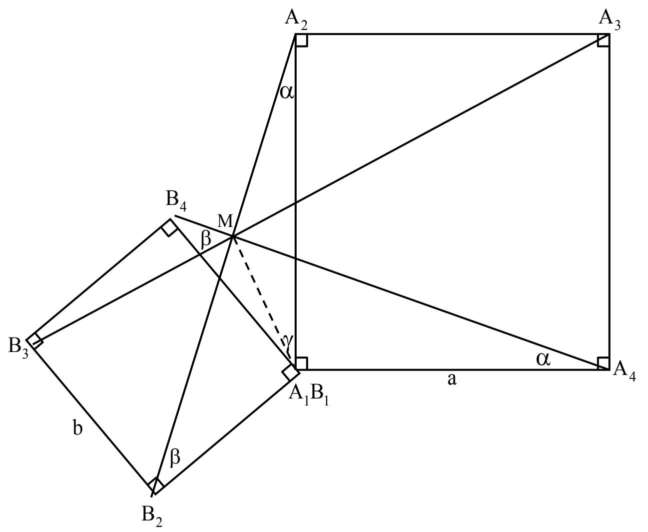
בשלב הראשון תוצג הוכחה עבור שני ריבועים בעלי קודקוד משותף, כנראה באיור 3.

מסמנים ב- γ את הזווית שבין שני הריבועים- $\angle A_2A_1B_4$.
מעבירים את הישרים A_2B_2 ו- A_4B_4 הנחתכים בנקודה M.

יש להוכיח שהישר A_3B_3 עובר בנקודה M.

המשולשים $\Delta A_2A_1B_2$ ו- $\Delta A_4A_1B_4$ חופפים לפי צ.ז.צ.

מהחפיפה נובע: $\angle A_2B_2A_1 = \angle A_2B_4A_1 = \beta$.



איור 3

מאחר שמהנקודות B_2 ו-B_4 רואים את הקטע MA_1 באותה זווית β, הרי שעל פי משפט ידוע, בנקודות B_4, M, A_1, B_4, עובר מעגל. המעגל שעובר בשלוש מהנקודות של הריבוע $B_1B_2B_3B_4$ חייב לעבור גם בקודקוד B_3. מכאן נובע: $\angle B_2MB_3 = 45^\circ$ (זווית היקפית הנשענת על $\frac{1}{4}$ מקשת המעגל). לפי אותם הנימוקים: $\angle B_2A_2A_1 = \angle B_4A_4A_1 = \alpha$.

גם מהנקודות A_2 ו-A_4 רואים את הקטע MA_1 באותה זווית α, ולכן גם בנקודות A_4, A_1, M, A_2 עובר מעגל, וגם הנקודה A_3 נמצאת עליו. מכאן: $\angle A_3MA_4 = 45^\circ$.

כאמור, ערכי הזוויות: $\angle B_2MB_3 = \angle A_3MA_4 = 45^\circ$, ולכן אלו שתי זוויות קודקודיות, ומכאן הישר A_3B_3 נחתך גם הוא עם שני הישרים האחרים בנקודה M שבה עוברים שני המעגלים המקיפים את כל אחד מהריבועים.

תכונה שימור מעניינת שקיימת היא:

$$(A_2B_4)^2 + (A_4B_2)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

כאשר a ו-b הם אורכי הצלעות של הריבועים. את תכונת השימור אפשר להוכיח בכל מיני דרכים. דרך פשוטה להוכחת התכונה היא שימוש במשפט הקוסינוסים במשולשים $\Delta A_2A_1B_4$ ו- $\Delta B_2A_1A_4$. תכונה זו נכונה לכל מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה.

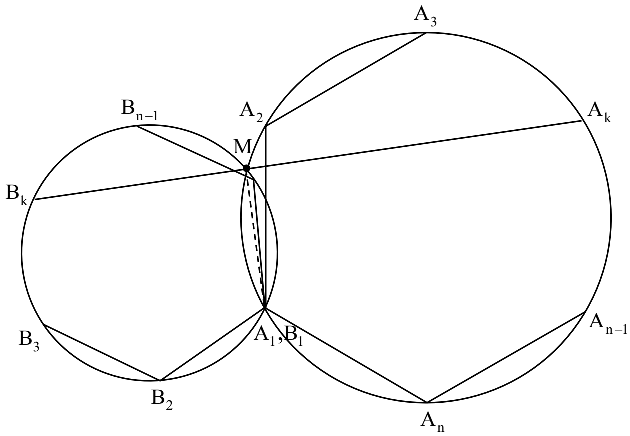
כאן המקום לציין שהמקרה של שני ריבועים בעלי קודקוד משותף שייך למה שידוע בשם: Vecten Configuration (Alsina & Nelsen, 2011). בקונפיגורציה זו מדובר על משולש כלשהו שעל צלעותיו בנו כלפי חוץ ריבועים. לקונפיגורציה זו יש כמה תכונות מעניינות שאחת מהן היא ששלושת המשולשים הנוצרים מחיבור שני קודקודים של ריבועים סמוכים עם קודקוד המשולש המשותף לשניהם, הם בעלי שטחים שווים וגם שווים לשטח המשולש המקורי. כשגוררים את כל אחד מקודקודי המשולש משתנים אורכי צלעותיו אך נשמר השוויון בין שטחי המשולשים.

אל היישומון המתאר את Vecten Configuration אפשר להגיע בקישור הזה:

Link 2: **https://www.geogebra.org/m/xn2e5ejz**

הוכחה כללית שהמיתרים המתאימים נחתכים בנקודת החיתוך השנייה של המעגלים החוסמים את המצולעים

נתונים שני מצולעים בעלי n צלעות, שקודקודיהם: $A_1, A_2, \dots, A_n$ ו-$B_1, B_2, \dots, B_n$, כאשר לשני המצולעים ישנו קודקוד משותף $A_1=B_1$, כנראה באיור 4.



איור 4

כיוון שמדובר במצולעים משוכללים, הרי שכל אחד מהם חסום במעגל מתאים. שני המעגלים נחתכים בקודקוד המשותף $A_1=B_1$ ובנקודה אחרת M. A_1M הוא המיתר המשותף לשני מעגלי החסימה.

יש להוכיח שכל אחד מהישרים A_KB_K (המחברים קודקודים מתאימים) עוברים בנקודה M.

הוכחה

$\angle A_kMA_1 = \frac{180°}{n}(k-1)$ זווית היקפית הנשענת על הקשת $A_1A_2A_3 \dots A_k$.

$\angle B_kMB_1 = 180° - \frac{180°}{n}(k-1)$ זווית היקפית הנשענת על הקשת $B_1B_nB_{n-1} \dots B_k$.

מכאן סכום הזוויות: $\angle A_kMA_1 + \angle B_kMB_1 = 180°$, כלומר שלוש הנקודות A_k, M, B_k נמצאות על קו ישר.

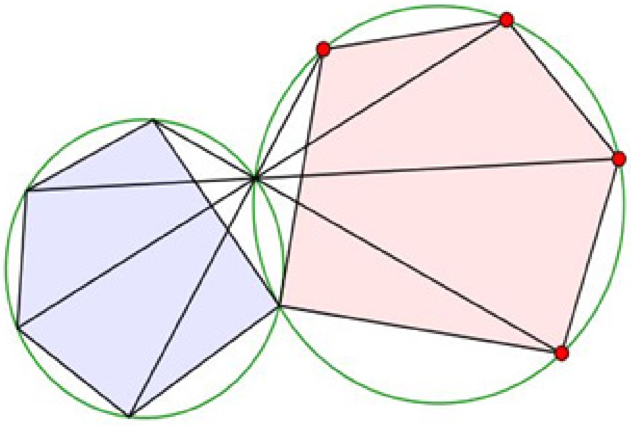
מסקנה: כל הישרים A_kB_k (עבור $k \neq 1$) עוברים בנקודה M.

שאלה

האם התכונה של חיתוך הישרים המתאימים בנקודת החיתוך השנייה של המעגלים נכונה גם עבור מצולעים דומים שאינם משוכללים?

מדובר על מצולעים שאינם משוכללים אך חסומים במעגלים. במצולעים אלו יחס הצלעות המתאימות כיחס שבין הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המצולעים ומובן שהזוויות המתאימות שוות.

בעזרת יישומון מתאים רואים שהתכונה נשמרת עבור מצולעים דומים שאינם משוכללים. בתמונה 1 הלקוחה מצג המחשב רואים שהתכונה נשמרת עבור מחומשים דומים שאינם משוכללים. בעזרת יישומון מתאים רואים שהתכונה נשמרת עבור מצולעים דומים שאינם משוכללים. בתמונה 1 הלקוחה מצג המחשב, רואים שהתכונה נשמרת עבור מחומשים דומים שאינם משוכללים.



תמונה 1

אל היישומון הנזכר לעיל אפשר להגיע בקישור הזה:

Link 3: https://www.geogebra.org/m/tezyqxmp

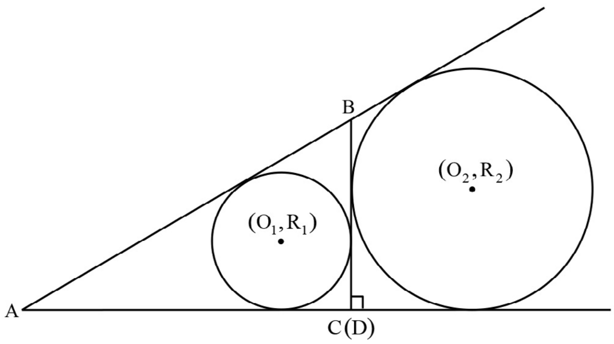
תכונה שנייה - תהליך דינמי המוביל לתכונת שימור מעניינת

שני מעגלים זרים המשיקים לשוקי זווית ומשיקים למשולש שווה שוקיים שיש ביניהם תהליך דינמי המוביל לתוכנת שימור מעניינת

ככל ש"חופרים" ומחפשים בעזרת הכלי הטכנולוגי הממוחשב, מתגלות תכונות גאומטריות חדשות. במהלך עיסוק בחקר בעיית סנגקו, אחת מאוסף של כמה מאות בעיות (Fukagawa & Pedoe, 1989), התגלתה לנו צורה גאומטרית שייתכן שאינה שייכת לאוסף הנזכר לעיל, אך היא בעלת תכונת שימור מעניינת.

תיאור המצב הראשוני

נתון משולש ישר זווית ABC ($\angle ACB = 90°$) ובו חסום המעגל (O_1, R_1) וחסום לו חיצונית המעגל (O_2, R_2) המשיק להמשכי הצלעות AB ו-AC ולניצב BC, כנראה באיור 5.



איור 5

טענה: $R_1 + R_2 = BC$

הוכחה: במשולש ABC קיים: $R_1 = \frac{AC+BC-AB}{2}$ (קשר ידוע בין רדיוס המעגל החסום במשולש ישר זווית לאורכי צלעותיו),

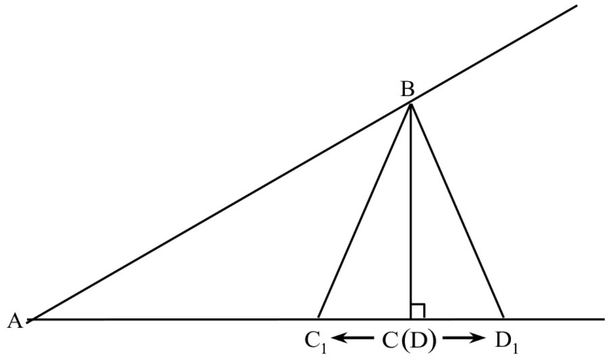
וגם: $R_2 = \frac{AB+BC-AC}{2}$, ולכן: $R_1 + R_2 = BC$.

תהליך דינמי

מסמנים את הנקודה C גם באות D ובתהליך דינמי הנקודה C נעה שמאלה עד לנקודה C_1 והנקודה D נעה ימינה עד לנקודה D_1, כך ש-$CC_1=DD_1$.

נוצרו המשולשים ABC_1 ו-ABD_1, כאשר נמצא ביניהם המשולש שווה השוקיים BC_1D_1, כנראה באיור 6.

כעת מתבררת תכונה מפתיעה מאוד.

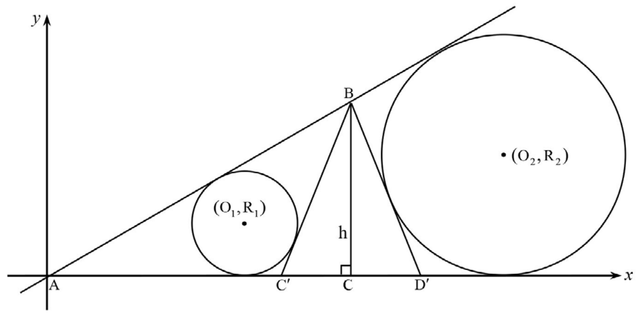


איור 6

תיאור התכונה

בראשית הצירים עובר קו ישר בזווית כלשהי עם ציר ה- x.

בונים שני מעגלים (O_1,R_1) ו- (O_2,R_2) שמשיקים לשוקי הזווית כאשר הם זרים זה לזה. באזור שבין שני המעגלים בונים משולש שווה שוקיים ΔBCD, שבסיסו על ציר ה- x, והוא משיק לשני המעגלים, וקודקוד זווית הראש שלו נמצא על הקו הנטוי, כנראה באיור 7.



איור 7

מתברר שעבור כל שני מעגלים כאלו, יהיה הגובה h של המשולש השווה שוקיים שווה לסכום הרדיוסים, R_1+R_2, שזוהי תכונת שימור מעניינת.

להדגמת התכונה הוכן יישומון ג'אוג'ברה שבו אפשר לשנות את הרדיוסים של המעגלים ואת הזווית שבין הקו הנטוי לציר ה- x.

בכל שלב מופיעים על צג המחשב הגדלים האלה:

$R_1=$, $R_2=$, $h=$, $R_1+R_2=$

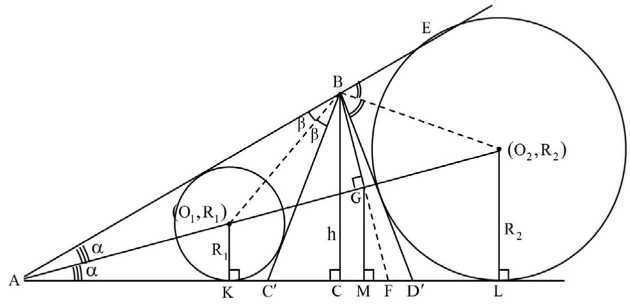
עבור כל מצב (רדיוסים וזווית נטייה), מקבלים: $h=R_1+R_2$

מתוך גרירת מרכזי המעגלים אפשר לשנות את הרדיוסים ומתוך גרירת הנקודה הכחולה שעל הקו הנטוי אפשר לשנות את הזווית שלו עם ציר ה- x.

אל היישומון אפשר להגיע בקישור הזה:

Link 4: **https://www.geogebra.org/m/ezkz2q7r**

הוכחה גאומטרית של התכונה



איור 8

סימון זוויות (ראו איור 8):

$$\angle BAC' = 2\alpha$$

$$\angle ABC' = 2\beta$$

מכאן: $\angle BC'D' = \angle BD'C' = 2\alpha + 2\beta$

זווית $\angle D'BE$ היא זווית חיצונית למשולש $\Delta ABC'$,

לכן: $\angle D'BC' = 4\alpha + 2\beta \;\Rightarrow\; \angle D'BO_2 = 2\alpha + \beta$

זווית $\angle BO_1O_2$ היא זווית חיצונית למשולש ΔBAO_1, ועל כן ערכה:

$\angle C'D'B = 180^\circ - 4(\alpha+\beta)$, $\angle BO_1O_2 = \alpha + \beta$

ולכן חישוב זוויות במשולש ΔO_1BO_2 נותן:

$$\angle BO_2O_1 = \alpha + \beta$$

ולכן: $BO_1 = BO_2$

מהנקודה B מעבירים אנך לישר המרכזים O_1O_2 שחותך אותו בנקודה G ובהמשכו את השוק של הזווית בנקודה F. מהנקודה G מורידים אנך ל-AD החותך אותו בנקודה M.

מנקודות מרכזי המעגלים מורידים אנכים O_1K ו- O_2L לשוק הזווית.

המרובע O_1O_2LK הוא טרפז ישר זווית שבו GM קטע אמצעים (BG הוא גובה לבסיס במשולש שווה שוקיים).

מכאן נובע: $GM = \frac{R_1+R_2}{2}$.

הישר AG הוא גובה וגם חוצה זווית במשולש ΔABF, ועל כן הוא גם תיכון במשולש.

מכאן נובע: $BG = GF$.

מכאן GM הוא קטע אמצעים במשולש ΔBNF:

$$GM = \tfrac{1}{2}h \;\Rightarrow\; h = 2GM = R_1 + R_2$$

לתכונה זו נמצאו גם עוד הוכחות שנמצאה להן הוכחה בעזרת טריגונומטריה מתוך חישוב זוויות ובזהויות.

הערות:

(א) התהליך הדינמי מסתיים כאשר הנקודה C' מתלכדת עם הנקודה A.

במקרה זה $R_1=0$. בקלות אפשר להוכיח ש-$R_2=BC$.

(ב) בכל מצב של התהליך הדינמי, מיקום מרכז הקטע O_1O_2

נשאר קבוע וזאת משום ש-$BC=R_1+R_2$, לכן מרכז הקטע יימצא במרחק $\frac{R_1+R_2}{2}=\frac{BC}{2}$ מ-AC ויימצא על חוצה הזווית A.

במשימה זו ישנן שלוש תכונות שימור ואלו הן:

א. $R_1+R_2=h$

ב. $BO_1=BO_2$

ג. הנקודה M, נקודת אמצע הקטע O_1O_2, נשארה קבועה כאשר אורכו של הקטע $C'D'$ משתנה.

את תכונות ב ו-ג אפשר לראות כאשר גוררים את הנקודה 'C בעזרת היישומון שאפשר להגיע אליו בקישור להלן:

Link 5: https://www.geogebra.org/m/nt68hq72

סיכום

במסגרת הפעילות נחקרו בעזרת תוכנה דימית שתי תכונות גאומטריות מפתיעות המכילות מספר תכונות שימור מעניינות. התכונה הראשונה עסקה בשני מצולעים משוכללים בעלי קודקוד משותף ונמצא שהיא נכונה עבור כל $n \geq 3$ ועבור כל זווית שבין המצולעים, בין שיש שטח חפיפה בין המצולעים בין לאו. כאשר המצולעים הם ריבועים התגלתה תכונת שימור אחרת על סכום ריבועי שני קטעים. כמו כן נמצא שהתכונה נכונה גם עבור מצולעים דומים שאינם משוכללים (אך חסומים במעגל).

התכונה השנייה עסקה בשני מעגלים זרים החסומים בשוקי זווית ומפריד ביניהם משולש שווה שוקיים המשיק לשניהם. גם כאן התגלו מספר תכונות שימור.

הפעילות נערכה עם מורים בפועל, וכן עם פרחי הוראה למתמטיקה בחינוך העל-יסודי. הרוב המכריע של המורים והסטודנטים ממליצים בחום למסד קורסים העוסקים בביצוע חקר של תכונות בתהליך הכשרה של פרחי הוראת מתמטיקה, וכן לשלב בתוכנית הלימודים בתיכון שיעורי חקירה, כדי להעלות את מוטיבציית התלמידים ללמוד מתמטיקה, להרחיב ולהעמיק את מאגר הידע.

רשימת מקורות

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2011). *Icons of mathematics: An exploration of twenty key images*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Ben-Chaim, D., Katz, S., & Stupel, M. (2016). Variance and invariance-focused instruction in dynamic geometry environments to foster mathematics self-efficacy. *The Far East Journal of Mathematical Education, 16*(4), 371-418. doi:10.17654/ME016040371

Fukagawa, H., & Pedoe, D. (1989). *Japanese temple geometry problems*. Winnipeg: The Charles Babbage Research Center.

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *Journal of Mathematics Learning, 13*, 135-157. doi:10.1007/s10758-008-9130-x

Martinovic, D., & Manizade, A. G. (2014). Technology as a partner in geometry classrooms. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology,* 8(2), 69-87.

Oxman, V., & Stupel, M. (2018). Various solution methods, accompanied by dynamic investigation, for the same problem as a means for enriching the mathematical toolbox. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(3), 442-455. doi:10.1080/0020739X.2017.1392050

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2013). A fascinating application of Steiner's Theorem for Trapezoids: Geometric constructions using straightedge alone. *Australian Senior Mathematics Journal (ASMJ), 27*(2), 6-24.

Stupel, M., Sigler, A., & Tal, I. (2018). Dynamic investigation of ellipses inscribed in a rectangle. *Journal of Progressive Research in Mathematics (JPRM), 13*(2), 2212- 2229.

Wassie, Y. A., & Zergaw, G. A. (2018). Capabilities and contributions of the dynamic math software, GeoGebra: A review. *North American GeoGebra*