מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 9

דצמבר 2022 - טבת תשפ"ג

שאנן האקדמית הדתית לחינוך

מחקר ועיון בחינוך מתמטי

גיליון 9

טבת תשפ"ג – דצמבר 2022

שמות הכותבים:
אביטל אלבוים-כהן | המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות.
רבקה אלקושי | הפקולטה לחינוך מוזיקלי, מכללת לוינסקי לחינוך, תל אביב–יפו.
יניב ביטון | החוג להוראת מתמטיקה, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
מרים בן יהודה | החוג להוראת מתמטיקה, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
רותי ברקאי | התוכנית לחינוך מתמטי לבית ספר יסודי, מכללת סמינר הקיבוצים, תל אביב–יפו; החוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי, אוניברסיטת תל אביב.
נח דנא-פיקארד | החוג לפיזיקה-מתמטיקה, המרכז האקדמי לב, ירושלים.
בועז זילברמן | המרכז לטכנולוגיה חינוכית, תל אביב.
מוניק חדד | החוג לחינוך מתמטי, חמדת הדרום – המכללה האקדמית לחינוך, נתיבות.
זהבית כהן | הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה.
שי כספי | החוג לחינוך מתמטי, אוניברסיטת חיפה.
נצה מובשוביץ-הדר | הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה.
שירלי מידז'נסקי | הפקולטה ללימודים מתקדמים בהוראת מתמטיקה ומדעים, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון.
דוד מלמד | החוג לחינוך מתמטי, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון.
טלי נחליאלי | החוג להוראת מתמטיקה, מכללת לוינסקי לחינוך, תל אביב–יפו.
אורית ניסן כהן | הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה.
אנה ספרד | החוג לחינוך מתמטי, אוניברסיטת חיפה.
אסתר עדי-יפה | בית הספר לחינוך, אוניברסיטת בר-אילן, רמת-גן.
תקוה עובדיה | החוג להוראת מתמטיקה, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון; החוג למתמטיקה, מכללה ירושלים.
ליבי עזריהו | הפקולטה לחינוך מוזיקלי, מכללת לוינסקי לחינוך, תל אביב–יפו.
ענבל קולושי-מינסקר | מובילת מרכז לעיצוב פדגוגיה חדשנית ולמידה דיגיטלית, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
סוזן קורי | התוכנית לחינוך כללי ומיוחד לגיל הרך, בית הספר ללימודים מתקדמים, מכללת טורו, ניו יורק.
אילה רביב | החוג למדעים, חמדת הדרום – המכללה האקדמית לחינוך, נתיבות.
קרני שיר | החוג להוראת מתמטיקה, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה; המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, חיפה.
ורדה שרוני | בית הספר לחינוך והחוג לחינוך מיוחד, המכללה האקדמית בית ברל.
עטרה שריקי | החוג להוראת מתמטיקה, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, קריית טבעון.

עריכת לשון:
יפעת פישר, מכללת שאנן

עימוד והבאה לדפוס:
תאיר גז-שכטמן, מכללת שאנן

עיצוב וצילום תמונת שער: תאיר גז-שכטמן
עיצוב וצילום תמונת תוכן העניינים: תאיר גז-שכטמן

מכללת שאנן – הוצאה לאור
ISSN 2311-5483
כתובת המערכת:
רח' הים התיכון 7, ת"ד 1019, קריית חיים מערבית, חיפה 2610501
טלפון: 04-8780000 פקס: 04-8714445
Email: laor@shaanan.org
כתובת אינטרנט של כתב העת http://shaanan.ac.il/?page_id=4244

קול קורא והנחיות להגשת מאמרים לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי"

קול קורא

אנו מזמינים את כל העוסקים בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים ואת כל העוסקים במחקר בחינוך מתמטי, לשלוח מאמרים מחקריים בתחום החינוך המתמטי, או מאמרים העוסקים בדרכי הוראה ובתובנות שעולות מהכשרת מורים למתמטיקה ובהתפתחות מקצועית של מורים בחינוך היסודי והעל-יסודי בכל הרמות האקדמיות.

במערכת של כתב העת מכהנים נציגים מהמוסדות השונים להכשרת מורים למתמטיקה בארץ, והוא נחשב כתב עת שפיט.

כתב העת יוצא לאור בקביעות מאז שנת 2014 בחסות המכללה ובמימונה.

הנחיות למחברים

כתבי היד של מאמרים הנשלחים לשיפוט לכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי" צריכים להיכתב בשפה העברית ולהכיל לכל היותר 25 עמודים. ב-25 עמודים אלו ייכללו כל התקצירים, הטבלאות, האיורים ורשימת המקורות. אם המאמר כולל טבלאות או איורים, יש לשבץ אותם בטקסט במקום שבו הם אמורים להופיע במאמר.

יש להגיש את המאמר בגופן David גודל 12, רווח כפול, יישור דו-צדדי, ולשלוח את המאמר כמסמך word בדואר אלקטרוני לכתובת yanivb@cet.ac.il

יש לצרף למאמר תקציר בעברית בהיקף של 200-100 מילים, ורשימה של 5-3 מילות מפתח.

המאמרים נשלחים אנונימית לשיפוט מקצועי, לכן במאמר יהיה עמוד שער ובו שם המחבר, כתובתו, מספר טלפון ודוא"ל. כמו כן יש לציין בעמוד השער את תוארו ושיוכו האקדמי, המקצועי או אחר של המחבר.

כדי לשמור על אנונימיות הכותבים בתהליך ההערכה והשיפוט, אין לציין את שמות הכותבים בגוף המאמר ולהימנע מכל אזכור או רמז באשר לזהות הכותבים.

כתבי היד של מאמרים המוערכים כרלוונטיים לאופיו של כתב העת, מועברים לשיפוטם של קוראים המתמחים בנושא המאמר ועוברים תהליך שיפוט על פי שיטת "העיוורון הכפול": זהות המחברים אינה ידועה לקוראים, וזו של הקוראים אינה ידועה למחברים.

המחברים מתבקשים להקפיד על הדפסת מקורות המידע שבסוף המאמר לפי הכללים שנקבעו בידי ארגון APA.

מאמרים שיתקבלו לפרסום יעברו עריכה מדעית ולשונית. לאחר העריכה הגרסה הסופית תישלח למחברים לאישור ותוחזר בהקדם.

אין לשלוח מאמר אם הוא כבר התפרסם או עומד להתפרסם במקום אחר, או שהוא מצוי בתהליך שיפוט בכתב עת אחר.

יש להתעדכן באתר כתב העת טרם שליחת מאמרים. כרגע לא מקבלים מאמרים חדשים.

תוכן העניינים

דבר העורך

יניב ביטון

ד"ר יניב ביטון
ראש תחום *מתמטיקה* במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח), תל אביב.
בוגר הטכניון במחלקה לחינוך, *מדע וטכנולוגיה*.
מרצה לחינוך *מתמטי* בשאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.
עוסק בהערכה ומדידה בחינוך *מתמטי*.

אני שמח ונרגש להגיש לכם את הגיליון התשיעי של כתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי".

תודה והערכה רבה לפרופ' אבי לוי, נשיא מכללת שאנן, על תמיכתו המקצועית והנדיבה בכתב העת "מחקר ועיון בחינוך מתמטי".

ברצוני להודות לכל השותפים לתהליך ההוצאה לאור של הגיליון התשיעי, לצוות העריכה ולצוות ההפקה של כתב העת – גב' יפעת פישר, גב' צליל פרנקו וגב' תאיר גז-שכטמן. תודה על המקצועיות הרבה ועל השותפות המלאה בהוצאת כתב העת ולהצלחתו.

לכל כותבי המאמרים והמדורים שדאגו לשתף ולהעשיר את הידע המתמטי והידע הפדגוגי של קהילת אנשי החינוך המתמטי, לחברי המערכת ולחברי הקהילייה העוסקים בהוראה ובמחקר בחינוך מתמטי, שנרתמו למשימת השיפוט, העירו ותרמו מזמנם והחזירו חוות דעת רציניות שעזרו במיון ובהשבחת המאמרים המופיעים בגיליון – תודה גדולה לכולכם.

תודה אישית וחמה לפרופ' דוד בן-חיים, ששמח תמיד לתרום מזמנו ומניסיונו העשיר לקידום כתב העת וייעולו.

את הגיליון התשיעי ברצוני להקדיש לחברה טובה, ד"ר ליאורה נוטוב ז"ל, שלצערנו נפרדה מאיתנו השנה. ליאורה ואני זכינו ללמוד יחד, להרצות, לחקור ולשתף פעולה בנושאים רבים. לליאורה יש כמה פרסומים בכתב העת של מחקר ועיון בחינוך מתמטי, זכינו! דברים לזכרה כתבה חברתה הטובה, פרופ' עטרה שריקי.

בגיליון התשיעי, כשמו כן הוא, יש תשעה מאמרים ומבחר עשיר של מדורים.

את כתב העת פותח מדור החדשות המתמטיות שבו פרופ' נצה מובשוביץ-הדר משתפת אותנו בהמלצות לקריאה של ספרים העוסקים בהנגשת המתמטיקה לציבור הרחב.

במדור "ראיונות עם דמויות מפתח בחינוך המתמטי" ד"ר קרני שיר נפגשת הפעם עם המנחה שלה לדוקטורט, פרופ' אורית זסלבסקי. אורית היא ראש התוכנית לחינוך מתמטי באוניברסיטת ניו-יורק NYU. לפני כן במשך 22 שנה הייתה חברת סגל בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, עד שפרשה לגמלאות.

כידוע, העולם השתנה מאז מרץ 2020 עם הופעתה של מגפת הקורונה. מגפה שגרמה לנו מהר מאוד ללמוד לנהל את החיים (וגם את הכנסים) מרחוק. במדור חוויות מכנס, ד"ר תקוה עובדיה וד"ר בועז זילברמן משתפים אותנו ברשמים מכנס ירושלים שהתקיים לראשונה ככנס מקוון.

במדור המלצה על ספר, ברצוני להמליץ לכם הקוראים על ספרם של ד"ר אלכס פרידלנדר ופרופ' אברהם הרכבי, "משימות וכשרים בהוראה ולמידת האלגברה". הספר עוסק בנושאים ובמושגים מרכזיים הכלולים בתוכנית הלימודים למתמטיקה בכיתות ז'–י"ב ומיועד למורים, סגלי הוראה של מוסדות להכשרת מורים, סטודנטים להוראה ובעלי תפקידים אחרים בתחום הוראת המתמטיקה בחטיבות העל-יסודיות. שווה קריאה!

אנו מקווים שתיהנו מהקריאה.

יניב ביטון

מדור חדשות מתמטיות

נצה מובשוביץ-הדר

מדור החדשות בגיליון זה מכיל הפעם המלצות לקריאה של ספרים העוסקים בהנגשת המתמטיקה לציבור הרחב. זהו תרגום לעברית של כתבה מאת פשמק צ'וצ'קי (Przemek Chojecki) שהתפרסמה ב-7 ביוני 2021 בעיתון המקוון MEDIUM (המקור: https://medium.com/data-science-rush/math-books-you-should-read-in-2021-2e878331be04)

הבה נלמד איך המתמטיקה משפיעה על כל היבט של חיינו [1]

פשמק צ'וצ'קי

המתמטיקה עומדת מאחורי כל פריצות הדרך האחרונות. זאת הסיבה שאפשר לדחוף את הטכנולוגיה קדימה מדי שנה. אנו משתמשים במתמטיקה אף שאולי איננו מודעים לכך. לכן כולם צריכים להבין הבנה בסיסית כיצד מתמטיקה באמת נכנסת לתמונה בעולם המודרני. רשימת הספרים להלן תאפשר לך להבין את זה מבלי להיכנס לפרטים טכניים והוכחות מסובכות.

ספרי מתמטיקה שמומלץ לקרוא בשנת 2024.

נפתח את הרשימה בספרים שיכולים לעזור לך להבין סטטיסטיקה – המיומנות המכריעה להבנת העולם. בסופו של דבר אנו זקוקים לסטטיסטיקה כדי להבין נתונים, ובמיוחד את אלה מהם שמספרים לנו על העולם שאנו חיים בו.

1. תורגם לעברית ומפורסם בכתב העת ברשות המחבר שניתנה לי בכתב בתכתובת אלקטרונית במסנג'ר מיום 15.9.2021. תודתי למחבר שנתן את אישורו לתרגם את כתבתו לעברית ולפרסם כאן.

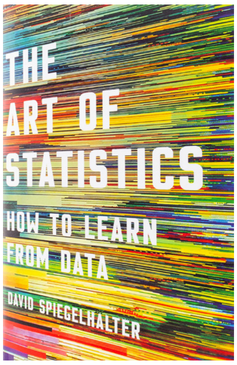
פרופ' (אמריטוס) נצה מובשוביץ-הדר

כיהנה כדיקנית הפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה בטכניון, ניהלה את המוזאון הלאומי למדע, טכנולוגיה וחלל בחיפה, הביאה לישראל את "תוכנית קולומביה", והנהיגה צוותי כתיבה של תוכניות לימודים חדשניות במתמטיקה, בהן סדרת המשדרים הדרמטיים "חשבון פשוט" שעליהם הטלוויזיה החינוכית זכתה בפרסים בין-לאומיים.

פרופ' מובשוביץ-הדר פרסמה מאמרים רבים ושני ספרים, והעמידה דור של מורים למתמטיקה ותלמידי מחקר החדורים בשאיפה לקרב את המתמטיקה אל ליבו של הנוער.

היא הקימה בשנת 1987 את "קשר חם" – מרכז מו"פ לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי בישראל ועומדת בראשו מאז. בשנים האחרונות היא מתמסרת לפיתוח הבזקי חדשות ושילובם בהוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה ולהקמת אתר "רמזור למורה".

The art of statistics: How to learn from data

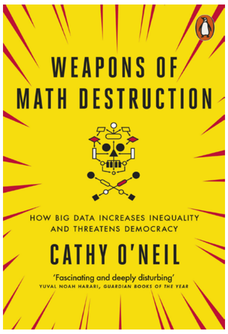


ספר זה מסביר את חשיבות הסטטיסטיקה בחיי היום-יום שלנו עם דוגמאות נהדרות:

- כמה עצים יש על פני כדור הארץ?
- האם בתי-החולים העמוסים יותר הם בעלי שיעורי הישרדות גבוהים יותר?
- מדוע לגברים זקנים אוזניים גדולות?

מחבר הספר, דייוויד שפיגלהלטר (David Spiegelhalter), מנחה את הקורא באמצעות העקרונות החיוניים הדרושים לנו כדי להפיק ידע מנתונים. הוא מסתמך על בעיות מהעולם האמיתי על מנת להציג מושגים, ובאמצעותן הוא מראה לנו כיצד נתונים סטטיסטיים יכולים לעזור לנו לקבוע מיהו הנוסע הכי בר-המזל בספינה טיטאניק, האם הרוצח הסדרתי הרולד שיפמן היה יכול להיתפס לפני כן, ואם בדיקת סרטן השחלות מועילה.

Weapons of math destruction: How big data increases inequality

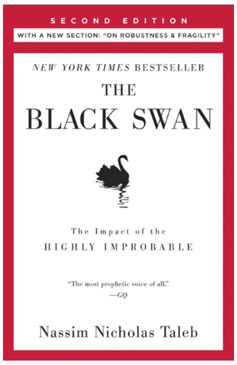


זהו ספר העוסק באלגוריתמים וכיצד הם משפיעים על חיינו:

- לאיזה בית ספר נבחר ללכת?
- האם נקבל הלוואה לרכב?
- כמה אנו משלמים בשביל ביטוח בריאות?

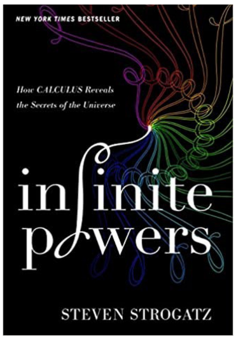
לא בני אדם מקבלים החלטות אלה לעיתים קרובות, אלא מודלים מתמטיים. בתאוריה זה צריך להתבטא בהגינות רבה יותר: כולם נשפטים על פי אותם כללים, וההטיה מתבטלת. אך כפי שקתי אוניל (Cathy O'neil) מגלה בספר זה, ההפך הוא הנכון. המודלים המשמשים כיום הם אטומים, לא מוסדרים ואי אפשר לערער עליהם גם כשהם טועים. המדאיג ביותר הוא שהם מחזקים את האפליה: אם סטודנט עני אינו יכול לקבל הלוואה מכיוון שמודל ההלוואות מוצא אותו מסוכן מדי (לפי המיקוד של כתובתו), הוא מנוע מלקבל את החינוך העשוי להוציא אותו מעוני, ונוצרת ספירלה מרושעת. מודלים ממליצים על בר-המזל ומענישים את הנכשלים ויוצרים "קוקטייל רעיל לדמוקרטיה". ברוך הבא לצד האפל של הביג דאטה.

The black swan: The impact of the highly improbable



ספר זה עוסק ב"אירועי הברבור השחור" ואיך הם מעצבים את עולמנו. ברבור שחור הוא אירוע בלתי סביר ביותר עם שלושה מאפיינים עיקריים: הוא בלתי צפוי; יש לו השפעה מסיבית; ואחרי זה אנו רוקחים הסבר שגורם לו להיראות אקראי פחות וצפוי יותר ממה שהיה. ההצלחה המדהימה של גוגל הייתה ברבור שחור; כך היה ב-11 בספטמבר. בשביל נסים ניקולס טאלב (Nassim Nicholas Taleb), ברבורים שחורים עומדים בבסיס של כמעט כל מה שקשור לעולמנו, החל מעליית הדתות וכלה באירועים בחיינו האישיים.

Infinite powers: How calculus reveals the secrets of the universe

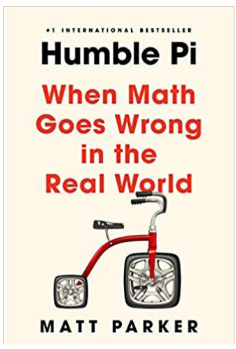


זהו ספר על חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (חדו"א). ללא חדו"א לא היו לנו טלפונים סלולריים, טלוויזיה, GPS או אולטרה-סאונד. לא היינו מפענחים DNA, לא היינו מגלים את נפטון ולא מכניסים 5,000 שירים לכיס.

ההיסטוריה היצירתית והמדהימה של סטיבן סטרוגאץ (Steven Strogatz) מראה כי חדו"א לא עוסק במורכבות, אלא מדובר בפשטות. הוא רותם מספר לא אמיתי – אינסוף – להתמודד עם בעיות בעולם האמיתי, לפרק אותן לקלות יותר ואז להרכיב מחדש את התשובות לפתרונות שנראים כמו קסמים.

הספר "עוצמות אינסופיות" מספר כיצד חדו"א עורר והלהיב את ממציאיו, החל מהנצנוצים הראשונים שלו ביוון העתיקה והביא אותנו ממש לידי גילוי גלי הכבידה (תופעה שנחזתה באמצעות חדו"א). סטרוגאץ חושף כיצד צורה זו של מתמטיקה נענתה לאתגרים של כל דור: כיצד לקבוע את שטח המעגל עם חול ומקל בלבד; כיצד להסביר מדוע מאדים הולך "אחורה" לפעמים; איך מייצרים חשמל עם מגנטים; כיצד להבטיח שטיל ששולחים לירח לא מחטיא; כיצד להצליח במאבק באיידס.

Humble Pi: When math goes wrong in the real world

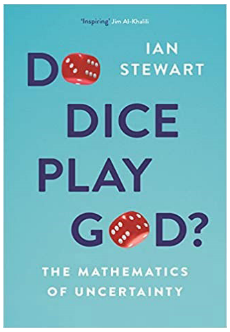


הספר הזה הוא על הדרך שבה מתמטיקה משפיעה על חיינו בכל רמה: החל מהקוד המפעיל אתר וכלה במשוואות המאפשרות תכנון גורדי שחקים וגשרים. לרוב המתמטיקה עובדת בשקט מאחורי הקלעים עד שלפתע לטעויות מתמטיות שקורות יש תוצאות הרות משמעות.

קל להתעלם ממתמטיקה עד שנקודה עשרונית שממוקמת לא במקום הנכון מעלה את שוק המניות, שגיאת המרה ביחידות גורמת למטוס להתרסק, או שמישהו מחלק באפס ועוצר ספינת קרב בלב האוקיינוס.

מאט פרקר חוקר ומסביר תקלות מתמטיות, כמעט החמצות ותעתועים מתמטיים הקשורים לרשת האינטרנט, לנתונים גדולים, לבחירות, לשלטי רחוב, להגרלות, ולעוד ועוד. הוא חושף את הדרכים המוזרות שבהן מתמטיקה מציבה לפנינו מלכודות, ומבהיר איך זה חושף את מקומה המהותי בעולמנו. מזמן לא היה מהנה כל כך לטעות.

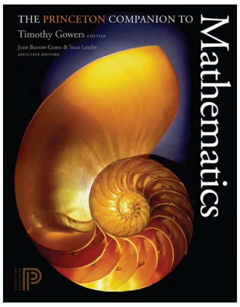
[Do dice play god? The mathematics of uncertainty]()



זהו ספר על חוסר ודאות. אי הוודאות נמצאת בכל מקום: מזג האוויר, הכלכלה, המין של ילד שטרם נולד – אפילו גדלים שאנחנו חושבים שאנחנו מכירים כמו של אוכלוסיות או של תנועת כוכבי הלכת, יכולים לגרום לטעויות.

איאן סטיוארט (Ian Stewart), מחבר הספר, בוחן את ההיסטוריה והמתמטיקה של חוסר הוודאות. ככל שזה נוגע להימורים, הסתברות, סטטיסטיקה, תחזיות פיננסיות ומזג אוויר, מפקדי אוכלוסין, מחקרים רפואיים, כאוס, פיזיקה קוונטית ואקלים, הוא מבהיר דבר אחד: הסתברות סבירה היא הוודאות היחידה.

[The princeton companion to mathematics]()



זהו המדריך האולטימטיבי למתמטיקה מודרנית. ספר זה שערך טימותי גאוורס (Timothy Gowers), חתן מדליית פילדס, מציג כמעט מאתיים ערכים שכתבו המתמטיקאים החשובים בעולם. מוצגים בו:

- כלים מתמטיים בסיסיים ואוצר מילים;
- מסלולי התפתחות המתמטיקה המודרנית;
- הסברים של מונחים ומושגים חיוניים;
- רעיונות ליבה בתחומים עיקריים במתמטיקה;
- הישגיהם של רבים מהמתמטיקאים המפורסמים;
- ההשפעה של מתמטיקה על תחומים אחרים כמו ביולוגיה, מימון ומוסיקה.

כל אחד צריך שיהיה לו על המדף ספר שבו יוכל לחפש כל מושג מתמטי שעולה בעבודתו או בחייו.

רשימה זו תאפשר לך להבין כיצד מתמטיקה, סטטיסטיקה ואלגוריתמים מעצבים את העולם שאנו חיים בו. הידע הזה מאפשר לפעול ביעילות רבה יותר ולהיות בטוח יותר. אני מקווה שתיהנו לקרוא אותם!

אם יש לך רצון לקבל עוד המלצות על ספרים הקשורים למתמטיקה לשנת 2022, המחבר ממליץ על:

- [Artificial Intelligence Books]()
- [Technological Books]()

אם ברצונך לכלול ספרים אחרים ברשימה זו או ברשימות אחרות של המחבר, הוא פתוח לשיתופי פעולה ומזמין אותך ליצור איתו קשר בלינקדאין

https://www.linkedin.com/in/przchojecki/

וגם להצטרף לרשימת התפוצה ולקבל עלון בנושא טכנולוגיות, מדעי נתונים וחדשות AI בקישור זה:

https://creative-producer-9423.ck.page/c3b56f080

יחסי הגומלין בין דוגמאות מתמטיות, הגדרות והוכחות: ריאיון עם פרופסור אורית זסלבסקי

קרני שיר

ד"ר קרני שיר

מרצה במכללת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

חוקרת בפרויקט "הבזקים" – הפקולטה למתמטיקה, הטכניון, חיפה.

פרופ' אורית זסלבסקי היא ראש התוכנית לחינוך מתמטי באוניברסיטת ניו יורק – NYU (New York University) משנת 2009. לפני כן במשך 22 שנה הייתה חברת סגל בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, עד שפרשה לגמלאות.

רבים ממחקריה של אורית עוסקים ביצירת מצבי אי ודאות וספק ככלי לחקירה ולקידום ההבנה המתמטית של תלמידים, פרחי הוראה ומורים, וביחסי הגומלין בין דוגמאות מתמטיות, הגדרות והוכחות.

הציגה נקודות מעניינות מתוך נושאים אלה בהרצאת המליאה שנתנה בכנס השנתי של הקבוצה הבין-לאומית לפסיכולוגיה של החינוך המתמטי (PME) בשנת 2014, כנס שארגנה לפני 15 שנים והייתה יו"ר ועדת התוכנית שלו בעת שהתקיים בטכניון. עבודתה של אורית מוּנעת מהתפיסה שלדוגמאות יש תפקיד מכריע בביסוס והעמקה של הבנה מתמטית. היא הייתה שותפה פעילה בשני העשורים האחרונים לפיתוח התחום העוסק בתפקידן של דוגמאות בלמידה ובהוראה של מתמטיקה. היא יזמה והשתתפה בארגון של שתי סדנאות בין-לאומיות שהוזמנו אליהן חוקרים בעלי עניין בתחום – האחת באוקספורד (אנגלייה) והשנייה בסיינה (איטליה).

מחקריה של אורית על דוגמאות עוסקים במגוון של היבטים, בהם מקומן של דוגמאות ואי דוגמאות בבניית מושגים והגדרות מתמטיים; תהליך הבְּנִיָּה של דוגמאות ככלי לחידוד ההבנה המתמטית של הלומד מצד אחד, וככלי דיאגנוסטי השופך אור על ההבנה של הלומד, מצד אחר; השימוש של מורים בדוגמאות בשיעורי המתמטיקה, במהלך הבחנה בין דוגמאות מתוכננות לדוגמאות ספונטניות; תפקידן של

דוגמאות (ודוגמאות נגדיות) בתהליכי הוכחה והפרכה של טענות מתמטיות, לרבות הפוטנציאל של דוגמאות גנריות בהנגשה של הרעיונות המרכזיים בהוכחה. לאחרונה יזמה וערכה עם שותפיה לפרויקט מחקר רב-שנתי שמומן על ידי ה-NSF (The National Science Foundation), מהדורה מיוחדת של כתב העת JMB (Journal of Mathematical Behavior) בנושא "תפקידן של דוגמאות בלימוד והבנה של הוכחות" הנשען על ממצאי המחקר הנ״ל.

מחקריה המוקדמים של אורית התמקדו בהכשרה ובהתפתחות מקצועית של מורים למתמטיקה. היא הייתה חלוצה בחקר התפתחותם של מורי-מורים למתמטיקה, מנקודת מבט תאורטית ומעשית.

תרומתה לתחום זה כוללת בין השאר עריכה משותפת של ספר בהוצאת ספרינגר שכותרתו Constructing knowledge for teaching secondary mathematics: Tasks to enhance prospective and practicing teacher learning, ועריכת מהדורה מיוחדת (בהיקף של שלושה גיליונות) של כתב העת JMTE (Journal of Mathematics Teacher Education) וכותרתו The Role and Nature of Mathematics Related Tasks for Teacher Education.

אורית ניהלה פרויקטים רחבי יריעה בתחום החינוך המתמטי בארץ, הבולטים בהם: "מחר 98 – קידום החינוך המתמטי העל-יסודי באצבע הגליל" – פרויקט שהושפע מהרפורמות בחינוך המתמטי בעולם שצמחו בעקבות פרסום הסטנדרטים לחינוך מתמטי של ה-NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). אחת היוזמות שקודמה בבתי הספר שהשתתפו בתוכנית הייתה הקמת "מעבדה מתמטית" בית ספרית ועריכת יריד מתמטי שנתי שבו תלמידים הציגו פרויקטים מתמטיים שעבדו עליהם. פרויקט נוסף שאורית עמדה בראשו היה "מיצוי ומצוינות במתמטיקה – טיפוח מצוינות בקרב תלמידי חטיבת הביניים", פרויקט חלוץ מטעם משרד החינוך שנועד לתת מענה לתלמידים בעלי עניין ויכולת להעמיק ולהעשיר את ידיעותיהם במתמטיקה מעבר לתוכנית הלימודים.

הפרויקט החל לפעול במספר קטן יחסית של בתי ספר, וכעבור שנים מספר הלך והתרחב עד שלבסוף משרד החינוך קיבל החלטה שחייבה את כל חטיבות הביניים בארץ להציע לתלמידים מוכשרים תוכנית לטיפוח מצוינות במתמטיקה והלימודים יהיו בזמן שעות ההוראה התקניות.

הפרויקט לטיפוח מצוינות עורר עניין בקרב משלחת מסין שביקרה בטכניון, ולאחר הביקור הוזמנה אורית לשאנטאו (סין) להציג את הפרויקט לאנשי חינוך בכירים ומורים מנוסים למתמטיקה ולהכיר את מערכת החינוך שלהם.

אורית גם זכתה במכרז של משרד החינוך לפיתוח סדרה של ספרי לימוד במתמטיקה לכיתות ז'–ט' לפי תוכנית הלימודים החדשה ("אפשר גם אחרת"), וספר דידקטי למורים למתמטיקה בתיכון ("ללמוד וללמד אנליזה").

תפיסת העולם שמנחה את אורית בעבודתה עם מורים ופרחי הוראה היא שללמוד וללמד מתמטיקה שזורים זה בזה, ושצריך ליצור מצבי למידה אותנטיים למורים שבאמצעותם יחוו תהליכים דומים לאלה שמצופה מהם ליצור עבור תלמידיהם. היא שמה דגש על פיתוח מושכל של משימות ייחודיות, ובפרט כאלה שמעוררות את הצורך לבחון מחדש דקויות מתמטיות שלעיתים קרובות לא מודעים להן. רבים ממחקריה צמחו מתוך עבודת ההוראה שלה.

שנות ילדותה של אורית

אורית נולדה בנר השמיני של חנוכה בקיבוץ חולתה שבצפון. ההורים שלה התלבטו איך לקרוא לה וחיפשו שם שקשור לחג. אחרי מחשבה ובעצתו של ידיד המשפחה, פטר מירום (הצלם הידוע שהלך לעולמו לא מזמן), הם החליטו לקרוא לה אורית, שם שאולי נפוץ מאוד היום אך לא היה מוכר באותה עת.

בשנתיים הראשונות לחייה גדלה אורית בבית הילדים בקיבוץ. הפעוטות חולקו שם לשישיות, ובילו זה לצד זה בכל שעות היממה (כמובן בנוסף על הלינה המשותפת). השנים היו השנים הראשונות להקמת המדינה, והתנאים בקיבוץ היו ספרטניים מאוד. למשל כאשר סבתה מניו-יורק הגיעה לביקור בארץ, היא נאלצה לחלוק מיטה זוגית עם הוריה של אורית. כאשר אורית הייתה בת שנתיים עזבה משפחתה את הקיבוץ ועברה לגור בירושלים, אך הביקורים התכופים בקיבוץ ואוסף החברים הרבים שם, הובילו לכך שעד היום היא רואה במקום את 'נוף ילדותה'.

המזח של קיבוץ חולתה // צילום: ארכיון קיבוץ חולתה באדיבות המועצה לשימור אתרי מורשת

אביה של אורית נולד בווינה ועלה לארץ בגיל 17, בסמוך לפלישת גרמניה לאוסטריה, והצטרף כחבר לקיבוץ חולתה. אימה עלתה מארה״ב לארץ כעבור עשר שנים, בעקבותיו. אביה שהיה מוזיקלי מאוד, ביקש לצאת ללמוד בקורס למנצחי מקהלות, אך לא קיבל אישור לכך מהקיבוץ, דבר שהביא לידי עזיבתם. לאחר מעבר המשפחה לירושלים, החליט להשלים תעודת בגרות וללמוד משפטים באוניברסיטה העברית בירושלים.

רקע מקצועי

בדומה לאביה, למדה אורית גם היא באוניברסיטה העברית. היא התלבטה בין לימודי מתמטיקה ללימודי משפטים, אך מכיוון שאביה היה משפטן החליטה לסלול דרך משלה ובחרה בלימודים לתואר ראשון במתמטיקה וסטטיסטיקה. במסגרת לימודי התואר למדה בין השאר אלגברה לינארית אצל פרופ' מיכאל משלר ולימדה בהשתלמות מתמטית למורים בבית

הספר היסודי (א'–ח') לפי "תוכנית משלר" כדי להכין אותם למעבר לחטיבת הביניים (ז'–ט').

לקראת סיום התואר הראשון למדה אורית מספר קורסים לתעודת הוראה במתמטיקה. בעת לימודיה השתתפה בסיור לימודי בבית הספר עירוני ג' בחיפה, התרשמה מבית הספר ומזאב רוזנפלד, המנהל שעמד בראשו, ופנתה בבקשה ללמד בבית הספר. פרופ' נצה מובשוביץ-הדר שהייתה מרכזת לימודי המתמטיקה באותו זמן בבית הספר, המליצה לקבל אותה לעבודה. בשנה שאורית עבדה בבית הספר, נצה יצאה ללימודי הדוקטורט שלה בברקלי (לימים נצה תהיה המנחה של אורית בלימודי הדוקטורט שלה). מורה נוספת שהתחילה ללמד מתמטיקה בבית הספר בדיוק באותה השנה שבה אורית התחילה ללמד הייתה מיכל ירושלמי (כיום פרופ' מיכל ירושלמי). זכורה לאורית גם תלמידה צעירה ומוכשרת ששמה עטרה (כיום פרופ' עטרה שריקי) שלמדה אצלה מתמטיקה במסגרת תוכנית קולומביה.

עם סיום התואר הראשון במתמטיקה וסטטיסטיקה באוניברסיטה העברית בירושלים, עברה אורית לחיפה ולצד עבודתה כמורה למתמטיקה בעירוני ג', למדה בטכניון לתואר שני במתמטיקה, והשלימה את הקורסים הנדרשים לקבלת תעודת הוראה. היא למדה אצל פרופ' שמואל אביטל שהיה חבר סגל במחלקה להוראת המדעים בטכניון, והוא שכנע אותה לעבור מתואר שני במתמטיקה לתואר שני בחינוך מתמטי. כך היא החלה את לימודי התואר בהנחיית פרופ' שמואל אביטל, וכשהוא יצא לשבתון, המשיכה את הלימודים בהנחייתה של פרופ' נצה מובשוביץ-הדר.

בתחילת לימודי התואר השני עסקה אורית בסוגיה של התמודדות ילדים עם בעיות מנייה, אך לבסוף בחרה להתמקד ביישום רעיונותיה של נצה על הצמחה (בניגוד להצנחה) של רעיונות מתמטיים, ובהשראת שיעוריו של המרצה המצטיין המתמיד, פרופ' דוד צילג ז"ל, שצפתה בהם, פיתחה יחידת לימוד המבוססת על עיסוק בדוגמאות ופתרון בעיות המובילים באופן טבעי להוכחות של משפטים והבנה של הרעיונות המרכזיים באלגברה לינארית (למהנדסים), וערכה מחקר השוואתי בנושא זה. הנושא של התמודדות עם בעיות מנייה חזר והעסיק את אורית גם בהמשך דרכה וכיום היא מתמקדת בו במסגרת עבודתה באוניברסיטת ניו-יורק.

עם סיום התואר השני, התחילה אורית ללמד את תוכנית קולומביה לתלמידים מצטיינים במתמטיקה בתיכון של בית הספר הריאלי בחיפה. כאשר יצאה לשנת שבתון, חזרה שוב למחלקה להוראת המדעים בטכניון כדי להירשם לכמה קורסי השתלמות, אך הדברים התגלגלו כך שהיא נרשמה ללימודי דוקטורט, גם הם בהנחייתה של פרופ' נצה מובשוביץ-הדר. המחקר לדוקטורט עסק בהבנה של תלמידים את מושג הפונקציה הריבועית על ייצוגיה השונים, ובפרט, במכשלות הקונספטואליות הניצבות בפניהם.

לקראת סיום עבודת הדוקטורט של אורית, פרופ' אירית פלד שהייתה באותו הזמן פוסט-דוקטורנטית ב-LRDC (Learning Research & Development Center) בפיטסבורג, שמעה שפרופ' גיאה ליינהרדט מחפשת מועמד או מועמדת למשרת פוסט דוק בדיוק בתחום התמחותה של אורית וקישרה בין השתיים. אורית שמחה על ההזדמנות ונסעה לשם עם משפחתה. בעיני אורית, גולת הכותרת של עבודתה במסגרת הפוסט דוק הייתה כתיבת מאמר משותף עם גיאה ליינהרדט ומרי-קיי סטיין על פונקציות וגרפים, שהתפרסם ב-1990 בכתב העת RER (Review of Educational Research), מאמר שסלל את עתידה המקצועי. אורית מתארת את השנתיים האלה כשנתיים קסומות שבהן היא זכתה לעבוד ולשתף פעולה עם אנשים ידועים בתחום, כגון אד סילבר, מרי-קיי סטיין ועוד, אנשים הנמצאים בקדמת המחקר בחינוך המתמטי. באותה העת נחשפה לרפורמה בחינוך המתמטי בארה"ב שהתוו הסטנדרטים של ה-NCTM (שהתפרסמו לראשונה בשנת 1989), והתרשמה מהדגש שהושם על הבנה קונספטואלית ופתרון בעיות פתוחות ולא שגרתיות כולל בעיות חקר, כחלק אינטגרלי של הלמידה. לפיכך גמרה אומר לנסות להנחיל את רוח הסטנדרטים בארץ, ואכן, מטרה זו הנחתה אותה במסגרת עבודתה עם מורים ופרחי הוראה, וכן בפיתוח חומרי למידה והוראה במתמטיקה. בעקבות השנתיים האלה התגבש אצל אורית גם הרצון להמשיך לעסוק במחקר באקדמיה.

בסיום הפוסט דוק חזרה אורית לטכניון, שם עבדה במשך 22 שנים, כחברת סגל בפקולטה לחינוך במדע וטכנולוגיה. במהלך שנים אלו הנחתה אורית 16 סטודנטיות לתארים גבוהים (בהן פרופ' רוזה לייקין, ד"ר גילה רון, ד"ר איריס זודיק, ד"ר רותי סגל ואפילו אותי...). אורית מספרת כי במסגרת עבודתה בטכניון, העבודה עם הדוקטורנטיות היתה החלק האהוב עליה ביותר, ברמה המקצועית והאישית כאחד. עם יציאתה לגמלאות מהטכניון עברה אורית לאוניברסיטת ניו-יורק, שם היא מכהנת כראש התוכנית לחינוך מתמטי מזה 12 שנים. היא מתכננת לפרוש מעבודתה בניו יורק במהלך השנה הקרובה ולחזור לארץ.

רקע אישי

שלושת ילדיה של אורית, אורן, גיא ונגה, נולדו בחיפה במהלך לימודיה של אורית לתואר שני ושלישי. כל מי שמכיר את אורית ולו במעט, יכול להעיד כי ילדיה ונכדיה הם האהבה הכי גדולה שלה, והיא מנסה לבלות איתם כמה שיותר.

בהיותה טיפוס שפתוח להצעות לא שגרתיות וחוויות חדשות, בהמשך לטיוליה במקומות אקזוטיים רבים בעולם, היא נענתה להזמנה וזכתה לטייל למעלה מחודש בהודו עם אחד הבנים שלה במהלך טיול התרמילאות שלו, ועמדה בגבורה בתנאי שהציב לה – טיול בהודו כמו תרמילאית אמיתית (כולל נסיעה במחלקה שנייה ברכבת, לינה בגסט-האוסים של תרמילאים ועוד).

אורית גאה לספר כי על אף שנראה שכל אחד משלושת ילדיה הלך לכיוון מקצועי אחר לגמרי, היא מרגישה שיש לה חיבור עמוק לעיסוק של כל אחד מהם. אורן שגר בברלין, עוסק בתחום ההוראה והוא מורה ליוגה ומורה של מורים ליוגה. גיא שגר עם בת זוגו ושני ילדיו במושב בארץ, בעל חברת הי-טק שעוסקת בלמידה מקוונת, ואילו פניה של נגה, שמסיימת פוסט דוק במדעי המוח ב-MIT וגרה עם בן זוגה בארצות הברית, גם הם למחקר וקריירה אקדמית.

אורית צרכנית תרבות נלהבת, ובשנים האחרונות שבהן היא מחלקת את זמנה בין ניו-יורק לארץ – היא נהנית הן מחיי התרבות העשירים של ניו-יורק, עם הצגות התיאטרון ומופעי המוסיקה המרהיבים, והן מחיי התרבות בארץ.

במחקריה ובעבודתה עם תלמידים, פרחי הוראה ומורים, תרמה אורית תרומה משמעותית לגוף הידע המחקרי והיישומי בתחום החינוך המתמטי, והיא מקווה להמשיך לתרום לחינוך המתמטי בארץ עם שובה מניו-יורק.

פרסומים נבחרים

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 297-321. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0606-5

Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking through and with examples. *Journal of Mathematical Behavior, 53*, 245-255. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.001

Zaslavsky, O., & Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher-educators: Growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(1), 5-32. https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000009971.13834.e1

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student-teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 67-78.

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317-346.

Zaslavsky, O., & Zodik, I. (2014). Example-generation as indicator and catalyst of mathematical and pedagogical understandings. In Y. Li, E. A. Silver, & S. Li (Eds.), Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices (pp. 525-546). Springer.

רשמים וזיכרונות מכנס ירושלים התשיעי המקוון תשפ"א 2021

תקוה עובדיה
בועז זילברמן

ד"ר תקוה עובדיה

מרצה בכירה במכללת אורנים בתוכניות לתואר הראשון והשני וחברת סגל אורח במכון מנדל למנהיגות. חוקרת בתחום החינוך המתמטי.

ד"ר בועז זילברמן

מפתח חומרי למידה במתמטיקה ומדריך מורים במרכז לטכנולוגיה חינוכית.

ממייסדי YIRME - הפורום לחוקרים וחוקרות צעירים בחינוך מתמטי בישראל.

העולם השתנה מאז מרץ 2020. הופעתו של וירוס לא מוכר ומידבק מאוד גרמה לנו ללמוד מייד איך לנהל את החיים מרחוק. פעולות מוכרות כמו למידה, הוראה, ניהול פגישות, התכנסויות ושיתופי פעולה תפסו אט-אט (או לפעמים חיש-מהר) צורות חדשות ומרתקות. החיים לצד המגפה מאתגרים אותנו לגלות ניצוצות של יצירתיות, חדשנות, מודלים למפגשי למידה ורעיונות חדשים לתקשורת ולפיתוח אישי וקבוצתי מקצועי.

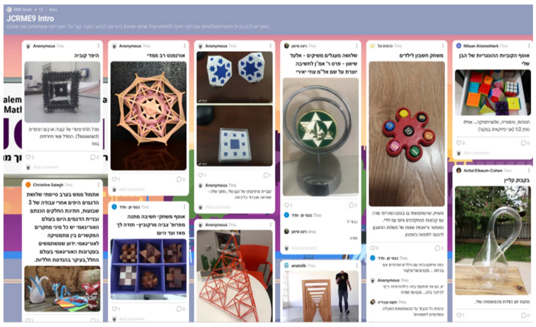
בחודש יולי 2020, כשהיה ברור שאנחנו בעיצומה של מגפה וכשנראה שתידרש לפחות שנה עד שיפתחו חיסון יעיל כנגדה, ועדת התוכנית של כנס ירושלים התשיעי התכנסה כדי לדון בשאלה: כיצד אפשר לקיים את כנס ירושלים ולשמר את רוב החוויה המהותית של הכנסים הפיזיים ובו בזמן לשדרג אותו לפי היכולות של הכלים הדיגיטליים?

התשובה הקצרה לשאלה זו במילה אחת הייתה 'פיזיטלי', כלומר שילוב בין פיזי לדיגיטלי. התשובה הארוכה יותר במקצת, כמו כל דבר בצבא, מורכבת משלושה חלקים – או שלוש דרכים לחדשנות (Satell, 2018):

1. ***להשתפר במשהו שאנחנו כבר עושים:*** בתכנון הכנס התשיעי נשענו על הניסיון המצטבר מהשתתפות בכל הכנסים הקודמים ובתכנון הכנס השמיני. המבנה של כנס בן יומיים המחולק למושבי הרצאות מליאה לצד מושבים מקבילים, הוא חלק אינטגרלי מחוויית הכנס והיה לנו חשוב לשמור עליו. עם זה הפורמט המקוון אפשר לנו לקיים מפגש ממשי חוצה גבולות, יבשות ואזורי זמן, ולכן זכינו לשתי הרצאות מליאה של עמיתינו שמעבר לים: ד"ר אורלי בוכבינדר מניו המפשייר וד"ר איגור קונטורוביץ' מניו זילנד. עוד חידוש שהכנסנו לכנס התשיעי היה שינוי אופי המושבים המקבילים כך שיכילו הן דיווחי מחקר והן הרצאות קצרות ('שיח מחקרי'), כדי לאפשר חשיפה למחקרים רבים בשלים ולאפשר בחירה רבה בעבור המשתתפים.

2. **ליישם בעניין אחר משהו שאנחנו כבר טובים בו:** כפי שציינו קודם, תכנון הכנס העניק לנו הזדמנות לשקול מחדש חלק מהמושבים הקיימים ולראות כיצד אפשר להשתמש בנקודות החוזק של הקהילה שלנו בעניין דיגיטלי. לכן שינינו הן את מושב המיצגים והן את מושב החוקרים הצעירים כדי שיאפשרו חשיפה רבה יותר לכל הקהילה. מושב החוקרים הצעירים התקיים לראשונה בכנס ירושלים השמיני אך במתכונת מצומצמת מאוד. בכנס התשיעי העברנו את המושב לבוקר של היום הראשון של הכנס, בלי אירועים אחרים באותה השעה, ובכך הגדלנו את החשיפה אליו והעצמנו את קהיליית החוקרים הצעירים. המושב זכה לשבחים רבים מהמשתתפים בכנס ובעקבותיו התגבש פורום החוקרים הצעירים בחינוך מתמטי (YIRME) שמנהל קהילייה פעילה מאוד בווטסאפ ואף מקיים ימי עיון לאורך השנה.
3. **לפתור בעיה חדשה לגמרי:** הבעיה החדשה נגעה לעייפות זום (Zoom Fatigue), אותה תחושת שחיקה שנובעת משימוש יתר בתוכנת התקשורת הפופולרית. הניסיון שלנו בכנסים וירטואליים אחרים היה שהם לרוב מתישים מאוד, מנוכרים מאינטראקציה חברתית וגורעים מהיכולת שלנו להציג את דברינו לצד קבלת משוב מהקהל. לכן התייעצנו עם כמה חברות ומוסדות לימוד על מודל חלופי שיאפשר לקיים כנס אקדמי בן יומיים בדרך הטובה ביותר בעבור הקהילה שלנו, ובחרנו באגף הטכנולוגי של מכללת אורנים.

אחת הדרכים שבחרנו בהן כדי להתמודד עם הניכור המובנה בכנס מקוון היה 'פעילויות הפתיחה' – פאדלטים (Padlet, מעין לוח שעם וירטואלי) שבהם המשתתפים הוזמנו לשתף את חברי הקהילה בתמונה, פסל או חפץ עם זיקה חזקה למתמטיקה שיש להם בבית או בבדיחות מתמטיות. פעילויות אלו זכו לשיתופים רבים ולתגובות רבות מצד משתתפי הכנס (ראו תמונה).



החדשנות בארגון המרחב הפיזיטלי בעבור הכנס הגיעה עם הימור. לשמחתנו במהלך הכנס החששות מהשתתפות דלה או מליקויים טכניים התפוגגו. הקהילה "הגיעה" והשתתפה – לא מצאנו פער בין מספר ההצעות שהוגשו לכנס התשיעי לעומת ההצעות שהוגשו לקראת הכנס השמיני, ממצא שמעיד כי הקהילה קיבלה את השינוי והסכימה להתמודד עימו, לפחות באילוצי הבריאות של חורף 2021. עוד הייתה נוכחות מרשימה בכל חלקי הכנס ובכללם מושב הסיום ואספת המליאה(!) – מתוך שנהנינו מהזכות לבחור באילו מושבים מקבילים להשתתף מבלי להפריע בכניסה לחדרים וביציאה מהם. כמה מאיתנו אפילו נכחו ביותר ממושב אחד בזמן נתון...

בסיום הכנס ביקשנו מהמשתתפים לענות על שאלון משוב כדי לשתף את הקהילה בתהליך קבלת ההחלטות לקראת הכנס הבא – כנס העשור של קהילת החינוך המתמטי. מתברר שלמרות האהבה שלנו למפגש הפיזי המוכר, האהוב ומחמם הלב, מרבית המגיבים לשאלון המשוב על הכנס התשיעי מעוניינים שהכנס העשירי יהיה מקוון או שישלב מרחב פיזיטלי ומפגש אנושי. בתשובה לשאלה "מה מבנה הכנס העדיף מבחינתך בשנה הבאה?" 71% מהמשיבים (37 מתוך 52) צדדו בכנס בעל רכיבים מקוונים, מתוך העדפה לכנס היברידי (יום מקוון ויום פנים אל פנים).

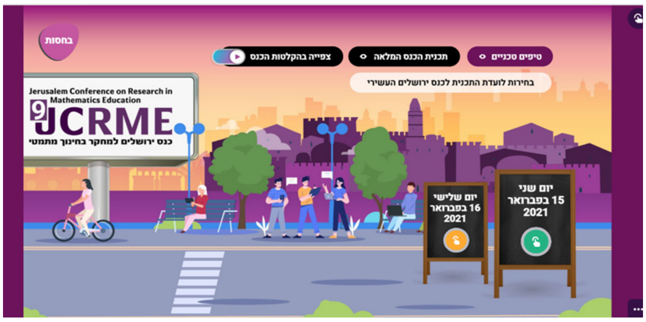
כמה מהמגיבים העלו הצעות קונקרטיות לעניין אופיו של החלק המקוון. כמה משתתפים ציינו כי המסגרת המקוונת מאפשרת להשתתף במושבים רבים בשני ימי הכנס. משתתפים רבים שיבחו את השיתוף של חוקרים ישראליים המועסקים במוסדות אקדמיים מחוץ לישראל ואת התרומה של הרצאות אלו (בין הרצאות מליאה ובין דיווחי מחקר). לצד אלה הייתה ביקורת שהרצאות המליאה הועברו במתכונת של ובינר, כלומר במתכונת שלא אפשרה למשתתפים לראות מי נמצא בהרצאה ולקרוא כמה מההערות והתגובות. בעבור משתתפים אלו מתכונת זו פגמה באינטימיות של הכנס, וראוי לשקול אם להשתמש בה בעתיד.

ייתכן שההעדפה של המבנה ההיברידי קשורה לכך שאנו עוד לא רואים את קץ המגפה באופק. אנו מעדיפים להאמין שהתשובות של חברי הקהילה מעידות על שינוי בתפיסה של תהליך הלמידה ושל אופי ההשתתפות בכנסים ובמרחבי למידה. מובן שלא רק אנו המארגנים – חברי ועדת הכנס – חווינו התחדשות פדגוגית בעת ארגון כנס ירושלים התשיעי, אלא גם משתתפי הכנס, כפי שמעידות ההצגות שהותאמו היטב למרחב הפיזיטלי.

ברוח זו של אופטימיות, נאחל לכולנו בריאות והתגברות עולמית על המגפה. אנו מקווים שעמיתינו, חברי ועדות הכנסים שיבואו בהמשך, יצליחו להפוך כל בעיה חדשה למנוף לשיפור הכנס בעבור כולנו. נסיים באיחולי הצלחה רבה לחברי ועדת הכנס העשירי.

קהילה יקרה, תודה על האמון שנתתם בנו!

תקוה עובדיה ובועז זילברמן,
יו"ר כנס ירושלים התשיעי תשפ"א 2021



נושאים מתמטיים בספרות התלמודית והרבנית: הצעות שילוב בחינוך מתמטי

אילה רביב
מוניק חדד
נח דנא-פיקארד

ד"ר אילה רביב

ראש החוג למדעים במכללה האקדמית חמדת. תחומי מחקרה מתמקדים באספקטים שונים של חינוך מדעי ומתמטי, בהם חינוך מדעי בגיל הרך, למידה קבוצתית וחוץ-כיתתית ומאפייני השיח בשיעורי מדע.

מוניק חדד

בוגרת תואר שני בחינוך מתמטי במכללה האקדמית חמדת. מורה למתמטיקה ומשמשת רכזת ומנחה יישובית למתמטיקה באופקים. היא יזמה ועשתה פעילויות בית ספריות וקהילתיות המשלבות את תחום המתמטיקה בפעילויות חינוכיות בתחום היהדות.

פרופ' נח דנא-פיקארד

פרופ' חבר למתמטיקה וראש הקתדרה למתמטיקה חינוך ויהדות במרכז האקדמי לב. מחקריו עוסקים בחקר עקומות ומשטחים בסביבה מתוקשבת, בחינוך מתמטי מבוסס טכנולוגיה, ב-STEAM Education ובתורה ומדע. במשך השנים פרסם מאמרים רבים בתחומי מחקר אלה. חבר בקבוצת העורכים של כתבי עת בין-לאומיים, ופעיל בכנסים מקצועיים רבים, במתמטיקה ובחינוך מתמטי, בארץ ומחוצה לה. עורך של סדרת הספרים "לדעת בארץ דרכך" בתורה ומדע.

תקציר

מאמר זה מתאר שני נושאים מתמטיים המופיעים במקרא ובספרות חז"ל: שורש ריבועי ושיפוע של ישר.

השילוב בין קודש לחול, בין נושאים השייכים למדעים המדויקים לבין מקורות יהודיים, הוא מסורת רבת שנים. יש דוגמאות רבות לשילוב החשיבה המתמטית, החשיבה המדעית והחשיבה התלמודית בפסיקה ובחיי היום-יום. המתמטיקה היא אחד מ"כלי העבודה" הבסיסיים לכל חקר מדעי באשר הוא, אך גם העיסוק במתמטיקה עצמה יכול לפתוח חלון לעולם מופלא ולעורר התפעמות מהחוכמה העליונה שה' הפיח באדם.

שיטות של המתמטיקה המודרנית מאפשרות לנתח סוגיות בתלמוד בעזרת כלים של דורנו ולצפות בתוך כך כיצד חז"ל פתרו את הבעיות בעזרת בניית הכלים המתמטיים שלהם.

מאמר זה יוצא בקריאה למורים ומחנכים העוסקים במתמטיקה והמלמדים את מקצועות היהדות, לעסוק בתאוריה ובפרקטיקה של הוראת המתמטיקה מנקודת מבט יהודית: להציג את יחסה האוהד של היהדות כלפי מתמטיקה מצד אחד, ואת בקיאותם המופלגת של חכמי ישראל בתחום זה מצד אחר. שילוב המקורות היהודיים בהוראת נושאים מתמטיים, במשמעותם בימינו ובמשמעותם במקורות, יעשיר את למידת המתמטיקה כפי שלמידה של ההיסטוריה ושל הפילוסופיה של המדע מעשירה את הלמידה המדעית. החיבור בין המקורות התרבותיים היהודיים לנושאים המתמטיים והצגתם יעודדו לפתח נקודת מבט לא שגרתית אצל הלומד. השימוש בלשון העתיקה ותרגומה לשפה בת ימינו יגוונו את תהליך הלמידה והחשיבה הפורמלית. הלמידה תוכל לתאר מצבים קונקרטיים ולהיות בעלת משמעות.

שני המושגים המתמטיים שיוצגו כאן נלמדים על פי תוכנית הלימודים הפורמלית של משרד החינוך בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה של בית הספר.

מילות מפתח: ספרות תלמודית; חכמי ישראל; שורש ריבועי; שיפוע.

מבוא

מאמר זה מתאר שני נושאים מתמטיים המופיעים במקרא ובספרות חז"ל. שילוב מושגים השייכים למדעים המדויקים במקורות יהודיים, הוא מסורת רבת שנים. ישנן דוגמאות רבות שהחשיבה המתמטית, החשיבה המדעית והחשיבה התלמודית מתקדמות ופועלות במסלולים זהים או דומים. להלן דוגמאות:

א. יש בתלמוד בעיות שאין להן הכרע, כגון האם הזמן הנקרא "בין השמשות" שייך ליום הקודם או ליום הבא (מסכת שבת). למעשה כל הסוגיות בתלמוד המסתיימות במילה "תיקו"[1] מתארות בעיות שאין להן הכרע. משפט גודל (Gödel) המפורסם קובע שבכל תאוריה מתמטית הבנויה היטב על מערכת אקסיומות שלמה ולא סותרת את עצמה, קיימים משפטים שאי אפשר להוכיח ואי אפשר להפריך, כלומר סוג בעיה שאין לה הכרע. בדומה, החתול של שרודינגר (Schrödinger) משמש דוגמה מתחום הפיזיקה הקוונטית.

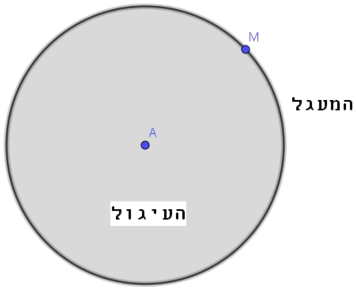
ב. רבן גמליאל (עירובין מג ע"ב) נעזר בשיטות מתמטיות לחישוב מרחקים במישור ובעומקי גאיות לצורך פתרון בעיות הלכתיות. נעסוק בשיטות מתמטיות כאלה בהמשך מאמר זה בפרק שדן בנושא השיפוע.

במאמר זה נדון לא בנושאים שאפשר לתאר אותם בעזרת כלים מתמטיים אלא בנושאים שהם מתמטיים מטבעם. שיטות של המתמטיקה המודרנית מאפשרות לנתח סוגיות בתלמוד בכלים של דורנו מתוך צפייה איך חז"ל פתרו את הבעיות בעזרת בניית הכלים המתמטיים שלהם (קופל, תשנ"ג). ההלכה נעזרת לעיתים קרובות בכלים מדעיים לשם קביעת הוראות אופרטיביות. לדוגמה במסכת עירובין (דף כג ע"ב) עושים חישוב מתמטי באמצעות חלוקת מלבן לריבועים ומלבנים (בדרך חשיבה הדומה לבניית ספירלת פיבונצ'י) כדי "לרבע" את המלבן המקורי, מה שמביא לקירוב סביר של הערך של $\sqrt{2}$ (גרבר, תשע"ז). המתמטיקה היא אחד מ"כלי העבודה" הבסיסיים לכל חקר מדעי באשר הוא, כלים שאף מקרבים את האדם להכרת בוראו, על פי הרמב"ם (שמונה פרקים). העיסוק במתמטיקה עצמה פותח חלון לעולם מופלא, והמביט בו מנקודת הסתכלות מתמטית מדעית נעור להתפעם מיופיו ולחוש בפנימיותו, בבחינת "מה רבו מעשיך ה'...." (תהלים קד, כד).

מאמר זה יוצא בקריאה למורים ומחנכים העוסקים במתמטיקה והמלמדים את מקצועות היהדות, לעסוק בתאוריה ובפרקטיקה של הוראת המתמטיקה מנקודת מבט יהודית: להציג את ההיבטים המתמטיים הנדרשים לניתוח סוגיות שבספרות התלמודית והרבנית, ולהראות את בקיאותם המופלגת ואת היצירתיות של חכמי ישראל בתחום זה. לא צירפנו למאמר מערכי שיעור, שכן אנו מציעים כאן מודל כללי לחינוך מתמטי בשכבות גיל למיניהן. כל מורה יוכל לבנות על פי המודל מערכי שיעור מפורטים להבאת הרעיונות על פי רמת התלמידים בכיתה. הנושאים המוסברים כאן מופיעים במקורות היהדות כמשמעם בימינו או במשמעות דומה, שכן הטרמינולוגיה שמשמשת לתיאור ביטויים מתמטיים ואחרים עברה שינויים בחלוף התקופות ובמעבר בין תרבויות. הדבר טעון בדיקה, ולכן נביא דוגמה.

מעגל הוא מקום גאומטרי של הנקודות (M) במישור הנמצאות באותו מרחק (R) מנקודה נתונה (A). האזור במישור התחום במעגל נקרא עיגול וקורה שמישהו קורא למעגל "היקף המעגל", ואז מדבר לדוגמה על נקודה בהיקף המעגל. אך כאמור המעגל הוא מקום גאומטרי, כלומר קבוצת נקודות, וההיקף הוא מספר ממשי חיובי המודד לדוגמה את אורך החוט הדרוש לכסות בדיוק את המעגל (איור 1). עם זה בלשון האמוראים (חכמי התלמוד) "היקף המעגל" מציין את מה שאנו קוראים היום שטח העיגול (ראו מסכת סוכה דף ז ע"ב) בעניין הסוכה העגולה, ומסכת עירובין (דף עו ע"א) בעניין החלון העגול – בשתי הסוגיות מתוארת אותה שאלה גאומטרית, אבל בשני הקשרים שונים זה מזה). לכן כשעוסקים בנושא מתמטי לפי ניסוח מלפני מאות שנים, חשוב לתרגם אותו לשפה המתמטית בת ימינו.

בהמשך נראה מקרים נוספים שבהם יש צורך לתרגם מהשפה של תקופת העבר לשפה בת ימינו.



איור 1: מעגל ועיגול

לעיתים נמצא שימוש בנושאים מתמטיים כנושאים מחשבתיים-פילוסופיים, שאפשר לדון בהם במערך הנהגות האדם והליכותיו, גם מחוץ למישור המתמטי ומחוץ למישור החישובי. כך המדען הדגול, המתמטיקאי והפיזיקאי אייזיק ניוטון, סבר שבורא העולם הצפין את סודות הבריאה במידותיו של המשכן ובמידותיהם של בתי המקדש בירושלים, וסודות כמוסים אלה הוצפנו גם בטקסי הקורבנות ובעבודת הכוהנים והלוויים. לדעת ניוטון, היחסים המתמטיים המדויקים להפליא בין גרמי השמיים במערכת השמש וחוקי הכבידה השולטים בכול היו ידועים לכוהנים בעולם העתיק, וכי פולחן של כוהנים סביב אש ביטא את המערך המופלא של גרמי השמיים ואת החישובים המתמטיים של תנועת כוכבי הלכת סביב השמש (לשם-רמתי, 2015).

נציג כאן שני נושאים מתמטיים הנמצאים במקורות היהדות והנלמדים על פי תוכנית הלימודים הפורמלית בכיתות חטיבת הביניים והחטיבה העליונה. הבאת חומר לימודי מתמטי מתוך מקורות היהדות משמשת דוגמה ללמידה רב-תחומית המתקבלת כיום בברכה במערכת החינוך. שילוב מקורות יהודיים בנושאים מתמטיים יעשיר את למידת המתמטיקה כפי שלמידה של ההיסטוריה ושל הפילוסופיה של המדע מעשירה את הלמידה המדעית. החיבור בין המקורות היהודיים לנושאים המתמטיים והצגתם יפתחו הסתכלות לא שגרתית אצל הלומד. השימוש בלשון חכמינו יגוון את תהליך הלמידה, וכך יתאפשר לעודד את הצד האינטואיטיבי של החשיבה מעבר לחשיבה פורמלית. הלמידה תוכל לתאר מצבים בעולם המציאותי ולהיות בעלת משמעות.

1. יש מקום להעיר שרבים סבורים שהמילה "תיקו" היא ראשי תיבות של "תשבי (כלומר אליהו הנביא) יתרץ קושיות ובעיות", אבל הפשט הוא שפירוש מילה זו בארמית הוא: "תעמוד", כלומר תעמוד בלי הכרע עד בוא אליהו הנביא.

במאמר זה נתאר את הנושאים המתמטיים האלה: שורש ריבועי ושיפוע של קו ישר במישור. קופל ומרצבך (תשמ"ט) הקדישו את הגיליון הראשון של כתב העת הגיון לניתוח דרכי החשיבה המתמטית של חז"ל. עבודות כגון אלה ממשיכות להתפרסם בארץ, בכתב העת בדד ובסדרת הספרים "לדעת בארץ דרכך" (שאינה מתמקדת רק בנושאים מתמטיים). הייחודיות של מאמרנו זה היא הפנייה אל הצד החינוכי, כלומר היכולת לעשות במערכת החינוך הישראלית פעילויות של הוראה ולימוד מתמטיים באמצעות טקסטים תלמודיים ורבניים. השאלה הפדגוגית הנשאלת כאן היא דו-כיוונית: האם בדרך הוראתם של מושגים מתמטיים ראוי לקשרם גם להיבטים תרבותיים? וכנגד זה האם בדיון ולימוד של סוגיות תלמודיות ראוי לעסוק בנושאים מתמטיים בני זמננו? לדעתנו, שתי התשובות חיוביות, ולכך מכוונת תרומתנו במאמר זה.

שורש ריבועי

לפי אבן שושן (2010) שורש הוא "גודל אשר אם נעלהו בחזקה מסוימת ייתן מספר נתון"; השורש מסומן באלגברה בסימן $\sqrt{\ }$, לדוגמה השורש השלישי של 8 שווה 2 ($\sqrt[3]{8}=2$).

שורש ריבועי במשמעותו המתמטית

במתמטיקה פעולת חישוב השורש של מספר ממשי היא הופכית לפעולת העלאה בחזקה. סימן השורש הריבועי נגזר מן המילה radix (שורש בלטינית) והסימן הוא עיוות של האות r. לפחות כך כתב אוילר (Euler, 2021).

$$\begin{cases} x=\sqrt{a} \\ a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=a \\ x\geq 0 \end{cases}$$

שורש ריבועי של מספר ממשי לא שלילי a נתון, הוא מספר ממשי לא שלילי שאם יוכפל בעצמו ייתן a. הפעולה החישובית של מציאת שורש ריבועי נקראת הוצאת שורש ריבועי. יש להבדיל בין המושג (concept) לתהליך (process).

בדור האחרון לא מלמדים את התהליך עצמו, ומסתמכים על ידע קודם בשביל מקרים פשוטים ועל המחשבון בדרך כלל. כשמדברים על שורש ריבועי מסמנים אותו רק בסימן $\sqrt{\ }$ בלי צורך לציין את הספרה 2, לדוגמה $\sqrt{1.21}=1.1$.

הוצאת שורש ריבועי במשמעותו המתמטית במקורות:

כיצד לזרוע מרב מיני זרעים מבלי לעבור על איסור כלאיים?[2]

המשנה (כלאיים ג, א) דנה בנושא "זריעה בערוגה". הדיון נסוב על שיעור ההרחקה שחייבים להרחיק בין מינים שונים של זרעים:

עֲרוּגָה שֶׁהִיא שִׁשָּׁה טְפָחִים עַל שִׁשָּׁה טְפָחִים,[3] זוֹרְעִים בְּתוֹכָהּ חֲמִשָּׁה זֵרְעוֹנִים, אַרְבָּעָה בְּאַרְבַּע רוּחוֹת הָעֲרוּגָה, וְאֶחָד בָּאֶמְצַע. הָיָה לָהּ גְּבוּל גָּבוֹהַּ טֶפַח, זוֹרְעִין בְּתוֹכָהּ שְׁלֹשָׁה עָשָׂר, שְׁלֹשָׁה עַל כָּל גְּבוּל וּגְבוּל, וְאֶחָד בָּאֶמְצַע. לֹא יִטַּע רֹאשׁ הַלֶּפֶת בְּתוֹךְ הַגְּבוּל, מִפְּנֵי שֶׁהוּא מְמַלְאֵהוּ. רַבִּי יְהוּדָה אוֹמֵר, שִׁשָּׁה בָּאֶמְצַע.

דברי מפרשי התלמוד והראשונים בעניין

הרמב"ם בפירושו למשנה (כלאים ג, א):

וכשתסתכל בצורה הזאת היטב, תמצא מדת כל מסומן מן השישה המסומנים שבאמצע ג"ט,[5] ותמצא המרחק בין שני צלעים שהם משתנים מצלעות אותם המסומנות, גדר ג' ורביע והוא אחד וד' חמישיות בקירוב...

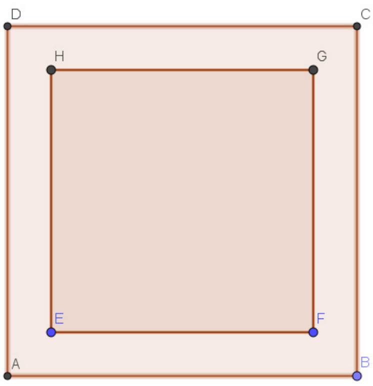
רבי סעדיה שוראקי (1973) מסביר כיצד אפשר לחשב את ה"גדר" של שלושה ורביע:

"תחלק כל טפח לחמישיות שתי וערב [...] הרי לך שיש בכאן ט' חומשין טפח, שהוא טפח וד' חומשין בקירוב, מפני הרביע הנז' עם הפ"א, אין לו גדר ידוע" (עמ' 120).

המילה גדר מציינת כאן שורש ריבועי. ערכו אינו ידוע מכיוון שהערך המבוקש כאן הוא מספר אי-רציונלי. יש לזכור שמספרים אי-רציונליים הוגדרו כעבור זמן. זאת אחת הסיבות לריבוי סוגיות בתלמוד ובספרות הרבנית שבהן יש צורך בחישובים מקורבים כגון אלה.

ניסוח הבעיה והוכחתה בשפה מתמטית בת זמננו

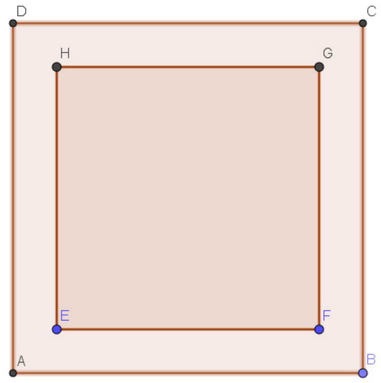
מבקשים לזרוע כל מיני מינים של גידולים חקלאיים בחלקת שדה (ערוגה) שיש לה צורת ריבוע. אורך הצלע של הערוגה הוא 8 טפחים (איור 2). שפת הערוגה היא הריבוע EFGH ומסביב לה בנויה ערוגה אחרת, גבוהה יותר מהערוגה הפנימית. הפרש הגבהים בין הריבוע הפנימי לחיצוני הוא טפח. השפה החיצונית של הערוגה הגבוהה היא הריבוע ABCD. לשני הריבועים אותו מרכז והצלעות שלהם מקבילות בהתאמה.



2. התורה אוסרת לזרוע זרעים בין שורות גפנים (מה שנקרא כלאי הכרם). ישנו גם איסור לזרוע מספר סוגי זרעים במפולת יד אחת. החכמים עשו סייג לדבר וזריעת שני מינים שונים זה מזה דורשת הרחקה מסוימת. אנו דנים כאן בכמה מהשאלות הנובעות מצורות גאומטריות בשטח המיועד לזריעה.

3. טפח הוא יחידת אורך הלכתית. לפי השיטה של הגר"ח נאה טפח שווה ל-8 ס"מ. לפי שיטת החזו"א טפח שווה ל-9.6 ס"מ. כדי להיות בטוחים בקביעה הלכתית הולכים לחומרה, כלומר לפעמים מחשבים מידות לפי הגר"ח נאה ולפעמים לפי החזו"א.

ומסביב לה בנויה ערוגה אחרת, גבוהה יותר מהערוגה הפנימית. הפרש הגבהים בין הריבוע הפנימי לחיצוני הוא טפח. השפה החיצונית של הערוגה הגבוהה היא הריבוע DCBA. לשני הריבועים אותו מרכז והצלעות שלהם מקבילות בהתאמה.



איור 2: חלקת שדה (ערוגה) בצורת ריבוע הנתון בריבוע הגבוה ממנו

הרמב"ם מפרש את דברי רבי יהודה ואומר שהמרחק בין הצלעות הוא יותר מטפח וחצי. היחס בין אורכי הצלעות הוא בקירוב 1. עם הסימונים של איור 2, נאמר שהמרחק בין הישרים (BA) ו-(FE) שווה לטפח אחד והמרחק בין הנקודות A ל-E הוא $\sqrt{2}$ טפח (בקירוב 1.414 טפח). לפי שיטת הרמב"ם המרחק המותר בין שני זרעים הוא טפח וחצי. מאחר שנוצר משולש ישר זווית (מסומן באיור 3 ומודגש בחיצים) המרחק בין הזרעים הוא היתר של אותו משולש, וכדי למצוא את אורכו של זה (ולוודא שהמרחק בין הזרעים גדול מהמינימום הנדרש) יש להשתמש במשפט פיתגורס (כהן, תשע"ז, עמ' רכ). אורך היתר של המשולש הוא השורש של סכום ריבועי שני הניצבים, מכאן הדרישה לחשב שורש ריבועי.

בדוגמה המתוארת יש לחשב את השורש הריבועי של 3.25 (שלוש ורבע). הזכרנו את הדרך שבה שוראקי (1973) מציע לחשב שורש ריבועי ממספר רציונלי.

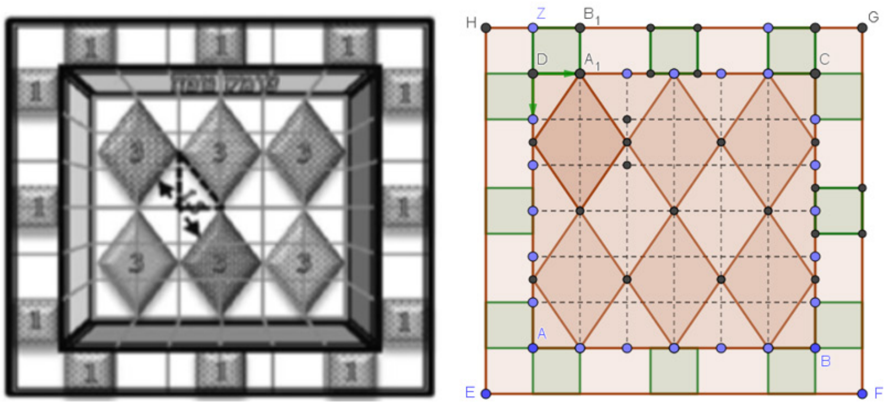
באיור 3 מתוארת חלקת שדה (ערוגה) ובה נזרעים כל מיני זרעים. השטחים הכהים באיור 3ב מציינים את שטחי הזריעה. הזריעה נעשית כך שייזרעו כמה שיותר מינים מבלי שתהיה ביניהם חפיפה בשטח כלשהו משטחם. יש לחשב את אורך צלע המעוין, שהיא המרחק בין שני מינים ומתוארת בחלק השמאלי של האיור כקטע CA. אורך הקטע BC טפח אחד, ואורך הקטע CA טפח ומחצה. שוראקי (1973) מציע דרך להוצאת שורש ממספר רציונלי בהרחבת המונה והמכנה למספרים ששורשם ידוע, או בקירוב לאותם מספרים[5].

חישוב השורש הריבועי של $3\frac{1}{4}$: $\quad AC = \sqrt{1^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{3\frac{1}{4}}$

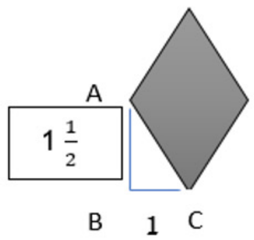
$$\frac{3\frac{1}{4}\cdot 25}{25} = \frac{81\frac{1}{4}}{25}$$ (המרחק בין המינים)

$$\sqrt{\frac{81\frac{1}{4}}{25}} = \frac{\sqrt{81\frac{1}{4}}}{\sqrt{25}} \approx \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$

בערוגות ששטחן קטן וזורעים בהן מעט מכל מין של זרעים, הקלו חכמים שאין צורך להרחיק בין שני מינים, אלא כשיעור היניקה שהוא טפח ומחצה (זו דעתם של כמה מפרשים על המשנה הנזכרת לעיל במסכת כלאיים ג, א, כגון רש"י, רמב"ם, רבי עובדיה מברטנורא). נוסף על כך, יש לומר שאם שני מינים נוגעים זה בזה בנקודה בלבד, ולא בצלע שלמה או בחלק מצלע – הרי זה מותר כי נראה בבירור שהמינים לא נזרעו בערבוביה (איור 4).



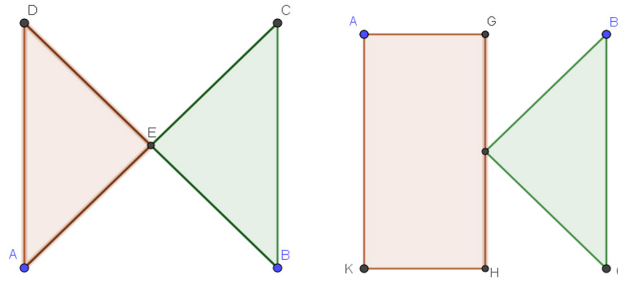
(א) (ב)



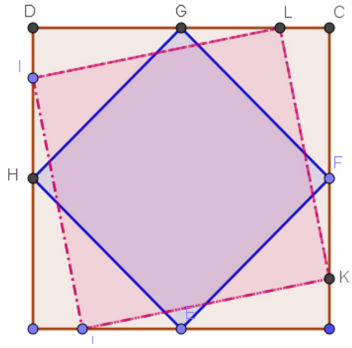
איור 3: זריעת 18 מינים בערוגה עם גבול לפי שיטת רבי יהודה[4]

4. איור 3ב נועד גם להמחיש את הפרשי הגובה בין המפלסים השונים זה מזה, ולכן הוא אינו תואם את המוסכמות המודרניות בשרטוט מפה של שטח מישורי. לפיכך אנו מראים את אותה המציאות באיור 3א. איור 3א התקבל בעזרת התוכנה GeoGebra. ישנן כמה דרכים לצייר עם התוכנה, החל מציור נקודה נקודה וציור קטעים, כל אחד בפני עצמו, וכלה בשימוש בתכונות מתקדמות יותר, כגון ציור תאים בסיסיים (ריבוע אחד, מעוין אחד וכדומה) והעתקתם בעזרת טרנספורמציות המישור, כגון הזזה או סיבוב או שיקוף. היישומון (applet) שבנינו כאן נגיש לקוראי מאמר זה בכתובת https://www.geogebra.org/m/tnheed28. נציין שברוב הכיתות בישראל התוכנה הדינמית הזאת בשימוש אצל המורים והתלמידים. זאת הזדמנות להשתמש בכלי מודרני להוראת נושא הקשור למקורות תורניים ותלמודיים קדומים.

5. נכתב בקירוב, שכן שווה ל-3.24, ובמדויק יותר השורש הריבועי של 3.25 שווה ל-...1.8027.



איור 4: הדרכים המותרות במצב שבו שני המינים נוגעים בקודקוד[6]

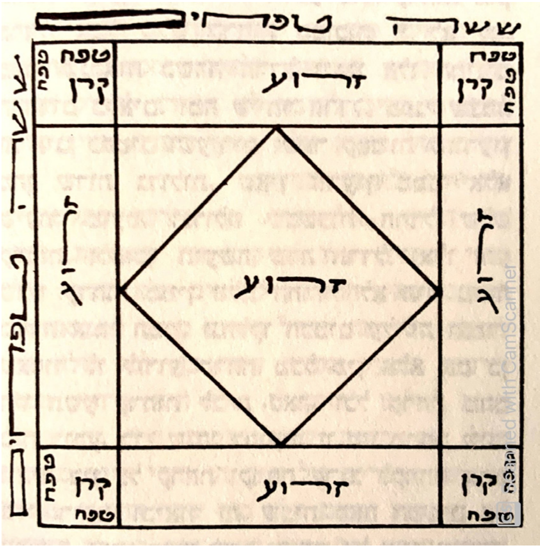


איור 5 : ריבוע חסום בריבוע

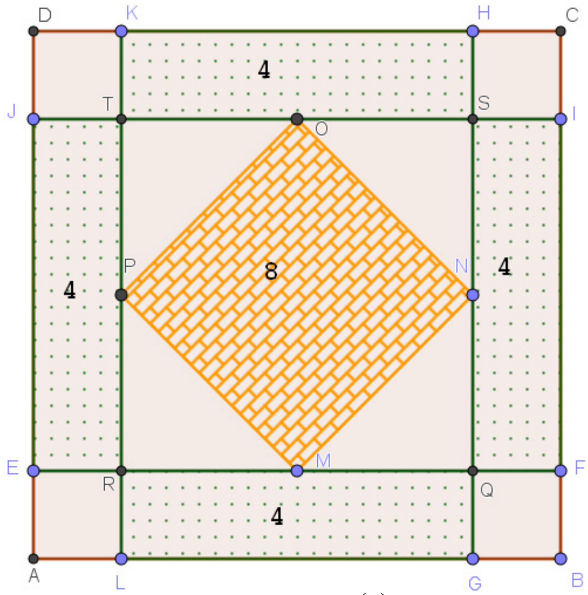
במצב שנתון בו ריבוע פנימי (נקרא לו: ריבוע חסום) שקודקודיו הם אמצעי הצלעות של הריבוע החיצוני (נקרא לו: ריבוע חוסם). להבנת המשנה לעיל, ראו איור 5. רואים בריבוע EFGH ריבוע חסום בריבוע ABCD. לא מצאנו בספרות הגדרה מתמטית סטנדרטית של ריבוע חסום בתוך ריבוע, וכאן הרמב"ם עוסק במקרה הפרטי שתיארנו, לא בדוגמה של ריבוע כמו הריבוע IJKL (מקווקו). אפשר להיעזר בכלל הקובע ששטח המרובע החסום שווה למחצית שטחו של המרובע החוסם.

המשנה מנסה לתת כמה דרכים כיצד לזרוע חמישה מינים מגוונים בערוגה בגודל שישה על שישה טפחים, ואפשר לבדוק בעבור כל הצעה מהו השטח המנוצל לזריעה.

דרך א: באיור 6 אפשר לראות את אופן זריעת הערוגה לפי שיטת הרמב"ם ורע"ב. השטח הזרוע: 24 ט"ר.[7] כדי לקיים את הכלל המופיע באיור 4 שלפיו המינים השונים נוגעים רק בקודקודי המצולעים, זורעים ארבע ערוגות בארבע רוחות השמיים באורך ארבעה טפחים וברוחב טפח. ליד כל קודקוד של הריבוע QRTS, משאירים ריבוע ריק שאורך צלעו הוא טפח אחד (לדוגמה DKTJ), ומין אחד באמצע בצורת ריבוע. במצב זה השטח הזרוע של הערוגה הוא 24 ט"ר. 4 ט"ר מכל צד, לכן בכל הצדדים יחד – 16 ט"ר. הריבוע האמצעי שווה בשטחו למחצית השטח הפנימי שנשאר, כלומר 8 ט"ר.



(א) ציור הרמב"ם (משה בן מימון, 1963, עמ' קי)



(ב) ציור בעזרת תוכנה

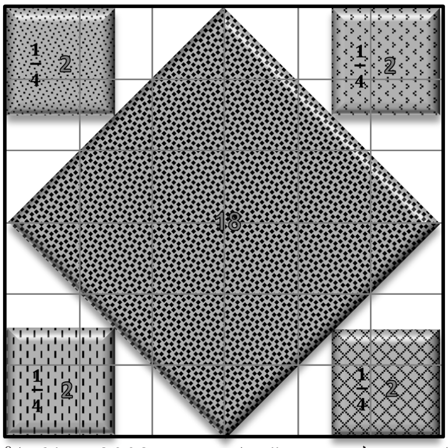
איור 6: אופן זריעת הערוגה לפי שיטת הרמב"ם ורע"ב (דרך א)

דרך ב (איור 7): ארבעת המינים נזרעים בארבע הפינות של הערוגה, מין בכל פינה בריבוע שאורך הצלע שלו הוא טפח וחצי, והמין החמישי זרוע באמצע בריבוע שקוקודיו הם אמצעי הצלעות של הערוגה (נשאיר לקורא לבדוק האם האמצעים של צלעות הריבוע האמצעי הזה נוגעים בקודקודים של ארבעת הריבועים בפינות השדה), ועל כן שטחו של הריבוע המרכזי שווה למחצית שטח הריבוע החיצוני, כלומר 18 ט"ר. לכן השטח הזרוע שווה ל-27 ט"ר. שכן, $(1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}=)\,2\frac{1}{4}$ ט"ר בכל פינה, הרי בכל ארבע הפינות יחד: $4\cdot 2\frac{1}{4}=9$ ט"ר.

6. הציורים האלה דומים לציורים במאמר של רובינשטיין (2016), עמ' 5, https://stwww1.weizmann.ac.il/wp-content/uploads/2016/08/8_3.pdf

7. ט"ר הוא ראשי תיבות של טפח רבוע, כמו שמ"ר הוא ראשי תיבות של מטר רבוע.

(א) ציור הרמב"ם (משה בן מימון, 1963, עמ' קיא)



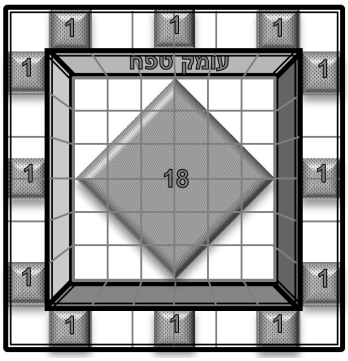
(ב) ציור על פי הרמב"ם (רוזנבוים, 2003, עמ' 76)[8]

איור 7: זריעת הערוגה לפי שיטת הרמב"ם ורע"ב (דרך ב)

עוד מצב שהמשנה דנה בו הוא שסביב הערוגה יש טפח אחד גבוה נוסף מכל צדדיה (בהמשך נקרא לאזור הזה ה"גבול", כלומר הערוגה בגודל 8x8 טפחים). במצב זה המשנה מביאה שתי דרכים נוספות המגדירות כיצד אפשר לזרוע בה מינים מגוונים של גידולים חקלאיים.

א. דרך זו מתוארת באיור 8. נזרעים 21 מיני זרעים על הערוגה הגבוהה, שלושה מכל צד, ומין נוסף נזרע בתוך ערוגה בצורת ריבוע חסום בריבוע הערוגה המקורי. על כן שטח הריבוע החסום הוא 18 ט"ר, ובסך הכול נזרעים 13 מינים. נמצא שסך כל השטח הזרוע בערוגה עם הגבולות שווה ל-30 (= 12+18) ט"ר.

ב. זריעת ערוגה לפי שיטת רבי יהודה. דרך זו מתוארת בציור 3 לעיל. נזרעים 21 מינים על הערוגה הגבוהה ו-6 מינים באמצע ב-6 ערוגות בצורת ריבוע בערוגה הפנימית, כלומר 81 מינים ביחד. לפי הצעה זו ששת המינים הנזרעים בתוך הערוגה ייזרעו בשישה ריבועים הנוגעים זה בזה בקודקודיהם בלבד, כאשר כל מעוין חסום במלבן בגודל של 3x2 טפחים, ועל כן שטח כל מעוין הוא מחצית משטח המלבן שהוא חסום בו. מאחר ששטח המלבן הוא 6 טפחים, שטח המעוין יהיה 3 טפחים רבועים. נמצא שהשטח של 6 מעוינים אלה שווה ל-18 (=3x6) ט"ר, ובכל הערוגה יחד עם הגבול 30 (=18+12) ט"ר.



איור 8: זריעת הערוגה ב-13 מינים
(כהן, תשע"ז, עמ' רכ)

שיפוע של ישר

אחת מאבני היסוד של המתמטיקה, במיוחד בחטיבת ביניים ובבית הספר התיכון, היא הטיפול בשיפועים (של קווים ישרים במישור) ובמדידתם. האנליזה הנשענת על חקירת פונקצייה וניתוחה בנויה במהותה על חישוב השיפוע של המשיק לגרף הפונקציה בכל נקודה ונקודה (אם יש משיק כזה). נשתמש בסימונים המקובלים בימינו. נסמן ב-f פונקציה ממשית של משתנה ממשי. הגרף של f הוא המקום הגאומטרי של הנקודות $M(x,y)$. במתמטיקה בת זמננו חישוב השיפוע נשען על מדידת היחס בין מידת השינוי ב-y כך ש $y=f(x)$. אם f היא פונקציה קווית, כלומר פונקציה הנתונה בנוסחה מהצורה $f(x)=ax+b$ (כאשר a ו-b הם מספרים ממשיים נתונים), אזי הגרף של f הוא קו ישר לא מקביל לציר ה-y (נסמן אותו ב-(L), המספר הממשי a הוא השיפוע של הישר L הזה. במילים אחרות: יהיו x_1 ו-x_2 שני מספרים ממשיים שונים. נסמן $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, $\Delta x=x_2-x_1$ ו- $\Delta y=y_2-y_1$. בהמשך נקרא ל- Δx ההפרש האופקי ול- Δy ההפרש האנכי.

השיפוע של הישר L הוא $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. הוא בלתי תלוי בבחירה של x_1,x_2. המנה $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ מבטאת את היחס בין קצב הגידול של שיעור y לקצב הגידול של x.

בגאומטריה יש המתארים את השיפוע של ישר כ"עוצמת התלילות" שלו, ערך (מוחלט) גדול של השיפוע מראה על תלילות גדולה, כלומר זווית קטנה יותר בינו לקו ניצב אנכי.[9] תזכורת:

א. לכל ישר שאינו מקביל לציר ה-y יש שיפוע. השיפוע הזה הוא מספר ממשי. לישר המקביל לציר ה-y אין שיפוע.

ב. במונחים של הנדסה אנליטית, ישרים מקבילים כאשר השיפועים שלהם שווים או ששניהם מקבילים לציר ה-y.

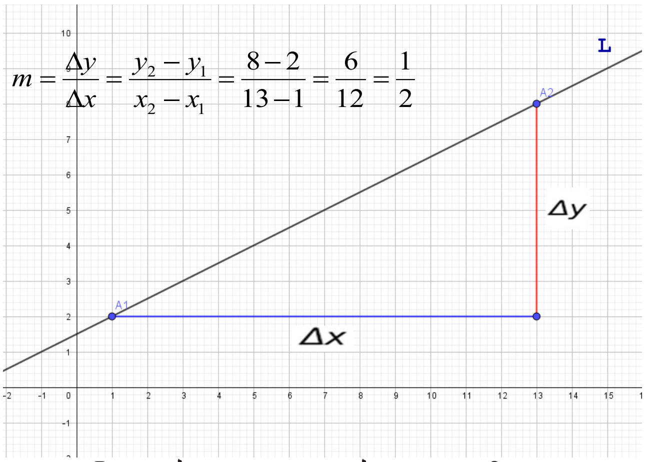
ישרים ניצבים זה לזה כאשר מכפלת השיפועים שלהם שווה ל-1- או שאחד מהם מקביל לציר ה-x והשני מקביל לציר ה-y.

8. בזמן פעילות בנושא כגון זה, אנו מציעים שלא להסתמך על ציור קיים בספרות, אלא להטיל על התלמידים לשרטט את הציור כחלק ממשימות הלימוד. אפשר לעשות את זה ידנית בסרגל ובעיפרון, אבל הצעתנו היא להשתמש בתוכנה לגאומטריה דינמית כגון GeoGebra. בעינינו יש תועלת רבה לשימוש בטכנולוגיה מודרנית כדי להבין סוגיה מהספרות התלמודית הקלסית.

9. אפשר לקבל המחשה בעזרת היישומון גאוגברה בקישור https://www.geogebra.org/m/vpepmdcf (דנא-פיקארד, ח"ת).

דוגמה: נתון ישר L העובר דרך הנקודות: $A_1(1,2)$ ו-$A_2(13,8)$ (ראו איור מס' 9). כיוון ששיעורי ה-x של הנקודות שונים, הישר L אינו מקביל לציר ה-y. השיפוע m של הישר L מתקבל ככתוב בהמשך:

ההפרש האנכי וההפרש האופקי:



איור 9: המחשה של חישוב השיפוע של הישר L

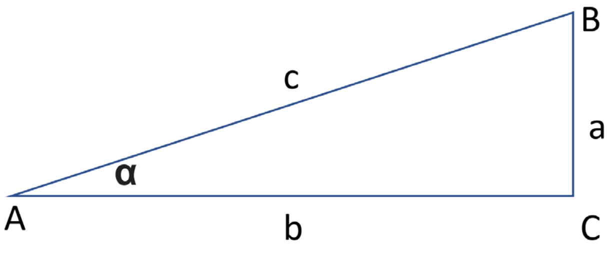
השיפוע במשמעותו המתמטית ובמקורות היהודיים

נבחן כאן כיצד מודדים שיפועים בתלמוד, לאילו מטרות ובאלו הקשרים מודדים שיפועים. נבדוק כיצד מבטאים זאת במקורות מבחינה מתמטית, ומהי "השפה" המתמטית שמשתמשים בה כדי לבטא את הדברים. בדרך כלל אפשר לומר שכפי הנראה נקודת המוצא של מדידת שיפוע בעבר הייתה הפוכה לגישה שאנו נוקטים היום. המדידה עסקה **ביחידת האורך האנכית**, בעוד היום אנו עוסקים **ביחידה האופקית** לפי המפורט להלן:

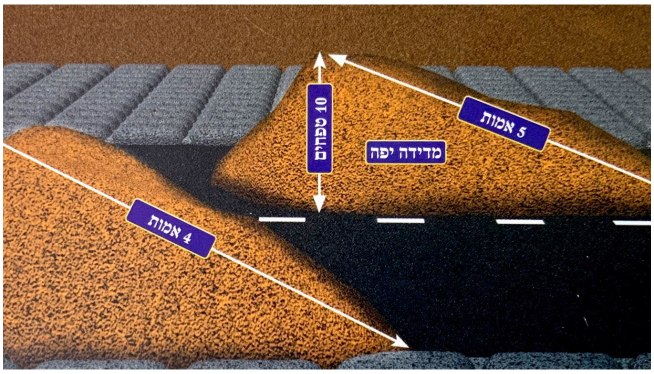
נדון באיור 10. המשולש ABC הוא משולש ישר זווית כך שהניצב AC (שאורכו מסומן באות b) הוא על ה"קרקע". הניצב CB הוא מאונך לקרקע. חכמי התלמוד מעוניינים במדידת מה שהיום היינו מכנים התלילות של היתר AB. הדבר הזה נמדד כיום במתמטיקה באמצעות השיפוע של הישר AB שהוא הטנגנס של הזווית α. ידוע ש-$\tan\alpha = \frac{a}{b}$.

לא כך מודדים את התלילות בתלמוד, אלא מתארים אותה ב- $\sin\alpha$ ששווה אורך הצלע a מחולק באורך היתר c.

במסכת עירובין נח ע"ב: "אמר רבא: לא שנו אלא בהר המתלקט עשרה מתוך ארבע. אבל בהר המתלקט עשרה מתוך חמש – מודדו מדידה יפה" (ראו איור 11).

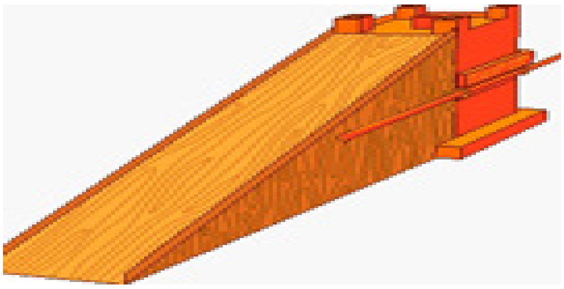


איור 10: השיפוע המיוצג כצלע היתר במשולש ישר זווית



איור 11: הר המתלקט[10]

הבעיה היא למדוד מה שנקרא תחום שבת. החכמים קבעו שהאדם לא יצא בשבת יותר מאלפיים אמה (כקילומטר אחד) ממקום מושבו. לא כאן המקום לסכם את הדפים המרובים המוקדשים לכך בתלמוד. נעסוק בבעיה המקומית שהבאנו: אם המדידה היא על קרקע אופקית, מודדים כרגיל. אם בדרך פוגשים תל, מודדים את התלילות של החלק המשופע: אם הוא קטן מהמספר המתואר בדברי רבא, מודדים על פני הקרקע. אם השיפוע גדול יותר, מודדים את ההיטל על מישור אופקי (תאורטי). על פי הסימונים של איור 10, במקרה השני, האורך של הצלע b קבוע, ולא האורך c. ההר המתלקט עשרה מתוך ארבע משמעותו שאורך היתר הוא 4 אמות כאשר אורך הניצב BC הוא 10 טפחים (4 אמות מהוות בערך 2 מטרים, ועשרה טפחים הם בערך 80 ס"מ לפי שיטת הגר"ח נאה, ומטר אחד לפי שיטת החזון איש). דוגמה נוספת: נאמר בספר שמות (כ, כב): "וְלֹא תַעֲלֶה בְמַעֲלֹת עַל מִזְבְּחִי". התורה אוסרת את העלייה למזבח באמצעות מדרגות, ולכן עולים אליו באמצעות כבש (ראו איור 12). רש"י מפרש: "כשאתה בונה כבש למזבח לא תעשהו מעלות מעלות, אשקלו"ש בלע"ז[11] (שטופען שטאפלען), אלא חלק יהא ומשופע".



איור 12: כבש המזבח[12]

מידות הכבש מתוארות במשנה (מידות ג, ג) ושם כתוב: "וכבש היה לדרומו של מזבח, שלושים ושתיים (אורכו) על רוחב שש עשרה".

לכאורה יש סתירה ממשנה למשנה, שהרי המשנה כותבת במידות ה, א-ב: "המזבח שלושים ושתיים [...] הכבש והמזבח שישים ושתיים...". נתרגם לסימונים שלנו:

"הכבש" (כלשון המשנה) הוא 62-32=30 אמה.1310
אם כך, מה אורך הכבש? שלושים אמה או שלושים ושתיים אמה?

10. מתוך המאמר המבואר על מסכת עירובין, מאורות הדף היומי, תשרי תשס"ו.
11. Escalier בצרפתית.
12. https://sites.google.com/a/madaimas.org.il/the-mscan/mzbh-hnhoset
13. אמה היא יחידת מידה קדומה למדידת אורך של חפצים. על פי רוב שיעור האמה הוא שישה טפחים. לשיטת הרמב"ם אורכה במידות ימינו 46.71324 ס"מ (אמה (יחידת מידה), 2020).

הרמב"ם (הלכות בית הבחירה, פרק ב' הלכה י"ג), מתייחס לקושי הזה: "וכבש היה בנוי לדרומו של מזבח, אורכו שלושים ושתיים אמה ... והיה אוכל בארץ שלושים אמה מצד המזבח, ופורח ממנה אמה על היסוד ואמה על הסובב,...וגובה הכבש תשע אמות.." כלומר מדובר ב-32 אמות אופקיות, כששתי אמות חופפות לכבש ולמזבח.

לפני כל דבר, נסביר בקצרה מהו הסובב על פי האתר ויקישיבה (מזבח העולה, 2012):

> סובב – מעין מדרגה ברוחב אמה, לאחר שהמזבח עלה שש אמות מעל פני הקרקע. הסובב מקיף את כל המזבח (אורכו 30 אמה לכל כיוון), וכבש מיוחד הוביל אליו. הכהנים הולכים על הסובב בעשיית חלק מן הקרבנות.ח"ת)

באיור 13, בחלק המסומן בחץ – חלק 3, מופיע המשטח שהכוהן עומד עליו ונקרא "הסובב".

שתי שיטות החישוב של שיפוע הכבש מתוארות באיור 14. שיטה א' על פי ביאורי הגר"א[15] למסכת מידות ג, ג: "אורכו שלושים ושתיים אמה"... למטה בארץ היה כן אבל בשיפועו היה יותר".

שיטה ב' על פי תוספות יום טוב למשנה[13], עירובין ה, ד: "שהכבש ל' אמה זהו במשך שטחה על הארץ [...] אבל מדרון שיפועו [...] שהוא ל"ב אמה".

רש"י מתאר בפירושו לזבחים סג ע"א את השיפוע של הכבש:

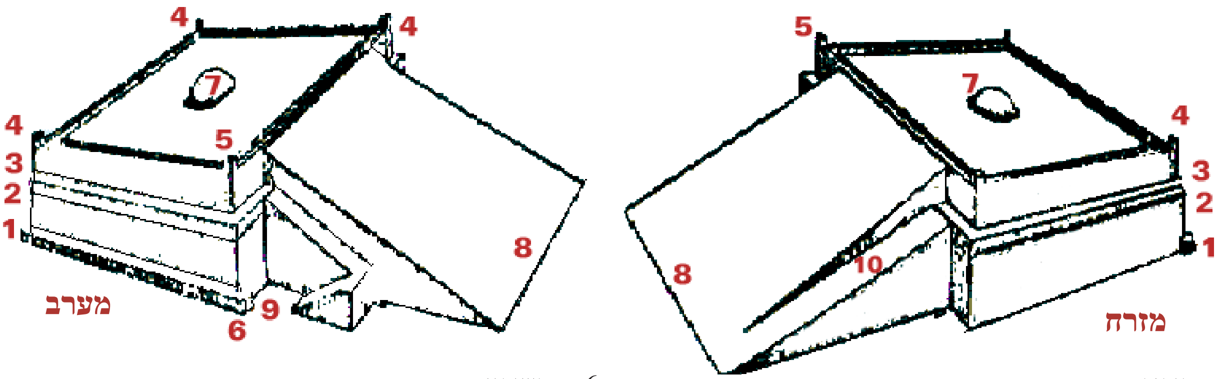
> אמר רמי בר חמא [...] כל הכבשים גדולים וקטנים שהיו שם היה להן שיפוע שלש מאות לאמה גובה, חוץ מכבש הגדול של מזבח, שעולין בו במשא איברים כבידים, והוא חלק, צריך שיהא משופע ביותר ונוח לעלות. לכך האריכוהו **ל"ב שיפוע לט' אמות** הרי **לכל אמה** (גובה), שלוש אמות ומחצה, ואצבע, ושליש אצבע... [ההדגשות לא במקור] (טפח= 4 אצבעות, אמה= 6 טפחים= 24 אצבעות).

הגמרא אומרת ששיפוע כל הכבשים שהיו בבית המקדש היה ביחס של שלוש אמות לאמה, שיפועם (היתר) היה 3 אמות וגובהם אמה. אם כן, שיפוע הכבש היה כזה שלכל אמה בגובה היו שלוש אמות באורך. כבש מזבח העולה היה מתון יותר, לכל אמה בגובה כשלוש וחצי אמות באורך, שיפועו (היתר) היה 32 אמות וגובהו 9 אמות כדי להקל על הכוהנים בנשיאת איברי העולה ומחשש להחלקה. פרט נוסף שהגמרא מביאה הוא שהכבש לא היה מחובר למזבח: "אומר היה ר"ש בן יוחי אויר יש בין כבש למזבח" (זבחים סב ע"ב).

14. בשביל מאמרנו זה, אין צורך בכל הפרטים והמידות ועניינו הוא הסובב, חלק 3. ביקשנו להביא משהו נאמן למקור, והצגנו את שני הציורים זה ליד זה כפי שמופיעים באתר. ציון המידות יכול לתת רעיונות נוספים לקורא להרכיב משימה מתמטית הקשורה למזבח.

15. רבי אליהו בן שלמה זלמן (ט"ו בניסן ה'ת"פ, 23 באפריל 1720–י"ט בתשרי ה'תקנ"ח, 9 באוקטובר 1797), שנודע בכינויים: הגאון מווילנה ובראשי תיבות: הַגְּרָ"א (הגאון רבנו אליהו), היה פוסק, מקובל ואיש אשכולות, שבלט במעמדו החריג בתקופת האחרונים כסמכות רבנית עליונה. הגר"א היה גדול במקרא, בתלמוד ובקבלה, פוסק מקורי ומרכזי, ובקיא במדעים. הוא כתב את הספר "איל המשולש: בהנדסת המישור. אגדות רבות נכרכו בשמו. הוא היה ידוע בהתמדתו הבלתי רגילה (מתוך אתר Wikipedia, עם שינויים).

16. רבי גרשון שאול יום-טוב ליפמן הלוי הלר ולרשטיין (ה'של"ט, 1579–ו' באלול ה'תי"ד, (1654 מכונה ה"תוספות יום טוב". היה מגדולי חכמי אשכנז ופולין ומגדולי פרשני המשנה, בעל פירוש "תוספת יום טוב" על המשנה שמכונה על שמו (מתוך אתר Wikipedia).

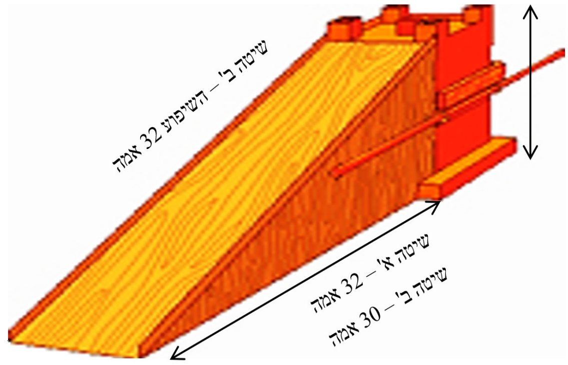


1. היסוד
2. חוט הסיקרא
3. הסובב
4. קרנות המזבח
5. שני הנקבים בקרן דרומית מערבית שלשם מנסכים הנסכים ויורדים לשיתין
6. השיתין
7. התפוח באמצע המזבח שהוא מקום המערכה הגדולה
8. הכבש
9. כבש קטן שמשם יורדים מהסובב
10. כבש קטן שמשם עולים לסובב

מידות המזבח: גובהו 10 אמות המתחלקות בדרך זו: היסוד (1) אמה, מסוף היסוד ועד הסובב (3) חמש אמות, מהסובב ועד פני המזבח שלוש אמות, קרנות המזבח אמה אחת.
שטח המזבח: 32 אמות על 32 אמות שטח היסוד. 30 אמות על 30 אמות גוף המזבח מסוף היסוד ועד הסובב. 28 אמות על 28 אמות מהסובב ומעלה.
האמה: 57 או 48 ס"מ
גובה המזבח כ-5 מטרים
שטח היסוד כ-16 על 16 מטרים

איור 13: חלקי המזבח

(מזבח העולה במקדש, ח"ת)[14]



איור 14: חישוב מידות כבש העלייה למזבח לפי שתי שיטות

מסקנות חלקיות

ישנם מחנכים הסוברים שהמתמטיקה היא נושא שראוי ליחס אחיד בעולם כולו. אלה מעבירים את הידע המתמטי בדרך מופשטת המנותקת מהסביבה של הלומדים. אבל הדבר נתקל לפעמים במחסומים לא צפויים. לדוגמה כאשר ניסו ללמד את בסיסי החשבון (אריתמטיקה) לעם האינואיטי החי בצפון הרחוק של קנדה, גילו שאוכלוסייה זו מכירה מספרים טבעיים קטנים, לכל היותר אולי עד 40. הכיצד? משום שאין לה צורך מעבר לזה. שלא כעמדה זו, התפתח תחום מחקר הנקרא אתנו-מתמטיקה (D'Ambrosio, 1985). המשמעות של "אתנו" אינה קשורה לאתנולוגיה במובן של המאה התשע עשרה, אלא קשורה לרקע התרבותי של אוכלוסיית הלומדים. המחקר באתנו-מתמטיקה בוחן אוכלוסיות ספציפיות, כגון האינואיטים בקנדה, הרומיים ביוון, הבדואים בישראל ועוד. מטרת המחקרים האתנו-מתמטיים היא להבין את התרבות של הלומדים ולפתח באמצעותה סביבה אוהדת ללימוד המתמטיקה, באשר היא נשענת על אלמנטים תרבותיים מוכרים ואהובים על הלומדים.

לדוגמה דנא-פיקארד והרשקוביץ (תש"פ) הדגימו איך נושא מתמטי אחד, יחס הזהב וסדרת פיבונצ'י, מתבטא בתחומים רבים באומנות בכלל ובארכיטקטורה בפרט, וכן גם במוזיקה, באסטרונומיה ובתחומי דעת אחרים. בתחום הארכיטקטורה הם מראים כיצד יחס הזהב בא לידי ביטוי בתרבויות מגוונות, בין במבנים ידועים כמו מבנה הטאג'-מאהל בהודו, ובין במבנים ידועים פחות כמו מבנים בקמבודיה. אך מעבר לכול, יחס הזהב מופיע בתרבות היהודית כבר בתיבת נוח ובעניינים רבים במבנה המשכן, והוא קשור למבנה מערכת השמש וללוח השנה העברי (דנא-פיקארד והרשקוביץ, תש"פ; Dana-Picard et al., In press).

במאמר זה הראינו שתי דוגמאות של שאלות מתמטיות הנלמדות בחטיבת ביניים במדינת ישראל. מקורות מהמקרא, מהתלמוד ומהספרות הרבנית לדורותיה מלאים בנושאים מתמטיים, כפי שתיארנו לעיל. שימוש בתרבות של אוכלוסיית הלומדים יכול למשוך את תשומת ליבם של התלמידים והתלמידות. לעיתים אפילו הישענות על דוגמאות מהתרבות היהודית בת אלפי השנים יכולה לחבר ולקשר תחומי דעת מגוונים ולבנות גשרים בין הנושאים. בעולם המודרני הרב-תחומיות היא מילת המפתח בתחום החינוך בכל הרמות והיא משמשת בסיס למה שנקרא עד לא מזמן STEM Education, דבר שהורחב בשנים האחרונות ל-STEAM Education (ראשי תיבות של Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics).

הדיון לא הושלם במאמר זה, ובכוונתנו להציג נושאים מתמטיים נוספים במאמר המשך.

רשימת מקורות

אבן שושן, א' (2010). שרש, שורש. בתוך **מלון אבן-שושן המרכז: מחדש ומעדכן לשנות האלפים** (עמ' 999).

אמה (יחידת מידה). (2020, 22 בדצמבר). בתוך **ויקיפדיה**. https://he.wikipedia.org/w/index.php?title=%D7%90%D7%9E%D7%94_(%D7%99%D7%97%D7%99%D7%93%D7%AA_%D7%9E%D7%99%D7%93%D7%94)&oldid=30178070

גרבר, ד' (תשע"ז). הקירוב ל- $\sqrt{2}$ במקורות היהודית. בתוך נ' דנא-פיקארד וג' מורלי (עורכים), **לדעת בארץ דרכך** (כרך א, עמ' 159-188). המרכז אקדמי לב וספריית בית-אל.

דנא-פיקארד, נ' (ה"ת). בדיקת ההשפעה של הפרמטרים על גרף של פונקציה קוית. **גאוגברה**. https://www.geogebra.org/m/vpepmdcf

דנא-פיקארד, נ' והרשקוביץ, ש' (תש"פ). היבטים גאומטריים ומספריים באתרים יהודיים וחינוך מתמטי: חקירה באמצעות סביבה מתוקשבת אינטראקטיבית. בתוך נ' דנא-פיקארד וג' מורלי (עורכים), **לדעת בארץ דרכך** (כרך ב, עמ' 362-399). המרכז אקדמי לב וספריית בית-אל.

כהן, ש' (תשע"ז). **ספר דין וחשבון: ביאור מקיף ומפורט של סוגיות הש"ס והפוסקים העוסקות בחכמת המספרים, החשבון וההנדסה.**

לשם-רמתי, ע' (2015). איך הגיע אייזק ניוטון לבית המקדש? **סגולה**. https://segulamag.com/articles/איך-הגיע-אייזק-ניוטון-לבית-המקדש/

מזבח העולה. (2012, 16 באוקטובר). בתוך **ויקישיבה**. https://www.yeshiva.org.il/wiki/index.php/מזבח_העולה

מזבח העולה במקדש [איור]. (ה"ת). **דעת**. https://daat.ac.il/daat/multi/korbanot/15.html

משה בן מימון (1963). **משנה עם פירוש רבינו משה בן מימון** (י' קאפח, מתרגם ומהדיר). הוצאת מוסד הרב קוק.

קופל, מ' (תשנ"ג). משפט קומבינטורי במסכת קינים. **הגיון, ב**, 96-102.

קופל, מ' ומרצבך, ע' (עורכים). (תשמ"ט). **הגיון: מחקרים בדרכי חשיבה של חז"ל**. אלומה.

קרליץ, א"י (1940). **ספר חזון איש: הלכות כלאים, ערלה: (ובסופו ליקוטים שונים)**. דפוס ח' צוקרמן.

בן יחיאל, א' (ה"ת). **פסקי הרא"ש על מנחות, הלכות כלאים ה**. מהדורת וילנא.

רובינשטיין, א' (2016). מתמטיקה במקורות היהדות. **שבבים: עלון מורי מתמטיקה, 8**, 1-8. https://stwww1.weizmann.ac.il/wp-content/uploads/2016/08/8_3.pdf

רוזנבוים, ר' (2003). **חכמת התשבורת: המתמטיקה באספקלריה יהודית**. הוצאת מוסד הרב קוק.

שוראקי, ס' (1973). **מונה מספר** (ג' צרפתי, עורך). אוניברסיטת בר-אילן.

Leonhard Euler. (2021, December 31). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Leonhard_Euler&oldid=1063008055

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5*(1), 44-48.

Dana-Picard, T. H., Hershkovitz, S., Lavicza, Z., & Fenyvesi, K. (In press). One Mathematical topic and several levels of implementation: Golden section's viewing the sounds. *South Asia Journal of Mathematics Education.*

המלצה על ספרם של אלכס פרידלנדר ואברהם הרכבי

יניב ביטון

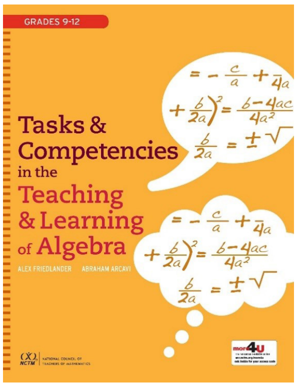
ד"ר יניב ביטון

ראש תחום מתמטיקה במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח), תל אביב.

בוגר הטכניון במחלקה לחינוך, מדע וטכנולוגיה.

מרצה לחינוך מתמטי בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך, קריית שמואל, חיפה.

עוסק בהערכה ומדידה בחינוך מתמטי.



הספר "משימות וכשרים בהוראה ולמידת האלגברה" מיועד למורים, מרכזים ומדריכים בית-ספריים, סגלי הוראה של מוסדות להכשרת מורים, סטודנטים להוראה ובעלי תפקידים אחרים בתחום הוראת המתמטיקה בחטיבות העל-יסודיות.

הספר עוסק בנושאים ובמושגים מרכזיים הכלולים בתוכנית הלימודים למתמטיקה בכיתות ז'–י"ב, מתוך הדגשה והדגמה של סוגי פעילויות וכישורי חשיבה הנדרשים ללמידה משמעותית של האלגברה. הספר כתוב באנגלית, אך אפשר להשתמש בפעילויות לתלמיד בכיתות תלמידים, בקורסים לסטודנטים ובהשתלמויות מורים.

המחברים – ד"ר אלכס פרידלנדר ופרופ' אברהם הרכבי – הם חברי סגל במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע. תחומי העבודה והעניין העיקריים שלהם קשורים לפיתוח חומרי למידה, מחקר, הכשרת מורים ופרקטיות נהוגות בשיעורי מתמטיקה בחטיבת ביניים.

הספר Tasks and competencies in the teaching and learning of algebra יצא לאור ב-2017, בהוצאת האיגוד האמריקאי למורים למתמטיקה, NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), לאחר שהכותבים התבקשו להרחיב את מאמרם (Friedlander & Arcavi, 2012). הספר מציע פירוט רב של תהליכי חשיבה כדי לאפשר לתלמידים להבין וליישם פרוצדורות ומושגים הקשורים לאלגברה.

אלה הם הכשרים המתוארים והמודגמים בספר:

- הבנה ויישום מושגים
- תפיסה מבנית
- חשיבה מסתעפת
- בניית מודל והבנת משמעות הפתרון המתמטי שלו
- מעבר בין ייצוגים
- חשיבה הפוכה
- יצירת דוגמאות
- בקרה על פתרונות עצמיים או על פתרונות נתונים
- הכללה
- הנמקה, הצדקה והוכחה

כשרים אלה מודגמים באמצעות 48 משימות מוכנות לשכפול ולהעברה בכיתה. המשימות מקובצות בארבעה פרקים (12 משימות בכל פרק): ביטויים אלגבריים, משוואות, פונקציות ומשימות אינטגרטיביות. כל משימה כוללת:

- פעילות לתלמיד שסעיפיה מדורגים לפי רמת מורכבות
- תיאור מטרות ורעיונות עיקריים שבפעילות
- הנחיות להפעלה, פתרונות מתאימים של המשימות ודוגמאות לפתרונות צפויים של תלמידים
- ניתוח של הכשרים שהפעילות מזמנת ומטפחת

בהמשך מובאים קטעים נבחרים משתי פעילויות לתלמיד (מהפרקים ביטויים אלגבריים ומשימות אינטגרטיביות).

פעילות הראשונה (איור 1) נועדה לשמש מבוא או סיכום לנושא של נוסחאות הכפל המקוצר, ומראה כי התוצאות המתקבלות בנוסחאות אלה הן מקרים פרטיים השייכים לקבוצה רחבה יותר של תוצאות אפשריות. הכשרים הנדרשים בפעילות זאת הם הבנה ויישום מושגים (מכפלות של שני בינומים מסוגים אחרים), חשיבה הפוכה (בניית תרגילים מתאימים לתוצאות שהאפיון שלהן נקבע מראש), יצירת דוגמאות וחשיבה מסתעפת (מציאת דרך אחת או דרכים רבות בשביל תוצאה מבוקשת) ובקרה על פתרונות עצמיים (בדיקת פתרונות על סמך ביצוע תרגילים שבנו הפותרים).

Products of Two Binomials

Step 1

Predict: How many addends will appear in the expansion of this product:

$(a+b)\cdot(c+d)$

Expand the product and check your prediction.

Step 2

Consider the following template for this product:

$(\square \bigcirc \square)\cdot(\square \bigcirc \square)$

Replace each $\square$ with one of the variables *a*, *b*, *c*, or *d*, and replace each $\bigcirc$ with the sign of either plus or minus, so that the simplified expansion will have the required number of terms.

Variables or operations can be repeated.

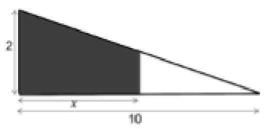
- The simplified expansion has four terms.
- The simplified expansion has three terms.
- The simplified expansion has two terms.
- The simplified expansion has one term.
- The simplified expansion will cancel out to zero.

איור 1: בניית מכפלות של שני בינומים

הפעילות השנייה (איור 2) היא משימה אינטגרטיבית המשלבת תחומים מספר: אלגברה (בניית ביטויים אלגבריים, שרטוט גרפים וחקירת פונקציות), גאומטריה (דמיון משולשים), ואף יכולה לשמש "זריעה מוקדמת" של מושגים בחשבון דיפרנציאלי (הקשר בין מושג האינטגרל שיילמד בעתיד ובין ביטויים אלגבריים, גרפים ושטחים). הכשרים הנדרשים בפעילות זאת הם הבנה ויישום מושגים (ראו לעיל), בניית מודלים (מעבר מסיטואציה גאומטרית אל ייצוגם האלגברי והגרפי), חשיבה הפוכה (מציאת השטח המתאים לערך נתון של משתנה, במקום בכיוון הנפוץ יותר של מעבר מערך נתון של המשתנה אל השטח המתאים) והנמקה (מציאת הסבר לתוצאה המפתיעה בסעיף האחרון של הפעילות).

Part 3

In this part, we explore the function that represents the variation of the shaded area, as shown in the figure below.



6. Write an algebraic expression for a function *h*(*x*) that represents the area of the shaded trapezoid for increasing values of *x*.

   Define the domain and the range of the area function *h*(*x*), and sketch its graph.

7. Dylan claimed that the area function *h*(*x*) is decreasing. Do you agree? Explain.
8. Find the value of *x* for which the area of the shaded inner trapezoid is half the area of that of the large triangle.
9. Show in a geometrical and an algebraic way that $f(x) = g(x) + h(x)$.

איור 2: חוקרים את פונקציית השטח שמשמאל לקטע אנכי שנע משמאל לימין במשולש ישר זווית

לסיום, ספרם של ד"ר אלכס פרידלנדר ופרופ' אברהם הרכבי מצטיין בעושר של פעילויות ובמסגרת מושגית שנועדה לכסות מגוון רחב של תהליכי חשיבה כדי לאפשר לתלמידים להבין וליישם הן את הפרוצדורות והן את המושגים הקשורים לאלגברה ולשלב ביניהם.

ממליץ בחום!

רשימת מקורות

Friedlander, A., & Arcavi, A. (2012). Practicing algebraic skills: A conceptual approach. *Mathematics Teacher, 105*(8), 608-614. https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.8.0608

Friedlander, A., & Arcavi, A. (2017). *Tasks and competencies in the teaching and learning of algebra.* National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

החיים הכפולים של ביטויים אלגבריים: כיצד תלמידים מגשרים על הפער האונטולוגי שבין שיח על תהליכים לשיח על עצמים

שי כספי

ד"ר שי כספי

סיים לימודי דוקטורט בנושא "התפתחות השיח האלגברי של תלמידים בחטיבת הביניים" בהנחייתה של פרופ' אנה ספרד מאוניברסיטת חיפה. מורה למתמטיקה בתיכון "חוגים" חיפה.

תקציר

במאמר זה אני חוזר לרעיון הדואליות תהליך-מבנה של ביטויים אלגבריים, שהובא לראשונה לתשומת ליבה של קהיליית המחקר בחינוך המתמטי לפני כשלושים שנה. במרוצת השנים הדיבור על הדואליות התפתח והתחדד בהדרגה, זכה לנקודות מבט עשירות ומגוונות ונעשה אופרציונלי יותר. במאמר זה אדון בראיפיקציה של השיח האלגברי, כלומר במעבר מראיית ביטוי אלגברי כתיאור של תהליך לראייתו כשם של עצם באמצעות הגישה הקומוגניטיבית[1] (Sfard, 2008). גישה זו מאפשרת לחקור תהליכים בלמידת המתמטיקה בדרך שיטתית ומוקפדת, וכן למפות מסלולי למידה בדיוק רב. גישה זו נמצאה יעילה בייחוד לניתוח שיחים מתמטיים שונים בספרות המחקרית (למשל, נחליאלי וטבח, 2016). במאמר קודם (כספי, 2016) דיווחתי על השינויים שחלו בתהליך הראיפיקציה בתכונות התחביריות-לשוניות של השיח האלגברי המתפתח. במאמר זה אשלים את הדיווח על תכונת הדואליות המאפיינת ביטויים אלגבריים, ואספר כיצד ראיפיקציה מושגת בישורת האחרונה של התהליך. הדיווח השלם מספק אישוש אמפירי להשערה חשובה על הראיפיקציה שנוסחה בעת היוולדו של מושג זה ושחיכתה לאישוש מאז.

מילות מפתח: שיח מטה-אריתמטי; שיח אלגברי; התפתחות; ראיפיקציה; עיצום.

1. המונח קומוגניציה (commognition) הוא מונח המקיף חשיבה (קוגניציה של הפרט) ותקשורת בין-אישית. מונח זה נוצר מהכלאה של המילים קוגניציה ותקשורת והוא בא להדגיש כי חשיבה ותקשורת בין-אישית הן התגלמויות אחרות של אותה תופעה.

הקדמה: על ראיפיקציה ותפקידה בחשיבה המתמטית

כשאנו חושבים על מושג מתמטי כגון מספר או פונקציה, אנו נוטים לראות בו עצם הקיים בעולם, בדומה לספר או לחתול. אולם המספר '7' או הפונקציה $y=x^2$ הם אך ייצוגים אחדים הלקוחים ממגוון ייצוגים שונים של ישויות מופשטות, ואילו ישויות אלה אינן נראות או מורגשות באמצעות חושים אחרים. שלא כעצמים חומריים, מבנים מתמטיים קיימים רק כשאנו חושבים עליהם. למעשה אנו כה רגילים לראות במושגים מתמטיים עצמים לכל דבר ועניין, עד שאנו שוכחים שבבסיסם מצויים תהליכים שיצרו אותם. דוגמה אחת מיני רבות הובאה במחקרן של לביא וספרד (Lavie & Sfard, 2019) שמצאו כי ילדים בני ארבע רואים במספר 'חמש' אך ורק מילה בשפה שמסתיימת בה מנייה של חמישה עצמים. חולפות שנים מספר עד שהמילה 'חמש' תהיה בעיני הילדים שם של עצם בעל קיום עצמאי, בדומה לכל עצם חומרי הקיים בסביבה. מכאן שמושגים מתמטיים מתחילים את דרכם כתהליכים בטרם הופכים לעצמים מופשטים ולפיכך הם בעלי טבע דואלי. ספרד כינתה תהליך זה "תהליך-מבנה" (Sfard, 1991) והסבירה כי היכולת לדבר על תהליכים כישויות הקיימות בזכות עצמן ושאינן תלויות בזמן, היא המאפשרת לנו לבנות עצמים מתמטיים מופשטים. למשל, אפשר להגדיר 'פונקצייה' לא רק מערכת של זוגות סדורים, אלא גם תהליך חישובי או שיטה להגעה ממערכת אחת למערכת אחרת. המעבר מהסתכלות תהליכית בישות מתמטית לראייה מבנית קרוי **ראיפיקציה**. לפי ספרד (Sfard, 1991) ראיפיקציה היא "מעבר אונטולוגי – יכולת פתאומית לראות משהו מוכר באור חדש לגמרי [...] ראיפיקציה היא קפיצה קוונטית: תהליך מתגבש לעצם, למבנה סטטי (עמ' 19–20). ספרד הוסיפה כי "ראיפיקציה שמובילה להבנה רציונלית – קשה להשגה, דורשת מאמץ רב ועשויה להגיע ברגע שאינו ניתן לציפייה, לפעמים באבחה אחת" (עמ' 33).

החוקרים בחינוך המתמטי שפעלו בעשורים האחרונים של המאה העשרים אומנם תיארו את התהליך ההתפתחות של מושגים מתמטיים, ובהם מושג הראיפיקציה, אך לא הצליחו לספק הגדרות אופרציונליות. החוקרים עסקו במושגים 'תהליכי' ו'מבני' כמתארים 'מבנים מנטליים', ודיברו על מבנים אלה במונחים מעורפלים, כגון 'תפיסה', או 'סכמה קוגניטיבית'. תיאורים אלה לא סיפקו כלים מעשיים המאפשרים לבחון כיצד מתנהלת ההתפתחות המושגית בקרב הלומדים. אי לכך לא היה אפשר לבחון גם את ההשערה בדבר ההשלמה של תהליך הראיפיקציה כאירוע בעל אופי של הארה פנימית. כדי להפוך את מושג הראיפיקציה לאופרציונלי, אשתמש בגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008) שבאמצעותה מתמטיקה נחשבת לסוג של שיח וראיפיקציה היא תהליך לשוני במהותו. תיאור זה מאפשר לשרטט תמונה מדויקת של התפתחות הראיפיקציה אצל הדוברים בשיח באמצעות ניתוח הבחירות הלשוניות שלהם.

רקע תאורטי: ראיפיקציה של השיח האלגברי בגישה הקומוגניטיבית

חשיבה ולמידה בגישה הקומוגניטיבית

בגישה הקומוגניטיבית שיח מוגדר סוג מסוים של פעולה תקשורתית, בין-אישית או פנימית. תלמידים הלומדים מתמטיקה במקומות רבים בעולם אמורים להשתתף באותו שיח הנקרא 'שיח מתמטי' (וזאת על אף שהם דוברים שפות אחרות). הנחת היסוד של הגישה הקומוגניטיבית היא שחשיבה אנושית היא סוג של תקשורת שאינה בהכרח מילולית. בהיותה גרסה אינדיווידואלית של תקשורת בין-אישית, החשיבה מתפתחת במהלך יחסי גומלין של האדם עם אנשים אחרים. לפי גישה זו יש לשיח המתמטי ארבעה מאפיינים ייחודיים:

- **מילים ודרך השימוש בהן** – שיח מתמטי כולל מילים מתמטיות הנאמרות בעניין מתמטי.
- **מתווכים חזותיים** הם עצמים המאפשרים לדוברים לזהות את נושאי השיח ולנהל לפי הצורך את הפעילות התקשורתית. המתווכים בשיח המתמטי הם ברובם עצמים סימבוליים שנוצרו במיוחד לצורכי תקשורת, למשל, גרף, נוסחה, ביטוי אלגברי או מודל כגון מעגל טריגונומטרי.
- **נרטיבים** הם כל טקסט מדובר או כתוב המנוסחים כתיאור של עצמים, כתיאור של קשרים בין עצמים או כתיאור של פעולות על עצמים. משתתפים מסוימים בשיח עשויים לאמץ נרטיבים שלפי הקהילייה המתמטית הם 'נכונים' או לדחות כאלה שלפיה הם 'לא נכונים'.
- **רוטינות** הן דפוסי שיח החוזרים על עצמם במהלך הפעילות התקשורתית של המשתתפים. אדם הצופה בשיח יכול לזהות דפוסי פעולה חוזרים בדרכים שבהן משתתפי השיח משתמשים במילים מתמטיות, במתווכים חזותיים, וכן באופן שהם בונים נרטיבים על עצמים מתמטיים ומאששים אותם.

בגישה הקומוגניטיבית **למידה** היא תהליך שבו היחיד הופך למשתתף בשיח ומפתח בהדרגה יכולת לנהל תקשורת מתמטית עם עצמו. המשתתף בשיח אינו מגיע כלוח חלק וזאת משום שישנם שיחים שהוא מנוסה בהם. לפיכך אפשר לראות בלמידה טיפוס מסוים של התפתחות הכרוך בשינוי ובהרחבה של שיח קיים.

אלגברה בגישה הקומוגניטיבית

חוקרים רבים בחינוך המתמטי התקשו לספק הגדרה אחת מוסכמת לאלגברה ועל כן העדיפו להגדיר את המושג חשיבה אלגברית 'רכישה' של יכולת:

- "היכולת לפעול על כמות לא ידועה כאילו הייתה ידועה, בניגוד לחשיבה אריתמטית הכרוכה בפעולות על כמויות ידועות" (Swafford & Langrall, 2000).
- "היכולת לייצג מצבים כמותיים באופן שבו קשרים בין משתנים הופכים לגלויים" (Driscoll, 1999).
- "כמויות שערכן בלתי מסוים מקבלות התייחסות כאילו היו מספרים ידועים" (Radford, 2014).

הגדרות אלה אינן אופרציונלית, שכן הן אינן מעניקות לחוקר (או למורה) כלים שבעזרתם אפשר לבדוק את הימצאותה של חשיבה אלגברית בקרב התלמידים. אופרציונליות זו מושגת בעזרת ההגדרה של האלגברה הבסיסית כמטה-שיח של האריתמטיקה (Sfard, 2008), כלומר שיח על שיח מספרי. זיהוי ומעקב אחרי אופי ההשתתפות של לומד האלגברה באמצעות ארבעת מאפייני השיח המתמטי הם הכלים לזיהוי סממנים של חשיבה אלגברית ואף חשוב מזו, התפתחותה של חשיבה זאת. אחת מהמשימות המטה-אריתמטיות המאפיינות שיח אלגברי נקראת הכללה – זיהוי דפוסים מספריים. באלגברה פורמלית מציגים דפוסים כאלה כשוויונות סימבוליים, כגון $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$. שוויון זה הוא קיצור של המשפט המטה-אריתמטי: "כדי לכפול מספר בסכום של שני מספרים אחרים, אפשר לכפול כל אחד משני מספרים אחרים אלה במספר הראשון ואז לחבר את התוצאות". אומנם השוויון נוסח באמצעות סמלים המזוהים על פי רוב כסממן הבולט של האלגברה, ואולם הגדרת האלגברה כפי שהוצגה (ועיקריה מקובלים על היסטוריונים ופילוסופים של המתמטיקה) אפשרה לנו לנסח אותו גם ניסוח מילולי טהור. למעשה הסימול הפורמלי שהומצא רק במאה השבע עשרה, אינו תכונה הכרחית של שיח אלגברי. חוקרים מצאו שהימצאותו של סימול אלגברי פורמלי, אינו משמש סממן של חשיבה אלגברית (Zazkis & Liljedahl, 2002). לאחר שהגדרנו את האלגברה בגישת השיח, נביט כעת בדואליות תהליך-מבנה מנקודת מבט קומוגניטיבית.

ראיפיקציה בגישה הקומוגניטיבית כתהליך יצירת עצמים מתמטיים חדשים

בבואנו לבחון ראיפיקציה של שיח אלגברי, נוכל לבדוק האם המשתתף החליף את הדיבור על פעולות ותהליכים בדיבור על עצמים. למשל, במקום לומר: "**כפלתי** את x ב-4 **וחיברתי** לתוצאה 8" הדובר אומר "**הסכום** של **מכפלת** x ב-4 ושל 8". החלפת המילה "כפלתי" (פועל) במילה "מכפלה" (עצם), וכן "חיברתי" (פועל) במילה "סכום" (עצם) היא ראיפיקציה של המשפט כולו. החלפה זו לוותה גם ב**ניכור** (alienation) שבו הרכיב האנושי מנותק מהעצם והופך לעצם שאינו תלוי במבצע הפעולה. התרחשותם של ראיפיקציה וניכור מביאה בהדרגה לידי **עיצום** (objectification) של השיח האלגברי. העיצום מתרחש כאשר פעולה מוחלפת בשם עצם, שבשעת שימוש נרחב בו מתחיל לתפקד כשם של דבר מה הקיים בזכות עצמו. הכוח המניע ל'דחיסה' זו, הוא הרצון לשכלל את התקשורת המתמטית כדי שנוכל לומר הרבה במעט מילים.

תלמיד שמשתתף בשיח אלגברי מעוצם, יהיה מסוגל להתייחס לביטויים אלגבריים בשיח בדרך דואלית – הן כתהליך והן כעצם. למשל, הוא יוכל לדבר על הביטוי $14-3\cdot(n-1)$ בשתי דרכים: האחת כקיצור של משפט המדבר על **תהליך חישובי** ("חסר 1 מ-n כפול ב-3 וחסר מ-14"); והשנייה **כעצם המציין תוצאה** של תהליך זה. נוכל אפוא לומר שישנם שני שיחים אלגבריים מקבילים ושקולים: שיח המתמקד בתהליכים חישוביים על מספרים שיסומן ב-D_{proc}, ושיח העוסק בעצמים שנוצרים מתהליכים אלה ויסומן ב-D_{obj}. הדואליות תהליך-מבנה של שיח אלגברי מושגת כאשר שני שיחים אלה שהיו נפרדים עד כה מתמזגים לשיח אחד. התמזגות זו היא תוצאה של שימוש באותם אמצעים תחביריים על אותו ביטוי אלגברי. לכן הביטוי האלגברי מתפקד כמעין 'סיכה' שקושרת בין שני שיחים אלה והופכת אותם לאחד. מאמר זה יעסוק במיזוג שיחים שעל פניו נראה בלתי אפשרי: מיזוג של שיחים בעלי אונטולוגיות שונות זו מזו.

מתמטיקאי העבר חוו לעיתים קושי הנובע מהפער האונטולוגי שבין שני השיחים. ההיסטוריה מלמדת שהמתמטיקאים עשו דרך ארוכה בתהליך בריאתם של מושגים מתמטיים חדשים כגון 'מספר' או 'פונקציה'. מושגים אלה התחילו את 'חייהם' כתהליכים חישוביים עד שהפכו ברבות השנים לעצמים מתמטיים עצמאיים. ביטוי לפער האונטולוגי שבין שני השיחים ניכר היטב בעבודותיו של המתמטיקאי היווני דיאופנטוס. במהלך פתרון בעיה, כגון "בהינתן סכומם ומכפלתם של שני מספרים, מהם המספרים?", השתמש דיאופנטוס באותיות בשביל נעלמים, אבל לא בשביל פרמטרים. במקום להשתמש בפרמטרים, בחר דיאופנטוס בשבילם מספרים ספציפיים וכך חישב את הנעלמים. בעבור דיאופנטוס, הביטוי האלגברי שכתב בשביל הנעלם היה קיצור של פעולות מספריות. הוא לא היה מסוגל להציג את התוצאה בדרך פרמטרית מאחר שהביטוי האלגברי לא היה בעיניו העצם המבוקש. הוא לא היה מסוגל לומר "המספר שמקיים את המשוואה $3x+2=m$ הוא $(m-2):3$", מאחר שאמירה זו שקולה לטענה: "המספר שמקיים את המשוואה $(m-2):3$ הוא החסר 2 מ-m וחלק ב-3".

בנקודה זו עולה השאלה מה אפשר ללמוד מדרך פעולתו של דיאופנטוס על השיח האלגברי של התלמידים בני זמננו? תשובה מיידית לשאלה זו היא שגם כאשר נוסחה אלגברית מופיעה בשיח של התלמידים, אין ערבות לכך שהיא מתפקדת כשם של עצם. למעשה תלמיד עשוי להשתתף בשיח שנשמע מבני ועדיין לא להיות מסוגל להבחין ברעיון הנוגד את האינטואיציה, ולפיו תהליך עשוי להיחשב גם תוצאה של התהליך עצמו (כפי שמתכון לעוגה אינו יכול להיחשב העוגה עצמה). הדרך שבה אנו מקריאים ביטויים אלגבריים, אינה משקפת כל 'מחויבות אונטולוגית', כלומר אינה מבהירה אם הביטוי מסמן תהליך או עצם בשביל הלומד. אי בהירות זאת בכוונת הדובר מעוררת שאלות מספר: כיצד נוכל לקבוע האם התלמיד רואה בביטוי האלגברי תהליך בלבד או שמא **גם** שם עצם? כיצד נוכל להחליט האם שני השיחים D_{proc} ו-D_{obj} התמזגו בשביל הלומד? על שאלות אלה אשיב בהמשך המאמר אך כעת נעבור לשיח האלגברי של התלמידים ונבחן כיצד הם מתמודדים עם האתגרים שמציבה הדואליות תהליך-מבנה.

תהליכים המביאים לידי ראיפיקציה בלמידת האלגברה

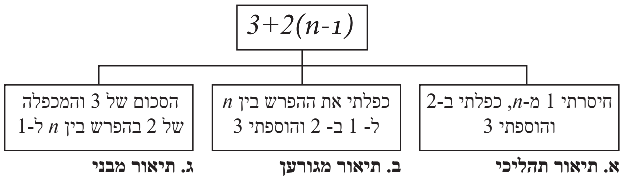
כשלב מקדים למחקר האורך המוצג במאמר זה, בניתי מודל תאורטי היררכי של התפתחות החשיבה האלגברית על פי ההתפתחות ההיסטורית של האלגברה ולממצאי מחקרים קודמים העוסקים בלמידתה. במאמר קודם (כספי, 2016) הצגתי מודל זה המורכב משלוש רמות של שיח אלגברי:

- ברמה הראשונה – ***רמה תהליכית*, השיח על תהליכים D_{proc} הוא השולט בכיפה ואין בנמצא כל סממן**

המעיד על הימצאותו של שיח עצמים Dobj. הדוברים מתמקדים בחישובים מספריים הנעשים בעיקר במילים ומנוסחים ניסוח אנושי (ראו איור 1א). התיאור התהליכי מורכב מיחידות לשוניות הקרויות 'פסוקיות פעולה' – פסוקי משנה המתארים פעולה; למשל, "חיסרתי 1 מ-n". השימוש בסימן השוויון שקול למקש = במחשבון. רמה זו מתאפיינת גם בשימוש תדיר במילים מיוחדות בשביל תוצאות ביניים. למשל, תלמיד עשוי לתאר את הביטוי 3x+5: "שלוש כפול משתנה שווה משהו. המשהו הזה ועוד חמש". המילה "משהו" מתפקדת כתוצאת ביניים של התהליך החישובי.

- ברמה השנייה – **רמה מגורענת, השיח על תהליכים Dproc מכיל גרעינים של שיח מבני Dobj**, ואולם שיחים אלה טרם התמזגו לשיח אחד. ההתמקדות היא עדיין בחישובים מספריים, אך ישנם סימנים לעיצוב חלקי שעשוי להתרחש בשני מצבים: (1) פסוקית פעולה מוחלפת בפרזת עצם[2] באמצעות שימוש בשם עצם חדש. למשל, באיור 1ב, פסוקית הפעולה ("חיסרתי 1 מ-n") הפכה לפרזת עצם ("ההפרש בין n ל-1"; המילה "הפרש" היא שם העצם החדש); (2) פסוקית פעולה מוחלפת ב'פסוקית עצם' – פסוקי משנה המתפקדים כשמות עצם (כלומר מתארים את העצם המתקבל לאחר פעולה שנעשתה בלי שימוש בשם עצם חדש), למשל, "מה שקיבלתי כשהחסרתי 1 מ-n". הפרזות ופסוקיות העצם הן קיצורים של פעולות בסיסיות שחולקות חלקים של שרשרת ארוכה ל'חרוזים' או ל'גרעינים'. כמו ברמה הראשונה, גם כאן מופיע רצף פעולות חישוביות, אלא שבזכות החלפת החישוב בתוצאתו, אין צורך להפסיק את הרצף בכל מקום של חישוב עזר. בשביל תלמיד ברמה זו, גם אם תוצאות אלה מבוטאות בסמלים, הן אינן מספקות בהכרח תשובות לגיטימיות לבעיות.

- הרמה השלישית – **רמה מבנית (מעוצמת)** של האלגברה היא זו של המשתתפים המומחים בשיח האלגברי, **בשבילם שני השיחים Dproc ו-Dobj התמזגו לאחד.** ברמה זו המעמד של פסוקית עצם, כגון $3x+5$, אינו נבדל מהמעמד של מספר. השימוש בביטויים אלגבריים (מילוליים או סימבוליים) נעשה כעת באמצעות קשרים בין עצמים מתמטיים המנוסחים ניסוח מנוכר (ראו איור 1ג). ברמה זו התלמיד מסוגל לפרש ביטויים אלגבריים פירוש דואלי, הן כתהליכים מספריים והן כעצמים מפותחים ועצמאיים.



איור 1: שלוש רמות ראיפיקציה של תיאור ביטויים אלגבריים

כדי לאשש את המודל, נעשה מחקר אורך שבו עקבתי במשך שנתיים וחצי אחר התפתחות השיח המטה-אריתמטי (האלגברי) של חמישה זוגות של תלמידים בכיתה ז' בעת שלמדו אלגברה בבית הספר. כפי שאסביר בהמשך, ממצאי המחקר עודדו אותי להרחיב את אוכלוסיית המשתתפים ולכלול תלמידים צעירים יותר הלומדים בכיתה ה'. בהמשך מאמר זה אתאר בהרחבה את שלביו של המחקר ואת ממצאיו.

שאלות המחקר

אלה שאלות המחקר שהנחו את ניתוח הנתונים במחקר זה:

1. מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים בכיתה ז' ובכיתה ה', שטרם נחשפו לשיח האלגברי הפורמלי?
2. כיצד משתנים מאפייני השיח המטה-אריתמטי ומידת העיצום שלו בקרב תלמידים אלה במהלך לימודי האלגברה הפורמלית בכיתה?
3. כיצד משיגים התלמידים ראייה דואלית תהליך-מבנה המאפיינת ביטויים אלגבריים? האם השיח התהליכי Dproc והשיח המבני Dobj מתלכדים לשיח אחד בנקודה מסוימת?

בתשובה לשאלות 1 ו-2 אדווח כיצד נראית ההתקרבות של שיחים Dproc ו-Dobj דיווח פורמלי, עובדתי-לשוני, מנקודת מבטי כחוקר. בתשובה לשאלה 3 אנסה להציג את ההתמודדות של התלמידים מקרוב, כיצד היא מצטיירת מבחינת ההתנהגויות והפעולות שלהם. הדגש המיוחד יושם כאן בתיאור השלמת התהליך, כשהאיחוד של השיחים קורה בפועל.

השיטה

משתתפי המחקר

לצורך המעקב אחרי התפתחותו של השיח האלגברי בחרתי חמישה זוגות תלמידים בכיתה ז' בעלי מאפיינים דומים: הם תושבי עיר גדולה בצפון הארץ, בעלי רמת הישגים ממוצעת או מעל הממוצעת במתמטיקה ורקע סוציו-אקונומי בינוני. התלמידים השתייכו לאותו בית ספר. אף שלמדו מתמטיקה אצל מורות אחרות, הם למדו לפי תוכנית לימודים זהה והשתמשו באותם ספרי לימוד. בחירתם למחקר נעשתה על פי שלושה קריטריונים: גישה חיובית למתמטיקה, יכולת גבוהה לבטא את עצמם ומוכנות להשתתף במחקר השתתפות מלאה. כדי שיוכלו ליהנות בחברת בני זוגם, חילקתי את התלמידים לזוגות על פי בחירתם האישית.

איסוף הנתונים

במהלך שנתיים, מדי שישה חודשים, עשיתי סבב ראיונות עם כל זוג תלמידים. כל סבב ארך כחודש וחצי וכלל חמישה מפגשים עם כל זוג בנפרד. בכל סבב נדונו בעיות ממאגר משימות שנבנה לצורך המחקר. בסבב חמישי ראיינתי כל משתתף בנפרד וזאת כדי לבחון את השיח האלגברי האישי. המפגשים בסבב זה היו בעלי מבנה ותוכן דומים לראיונות של שאר הסבבים. כל מפגש בכל סבב ארך כ-90 דקות. הסבב הראשון החל בתחילת כיתה ז', בשלב שבו התלמידים

2. פְּרָזה היא קבוצת מילים המתפקדות כיחידה תחבירית. לפרזת עצם יש נושא (שם עצם) או שהיא עצמה מתפקדת כעצם.

טרם נחשפו לאלגברה הבית ספרית, והסבב האחרון נעשה בתחילת שנת הלימודים של כיתה ט' (ראו טבלה 1). במהלך הראיונות שצולמו במלואם, האזנתי לשיחות שניהלו המשתתפים בעת התמודדותם עם המשימות ובמידת הצורך שאלתי אותם שאלות הבהרה. מכל מקום הקפדתי להימנע מכל התערבות הוראתית ישירה, כך שהצגת האלגברה ועקרונותיה נשארו אצל המורות בכיתה. לאחר ניתוח ראשוני של הממצאים שהתבצע בתום סבב 1, הופתעתי לגלות סממנים לשיח Dobj בקרב התלמידים, ולכן החלטתי לבדוק את השיח המטה-אריתמטי של תלמידים צעירים יותר בכיתה ה'. לשם כך ראיינתי כמה זוגות תלמידים בכיתה ה', בעלי רקע לימודי וסוציו-אקונומי דומה לרקע של התלמידים בכיתה ז' (סבב 0). לצורך המחקר הנוכחי בניתי מאגר של משימות משני סוגים: כאלה שמוליכות להכללה של קשרים מספריים וכאלה שעוסקות במציאת נעלמים. המשימות האלגבריות שהוצגו לתלמידים בחמשת הסבבים היו דומות בטבען, אך רמת מורכבותן עלתה עם הזמן. הנתונים שאציג במאמר זה נלקחו מתוך הראיונות שקיימתי עם התלמידים במהלך הסבבים והם עוסקים במשימות הכללה של סדרות.

טבלה 1: הזמנים של חמשת הסבבים במהלך הלימודים בבית הספר

מספר סבב	הרכב	עיתוי במהלך שנת הלימודים
0	זוגי	אמצע שנת הלימודים בכיתה ה'.
1	זוגי	תחילת שנת הלימודים בכיתה ז', טרם החשיפה לאלגברה הבית ספרית הפורמלית.
2	זוגי	לקראת סיום שנת הלימודים בכיתה ז', לאחר החשיפה לאלגברה הפורמלית.
3	זוגי	תחילת שנת הלימודים בכיתה ח'.
4	זוגי	לקראת סוף שנת הלימודים בכיתה ח'.
5	יחידני	תחילת שנת הלימודים בכיתה ט'.

שיטת הניתוח

לצורך ניתוח הנתונים ארגנתי את תשובות התלמידים בטבלאות שיח. אדגים זאת באמצעות משימה המובאת בטבלה 2, שהעתקתי בשבילה את הכללים הכתובים והנאמרים שהציגו ארבעה תלמידים: טל והילה – תלמידות כיתה ז' בסבב 1 ואיילה וכרמל – תלמידות כיתה ה' בסבב 0.

העמודה השמאלית מציגה את התרגומים הסימבוליים של הכללים כפי שכתב אותם החוקר.

טבלה 2: התשובות של טל והילה (כיתה ז') ושל איילה וכרמל (כיתה ה') למשימה בסבב 0 ו-1[3]

משימה: לפניכם סדרה של מספרים 4, 7, 10, 13, 16... נסחו כלל שבאמצעותו אפשר לחשב איזה מספר נמצא במקום כלשהו בסדרה.			
תלמיד	**כלל כתוב**	**כלל נאמר**	**כלל שקול**
טל	מקום • חוקיות הסדרה + 1	מקום כפול חוקיות הסדרה ועוד 1	$a_n=3\cdot n+1$
הילה		כדי למצוא מקום מסוים בסדרה, צריך את המקום שמצאת (עדיף שיהיה עגול) ואז החוקיות (3 או כל מספר אחר שהוא החוקיות) כפול כמה שצריך להוסיף למספר שיש לך עכשיו, ואז לחבר את המספר למספר שיש לך עכשיו ואת המכפלה של החוקיות וכמה שאתה צריך עוד. וזהו.	$d(n-m)$ ↓ $a_m+d(n-m)$
איילה	3 x ___ = ___ + 1 = ___ מספר / המספר / המספר שווה התרגיל 3x___ / שממנו התחלנו את הסדרה / התשובה	צריכים לעשות את המספר שידוע לנו, כמו 75 כפול 3, שזה המספר של הקפיצה שלנו, ואז זה יהיה שווה משהו [...] ואז אנחנו צריכים להוסיף את ה-1 – שכאילו ממנו התחלנו להקפיץ את זה, ואז זה יהיה שווה התשובה.	$3\times n+1=a_n$
כרמל		צריך להתחיל מהמספר הכי גבוה שאתה רואה (16) (החמישי בסדרה). אחר כך צריך לראות איזה מקום אתה רוצה למצוא (העשרים בסדרה). אתה עושה תרגיל חיסור בין המקום הכי גבוה למקום שאתה צריך להגיע (20-5=15). אחר כך אתה כופל ב-3 את התוצאה המתקבלת (15x3=45). בסוף אתה לוקח את המספר שיוצא ומחבר למספר שאתה רואה הכי גבוה (45+16=61).	$n-m=r_1$ $r_1\cdot 3=r_2$ $r_2+a_m=a_n$

3. על סמך המחקר שתיארו ספרד ולינצ'בסקי (Sfard & Linchevski, 1994), שיערתי, כמו האחרים, שהשיח המטה-אריתמטי של התלמידים יתמקד בתהליכים ולא בעצמים. בשל ציפייה זו, בשני הסבבים הראשונים ניסחתי את המשימות בשפה תהליכית. לכן שאלתי על הכלל לחישוב של איבר כלשהו של הסדרה. החל מסבב 3 שאלתי מהו האיבר הכללי של הסדרה.

כדי לבחון מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי בקרב התלמידים ואת השתנותם (תשובה לשאלות מחקר 1 ו-2), ניתחתי תכונות לשוניות בשיח האלגברי שלהם המתמקדות בשלושה מישורים:

א. דרכי הצגה לפעלים ולפעולות

בחנתי שלושה מסמנים של פעלים ופעולות בתשובות התלמידים: פעלים חשבוניים – לדוגמה "לחבר" אצל הילה או "לעשות תרגיל חיסור" אצל כרמל; פעלים שאינם חשבוניים – למשל, "למצוא" אצל הילה או "לוקח" אצל כרמל; פעולות חשבון – לדוגמה "כפול", "ועוד" ו-"+" אצל טל. בעוד ריבוי פעלים חשבוניים משקף שיח Dproc, שימוש נרחב בפעולות חשבון הוא שלב בדרך לשיח Dobj.

ב. פעולות אנושיות או מנוכרות (עצמים מתמטיים)

פעולות שאנשים עושים, למשל, "להוסיף את ה-1" אצל איילה או "מחבר למספר שאתה רואה" אצל כרמל, משקפות שיח תהליכי. לעומתן פעולות מנוכרות שאנשים אינם עושים, כגון "כפול" אצל טל, עשויות לשקף שיח מבני, והן נדבך בדרך לשיח Dproc.

ג. דרכי הצגה לתוצאות של פעולות

כאן בחנתי ארבעה מסמנים לתוצאות של פעולות בתשובות התלמידים: 1. שימוש בשם מיוחד ל**תוצאות ביניים** כגון **"התוצאה המתקבלת"** בתשובתה של כרמל. מילים אלה יוצרות הפרדה ברורה בין ההליך החישובי לתוצאתו ולפיכך מעידות על שיח תהליכי; 2. שימוש ב**פסוקיות פעולה מורכבות** – פסוקיות פעולה שאינן מכילות מילים מיוחדות בשביל תוצאות ביניים ושמנוסחות ניסוח מנוכר, למשל, אצל טל "מקום כפול חוקיות הסדרה ועוד 1"; 3. שימוש ב**פרזות עצם**, למשל, אצל הילה "**המכפלה של החוקיות וכמה שאתה עוד צריך**"; 4. שימוש בפסוקיות עצם – כאשר תלמיד מדבר על ביטוי אלגברי כגון $n+2$ ומתאר אותו: "n ועוד 2", אנו זקוקים למידע נוסף האם הפסוקיות נחשבות פעולה או עצם. אם סממני שיח אחרים יעידו כי התלמיד מדבר על **תוצאה של פעולה**, אז תיחשב הפסוקית לעצם. להופעתן של פסוקיות פעולה מורכבות בשיח Dproc יש חשיבות רבה, שכן הן משקפות שלב בדרך לגרעון ובהמשך מוליכות לפרזות ולפסוקיות עצם המאפיינות שיח Dobj.

כדי לבחון כיצד התלמידים משיגים ראייה דואלית תהליך-מבנה של ביטויים אלגבריים ויכולת ללכד את השיח התהליכי Dproc עם השיח המבני Dobj (תשובה לשאלת מחקר 3), בחנתי שני היבטים:

1. האם סימן השוויון מתפקד גם כיחס שקילות, נוסף על תפקידו כהוראה לביצוע חישוב?

למשל, שני סימני השוויון בתשובתה של איילה משקפים שיח Dproc : הביטוי המופיע משמאל לסימן השוויון (3x___) מציין פעולה, ואילו הביטוי מימין המספר שווה התרגיל (3x___) מציין את התוצאה. בזהויות אלגבריות, כגון $(a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b))$ מופיע סימן השוויון כיחס שקילות המשקף שיח Dobj.

2. האם התלמיד מצהיר שהיגד שניסח בכתב או בעל פה מבטא הן תהליך חישובי והן את תוצאתו?

תלמיד האומר: "$2x+1$ מציין הן הכפלה של x ב-2 והוספה של 1 והן את התוצאה של חישוב זה", עשוי להכיר בביטוי האלגברי מספר לכל דבר ועניין. זיהוי הצהרות אלה מבשר על התמזגותם של השיחים Dproc ו-Dobj.

ממצאים

שאלת מחקר 1: מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים בכיתה ז׳ ובכיתה ה׳ שטרם נחשפו לשיח האלגברי הפורמלי?

הממצאים שדיווחתי עליהם במאמר קודם (כספי, 2016) מספקים תשובה לשאלת המחקר הראשונה. כאן אציג סיכום קצר של ממצאים אלה הנוגעים לתשובות המשתתפים בסבב 0 ('צעירים' בכיתה ה') ובסבב 1 ('בוגרים' בכיתה ז') בעבור משימת ההכללה אחת (ראו טבלה 2). הממצאים מראים שהשיח המטה-אריתמטי של כלל התלמידים היה Dproc בעיקרו, אך למרבה ההפתעה הם חושפים הבדלים מהותיים בין השיחים של המשתתפים בכיתה ה' ובכיתה ז': הבוגרים השתמשו מעט ב**פעלים חשבוניים** כגון "מחבר", "כופל" והרבו להשתמש ב**פעולות חשבון** כגון "ועוד", "כפול". כמו כן תלמידים אלה השתמשו לעיתים רחוקות ב**פעלים שאינם חשבוניים** כגון "למצוא", "לראות".

ממצא נוסף מלמד שבעוד רוב הצעירים ניסחו תשובות אנושיות (כגון "צריך להתחיל", "אתה רואה", בתשובתה של איילה), רק כמחצית מהבוגרים ניסחו תשובות אנושיות. כדי להתמודד עם **תוצאות ביניים** השתמשו הבוגרים והצעירים **במילים מיוחדות**, כגון "התוצאה המתקבלת" ו"המספר שיוצא" אצל איילה. אולם שימוש זה היה שכיח בעיקר בקרב הצעירים. הבוגרים השתמשו לעיתים **בפסוקיות פעולה מורכבות**, למשל, "מקום • חוקיות הסדרה + 1" בתשובתה של טל. על סמך השימוש הנרחב בפעולות חשבון ובפסוקיות פעולה מורכבות, תשובות הבוגרים היו קרובות יותר לתחביר האלגברי המקובל, לעומת תשובותיהם של הצעירים. המאפיינים שזוהו כאן הם הסנונית הראשונה בתהליך העיצוב של השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים שטרם נחשפו לאלגברה הפורמלית בכיתה.

בתשובות לשאלות מחקר 2 ו-3 אציג ממצאים שטרם זכו לפרסום, הנוגעים להמשך התפתחותה של הראיפיקציה של השיח המטה-אריתמטי במהלך למידת האלגברה הפורמלית בכיתה. בייחוד אתאר כיצד השתנו הסממנים שכבר דיווחתי עליהם במאמר הקודם במהלך הסבבים ואת התפניות הלשוניות המעידות על התמזגות השיחים Dproc עם Dobj.

שאלת מחקר 2: כיצד משתנים מאפייני השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים אלה במהלך לימודי האלגברה הפורמלית בכיתה?

בחלק זה אשלים את הדיווח על השתנותם של מאפייני השיח האלגברי בעשר משימות בסבב 2–5 (ראו נספח). נוסף על כך, כדי להציג מעגל התפתחותי מלא בשיח, אדווח על השינוי שהתרחש בסבב 0–5.

דרכי הצגה לפעלים ולפעולות

טבלה 3 מראה שהשימוש **בפעלים חשבוניים** בתשובות התלמידים בסבב 0–5 הצטמצם במידה ניכרת. מגמה דומה חלה גם בשימוש **בפעלים שאינם חשבוניים**. לעומת זאת השימוש **בפעולות החשבון** גדל במידה ניכרת. במהלך הסבבים ניכר צמצום במידת מעורבותו של **המבצע האנושי**: בעוד בסבב 0 רק כעשירית מתשובות התלמידים סווגו מנוכרות, הרי בסבב 5 שלט ניסוח זה כמעט בכל התשובות.

דרכי הצגה לתוצאות של פעולות

שימוש במילים מיוחדות בעבור תוצאות ביניים: תופעת השימוש במילים מיוחדות לתוצאות הביניים שזיהיתי בניתוח סבב 0 ו-1 הופיעה גם בשני הסבבים העוקבים. נעיין, למשל, בתשובתה של דשה בסבב 2 (ראו טבלה 4), שהעניקה שמות לתוצאות חישובי הביניים לפני שהמשיכה לפעולה שנעשתה בתוצאות אלה: את ההפרש בין המקומות סימנה ב-d; את המכפלה של הפרש המקומות בהפרש הסדרה סימנה ב-c, ואילו המילה "תוצאה" שימשה אותה לתוצאות הביניים בתשובתה הנאמרת.

טבלה 3: מסמנים של פעולות ומידת ניכור בשיח ההכללה בסבב 0–5*

		סבב 0 (N=41)	סבב 1 (N=38)	סבב 2 (N=25)	סבב 3 (N=10)	סבב 4 (N=33)	סבב 5 (N=27)
מסמנים של פעולות (*)	פעלים חשבוניים	4.3	1.5	0.92	1.5	0.7	0.19
	פעלים שאינם חשבוניים	4.6	1.1	1.0	1.0	0.3	0.3
	פעולות חשבון	1.4	3	4.1	4.1	4.8	7.6
מעורבותו של המבצע האנושי	אנושית	91%	35%	20%	50%	19%	6%
	מנוכרת	9%	58%	72%	50%	81%	94%
	משולבת	-	7%	8%	-	-	-

(*) הערכים המופיעים בטבלה זו חושבו בשביל התשובות הכתובות והנאמרות יחדיו (כל תשובה כתובה ונאמרת של אותו תלמיד נחשבת לתשובה אחת, כאשר N מציין את מספר התשובות). מספרי המסמנים מציינים את מספרם הממוצע בתשובת תלמיד.

טבלה 4 : תשובתה של דשה – תלמידה בכיתה ז' למשימה a בסבב 2

משימה: לפניכם סדרה של מספרים:...6, 10, 14, 18, 22 נסחו כלל שבאמצעותו אפשר לחשב איזה מספר נמצא במקום כלשהו בסדרה.		
תלמיד	**תשובה נאמרת**	**תשובה כתובה**
דשה	אם אנו יודעים בוודאות את המספר של מקום x, אז עושים: $d =$ המספר במקום $y-x$ $d\cdot 4=C$ המקום שאת מספרו אנו רוצים לדעת מספר ההבדל בין מספר למספר המספר במקום y = המספר במקום $x + C$	אם אנחנו יודעים בוודאות את המספר של מקום x, y זה המקום שאת מספרו אנחנו רוצים לדעת, עושים ... לוקחים את ה-y – המקום שאת המספר שלו אנחנו רוצים לדעת, עושים מינוס ה... המקום של x, המספר במקום של איקס x וזה שווה ל-d – שזאת תוצאה כלשהי, ואז ה-d הזה, אנחנו כופלים אותו בארבע, כי זה קופץ בארבע, שווה ל-c, אוקי? ואז את ה-c הזה אנחנו מוסיפים למספר במקום x, ואז יוצא המספר במקום y – כאילו התוצאה.

עיון בטבלה 5 מראה שהשימוש במילים מיוחדות לתוצאות ביניים הלך ודעך בחלוף הסבבים. המספר הממוצע של מספר המילים המיוחדות בתשובת תלמיד בסבב 5 היה קטן פי 4 ממספרן ההתחלתי בסבב 0.

טבלה 5: מילים מיוחדות לתוצאות ביניים בסבב 0–5*

	סבב 0 (N=41)	**סבב 1 (N=38)**	**סבב 2 (N=25)**	**סבב 3 (N=10)**	**סבב 4 (N=33)**	**סבב 5 (N=27)**
מילים מיוחדות לתוצאות ביניים	1.1	0.5	0.4	0.2	0.3	0.3

(*) הכלל הכתוב והכלל הנאמר אוחדו לתשובה אחת, ושמות שהופיעו בשני הכללים נמנו פעמיים. המספרים המופיעים כאן מציינים את המספר הממוצע של מילים מיוחדות בתשובת תלמיד.

שימוש בפסוקיות פעולה מורכבות / פסוקיות עצם: טבלה 6 מגלה שפסוקיות פעולה מורכבות נצפו לראשונה רק בסבב 1 בקרב תלמידי כיתות ז' (למשל, אצל טל "מקום • חוקיות הסדרה 1+", ראו טבלה 2). בסבב זה פסוקיות אלה הופיעו אצל כמחצית מתשובות המשתתפים ועם חלוף הסבבים עלתה שכיחותן עד ל-89% בסבב 5 (ראו, למשל, את תשובתו של שחר בטבלה 7). בהמשך המאמר אדווח על ממצאים נוספים בסבב 4 ו-5 המלמדים כי פסוקיות פעולה מורכבות אלה הן למעשה פסוקיות עצם.

שימוש בפרזות עצם: השכיחות המקסימלית של פרזות עצם (פסוקיות שעברו גרעון באמצעות שם עצם חדש, למשל, 'מכפלה' או 'הפרש') נמצאה בסבב 4 ו-5 (ראו, למשל, את תשובתו של טום בטבלה 7).

טבלה 6: ראיפיקציה במשימות הכללה בסבב 0–5*

	סבב 0 (N=41)	**סבב 1 (N=38)**	**סבב 2 (N=25)**	**סבב 3 (N=10)**	**סבב 4 (N=33)**	**סבב 5 (N=27)**
הצגה באמצעות פסוקית פעולה מורכבת / פסוקית עצם	-	58%	72%	67%	79%	89%
הצגה באמצעות פרזת עצם	-	3%	-	-	15%	11%

(*) תשובת תלמיד נספרה כפסוקית פעולה מורכבת רק כאשר הופיעה הן בתשובה הכתובה והן בתשובה הנאמרת.

טבלה 7: תשובות תלמידים לשתי משימות הכללה*

תלמיד	תשובה כתובה	תשובה נאמרת
שחר {j,5}	8+(x+1)·(x+2)	מספר המבנה בסדרה ועוד 1 כפול הביטוי מספר המבנה בסדרה ועוד 2 ואז ועוד 8.
טום {d,4}	18-(n·4)+4	המיקום של המספר שרוצים לגלות כפול 4 ואת המכפלה להחסיר מ-18 ולהפרש להוסיף 4.

(*) הסימון {x, y} מציין {מספר המשימה, מספר הסבב} בהתאמה. ראו משימות בנספח.

לסיכום, כדי להציג פעלים ופעולות, התלמידים **צמצמו בהדרגה את השימוש בפעלים חשבוניים** (כגון "חיברתי", "לכפול") **ובפעלים שאינם חשבוניים** (למשל, "הקפצתי", "למצוא"). **השימוש בפעולות חשבון** (כגון "ועוד", "כפול") **התרחב** עם הזמן והתשובות נוסחו ניסוח מנוכר. כדי לתאר תוצאות של פעולות, התלמידים **הגדילו בהדרגה את השימוש בפסוקיות פעולה מורכבות ובפרזות עצם**, כך ששכיחותן הגיעה לשיאה בסבב 4 ו-5. ממצאים אלה מלמדים, שלפחות מבחינה תחבירית, השיחים Dproc ו-Dobj נמצאו בקרבה מקסימלית זה לזה בסבב 5. עם זה כדי לקבוע האם פסוקיות פעולה מורכבות מתפקדות גם כפסוקיות עצם בעיני התלמידים, עלינו להביט מקרוב בהתנהגותם ובפעולות שהם נוקטים. הסתכלות כזאת תוכל לשפוך אור על הרגע שבו השיחים Dproc ו-Dobj מתאחדים הלכה למעשה ולפיכך מושגת ראייה דואלית תהליך-מבנה של ביטויים אלגבריים.

שאלת מחקר 3: כיצד משיגים התלמידים ראייה דואלית תהליך-מבנה המאפיינת ביטויים אלגבריים? האם השיח התהליכי Dproc והשיח המבני Dobj מתלכדים לשיח אחד בנקודה מסוימת?

בחלק זה של הדיווח אראה את המאבק המודע של התלמידים על הראיפיקציה ואספר כיצד הם נלחמו על הרעיון של הדואליות ולמענו. לתיאור מאבק זה בחרתי להיעזר בתשובותיהם של שני זוגות תלמידים: דשה–אביב (בת ובן) והילה–טל (שתי בנות). האינטראקציה בשני הזוגות מייצגת במידה רבה את השיח שהתקיים גם בקרב הזוגות האחרים. לאחר שהתלמידים ניסחו תשובה למשימת הכללה, בכל מפגש של כל סבב, שאלתי אותם: "מה מתארת התשובה שכתבתם?". השיחות שסבבו על שאלה זו, נתנו הצצה למאבק שלהם על הכרה בדואליות תהליך-מבנה ואפשרו לי לתפוס את רגע ה'הארה' – הכרה פתאומית בדואליות.

התפתחות ראייה דואלית אצל דשה ואביב

השיחות שהתקיימו בין דשה לאביב עד לסבב 4 (סוף שנת הלימודים בכיתה ח') בעניין מציאת איבר כללי לסדרה חשבונית מראות במובהק שיח תהליכי Dproc. טבלה 8 מראה כי בתחילת סבב זה, עדיין התלמידים ראו בביטוי אלגברי **תהליך חישובי למציאת ערך האיבר** (ראו היגדים 75 ו-78). לאחר ששאלתי אותם מה מבטא הביטוי שכתבה דשה, סברו שניהם **שלא** השיבה על השאלה (היגדים 75 ו-80) והתקשו לראות בביטוי האלגברי פסוקית עצם. דשה הפרידה בתשובתה הכתובה בין התהליך החישובי $18\text{-}([y\text{-}1]\cdot 4)$ לתוצאתו x (ראו היגדים 78 ו-79) וכתבה מקבץ הוראות למציאת האיבר "מורידים 1 ממספר המקום, כופלים את זה ב-4 ואת כל זה מורידים מ-18".

טבלה 8: שיחה עם דשה ואביב על משימה d בסבב 4

<table>
<tr><td colspan="4">משימה: לפניכם סדרה של מספרים: ... ,6 ,10 ,14 ,18 . איזה איבר נמצא במקום כלשהו בסדרה?</td></tr>
<tr><td>תלמיד</td><td colspan="3">תשובה כתובה</td></tr>
<tr><td>דשה</td><td colspan="2">$18–([y–1]\cdot 4)=x$
x– האיבר, y – המקום</td><td>כדי למצוא את האיבר במקום כלשהו בסדרה, מורידים 1 ממספר המקום, כופלים את זה ב-4 ואת כל זה מורידים מ-18.</td></tr>
<tr><td>אביב</td><td colspan="3">$y\text{-}4 = x$ y - המספר שלפני, x – האיבר</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>מס'</td><td>דובר</td><td>מה נאמר?</td><td>מה נעשה?</td></tr>
<tr><td>75</td><td>אביב</td><td>אבל אני אומר לך שזאת הדרך! זאת לא התשובה.</td><td>מצביע על תשובתה של דשה</td></tr>
<tr><td>76</td><td>מראיין</td><td>למה זאת הדרך?</td><td></td></tr>
</table>

77	אביב	אם אתה יודע את המקום, אז אתה שם אותו ואז אתה מוצא את האיבר.	
78	דשה	האיבר הוא איקס (x) אבל זאת הדרך! זאת הדרך להגיע אל האיבר!	
79	דשה	והאיבר הוא איקס (x). לא ידוע.	
80	דשה	אנחנו לא יכולים לענות לו כי אין מספיק נתונים.	$\begin{cases} y\text{-}4=x \\ 18-([y-1]\cdot 4)=x=x \end{cases}$

בשלב זה בשיחה ניסה אביב לפתור מערכת משוואות המשלבת את השוויונות שכתבו שניהם באומרו: "ככה אנחנו נוכל להגיד את האיבר" (ראו היגד 81). דומה שההצעה של אביב למצוא ערך מספרי לאיבר, הציתה אצל דשה את הרעיון שהביטוי האלגברי שכתבה שקול לתוצאה של האיבר הכללי המבוקש. דשה ניגשה לתשובה המילולית שניסחה בטבלה 8: "כדי למצוא את האיבר במקום כלשהו בסדרה, מורידים 1 ממספר המקום, כופלים את זה ב-4 ואת כל זה מורידים מ-18" והוסיפה "**האיבר הוא התוצאה של כל זה**".

תוספת זו כיוונה מייד לרגע מכונן בשיחה, שבו דשה חוותה הארה שלוותה בהתרגשות רבה ובהרמת גובה צליל הדיבור: "זהו אביב, אביב! הבנתי! הו... הללויה!" (היגד 96 בטבלה 9). דשה תשנה מעתה את האופן שהיא מסתכלת על ביטויים אלגבריים. בעוד לפני הגילוי ראתה דשה את הביטוי $18-([y-1]\cdot 4)=x$ **תרגיל** / פסוקית פעולה המתארת דרך להגיע לאיבר (ראו היגד 98), הרי שעכשיו ביטוי זה הוא בעיניה **תוצאה של התרגיל** . ההכרה בתוצאת התרגיל $18-([y-1]\cdot 4)=x$ כאיבר הייתה משותפת לדשה ולאביב (היגד 99), אבל בעוד דשה ראתה בביטוי חישוב ותוצאתו גם יחד, אביב ראה בו תהליך חישובי גרידא: "את לא אומרת לו מה האיבר! את אומרת לו את התרגיל כדי להגיע לאיבר!" (היגד 121).

טבלה 9: מאבקה של דשה על הראייה הדואלית של ביטויים אלגבריים

מס'	דובר	מה נאמר?	מה נעשה?
96	דשה	זהו אביב, אביב !! הבנתי! הבנתי! הו... הללויה!	
97א	דשה	**התוצאה** של התרגיל הזה,	מצביעה על הביטוי $18-([y-1]\cdot 4)=x$
	אביב	אם אתה יודע את המקום, אז אתה שם אותו ואז אתה מוצא את האיבר.	
97ב	דשה	זה האיבר! ↑	מצביעה על x במשוואה $18-([y-1]\cdot 4)=x$
98	דשה	כלומר **חייבים** לכתוב את התרגיל, אבל **התוצאה** זה האיבר!	
99	אביב	נו נכון, אבל את זה הבנתי מההתחלה.	
100	דשה	אז אנחנו כן כותבים את האיבר!	
101	דשה	הוא {המראיין} לא אמר שהאיבר חייב להיות מספר!	
102	דשה	אולי האיבר יכול להיות התוצאה של התרגיל!	
103	אביב	אבל הוא לא ביקש את הדרך, הוא ביקש את האיבר!	
104	דשה	אבל זאת **לא** הדרך!	
105	אביב	זאת כן הדרך, את נותנת לו תרגיל! זה תרגיל כדי להגיע לתשובה!	
110	דשה	אבל שנייה, תקשיב. האיבר הוא **התוצאה** של התרגיל הזה!	מצביעה על הביטוי $18-([y-1]\cdot 4)=x$
111	דשה	אז כן צריך את התרגיל, אבל רק כדי **להראות את האיבר!**	

121	אביב	את לא אומרת לו מה האיבר! את אומרת לו את **התרגיל**, כדי להגיע לאיבר!	
123	דשה	אני אומרת לו מה האיבר. אני אומרת לו מה האיבר. אני פשוט אומרת לו מה **האיבר**.	
124	אביב	את לא!	
125	דשה	אני כן! כי אני אומרת לו: "**האיבר** הוא התוצאה של התרגיל הבא".	
126	אביב	נו בדיוק, את נותנת לו את **הדרך** ולא את האיבר!	
153	דשה	כל איבר הוא יכול להיות תוצאה של תרגיל.	
156	אביב	אָהה רגע, אז האיבר הוא 18 # מינוס #בסוגריים# וויי (y) #מינוס 1# #כפול # 4 #שווה # איקס (x)?	קורא את הביטוי האלגברי של דשה.
157	דשה	כן!	

כדי לשכנע את אביב להכיר בדואליות, הציגה דשה נימוקים מספר. תחילה ציינה כי האיבר אינו חייב להיות מספר (ראו היגד 101). נימוק זה לא שכנע את אביב, שהמשיך לראות בביטוי 'מרשם' לחישוב: "אָהה רגע, אז האיבר הוא 18 # מינוס #בסוגריים# וויי (y) #מינוס 1# #כפול # 4 #שווה # איקס (x)?" (היגד 156).

כדי לגרום לאביב לאמץ את נקודת מבטה, הציגה דשה נימוק נוסף הנשען על החלפה בין תפקידיו השונים של סימן השוויון, מהוראת ביצוע ליחס של שקילות (ראו טבלה 10). הטענה כי האיבר הוא התוצאה של התרגיל פינתה מקומה לשקילות שבין התרגיל $18-([y-1]\cdot 4)$ לאיבר x. למעשה דשה משתמשת בתכונת הטרנזיטיביות של יחס השקילות בדרך הזו: **ביטוי אלגברי** הוא **תרגיל** (היגד 97א) ← תרגיל חישוב נותן את תוצאתו (היגד 97א) ← התוצאה היא **האיבר** (היגדים 97ב ו-125) ← **האיבר הוא התרגיל (הביטוי האלגברי)** (היגד 173). טרנזיטיביות זו מלמדת על הראייה הדואלית העכשווית של דשה, שלפיה הביטוי האלגברי שבנתה **מתפקד בעיניה כעת גם כפסוקית שם עצם**.

טבלה 10: תפקיד סימן השוויון בתשובתה של דשה

מס'	דובר	מה נאמר?	מה נעשה?
170	דשה	שנייה: אתה הסכמת עם המשוואה הזאת, נכון?	מצביעה על המשוואה $18-([y-1]\cdot 4)=x$
171	דשה	במשוואה כתוב שזה **שווה** לאיבר	ואז על הביטוי x מצביעה על $18-([y-1]\cdot 4)$
172	דשה	כלומר זה והאיבר הם אותו דבר! כלומר זה האיבר!!	
173	דשה	האיבר הוא בעצם התרגיל!	ממשיכה לכתוב: **האיבר הוא בעצם התרגיל.**
174	אביב	אני רשמתי שאין לנו מספיק נתונים כדי להגיד את המספר, אלא רק את הדרך.	

לסיכום, בטבלה 9 ו-10 ניכר מאבקה של דשה על ראיית התפקיד הדואלי של הנוסחה האלגברית שבנתה. יכולתה המתגבשת לראות בביטוי האלגברי הן תהליך והן את תוצאתו, מלמדת כי שני השיחים Dproc ו-Dobj התמזגו אצלה זה עתה לשיח אחד. למעשה הראייה הדואלית של דשה נצפתה עד לתום איסוף הנתונים בסבב 5. החל מנקודה זו בשיח, דשה אף ניסחה את כל תשובותיה הנאמרות כמנוכרות. כל הנימוקים שהציגה דשה לפני אביב לא שכנעו אותו והוא נשאר בעמדתו כי הביטוי האלגברי מתפקד כדרך חישוב ותו לא. הנתונים שאציג כעת יראו כי תעבור עוד כשנה עד שגם אביב יהיה מסוגל לראות ביטויים אלגבריים ראייה דואלית. בעוד דשה חוותה הארה שהתרחשה בזמן קצר, אצל אביב תהליך העיצום היה איטי ומדורג.

עיון חוזר בטבלה 9–11 מראה שעד לסבב 4 (כולל), אביב מסוגל לראות בביטויים אלגבריים תהליך בלבד. גם אם הם נכונים, ביטויים אלה מבטאים בעיניו אוסף הוראות לביצוע, וערכו של האיבר נקבע רק לאחר הצבת מספר בעבור מקום האיבר בסדרה. הסתכלות זאת נצפתה בהיגד 105 בטבלה 9: "זה תרגיל כדי להגיע לתשובה" ובהיגד 77 בטבלה 8: "אם אתה יודע את המקום, אז אתה שם אותו ואתה מוצא את האיבר".

נקודת מבט תהליכית זו קיבלה תפנית בתחילת סבב 5. בתשובתו למשימה: "מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה ... 31, 22, 15, 7, 6", כתב אביב $(n-1)^2+6$ ואמר "המספר שלפני האיבר שצריך למצוא כפול עצמו פלוס 6"

בשיחה זו **אביב מכיר לראשונה בביטוי שכתב כתשובה לגיטימית למשימה ואף מכיר במשתנה n כמספר**: "לדעתי זה הפתרון והתשובה הסופית, מכיוון שאין עוד דרך להציג את התשובה, מכיוון ש-n נשאר בגדר מספר שאינו ידוע לי. הוא כמו שומר מקום למספר שאמור להיות המקום של המספר שצריך למצוא". בהמשך סבב 5 בנה אביב את הביטוי $(n-1)(3+n)+8$ בעבור הסדרה ....8,13,20,29,40 ותיאר אותו "המיקום של האיבר פחות 1 כפול מיקום האיבר פלוס 3 ביחד ולחבר להכול 8". בתשובה לשאלתי מה מבטא בעיניו הביטוי שכתב, הסביר אביב "הביטוי זה רצף של מספרים, n זה גם מספר וגם ביטוי אלגברי, כי ביטוי הוא גם מספר. כדי למצוא את האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה, השתמשתי במיקום שלו בהנחה שאני יודע אותו. לכן אפשר לכתוב את המספר/הביטוי שמצאתי בכל מקום בסדרה". הסבר זה מציין שתי התפתחויות בשיח האלגברי: האחת – אביב רואה **בביטוי אלגברי מספר, כלומר פסוקית שם עצם**; השנייה – אביב מבצע 'האחדה' (saming) – פעולה העומדת בבסיסו של תהליך ההכללה, שבה ניתן שם אחד למספר עצמים שעד כה נחשבו לשונים זה מזה. אביב רואה בערכו של n מספר ידוע ולכן **הביטוי האלגברי מייצג בעיניו את כל איברי הסדרה.** התפתחויות אלה מלמדות שאביב רואה כעת בביטויים אלגבריים **הן עצם מספרי והן דרך לחישוב** עצם זה.

המסע להשגת ראייה דואלית אצל הילה וטל

כמו אצל דשה ואביב, עד לתחילת סבב 4, התמקד השיח של טל והילה בתהליכים בלבד. בתחילת סבב 4 התעקשו טל והילה שהביטוי $18-(x-1)\cdot 4$ מבטא תהליך חישובי הנפרד מתוצאתו (ראו היגדים 64, 89 ו-97 בטבלה 11). כמו דשה, הילה עשתה הפרדה זו באמצעות סימן השוויון (היגד 97), וכמו אביב, טל הדגישה שהביטוי ייצג איבר רק לאחר ביצוע של ההוראות החישוביות המופיעות בו (היגד 77).

טבלה 11: שיחה עם הילה וטל על משימה d בסבב 4

<table dir="rtl">
<tr><th colspan="4">לפניכם סדרה של מספרים: ...,6, 10, 14, 18 איזה איבר נמצא במקום כלשהו בסדרה?</th></tr>
<tr><th>תלמיד</th><th colspan="2">תשובה כתובה</th><th>תשובה נאמרת</th></tr>
<tr><td>הילה</td><td colspan="2">$18-(x-1)\cdot 4$
x – מספר המקום שאנו מחפשים</td><td>מספר המקום פחות 1 – דבר ראשון, מכפילים ב-4 ואת כל המכפלה מורידים מ-18.</td></tr>
<tr><td>טל</td><td colspan="2">האיבר = $18-(x-1)\cdot 4$</td><td>אתה מסמן את המקום בסדרה בסימן כלשהו, ואז הסימן כלשהו פחות 1 ואז זה כפול 4 והכול מחסירים מ-18.</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>174</td><td>אביב</td><td>אני רשמתי שאין לנו מספיק נתונים כדי להגיד את המספר, אלא רק את הדרך.</td><td></td></tr>
<tr><th>מס'</th><th>דובר</th><th>מה נאמר?</th><th>מה נעשה?</th></tr>
<tr><td>64</td><td>הילה</td><td>זה האיבר שנמצא במקום שבשביל להגיע אליו צריך לעשות איקס (x) מינוס 1, בתוך סוגריים, להכפיל ב-4, ואת כל זה לעשות מינוס 18.</td><td>מצביעה על הביטוי
$18-(x-1)\cdot 4$</td></tr>
<tr><td>66</td><td>טל</td><td>זה הביטוי האלגברי איך להגיע לאיבר.</td><td></td></tr>
<tr><td>77</td><td>טל</td><td>אי אפשר לענות על השאלה הזאת כי אנחנו לא יודעים מהו המקום הכלשהו. תיתן לנו מקום ונדע איך לענות.</td><td></td></tr>
<tr><td>87</td><td>הילה</td><td>אם היינו יודעות מה ה-x, היינו יודעות בדיוק מה האיבר.</td><td></td></tr>
<tr><td>89</td><td>טל</td><td>אחרי שעושים את זה יודעים מה האיבר. זה לא האיבר עצמו.</td><td></td></tr>
<tr><td>97</td><td>הילה</td><td>זה לא האיבר! זה הדרך למצוא את האיבר! אחרי השווה יבוא האיבר.</td><td></td></tr>
</table>

בהמשך אותו מפגש חלה תפנית בשיחה, כאשר הילה וטל החלו להתלבט באשר למעמדו של הביטוי האלגברי שניסחו. התלבטות זו באה לידי ביטוי בשתי נקודות מבט שהציגו המשתתפות בסימן השוויון: **השוויון כפעולת 'בצע'**. ההיגדים שבטבלה 12א מלמדים שהביטויים 2+3 ו-$18-(x-1)\cdot 4$ מתפקדים כמרשמים לחישוב ולא כפסוקיות עצם (במקרה הראשון יתקבל המספר 5, ראו היגד 104; ובמקרה השני יתקבל האיבר הנמצא במקום נתון, ראו היגד 112 ו-130). נקודת מבט זו היא המונעת מהילה, למשל, לראות בביטוי $18-4(x-1)$ תוצאת החישוב שלו (ראו היגד 128–130).

טבלה 12א: האם הביטוי מבטא תהליך בלבד?

מס'	דובר	מה נאמר?	מה נעשה?
99	הילה	אני מתלבטת... אני מתלבטת כיוון שנכון שיש פה את השווה,	מצביעה על השוויון במשוואה איבר=$18-4\cdot(x-1)$
100	הילה	זה כמו להגיד 2 ועוד 3 שווה 5.	
104	הילה	אם אתה רואה 2 ועוד 3, אתה לא יודע שזה 5.	
105	טל	אתה רואה שני מספרים שצריך לחבר ופעולת ועוד,	
108	טל	אז כמו פה, אם מתישהו נחשב את זה, זה יהיה שווה לאיבר.	מצביעה על הביטוי $18-4\cdot(x-1)$
110	הילה	אתה שולח את התרגיל הזה למישהו והוא צריך להבין מזה מהו האיבר... ולא כתוב שם בענק "אני האיבר"!	
112	הילה	וצריך לחבר אותי, להכפיל אותי... וכל זה. צריך לעשות מינוס, כפול ורק אז הוא מגיע לאיבר הזה.	
118	טל	יש לנו פה את הדרך, אבל זה לא חד-משמעית האיבר עצמו. אני לא יכולה להגיד לך: "האיבר הוא 5!"	
119	טל	כי זה לא חד-משמעי. כתבנו: "שווה האיבר", מה זה האיבר? זה איבר כלשהו!	
127	הילה	אבל [...] לא כתוב לך 5.	
128	הילה	אומרים לך לכתוב משהו **אחד** שהוא האיבר. לא כתוב לך "האיבר הוא". כתוב שצריך למצוא משהו אחד.	
129	הילה	ולא כתוב 4 או 5 או 6 או כל מספר כלשהו.	
130	הילה	כתוב: 18 מינוס 4, בסוגריים איקס (x) מינוס 1 שווה – ומזה אתה לא יכול להסיק מהו האיבר. זה לא מספר!	

השוויון כיחס שקילות

ההיגדים שבטבלה 12ב מלמדים על תפקידו של סימן השוויון כיחס של שקילות. כמו בנקודת המבט שזיהיתי בשיח של דשה (ראו איור 2), הביטויים 2+3 ו-$18-4\cdot(x-1)$ מתפקדים כ**תוצאות חישוב**, כלומר **כפסוקיות עצם** (במקרה הראשון המספר 5, ובמקרה השני האיבר הנמצא במקום x בסדרה). על אף ניסיון התלמידות לראות את הדואליות של הביטויים, הרי שבמהלך כל השיחה ניכרת הפרדה בין מרשמי החישוב ובין תוצאותיהם.

טבלה 12ב: האם הביטוי מתאר גם עצם?

מס'	דובר	מה נאמר?	מה נעשה?
120	טל	אבל מצד שני זה כן כי בעצם יש פה את הדרך למצוא את האיבר, ואם מחשבים את זה, אז כן יוצא האיבר!	
121	הילה	אני חושבת שמה שכאן הוא **כן**... **ולא**. ממש כן ולא.	מצביעה על הביטוי $18-4\cdot(x-1)$
122	הילה	מצד אחד כן, בגלל שזה שווה בעצם...	
123	הילה	כשאומרים לי ש-5 שווה 5, זה אומר ש-5 הוא 5 בעצם וזה שווה לאיבר כי יש פה שווה לאיבר.	מצביעה על השוויון במשוואה איבר = $18-4\cdot(x-1)$

בהמשך המפגשים שהתקיימו בסבב 4, לא הצליחו הבנות להכריע בין הפן התהליכי לפן המבני של הביטויים האלגבריים. הכרעה כזאת הופיעה אצל שתיהן רק במהלך סבב 5 (ראו טבלה 13). בשלב זה בשיח המתפתח של טל והילה, שתיהן מכירות בביטויים האלגבריים שבנו כעצמים מספריים. כמו בשיח של אביב בסבב 5, גם הבנות מבצעות תהליך של האחדה (saming) שמאפשר להן לראות בביטוי האלגברי כל אחד מאיברי הסדרה, גם מבלי להציב ערך מספרי בעבור מקומו של האיבר.

טבלה 13: ראייה מעוצמת של ביטויים אלגבריים אצל הילה וטל במשימה i בסבב 5 (ראיונות אישיים)

<table>
<tr><td colspan="3">**משימה:** לפניכם סדרה של מספרים: 8, 13, 20, 29, 40, 53,...</td></tr>
<tr><td>**תלמיד**</td><td>**תשובה כתובה**</td><td>**תשובה נאמרת**</td></tr>
<tr><td>**הילה**</td><td>האיבר שחיפשתי = $H\cdot(H+1)+(H+1+H+2+(2-H))$
H – המקום של האיבר שחיפשתי בסדרה</td><td>המקום ועוד 1 כפול המקום, ועוד המקום ועוד 1 ועוד המקום ועוד 2, ועוד 2 פחות המקום.</td></tr>
<tr><td>**מס'**</td><td>**דובר**</td><td>**מה נאמר?**</td></tr>
<tr><td>85</td><td>הילה</td><td>אני בחרתי בשיטה הזאת כדי לבטא איך מגיעים לאיבר כלשהו בסדרה ואם הגעתי לאיבר כלשהו בסדרה עם הנוסחה הזאתי – זה אומר שהוא מבטא מספר כלשהו בסדרה.</td></tr>
<tr><td>89</td><td>מראיין</td><td>אבל איך את יודעת שהביטוי הזה מתאר את האיבר?</td></tr>
<tr><td>90</td><td>הילה</td><td>כתבתי ש-H זה המקום שחיפשתי בסדרה ו-H יכול להחליף כל מספר.</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>**תלמיד**</td><td>**תשובה כתובה**</td><td>**תשובה נאמרת**</td></tr>
<tr><td>טל</td><td>$x\cdot(x+4)+8$</td><td>האיבר שנמצא במקום כלשהו הוא המקום שלפני, כפול המקום שלפני פלוס 4, ועוד 8</td></tr>
<tr><td>**מס'**</td><td>**דובר**</td><td>**מה נאמר?**</td></tr>
<tr><td>75</td><td>טל</td><td>הביטוי האלגברי מבטא את התשובה לשאלה כלומר את האיבר הכלשהו בסדרה והוא מבטא גם את הנוסחה למציאת האיבר הכלשהו בסדרה.</td></tr>
<tr><td>76</td><td>טל</td><td>הביטוי מייצג מספר מכיוון שאם נציב ב-x מספר, הביטוי כולו יהפוך למספר.</td></tr>
<tr><td>77</td><td>מראיין</td><td>ואם לא מציבים בו מספרים במקום x?</td></tr>
<tr><td>78</td><td>טל</td><td>הביטוי הוא עדיין מספר גם אם לא מציבים.</td></tr>
</table>

התפתחות חשובה נוספת בשיח של הילה באה לידי ביטוי בראיית סימן השוויון כיחס שקילות. כמו דשה (ראו טבלה 10), גם הילה השתמשה בתכונת הטרנזיטיביות כנימוק נוסף המצדיק את קביעתה (ראו טבלה 14). בהיגד 88א היא עומדת על השוויון בין הביטוי $H\cdot(H+1)+(H+1+H+2+(2-H))$ ובין הביטוי "האיבר שחיפשתי" המתפקד כתוצאת איבר במקום נתון (ההשוואה משקפת את הפן התהליכי של הדואליות). בשלב הבא (היגד 88ב) הילה משווה בין הביטוי "האיבר שחיפשתי" ובין הביטוי "האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה" הלקוח מנוסח המשימה (השוואה זו בין תוצאת החישוב ובין האיבר משקפת את הפן המבני). בשלב האחרון (היגד 88ג) מתקיימת טרנזיטיביות שלפיה הביטוי האלגברי הוא האיבר במקום כלשהו בסדרה. תכונת הטרנזיטיביות אפשרה להילה ולדשה לראות בביטוי אלגברי הן תהליך חישובי והן את תוצאתו.

טבלה 14: ראייה בסימן השוויון יחס שקילות בשיח של הילה

מס'	דובר	מה נאמר?	מה נעשה?
86	מראיין	אם הביטוי מבטא דרך להגיע לאיבר אז איך הוא עצמו גם האיבר?	
87	הילה	כי זאת הדרך לאיבר ותמיד עושים שווה בסוף הדרך לאיבר. ואם הוא שווה, אז זה חוק המעבר שזה שווה לזה וזה שווה לזה.	
88א	הילה	אם ביטוי שווה לאיבר שחיפשת ב',	מצביעה על הביטוי "האיבר שחיפשת".
88ב	הילה	והאיבר שחיפשת ב' שווה לאיבר שחיפשת א' אז	מצביעה על הביטוי "מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה" בנוסח המשימה.
88ג	הילה	האיבר שחיפשת א' שווה לביטוי.	מצביעה על הביטוי האלגברי שניסחה.

בעוד תשובותיהן הנאמרות של הילה וטל בסבב 4 נוסחו אנושיות (שימוש במילים "מכפילים", "מורידים", מחסירים" בטבלה 11), ניסוחן בסבב 5 היה **מנוכר** (שימוש במילים "כפול", "ועוד" בטבלה 13).

דיון ומסקנות

מאמר זה שופך אור על תהליך העיצוב של השיח האלגברי. תהליך זה הוא איחוד של שני שיחים – האחד (תהליכי Dproc) קרוב יותר לשיח בלתי פורמלי שהתלמידים מפתחים לעיתים בכוחות עצמם לפני שמתחילים ללמוד אלגברה בכיתה, והשיח האחר (מבני Dobj) שנלמד עם חשיפתם של התלמידים לרישום הסימבולי המקובל באלגברה. הממצאים מתארים דרך ארוכה ומלאת לבטים, שעוברים אותה לומדי האלגברה הבית ספרית, משלב שבו ביטויים אלגבריים מייצגים בעיניהם תהליכים בלבד ועד לרגע ההארה, שלאחריו הם מצליחים לראות שביטויים אלה מתארים גם את התוצאה של התהליך החישובי. לפיכך הארה זו היא רגע מכונן בחשיבה האלברית שמתפקדת כמעין 'סיכה' הקושרת את השיחים Dproc ו-Dobj וגורמת להתמזגותם.

הממצאים המוצגים כאן לקוחים מתוך מחקר אורך שמטרתו הייתה לבחון כיצד מתפתח השיח האלגברי בקרב תלמידים בחטיבת הביניים. בממצאים לשאלות 1 ו-2 דיווחתי כיצד נראית ההתקרבות בין השיח התהליכי לשיח המבני בהיבט הלשוני-תחבירי מנקודת מבטי כחוקר. בתשובה לשאלה 3 הראיתי כיצד התלמידים פועלים במהלך מסלול התקרבותם של שני השיחים זה לזה עד לאיחודם הסופי. אביא כעת סיכום קצר של ממצאים אלה כדי להשיב על שלוש שאלות המחקר.

שאלת מחקר 1: מהם המאפיינים של השיח המטה-אריתמטי בקרב תלמידים בכיתה ז׳ ובכיתה ה׳ שטרם נחשפו לשיח האלגברי הפורמלי?

השיח האלגברי של התלמידים הבוגרים (כיתה ז') ושל התלמידים הצעירים (כיתה ה'), שטרם נחשפו לאלגברה הפורמלית בכיתה היה תהליכי ברובו. עם זה הממצאים מראים הבדלים ניכרים בין שני השיחים: הבוגרים **השתמשו מעט בפעלים חשבוניים** (כגון "חיברתי", "כופל") **ובפעלים שאינם חשבוניים** (כגון "מצאתי", "ראיתי"). הבוגרים **הרבו להשתמש בפעולות חשבון** (כגון "ועוד", "כפול"). בעוד התשובות של רוב הצעירים היו **אנושיות** (למשל, "אתה צריך לעשות", "אני מחשבת"), כמחצית מתשובות הבוגרים היו מנוכרות. לבסוף, כדי להציג **תוצאות ביניים** של חישובים השתמשו הצעירים והבוגרים **במילים מיוחדות**, כגון "התוצאה" או "התשובה", ואולם שימוש זה היה שכיח יותר בקרב הצעירים. לבסוף, הבוגרים הרבו להשתמש **בפסוקיות פעולה מורכבות** – פסוקיות פעולה שאינן מכילות תוצאות ביניים ומנוסחות ניסוח מנוכר, כגון "מקום • חוקיות הסדרה + 1". על סמך השימוש הנרחב בפעולות חשבון ובפסוקיות פעולה מורכבות, תשובות הבוגרים היו קרובות יותר לתחביר האלגברי המקובל לעומת תשובותיהם של הצעירים. ממצאים אלה מלמדים שבעוד הצעירים נמצאים ברמה **התהליכית** במודל התפתחות של השיח האלגברי, הרי הבוגרים נושקים לרמה **המגורענת**.

שאלת מחקר 2: כיצד מאפייני השיח המטה-אריתמטי משתנים בקרב תלמידים אלה במהלך לימודי האלגברה הפורמלית בכיתה?

ככל שנקפו הסבבים, הוסט מרכז הכובד של השיח המטה-אריתמטי מתהליכי חישוב לעבר תוצאותיהם. מעבר זה ניכר במספר תופעות בשיח. ראשית, השימוש של התלמידים **בפעלים חשבוניים וכן בפעלים שאינם חשבוניים** נמצא במגמת ירידה. במקום זה **התלמידים הרבו להשתמש בפעולות חשבון.** שינויים לשוניים אלה מלמדים על מעבר הדרגתי משיח Dproc לשיח Dobj, שכן פעולות החשבון מנוסחות ניסוח מנוכר המקובל בשיח אלגברי מבני פורמלי. עדות נוספת לממצא זה ניכרת **בצמצום ניכר במידת מעורבותו של המבצע האנושי. מגמת צמצום נצפתה גם בשימוש של התלמידים במילים מיוחדות לתוצאות ביניים.** עם התקדמות הסבבים, הניסוח של רוב תשובות התלמידים היה מורכב **מפסוקיות פעולה מורכבות** או **מפסוקיות שם עצם ופרזות עצם**. ממצאים אלה מבשרים על מעבר התלמידים מהרמה התהליכית לרמה המגורענת ומשם ככל הנראה לרמה המבנית. בהמשך הדיון אכריע האם פסוקיות הפעולה בסבבים האלה מתארות פעולות או שמא עצמים, כלומר האם הגיעו בסופו של דבר לרמה המבנית.

שאלת מחקר 3: כיצד משיגים התלמידים ראייה דואלית תהליך-מבנה המאפיינת ביטויים אלגבריים? בייחוד האם השיח התהליכי Dproc והשיח המבני Dobj מתלכדים לשיח אחד בנקודה מסוימת?

הממצאים בחלק זה של הדיווח עוסקים בשיח בקרב שני זוגות תלמידים: דשה–אביב והילה–טל. **בסבב 1–3 ואף בתחילת סבב 4 (לקראת סוף שנת הלימודים בכיתה ח')**, ארבעת התלמידים עדיין ראו בביטויים האלגבריים שכתבו פסוקיות פעולה שאינן פסוקיות עצם. הביטויים האלגבריים שבנו היו בשבילם הוראות חישוביות למציאת האיבר. בשלב זה שבו השיחים Dproc ו-Dobj טרם התמזגו, הצליחו התלמידים לבנות ביטויים אלגבריים תקניים מבחינה תחבירית, ואולם לא החשיבו ביטויים אלה תשובה לגיטימית לשאלה: "מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה?". כמו דיאופנטוס, נצמדו התלמידים לשיח על תהליכים והתעקשו על הבחנה מוחלטת בין ביטוי אלגברי השייך לשיח של תהליכים ובין תוצאת החישוב כשייכת לשיח של עצמים. כדי להפריד בין התהליך לתוצאתו, שלושה מארבעת התלמידים סימנו את התוצאה הסופית של האיבר בשם חדש והשוו את הביטוי לשם זה, למשל, $18\text{-}4\cdot(y\text{-}1)=x$. שימוש זה בסימן השוויון אינו מעיד בהכרה על שקילות בין הביטוי לתוצאתו, אלא שהוא מעיד על התוצאה מתקבלת מתהליכי החישוב המופיעים בו – בדומה לאופן שאנו משתמשים בסימן השוויון במחשבון. התלמידים ראו בביטוי האלגברי תוצאה של תהליך החישוב אך עדיין לא עצם עצמאי המתפקד כאיבר כללי של הסדרה. ראייה בסימן השוויון פעולת 'בצע' והשוואת הפסוקית לשם עצם חדש, תבשיל בהמשך הדרך לזיהוי שקילות מלאה, ולכן היא הגשר שיאפשר לתלמידים לעבור משיח Dproc לשיח Dobj. דוגמה להפרדה מעין זו נמצאת בתשובותיהם של תלמידים בבית הספר היסודי בבעיות הדורשות לחבר שני מספרים, למשל, 11 ו-23 ואז להכפיל את התוצאה ב-3. תלמידים רבים נוהגים לכתוב $11+23\cdot3$ ואין זה מפתיע שאנו מוצאים רישום זה, שכן כך נעשית פעולת ההקלדה במחשבון.

בתחילת סבב 4 נרשמה פריצת דרך בשיח האלגברי של דשה, כאשר ברגע של הארה פתאומית הצליחה לראות ביטוי אלגברי באופן דואלי – הן כתהליך חישובי והן כתוצאת החישוב.

דשה הצליחה לראשונה לזהות שקילות בין הביטוי האלגברי שבנתה לבין תוצאתו. הממצאים שדיווחתי עליהם מלמדים שלזיהוי השקילות אצל ארבעת המשתתפים היו שני גורמים עיקריים: **הגורם הראשון הוא החלפה בין תפקידיו השונים של סימן השוויון, מהוראת 'עשה משהו'** (Kieran, 1981) **ליחס שקילות.** היכולת של התלמידים לעשות החלפה זו בכיתה ט' ידועה ממחקרים קודמים שמצאו כי בין כיתה ז' לכיתה ח' עולה בהדרגה תפיסת סימן השוויון כיחס שקילות (Knuth et. al., 2011). החלפה זו נצפתה בשיחים של דשה והילה שהצליחו לזהות שקילות בין הביטוי האלגברי ובין תוצאתו. התלמידות סימנו תוצאה זו בשם מיוחד (x אצל דשה ו"האיבר שחיפשתי" אצל הילה). זיהוי השקילות התאפשר בשיח שלהן הודות לתכונת הטרנזיטיביות: **אצל דשה:** ביטוי אלגברי הוא תרגיל ← תרגיל חישוב נותן את תוצאתו ←התוצאה היא האיבר ←האיבר הוא ביטוי האלגברי; **אצל הילה:** הביטוי האלגברי שקול לפסוקית "האיבר שחיפשתי" ← הפסוקית "האיבר שחיפשתי" שקולה ל"איבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה" ← "האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה" שקול לאיבר האלגברי. כפי שדיווחו התלמידות, תכונת הטרנזיטיביות הייתה מוכרת להן דווקא משיעורי הגאומטריה בבית הספר.

הגורם השני הוא היכולת לראות משתנה אלגברי בודד כשם מספר ומשיקולי סגירות לראות בביטוי אלגברי עצם מספרי. תכונת האחדה (saming) העומדת בבסיסו של תהליך ההכללה מאפשרת לתלמיד לראות בביטוי האלגברי מספר 'מוכלל' המייצג את כל איברי הסדרה בו בזמן. הממצאים מראים כי היכולת לבצע האחדה הופיעה בתשובותיהם של אביב, הילה וטל רק בסבב 5. השתתפות התלמידים ברמה מבנית/מעוצמת זו מראה על סגירת מעגל התפתחותי של השיח האלגברי הבית ספרי.

ה'סיכה' שתפרה לבסוף את שני השיחים Dproc ו-Dobj והביאה לידי התמזגותם הייתה הזיהוי של הביטוי האלגברי עם האיבר, כלומר ראיית הביטוי כעצם מתמטי. אם בזכות סימן השוויון כיחס שקילות והטרנזיטיביות הנלווית אליו ואם הודות לתכונת ההאחדה, אוכל לקבוע כעת כי פסוקיות הפעולה המורכבות ביטאו פסוקיות עצם רק לאחר ההכרה בדואליות תהליך-מבנה שהתרחשה אצל רוב משתתפי המחקר בסבב 5. ממצא זה מאשש את השערתה של ספרד (Sfard, 1991) שלפיה ראיפיקציה דורשת תקופה ארוכה של הכנה והתמודדות ולבסוף מגיעה בהארה פתאומית. היכולת לצפות בהארה שחוותה דשה, שבה הצליחה לפתע לראות בביטוי האלגברי שבנתה תהליך וגם את תוצאתו, היא נדירה, והחוקר שמצליח לצפות באירוע כזה אינו אלא בר-מזל. בעוד השינוי שעברה דשה תועד בזמן אמת לפני עדשת המצלמה, הרי אצל שמונה מתוך עשרת המשתתפים התרחש השינוי ככל הנראה בתקופה שבין סבב 4 לסבב 5 (אצל תלמיד אחד, הראייה הדואלית הופיעה כבר בסבב 3). אומנם האירוע של דשה היה מקרה נדיר שיכולתי לצפות בהתרחשותו, אולם ההתרחשות כשהיא לעצמה אינה נדירה, שכן אנשים מכירים אותה מהתנסותם האישית. כך, למשל, לדברי המתמטיקאי ויליאם ט'ורסטון (William Thurston):

I remember as a child, in fifth grade, coming to the amazing (to me) realization that the answer to 134 divided by 29 is 134 over 29 [...] What a tremendous labor-saving device! To me, "134 divided by 29" meant a certain tedious chore, while 134 over 29 was an object with no implicit work. I went excitedly to my father to explain my discovery. He told me that of course this is so, a over b and 'a divided by b' are just synonyms. To him, it was just a small variation in notation (Thurston, 1990, p. 847).

ממצאי מחקר זה מלמדים שעשויות לחלוף **כשנתיים** מהנקודה שבה תלמידים נחשפים לאלגברה הפורמלית ועד שהם מסוגלים להכיר בדואליות תהליך-מבנה של ביטויים אלגבריים. על אף שקבוצת התלמידים במחקר כולו הייתה מצומצמת יחסית, יש מקום להניח כי אפשר להכליל את הממצאים שדיווחתי עליהם. ראשית, הממצאים עולים בקנה אחד עם התאוריה שהצגתי במודל ההתפתחות השיח שבניתי בטרם איסוף הנתונים. שנית, בהסתכלות מקרוב בתהליכי השיח האלגברי זיהיתי תהליכים שבבירור תלויים בשיח עצמו מאשר בתכונות הייחודיות של המשתתף בשיח או באופן שאני והמורות בכיתה עודדנו התפתחות זו. בתופעות הנובעות ממבנה השיח עצמו יש למנות, למשל, שינויים בשיח שחייבים להתבצע בסדר מסוים (כמו שגג הבית יכול להיבנות רק אחרי שנבנו כל הקומות). ובכל זאת יש לראות בממצאים השערה שעשויה להשתנות על סמך ממצאים נוספים ובקרב אוכלוסיות אחרות החשופות לתהליכים אחרים.

כדי לקצר את התקופה שבה מתמזגים השיח התהליכי והשיח המבני ולפתח ראייה דואלית בקרב תלמידיה, רצוי שהמורה תעודד את **ראייה בסימן השוויון יחס שקילות.** בשביל התלמיד סימן השוויון מתפקד תחילה כסימן 'עשה משהו' והתוצאה של הפעולה הנדרשת צריכה לבוא אחריו. בשלב מאוחר יפתח התלמיד יכולת לראות בסימן השוויון גם יחס שקילות. לשם כך רצוי שמורה לאריתמטיקה תציג לתלמידיה שוויונות כגון 3+4=2+5. מורה המלמדת אלגברה, יכולה להדגיש תפקיד זה של סימן השוויון, למשל, בפיתוח זהויות, כגון $2(x-3)=2x-6$ או בהדגשת עשיית אותה פעולה על שני אגפים של משוואה (ובכך להימנע משימוש במושג 'העברת אגפים'). בייחוד כדאי שתציג משוואות כגון $1=6x+10$, שבהן הביטוי האלגברי מופיע מצד ימין של סימן השוויון. הצגת משוואה כזאת עשויה לחזק אצל התלמיד את הבנת **הטרנזיטיביות של השוויון**, המקיימת תכונה הכרחית של יחס השקילות. כפי שראינו, למושג הטרנזיטיביות היה תפקיד מכריע בהתמזגות השיחים. כדי להאיר את השימוש בטרנזיטיביות בהוראה, רצוי שהמורה תדגיש את 'אקסיומת העבירות' שלפיה שני גדלים השווים לגודל שלישי – שווים זה לזה. הדגשת היישומים של אקסיומה זו היא הזדמנות לגשר בין תחומי מתמטיקה שונים כגון אלגברה וגאומטריה.

המושג **'האחדה' (saming)** זוהה גם הוא כגורם מרכזי המכוון להתמזגות השיחים. כדי להטמיע את המושג, כדאי שהמורה תבחן עם תלמידיה ביטויים אלגבריים כגון x+8 ותבקש מהם לחשב את ערך הביטוי בשביל ערכים מספריים שונים של x. לאחר מכן היא עשויה לשאול את התלמידים מהו ערך הביטוי בשביל x=t, ולבסוף לדון עימם על ערכו של הביטוי בשביל x=x. שאלה זו עשויה להראות לתלמידים שהביטוי $x+8$ מתפקד הן כתהליך והן כעצם מספרי העומד בזכות עצמו.

לבסוף כדאי שהמורה תעקוב אחרי התפתחות הראייה הדואלית של תלמידיה. היא יכולה לשוחח שיחה אישית עם כל תלמיד בנקודות זמן שונות, ותציג במהלכה ביטוי אלגברי ותשאל "מה אתה רואה כאן?". נוסף על כך, רצוי שתעשה דיון כיתתי על סוגיה זו. ממצאי מחקר זה מלמדים כי הימצאותם של סמלים אלגבריים כשהם לעצמם אינם משמשים סממן בלעדי של חשיבה אלגברית (Zazkis & Liljedahl, 2002). לכן על המורה להיות ערה לכך שתלמידיה עשויים לבנות ביטויים תקניים לבעיית הכללה, ובכל זאת לא לראות בהם תשובה לגיטימית לשאלה שנשאלו. היא יכולה לעורר דיון על תקפותם של הביטויים ולבחון את ראייתם המשתנה של התלמידים. על סמך המלצות אלה, תמפה המורה את אופי ההשתתפות בשיח האלגברי של כל תלמיד ותלמידה (שיח תהליכי, מגורען או מבני) ותתאים את נוסח הבעיות לשלב ההתפתחותי שהם נמצאים בו.

רשימת מקורות

כספי, ש' (2016). מטה-אריתמטיקה ספונטנית כצעד ראשון לקראת האלגברה הבית-ספרית. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 4**, 96-123.

נחליאלי, ט' וטבח, מ' (2016). שימוש בהגדרה מתמטית בתהליכי זיהוי פונקציה על-ידי סטודנטים להוראה. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 4**, 174-197.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers grades 6-10*. Heinemann.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 259-276). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_15

Lavie, I., & Sfard, A. (2019). How children individualize numerical routines: Elements of discursive theory in making. *Journal of Learning Sciences, 28*(4-5), 419-461. https://doi.org/10.1080/10508406.2019.1646650

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing.* Cambridge University Press.

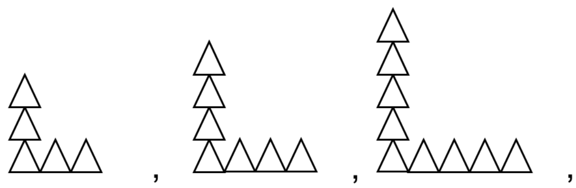
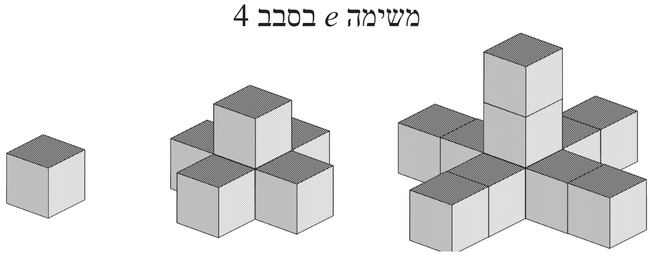
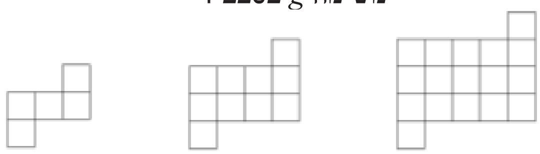
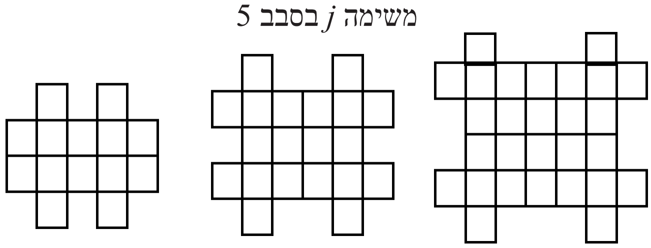
Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 191-228. https://doi.org/10.1007/BF01273663

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grades 6 students' preinstructional use of equations to describe and present problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89-112. https://doi.org/10.2307/749821

Thurston, W. P. (1990). Mathematical education. *Notices of the American Mathematical Society, 37*(7), 844-850.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

נספח (משימת הכללה בסבב 5-2)

לפניכם סדרה של מספרים: . . . 6, 10, 14, 18, 22 נסחו כלל שבאמצעותו אפשר לחשב איזה מספר נמצא במקום כלשהו בסדרה.	משימה ***a*** בסבב 2
לפניכם סדרה של צורות המורכבות ממשולשים. נסחו כלל שבאמצעותו אפשר לחשב כמה משולשים נמצאים בציור מספר כלשהו בסדרה.	משימה *b* בסבב 2  צורה 1 , צורה 2 , צורה 3 ,
לפניכם סדרה של מספרים: . . . 14, 11, 8, 5, איזה מספר נמצא במקום כלשהו בסדרה?	משימה *c* בסבב 3
לפניכם סדרה של מספרים: ... 18, 14, 10, 6, מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה?	משימה *d* בסבב 4
לפניכם סדרה של מבנים המורכבים מקוביות: כמה קוביות נמצאות במבנה מספר כלשהו בסדרה?	משימה *e* בסבב 4  מבנה 1 מבנה 2 מבנה 3
לפניכם סדרה של מספרים: . . . 7, 9, 13, 19, 27, 37 מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה?	משימה *f* בסבב 4
לפניכם סדרה של מבנים המורכבים מריבועים: כמה ריבועים זהים נמצאים במבנה מספר כלשהו בסדרה?	משימה *g* בסבב 4  מבנה 1 מבנה 2 מבנה 3
לפניכם סדרה של מספרים: . . . 6, 7, 10, 15, 22, 31 מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה?	משימה *h* בסבב 5
לפניכם סדרה של מספרים: . . . 8, 13, 20, 29, 40, 53 מהו האיבר שנמצא במקום כלשהו בסדרה?	משימה *i* בסבב 5
לפניכם סדרה של מבנים המורכבים מריבועים זהים: כמה ריבועים זהים נמצאים במבנה מספר כלשהו בסדרה?	משימה *j* בסבב 5  מבנה 1 מבנה 2 מבנה 3

מודל פיתוח מקצועי משולב להכשרת רכזי מתמטיקה כמובילי פיתוח מקצועי בצוותי ההוראה בקהילה מקצועית לומדת בבית ספר

זהבית כהן
אורית כהן-ניסן

ד"ר זהבית כהן

מרצה בכירה וחוקרת בתחום החינוך המתמטי בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון. ד"ר כהן היא ראשת מעבדת MtEd (Mathematics Teachers Education & Development) "מעבדת סימולציה לפיתוח והכשרה של מורים למתמטיקה". ד"ר כהן היא המנהלת האקדמית של תוכנית i-MAT (Integrated Math and Technology) – פרויקט פיתוח והטמעה בשיתוף עם קרן טראמפ של בעיות מידול מתמטי אותנטיות מתחום ההייטק והטכנולוגיה לצורך למידה מבוססת הקשר בשיעורי מתמטיקה. מחקרה עוסק בחקר הפיתוח וההטמעה של תוכני i-MAT בקרב קהילות מקצועיות של מורים מנחים, קהילות מקצועיות של מורים מטמיעים ותלמידים.

אורית כהן-ניסן

סטודנטית לדוקטורט בהוראת המתמטיקה בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון

בהנחייתה של ד"ר זהבית כהן, ועמיתה בצוות ההערכה של תוכנית i-MAT . מורה למתמטיקה בחטיבה העליונה בבית הספר ויצו נהלל. בוגרת תואר B.Sc. מהפקולטה להנדסה אזרחית בטכניון, תואר שני MBA במנהל עסקים מהפקולטה להנדסת תעשייה וניהול בטכניון, ותואר שני בהוראת מתמטיקה בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון. המאמר נכתב במסגרת עבודת מחקר זו.

תקציר

יישום פיתוח מקצועי אפקטיבי למורי מתמטיקה בפריסה רחבה מאתגר את המחקר החינוכי ומעודד מחקר ופיתוח של תוכניות התומכות במורים כמובילי פיתוח מקצועי בצוותי ההוראה בקהילה מקצועית לומדת (להלן: קמ"ל) בבתי הספר. המחקר הנוכחי בחן תוכנית שהכשירה רכזי מתמטיקה להוביל פיתוח מקצועי בקמ"ל בצוותם. מפגש טיפוסי בתוכנית התמקד בלמידה שיתופית ורפלקטיבית של תוכן מתמטי-דידקטי ותוכן פדגוגי-מנהיגותי. המחקר בחן אילו מאפייני תוכנית פיתוח מקצועי אפקטיבי (להלן: תוכנית אפקטיבית) הוטמעו במפגשי תוכנית הרכזים ובקהילות הצוותים. כמו כן המחקר בחן את השיוך של המאפיינים האלה להתפתחות בתחומי מומחיות, המבססים את זהותם המקצועית של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי. כלי המחקר כללו תצפיות בתוכנית הרכזים ושאלון רפלקטיבי שבו דיווחו הרכזים על ההטמעה בקהילות הצוותים. מפגש טיפוסי בתוכנית שילב את כלל מאפייני התוכנית האפקטיבית, זאת כדי לקדם את תחומי מומחיות התוכן, הדידקטיקה והפדגוגיה של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי בצוותם. נמצא כי הרכזים הטמיעו את המאפיינים של תוכנית אפקטיבית בצוותים. בפרט, הם מיקדו את מפגשי הצוות בתוכן מתמטי-דידקטי, תמכו והנחו את הצוות מבחינה מקצועית, עודדו שיתוף פעולה ופעלו למשוב ולרפלקציה אישית וקבוצתית, והמאפיינים האלה נקשרו להתפתחות תחומי מומחיותם כמובילי פיתוח מקצועי. התרומה התאורטית של המחקר היא בבחינת הקשר בין מאפייני תוכנית אפקטיבית להתפתחות תחומי מומחיות המבססים תפיסת זהות מקצועית של מובילי פיתוח מקצועי. התרומה הפרקטית של המחקר היא בהצגת מודל פיתוח מקצועי אפקטיבי לרכזים ולמורי מתמטיקה שאפשר ליישמו בפריסה רחבה במסגרת קמ"ל צוותי בית ספרי.

מילות מפתח: זהות מקצועית; קהילה מקצועית לומדת; רכז מתמטיקה; תוכנית אפקטיבית לפיתוח מקצועי.

הקדמה

מורי מתמטיקה נדרשים לפיתוח מקצועי במהלך הקריירה לצורך התנסות בתכנים ובשיטות הוראה כדי לקדם את ההוראה ואת הלמידה. פיתוח מקצועי אפקטיבי מקנה למורים התנסות בלמידה אקטיבית שיתופית הממוקדת בתוכן ההוראה, למידה של שיטות הוראה מיטביות ומתן תמיכה והנחיה מקצועית והזדמנויות לרפלקציה בלמידה ובהטמעה (Darling-Hammond et al., 2017). יישום תוכניות לפיתוח מקצועי למורים בפריסה רחבה מאפשר הטמעת שינויים נרחבים בדרכי ההוראה, אך האתגר העיקרי הוא בשימור מבנה התוכנית ומטרותיה במהלך הטמעתה (Prediger, Roesken-Winter, et al., 2019; Roesken-Winter et al., 2021). פרדיגר ועמיתיה מדגישים שלוש אסטרטגיות לפיתוח מקצועי שתומך ביישום שינויים בדרכי ההוראה בפריסה רחבה בבתי הספר: הטמעת תוכני למידה, הטמעת קהילות מקצועיות וגיוס תמיכה מערכתית (Prediger, Fischer, et al., 2019).

הטמעה של תוכני למידה המושתתים על תוכנית הלימודים הבית ספרית בתוכניות לפיתוח מקצועי של מורים נקשרת ישירות לעבודת ההוראה, ועל כן מניעה את המורים להטמעת התכנים האלה בכיתות ולרפלקציה על הלמידה וההטמעה, והרפלקציה מתווכת הבנה באשר לחשיבות בהטמעת שינויים אלה בדרכי ההוראה (Clarke & Hollingsworth, 2002; Darling-Hammond et al., 2017; Dewey, 1910; Heck et al., 2019; Kohen & Kramarski, 2012; Roesken-Winter et al., 2021; Schön, 1987). ביסוס קהילות מקצועיות לומדות (קמ"ל) בית ספריות תומך בבניית סביבות עבודה שיתופיות ורפלקטיביות שמעצימות את תהליך הלמידה של מורים ומעודדות הטמעת שינויים בדרכי ההוראה (Prediger, Fischer, et al., 2019; Roesken-Winter et al., 2021). מורים בקמ"ל נפגשים בקביעות ומתנסים בלמידה שיתופית של תכנים ושל שיטות הוראה כדי לקדם את ההוראה והלמידה בכיתות (Hord, 2009). חברי הקמ"ל מעגנים מערכת ערכים ותפיסות מקצועיות באמצעות למידה שיתופית ורפלקטיבית התורמת להבניית הצורך בהטמעת השינויים, ומאפשרת יישום של כלל מאפייני התוכנית האפקטיבית (Darling-Hammond & Richardson, 2009; Heck et al., 2019).

גיוס תמיכה מערכתית תורם למחויבות הצוות הבית ספרי באמצעות תמיכת אנשי מפתח מבתי הספר וממערכת החינוך העשויים ללוות את התהליך ולייצב אותו (Prediger, Fischer, et al., 2019; Roesken-Winter et al., 2021). חשוב לשלב בין האסטרטגיות באמצעות הצמחת מנהיגות בית ספרית מיומנת שבכוחה לתמוך בחברי הקהילה ולהניע אותם לשינויים בדרכי עבודתם, לשמר פעילות יציבה בקהילה ולהשפיע על הטמעת תרבות עבודה זו בצוותים ובבתי ספר (Boles et al., 2020; Borko et al., 2014; Cobb & Jackson, 2011; Hord, 2009; Jackson et al., 2015; Loucks-Horsley et al., 2012; Odell, 1997; Prediger, Fischer, et al., 2019; Roesken-Winter et al., 2021).

בהקשר של המחקר הנוכחי, רכזי המתמטיקה מהווים בחירה טבעית להובלת קמ"ל בית ספרית בצוותי ההוראה. עם זאת הם נדרשים לפתח תחומי מומחיות המתאימים להנחיית צוות לומדים בוגר, בפרט הבנה מעמיקה בתחום התוכן והדידקטיקה, יכולת אדמיניסטרטיבית ויכולות בין-אישיות להנהגת צוות (Borko et al., 2014; Loucks-Horsley et al., 2012).

פיתוח תחומי מומחיות נקשר להתפתחות בתפיסת הזהות המקצועית של מורה, וזו עשויה לחזק תחושת מסוגלות עצמית ולהניע להטמעת שינויים בדרכי ההוראה (Battey & Franke, 2008; Beijaard et al., 2000; Sommerfeld Gresalfi & Cobb, 2011). זהותו המקצועית של מורה היא דינמית ומוגדרת באופן שהמורה רואה בעצמו מומחה תוכן ודידקטיקה המציג שליטה בתחום הדעת ובדרכי ההוראה, ומומחה פדגוגי המציג יכולות ליווי רגשי, חברתי ומוסרי של התלמיד בתהליך הלמידה (Beijaard et al., 2000). מנהיג המוביל פיתוח מקצועי בצוותו, נדרש לפתח תחומי מומחיות המקבילים לתחומי מומחיותו של מורה בכיתה, עם התאמה לצורכי הלומדים הבוגרים בצוותי ההוראה.

המחקר הנוכחי מציג הזדמנות לקדם תהליכי פיתוח מקצועי התומכים בהרחבת תחומי המומחיות של רכזי המתמטיקה כמובילי פיתוח מקצועי בצוותם (גוטפרוינד ורוזנברג, 2012), ובוחן התפתחות בתחומי מומחיותם המבססים את תפיסת זהותם המקצועית (Beijaard et al., 2004; Loucks-Horsley et al., 2012). בסקירת הספרות נגדיר את המסגרת התאורטית באשר לפיתוח מקצועי אפקטיבי למורים, נפרט את תפקיד הרכז כמוביל פיתוח מקצועי בקמ"ל בצוותו ונציג את תחומי המומחיות מבססי הזהות המקצועית של רכזי המתמטיקה כמובילי פיתוח מקצועי.

סקירת ספרות

תוכנית אפקטיבית לפיתוח מקצועי של מורים

תוכנית אפקטיבית לפיתוח מקצועי של מורים מניעה את צמיחתם המקצועית, וזו באה לידי ביטוי בחשיבה מחודשת על תפיסת מקצוע ההוראה, הטמעת דרכי הוראה חדשות והנעת הלמידה בכיתות (Clarke & Hollingsworth, 2002; Handelman & Kohen, 2022). אלה הם מאפייני תוכנית אפקטיבית לפיתוח מקצועי: א) התמקדות בתוכן – למידת תכנים מקדמי חשיבה המקושרים ישירות לתוכנית הלימודים; ב) למידה פעילה – התנסות כלומדים בתכנים המיועדים להוראה בכיתה; ג) שיתוף פעולה – הנעה ללמידת עמיתים, שיתוף רעיונות והחלפת דעות; ד) הנחיה ותמיכה מקצועית – מנחי התוכנית הם מומחים בתחום ההוראה, והם תומכים במורים בהטמעת התכנים והאסטרטגיות שרכשו בתוכנית; ה) הזדמנויות למשוב ורפלקציה – חשיבה על הלמידה ועל הטמעת התכנים והאסטרטגיות בכיתות; ו) מודל הוראה – התוכנית מציגה תכנים, שיטות ואסטרטגיות להוראה ודגשים להצגתם בכיתה; ז) זמן – משך התוכנית מאפשר צמיחה מקצועית, עיבוד תהליך הלמידה, הטמעה בכיתות ורפלקציה אישית, או יחד עם עמיתים, לצורך דיוק והתאמה נוספת לצורכי התלמידים. הטמעת המאפיינים בתוכנית פיתוח מקצועי כשלעצמה איננה ערובה ליישום שינויים בדרכי ההוראה (Darling-Hammond et al., 2017). עם זאת הטמעת פיתוח מקצועי בפריסה רחבה באמצעות הקניית תוכני למידה, ביסוס קמ"ל בסביבה הבית ספרית ומתן תמיכה מערכתית עשויה לתמוך ביישום שינויים בדרכי ההוראה בבתי הספר (Prediger,

קהילה (Fischer, et al., 2019; (Roesken-Winter, 2021; מקצועית לומדת של מורים היא קבוצה של אנשי מקצוע הנפגשים בקביעות כדי לשפר את הידע ואת תחומי המומחיות שלהם (Roy & Hord, 2006). במפגשי הקמ"ל המורים דנים בדרכים לשיפור הלמידה של תלמידיהם באמצעות היכרות עם שיטות הוראה מיטביות, שיתוף של רעיונות מקצועיים והתנסות בהטמעת שינויים בדרכי ההוראה שלהם (Hord, 2009; Roy & Hord, 2006).

כדי להטמיע פיתוח מקצועי בפריסה רחבה בקמ"ל בית ספריות, חשוב להכשיר מנהיגי קהילות שיבססו סביבות למידה שיתופיות ורפלקטיביות (Borko et al., 2014, 2017, 2021; Cobb & Jackson, 2011; Jacobs et al., 2017; Koellner et al., 2011; Loucks-Horsley et al., 2012; Prediger, Fischer, et al., 2019; Stoll et al., 2006).

רכזי המתמטיקה כמובילי פיתוח מקצועי בקמ"ל בצוותי ההוראה

לוקס-הורסלי ועמיתיה (Loucks-Horsley et al., 2012) תומכים בחשיבות בהכשרת מנהיגות מובילי פיתוח מקצועי בצוותי הוראת מתמטיקה. לצורך כך הם מדייקים את הגדרת תחומי המומחיות של מנהיגים המובילים פיתוח מקצועי – הם נדרשים להבין לעומק ולשלוט היטב בתחום התוכן המתמטי בדרכי ההוראה שלהם והלמידה של צוותם, ונדרש שיהיה להם ידע ארגוני בית ספרי ויכולות בין-אישיות להנהיג צוות. מומחיות בתחום התוכן המתמטי מתאפיינת בידע מעמיק יותר מזה הנדרש בתוכנית הלימודים הבית ספרית; מומחיות דידקטית כוללת הכרת שיטות הוראה מיטביות והבנת תהליכי למידה של לומדים בוגרים; ידע ארגוני מראה על יכולת בנייה וניהול של צוות, יכולת קבלת החלטות ומסוגלות לפתור קונפליקטים; והיכולות הבין-אישיות להנהיג צוות באות לידי ביטוי במודעות עצמית, בביקורתיות, ביכולת ללמוד מטעויות, ביכולת לתעל את הידע והניסיון המקצועי של הצוות, ביכולת להוביל את הצוות להטמעת שינויים בדרכי ההוראה, בהנעה לשיתוף פעולה בצוות ובפתיחות להתנסות בגישות חדשות. תכונות אלה, על פי לוקס ועמיתיה (2012), מתעצמות ומתפתחות באמצעות פיתוח מקצועי המכוון להעמקת ידע התוכן המתמטי-דידקטי, למידה שיתופית, תמיכה בהטמעה בסביבה הבית ספרית ורפלקציה (Loucks-Horsley et al., 2012).

המחקר בחן את היכולת למנף את תפקיד רכזי המתמטיקה להנהגת קמ"ל לפיתוח מקצועי של צוותם. הגדרת תפקיד רכז מקצוע על רקע רפורמת "עוז לתמורה" במשרד החינוך (משרד החינוך, 2016) מתמקדת בשני תחומים: קידום תחום הדעת בתחומי הוראה ולמידה וניהול והנהגת צוות המורים. בתחום קידום תחום הדעת – הרכזים נדרשים להראות שליטה בתחום תוכן ההוראה, בתוכנית הלימודים, בניהול משאבי ההוראה, בריכוז הערכת ההישגים ובתיאום ההיבחנות בבחינות הבגרות. בתחום ניהול והנהגת הצוות – הרכזים נדרשים לקדם תהליכי פיתוח מקצועי של הצוות, וכן להיות אנשי הקשר של הצוות עם משרד החינוך. תפקידיהם המעשיים של הרכזים כוללים הכנת תוכנית שנתית ובה רצף לימודי ובחירת ספרי לימוד בשיתוף עם צוותם, קיום ישיבות צוות קבועות להדרכת הצוות ולתכנון ופיתוח חומרי למידה ולניתוח נתונים, מעקב אחר תהליכי עבודה והערכתם, בניית מחוונים וכלי הערכה והדרכת הצוות במתן מענה דיפרנציאלי לתלמידים.

ישיבות הצוות הקבועות והציפייה מהרכזים לקדם תהליכי פיתוח מקצועי אינן מקושרות יחד בהגדרת תפקידם. רכזי מתמטיקה רבים בבתי הספר בישראל עוסקים בניהול, בהנחיית הצוות ובתיאום משאבי הוראה. אחריותם לקידום הפיתוח המקצועי של הצוות אינה כוללת הובלת פיתוח מקצועי בצוות בעצמם (משרד החינוך, 2016). מרבית השתלמויות הפיתוח המקצועי לצוותי ההוראה המתקיימות בבתי הספר מיועדות לכל המורים, ללא מיקוד בתחום הוראה מסוים, והשתלמויות בתחום הוראה מסוים מתקיימות לעיתים בבתי הספר באמצעות מדריכי משרד החינוך או מעבר לשעות העבודה במרכזי השתלמויות (מיקולינסר ופרזנצ'בסקי אמיר, 2020). תוכנית הרכזים במחקר זה פועלת לביסוס תחומי מומחיותם של רכזי המתמטיקה כמובילי פיתוח מקצועי בצוותם במהלך שעות העבודה בבית הספר.

פיתוח מקצועי תומך תחומי מומחיות המבססים תפיסת זהות מקצועית

תוכניות פיתוח מקצועי המיישמות שינויים בסביבה הבית ספרית נדרשות לתמוך בתפיסת הזהות המקצועית של מורים, שכן היא מניעה את אנשי ההוראה להטמעת שינויים בדרכי עבודתם (Battey & Franke, 2008; Beijaard et al., 2004; Sommerfeld Gresalfi & Cobb, 2011). תפיסת הזהות המקצועית של מורים היא הדרך שבה הם מעריכים את יכולותיהם המקצועיות, והיא משפיעה על המסוגלות העצמית, על ההתפתחות המקצועית ועל מידת הנכונות להטמיע שינויים בדרכי ההוראה (Beijaard et al., 2000; Goos & Geiger, 2010; Sommerfeld Gresalfi & Cobb, 2011).

תפיסת הזהות המקצועית של מורים משתנה לאורך כל הקריירה שלהם באמצעות התפתחותם של תחומי מומחיות בהוראה לאחר למידה והתנסות (Beijaard et al., 2000), ובמהלך שיח מקצועי שיתופי ורפלקטיבי בקהילות מקצועיות (Battey & Franke, 2008; Sommerfeld Gresalfi & Cobb, 2011). במחקר הנוכחי נבחנה הספרות הקיימת בעניין התפתחות הזהות המקצועית של רכזי מתמטיקה כמובילי פיתוח מקצועי בצוותם, ונמצא כי בסיס הידע בנושא זה מצומצם.

מנהיג המוביל פיתוח מקצועי בצוות הוראה לראשונה, עובר תהליך של ביסוס זהות מקצועית בדומה למורה של תלמידים בכיתה, כאשר תחומי המומחיות המבססים את זהותו המקצועית הולמים את צורכי קהל היעד, שהוא צוות לומדים בוגר (Allen, 2016; Borko et al., 2014; Loucks-Horsley et al., 2012). על כן המחקר נעזר במודל לזהות המקצועית של מורה (Beijaard et al., 2000) כדי לעגן את הקשר בין התפתחות תחומי מומחיות ובין התפתחות הזהות המקצועית, כמרכיב המניע לשינויים בדרכי העבודה. במחקר נעשה שימוש בהגדרה של תחומי המומחיות של מנהיג מוביל פיתוח מקצועי בצוות מתמטיקה של לוקס הורסלי ועמיתיה (Handelman & Kohen, 2022; Loucks-Horsley et al., 2012) כדי להתאים את מודל הזהות המקצועית לרכזי המתמטיקה. על פי בייג'רד ועמיתיו (Beijaard et al., 2000), מורים מבססים את זהותם המקצועית

על פי האופן שהם מעריכים את שליטתם בשלושה תחומי מומחיות: תחום המומחיות הראשון נוגע למומחיות בתחום התוכן – הבנה מעמיקה של מושגים וקשרים במקצוע, ויכולת להמיר את ידע התוכן לידע המתאים להוראה. כמו כן מורים צריכים לעסוק בפיתוח חומרי למידה, להיות מסוגלים להסביר יחידות תוכן ברמה גבוהה מזו הנדרשת להוראה בכיתה ולהבין שגיאות נפוצות של לומדים; תחום המומחיות השני נוגע לתחום הדידקטי – תפקיד המורים הוא לתכנן שיעורים, להיות מסוגלים להעביר את השיעורים האלה בכיתה ולהעריך את יכולת הביצוע שלהם. מורים צריכים להבין את מורכבות תחום ההוראה, לחשוב חשיבה רפלקטיבית וללמוד מניסיונם. מיקוד הלמידה הוא בתלמיד ולא בתהליך ההוראה, ותפקיד המורה להניע למידה, ליזום, להדריך ולהשפיע על דרכי החשיבה של התלמיד, כך שהאחריות ללמידה מועברת לתלמיד; תחום המומחיות השלישי נוגע לתחום הפדגוגי – מורים צריכים להבין את הצרכים המוסריים והאתיים בתהליך ההוראה, להפנות תשומת לב למחשבותיהם ולדעותיהם של התלמידים, ולסייע לתלמידים להתמודד עם קשיים ודילמות בחייהם.

המחקר התמקד בחקר של תוכנית לפיתוח מקצועי לרכזי מקצוע (להלן: "תוכנית הרכזים") שמטרתה לפתח את תחומי המומחיות של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי בצוותם. מומחיות התוכן והדידקטיקה באות לידי ביטוי בהנהגת תהליכי למידה והוראה של אנשים בוגרים בצוות ההוראה, והמומחיות הפדגוגית היא היכולות הבין-אישיות להנהיג את הצוות בקמ"ל בית ספרית ולתמוך בהטמעת שינויים בדרכי עבודתם (Borko et al., 2014; Loucks-Horsley et al., 2012; Odell, 1997).

שאלות המחקר

1. אילו מאפייני תוכנית אפקטיבית באו לידי ביטוי במפגש טיפוסי בתוכנית הרכזים, ואילו תחומי מומחיות המבססים את הזהות המקצועית (תוכני, דידקטי, פדגוגי) של הרכזים הם כיוונו לפתח?
2. אילו מאפייני תוכנית אפקטיבית הטמיעו הרכזים בקמ"ל הבית ספרית, ולאילו תחומי מומחיות המבססים את הזהות המקצועית (תוכני, דידקטי, פדגוגי) של הרכזים הם נקשרו?

מתודולוגיה

במהלך שנת הלימודים 2019-2020 התקיימה תוכנית פיתוח מקצועי לרכזי מתמטיקה בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה, בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון. מטרת התוכנית הייתה להכשיר את הרכזים להטמעת קמ"ל לפיתוח מקצועי בצוותם. משרד החינוך תגמל את התוכנית ב-60 שעות השתלמות. בתוכנית התקיימו שישה מפגשים פנים אל פנים, שבעה מפגשים מקוונים סינכרוניים ומפגש אחד א-סינכרוני. יתרת הזמן הוקצתה לתכנון המפגשים ולהטמעתם בקמ"ל הבית ספרית באמצעות הרכזים ולהגשת עבודה מסכמת שכללה פיתוח משימה להוראה יחד עם הצוות.

התוכנית החלה בנובמבר 2019, וההטמעה בקמ"ל הבית ספריות החלה בפברואר 2020 על רקע מפגשי הצוות השבועיים המוגדרים ברפורמות החינוך. מורי הצוותים תוגמלו ב-30 שעות השתלמות על השתתפותם בתוכנית ועל הגשת עבודה מסכמת שכללה פיתוח משימה להוראה יחד עם הצוות.

תוכנית הפיתוח המקצועי

המחקר כיוון ליישום שלוש האסטרטגיות לפיתוח מקצועי שתומך בהטמעת שינויים בדרכי ההוראה בפריסה רחבה בצוותי הוראת המתמטיקה (Prediger, Fischer, et al., 2019): א) הטמעת תוכני למידה; ב) ביסוס קמ"ל לפיתוח מקצועי בצוותים; ג) גיוס תמיכה מערכתית של משרד החינוך והרכזים המנהיגים את הקמ"ל. מינוף תפקיד רכזי המתמטיקה להובלת פיתוח מקצועי אפקטיבי בקמ"ל בית ספריות תמך בשילוב שלוש האסטרטגיות שפורטו לעיל. תוכנית הרכזים נועדה לסייע להם לפתח תחומי מומחיות חדשים ולבסס את הערכתם העצמית כלפי יכולותיהם להוביל פיתוח מקצועי בצוות.

לשם כך התמקדה התוכנית בשני צירי תוכן – תוכן מתמטי-דידקטי המקושר קשר ישיר לתוכנית הלימודים, ותוכן פדגוגי-מנהיגותי הממוקד בהנהגת קמ"ל ובתמיכה בהטמעת שינויים בדרכי העבודה של הצוותים. כל אחד ממפגשי התוכנית שהתקיימו פנים אל פנים נמשך ארבע שעות אקדמיות, והמפגשים הסינכרוניים נמשכו כשעתיים אקדמיות. מבנה טיפוסי של מפגש בתוכנית כלל שלוש פעילויות עיקריות: 1) פעילות תוכן מתמטי-דידקטי: פתרון משימה מתמטית בלמידה שיתופית בקבוצות קטנות, כאשר המשימה קשורה קשר ישיר לתוכנית הלימודים הבית ספרית ומדגימה יישום של מודל הוראה מקדם למידה; 2) דיון תוכן מתמטי-דידקטי: הצגת פתרונות למשימה במליאה על ידי נציגי הקבוצות, משוב המנחים על הפתרונות שהוצגו, מתן דגשים להוראת המשימה בכיתה והתייחסות לדרכי חשיבה של תלמידים בפתרון המשימה. בפרט, התקיים דיון על הקשרה של המשימה לרצף ההוראה ופירוט יתרונות מודל ההוראה המוצג; 3) דיון פדגוגי-מנהיגותי: המנחים הניעו דיון רפלקטיבי על אתגרי ניהול ומנהיגות של הרכזים בצוותי המתמטיקה. החלק הפדגוגי-מנהיגותי נבנה כדי לפתח מבט-על וחזון על חשיבות בתרבות העבודה בקמ"ל ודרכי התמודדות עם אתגרי השינוי. כל ששת מפגשי הפנים אל פנים ושלושה מהמפגשים הסינכרוניים התקיימו במבנה טיפוסי. ארבעה מתוך המפגשים הסינכרוניים התקיימו כדיון רפלקטיבי על הטמעת שינוי בצוותי ההוראה, ללא פעילות תוכן מתמטי-דידקטי. יתרת שעות ההשתלמות היו אסינכרוניות ובהן הרכזים נערכו להטמעת מפגשי הקמ"ל. פעילות ההשתלמות הסתיימה רשמית ביולי 2020, לאחר שכל הרכזים והצוותים סיימו את חובות ההגשה.

המשתתפים

במחקר השתתפו 29 רכזי מתמטיקה מבתי ספר בצפון הארץ, הן בחטיבה העליונה והן בחטיבת הביניים. מתוכם 25 נשים (86.2%) ו-4 גברים (13.8%). טווח הגילים של המשתתפים הוא 24–61 (M=43.75, SD=9.96). השכלתם של המשתתפים וציון התארים האקדמיים שלהם: שניים מהרכזים היו בעלי תואר ראשון בחינוך (B.Ed.), 7 בעלי תואר בהנדסה (B.Sc.), ו-20 בעלי תואר שני (M.A.). טווח שנות הוותק בהוראה נע בין 3 ל-39 שנים (M=16.48, SD=10.74), כאשר טווח שנות הוותק בתפקיד ריכוז מקצוע המתמטיקה בקרב המשתתפים נע בין שנה אחת ל-26 שנים (M=4.65, SD=6.24).

מנחי תוכנית הרכזים

מובילי תכנית הרכזים כללו שתי מנחות שהנחו את הציר המתמטי-דידקטי – האחת בנושאי הלימוד של חטיבת הביניים (להלן מנחה 1) והשנייה בנושאי הלימוד של החטיבה העליונה (להלן מנחה 2), ומנחה נוסף (להלן מנחה 3) הנחה את הציר הפדגוגי-מנהיגותי. שתי המנחות הן בעלות רקע של מעל לשלושה עשורים בתחום הוראת המתמטיקה, האחת בחטיבת ביניים והשנייה בחטיבה עליונה. שתיהן עסקו בעבר בתפקידי ריכוז מתמטיקה בבתי הספר וכשני עשורים עוסקות בקידום מסגרות לפיתוח מקצועי וקמ"ל של מורים למתמטיקה. המנחה השלישי עסק כשלושה עשורים כמהנדס תוכנה ומנהל בכיר בהייטק, ובשנים האחרונות הוא מלמד בחטיבת ביניים ומשמש רכז מתמטיקה. לפני תחילת המפגשים ניהלו המנחים והחוקרים פגישות תיאום ושיח פתוח על מטרות התוכנית, וגם מפגשי הכנה לפני כל מפגש קהילה ששיתפו בהם בחשיבה רפלקטיבית שלהם כדי לדייק את תוכני המפגשים המתוכננים מתוך הקשבה לצורכי הרכזים בתוכנית.

כלי המחקר

כלי המחקר כוללים:

1. תצפית – בתצפית מתואר המפגש החמישי בתוכנית. מפגש זה נבחר לניתוח מפני שהוא נערך בתחילת חודש פברואר, לאחר שלושה חודשי למידה בתוכנית הרכזים, ועם התחלת הטמעת מפגשי הצוות בקמ"ל הבית ספריות. המפגש החמישי נעשה במבנה טיפוסי, ולכן הצגתו מייצגת את מרבית מפגשי התוכנית מבחינה מבנית. המפגש תועד בכתב ובתיאורו נפרוט את הפעילות המתמטית שפתחה את המפגש והנחתה את שני צירי התוכן שנכללו בו – המתמטי-דידקטי והפדגוגי-מנהיגותי.
2. תצפית של דיון רפלקטיבי – הדיון נעשה בתחילת המפגש השישי, כשבועיים לאחר המפגש החמישי. הדיון תועד בכתב ובתיאורו נפרוט את התמקדות הרכזים בהטמעת תוכן המפגש החמישי של התוכנית בקמ"ל הבית ספריות.
3. שאלון רפלקטיבי – שאלון מובנה שהתבקשו הרכזים לענות עליו בציון שמם לאחר כל אחד מארבעה מפגשים שהם הטמיעו בקמ"ל הבית ספריות. מפגשים אלה התקיימו בטווחי הזמן האלה: פעמיים בין דצמבר 2019 לפברואר 2020, פעם אחת בין מרץ לאפריל 2020 והפעם האחרונה – לקראת סוף התוכנית, בין מאי ליוני 2020. בשאלון התבקשו הרכזים לציין שני שינויים שחלו בעבודתם כרכזים במפגשי הצוות הבית ספרי במהלך השתתפותם בתוכנית הרכזים.

ניתוח הנתונים

תצפיות מפגש חמישי ודיון רפלקטיבי

בוצע ניתוח תוכן מכוון (Hsieh & Shannon, 2005) בשלושה שלבים:

השלב הראשון כלל קריאה של תיעוד התצפית במפגש החמישי בתוכנית הרכזים, וכן של התצפית בדיון הרפלקטיבי של תחילת המפגש השישי בתוכנית. תוכן המפגש הופרד לחלקי מפגש טיפוסי: 1) פעילות תוכן מתמטי-דידקטי: פתרון משימה מתמטית בלמידה שיתופית בקבוצות קטנות; 2) דיון מתמטי-דידקטי; 3) דיון פדגוגי-מנהיגותי. הדיון הרפלקטיבי במפגש השישי קודד כיחידת תוכן אחת של דיון פדגוגי-מנהיגותי.

בשלב השני קודד כל חלק של מפגש למאפייני תוכנית אפקטיבית, בלי חזרה על אותו מאפיין יותר מפעם אחת.

בשלב השלישי נקראו בשנית הפסקאות המתארות את חלקי המפגש וקודדו לתחום המומחיות העיקרי שנקשר אליהן בהלימה לאופי הפעילות. מאפייני התוכנית האפקטיבית ותחומי המומחיות נשזרו וסוכמו בתיאור הצגת הממצאים בשקיפות מלאה.

שאלון רפלקטיבי

נעשה ניתוח תוכן מכוון (Hsieh & Shannon, 2005) בשלושה שלבים: השלב הראשון כלל קריאה של מענה שלם של אדם אחד וזיהוי תיאורי שינויים הנקשרים למאפייני תוכנית אפקטיבית. שינוי זוהה באמצעות מילים המציינות התנהגות חדשה או שונה שדיווחו עליה הרכזים. היגדים שלא תיארו שינויים לא קודדו ולא נכללו בניתוח התוכן. כל חלק של משפט שתיאר מאפיין תוכנית אפקטיבית אחד הופרד וקודד, וכך קיבלנו 139 יחידות המקודדות למאפייני תוכנית מתוך 125 תגובות של רכזים במהלך השנה. בשלב השני נעשתה קריאה חוזרת של כל פסקת מענה מקורית וקידוד של אותן יחידות תוכן הנכללות בפסקה. הפעם קודדו היחידות לתחומי מומחיות שהציג הרכז בתיאור השינוי ובהקשר הכולל של פסקת המענה (Beijaard et al., 2000; Loucks-Horsley et al., 2012). בשלב האחרון חושב החלק היחסי של כל יחידות התוכן הנוגעות למאפיין תוכנית מסך כל יחידות השינוי שקודדו, ובו בזמן הוצגו יחידות התוכן בקידוד לתחומי מומחיות. בטבלה 1 מובאות כמה דוגמאות להמחשת אופן קידוד הנתונים.

ניתוח התוכן בתצפיות ובשאלון הרפלקטיבי התבצע על ידי הכותבת השנייה, ולאחר מכן נבדק על ידי החוקרת הראשית. במקרה של אי-התאמה התבצעו שינויים.

טבלה 1: דוגמאות לקידוד איכותני של דיווחי הרכזים על שינויים בעבודתם במהלך השתתפותם בתוכנית

תיאור השינוי – הדגשת מילים המתארות שינוי	קידוד השינוי למאפייני תוכנית אפקטיבית	קידוד השינוי לתחומי מומחיות המבססים את זהות הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי
"הפעילות בצוות משמעותית **יותר**, ניכרת **יותר** מוטיבציה ושיתוף פעולה."	השינוי מתבטא בשיתוף פעולה	ההקשר: הנעת מוטיבציה בצוות. השינוי מקושר לתחום המומחיות הדידקטית.
"בישיבות הצוות שלנו בבית הספר אנחנו דנים **לאחרונה** בפתרון בעיות מתמטיות שונות, וזו פעילות בצוות שאנחנו **לא רגילים** אליה."	השינוי מתבטא במיקוד בתוכן המתמטי	ההקשר: פתרון מתמטי בצוות. השינוי מקושר לתחום מומחיות התוכן.
"הפגישות שלנו כצוות **התקדמו** לכיוון **אחר ממה שהתרגלנו אליו**... אנחנו עוברים תהליך להכיר את עצמנו כצוות בצורה **אחרת**."	השינוי מתבטא במשוב ורפלקציה	ההקשר: יכולות בין-אישיות לתמיכה בהטמעת שינויים בצוות. השינוי מקושר לתחום המומחיות הפדגוגית.
"**התחלתי** להעביר את מפגשי ההשתלמות למורים בעצמי **במקום** לארח מרצה חיצוני."	השינוי מתבטא בהנחיה ותמיכה מקצועית	ההקשר: העברת השתלמות בצוות. השינוי מקושר לתחום המומחיות הדידקטית.

ממצאים

ראשית יוצגו הממצאים של התצפית במפגש התוכנית החמישי ושל התצפית בדיון שהתקיים במפגש השישי בנושא של הטמעת תוכני המפגש הקודם בצוותים בבתי הספר. הצגת המפגש החמישי שהיה מפגש טיפוסי בתוכנית הרכזים, מובאת מתוך מיקוד בשני צירי התוכן המרכזיים בתוכנית, המתמטי-דידקטי והפדגוגי-מנהיגותי. המפגש יתואר לפי מבנה המפגש הטיפוסי: ציר מתמטי-דידקטי על בסיס למידה שיתופית בקבוצות קטנות ודיון רפלקטיבי, וציר פדגוגי-מנהיגותי ובו דיון רפלקטיבי.

תצפית במפגש החמישי בתוכנית הרכזים

ציר מתמטי דידקטי – פתרון משימה מתמטית בלמידה שיתופית בקבוצות קטנות:

המפגש החמישי עסק ברצף הלימודי השש-שנתי בגאומטרייה. המפגש החל בפעילות מתמטית ממוקדת תוכן. בפעילות הוצגה לרכזים משימה בגאומטרייה (תרשים 1) שבה הם התבקשו להציע ארבע דרכי פתרון שונות ב-20 דקות. הרכזים התנסו כלומדים בלמידה פעילה, עבדו בשיתוף פעולה בקבוצות קטנות ודנו במציאת פתרונות כמטרה קבוצתית. המנחים עברו בין הקבוצות, הנחו ותמכו מבחינה מקצועית.

חלק זה של המפגש כוון בעיקר לחיזוק מומחיות **תחום התוכן** של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי, כהכנה להטמעת המשימה בצוותי ההוראה.

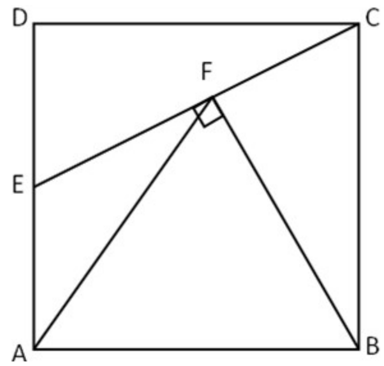
פתרו בארבע דרכי פתרון שונות

נתון: ABCD ריבוע

הנקודה E אמצע הצלע AD

$BF \perp CE$

הוכיחו: AF שווה לצלע הריבוע



תרשים 1: משימה מתמטית בקהילת הרכזים
(Stupel & Ben-Chaim, 2017)

ציר מתמטי דידקטי - דיון רפלקטיבי:

הקבוצות חזרו לדיון מתמטי-דידקטי במליאה שהיה **ממוקד בתוכן**. בדיון הציגו נציגי הקבוצות פתרונות מגוונים בתחומי תוכן שונים במתמטיקה, כגון גאומטרייה, טריגונומטרייה, וקטורים וגאומטרייה אנליטית.

הרכזים עסקו ב**למידה פעילה ושיתפו פעולה** בדיון בפתרונות שהוצגו על הלוח.

בתרשימים 2 ו-3 להלן מופיעות שתי דוגמאות לפתרונות שעלו בדיון זה על ידי הרכזים. תרשים 2 עוסק בפתרון גאומטרי, ואילו תרשים 3 עוסק בפתרון על בסיס שימוש בווקטורים.

פתרון מקוצר:

נאריך את CE ואת AB עד שייחתכו בנקודה G.

נחפוף את המשולשים CDE ו-GAE.

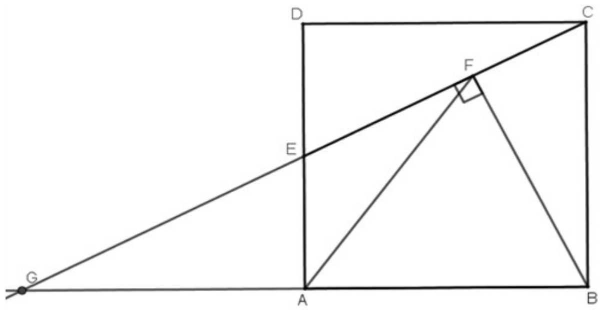
מהחפיפה נובע כי DC=AG

כמו כן AB=DC צלעות הריבוע שוות

זווית GFB היא זווית ישרה

מסקנה: GA=AB=AF

במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחציתו



תרשים 2: הצעה לפתרון באמצעות גאומטרייה במישור לבעיה המתמטית כפי שהציגו משתתפי אחת הקבוצות

ABCD ריבוע

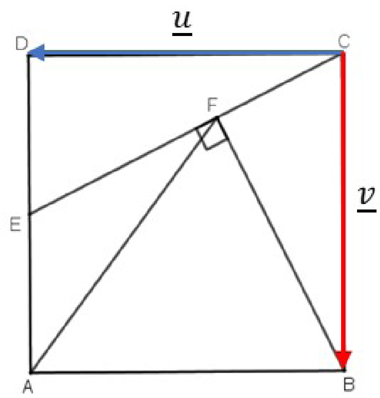
הנקודה E אמצע הצלע AD

$BF \perp CE$

הוכיחו: AF שווה לצלע הריבוע

נסמן: $\overrightarrow{CD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{CB} = \underline{v}$

$|\underline{u}| = |\underline{v}|$, $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$



$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}$$

$$\overrightarrow{CF} = t \cdot \overrightarrow{CE} = t\underline{u} + \frac{t}{2}\underline{v}$$

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CB} = -t\underline{u} - \frac{t}{2}\underline{v} + \underline{v} = -t\underline{u} + (1 - \frac{t}{2})\underline{v}$$

$$\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$$

$$\left[-t\underline{u} + (1 - \frac{t}{2})\underline{v}\right] \cdot \left[\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v}\right] = 0$$

$$-t|\underline{u}|^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)|\underline{v}|^2 = 0$$

$$-t + \frac{1}{2} - \frac{t}{4} = 0$$

$$t = \frac{2}{5}$$

$$\overrightarrow{FB} = -\frac{2}{5}\underline{u} + \left(1 - \frac{1}{5}\right)\underline{v} = -\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{4}{5}\underline{v}$$

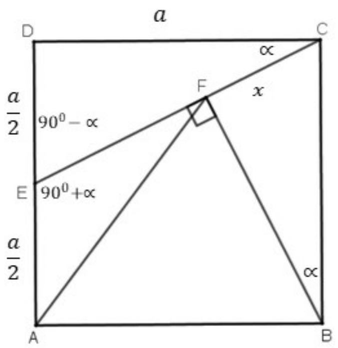
$$\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} = -\frac{2}{5}\underline{u} + \frac{4}{5}\underline{v} + \underline{u} = \frac{3}{5}\underline{u} + \frac{4}{5}\underline{v}$$

$$|\overrightarrow{FA}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\underline{u} + \frac{4}{5}\underline{v}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}|\underline{u}|^2 + \frac{16}{25}|\underline{v}|^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{25} + \frac{16}{25}\right)|\underline{u}|^2} = |\underline{u}|$$

$$FA = AB$$

תרשים 3: הצעה לפתרון באמצעות וקטורים לבעיה המתמטית כפי שהציגו משתתפי אחת הקבוצות

ניתוח תוכן הדיון במהלך הצגת הפתרונות נקשר לתמיכה במומחיות הרכזים בתחום התוכן המתמטי והדידקטי. המציגים הסבירו את הפתרונות לעמיתיהם בקהל, בעת מתן דגשים בעל פה בעניין דרך הכתיבה וההסבר הנדרש בכיתה. המנחים **תמכו והנחו מבחינה מקצועית** את הדיון בפתרונות והציגו דגשים דידקטיים ודרכים אחרות לפתרון (כגון זה המופיע בתרשים 4 להלן).



$$\measuredangle CFB = \measuredangle D = 90^0$$

$$\measuredangle DCE = \alpha\ , \measuredangle FCB = 90^0 - \alpha$$

$$\measuredangle CBF = \alpha = \measuredangle DCE$$

על פי משפט דמיון זוית-זוית $\Delta FCB \sim \Delta DEC$

CF = x

יחסי צלעות במשולשים דומים $\frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{a}{FB} \to FB = 2x$

משפט פיתגורס במשולש CFB $4x^2 + x^2 = a^2 \to \quad x = \frac{a}{\sqrt{5}}$

משפט פיתגורס במשולש DEC $a^2 + \frac{a^2}{4} = (EC)^2 \to \qquad EC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$$EF = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{3a}{2\sqrt{5}}$$

משולש DCE $tg \propto = \frac{1}{2}$

$$1 + (tg \propto)^2 = \frac{1}{(cos \propto)^2} \quad \to \quad (cos \propto)^2 = \frac{4}{5}$$

$$(sin \propto)^2 = \frac{1}{5}\ \ , (0^0 < \propto < 90^0),\ \ sin \propto = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\to \cos(90^0 + \propto) = -sin \propto = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

משפט הקוסינוסים במשולש FEA $AF^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{20} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{20a^2}{20} = a^2$

$$AF = a$$

תרשים 4: הצעה לפתרון באמצעות טריגונומטריה במישור שהציגו מנחי תוכנית הרכזים

המנחים גיבשו מבט-על בעניין יתרונות **מודל ההוראה** המוצע המאפשר חקר והעמקה, דנו בדרכי חשיבה של תלמידים בפתרון השאלה, הציגו שגיאות נפוצות אפשריות של תלמידים והעלו רעיון לשלב את השאלה כשאלת "דגל" החוזרת מדי פעם ברצף הלמידה השש-שנתי ומתאימה לרמות הוראה למיניהן. המנחים דנו בחיבור בין מודל ההוראה המוצע ליעד מערכתי של הנגשת הוראת גאומטרייה ובצורך בגמישות מחשבתית בעניין הוראת הנושא, בפרט בחטיבת הביניים.

מנחה 2: "ניתן לחשוב על השאלה כשאלה מתגלגלת וחוזרת לאורך השנים, שאלת דגל, אלמנט שחוזרים אליו ונותן ביטחון, ואז ניגשים אליו בדרכי פתרון שונות... יש חשיבות בכתיבה הלא פורמלית בגאומטרייה, בייחוד בחט"ב, כשעדיין אין בשלות ללוגיקה של הוכחה פורמלית".

רכזת מ': "בחט"ב אני עושה שיעור שלם שבו מחפשים פתרונות לשאלה בגאומטרייה רק על הלוח. זה שלב חשוב, השחרור מהכתיבה הדקדקנית, זה נותן מעוף, צריך לתת לתלמידים את הזמן. בכיתה ח' הכתיבה הדקדקנית חוסמת את המחשבה של התלמידים".

רכזת ל': "למה להתעקש על כתיבה דקדקנית? אני מלמדת תלמידי מצוינות בחטיבת הביניים, אני מראה להם הוכחה פורמלית, אבל מאפשרת בחירה חופשית בכתיבה. באופן טבעי הם עוברים להוכחה פורמלית בטבלה, כי הם מתקשים להביע את עצמם".

מנחה 1: "ראשית כל מלמדים את התוכן המתמטי, משפטים ותכונות – זה ציר אחד, הציר השני הוא ציר מיומנויות. רעיון ההוכחה, שעל סמך נתונים מסיקים מסקנה בחשיבה לוגית

מסודרת... ובנוסף מתפתחים מזה משפטים הפוכים וצריך להוכיח את המשפטים הללו, וציר התוכן השלישי הוא הכתיבה הפורמלית. התעקשות על שלושתם בו זמנית היא בעייתית, ולכן כדאי לאפשר כתיבה פחות מסודרת בהתחלה".

מנחה 2: "חשוב לדרג שאלות כתיבה בדרכים שונות בשתי החטיבות, לא רצוי שנושא הגאומטרייה יהפוך לסנן לתלמידים בחטיבת הביניים וימנע למידה של תלמידים ברמות הגבוהות בחטיבה העליונה".

מנחה 1: "היה אתגר במשימה, הייתם צריכים לפתור בארבע דרכים שונות (תרשים 1), ולא נתנו הנחיה לגבי בניות עזר, אם היינו נותנים זה היה מקבע את החשיבה. במשימה הזו המורים מרגישים כמו תלמידים".

הדיון במפגש זה כלל **משוב** ו**רפלקציה** של הרכזים על עבודתם ותמיכה והנחיה מקצועית של הרכזים גם בתגובתם על האתגר שהיה במשימה ובניית משמעות דידקטית לשימוש במשימה.

לסיכום, חלק זה של המפגש העוסק בדיון המתמטי-דידקטי הציג יישום של **כלל מאפייני התוכנית האפקטיבית** וכוון לחזק את תחום המומחיות **הדידקטית** של הרכזים. המנחים הדגימו הנחיה של דיון רפלקטיבי בצוות, חידדו דגשים להוראה ודנו ביעדים דידקטיים אישיים ומערכתיים.

ציר פדגוגי-מנהיגותי – דיון רפלקטיבי:

בדיון הרפלקטיבי שנערך במפגש זה מנחה 3 **תמך מבחינה מקצועית כמומחה**, והצליח לקשר את החלק המתמטי-דידקטי לאתגרים ולמורכבות של הטמעת שינוי בתפיסות המקצועיות ובדרכי ההוראה של הצוותים.

מנחה 3: "בהובלת שינוי כרכזי מתמטיקה יש לנו שלושה צירים עיקריים – מתמטיקה, דידקטיקה וניהול הנוגע לבני האדם והמאתגר ביותר מבחינתנו. בנוגע להסכמה, כולנו מסכימים על הצורך בשינוי... קשה לעשות שינוי. למשל, השאיפה בחטיבת הביניים לאפשר ליותר תלמידים ללמוד ברמות הגבוהות... נרצה לדעת לנהל את החיכוך במערכת בין האנשים, לשלב בין כל גורמי המערכת... אנחנו מבינים שנושא הגאומטרייה לא צריך להוות חסם, אבל לשנות את אופן העבודה זה קשה. למה צריך לשנות עכשיו? בספרות הניהולית זה נקרא A sense of urgency. מה יוצא לי מזה? אנליזה של שינוי, החשש גדול מהתקווה, שוקלים הזדמנויות, שוקלים פחדים. יזמים רואים את ההזדמנות, ובשילוב של אנרגיה וחזון מנהלים את האנשים... כאשר מדברים על שינויים, אם אני לא אעשה גם יהיה בסדר, כי גם ככה זה בסדר... ההתייחסות להוראת מתמטיקה כגורם חשוב, כקריטריון לסיווג בקהילה, הסיכון בעשיית שינוי הוא אדיר".

הרכזים **שיתפו פעולה** בדיון, המנחה עודד הזדמנויות **למשוב ורפלקציה** שבהן הרכזים חזרו לפעולות שנעשו במסגרת הצוות, והגיעו לתובנות בנוגע לתפקידם כמובילי פיתוח מקצועי וכמטמיעי שינוי בצוותים.

רכזת נ': "מי שלא אוהב שינוי, קשיח מחשבתית... זו ראייה לטווח קצר".

מנחה 3: "אם נעשה שינוי והוא הצליח, נוצרת תודעה חדשה ששינויים זה דבר שעובד".

רכזת א': "צריך להראות הצלחה, הצלחנו להכפיל את מספר התלמידים ב-5 יח"ל, להגדיל את מספר התלמידים ב-4 יח"ל ולשפר את מצב תלמידי 3 יח"ל. צריך לשקף הצלחה, זו ההצלחה של המורים".

מנחה 3: "מסוגלות הצוות להשתפר זו דוגמה להצלחה".

רכזת ד': "יש לי מפגש עם רכז החט"ב להעלות את האחוזים של התלמידים שלומדים ברמות הגבוהות כדי לא לחסום אותם באקדמיה".

מנחה 3: "אנחנו מובילים תלמידים בוגרים ומצליחים למרות הפערים בידע, כל תלמיד נוסף זה רווח".

רכזת ס': "שינויים תורמים. השגנו איחוד של כל מורי השש-שנתי, השינוי מתחיל משיתוף, המורים בצוות מחויבים ומשתפים פעולה".

מנחה 3: "צריך לתכנן ישיבה ביחד להגדרת חזון, ישנו חשש גדול של רכזי חט"ב, בנוגע למה שיאמרו בחט"ע על איכות הלמידה של התלמידים שאני שולח להם, זה יצביע על עבודתי, איך לא לימדתי...".

רכזת נ': "זו השנה השנייה שבה אנחנו פועלים במסגרת הרפורמה להגדלת מספר התלמידים ברמות הגבוהות, וזו התמודדות לא פשוטה למרות ההצלחות".

חלקו של המפגש העוסק בציר הפדגוגי-מנהיגותי הדגים יישום של מאפייני התוכנית האפקטיבית המתייחסים ל**הנחיה ותמיכה מקצועית, לשיתוף פעולה ומשוב ורפלקציה**. מטרתו של חלק זה הייתה לחזק את תחום המומחיות **הפדגוגית** של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי בצוות, זאת במטרה לפתח מיומנויות של הנחיית דיון רפלקטיבי תומך שינוי.

לסיכום, על סמך ניתוח התצפית של מפגש טיפוסי בתוכנית הרכזים, המאפיין את רוב מפגשי התוכנית במבנהו ומטרותיו, אפשר לראות שמנחי התוכנית הטמיעו במפגש זה את כל מאפייני התוכנית האפקטיבית כדי לבסס את שלושת תחומי המומחיות של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי בצוות.

החלק המתמטי דידקטי – פתרון משימה מתמטית בלמידה שיתופית בקבוצות קטנות – נקשר למאפיינים **מיקוד בתוכן, למידה פעילה, שיתוף פעולה ותמיכה והנחיה מקצועית** ונועד לחזק את תחום מומחיות התוכן של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי בצוות; החלק המתמטי דידקטי – דיון רפלקטיבי – נקשר לכלל מאפייני התוכנית האפקטיבית וכוון לחזק את תחום המומחיות הדידקטי; והחלק הפדגוגי-מנהיגותי נקשר למאפייני התוכנית **הנחיה ותמיכה מקצועית, שיתוף פעולה ומשוב ורפלקציה** ומטרתו הייתה לחזק את תחום המומחיות **הפדגוגי**.

במפגש יושמו אסטרטגיות לפיתוח מקצועי שתומך בהטמעת שינויים בדרכי ההוראה בפריסה רחבה, בפרט הטמעת תכנים המקושרים לתוכנית הלימודים, ביסוס קמ"ל בית ספריות ותמיכה מערכתית באמצעות החיבור ליעדי משרד החינוך והרכזים הפועלים בתפקידם.

תצפית במפגש השישי בתוכנית הרכזים - דיון רפלקטיבי

הדיון הרפלקטיבי על הטמעת המפגש החמישי התקיים כשבועיים אחריו, כאשר במהלך שבועיים אלו הרכזים הטמיעו את תוכני המפגש – כל אחד בקמ"ל של צוותו. מנחי התוכנית **תמכו והנחו מבחינה מקצועית** את הדיון הרפלקטיבי ויצרו מרחב בטוח לשיתוף רגשות ותחושות, והרכזים **שיתפו פעולה** בדיון ער ומלא תובנות. להלן מספר ציטוטים, כפי שעלו בדיון הרפלקטיבי.

רכזת פ': "נזכרתי במשימה של המפגש הקודם בגאומטרייה, העברתי אותה בצוות, ומורים ביקשו שאביא כמה שיותר פעילויות כאלה. הם אמרו שהרגישו כמו תלמידים, בזמן הפעילות הם התנהגו כמו תלמידים וביקשו ממני רמזים".

הרכזת מתארת שהעבירה בצוות מפגש **ממוקד בתוכן** ומעניין, מפגש שגרם למורים להתנסות כלומדים **בלמידה פעילה**, תרם למוטיבציה בצוות והציג את מומחיותה הדידקטית.

רכזת ש': "ההתנסות והלמידה המשותפת שלנו במפגש הגאומטרייה עזרה לי להעביר את הפעילות בצוות".

הרכזת מעריכה את **שיתוף הפעולה והלמידה הפעילה במפגש התוכנית** כמאפיינים אשר תמכו בתחומי מומחיותה הדידקטית.

רכזת ק': "המפגש האחרון היה כבר אחרי פרק זמן שאִפשר לנו להתארגן, להכין את הצוות, ולכן העברתי אותו בהצלחה".

לדברי הרכזת ק', **משך הזמן** בתוכנית אִפשר לה להיערך להצגת מומחיות דידקטית במפגש הצוות.

רכזת ב': "אחרי שהעברתי את המפגש הזה בצוות אנשים כבר פונים אליי כשאני חוזרת לאחר מפגש קהילת רכזים ושואלים 'מה למדת השבוע?', 'מתי הפעילות הבאה שלנו יחד?'".

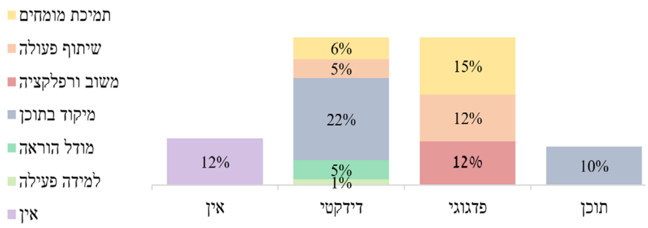
הרכזת מעריכה את **המיקוד בתוכן** במפגשי הצוות ואת התרומה לעניין ולמוטיבציה של הצוות, ומציגה את המומחיות הדידקטית שלה בהעברת הפעילות בצוות.

לסיכום, הדיון הרפלקטיבי במפגש השישי כיוון לחיזוק המומחיות הפדגוגית של הרכזים כמובילי שינוי בצוותים. המנחים שימשו דוגמה לרכזים ביצירת מרחב בטוח לשיתוף רפלקטיבי וללמידת עמיתים. נוסף על כך, תיאורי הרכזים מציגים הטמעה של מומחיותם הדידקטית בקמ"ל הבית ספריות.

מניתוח הדיון הרפלקטיבי אפשר להבחין בתרומת התוכנית לתחום המומחיות הדידקטית של הרכזים. תיאורי הרכזים מספרים על מפגשי צוות ממוקדים בתוכן שנלמד בתוכנית, ותורמים למוטיבציה ועניין בצוות. ישנה הערכה של הרכזים לשיתוף הפעולה שלהם כעמיתים בתוכנית, ולמשך הזמן של התוכנית שאפשר להם עיבוד של התנאים והאקלים הלימודי הנדרש להטמעה בקמ"ל הבית ספריות.

שאלון רפלקטיבי – מענה לשאלה על שינויים בעבודת הרכזים

במענה לשאלון הרפלקטיבי שיקפו הרכזים את השינויים שחלו בעבודתם כרכזים המובילים פיתוח מקצועי במהלך השתתפותם בתוכנית. המענים המקודדים לצד מאפייני תוכנית אפקטיבית ותחומי מומחיות הרכזים התומכים בזהותם המקצועית כמובילי פיתוח מקצועי בצוותים מוצגים בתרשים 5.



תרשים 5: התפלגות השינויים שדיווחו עליהם הרכזים באשר לעבודתם כמובילי פיתוח מקצועי בקמ"ל בית ספרית (N=139) וקידודם למאפייני תוכנית אפקטיבית ותחומי מומחיות

סך ההיגדים שקודדו כשינוי הוא N=139, כאשר הדיאגרמה מציגה את התפלגות השכיחות (באחוזים) של כל היגד למאפייני התוכנית ולתחומי המומחיות השונים, כך שסך ההיגדים שקודדו הוא 100%. לדוגמה, כ-22% מההיגדים שויכו בו בזמן למאפיין **המיקוד בתוכן** ולתחום המומחיות **הדידקטית**. תרשים 5 מציג ייצוג לכל אחד ממאפייני התוכנית האפקטיבית ומציג את יישומם בקמ"ל הבית ספריות. המאפיינים הבולטים שדווחו בשינויים בעבודת הרכזים היו **מיקוד בתוכן (32%), תמיכת מומחים (21%), שיתוף פעולה (17%) ומשוב ורפלקציה (12%)**. המאפיינים השכיחים פחות היו מודל הוראה ולמידה פעילה.

בנושא תחומי מומחיות, השינויים בעבודת הרכזים נקשרו בעיקר למומחיות פדגוגית ודידקטית ובמידה שווה (39% מכלל ההיגדים על כל תחום מומחיות) ופחות לתחום מומחיות התוכן (10% מכלל ההיגדים).

יש לציין שבמהלך התוכנית 12% מהמענים לשאלה הראו שאין שינוי בעבודת הצוות, אך לא פורטה הסיבה לכך. כ-9% מהמענים האלה התקבלו בדצמבר, בתחילת התוכנית ולפני ההטמעה הפעילה שהחלה בחודש פברואר, ורק כ-3% מהם במהלך מאי.

במבחן 'חי בריבוע' לאי תלות לבחינת הקשר בין מאפייני תוכנית אפקטיבית של הרכזים לתחומי המומחיות של הרכז נמצאה תלות מובהקת: $\chi^2\ (18)=242.307\ ,p<0.001$. ממצא זה מראה שבתיאורי השינויים בעבודת הרכזים, מאפייני התוכנית האפקטיבית נקשרו אחרת לתחומי המומחיות של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי בצוות. בחינת הממצאים העלתה כי תחום מומחיות התוכן נמצא משויך למאפיין **המיקוד בתוכן**, תחום המומחיות הדידקטית נמצא משויך לאשכול של **רוב מאפייני התוכנית** לפיתוח מקצועי, למעט מאפיין המשוב והרפלקציה, ותחום המומחיות הפדגוגית נקשר לשלושה מאפיינים של התוכנית המציגים אינטראקציה בין הרכזים לעצמם או בינם לצוות: **עידוד שיתוף פעולה, הנחייה ותמיכה מקצועית ומשוב ורפלקציה**.

הדיווחים על השינויים בעבודת הרכזים מציגים יישום של אסטרטגיות לפיתוח מקצועי אשר תומך בהטמעת שינויים בדרכי ההוראה בפריסה רחבה, הטמעת תכנים המקושרים לתוכנית לימודים בקמ"ל הבית ספריות ותמיכה מערכתית באמצעות הרכזים הפועלים בתפקידם.

דיון ומסקנות

המטרה הראשונה של המחקר הנוכחי הייתה לבחון את מאפייני המבנה של מפגש טיפוסי בתוכנית לפיתוח מקצועי המכשירה רכזי מתמטיקה כמובילי פיתוח מקצועי בצוותם ולזהות את המאפיינים שהטמיעו הרכזים במפגשי הקמ"ל הבית ספריות. המטרה השנייה הייתה לחקור את הקשר בין מאפייני המבנה של מפגש טיפוסי בתוכנית ושל מפגשי הקמ"ל הבית ספריים להתפתחות תחומי המומחיות של הרכזים המבססים את תפיסת זהותם המקצועית כמובילי פיתוח מקצועי בצוות.

המפגש הטיפוסי שנצפה בתוכנית דמה במאפייניו למרבית מפגשי התוכנית שהתקיימו במהלך השנה וכלל חלק מתמטי-דידקטי של למידה בקבוצות קטנות ושני דיונים רפלקטיביים במליאה – מתמטי-דידקטי ופדגוגי-מנהיגותי. בכל מפגש טיפוסי הרכזים התנסו בפתרון קבוצתי של משימה מתמטית הקשורה לתוכנית הלימודים ובדיון בפתרונה. לאחר מכן ניהלו מנחי התוכנית דיון מתמטי-דידקטי, ובמהלכו הציגו נציגי הקבוצות פתרונות מתחומים מתמטיים מגוונים ודנו בסוגיות הנוגעות להוראת המשימה בכיתות. לסיכום כל מפגש, ניהלו המנחים דיון פדגוגי-מנהיגותי שעסק בהטמעת שינוי בקמ"ל של הצוות.

מבנה התוכנית כיוון לפיתוח תחומי מומחיות התומכים בהנהגת קמ"ל בית ספריות בצוותי הוראת מתמטיקה באמצעות התמקדות בהעמקת ידע התוכן המתמטי וידע הוראתו, ביסוס שיח עמיתים בנושאי הוראה ולמידה, עידוד התנסויות בית ספריות והרחבת הידע במנהיגות ובהנהגת צוות בקמ"ל (Borko et al., 2014; Cobb & Jackson, 2011; Loucks-Horsley et al., 2012).

נדון בכל מאפייני המפגש הטיפוסי – כפי שבאו לידי ביטוי בתוכנית הרכזים, ולאחר מכן בקמ"ל הבית ספריות – ונדון בחשיבותם מתוך עיון בממצאי מחקרים קודמים.

ראשית, נמצא כי מאפיין **המיקוד בתוכן** יושם בתוכנית באמצעות תכנים המיועדים להוראה בכיתות. כך אפשר לקשר במישרין בין הלמידה בתוכנית להוראה בפועל ולהניע הטמעת שינויים מקדמי למידה בדרכי ההוראה (Darling-Hammond et al., 2017; Heck et al., 2019; Prediger, Fischer, et al., 2019).

שנית, נמצא כי תצפית המפגש הטיפוסי מדגישה את תפקידם החשוב של מנחי התוכנית **שהנחו ותמכו מבחינה מקצועית** ברכזים. המנחים שימשו דוגמה מעשית בכך שיזמו והנהיגו התנסויות למידה שיתופיות ממוקדות תוכן מתמטי והדגימו אסטרטגיות הוראה ומתודות הנחיה מיטביות ליצירת מרחב בטוח לשיתוף ורפלקציה; המנחים הטמיעו את כלל מאפייני התוכנית האפקטיבית ושימשו מודל להובלת פיתוח מקצועי אפקטיבי בעבור הרכזים (Darling-Hammond et al., 2017; Loucks-Horsley et al., 2012).

עוד מאפיין בעל משמעות שנקשר לכל חלקי המפגש הטיפוסי, הוא **שיתוף פעולה** של הרכזים. שיתוף הפעולה החל בפתרון המשימה הקבוצתית והתחזק בשני דיוני המליאה – המתמטי-דידקטי והפדגוגי-מנהיגותי. שיתוף הפעולה של הרכזים תרם להנעה קבוצתית ששימשה בסיס לחקר ורפלקציה בקבוצה, כהכנה להטמעת שינויים בדרכי ההוראה (Odell, 1997).

במפגש הטיפוסי יצרו המנחים הזדמנויות מובנות למשוב ורפלקציה, שבהן שיתפו הרכזים והקשיבו לעמיתיהם בעניין הדגשים הדידקטיים כדי לקדם חשיבה של תלמידים. בנושא הפדגוגי-מנהיגותי שיתפו הרכזים בעמדותיהם ודעותיהם כלפי תפקודם כמובילי שינוי בקמ"ל הצוות. משוב ורפלקציה הם תהליכים חשובים בלמידה של לומדים בוגרים, ובאמצעותם מתקיים מעבר משלב הלמידה והצפייה בתחומי המומחיות המוצגים בתוכנית הפיתוח המקצועי אל השלב של בניית חזון לפעולה וליישום בבתי הספר (Darling-Hammond et al., 2017).

מאפיין נוסף שנצפה במפגש הטיפוסי הוא **הלמידה הפעילה**. הרכזים התנסו כלומדים בתכנים ובאסטרטגיות להוראה. מאפיין הלמידה הפעילה הוא מאפיין חשוב בתהליך למידה של לומדים בוגרים כי הוא מחזק קשר ישיר להטמעה מתוך התנסות בתכנים ובשיטות שיישמו בעבודתם בכיתות (Heck et al., 2019).

המאפיין האחרון שנצפה במפגש הטיפוסי הוא **המודל להוראה**. הרכזים חוו במפגש הדגמה של הוראה מיטבית של המנחים, צפו בעמיתיהם כאשר הם מתווכים תכנים לימודיים לצוות ונחשפו לתכנים ולאסטרטגיות הוראה ייעודיים. שימוש במודלים להוראה תורם לקישוריות בין תהליך הלמידה של המורים בתוכנית ליישום הידע הנלמד בכיתות באמצעות התנסות ביחידות הוראה, תוכני למידה, שיעורי דוגמה וצפיית עמיתים (Darling-Hammond et al., 2017).

בדיון הרפלקטיבי שהתקיים במפגש השישי, לאחר הטמעת המפגש החמישי בצוותים, ציינו הרכזים **ששיתוף הפעולה** בין העמיתים בתוכנית הרכזים הכין אותם להוביל את המפגש בקמ"ל הבית ספרית. ממצא זה עומד על חשיבות במיומנות של הנעת שיתוף פעולה בשביל מנהיג מוביל פיתוח מקצועי בקמ"ל הצוות ועל העובדה שההתנסות בתוכנית עשויה לחזק מיומנות זו (Loucks-Horsley et al., 2012).

עוד מאפיין שעלה בדיון הרפלקטיבי הוא **משך הזמן** של התוכנית שאפשר עיבוד של הלמידה עד לכדי הטמעה מוצלחת בקמ"ל. ממצא זה חובר לממצאי מחקרים קודמים שעומדים על החשיבות במשך הזמן של תוכניות פיתוח מקצועי, ובפרט עבור מנהיגים המובילים פיתוח מקצועי בצוותים, משך זמן המאפשר התנסות ואימון חוזר התורמים להטמעה מדויקת יותר בקמ"ל הבית ספריות (Borko et al., 2017; Darling-Hammond et al., 2017; Jacobs et al., 2017).

כעת, בהתייחס להטמעה בקמ"ל הבית-ספריות, רוב דיווחי הרכזים על שינויים בעבודתם כללו תיאורים של ישיבות צוות שהפכו להיות יותר ממוקדות בתוכן המתמטי שנלמד בתוכנית הרכזים. ממצא זה תומך בעובדה שהתנסות הרכזים בתוכנית בתוכני הלמידה כלומדים, לצד דיון רפלקטיבי בדגשים להוראתם ותיווך החשיבות הדידקטית והמערכתית בתכנים עודדו הטמעת התכנים בקמ"ל הבית ספריות (Loucks-Horsley et al., 2012).

בשאלון הרפלקטיבי דיווחו הרכזים על התגברות שיתוף הפעולה בין חברי הצוות, בפרט שיתוף ידע והחלפת דעות בין העמיתים בלמידה. ממצא זה חובר לממצא במפגש הטיפוסי ובדיון הרפלקטיבי על הטמעתו כי יישום שיתוף פעולה בין

עמיתים בתוכנית הכשרה למובילי פיתוח מקצועי בצוותי הוראת מתמטיקה תורם להטמעת שיתוף פעולה בקמ"ל של צוותי ההוראה (Borko et al., 2014).

הדיווחים על שינויים בעבודת הרכזים כללו תיאורים על כך שהם **תומכים בצוות כמומחים** מקצועיים. ממצא זה מדגיש את המעבר של הרכזים ממצב של צפייה במנחי התוכנית המומחים בתחום הוראת המתמטיקה אל יישום פיתוח מקצועי בצוותים והערכה עצמית גבוהה של תפקודם (Darling-Hammond et al., 2017).

מאפיין נוסף שנמצא בשינויים בעבודת הרכזים היה השימוש ברפלקציה. הם חוו **רפלקציה** בתוכנית והיא יושמה בתיאורים של למידה לאחר מעשה מהשינויים המתרחשים בעבודת הצוותים ובמהלך ישיבות הצוותים. הרכזים הציגו מיומנות של מנהיג מוביל פיתוח מקצועי, כאשר דיווחו על רפלקציה אישית ותיארו התרשמות מרפלקציה קבוצתית כחלק מעיבוד הצורך בהטמעת שינויים בעבודתם ובעבודת הצוותים (Loucks-Horsley et al., 2012).

אף על פי שמפגש טיפוסי בתוכנית כלל את כל מאפייני התוכנית האפקטיבית כדי לתמוך ברכזים כמובילי קמ"ל בית ספרי, ישנם מאפיינים משניים שדיווחו עליהם הרכזים בשאלון הרפלקטיבי, כגון מודל הוראה ולמידה פעילה. ייתכן שהסיבה למשניות שלהם היא שהטמעת מאפיינים אלה בצוות מצריכה מיומנות גבוהה יותר, ולשם כך נדרש פרק זמן ארוך יותר ללמידה של הרכזים (Borko et al., 2014; Jackson et al., 2015; Jacobs et al., 2017).

לבסוף, מאפיין משך הזמן נקשר לדיווח המתמשך על שינויים בעבודת הרכזים במהלך השנה ולאזכורם הישיר של הרכזים שמשך הזמן אפשר למידה והיערכות. מאפיין משך הזמן של התוכנית בשילוב עם שאר מאפייני התוכנית האפקטיבית, הוא מאפיין חשוב התורם ללמידה ולקידום תחומי המומחיות של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי בצוותים (Boeskens et al., 2020; Darling-Hammond et al., 2017; Heck et al., 2019).

ניתוח התוכן של ממצאי המחקר העוסק במפגש הטיפוסי בתוכנית הרכזים ובתיאורי הטמעת מפגשי הקמ"ל הבית ספריות הציג קשרים בין מאפייני תוכנית אפקטיבית להתפתחות בתחומי המומחיות של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי בצוותם. נציג קשרים אלו בהלימה לחלקי המפגש השונים זה מזה, כפי שנצפו במפגש טיפוסי בתוכנית הרכזים ובהטמעת מפגשי הקמ"ל הבית ספריות.

בעניין פעילות התוכן המתמטי-דידקטי שכללה פתרון משימה מתמטית בלמידה שיתופית בקבוצות קטנות, מנחי התוכנית **תמכו והנחו מבחינה מקצועית** את הרכזים ו**קידמו למידה פעילה ושיתופית ממוקדת תוכן** מתמטי כדי לפתח את תחום מומחיות התוכן של הרכזים. לעומת זאת, במפגשי הקמ"ל דיווחו הרכזים על הטמעה של מפגשי צוות **ממוקדי תוכן** בלבד בהקשר להתפתחותם כמובילי צוות בתחום מומחיות התוכן.

נמצא בהמשך כי הדיון המתמטי-דידקטי במפגש הטיפוסי כלל את כל מאפייני התוכנית האפקטיבית כדי לפתח את תחום המומחיות הדידקטית של הרכזים. לעומת זאת בדיווחי הרכזים על הטמעה בקמ"ל הבית ספריות תיארו הרכזים בשינויים שנעשו בעבודתם רק חלק מן מאפייני התוכנית האפקטיבית בתחום מומחיותם הדידקטית, בעיקר **מיקוד בתוכן, הנחיה ותמיכה מקצועית שיתוף פעולה ומודל הוראה**.

השוני בין הטמעת מאפייני התוכנית האפקטיבית בתוכנית הרכזים ליישום מאפיינים אלה בקמ"ל הבית ספריות מדגיש את ההבדלים ברמות השליטה בתחומי מומחיות התוכן והדידקטיקה בין מנחי התוכנית לרכזים. הטמעת למידה פעילה ורפלקציה בתחומי מומחיות התוכן והדידקטיקה והנחיה של קבוצת לומדים בוגרים, הייתה משימה מורכבת יותר לרכזים. ממצא זה נקשר לממצאי מחקרים קודמים שמחזקים את ההבנה כי הרכזים נדרשים לזמן למידה, הטמעה ואימון ממושכים יותר כדי לפתח תחומי מומחיות הנדרשים ליישום מאפייני תוכנית אפקטיבית בצוותים (Borko et al., 2014; Jackson et al., 2015; Jacobs et al., 2017; Loucks-Horsley et al., 2012).

לבסוף נמצא כי הדיון הפדגוגי-מנהיגותי במפגש הטיפוסי נועד לפתח את תחום המומחיות הפדגוגית של הרכזים כמובילי שינוי בקמ"ל הבית ספריות (Loucks-Horsley et al., 2012; Odell, 1997). הן בלמידה זו במפגש התוכנית והן בדיווחי הרכזים על הטמעתם בקמ"ל, נמצא כי המומחיות הפדגוגית נקשרה בעקיבות למאפיינים **תמיכה והנחיה מקצועית, שיתוף פעולה ומשוב ורפלקציה**. במפגש התוכנית הטיפוסי יצרה ההנחיה המקצועית של מנחי הקהילה מרחב בטוח לדיון ממוקד שהתאפיין בהקשבה, בפתיחות לדעות שונות ולגישות חדשות ובלמידה מניסיון עמיתים (Loucks-Horsley et al., 2012). שיתוף הפעולה והרפלקציה של הרכזים בדיון הפדגוגי-מנהיגותי תרם להבנת הצרכים הלימודיים, החברתיים והרגשיים של מורי הצוות ושל התלמידים, כהכנה לתמיכתם כמומחים ולהטמעת שיתוף פעולה ורפלקציה בקמ"ל הבית ספריות (Beijaard et al., 2000; Boeskens et al., 2020; Loucks-Horsley et al., 2012).

לסיכום, ממצאי המחקר מציגים מפגש טיפוסי מובנה שמטמיע תכנים מקדמי למידה המקושרים לתוכנית הלימודים הבית ספרית ופעילויות סדורות הניתנות לשכפול באמצעות הנחיה מקצועית מיומנת (Borko et al., 2021; Prediger, Roesken-Winter, et al., 2019). מבנה של מפגש טיפוסי בתוכנית הרכזים מתאים להגדרת תוכנית אפקטיבית, אשר עשויה לכלול אחד מהמאפיינים האלה או יותר, כאשר המפגש הטיפוסי הציג מבנה מלא של תוכנית אפקטיבית (Darling-Hammond et al., 2017; Heck et al., 2019). הדיונים הרפלקטיביים השיתופיים במפגש הטיפוסי בנו נרטיב משותף של קידום ההוראה, הלמידה והעבודה השיתופית הרפלקטיבית בקמ"ל הבית ספריות. מאפייני התוכנית האפקטיבית שנצפו במפגש טיפוסי שמאפיין את מרבית מפגשי התוכנית, הוטמעו בקמ"ל הבית ספריות על ידי הרכזים (Borko et al., 2014; Darling-Hammond et al., 2017; Heck et al., 2019). בפרט בשאלון הרפלקציה, ובמהלך הטמעת מאפייני התוכנית האפקטיבית, דיווחו הרכזים על שינויים בתחומי מומחיותם, המבססים את תפיסת זהותם המקצועית כמובילי פיתוח מקצועי בצוותים (Battey & Franke, 2008; Beijaard et al., 2000, 2004; Sommerfeld Gresalfi & Cobb, 2011).

בעניין הקשר בין יישומם של מאפייני תוכנית אפקטיבית במפגשי הקמ"ל הבית ספריים להתפתחות בתחומי המומחיות של הרכזים, מממצאי השאלון הרפלקטיבי ניכר כי מרבית השינויים בעבודת הרכזים מציגים התפתחות בתחום המומחיות הדידקטית והפדגוגית ופחות בתחום מומחיות התוכן. נראה שהרכזים הרחיבו בדיווחים על שינויים בתחומי המומחיות שהם נדרשו לפתח בתפקידם החדש כמובילי פיתוח מקצועי בצוות, בפרט, הנחיה דידקטית ופדגוגית, והזכירו פחות שינויים שנקשרו לשליטה בתחום התוכן שכן זו דרישה מרכזית שהייתה קיימת בהגדרת תפקידם כמובילי תחום התוכן בבית הספר (Loucks-Horsley et al., 2012).

המיקוד בתחומי המומחיות של הרכזים, מתוך הבנת האנלוגיה והשוני בין תחומי המומחיות הנדרשים ממורים, ממקד ומדייק את המשגת תפיסת הזהות המקצועית של מובילי פיתוח מקצועי בצוותי ההוראה ומציג אב טיפוס לתכנון מודלים לפיתוח מקצועי בפריסה רחבה לרכזים וצוותיהם (Beijaard et al., 2000, 2004; Loucks-Horsley et al., 2012; Prediger, Roesken-Winter, et al., 2019). שינוי זה בתפיסת הזהות המקצועית, בא לידי ביטוי במפגש הסיום של ההשתלמות ביוני 2020 שבו אמרה אחת הרכזות את הדברים הבאים:

> הזיווג של שלושת המנחים יחד היה מושלם, כל אחד מכם נתן לנו משהו אחר... כל החוויה עוררה בי מחשבה בנוגע לתפקיד שלי, הבנתי שאני לא רק מורה למתמטיקה שמעבירה תוכן מתמטי ומלווה מורים... בזכותכם אני מבינה שאני מנהיגה, אני מובילה פיתוח מקצועי של הצוות שלי יחד עם הצוות... ואני מודה לכם על כך.

תרומת המחקר

המחקר קושר בין תחומי מומחיות התומכים בתפיסת הזהות המקצועית של הרכזים למודל התוכנית האפקטיבית (Beijaard et al., 2000; Darling-Hammond et al., 2017; Loucks-Horsley et al., 2012). קשר זה מחבר בין מבנה תוכנית לצמיחה מקצועית, הן ברמת התמיכה הנדרשת והן ברמת בחינת היישום לצורך הטמעה במסגרת הבית-ספרית. על פי בייג'רד ועמיתיו (Beijaard et al., 2000), תפיסת זהות מקצועית משפיעה על היכולת, על ההתפתחות המקצועית ועל המוטיבציה של המורים להתמודד עם שינויים ולהטמיע חידושים בסביבה החינוכית.

בחינת הספרות מראה מעט מחקרים העוסקים בקשר בין תוכניות לפיתוח מקצועי להתפתחות הזהות המקצועית של מורי מתמטיקה, והם מראים שלמידה של מורים בסביבות למידה שיתופיות המזמנות שיח מונחה רפלקטיבי מביאה לידי בניית משמעות לתהליך הלמידה ולהתפתחות של הזהות המקצועית באמצעות הטמעת שינויים בדרכי ההוראה (Battey & Franke, 2008; Sommerfeld Gresalfi & Cobb, 2011). בייג'רד ועמיתיו (2000) בחנו את תפיסת הזהות של המורים בהקשר לניסיון ההוראה ולהתנסויות מקצועיות, אך לא בחנו את הקשר בין זהות לבין תהליך פיתוח מקצועי. שילוב התאוריות של מודל לפיתוח מקצועי אפקטיבי וצמיחה בתפיסת זהותו של הרכז המוצג במחקר הנוכחי, תורם לספרות המחקרית בחשיבה על מודלים לפיתוח מקצועי המקדמים תחומי מומחיות ובכך תומכים בביסוס של תפיסת זהות מקצועית של אנשי הוראה.

המחקר מציג מודל ישים לפיתוח מקצועי לרכזים וצוותי הוראה. מודל זה מושתת על תוכנית אם הכוללת תכנים מקדמי למידה והנחיה מקצועית מיומנת המטמיעה את כל מאפייני התוכנית האפקטיבית ותומכת בהטמעתם בקמ"ל הבית ספריות (Darling-Hammond et al., 2017). המודל מיישם תהליך של אינטראקציה דו-כיוונית בין התוכנית לקמ"ל הבית ספריות באמצעות ההטמעה והרפלקציה של הרכזים. בתהליך זה המודל מעצים את תפיסת הזהות המקצועית של הרכזים כמובילי פיתוח מקצועי, בכך שהם מטמיעים שינויים בדרכי עבודתם באמצעות מאפייני תוכנית אפקטיבית, מאפיינים שהם התנסו בהם בתוכנית. נוסף על כך, הרכזים מפתחים תחומי מומחיות מתאימים להנהגת הקמ"ל הבית ספריות.

יתר על כן, המודל מיישם אסטרטגיות לפיתוח מקצועי התומך בהטמעה של שינויים בדרכי ההוראה בפריסה רחבה באמצעות שימור מאפייני התוכנית האפקטיבית, הטמעת תוכני למידה המקושרים לתוכנית הלימודים, הטמעת קמ"ל בית ספריות, הכשרת מובילי פיתוח מקצועי בצוותים וגיוס תמיכה מערכתית (Borko et al., 2021; Cobb & Jackson, 2011; Koellner et al., 2011; Prediger, Fischer, et al., 2019; Prediger, Roesken-Winter, et al., 2019). המודל מתאים להטמעה בסביבות אזוריות ובית ספריות שונות, ובכך מציג זווית ראייה המאפשרת חשיבה כוללת על מודלים של פיתוח מקצועי ברמה הארצית והעולמית, בתקווה שמהלך זה יבנה תרבות למידה שיתופית ורפלקטיבית בצוותים, אשר תוביל בתורה לשיפור תהליכי הלמידה של התלמידים.

רשימת מקורות

גוטפרוינד, ח' ורוזנברג, י' (עורכים). (2012). **עולם הידע וההכשרה של העוסקים בהוראת המתמטיקה בחינוך העל-יסודי: תמונת מצב והמלצות הוועדה.** האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים, היזמה למחקר יישומי בחינוך. http://education.academy.ac.il/SystemFiles/23017.pdf

משרד החינוך. (2016). **עוז לתמורה: רפורמה מערכתית ופלטפורמה ללמידה משמעותית.** https://meyda.education.gov.il/files/HighSchool/talkitoz16.pdf

מיקולינסר, מ' ופרזנצ'בסקי אמיר, ר' (2020). תקציר. בתוך מ' מיקולינסר, ר' פרזנצ'בסקי אמיר, ונ' טופול (עורכים), **פיתוח מקצועי והדרכה במערכת החינוך: תמונת מצב והמלצות** (עמ' 10-23). יוזמה – מרכז לידע ולמחקר בחינוך, האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים.

Allen, D. (2016). The resourceful facilitator: Teacher leaders constructing identities as facilitators of teacher peer groups. *Teachers and Teaching*, *22*(1), 70-83. https://doi.org/10.1080/13540602.2015.1023029

Battey, D., & Franke, M. L. (2008). Transforming identities: Understanding teachers across professional development and classroom practice. *Teacher Education Quarterly*, *35*(3), 127-149.

Cobb, P., & Jackson, K. (2011). Towards an empirically grounded theory of action for improving the quality of mathematics teaching at scale. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(1), 6-33.

Darling-Hammond, L., & Richardson, N. (2009). Research review / teacher learning: What matters? *How Teachers Learn*, *66*(5), 46-53. https://outlier.uchicago.edu/computerscience/OS4CS/landscapestudy/resources/Darling-Hammond-and-Richardson-2009.pdf

Darling-Hammond, L., Hyler, M. E., Gardner, M., & Espinoza, D. (2017). *Effective teacher professional development.* Learning Policy Institute. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED606743.pdf

Dewey, J. (1910). *How we think*. D. C. Heath. https://doi.org/10.1037/10903-000

Goos, M., & Geiger, V. (2010). Theoretical perspectives on mathematics teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(6), 499-507. https://doi.org/10.1007/s10857-010-9166-4

Handelman, H., & Kohen, Z. (2022, July 18-23). A designated professional development program for promoting mathematical modelling competency among leading teachers. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 339-346). PME. http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/126587

Heck, D. J., Plumley, C. L., Stylianou, D. A., Smith, A. A., & Moffett, G. (2019). Scaling up innovative learning in mathematics: Exploring the effect of different professional development approaches on teacher knowledge, beliefs, and instructional practice. *Educational Studies in Mathematics, 102*, 319-342. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09895-6

Hord, S. M. (2009). Professional learning communities: Educators working together toward a shared purpose – Improved student learning. *Journal of Staff Development, 30*(1), 40-43.

Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research, 15*(9), 1277-1288. https://doi.org/10.1177/1049732305276687

Beijaard, D., Verloop, N., & Vermunt, J. D. (2000). Teachers' perceptions of professional identity: An exploratory study from a personal knowledge perspective. *Teaching and Teacher Education, 16*(7), 749-764. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0742-051X(00)00023-8

Beijaard, D., Meijer, P. C., & Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education, 20*(2), 107-128. https://doi.org/10.1016/j.tate.2003.07.001

Boeskens, L., Nusche, D., & Yurita, M. (2020). *Policies to support teachers' continuing professional learning: A conceptual framework and mapping of OECD data* (OECD Education Working Papers, No. 235). OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/247b7c4d-en

Boles, K. L., Jarry-Shore, M., Villa, A., Malamut, J., & Borko, H. (2020). Building capacity via facilitator agency: Tensions in implementing an adaptive model of professional development. In M. Gresalfi & I. S. Horn (Eds.), *The interdisciplinarity of the learning sciences: 14th International Conference of the Learning Sciences (ICLS) 2020* (Vol. 5, pp. 2585-2588). International Society of the Learning Sciences. https://repository.isls.org//handle/1/6625

Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders' facilitation of mathematics professional development. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 149-167. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.003

Borko, H., Carlson, J., Mangram, C., Anderson, R., Fong, A., Million, S., Mozenter, S., & Villa, A. M. (2017). The role of video-based discussion in model for preparing professional development leaders. *International Journal of STEM Education, 4*, Article 29. https://doi.org/10.1186/s40594-017-0090-3

Borko, H., Carlson, J., Deutscher, R., Boles, K. L., Delaney, V., Fong, A., Jarry-Shore, M., Malamut, J., Million, S., Mozenter, S., & Villa, M. A. (2021). Learning to lead: An approach to mathematics teacher leader development. *International Journal of Science and Mathematics Education, 19*, 121-143. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10157-2

Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education, 18*(8), 947-967. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00053-7

Prediger, S., Roesken-Winter, B., & Leuders, T. (2019). Which research can support PD facilitators? Strategies for content-related PD research in the Three-Tetrahedron Model. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(4), 407-425. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09434-3

Roesken-Winter, B., Stahnke, R., Prediger, S., & Gasteiger, H. (2021). Towards a research base for implementation strategies addressing mathematics teachers and facilitators. *ZDM: Mathematics Education, 53*, 1007-1019. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01220-x

Roy, P., & Hord, S. M. (2006). It's everywhere, but what is it? Professional learning communities. *Journal of School Leadership, 16*(5), 490-504. https://doi.org/10.1177/105268460601600503

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner: Toward a new design for teaching and learning in the professions.* Jossey-Bass Publishers. http://www.daneshnamehicsa.ir/userfiles/file/Manabeh/Educating%20the%20reflective%20practitioner.pdf

Sommerfeld Gresalfi, M., & Cobb, P. (2011). Negotiating identities for mathematics teaching in the context of professional development. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 270-304.https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0270

Stupel, M., & Ben-Chaim, D., M. (2017). Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program. *Investigations in Mathematics Learning, 9*(2), 86-108. https://doi.org/10.1080/19477503.2017.1283179

Jackson, K., Cobb, P., Wilson, J., Webster, M., Dunlap, C., & Appelgate, M. (2015). Investigating the development of mathematics leaders' capacity to support teachers' learning on a large scale. *ZDM Mathematics Education, 47*(1), 93-104. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0652-5

Jacobs, J., Seago, N., & Koellner, K. (2017). Preparing facilitators to use and adapt mathematics professional development materials productively. *International Journal of STEM Education, 4*, 30. https://doi.org/10.1186/s40594-017-0089-9

Koellner, K., Jacobs, J., & Borko, H. (2011). Mathematics professional development : Critical features for developing leadership skills and building teachers' capacity. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(1), 115-136. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ960952.pdf

Kohen, Z., & Kramarski, B. (2012). Developing a TPCK-SRL assessment scheme for conceptually advancing technology in education. *Studies in Educational Evaluation, 3*8(1), 1-8. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2012.03.001

Loucks-Horsley, S., Stiles, E. K., Mundry, S., Love, N., & Hewson, P. W. (2012). *Designing professional development for teachers of science and mathematics* (4th ed.). Corwin Press. https://doi.org/10.4135/9781452219103

Odell, S. J. (1997). Preparing teachers for teacher leadership. *Action in Teacher Education, 19*(3), 120-124. https://doi.org/10.1080/01626620.1997.10462884

Prediger, S., Fischer, C., Selter, C., & Schöber, C. (2019). Combining material- and community-based implementation strategies for scaling up: The case of supporting low-achieving middle school students. *Educational Studies in Mathematics, 102*(3), 361-378. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9835-2

מודל טיפוח הכוונה עצמית להעלאת הישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה[1]

ענבל קולושי-מינסקר

ד"ר ענבל קולושי-מינסקר
בוגרת תואר שלישי (Ph.D.) באוניברסיטת בר-אילן ומאבחנת דידקטית מוסמכת. מרצה ומובילת המרכז ללמידה דיגיטלית בשאנן - המכללה האקדמית הדתית לחינוך.
מרצה בהשתלמויות מורים ומדריכת מתמטיקה בבתי ספר בחינוך יסודי.

תקציר

במאמר זה יוצג מחקר שבחן מודל תאורטי-יישומי על אודות המשתנים המשפיעים על העלאת הישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה באמצעות טיפוח ההכוונה העצמית של תלמידי בית ספר יסודי. המודל מושתת על תאוריות הכוונה עצמית: טיפוח הכוונה עצמית בלמידה SRL בשילוב עם טיפוח המוטיבציה הרגשית SDT.

במחקר השתתפו 737 תלמידים בכיתות א'–ו' מבית-ספר יסודי אחד, שנחשפו לשתי תאוריות הכוונה עצמית: SRL ו-SDT, במהלך פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה.

ממצאי המחקר מדגישים את ייחודו וחידושו לשדה החינוך והם החשיבות של שילוב המרכיבים הקוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים לצד המרכיבים המוטיבציוניים-רגשיים לשם טיפוח ההכוונה העצמית השלמה בתהליך הלמידה, המשפיעה בתורה על ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה.

תרומתו של המחקר היא בבחינת המודל התאורטי-יישומי, המאפשר למורים ולאנשי חינוך להפעיל תוכנית התערבות בסביבות למידה בבית הספר היסודי המטפחת את יכולות התלמידים הצעירים (skills) בשילוב עם טיפוח המוטיבציה הרגשית שלהם (will), להעלאת הישגים לימודיים.

מילות מפתח: הכוונה עצמית בלמידה SRL; תאוריית הכוונה עצמית SDT; בעיות מילוליות במתמטיקה.

1. מאמר זה הוא תוצר מתוך עבודת הדוקטור שבוצעה באוניברסיטת בר-אילן, בהנחייתה של פרופ' ברכה קרמרסקי.

מבוא

תאוריית ההכוונה העצמית בלמידה (SRL – Self-Regulated Learning) היא מודל רב-ממדי המדגיש את התפקיד הפעיל של תלמידים בהכוונת תהליכי למידה במרכיבים **קוגניציה, מטה-קוגניציה ומוטיבציה ללמידה** ובכך תורמת להעלאת הישגים לימודיים בכלל ובמתמטיקה בפרט (Zimmerman, 2000; Kramarski, 2018).

מרבית המחקרים מתמקדים בהכוונה עצמית בלמידה השמה דגש על טיפוח מיומנות קוגניטיבית ומטה-קוגניטיבית בתהליך הפתרון (skills). אולם בשנים האחרונות נראה כי טיפוח המיומנויות בלבד אינו מספיק לקידום הישגי התלמידים, אלא על התלמידים לגלות גם מוטיבציה-רגשית ללמידה (will). תאוריית ההכוונה העצמית (SDT – Self-Determination Theory) מדגישה את חשיבות התחום המוטיבציוני-רגשי של התלמידים בסביבת הלמידה שלהם, באמצעות טיפוח הצרכים הפסיכולוגיים הבסיסיים: **אוטונומיה, שייכות ויכולת** (Kramarski et al., 2010; Ryan & Deci, 2000). על כן במודלים מיטביים לטיפוח ההוראה בכיתה יש לשלב מרכיבים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים לצד מרכיבים מוטיבציוניים-רגשיים.

ייחודיות המחקר המוצג במאמר זה היא בחינת מודל המשלב את התאוריות להכוונה עצמית (SRL ו-SDT) ובחינת תרומת המודל המשולב להעלאה של ההישגים בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה.

רקע תאורטי

בעיות מילוליות במתמטיקה

תוכניות הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי (למשל, משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006) מדגישות את פתרון הבעיות כאחד הנושאים המרכזיים במתמטיקה, כיוון שהן מקשרות בין עולם המציאות לעולם המתמטי (הרשקוביץ, 2014; OECD-PISA, 2013). נושא פתרון בעיות (problem solving) מופיע בתוכנית הלימודים שפרסמה המועצה הארצית למורים למתמטיקה (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2006) כנדבך מהותי וחשוב בהבניית הידע המתמטי (סטנדרט תוכן Content Standard) פיתוח חשיבה מסדר גבוה (סטנדרט תהליך Process Standard) בקרב תלמידים החל מגן הילדים ועד לסיום כיתה י"ב. על פי התוכנית, בעזרת מוריהם תלמידים צריכים: (א) לבנות ידע מתמטי חדש באמצעות פתרון בעיות; (ב) לפתור בעיות הצומחות מהעיסוק במתמטיקה בתחומים אחרים; (ג) ליישם ולאמץ מגוון של אסטרטגיות לפתרון בעיות; (ד) לשקף את התהליך של פתרון בעיות מתמטיות ולשפרו. לפיכך פתרון בעיות הוא לא חלק מבודד של תוכנית הלימודים ויש לשלבו בכל הסטנדרטים של התוכן. גם תוכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי בישראל (משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006) מדגישה את החשיבות של קישור מספרים לסביבה ולתחומי ידע אחרים וליישם אותם לצורך פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. השימוש בבעיות נובע מהרצון להקנות לתלמידים את היכולת להשתמש בכלים המתמטיים שלמדו בהקשרים ובמצבים שונים, בתחומי ידע אחרים ובחיי היום-יום.

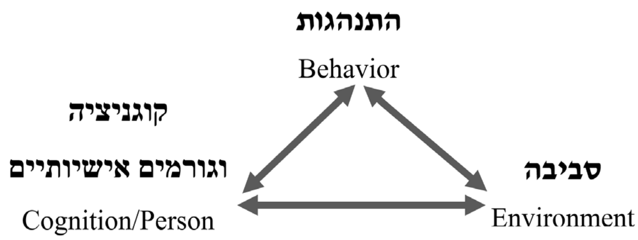
לדעת חוקרים, קשיים של תלמידים רבים בפתרון בעיות אינם נובעים רק מחוסר ידע, אלא מקשיים בשימוש בהכוונה עצמית של מיומנויות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות ומיומנויות מוטיבציוניות-רגשיות, הבאות לידי ביטוי בכל שלבי הפתרון (Mullis et al., 2016). חוקרים סבורים כי מיומנויות אלו אינן מתרחשות מאליהן בקרב מרבית התלמידים בעלי הישגים שונים במתמטיקה, אלא הן צריכות להיבנות ולהתפתח בסביבת הלמידה באמצעות הכוונה והדגמה (Mega et al., 2014).

לפיכך נתאר תוכנית ההתערבות שהועברה במחקר הנוכחי לטיפוח הכוונה עצמית קוגניטיבית ומטה-קוגניטיבית והכוונה עצמית מוטיבציונית-רגשית בעת פתרון בעיות מילוליות מתמטיקה.

טיפוח סביבות למידה המתבססות על תאוריות הכוונה עצמית SRL ו-SDT

סביבה למידה - הגדרה

האינטראקציה שבין הסביבה הלימודית ובין הפרט והשפעתה על התפתחות הלמידה של תלמידים הם נושאי מפתח בחינוך, המושכים אליהם חוקרים רבים. בנדורה (Bandura, 1986), ציין כי האינטראקציה בין התנהגות וסביבה ובין קוגניציה וגורמים אישיותיים הפועלים בשני כיוונים זה על זה, הם המשפיעים על התנהגות האדם. בתרשים 1 מוצג המודל של בנדורה (Bandura, 1986) המתאר אינטראקציה זאת.



תרשים 1: מודל תאוריית הלמידה החברתית של בנדורה (Bandura, 1986)

על פי המודל לתיאור הלמידה החברתית (Bandura, 1986), כל אחד מאלה – סביבה, התנהגות, קוגניציה וגורמים אישיותיים – אינו משפיע בהכרח בו בזמן על הגורמים האחרים, והם אינם צריכים להתרחש בו בזמן כדי להשפיע זה על זה. תפיסת התלמיד את סביבתו, המכונה לעיתים קרובות "הקשר ספציפי", קשורה להכרה שאף שהאדם יכול להחזיק במגוון "יכולות" ספציפיות (כלומר פיתוח מיומנויות כמו כישורים חברתיים), הסביבה הפיזית או החברתית, סוג המשימה או תכונות המשימה (למשל קושי) משפיעים לעיתים קרובות על המיומנות הנבחרת או על המיומנויות של התלמיד בכלל (Bandura, 1986).

בשנים האחרונות נבדקה השפעת ההקשר החברתי והחיצוני על סביבות הוראה מתמטיות. נמצא כי תנאים סביבתיים הכוללים טיפוח מיומנויות אקדמיות לצד טיפוח מיומנויות מוטיבציוניות-רגשיות של הלומדים משפיעים על הישגיהם במתמטיקה (Kramarski & Michalsky, 2015; Peeters et al., 2013).

נשאלת אפוא השאלה: כיצד אפשר לטפח מיומנויות אלו בסביבת הלמידה המתמטית, וכך להעלות את ההישגים של תלמידים במתמטיקה?

סביבת למידה משולבת המטפחת SRL+SDT בשיעורי מתמטיקה

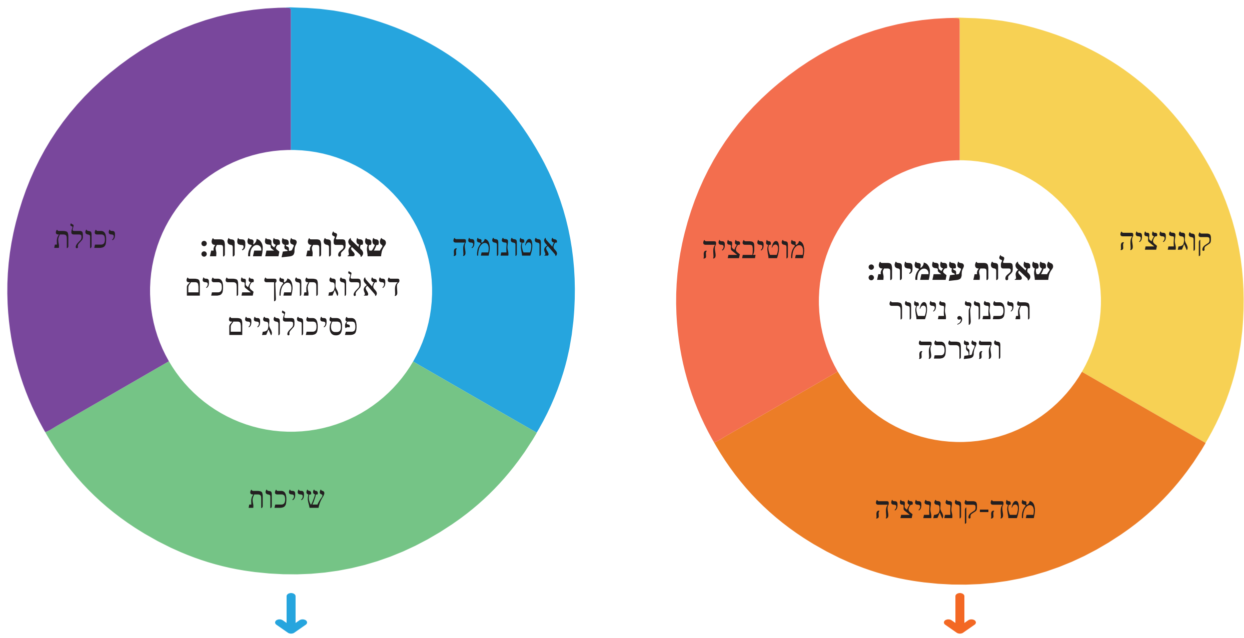
תאוריית ההכוונה העצמית בלמידה (SRL), מוגדרת תהליך מורכב, דינמי ומעגלי שבו תלמידים מציבים מטרות, מתכננים, מפקחים ומעריכים את עבודתם תוך בחינת שלושה מרכיבים: קוגניציה, מטה-קוגניציה ומוטיבציה ללמידה (Pintrich, 2000a, 2000b, 2000c; Winne, 2010; Zimmerman, 2000, 2008). אף על פי שיכולת הכוונה עצמית בלמידה בתוך מסגרות חינוכיות בקרב תלמידים עשויה להיות מושפעת מגורמי הקשר, אפשר לטפחה באמצעות יישום מיומנויות ללמידה-הוראה מתאימות בשלושת מרכיביה: מיומנויות קוגניטיביות, מיומנויות מטה-קוגניטיביות ומיומנויות מוטיבציוניות ללמידה (קולושי-מינסקר, 2008; Francom, 2010; Kolovelonis et al., 2010; Mevarech & Kramarski, 2014).

התאוריה על הכוונה עצמית (SDT) (Ryan & Deci, 2000a, 2000b) פותחה על בסיס גישת הפסיכולוגיה החיובית המדגישה את החשיבות של חיזוק המוטיבציה של הלומד באמצעות מילוי צרכיו הפסיכולוגיים הבסיסיים. זאת על בסיס האמונה כי לכל אדם יש נטיות טבעיות, מולדות ונבונות לפתח, לשכלל ולגבש את תחושת העצמי (Ryan & Deci, 2016). מרכיבי התאוריה כוללים שלושה צרכים פסיכולוגיים בסיסיים: תחושת אוטונומיה, תחושת שייכות ותחושת יכולת. לפי תאוריית ה-SDT, סביבות למידה המטפחות את שלושת הצרכים האלה של הלומדים מגבירות את המוטיבציה הפנימית שלהם ומעלות את תפיסת היכולת שלהם, דבר המביא לידי שינוי חיובי בהתנהגותם לאורך זמן (Halvari & Halvari, 2006; Simpson, 2008). על פי תאוריה זו לא די שתלמידים יחוו יכולת והצלחה במשימות מאתגרות, אלא חשוב שהם יראו בעצמם סוכנים (agents) של הצלחתם (עשור, 2004; קפלן, 2014; Azevedo, 2014).

הרציונל לשילוב הוא שמרכיבים אלה משלימים את עצמם בו בזמן בעת העיסוק במשימה מתמטית (Ryan, & Deci, 2016). לכן על מודל מיטבי להוראת המתמטיקה לשלב טיפוח של תפקודי הכוונה עצמית קוגניטיבית ומטה-קוגניטיבית בלמידה (SRL) עם סיפוק הצרכים הפסיכולוגיים הבסיסיים של התלמידים (SDT). בתרשים 2 מוצגים שני המודלים התאורטיים שלפיהם נבנו תוכניות ההתערבות לטיפוח הכוונה עצמית בעת פתרון בעיות מילוליות במחקר הנוכחי (פירוט השאלות העצמיות בתרשים 3):

טיפוח הכוונה עצמית בעת פתרון בעיות מילוליות

SRL טיפוח הכוונה קוגניטיבית-מטה-קוגנטיבית | **SDT טיפוח הכוונה מוטיבציונית-רגשית**



מרכיבי SRL (Zimmerman, 2008 Pintrich, 2000)	תכנון, ניטור והערכה (Kramarski & Mevarech, 2014)
טיפוח מיומנויות קוגניטיביות	קישור לידע קודם מיומנויות קוגניטיביות
טיפוח מיומנויות מטה-קוגניטיביות	בדיקה בקרה טיפוח
טיפוח מיומנויות מוטיבציוניות ללמידה	מוטיבציה פנימית מטה-קוגניטיביות ערך עצמי

מרכיבי SDT (Ryan & Deci, 2000)	דיאלוג תומך צרכים פסיכולוגיים (קפלן ועשור, 2003)
טיפוח תחושת אוטונומיה	בחירה עניין ומשמעות (רלוונטיות) חשיבה עצמאית
טיפוח תחושת שייכות	מסר של חיבה אכפתיות והערכה הקשבה וקבלת האחר
טיפוח תחושת יכולת	התמודדות מאמץ אתגר

תרשים 2: מודלים של תוכניות ההתערבות במחקר

שאלת המחקר והשערותיו

טרם ביצוע המחקר הנוכחי לא נערך מחקר מקיף הבוחן את הקשרים בין כל מרכיבי התאוריות של ההכוונה העצמית הקוגניטיבית ומטה-קוגניטיבית וההכוונה העצמית המוטיבציונית-רגשית (SRL ו-SDT) במחקר אחד ובקבוצת גיל אחת, לומדים צעירים בכיתות א'–ו'. על כן שאלת המחקר המרכזית הייתה מהם הקשרים בין תאוריות הכוונה עצמית SRL ו-SDT ומרכיביהן, והאם ובאיזו מידה הם תורמים להעלאת ההישגים בפתרון בעיות מילוליות מתמטיקה?

השערות המחקר

1. יימצאו קשרים בין שלושת המרכיבים של כל תאוריה לגורם העל שלה (תוקף מבנה).
2. יימצא קשר ביןSRL ל-SDT.
3. SRL יתרום תרומה ישירה להעלאת ההישגים בפתרון בעיות במתמטיקה.
4. SDT יימצא כמשתנה מְתַוֵּךְ להישגים דרך SRL (קשר עקיף).

השערות אלו נבדקו באמצעות מודל ניתוח משוואות מבניות (SEM).

שיטה

אוכלוסיית המחקר והמדגם

במחקר השתתפו 737 תלמידים צעירים בכיתות א'–ו' מבית ספר יסודי אחד, שנחשפו לשתי התאוריות SRL ו-SDT. התפלגות התלמידים לדרגות הכיתה הייתה זו: בשכבת כיתות א' יש 113 תלמידים (15.3%), בשכבת כיתות ב' יש 125 תלמידים (17%), בשכבת כיתות ג' יש 120 תלמידים (16.3%), בשכבת כיתות ד' יש 140 תלמידים (19%), בשכבת כיתות ה' יש 120 תלמידים (16.3%), בשכבת כיתות ו' יש 119 תלמידים (16.1%).

כלי המחקר

לפני ההתערבות ולאחריה הועברו מבחני הישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, שאלון לדיווח עצמי לבדיקת שימוש במיומנויות הכוונה עצמית (SRL ו-SDT) בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה:

1. **מבחן הישגים במתמטיקה** המותאם לדרגת הכיתה ולתוכנית הלימודים במתמטיקה ליסודי (משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006) (טווח הציונים: 0-100). את המבחנים כתבו עורכת המחקר בשיתוף עם מורות ורכזת המתמטיקה של בית הספר, מדריכת מתמטיקה מחוזית ומרצים באקדמיה להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי, תוך התבססות על תוכנית הלימודים במתמטיקה לפי תוכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי (משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006), מבחני מפמ"ר, מאמרים בתחום המתמטיקה שפורסמו בכתבי עת שפיטים וסקירת הספרות בתחום. המבחנים עברו שיפוט, אישור ותיקוף בידי שופטים מקצועיים.
2. **שאלון לבדיקת תפיסת ההכוונה העצמית בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה** - שאלון דיווח עצמי שבו התלמידים מדרגים את מידת יישום מיומנויות הכוונה עצמית SRL ו-SDT בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, בהתבסס על תוכניות ההתערבות של המחקר (תרשים 3). התלמידים התבקשו לדרג את מידת הסכמתם עם 18 היגדים בסולם בן עשר דרגות (מ-0 = כלל לא מסכים עד 10 = מסכים מאוד).

מרכיבי SRL (Zimmerman, 2008 Pintrich, 2000)	**תהליך פתרון בעיות מילוליות**	**תכנון, ניטור והערכה** (Kramarski & Mevarech, 2014)
טיפוח מיומנויות קוגניטיביות	היזכרות	לפני פתרון בעיה מילולית, באיזו מידה אני נזכר/ת בחוקים ובכללים שלמדנו?
	קישור לידע קודם	במהלך פתרון בעיה מילולית, באיזו מידה אני מזהה את סוג הבעיה, ונעזר/ת בייצוג מבנה הבעיה?
	ארגון מידע	באיזו מידה אני יודע/ת לפתור בעיה מילולית?
טיפוח מיומנויות מטה-קוגניטיביות	בדיקה	בסיום פתרון בעיה מילולית, באיזו מידה אני בודק/ת שפתרתי נכון והאם התשובה היא הגיונית?
	בקרה	בסיום פתרון בעיה מילולית, באיזו מידה אני עורך/ת בקרה שפתרתי נכון כל שלב בפתרון?
	השוואה	בסיום פתרון בעיה מילולית, באיזו מידה אני שואל/ת את עצמי במה הבעיה שפתרתי דומה או שונה לבעיות קודמות?
טיפוח מיומנויות מוטיבציוניות ללמידה	מוטיבציה פנימית	באיזו מידה אני בדרך-כלל מרוצה מדרך הפתרון שלי בפתרון בעיות מילוליות?
	מוטיבציה חיצונית	באיזו מידה אני מרגיש/ה שאני מסוגל/ת לפתור את הבעיה בדרכים אחרות שחברי כיתתי הציגו?
	ערך עצמי	באיזו מידה אני מרגיש/ה שאני מסוגל/ת לפתור בעיות מילוליות מאתגרות יותר?

מרכיבי SDT (Ryan & Deci, 2000)	תהליך פתרון בעיות מילוליות	שאלות עצמיות דיאלוג תומך צרכים פסיכולוגיים (קפלן ועשור, 2003)
טיפוח תחושת אוטונומיה	בחירה	באיזו מידה בשיעור אפשרו לי לבחור?
	עניין ומשמעות (רלוונטיות)	באיזו מידה הבעיה מעוררת בי עניין וקשורה לחיי היום יום שלי?
	חשיבה עצמאית	באיזו מידה אפשרו דרכי פתרון מגוונות?
טיפוח תחושת שייכות	מסר של חיבה	באיזו מידה התייחסו לרגשות שלי?
	אכפתיות והערכה	באיזו מידה העריכו את דרך פתרון הבעיה?
	הקשבה וקבלה	באיזו מידה הרגשתי ביטחון להציג?
טיפוח תחושת יכולת	התמודדות	באיזו מידה העבודה עם החברים סייעה?
	מאמץ	באיזו מידה אצליח בבעיות נוספות?
	אתגר	באיזו מידה אצליח בבעיות אתגר?

תרשים 3: שאלון תפיסת ההכוונה עצמית SRL ו-SDT בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, בהתבסס על תוכניות ההתערבות של המחקר (קולושי-מינסקר, 2017)

מרכיבי השאלונים - ניתוחי גורמים מגששים ומאששים

המיומנויות של כלי המחקר נבדקו באמצעות חישוב מקדם אלפא של קרונבך (Cronbach, 1951). כדי לבחון את תוקף התוכן והמבנה של השאלונים (כלומר את חלוקת המשתנים למרכיבים המוצגים בספרות התאורטית) התבצעה סדרה של ניתוחי גורמים מגששים ומאששים.

ראשית נערך **ניתוח גורמים מגשש** (exploratory) שבדק את מספר הגורמים שהתקבל מתוך נתוני התלמידים (ללא אילוץ של מודל תאורטי). הניתוח בוצע על כל אחד מהשאלונים בנפרד. המסקנה המרכזית הייתה שההיגדים שנבחרו (שלושה לכל אחד משלושת המרכיבים) לכל אחד מהשאלונים מתכנסים היטב לגורם העל ששויכו אליו – ממצאים המעידים על תוקף המבנה והתוכן של השאלונים. מהימנות אלפא של קרונבך של כל אחד מהגורמים נמצאה גבוהה (SRL– a=.85; SDT– a=.87).

בהמשך כדי לבחון את תוקף המבנה של כל שאלון והתאמת המודל התאורטי שנבנה לנתונים, בוצע ניתוח גורמים מאשש (confirmatory) לשני המדדים SRL ו-SDT ומרכיביהם. הניתוח בוצע באמצעות תוכנת AMOS 18.0. המודל התאורטי שהורץ כלל את שני המשתנים המרכזיים (גורמי העל) שהוגדרו משתנים לטנטיים SRL ו-SDT, ועל כל משתנה לטנטי נטענו מרכיביו (המשתנים האקסוגנים), כפי שעלו מהספרות שנסקרה: SRL: קוגניציה, מטה-קוגניציה ומוטיבציה ללמידה; SDT: אוטונומיה, שייכות ויכולת. בהמשך לבדיקת ההשערה על קשרי תיווך בין SDT לפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה באמצעות SRL, בוצע ניתוח נתיבים (ניתוח משוואות מבניות – structural equation modeling). ניתוח נתיבים מאפשר בדיקה של מערכת שלמה של משתנים והקשרים ביניהם בו בזמן ושיפור מהימנות הבדיקה באמצעות עיון במודל המדידה (measurement model) ובמודל המבני (structural model) בו בזמן.

השלב הראשון בניתוח משוואות מבניות הוא הערכת מודל המדידה והיא נעשית באמצעות בחינת מדדים המעידים על טיב ההתאמה של המודל. ארבעת המדדים x, 2, RMSEA = NFI ו-CFI משמשים לבחינת המודל המתאים ביותר לנתונים שנמדדו (Bentler & Bonett, 1980). ככל שערכי NFI ו-CFI מתקרבים ל-1 גדל טיב ההתאמה וככל שערך RMSEA נמוך (רצוי 0.05 או נמוך יותר) הוא מעיד על התאמה קרובה (Byrne, 2001).

תוכניות ההתערבות SRL-SDT לטיפוח הכוונה עצמית קוגניטיבית-רגשית (קולושי-מינסקר, 2017)

(ראה תרשימים 2 ו-3):

SRL – טיפוח הכוונה עצמית קוגניטיבית ומטה-קוגניטיבית – תוכנית זו הושתתה על מודל לולאת הכוונה עצמית בלמידה (Zimmerman, 2000) ומודל שלבי ההכוונה העצמית בלמידה (Pintrich, 2000a, 2000b) באמצעות אימון בשאילת שאלות עצמיות בכל שלבי פתרון הבעיה (ה.ש.ב.ב.ה.ה. בתוך Mevarech & Kramarski, 1997; נשר, 1976; סגל, 2002; קולושי-מינסקר, 2019).

SDT – טיפוח הכוונה עצמית מוטיבציונית-רגשית – תוכנית זו הושתתה על טיפוח הצרכים הפסיכולוגיים הבסיסיים: אוטונומיה, שייכות ויכולת (Ryan & Deci, 2000a, 2000b) באמצעות **דיאלוג תומך צרכים** (קפלן ועשור, 2004).

לטיפוח הכוונה עצמית בלמידה SRL בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה נבנו תרשימים ליניארים, שבעזרתם המורות והתלמידים נחשפו למרכיבי התאוריה, קוגניציה, מטה-קוגניציה ומוטיבציה ללמידה, וכן נעזרו בהם לצורך האימון המטה-קוגניטיבי, כלומר השאלות העצמיות שהתלמידים שאלו בעת פתרון בעיה מילולית, כדי לטפח כל מרכיב בתאוריה ובכך להצליח בפתרון הבעיות (ראה תרשימים 3, 4, 5). כמו כן נבנה סרגל לניתוח בעיות ולאפיונן (ראה תרשים 6).

לטיפוח הכוונה עצמית רגשית SDT בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה נבנה תרשים ליניארי, ובעזרתו המורות והתלמידים נחשפו למרכיבי התאוריה: אוטונומיה, שייכות ויכולת, וכן נעזרו בו במהלך השיעורים לשאלות עצמיות שהתלמידים שואלים בעת פתרון בעיה מילולית, כדי לטפח את הצרכים הפסיכולוגיים שלהם ובכך להצליח בפתרון הבעיות (ראה תרשימים 3, 7).

כן נבנו מודלים מעגליים של תוכניות ההתערבות – המתארים מבחינה מעגלית כיצד אפשר לטפח תפקודי הכוונה עצמית קוגניטיבית ומטה-קוגניטיבית והכוונה עצמית מוטיבציונית-רגשית בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, כך שכל מרכיב תומך בשאר המרכיבים ומעצים אותו, עד למצב של הגעה לדרגת תלמיד מומחה שמרגיש כי המרכיבים פועלים בו בזמן (תרשים 2).

ניתוח בעיה נתונה ואפיונה – קוגניציה: היזכרות, קישור לידע קיים וארגון מידע		
שלב 1 – חשיבה לפני: הבנת הבעיה ואפיונה **מה אני עושה לפני פתרון הבעיה?**	סוג הבעיה: חיבור/חיסור:	זיהוי הנעלם:
מה בבעיה?	הכללה	שלם/חלק
אפיון סוג הבעיה	רצף	שלם/חלק
(אחת מבין שבע האפשרויות או שילוב בין מספר סוגים)	השוואה	שלם/חלק
	כפל/חילוק:	
מהו סיפור הבעיה?	כפל	שלם
מהו הנעלם?	כפל חוקיות	שלם
מהם הנתונים המילוליים?	חילוק לחלקים	חלק
מהו סוג הבעיה?	חילוק להכלה	חלק
	השוואה	שלם/חלק
אפיון הבעיה כשגרתית או כחדשנית **האם כל המידע הנדרש לצורך הפתרון נמצא בבעיה בגלוי?**	רמת חשיבה: שגרתית	**מבנה** מסורתי ומוכר; המידע המתמטי **מוצג** במפורש ובגלוי
	חדשנית	**מבנה** מורכב ולא מוכר; המידע המתמטי אינו **מוצג** במפורש ובגלוי
שלב 2 – חשיבה במהלך: תכנון אסטרטגיית פתרון **מה אני עושה לפני פתרון הבעיה?** **מהי האסטרטגיה?** ייצוג הבעיה ייצוג מבנה הבעיה בסכמה/בציור/בדיאגרמה וכד' שיבוץ הנתונים המילוליים שיבוץ הנתונים המספריים מתוך כך: **כמה תרגילים צריך כדי לפתור את הבעיה?**	מורכבות הבעיה: חד שלבית דו-שלבית רב-שלבית	 תרגיל אחד שני תרגילים שלושה תרגילים ויותר

שלב 3 – פרוצדורה פתרון התרגיל – פרוצדורה	
מציאת הנעלם	הפעולה: סוג המספר: חיבור / חיסור מספרים טבעיים
מהם התרגיל/ים למציאת הנעלם?	כפל / חילוק שברים פשוטים/עשרוניים

פתרון הבעיה – קוגניציה	
כתיבת תשובה במילים **מהי התשובה במילים?**	ניסוח תשובה מלאה בהתאם למשפט השאלה (הנעלם)

בקרה – מטה-קוגניציה: בדיקת התכנון, בקרה והשוואה	
שלב 4 – חשיבה בסיום	
מה אני עושה בסיום פתרון הבעיה?	
האם כל שלב בדרך הפתרון נכון? בדיקה ובקרה	
במה הבעיה דומה/שונה מבעיות קודמות? השוואה	

הערכה – העלאת מוטיבציה ללמידה וערך עצמי	
שלב 5 – חשיבה רפלקטיבית-מוטיבציונית:	
כיצד אני מעריך את עצמי?	
האם אני מרוצה מדרך הפתרון שלי?	ערך עצמי
האם אפשר אחרת?	רצון
האם אני מסוגל/ת להתמודד עם בעיית אתגר?	אתגר

תרשים 4: מודל ליניארי – דף הדרכה למורים בתוכנית ההתערבות SRL לטיפוח הכוונה עצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה (קולושי-מינסקר, 2017)

אני שואל/ת את עצמי בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה		
חשיבה (קוגניציה)	מה אני עושה לפני הפתרון ובמהלכו	✓ מהו סיפור הבעיה?
		✓ מהו הנעלם?
		✓ מהם הנתונים המילוליים?
		✓ מהו סוג הבעיה?
		✓ מהו מבנה הבעיה? בעזרת בתרשים/בציור/בדיאגרמה/בטבלה וכד' ושיבוץ הנתונים המילוליים.
		✓ מהם הנתונים המספריים ושיבוצם בייצוג מבנה הבעיה?
		✓ מהו התרגיל/ים למציאת הנעלם?
		✓ מהי התשובה במילים? (בהתאם למשפט השאלה)
חשיבה על החשיבה (מטה-קוגניציה)	מה אני עושה בסיום הפתרון	✓ האם כל שלב בדרך הפתרון נכון?
		✓ במה הבעיה דומה ובמה היא שונה מבעיות קודמות שפתרתי?
רצון (מוטיבציה)	הערכה ורפלקציה	אנחנו מעריכים: • האם אני מרוצה מדרך הפתרון שלי?
		• האם אפשר אחרת?
		• האם אני מסוגל/ת להתמודד עם בעיית אתגר?

תרשים 5: מודל ליניארי – דף הדרכה לתלמידים בתוכנית ההתערבות SRL לטיפוח הכוונה עצמית בלמידה בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה (קולושי-מינסקר, 2017)

סרגל לניתוח בעיות מילוליות במתמטיקה ולאפיונן					
סוג הבעיה	**בעיות חיבור-חיסור**			**בעיות כפל-חילוק**	
	בעיית הכללה מצב סטטי	**בעיית רצף מצב דינמי**	**בעיית השוואה**	**בעיה בסיסית**	**בעיית השוואה**
מאפייני הבעיה	קבוצה כוללת קבוצה חלקית קבוצה חלקית	התחלה פעולה סוף	קבוצת הפרש קבוצה גדולה קבוצה קטנה	קבוצות פריטים בכל קבוצה פריטים בסך הכול	קבוצת יחס קבוצה גדולה קבוצה קטנה

הנעלם		**רמת חשיבה**		**מורכבות (שלבים)**			**סוג מספרים**	
בשלם	בחלק	שגרתית	חדשנית	חד	דו	רב	טבעיים	שברים

תרשים 6: כרטיס ניווט של סרגל לניתוח בעיות מילוליות במתמטיקה ולאפיונן (מחוון) (קולושי-מינסקר, 2017)

אני שואל/ת את עצמי בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה		
טיפוח תחושת אוטונומיה	**בחירה**	באיזו מידה בשיעור אפשרו לנו לבחור את הבעיה שבה נעסוק? באיזו מידה המורה אפשרה לנו לבחור את חברי הקבוצה?
	עניין ומשמעות (רלוונטיות)	באיזו מידה הבעיה מעוררת בנו עניין וקשורה לחיי היום-יום שלנו? באיזו מידה הצלחה בפתרון הבעיה תסייע לנו בעתיד בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה? באיזו מידה הצלחה בפתרון הבעיה תסייע לנו בחיי היום-יום?
	חשיבה עצמאית	באיזו מידה המורה והתלמידים אפשרו מגוון של דרכי פתרון לבעיה? באיזו מידה אפשרו לנו להביע את מחשבותינו ודעותינו בתהליך פתרון הבעיה?
טיפוח תחושת שייכות	**מסר חיבה**	באיזו מידה התייחסו לרגשות שלנו בפתרון הבעיה?
	אכפתיות והערכה	באיזו מידה העריכו את דרך פתרון הבעיה שלנו?
	הקשבה וקבלה	באיזו מידה הרגשנו ביטחון להציג את הפתרון שלנו לפני המורה והתלמידים?
טיפוח תחושת יכולת	**התמודדות עם קשיים**	באיזו מידה הצלחתי להתמודד עם הקושי בעזרת המורה והחברים? באיזו מידה העבודה עם החברים הקלה עלינו בפתרון הבעיות?
	מאמץ	באיזו מידה אנו חושבים שנצליח להתמודד עם בעיות דומות?
	אתגר	באיזו מידה אנו חושבים שנצליח להתמודד עם בעיות מאתגרות יותר?

תרשים 7: מודל ליניארי – דף הדרכה למורים ולתלמידים בתוכנית ההתערבות SDT לטיפוח הכוונה עצמית מוטיבציונית-רגשית (באמצעות טיפוח שלושת הצרכים הפסיכולוגיים הבסיסיים) בעת פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה (קולושי-מינסקר, 2017)

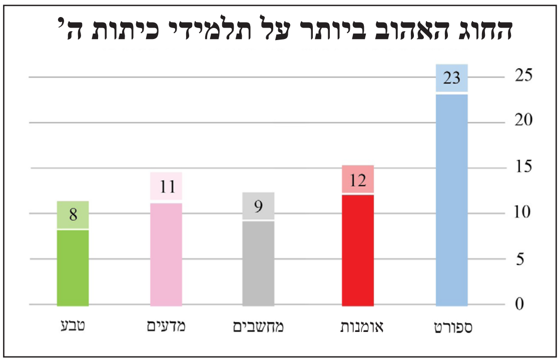
דוגמה לפתרון בעיה מילולית במתמטיקה בתוכנית ההתערבות SDT+SRL בכיתה ה'			
מרכיבי התאוריה		**שאלות לטיפוח הכוונה עצמית בעת פתרון בעיה**	**מהלך השיעור**
טיפוח תחושת אוטונומיה SDT	**דיאלוג על בחירה, עניין ורלוונטיות לחיי היום-היום.** **נוסף על כך, עידוד לחשיבה עצמאית**	• באיזו מידה בשיעור אפשרו לנו לבחור את הבעיה שבה נעסוק? • באיזו מידה המורה אפשרה לנו לבחור את חברי הקבוצה? • באיזו מידה הבעיה מעוררת בנו עניין וקשורה לחיי היום-יום שלנו? • באיזו מידה הצלחה בפתרון הבעיה תסייע לנו בעתיד בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה? • באיזו מידה הצלחה בפתרון הבעיה תסייע לנו בחיי היום-יום?	בחלק הראשון של השיעור, המורה הציגה את **משימת עריכת הסקר – שמטרתה החברתית היא היכרות מעמיקה יותר עם תלמידי השכבה ומטרתה הלימודית-מתמטית היא הבנת השלם והחלקים במספרים טבעיים ובשברים פשוטים.** נערך תיאום ציפיות והסכמה על כללי יסוד, נורמות וציפיות לשיח ועבודה בקבוצה. התלמידים בוחרים את חבריהם לקבוצה. אף תלמיד לא נשאר בלי קבוצה. במשימות אחרות הרכבי הקבוצות ישתנו. התלמידים דנים בקבוצה מהי שאלת הסקר שברצונם לבחור. התלמידים מסבירים לחבריהם מדוע בחרו בשאלת הסקר וכיצד היא חשובה להם.

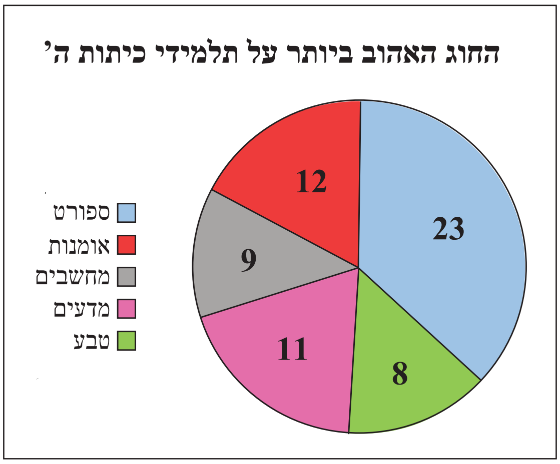
<table>
<tr><th colspan="4">דוגמה לפתרון בעיה מילולית במתמטיקה
בתוכנית ההתערבות SDT+SRL בכיתה ה'</th></tr>
<tr><th colspan="2">מרכיבי התאוריה</th><th>שאלות לטיפוח הכוונה עצמית בעת פתרון בעיה</th><th>מהלך השיעור</th></tr>
<tr>
<td>טיפוח מיומנויות קוגניטיביות מטה-קוגניטיביות ומוטיבציוניות בלמידה SRL</td>
<td>יישום מיומנויות לפני פתרון הבעיה, במהלכה ובסיומה</td>
<td>
• על מה הבעיה?
• מהו הנעלם?
• מהם הנתונים המילוליים?
• מהו סוג הבעיה?
• מהו מבנה הבעיה (הקשר בין הנתונים המילוליים למספריים)?
• האם פתרתי את כל השלבים נכון? האם הפתרון הגיוני?
• במה הבעיה דומה ובמה היא שונה מבעיות אחרות שפתרתי?
• האם אני מרוצה מדרך הפתרון שלי?
• האם אפשר לפתור בדרך אחרת?
• האם אני מסוגל/ת לפתור בעיות מאתגרות יותר?
</td>
<td>
כל קבוצה מעבדת את נתוני הסקר שלה ומייצגת אותם במגוון ייצוגים שבנו חבריה: דיאגרמת עמודות, טבלה, תרשים, ציור ועוד. התלמידים מנתחים שהסוג הבעיה היא הכללה – מצב סטטי שבו יש קבוצה כוללת וקבוצות חלקיות.

בכל ייצוג הם מראים את מבנה הבעיה, כלומר הקשר בין הנתונים המילוליים לנתונים המספרים, ובכך מנתחים את הבעיה ופותרים אותה.

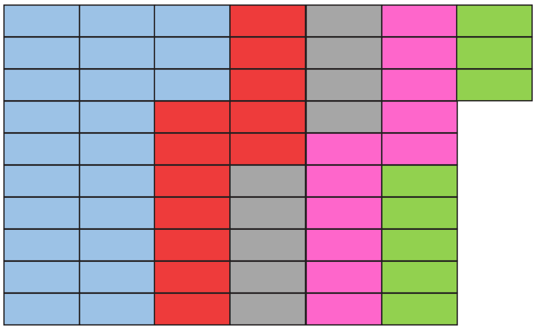
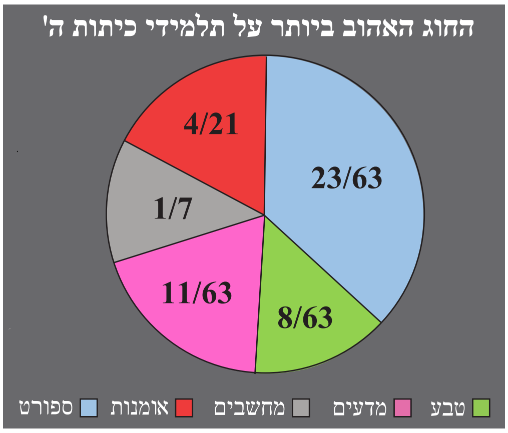
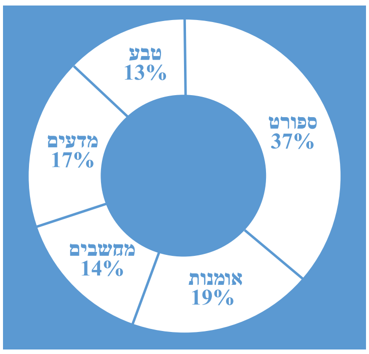
דוגמה לסקר בנושא: החלק האהוב ביותר על תלמידי כיתות ה'.

המורה מבקשת לייצג את הבעיה באקסל. כל תלמיד או זוג מעצבים כרצונם את הייצוגים, לאחר מכן מעבירים לדף WORD והמורה מדפיסה את התוצרים ותולה בכיתה.

<table>
<tr><th>ספורט</th><th>אומנות</th><th>מחשבים</th><th>מדעים</th><th>טבע</th></tr>
<tr><td>23/63</td><td>4/21</td><td>1/7</td><td>11/63</td><td>8/63</td></tr>
</table>




</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">דוגמה לפתרון בעיה מילולית במתמטיקה
בתוכנית ההתערבות SDT+SRL בכיתה ה'</th></tr>
<tr><th colspan="2">מרכיבי התאוריה</th><th>שאלות לטיפוח הכוונה עצמית בעת פתרון בעיה</th><th>מהלך השיעור</th></tr>
<tr><td rowspan="3">טיפוח מיומנויות קוגניטיביות -מטה-קוגניטיביות ומוטיבציוניות בלמידה SRL</td><td rowspan="3">יישום מיומנויות לפני פתרון הבעיה, במהלך פתרון הבעיה ובסיום פתרון הבעיה</td><td>• האם אפשר לפתור בדרך אחרת?</td><td>יש ביטוי לתלמידים שחושבים להציג את הנתונים בדרך מתמטית אחרת.
</td></tr>
<tr><td>• האם אני מסוגל/ת לפתור בעיות מאתגרות יותר?</td><td>בסיום המורה מאתגרת ומבקשת לכתוב את הנתונים המספריים גם בשברים פשוטים. כל תלמיד מעצב לפי רצונו את הייצוג.

</td></tr>
<tr><td>• האם אני מסוגל/ת לפתור בעיות ברמת כיתה גבוהה יותר?
• מה דומה ומה שונה בבעיות המאתגרות לעומת הבעיות השגרתיות?
• אלו מיומנויות מתמטיות נוספות עליי לרכוש כדי להצליח לפתור בעיות מאתגרות או בעיות משכבת גיל גבוהה יותר?</td><td>תלמידים מצטיינים יכולים להמיר את התוצאות לאחוזים ובכך לתת ביטוי לחשיבה המתמטית הגבוהה שלהם.

</td></tr>
<tr><td>טיפוח תחושת אוטונומיה SDT</td><td>דיאלוג לחשיבה עצמאית</td><td>• באיזו מידה המורה והתלמידים אפשרו מגוון של דרכי פתרון?
• באיזו מידה אפשרו לנו להביע את מחשבותינו ודעותינו?</td><td rowspan="2">המורה מאפשרת לתלמידים מסגרת זמן ומרחב חופשי לעבור בין הסקרים ולתת משוב בונה על פי הקריטריונים שלמדו.
אחת השאלות שעליהן מושם דגש, היא מה אפשר לעשות על פי נתוני הסקר. בדוגמה הנוכחית, שהנושא בה הוא "מהו החוג האהוב ביותר עליכם", התלמידים יכולים ליצור קבוצות עניין של תלמידים, שלא בהכרח מכירים זה את זה או נמצאים בקשר חברי. נוסף על כך, אפשר להעלות מופע כישרונות של כל קבוצה, אפשר ליצור יום פעילות וכל קבוצה תפעיל תחנה וכדומה.</td></tr>
<tr><td>טיפוח תחושת השייכות SDT</td><td>דיאלוג לחיבה, אכפתיות וקבלה</td><td>• באיזו מידה התייחסו לרגשות שלנו?
• באיזו מידה העריכו את דרך פתרון הבעיה שלנו?</td></tr>
</table>

דוגמה לפתרון בעיה מילולית במתמטיקה בתוכנית ההתערבות SDT+SRL בכיתה ה'			
מרכיבי התאוריה		**שאלות לטיפוח הכוונה עצמית בעת פתרון בעיה**	**מהלך השיעור**
טיפוח תחושת היכולת SDT	**דיאלוג התמודדות עם קשיים מאמץ ואתגר**	• באיזו מידה העבודה עם החברים הקלה עלינו בפתרון הבעיות? • באיזו מידה אנו חושבים שנצליח להתמודד עם בעיות דומות? • באיזו מידה אנו חושבים שנצליח להתמודד עם בעיות מאתגרות יותר?	**בסיום פתרון משימת הסקר**, כלומר סיכום השלם והחלקים במספרים טבעיים ובשברים פשוטים, התלמידים מוודאים שכולם הבינו את החומר.
SRL +SDT	**Skills + Will**	• באיזו מידה אני משתמש/ת בכל המיומנויות שרכשתי כדי לפתור את הבעיות? • באיזו מידה אני נעזר/ת במורה ובחבריי לכיתה כדי להבין את הבעיות טוב יותר ולהצליח בפתרונן?	בסיום העיסוק בסקרים, המורה נותנת לכל תלמיד להתמודד לבד עם בעיות מילוליות דומות מספרים. היא מעודדת לבקש עזרה ממנה ומשאר התלמידים בעת קושי כדי שכל תלמיד יגיע להבנה מלאה ולפתרון הבעיות. התלמידים שמחים לסייע זה לזה.

תרשים 8: דוגמה של פתרון בעיות מילוליות בכיתה ה' בתוכנית ההתערבות SDT+SRL

ממצאים

השערה 1: מתאמים בקרב מרכיבי המשתנים - בדיקות תוקף מבנה

המתאמים בין גורם העל SRL לשלושת מרכיביו נמצאו חיוביים, גבוהים מאוד ומובהקים (טווח המתאמים: $r = .86 - r = .85$). כמו כן המתאמים בין גורם העל SDT לשלושת מרכיביו נמצאו חיוביים, בינוניים ומובהקים (טווח המתאמים: $r = .57 - r = .51$). ממצאים אלה מעידים על תוקף המבנה ותוקף מתכנס של SRL ו-SDT. ***לפיכך השערה 1 אוששה.***

השערה 2: מתאמים בין המשתנים SRL ל-SDT

המתאם בין SRL ל-SDT נמצא חיובי, בינוני עד גבוה ומובהק ($r = .62, p < .001$). בניתוח נתיבים עלה כי במודל הכולל, הקשר בין שני משתנים אלו חיובי, גבוה מאוד ומובהק ($\beta = .93, p < .001$). ממצאים המעיד על קשר בין שני גורמי על אלה; ***לפיכך השערה 2 אוששה.***

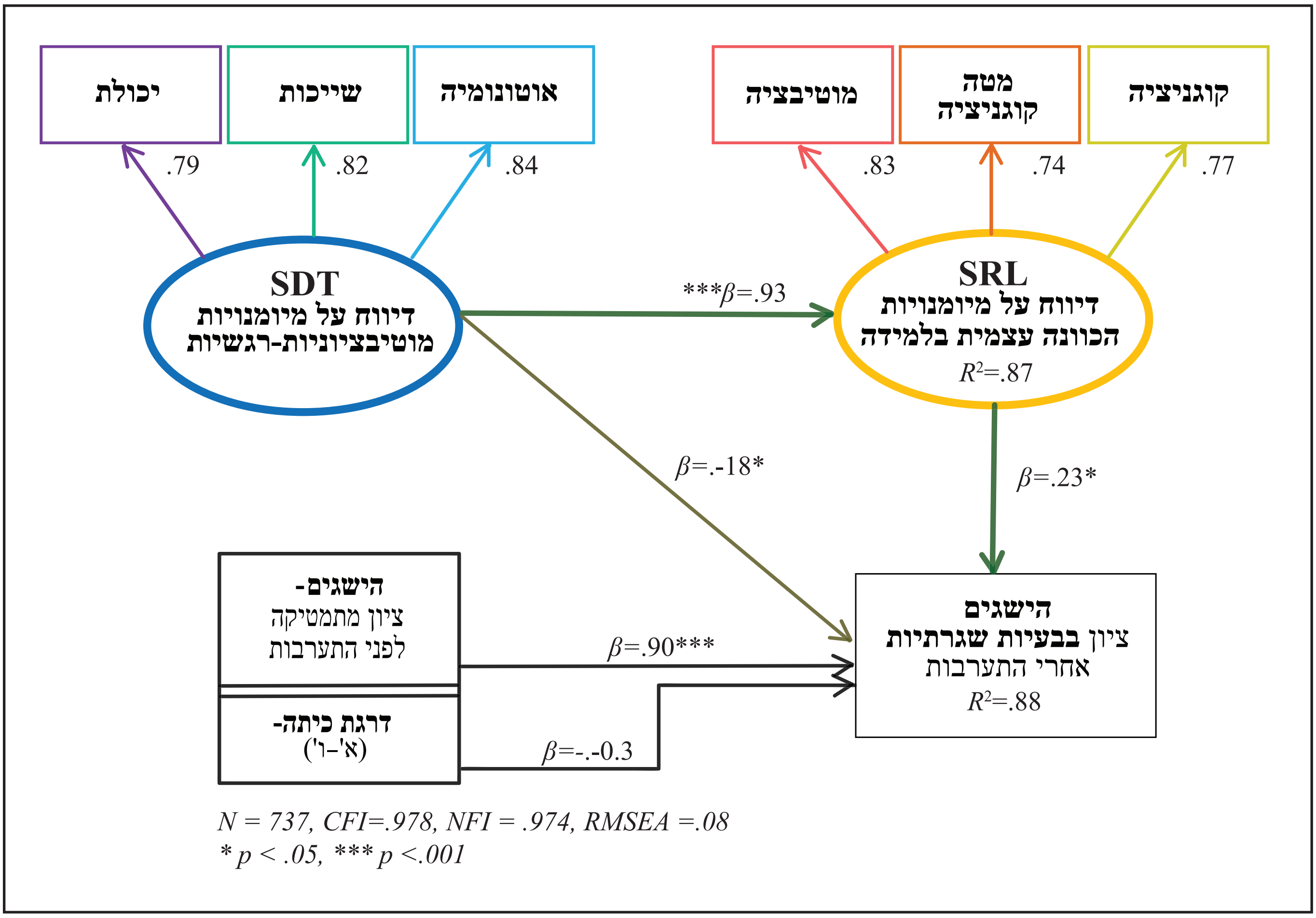
השערה 3: SRL יתרום במישרין להעלאת ההישגים בפתרון בעיות במתמטיקה

על פי הספרות התאורטית שנסקרה והמתאמים שהוצגו, הורצה סדרה של ניתוחי משוואות מבניות (SEM) שמטרתן לבחון ולאשש את המודל המושגי התאורטי של המחקר על בסיס הנתונים האמפיריים שנאספו בקרב 737 התלמידים. לשם כך נבנה מודל נתיבים ראשון לבחינת הקשרים בין מרכיבי התאוריות ולבחינת המודל התאורטי שהוצע (תרשים 4), ולפיו SDT משפיע על SRL, שבתורו משפיע על ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. בהמשך נבנה מודל נתיבים שני שבו הוחלף הקשר הדו-כיווני (↔) של SRL עם SDT לקשר חד-כיווני (SDT→SRL), כדי לבחון קשרי תיווך בין SDT לציון במתמטיקה בתיווך של SRL (השערה 3). בהמשך הורץ מודל נתיבים שלישי שבו הציון במתמטיקה מנוכה לאחר פיקוח סטטיסטי על דרגת כיתה (א'–ו') ועל הציון במתמטיקה לפני ההתערבות (כלומר החשיפה לתאוריות הכוונה עצמית SRL ו-SDT). ***השערה 3 אוששה.*** נמצא כי המשתנה SRL תורם תרומה ישירה וחיובית ($\beta = .23, p < .05$) על העלאה של ההישגים בפתרון בעיות במתמטיקה.

השערה 4: SDT יימצא כמשתנה מְתַוֵּךְ להישגים דרך SRL (קשר עקיף)

נמצא כי הקשר בין SDT להצלחה בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה מְתֻוָּךְ באמצעות SRL; כלומר קשר חיובי חזק נמצא בין SDT ל-SRL ($\beta = .93, p < .001$) ובהמשך – קשר חיובי חזק נמצא בין SRL להצלחה בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה ($\beta = .23, p < .05$), זאת במודל המלא הכולל ניכוי של דרגת כיתה ושל ציון ההישגים במתמטיקה לפני ההתערבות. יתר על כן, בפיקוח על ההישגים במתמטיקה לפני ההתערבות ודרגת הכיתה – SDT קשור בקשר ישיר, שלילי אך חלש עם ההישגים במתמטיקה אחרי ההתערבות (ממצא המחזק את המסקנה כי משתנה ה-SDT מְתַוֵּךְ כמשוער באמצעות SRL). לפיכך ***השערה 4 אוששה.***

בתרשים 9 מוצג מודל הנתיבים המלא – תפיסת ההכוונה העצמית של התלמידים על ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה:



תרשים 9: מודל נתיבים להסבר השונות בהישגים במתמטיקה (אחרי ההתערבות) באמצעות SDT ו-SRL בפיקוח על דרגת כיתה וציון במתמטיקה לפני ההתערבות) (קולושי-מינסקר, 2017)

דיון ותרומת המחקר

סקירת ספרות תאורטית ואמפירית ענפה ותוצאות מחקר חלוץ של תוכנית ההתערבות המשולבת SRL+SDT (קולושי-מינסקר, 2017) מחזקים מודלים תאורטיים להכוונה עצמית ותוצאות מחקרים התערבותיים בתחום זה (Mega et al., 2014), המביאים לידי מסקנה כי על מודל מיטבי להוראה פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה בקרב לומדים צעירים בכיתות א'–ו' לשלב בסביבת הלמידה המתמטית, טיפוח של תפקודי הכוונה עצמית קוגניטיבית ומטה-קוגניטיבית ומוטיבציונית בלמידה באמצעות SRL, עם טיפוח תפקודי הכוונה עצמית מוטיבציונית-רגשית, באמצעות סיפוק הצרכים הפסיכולוגיים הבסיסיים: אוטונומיה, שייכות ויכולת SDT.

מטרת תוכנית סינרגטית זאת ליצור סינתזה קוגניטיבית ומטה-קוגניטיבית ומוטיבציונית-רגשית בקרב התלמידים באמצעות שילוב של יכולות (skills) עם רצון (will). אפשר להסיק מהמחקר הנוכחי כי בין SRL לבין SDT קיים לא רק קשר חיובי וחזק אלא גם דו-כיווני; כאשר סביבת הלמידה מעניקה לתלמידים מרחב להכוונה עצמית בלמידה באמצעות טיפוח מיומנויות קוגניטיביות ומטה-קוגניטיביות ומיומנויות מוטיבציוניות ללמידה, התלמידים שולטים בשלבי הפתרון באמצעות שאלות עצמיות ליישום הידע שרכשו, מבקרים את תוצריהם ומפקחים על התקדמותם. כאשר גם נתקלים בקושי או באתגר, הם נעזרים במיומנויות מוטיבציוניות-רגשיות, למשל נעזרים בחבריהם או במורתם או מרגישים יכולת לחקור בעצמם את הקושי ולהתמודד עימו. לפיכך תחושת היכולת שלהם מועצמת וגם המוטיבציה שלהם ללמידה. אלו בתורן – יגבירו את יכולתם ליישם את המיומנויות הקוגניטיביות והמטה-קוגניטיביות שרכשו.

בהיזון חוזר, ככל שהצרכים הפסיכולוגיים הבסיסיים של התלמידים מסופקים, כלומר הם תלמידים פעילים בלמידה, הלמידה מהותית ורלוונטית עבורם (אוטונומיה), הם חווים חוויות של למידה שיתופית ורואים בעצמם חלק מקבוצת הלומדים (שייכות), כך עולה תחושת היכולת שלהם וביטחונם להעמיק בלמידה, להרחיב את ידיעותיהם, לשנות אסטרטגיה להגעה לפתרון וכדומה (Winne, 2010).

כך נוצר מעגל של תפקודי ההכוונה העצמית בלמידה, המעצימים ומשלימים זה את זה, ומשפרים את ההישגים במתמטיקה בכלל ובפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה בפרט (Azevedo & Cromley, 2004; De Corte et al., 2011; Ryan & Deci ,2000; Kaplan & Assor, 2012; Martinek & Kipman, 2016; Weinstein et al., 2013).

בספרות המחקר יש הסכמה שהגישה של התלמידים כלפי מתמטיקה תלויה בסביבת הלמידה שלהם בבית הספר, שמשפיעה על ההבנה המתמטית שהם מפתחים ועל היכולת שלהם להשתמש בידע המתמטי שלהם הן במשימות אקדמיות הן בחיי היום-יום (NCTM, 2006; OECD-PISA, 2013).

לכן אחד העקרונות החשובים בחינוך הוא פיתוח לומד בעל הכוונה עצמית, אשר אקטיבי בלמידתו, חוקר ושואל שאלות, שולט בתהליך הלמידה שלו ומודע לתהליכי החשיבה שלו ואסטרטגיות הפתרון שלו (Silver, 1994). כפי שהוצג במאמר הנוכחי, מחקרים רבים מצביעים על קשר בין תהליכי הכוונה עצמית של תלמידים לבין הישגיהם האקדמיים (לדוגמה Schoenfeld, 2002; Zimmerman & Schunk, 2011). אולם למרות העיסוק הנרחב בחשיבותה של ההכוונה העצמית ללמידה, עדיין "תלמידים רבים חווים קשיים בלימודים, מכיוון שהם כל הזמן מתמקדים בזכירת התוכן הנלמד ללא למידה מוקדמת של הקשרים השכליים שנחוצים לתמוך במאמץ. כדי שתלמידים יתפקדו באופן אינטליגנטי, על המורים לפתח כשרים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים נוסף להשפעה החיובית של רגשות, עמדות והנעה" (Hartman, 2001, p. 43).

בעניין מתמטיקה לרוב התלמידים עם קשיים בתחום המתמטיקה ישנם חסכים חמורים מכל מיני היבטים של הכוונה עצמית בנטייה מתמטית, וליתר דיוק, במיומנויות המטה-קוגניטיביות והמטה-בחירתיות (De-Corte et al., 2011; De-Corte et al., 2000). נוסף על כך, הם מושפעים מאמונות נאיביות ולא נכונות על אודות מתמטיקה, למידה מתמטית ופתרון בעיות שאינם מאפשרים התפתחות של מיומנויות של הכוונה עצמית. לכן נודעת חשיבות רבה לטיפוח הכוונה עצמית בתפיסה החדשה והשכיחה של מתמטיקה בבתי הספר; כלומר כיעד עיקרי בחינוך מתמטי מצד אחד, וכמאפיין חיוני של למידה מתמטית אפקטיבית מצד אחר.

על פי תפיסות חינוכיות אלו למחקר הנוכחי תרומות בשלושה שדות: תרומות לתאוריה, תרומות מתודולוגיות ותרומות יישומיות.

התרומה התאורטית של המחקר היא ביסוס הקשרים שבין תאוריות של הכוונה עצמית SRL ו-SDT ומרכיביהן, ביניהן ובין הישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה בקרב תלמידים בבית הספר היסודי. טרם התבצע מחקר כזה הבוחן את הקשרים בין תפיסת הכוונה עצמית של תלמידים צעירים בכיתות א'–ו' ובין הישגיהם במתמטיקה. **התרומה המתודולוגית** של המחקר טמונה בכלי ההערכה שנבנו, עובדו ותוקפו על רקע המחקר: מבחני הישגים במתמטיקה לתלמידי כיתות א'–ו'; שאלוני דיווח עצמי לבדיקת ההשפעה של תוכנית ההתערבות המשולבת (SDT+SRL) על ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. לממצאי המחקר הנוכחי ומסקנותיו יש השפעה ניכרת על שדה החינוך וההוראה. **התרומה היישומית** היא תוכנית ההתערבות המשולבת לשיפור ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה באמצעות טיפוח מיומנויות הכוונה עצמית. כדי שמורים יהיו מודעים להבנה העכשווית של תלמידיהם, התלמידים חייבים להיות מעורבים בלמידה, להשתתף בה, להתוות בשיתוף עם המורים את ההבניה שלה ולהביע את רגשותיהם ומחשבותיהם (Ryan et al., 2016). כמו כן תוכנית ההתערבות המוצעת במחקר זה עשויה לסייע להעלאת ההישגים בתחומי דעת נוספים ובקרב אוכלוסיות תלמידים נוספות, וכן ללמד תלמידים לייעל את הכישורים בהכוונה עצמית לצורך יישום ממשי של למידתם.

במחקרי המשך מומלץ לבחון את השפעת התוכנית המשולבת SRL+SDT על הישגים כוללים במתמטיקה, בכיתות ז'–י"ב, ובקרב תלמידים בכל מיני רמות של הישגים במתמטיקה (מצטיינים, בינוניים ומתקשים). עוד מוצע כי כדי לתת פרספקטיבה רחבה ומתוקפת יותר של הממצאים, חשוב שבעתיד מחקרים יכללו גם גישות חקר משולבות של mixed methods (כמותיות ואיכותניות) ושיטות מדידה אחרות, כמו תיעוד עצמי ביומן רפלקטיבי ואמצעי הערכה אותנטיים שבאמצעותם אפשר לנתח את תהליכי ההכוונה העצמית בזמן אמת. נוסף לתצפיות בכיתה באמצעות כלי תצפית ייחודיים שייבנו לצורך כך, ופתרון בעיות בקול שמאפשרות מעקב אחר תהליך החשיבה (כגון ניתוח שיח – discourse analysis – בין זוגות ובקרב קבוצות תלמידים, תיעוד מוסרט של שיעורי מתמטיקה וכדומה).

> *"If I had an hour to solve a problem and my life depended on the solution, I would spend the first 55 minutes determining the proper question to ask, For once I know the proper question, I could solve the problem in less than five minutes."*
>
> **Albert Einstein (1879-1955)**

רשימת מקורות

הרשקוביץ, ש' (2014). **האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי.** מטח – המרכז לטכנולוגיה חינוכית.

משרד החינוך, התרבות והספורט. (2006). תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים.

נשר, פ' (1976). שלושה מרכיבי קושי של שאלה מילולית במתמטיקה. **עיונים בחינוך, 10**, 131-144.

סגל, ד' (2002). **אחת ולתלמיד**. ירושלים: ארץ.

עשור, א' (2004). בית ספר מצמיח: בית ספר התומך בצרכים נפשיים ומקדם קשב לעצמי ולאחר. בתוך ר' אבירם (עורך), **בית הספר העתידני: מסע מחקר לעתיד החינוך** (עמ' 165-210). מסדה.

קולושי-מינסקר, ע' (2008). **פתרון בעיות מילוליות בחשבון ברמת רכישה ובסוגי העברה (קרובה ורחוקה) תוך פיתוח יכולות להכוונה עצמית בלמידה בקרב תלמידי כתות ג' בעלי רמות הישגים שונות** [עבודת מוסמך]. אוניברסיטת בר-אילן.

קולושי-מינסקר, ע' (2017). **מודל טיפוח הכוונה עצמית בלמידה וצרכים פסיכולוגיים: אוטונומיה, שייכות ויכולת, להעלאת הישגים בפתרון בעיות במתמטיקה** [עבודת דוקטור]. אוניברסיטת בר-אילן.

קולושי-מינסקר, ע' (2019). טיפוח הכוונה עצמית בלמידה להעלאת ההישגים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה בקרב תלמידי כיתות ג'. **מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 7**, 117-128.

קפלן, ח' (2014). הכוונה עצמית ומוטיבציה. **לקסי-קיי, 2**, 15-17.

קפלן, א' ועשור, א' (2004). דיאלוג תומך צרכים פסיכולוגים בין מורים ותלמידים כמקדם רווחה נפשית בבית הספר: המשגה ותוכנית יישומית. **הייעוץ החינוכי, 13**, 161-188.

Azevedo, R. (2014). Issues in dealing with sequential and temporal characteristics of self- and socially-regulated learning. *Metacognition and Learning, 9*, 217-228. https://doi.org/10.1007/s11409-014-9123-1

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory.* Prentice-Hall.

De Corte, E., Depaepe, F., Op' t Eynde, P., & Verschaffel, L. (2011). Students' self-regulation of emotions in mathematics: An analysis of meta-emotional knowledge and skills. *ZDM, 43*(4), 483-495. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0333-6

De Corte, E., Verschaffel, L., & Eynde, P. O. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 687-726). Academic Press.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Eynde, P. O. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 687-726). Academic Press.

Francom, G. M. (2010). Teach me how to learn: Principles for fostering students' self-directed learning skills. *International Journal of Self-Directed Learning, 7*(1), 29-44.

Halvari, A. E., & Halvari, H. (2006). Motivational predictors of change in oral health: An experimental test of self-determination theory. *Motivation and Emotion, 30*(4), 295-306. https://doi.org/10.1007/s11031-006-9035-8

Hartman, H. J. (2001). Developing students' metacognitive knowledge and skills. In H. J. Hartman (Ed.), *Metacognition in learning and instruction: Theory, research and practice* (pp. 33-68). Kluwer Academic Publisher.

Kaplan, H, & Assor, A. (2012). Enhancing autonomy -supportive I-Thou dialogue in schools: Conceptualization and socio-emotional effects of an intervention program . *Social Psychology of Education, 15*(2), 251-269. https://doi.org/10.1007/s11218-012-9178-2

Kolovelonis, A., Goudas, M., & Dermitzaki, I. (2010). Self-regulated learning of a motor skill through emulation and self-control levels in a physical education setting. *Journal of Applied Sport Psychology, 22*(2), 198-212. https://doi.org/10.1080/10413201003664681

Kramarski, B. (2018). Teachers as agents in promoting students' SRL and performance. In D. H. Schunk & J. A. Greene (Eds.), *Handbook of self-regulation of learning and performance* (2nd ed., pp. 223-239). Routledge

Kramarski, B., & Michalsky, T. (2015). Effects of a TPCK-SRL model on teachers' pedagogical beliefs, self-efficacy and technology-based lesson design. In C. Angelie & N. Valanides (Eds.), *Technological pedagogical content knowledge: Exploring, developing, and assessing TPCK* (pp. 89-112). Springer.

Kramarski, B., Weisse, I., & Kololshi-Minsker, I. (2010). How can self-regulated learning support the problem solving of third-grade students with mathematics anxiety? *ZDM, 42*(2), 179-193. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0202-8

Martinek, D., & Kipman, U. (2016). Self-determination, self-¬efficacy and self-regulation in school: A Longitudinal Intervention study with primary school pupils. *Sociology Study*, 6(2), 124-133. https://doi.org/10.17265/2159-5526/2016.02.005

Mega, C., Ronconi, L., & De Beni, R., (2014). What makes a good student? How emotions, self-regulated learning and motivation contribute to academic achievement. *Journal of Educational Psychology, 106*(1), 121-131. https://doi.org/10.1037/a0033546

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (1997). IMPROVE: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. American *Educational Research Journal, 34*, 365-394. https://doi.org/10.3102/00028312034002365

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2014). *Critical Maths for innovative societies: The role of metacognitive pedagogies*. OECD publishing. https://doi.org/10.1787/9789264223561-en

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). TIMSS 2015. *International results in mathematics.* IEA. http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/

motivation at schools (2nd ed., pp. 96-119). Routledge.

Ryan, R. M., & Deci, E. R. (2000b). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development and well-being. *American Psychologist, 55*(1), 68-78. https://doi.org/10.1037/0003-066X.55.1.68

Ryan, R. M., Deci, E. L., & Vansteenkiste, M. (2016). Autonomy and autonomy disturbances in self-development and psychopathology: Research on motivation, attachment, and clinical process. In D. Cicchetti (Ed.), *Developmental psychopathology* (3rd ed., Vol. 1, pp. 385-438). John Wiley & Sons Inc.

Schoenfeld, A. H. (2002). Research methods in (mathematics) education. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 435-488). Erlbaum.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing.*For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Simpson, L. E. (2008). *Self-determination in theclassroom* [Master's thesis]. New England College.

Weinstein, N., Przybylski, A. K., & Ryan R. M. (2013). The integrative process: New research and future directions. *Current Directions in Psychological Science, 22*(1), 69-74. https://doi.org/10.1177/0963721412468001

Winne, P. H. (2010). Improving measurements of self-regulated learning. *Educational Psychologist, 45*(4), 267-276. https://doi.org/10.1080/00461520.2010.517150

Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation:A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13-39). Academic Press.

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical back-ground, methodological development, and future prospects. *American Educational Research Journal, 45*(1), 166-183. https://doi.org/10.3102/0002831207312909

Zimmerman, B. J., & Schunk, D. H. (Eds.). (2011). *Handbook of self-regulation of learning and performance*. Routledge.

wp-content/uploads/filebase/full%20pdfs/T15-International-Results-in-Mathematics.pdf National Council of Teachers of Mathematics. (2006).Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence. *Teaching Children Mathematics*, *13*(3), 159. https://www.nctm.org/Publications/teaching-children-mathematics/2006/Vol13/Issue3/Curriculum-Focal-Points-for-Pre-K%e2%80%93Grade-8-Mathematics_-A-Quest-for-Coherence/

OECD-PISA. (2013). PISA 2015 *draft collaborative problem solving assessment framework*. https://www.oecd.org/callsfortenders/Annex%20ID_PISA%202015%20Collaborative%20Problem%20Solving%20Framework%20.pdf

Peeters, E., De Backer, F., Reina, V. R., Kindekens, A., Buffel, T., & Lombaerts, K. (2013). The role of teachers' self-regulatory capacities in the implementation of self-regulated learning practices. *Procedia – Social and Behavioral Sciences,* 116, 1963-1970. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.504

Pintrich, P. R. (2000a). An achievement goal theory perspective on issues in motivation terminology, theory and research. *Contemporary Educational Psychology, 25*(1), 92-104. https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1017

Pintrich, P. R. (2000b). Multiple goals, multiple pathways: The role of goal orientation in learning and achievement. *Journal of Educational Psychology, 92*(3), 544-555. https://doi.org/10.1037/0022-0663.92.3.544

Pintrich, P. R. (2000c). The role of goal orientation in self-regulated learning. In M. Boekarets, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 451-502). Academic Press.

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000a). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist, 55*(1), 68-78. https://doi.org/10.1037/0003-066X.55.1.68

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2016). Facilitating andhindering motivation, learning, and well-being in schools: Research and observations from self-determination theory. In K. R. Wentzel & D. B. Miele (Eds.), *Handbook on*

תופעות מתמטיות בטבע ושילובן בהוראת המקצוע בתיכון מנקודת מבט של מורים למתמטיקה

שירלי מידז'נסקי
דוד מלמד

ד"ר שירלי מידז'נסקי
מרצה בכירה בפקולטה ללימודים מתקדמים בתוכנית לתואר שני בהוראת מתמטיקה ומדעים ובתוכנית מוסמך בהוראה, המכללה האקדמית אורנים. בוגרת תואר ראשון ומסלול ישיר לדוקטורט מהטכניון. תחומי העניין שלה כוללים חינוך מדעי ומתמטי, חינוך מחוננים, הערכה, מטה-קוגניציה, מדעי המוח ולמידה, מחקרי פעולה והתפתחות מקצועית של מורים ומרחבי למידה חדשניים.

מר דוד מלמד
מורה ורכז מתמטיקה, בעל ניסיון בחינוך מתמטי לאוכלוסייה הכללית ולחינוך המיוחד. בעל תואר שני בחינוך מתמטי מהמכללה האקדמית אורנים ובעל תואר ראשון בכלכלה וסטטיסטיקה מאוניברסיטת חיפה.

תקציר

המחקר עוסק בתפיסות מורים למתמטיקה כלפי תופעות מתמטיות בטבע ושילובן בהוראת המקצוע בתיכון. המתמטיקה נמצאת סביבנו כל הזמן, אך לרוב אין אנו מקשרים בינה לתופעה מסוימת בטבע. הוראה אינטגרטיבית המשלבת שני תחומי דעת או יותר מאפשרת חשיפה אותנטית למציאות הסובבת אותנו. למשל שילוב בין מתמטיקה למדעים מאפשר מתן הסבר לתופעות טבע מוכרות וכאלה שמוכרות פחות לתלמידים. עם זה הוראה זו אינה שכיחה בבתי הספר העל-יסודיים בישראל ומורים מתמקדים בהוראה מכוונת להצלחה בבחינות הבגרות. המחקר הנוכחי נערך בגישה האיכותנית וכלל ראיונות חצי מובנים עם 24 מורים למתמטיקה.

ממצאי המחקר מעידים כי מורים רואים במתמטיקה כלי להתמודדות בחיים ומכירים בחשיבותה של הוראה אינטגרטיבית בכלל ושל מתמטיקה ומדעים בפרט, אך ממעטים ללמד כך. כמה מהסיבות לכך קשורות להעדר ידע וקשר לנושאים הנדרשים לבחינת הבגרות במתמטיקה. מרבית המורים טענו שנדרש שינוי בתוכנית הלימודים במתמטיקה בתיכון וציינו בפרט כי תלמידי מתמטיקה ברמת שלוש יחידות לימוד זקוקים למתמטיקה יישומית.

מילות מפתח: הוראה אינטגרטיבית; חינוך מתמטי; תופעות מתמטיות בטבע.

מבוא

מאמר זה עוסק באפיון תפיסות מורים למתמטיקה בתיכון כלפי למידה אינטגרטיבית של מתמטיקה ומדעים ובפרט כלפי תופעות מתמטיות הקיימות בטבע ופוטנציאל שילובן בהוראת המקצוע. הספרות המחקרית והעיונית מלמדת כי מתמטיקה נדרשת בשביל ידע בסיסי ותפקוד בחיי היומיום החל מביצוע פעולות אריתמטיות פשוטות, חישוב אחוזים, קבלת הלוואות מהבנק או השקעות וכלה בקבלת החלטות מורכבות והיא מאפשרת פיתוח דימוי עצמי חיובי, חשיבה רציונלית ויכולת

פתרון בעיות (ארטשטיין, 2014; גוטפרוינד ורוזנברג, 2012; Gravemeijer et al., 2017). נוסף על כך, מתמטיקה אינה פוסחת על תופעות ייחודיות כדוגמת יחס הזהב, סדרת פיבונאצ'י ופרקטלים (Chen et al., 2018; Ghorbani, 2019). כדי להכשיר את בוגרי מערכת החינוך להתמודדות עם דרישות של המאה העשרים ואחת, יש צורך בשינויים הנוגעים לתכנים ולאסטרטגיות הוראה (Hillmayr et al., 2020; NGSS Lead States, 2013). למשל, הוראה בגישה אינטגרטיבית שממוקדת בשילוב שני תחומי דעת (למשל מתמטיקה וביולוגיה) או יותר (Osman et al., 2013). הוראה זו מאפשרת לתלמידים להבנות ידע מתוך בחינת קשרים מגוונים ולטפח יכולת חקר מדעי, חשיבה יצירתית, יכולת פתרון בעיות וחשיבה ביקורתית (Osman et al., 2013; Ríordáin et al., 2016; Satterthwait, 2019). בספרות המחקרית (למשל, Weinberg & McMeeking, 2017) נמצא כי מורים נמנעים מהוראה אינטגרטיבית בשל העדר ידע תוכן מעמיק ונרחב דיו בתחומי הדעת המגוונים ובשל הדרישה מהם ללמד על פי תוכנית לימודים קיימת. בשל מיעוט מחקרים העוסקים בתחום, עלה הצורך באפיון תפיסות של מורים למתמטיקה בתיכון כלפי תופעות מתמטיות בטבע והוראה אינטגרטיבית בכלל ובישראל בפרט.

סקירת ספרות

חשיבותה של המתמטיקה ותופעות מתמטיות בטבע

עוד בימי קדם נבנו מבנים שהסתמכו על יחסי סימטריה, פרופורציה והרמוניה (למשל הקולוסיאום, חומת אנדריאנוס והפנתיאון). לגאומטריה נודע מקום בלתי נפרד מאריתמטיקה, מוזיקה ואסטרונומיה, וגם מבנים של פלאי העולם והארכיטקטורה הפרסית (Hejazi, 2005). המתמטיקה נמצאת בכל מקום וסובבת אותנו בכל תחום שיש. היא מסבירה תופעות טבע מסוימות, כמו טמפרטורה, מהירות של רוחות ושינויים במזג האוויר (Soldatenko & Yusupov, 2021). בכימיה, למשל, אפשר להבין מבנה של מולקולות באמצעות גאומטריה. בכלכלה אפשר לחשב על פי נגזרת הכנסה מייצור מוצר כלשהו או מציאת כמות ייצור מינימלי על פי מחיר מוצע (Weng, 2017). עלינו להבין כחברה כי המתמטיקה מיושמת בתחומים רבים, בהם הכלכלה, המדע והחקלאות, והיא בעלת תפקיד קריטי בהתפתחותה של כל מדינה (Garegae, 2016).

בדרך כלל אפשר לומר שהבסיס של המתמטיקה נמצא בטבע. עוד בזמנים קדומים החברה האנושית השתמשה במתמטיקה כדי לחזות תופעות שמימיות. הפיתגוראים האמינו שהטבע מושתת על מספרים שלמים וחיפשו שיקוף של מספרים אלה במבנה העולם (קוסטא, 1990). ארטשטיין (2014) מזכיר בספרו את ניוטון, תלס ומקסוול: ניוטון פיתח את המתמטיקה החדשה לתיאור הטבע, וגילה שבנפילה חופשית של עצם מסוים ההתקדמות במיקום פרופורציונית לריבוע הזמן שעבר. כמו כן הוא גילה שההפרשים בין המרחקים שהעצם עובר בין שני רווחי זמן שווים ועוקבים מתקדמים כמו המספרים האי-זוגיים: 3, 5, 7... וזה מוכח מהשוויון $(n+1)^2-n^2=2n+1$. הוא גילה שגוף הנזרק בהקבלה לכדור הארץ מסלולו בצורת פרבולה; תלס חישב את גובה הפירמידה ממרכז הפירמידה והזווית שבה נראה ראש הפירמידה (דמיון משולשים). תכונות חומרים (למשל, חשמל ומגנטיות) ותופעות פיזיקליות (למשל אלקטרומגנטיות) גם הן מסתמכות על מתמטיקה; מקסוול ציין כי הפיזיקה שבנויה על משוואות מתמטיות נמצאת בטבע או כפי שאריסטו טען, המתמטיקה היא קירוב טוב מאוד של הטבע. כדי להבין פיזיקה יש צורך בלימוד תחומים מספר במתמטיקה, כגון טריגונומטריה, וקטורים וגאומטריה (Retnawati et al., 2018). אחת מתופעות המתמטיות בטבע היא יחס הזהב שהוא קבוע. זהו מספר אי רציונלי המסומן באות ϕ על שם הפסל היווני המפורסם פידיאס, שחי במאה החמישית לפני הספירה ונחשב לגדול אומני העולם העתיק, והוא שווה בקירוב ל-1.618 (קוסטא, 1990). יחס זה מופיע בטבע, באומנות ובאדריכלות. הוא תואר בספרו של אוקלידס "יסודות" בשנת 300 לפנה"ס. אדריכלים רבים השתמשו ביחס זה כדי לתאר יופי, ואחד מהם היה לה קורבוזיה (1887–1965) השווייצרי. פאצ'ולי וליאונרדו דה וינצ'י השתמשו גם הם ביחס זה ביצירותיהם (Ghorbani, 2019). במתמטיקה יחס זה מחושב כיחס בין סכום בין שני גדלים לגדול ושווה ליחס בין הגדול לקטן, כלומר:

$\phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ או כאשר $\phi^2 - \phi - 1 = 0$.

תוצאת המשוואה תיתן $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Ghorbani, 2019).

כמו כן ϕ הוא המספר היחיד שלאחר חיסור של המספר 1 נקבל את המספר ההופכי לו: 1.618-1= 0.618= 1/1.618. זאת ועוד, אם נעלה בריבוע מספר זה, נקבל 2.618 שהוא המספר עצמו פלוס אחד (קוסטא, 1990). יחס זה נחשב פלאי מכיוון שגוף האדם בנוי כך, כלומר הדבר טמון באבולוציה. מידות הראש האנושי, יחסים חלקיים בתוך הפנים, וכן היחס בין הרוחב לגובה של העיניים והרוחב לגובה של האוזן – כולם קרובים ליחס הזהב (ארטשטיין, 2014). יש לציין כי יחס זה מופיע גם בטבע בקונכיות של חלזונות, אצטרובלים ובפרחים שהגרעינים שלהם מסודרים בספירלות פיבונאצ'י (נוריק, 2014). גאומטריה פרקטלית היא עוד תחום שבא לידי ביטוי בתופעות טבע מגוונות. זהו תחום במתמטיקה העוסק בחקר צורות לא סדירות. הצורה הגאומטרית מורכבת מעותקים מוקטנים של עצמה. הצורות נמצאות בצמחים, בבעלי חיים, בקווי חוף, בפתיתי שלג, במערכת כלי הדם והריאות, בעננים ובעלים (Chen et al., 2018; Sorgo, 2010).

הוראה אינטגרטיבית

הוראה אינטגרטיבית היא גישה המשלבת כמה תחומי דעת ומתודולוגיות רבות ומאפשרת להציג רעיונות מרכזיים של נושא אחד או יותר (Beane, 1993; Osman et al., 2013). כדי לאפשר אינטגרציה בין מתמטיקה למדעים, למשל, עלינו להגדיר תכנים מדויקים של שני התחומים, לשלוט בידע תוכן רלוונטי, לתכנן הערכה מושכלת ורלוונטית של ביצועי התלמידים ולהיות מוכנים לשתף פעולה עם מורים מתחומי דעת מסוימים (Weinberg & McMeeking, 2017). יש הטוענים כי יש לחשוף תלמידים לאינטגרציה בין תחומי דעת החל מבית הספר היסודי (Margot & Kettler, 2019) וכלה בחינוך הגבוה (Weng, 2017). בספרות המחקרית ישנן עדויות להצלחת הלמידה בגישה זו, הן בבחינת הבניית ידע תוכן בקרב תלמידים, והן בפיתוח חשיבה מסדר גבוה

ויכולות חקר (Gao et al., 2020; Karppinen et al., 2013; Osman et al., 2013). מתמטיקה, למשל, יכולה לסייע בהבנת תהליכים בגנטיקה ומאפשרת העמקת ידע תוכן וידע פרוצדורלי בקרב תלמידים (Satterthwait, 2019). במחקרו של חן ועמיתיו (Chen et al., 2018) נמצא כי גאומטריה פרקטלית משנה את הדרך שבה תלמידים חושבים על גאומטריה ובפועל מסייעת לתלמידים להבין תופעות טבע שהגאומטריה האוקלידית אינה מאפשרת. ממצאים דומים עלו גם במחקרו של סורגו (Sorgo, 2010) שבו מורים לימדו את נושא מערכת הדם והריאות והתמקדו בפרקטלים. עם זה על אף יתרונותיה של הוראה אינטגרטיבית, עדיין היא אינה נפוצה בבתי הספר. במחקרם של וינברג ומקמיקינג (Weinberg & Mcmeeking, 2017), המורים למתמטיקה ולמדעים הגדירו אחרת את ההוראה האינטגרטיבית בין מתמטיקה למדעים. המורים למתמטיקה הזכירו בעיקר מושגים מתמטיים והמורים למדעים הזכירו תופעות מדעיות. נוסף על כך, מורים ציינו כי ישנם אתגרים לא מעטים בהוראה זו נוסף על הידיעה כי הם עשויים לסטות לחלוטין מתוכנית הלימודים הנדרשת והישגי התלמידים בבחינות הבגרות עשויים להיפגע מכך. ניכר כי אין קונצנזוס בדבר הצורך בהוראה בגישה אינטגרטיבית וישנן בעיות הנוגעות להעדר תכנון הוראה קוהרנטי של רצף הוראה, מחסור במשאבים ושיתוף פעולה מועט עד חסר בין מורים מתחומי דעת רבים (Retnawati et al., 2018).

שאלת המחקר

מהן תפיסות מורים למתמטיקה בתיכון כלפי הוראה אינטגרטיבית של מתמטיקה ומדעים וכלפי תופעות מתמטיות בטבע ושילובן בהוראת המקצוע?

מתודולוגיה

גישת המחקר היא פנומנולוגית. גישה זו מאפשרת לחוקר לפרש ולגלות את המשמעויות, התפיסות והפרשנויות שיש לפרטים של תופעה או מונח כלשהו (Creswell & Poth, 2018). מטרת המחקר הנוכחי לחשוף לעומק תפיסות של מורים ומשמעויות של הוראה אינטגרטיבית של מתמטיקה ומדעית ותופעות מתמטיות בטבע ובחינת שילובן בהוראת המקצוע בתיכון. משתתפי המחקר כללו 24 מורים (חמישה עשר מורים ותשע מורות) למתמטיקה המלמדים בכיתות י'-י"ב מכמה בתי ספר בצפון הארץ. כל המשתתפים היו בעלי תואר ראשון (למעלה מ-80% היו בעלי תואר בחינוך מתמטי) ושליש מהמורים היו גם בעלי תואר שני בחינוך מתמטי. המורים נבחרו במדגם נוחות על פי קרבה גאוגרפית לחוקר השני שביצע את הראיונות, לזמינות שלהם ולנכונותם להשתתף במחקר (Ilker et al., 2016). הוותק בהוראת המתמטיקה עמד על ממוצע של 12 שנים. למרבית המורים היה ניסיון בהוראת מתמטיקה ברמות של שלוש וארבע יחידות לימוד (N=18), לחמישה מורים היה ניסיון גם בהוראת חמש יחידות לימוד ולמורה אחד היה ניסיון בהוראת שלוש יחידות לימוד בלבד. כל מרואיין קיבל קוד על פי האות הראשונה של שמו והאות הראשונה של שם משפחתו. במהלך ביצוע המחקר נשמרו כללי האתיקה המחקרית ובכלל זה הסכמה מדעת של משתתפי המחקר, תקשורת עקבית בין החוקרים למשתתפי המחקר ושמירה על חיסיון מלא של פרטי המורים ובתי הספר (דושניק וצבר-בן יהושע, 2016).

כלי המחקר

במהלך המחקר בוצעו ראיונות חצי מובנים שארכו בין שעה לשעה וחצי, ומטרתם הייתה לבחון את תפיסות מורי המתמטיקה כלפי תופעות מתמטיות בטבע והוראה אינטגרטיבית בין מתמטיקה למדעים והאם וכיצד הדבר בא לידי ביטוי בבית הספר שהם מלמדים בו. המורים שרואיינו הביעו מוכנות להשתתף במחקר, והיו מוכנים לחשוף את דעתם על הנושא הנחקר, לשקף תהליכים שחוו ולשתף מניסיונם בנעשה בתחום הנחקר (Spradley, 1979).

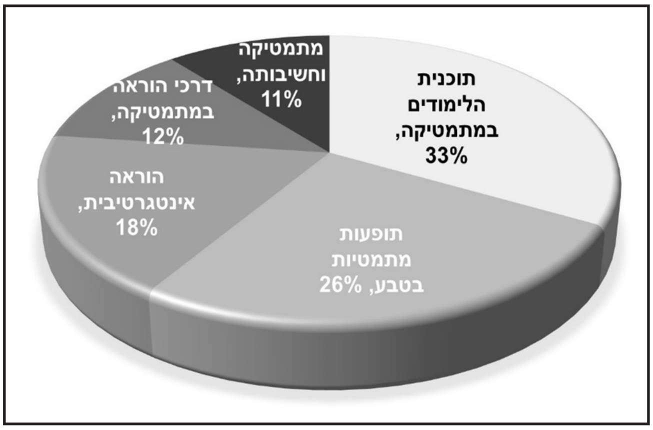
הראיונות נערכו בתיאום מראש עם המורים ובסביבה הנוחה להם והם תומללו במלואם. מדריך הריאיון נמצא בנספח.

דרך ניתוח הנתונים

ניתוח הנתונים כלל איתור קטגוריות ראשונות והגדרתן, עיצוב קטגוריות והגדרת מאפיינים לכל קטגוריה, זיכוך המאפיינים ועיצוב מערכת הקטגוריות הסופית באמצעות עיבוי כמות הנתונים בכל קטגוריה (גבתון, 2001; Creswell & Poth, 2018). נעשתה חזרה למרואיינים שהסכימו לכך (N=12) והם הביעו את דעתם על חלוקת הקטגוריות ועל משמעויות שהוצגו לפניהם. חוץ ממרואיין אחד, כל המורים הסכימו עם הממצאים שהוצגו לפניהם. נוסף על כך, שני החוקרים דנו בממצאים שעלו וההסכמה ביניהם הייתה מלאה, למעט שיום של אחת הקטגוריות. על כן כותרת אחת שונתה לשביעות רצון החוקרים.

ממצאים

ניתוח הנתונים העלה חמש תמות מרכזיות (להלן תרשים 1). מספר היגדים הכולל שנותח עמד על 3486. ניכר כי מרבית ההיגדים נגעו לתוכנית הלימודים במתמטיקה ולתופעות מתמטיות בטבע. הממצאים יוצגו על פי שכיחות הופעתם מגבוהה לנמוכה.



תרשים 1: התפלגות היגדים לפי תמות מרכזיות

תוכנית הלימודים במתמטיקה

33% מכלל ההיגדים כללו אזכורים של המורים בעניין תוכנית הלימודים במתמטיקה. ניכרת אי שביעות רצון מתוכנית הלימודים וקיים רצון לשנותה בכל רמות הלימוד, כפי שאפשר לראות בדבריהם:

> הייתי הולכת על הקטע הפרקטי. מה שבאמת יעזור להם [לתלמידים] בחיים ומורידה את הקטעים שאחרי שבוע הם ישכחו. הייתי מלמדת דברים שיותר מדברים אליהם כדי לעניין אותם (YM).

אני יכול להרחיב מעבר לתוכנית הלימודים, אבל בעיקר עם תלמידי חמש יחידות לימוד. עם אלו של ארבע, הרבה פחות. מה שקיים בתוכנית הלימודים לא כולל ידע מספיק יישומי שנדרש לחיים, גם לא בחמש יחידות (DM).

בשלוש יחידות הייתי מוריד את הנושא של אנליזה, כל הדברים התאורטיים של סדרה חשבונית, סדרה הנדסית ומתמקד בחישובים פיננסיים וכלכליים, בעיות אחוזים, שימושים כמו חישוב ריביות ותשואות (IK).

מורים עסקו גם בתכנים הקיימים בבחינות הבגרות ובשינויים הנדרשים בהן:

לרמה של שלוש יחידות הייתי משנה את האיזון בין שני השאלונים 802 ו-803. לעשות בגרות אחת שהיא קלה והשנייה שהיא קשה, זה בעייתי (MS).

מקצת מהמורים אף הזכירו את תוכנית הלימודים של חטיבת הביניים ואת השפעתה על תלמידי התיכון:

התוכנית של החטיבה לקויה! היא אינה מחוברת לשטח. למשל חוסר ידע בטכניקה אלגברית... עוד דוגמה, מלמדים אותם משפט דמיון עוד לפני שהם יודעים מה הבסיס למשפט דמיון (AS).

תופעות מתמטיות בטבע

תמה זו כללה 26% מכלל ההיגדים. ניכר שמרבית המורים עסקו בתופעות טבע מגוונות, כגון טמפרטורה, צורות גאומטריות בטבע, סדרת פיבונאצ'י בפרחים ובדבורים, גלי ים, גלים חשמליים, קונסטלציה של כוכבים, התפלגות נורמלית וחוקי קפלר:

מספרי פיבונאצ'י שמתבטאים גם בפרחים, גם בכוורת של דבורים, גם בכל מיני דברים שמסתדרים בצורה כזו. אפשר לתאר גלים בים, אפשר לתאר גל חשמלי כסינוס של פונקציה (IK).

אפשר לדבר על קונסטלציה של כוכבים, גדילה של פרח, מבנה של אדמה (AS).

יש הרבה דברים של סטטיסטיקה והסתברות. התפלגות נורמלית, יש הרבה תופעות בטבע שמתפלגות כמו התפלגות נורמלית. אם אנחנו לוקחים תינוקות, משקל לידה, גבהים, משקלים של אנשים, סדרות פיבונאצ'י (ZR).

מרבית ההיגדים העידו על תפיסה חיובית בעניין היתרונות בשילוב תופעות מתמטיות בטבע בהוראה בכיתה. מורים ציינו כי בדרך זו המתמטיקה מוחשית והדבר מניע למידה ואף מציג את היופי של המתמטיקה:

זה מפתח מוטיבציה, מאפשר להבין באופן מוחשי את העולם מסביב. סקרנות ודברים חיוביים, לראות יופי בתבניות וסימטריות (AS).

הרבה פעמים מתמטיקה נתפסת כנושא תלוש, משפט מפתח מתלמידים הוא, למשל, אני לא יכול ללכת עם זה לקנות בסופר, והמשמעות של המשפט הזה שהמתמטיקה תלושה מהמציאות, לא קשורה אליהם. לתלמידים חשוב שהנושאים שהם לומדים יהיו קשורים לחיי היומיום עד כמה שניתן. היכן שאפשר, צריך לנצל זאת. התפלגות נורמלית, אני מדבר על גבהים של ילדים, באנליזה, אני מדבר על תאוצות ועל מהירויות, פשוט ממחיש להם את המתמטיקה. לא אוסף של חוקים ושיטות אלא תופעות ודברים שעוטפים אותם מכל צד (MD).

על אף ההיגדים לעיל, עלה כי מעטים מהמורים אכן הציגו לתלמידיהם תופעות מתמטיות בטבע בשיעורים עצמם. כמה מהם טענו שהדבר מתאים לגיל חטיבת הביניים, וגם אין זה חלק מתוכנית הלימודים ואף הדבר עשוי לסבך את התלמידים:

אני חושב שפעילויות כאלו של יחס הזהב וסדרת פיבונאצ'י מתאימות להעשרה של חטיבת ביניים. בבגרות אין סדרת פיבונאצ'י ויחס הזהב ולכן אני חושב שאין מקום לשלב את זה (SS).

אני פחות חושפת לכך כדי לא לסבך אותם [את התלמידים] יותר. בעיקר בגלל הלחץ של הבגרות. את מעט הזמן שנשאר, אני רוצה להקדיש ללמידה ופחות לדברים שהם מסביב (TM).

נוסף על השאלות בעניין תפיסות כלפי תופעות מתמטיות בטבע ולשילוב נושא זה בהוראה, הוצגו למורים ארבעה סרטונים המתארים קשרים בין מתמטיקה למדעים והמורים התבקשו לחוות את דעתם ולציין האם היו משלבים זאת בהוראתם ומדוע. בסרטון הראשון (הטבע במספרים) מתוארים סדרת פיבונאצ'י בטבע, יחס הזהב וצורות גאומטריות ותכונותיהן. בסרטון השני (יופי בשלושה ממדים) מתוארים שלושה מסכים בו בזמן: במסך אחד תופעה מדעית, במסך אחר תיאור התופעה באמצעות גרף או תרשים ובמסך השלישי רשומה הנוסחה המתמטית שלה. בסרטון השלישי (ארס קוביקה) הגאומטריה מתוארת באומנות וריבוע הקסם. בסרטון הרביעי (הסוד המתמטי של משולש פסקל) מתוארת ההגדרה של משולש פסקל, מבנהו ושימושיו במתמטיקה. הממצאים מעידים כי תגובות המורים היו מגוונות. אומנם כל המורים התלהבו מהסרטונים, אך טענו כי השימוש העיקרי בהם הוא בעבור העשרת הידע, כפי שמופיע כאן:

הסרטונים יכולים להשתלב כהעשרה וכאמצעי מוטיבציה ללמידת מתמטיקה. להראות שהמתמטיקה נמצאת בכל דבר, אבל כדי להבין את הסודות שלה צריך לצלול לתוכה (IK).

בין המרואיינים היו מורים שטענו כי אין מקום להציג סרטונים לתלמידים, בפרט לתלמידי שלוש יחידות לימוד ואף לא לתלמידי הרמות הגבוהות בגלל הצורך להתמקד בנושאים הנדרשים לבחינת הבגרות:

סרטונים אלו אולי מתאימים לתלמידים ברמה גבוהה. לתלמידי שלוש יחידות לימוד – זה לא יזיז להם, הם לומדים רק בשביל הציון (IR).

לא יודעת אם הייתי עושה שימוש בסרטונים. בוודאי לא קבוע. אני חושבת שזו רמה גבוהה מדי לתלמידים שלי כרגע, אבל גם לכיתות ברמה גבוהה יותר לא, כי צריך להתמקד איתם בנושאי בחינת הבגרות ופחות להתפזר (TM).

מתוך הראיונות עלה כי כמה מהמורים אכן מכירים תופעות מתמטיות בטבע, אך רובם רואים בהן אמצעי העשרה בלבד ולא נושאים שיש ללמד בקביעות.

הוראה אינטגרטיבית

במהלך הריאיון התבקשו מורים לתאר מהי הוראה אינטגרטיבית לתפיסתם. 18% מכלל היגדים שנותחו נכללו בתמה זו. ניכר כי רוב המורים צידדו בהוראה זו. מרבית היגדים בתמה זו הראו יתרונות בלמידה על פי גישה זו. היכולת לחבר בין תחומי דעת, להניע למידה, לשפר הבנה של תהליך מסוים, להרחיב אופקים היו בין הנושאים שציינו המורים.

> לדעתי, זה מעולה כי אז זה מתקשר להם, התנ"ך עם המתמטיקה. יש הרי שילובים מאוד מעניינים. זה נותן להם עניין פתאום בשיעור (MK).

> אני חושב שזה מגדיל את ההבנה של התלמידים לגבי המשמעות של המקצועות, לגבי האינטגרציה בין כל הדיסציפלינות השונות, וזה מראה ששום דבר לא תלוש. אני אומנם לא בקיא בפיזיקה ולא בכימיה. אבל כן, אני משלב בין מתמטיקה לכלכלה, בין מתמטיקה לאדריכלות (IK).

> אני בעד הוראה אינטגרטיבית כי מתמטיקה ומדעים קשורים זה בזה. כך אפשר להבין חוקים פיזיקליים וחוקים שונים בעזרת המתמטיקה. המתמטיקה נמצאת בכל מקום וכך התלמיד יבין לא רק מספרים יבשים אלא גם את המשמעות מאחורי המספרים (TK).

> לגמרי חשוב! מתמטיקה וכימיה, מתמטיקה וביולוגיה, אני מלמד פיזיקה משולב עם מתמטיקה באופן טבעי. זה מפתח את החשיבה הגבוהה שלהם. הם מבינים הרבה יותר טוב תופעות בפיזיקה בעזרת המתמטיקה (DM).

עוד מורים צידדו בהוראה אינטגרטיבית, אך הסתייגו ממנה:

> אני יכול להבין את הרציונל, לתת להם לראות את הדברים בהיבט כולל ולהרחיב להם את התמונה. מצד שני, צריך להיות מאוד זהירים עם השילוב הזה כי ברגע שאתה מתמקצע בתחום אחד אתה לומד אותו לעומק. ברגע שאתה מרחיב את היריעה להמון תחומים, אתה בעצם מלמד פחות לעומק בכל נושא. הייתי משתמש בזה במידה זעירה. אני חושב שאם היה לכל תחום דעת את המורה שלו זה היה הרבה יותר יעיל וטוב (SS).

מורה אחר ציין כי הוא מתנגד להוראה זו משום שהיא תיטול זמן יקר מהזמן הכולל של השיעור:

> אני נגד. השיעור עצמו זה 45 דקות. מתוכו בפועל זה אולי 35 דקות. עד שנכנסים ועד שמוציאים את הספרים ועד שמקריאים שמות, זה מקזז את זה לחצי שעה. אז בחצי שעה הזו לעשות רבע שעה רבע שעה זה לדעתי תפסת מרובה לא תפסת (YM).

מתוך הממצאים עולה כי מרבית המורים מצדדים בהוראה אינטגרטיבית. עם זה רובם אינם מיישמים זאת בשגרת הוראתם. הסיבות לכך מגוונות וכוללות בין השאר העדר ידע בכמה תחומי דעת, הקצאת שעות, הצורך להתמקד בלמידה לשם הצלחה בבחינת הבגרות והעובדה שנושאים אלו אינם נכללים בתוכנית הלימודים על פי משרד החינוך.

דרכי הוראה במתמטיקה

כדי להבין האם קיים שילוב או בחינת תופעות מתמטיות בטבע בשגרת ההוראה בבית הספר, לחוקרים היה חשוב להבין מהן דרכי ההוראה שהמורים משתמשים בהן. תמה זו כללה 12% מכלל היגדים שנותחו. על פי הממצאים ניכר כי הוראה פרונטלית תופסת את מרבית זמן השיעור של המורים, אך יש גם שילוב של עבודות בקבוצות, למידת עמיתים ולמידה בסיוע ספרים דיגיטליים. מורים ציינו גם כי הם משתמשים בסרטונים, במצגות ובתוכנת Classroom. מורים ציינו כי בעבור שלוש יחידות לימוד, דרכי ההוראה הן בעיקר פרונטליות, בעוד בקרב תלמידי חמש יחידות לימוד הם מיישמים דרכי הוראה מגוונות, כפי שאפשר לראות בדבריהם:

> מתמטיקה צריך לתרגל ולתרגל. נכון, אני מלמד הרבה פרונטלי, כי כך אני מסביר להם ומדגים להם כיצד אני חושב. זה מרבית השיעור, היתר זה זמן תרגול אם בבית ואם בשיעור (SM).

> אני משתמש בעזרים טכנולוגיים רבים, ספר דיגיטלי שמאפשר לראות את התרגילים בכיתה, סרטונים. שיעורי בית וירטואליים מאפשרים לתלמיד לענות על השאלות ולקבל תשובות, כמו מבחן במחשב שנותן לך תוצאות מיידיות אם יצא להם טוב או לא יצא להם טוב (IM).

> בחמש יחידות אני משלב אמצעים מגוונים. אם זו למידת עמיתים, חזקים עוזרים לחלשים, או נותנים משוב לפתרון יפה של בעיה, יש לי גם מצגות בנושאים שונים (DM).

ניכר כי מורים מתמקדים בהוראה פרונטלית ודגש מושם בתרגול של התלמידים. ברמות לימוד הגבוהות של המתמטיקה נראה שמורים משתמשים במגוון דרכי הוראה ומשלבים גם טכנולוגיה.

מתמטיקה וחשיבותה

תמה זו כללה 11% מכלל היגדים שנותחו. ניכר כי מורים מכירים בחשיבותה של המתמטיקה. הם רואים בה דרך חשיבה וכלי להתמודדות בחיים בתחומים מגוונים ומעטים מציינים כי מתמטיקה מאפשרת הבנת תהליכים במדע ותופעות מסוימות הנעשות בטבע. מרבית המורים שרואיינו ציינו כי בלי מתמטיקה אין תעודת בגרות והדבר עשוי להשפיע על עתיד חיי התלמידים, כפי שעולה מתוך העדויות להלן:

> מתמטיקה זו צורת חשיבה בהינתן סט של חוקים וכללים, צורת חשיבה שמאפשרת לפתור בעיה במסגרת חוקים וכללים מסוימים (IK).

> בלי מתמטיקה קשה להסתדר. שאלות על משכנתא וריבית משתנה. מה יותר כדאי, מה פחות כדאי, כמה כסף אתה צריך לשלם, אחוזים – אם זה בסופר, אם זה על קוטג', חלב, דברים כאלה (TM).

> אני מסביר לתלמידים, בשביל בגרות אתם צריכים מתמטיקה. גם אם לא תלכו להשכלה גבוהה ותלכו להיות עובדים בחברת פלאפון או ללמוד קורס של חצי שנה או פקידות רפואית, כל דבר כזה מבקשים תעודת בגרות. בשביל בגרות, מתמטיקה היא מקצוע נדרש. בלעדיה, אין תעודת בגרות! (YM).

> מתמטיקה מסבירה תופעות שונות בטבע סביבנו, גם מזג אוויר ותחזיות שונות, גם שעון ביולוגי, גם מבנים שקיימים בצמחים ובבעלי חיים, זה קודם כל החשיבות שלה. היא בכל דבר. זה לא רק מקצוע לבגרות, אבל בגרות היא דבר חשוב בחברה המערבית שלנו (SM).

מתוך הממצאים בתמה זו עולה כי מרבית האזכורים נוגעים לחשיבותה של המתמטיקה כרכיב מרכזי להצלחה בבחינות הבגרות וכפתח להשכלה גבוהה וביטחון כלכלי בעתיד. מעטים

המורים שציינו כי מתמטיקה קיימת כמעט בכל תחום בחיי היומיום ויתרה מכך, מאפשרת הבנת תהליכים במדע ותופעות טבע למיניהן.

דיון

מטרת המחקר הייתה לאפיין תפיסות של מורים למתמטיקה בתיכון כלפי הוראה אינטגרטיבית של מתמטיקה ומדעים וכלפי תופעות מתמטיות בטבע ושילובן בהוראת המקצוע. לשם כך היה חשוב לברר תחילה מהי מתמטיקה ומהי חשיבותה מנקודת מבטם של המורים. הממצאים מעידים כי בקרב מרבית המורים, למתמטיקה נודעת חשיבות רבה והיא רכיב עיקרי להצלחה בבחינות הבגרות ויוצרת פתח להשכלה גבוהה בשביל תלמידיהם ולביטחון כלכלי של אזרחים. ממצא זה נתמך בספרות המחקרית בה נטען כי מתמטיקה חשובה לטיפוח החשיבה ולהשכלתו העתידית של כל אזרח (גוטפרוינד ורוזנברג, 2012; Garegae, 2016; Roehrig et al., 2021). עם זה מעטים המורים שציינו במענה לשאלה על חשיבותה של המתמטיקה כי היא מאפשרת הבנת תופעות טבע מגוונות. מבחינת שכיחות ההיגדים, ניכר כי מרבית ההיגדים נגעו לתוכנית הלימודים במתמטיקה. מורים טענו שיש לעשות שינוי בכל רמות הלימוד, אם בהורדת נושאים מסוימים והקלות נדרשות בבחינת הבגרות ואם בשילוב היבטים פרגמטיים שרלוונטיים למציאות של חיי היומיום. על פי משרד החינוך (2019), יש לחשוף תלמידים להיבטים מגוונים הנוגעים למתמטיקה בחיי היומיום, אך מנקודת מבטם של המורים במחקר הנוכחי, הדבר אינו מתבטא בתכנים הנלמדים בבית הספר. ממצא זה אינו ייחודי למורים בישראל. מתברר שהוראת המתמטיקה בבית הספר התיכון ברחבי העולם מושפעת במידה רבה מאוד מבחינות הבגרות החיצוניות. כך נוצר חסך בתחום זה בפרט בעבור אלו שמעוניינים לעסוק בעתיד בתחומים המשלבים מדע, טכנולוגיה, הנדסה ומתמטיקה (Roehrig et al., 2021; Sorgo, 2010; Weinberg & McMeekin, 2017). כדי למנוע זאת מומלץ כי תוכנית הלימודים תתעדכן מדי פעם בפעם ותאפשר ייצוג של תכנים רלוונטיים למציאות הקיימת. דבר זה דורש ראשית הכרה בצורך בשינוי, יצירת עניין בקרב אנשי חינוך ובעלי תפקידים רלוונטיים, הבנה כיצד ליישם את השינוי ויישומו בפועל (Hargreaves & Ainscow, 2015). התמה השנייה השכיחה בגודלה נגעה לתופעות מתמטיות בטבע. התופעה המתמטית הנפוצה ביותר שמורים הזכירו הייתה סדרת פיבונאצ'י בצמחים ובבעלי חיים. הוזכרו תופעות מתמטיות אחרות, אך מרבית המורים ראו בהן מרכיב העשרה בלבד ולא ידע פרגמטי שעשוי להועיל לתלמידים. אחת הסיבות המתאימות היא כי מורים רואים בהוראה בבית הספר התיכון מכוונת להצלחת תלמידיהם בבחינות הבגרות במתמטיקה ולרוב הם גם מוגבלים מבחינת הקצאת זמן לעיסוק בתכנים אלו. בספרות המחקרית (למשל, Firat, 2020; Karppinen et al., 2013) נטען כי אילו היו למורים יכולת בחירה ומשאבים של זמן ותקציבים, ייתכן שהיו משלבים התמקדות בתופעות מתמטיות בטבע ותלמידיהם היו מגלים יותר עניין בלימודי המתמטיקה. התבוננות בתופעות מתמטיות בטבע דורשת מהמורה להכיר ולהבין מהי הוראה אינטגרטיבית. מתוך הממצאים עולה כי מרבית המורים מצדדים בהוראה אינטגרטיבית. לתפיסתם הוראה זו עשויה לסייע בפיתוח חשיבה מסדר גבוה, מסוגלות עצמית בקרב לומדים ולקדם שיתוף פעולה בין מורים מתחומי דעת מגוונים (Berlin & White, 2012; Firat, 2020; Weinberg & McMeekin, 2017). עם זה רובם אינם מיישמים זאת בשגרת הוראתם. הסיבות שצוינו נגעו להקצאת שעות הוראה, העדר ידע בכמה תחומי דעת, צורך בשיתוף פעולה עם מורים מתחומי המדעים, צורך להתמקד בלמידה לשם הצלחה בבחינת הבגרות ועצם הדבר שנושאים אלו אינם נכללים בתוכנית הלימודים על פי משרד החינוך. ממצאים דומים עלו גם בספרות המחקרית (Weinberg & McMeekin, 2017) שבה נמצא שיתוף פעולה מצומצם בין מורי המתמטיקה למורי המדעים, חסר בידע מקצועי של המורים משום שלא קיבלו הכשרה מתאימה להוראה אינטגרטיבית, העדר ציוד מתאים והעדר הקצאת שעות הוראה ייעודיות להוראה זו (Ríordáin et al., 2016). במהלך הריאיון נשאלו המורים מהן דרכי ההוראה שהם נוקטים בדרך כלל בהוראת המתמטיקה. ממצאי המחקר מעידים כי המורים מתמקדים לרוב בהוראה פרונטלית ומרבים לתרגל עם התלמידים את הנושאים שנלמדו. נוסף על כך, ניכר כי מורים מלמדים בעיקר לבד ולא ביחד עם מורים אחרים בבית הספר, כמו מורי המדעים. ייתכן שממצא זה עשוי לספק עוד הסבר לממצא שבפועל אין הוראה אינטגרטיבית בקרב המורים שרואיינו במחקר הנוכחי וכי יש שילוב מועט של תופעות מתמטיות בטבע בהוראת המתמטיקה.

מגבלות המחקר והמלצות להמשך מחקר

במחקר הנוכחי מספר המורים היה גדול ממספר המורות וייתכן שיש לכך השפעה על ממצאי המחקר. זו סוגיה שמומלץ לבחון אותה במחקר המשך. כמו כן מומלץ לבצע מחקר רחב היקף שבוחן את נחיצותה של הוראה אינטגרטיבית של מתמטיקה ומדעים בתיכון ויכלול מורים מכל רחבי הארץ. נוסף על כך, מומלץ לבחון כיצד תופסים תלמידי תיכון ברמות 3, 4, ו-5 יחידות לימוד תופעות מתמטיות בטבע ואת חשיבות שילובן בהוראת המקצוע בתיכון.

רשימת מקורות

ארטשטיין, צ' (2014). **הקשר המתמטי: המתמטיקה של הטבע, הטבע של המתמטיקה, והזיקה לאבולוציה** (י' מלצר, עורך). ספרי עליית הגג ומשכל.

גבתון, ד' (2001). תיאוריה המעוגנת בשדה: משמעות תהליך ניתוח הנתונים ובניית התיאוריה במחקר איכותי. בתוך נ' צבר-בן יהושע (עורכת), **מסורות וזרמים במחקר האיכותי** (עמ' 195-227). דביר.

גוטפרוינד, ח' ורוזנברג, י' (עורכים). (2012). **עולם הידע וההכשרה של העוסקים בהוראת המתמטיקה בחינוך העל-יסודי: תמונת מצב והמלצות הוועדה "מה צריכים לדעת העוסקים בהוראת המתמטיקה בחינוך העל-יסודי?"** היוזמה למחקר יישומי בחינוך והאקדמיה הלאומית הישראלית למדעים.

דושניק, ל' וצבר-בן יהושע, נ' (2016). אתיקה של מחקר איכותני. בתוך נ' צבר-בן יהושע (עורכת), **מסורות וזרמים במחקר האיכותני: תפיסות, אסטרטגיות וכלים מתקדמים** (עמ' 217-235). מכון מופ"ת.

משרד החינוך. (2019). **חוזר מפמ"ר מתמטיקה תש"ף בחינוך העל יסודי** (תש"ף/1). https://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/math/high-School/mafmar_math2019.pdf

נוריק, י' (2014). **מספרי פיבונצ'י ויחס הזהב**. מכון דוידסון: הזרוע החינוכית של מכון ויצמן למדע.

קוסטא, מ' (1990). **חתך הזהב, חותם שלמה ומגן-דוד: נושא בין-תחומי**. ספריית פועלים.

Beane, J. A. (1993). Problems and possibilities for an integrative curriculum. *Middle School Journal, 25*(1), 18-23. https://doi.org/10.1080/00940771.1993.11495181

Berlin, D. F., & White, A. L. (2012). A longitudinal look at attitudes and perceptions related to the integration of mathematics, science, and technology education. *School Science and Mathematics, 112*(1), 20-30. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00111.x

Chen, S., Herrom, S., Ding, J., & Mohn, R. (2018). Assessing United States and Chinese secondary mathematics teacher's interest in fractal geometry. *Journal of Mathematics Education, 11*(2), 17-34.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (4th ed.). Sage.

Firat, E. A. (2020). Science, technology, engineering and mathematics integration: Science teacher's perceptions and beliefs. *Science Education International*, *31*(1), 104-116.

Gao, X., Li, P., Shen, J., & Sun, H. (2020). Reviewing assessment of students learning in interdisciplinary STEM education. *International Journal of STEM Education, 7*(24), 1-14. https://doi.org/10.1186/s40594-020-00225-4

Garegae, K. G. (2016). Teacher's professed beliefs about the nature of mathematics, its teaching and learning: Inconsistencies among data from different instruments. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 30*, 1-18.

Ghorbani, H. (2019). Golden ratio: The mathematical of beauty. *Mathematics Interdisciplinary Research, 4,* 1-10. https://mir.kashanu.ac.ir/article_89245_88a0b4ec55611686fc0f56aa2bd983dd.pdf

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F. L., & Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematical Education, 15*(2), 105-123. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6

Hargreaves, A., & Ainscow, M. (2015). The top and bottom of leadership and change. *Phi Delta Kappan, 97*(3), 42-48. https://doi.org/10.1177/0031721715614828

Hejazi, M. (2005). Geometry in nature and Persian architecture. *Building and Environment, 40*(10), 1413-1427. https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2004.11.007

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I., & Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education, 153*, https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897

Ilker, E., Sulaiman, A. M., & Rukayya S. A. (2016). Comparison of convenience sampling and purposive sampling. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics, 5*(1), 1-4. https://doi.org/10.11648/j.ajtas.20160501.11

Karppinen, S., Kallunki, V., Kairayuori, S., Komulainen, K., & Sintonen, S. (2013). Interdisciplinary integration in teacher education. In K. Tirri & E. Kuusisto (Eds.), *Interaction in Educational Domains* (pp. 147-158). Sense.

Margot, K. C., & Ketller, T., (2019). Teacher's perception of STEM integration and education: A systematic literature review. *International journal of STEM education, 6*(2). https://doi.org/10.1186/s40594-018-0151-2

NGSS Lead States. (2013). *Next generation science standards: For states, by states.* The National Academies Press. https://doi.org/10.17226/18290

Osman, K., Hiong, L. C., & Vebrianto, R. (2013). 21st Century biology: An interdisciplinary approach of biology, technology, engineering, and mathematics education. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 102*, 188-194. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.10.732

Retnawati, H., Arlinwibowo, J., Wulandari, N. F., & Pradani, R. G. (2018). Teacher's difficulties and strategies in Physics teaching and learning that applying mathematics. *Journal of Baltic science education, 17*(1), 120-135 https://doi.org/10.33225/jbse/18.17.120

Ríordáin, M. N., Johnston, J., & Walshe, G. (2016). Making mathematics and science integration happen: Key aspects of practice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(2), 233-255. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1078001

Roehrig, G. H., Dare, E. A., Ring-Whaleen, E., & Wieselmann, J. R. (2021). Understanding coherence and integration in integrated STEM curriculum. *International Journal of STEM Education, 8*(1), Article 2. https://doi.org/10.1186/s40594-020-00259-8

Satterthwait, D. (2019). Making biology count: integrating mathematics into the teaching of inheritance. *Journal of Biological Education, 53*(1), 92-97. https://doi.org/10.1080/00219266.2018.1427613

Soldatenko, S., & Yusupov, R. (2021). An optimal control perspective on weather and climate modification. *Mathematics*, *9*(4), Article 305. https://doi.org/10.3390/math9040305

Sorgo, A. (2010). Connecting biology and mathematics:First prpare the teachers.*CBE:Life Sciences Education 9*(3), 196-200. https://doi.org/10.1187/cbe.10-03-0014

Spradley, J. P. (1979). *The ethnographic interview*. Holt, Rinehart and Winston.

Weinberg, A. E., & McMeeking, L. B. S. (2017). Toward meaningful interdisciplinary education: High school teacher's views of mathematics and science integration. *School Science and Mathematics, 117*(5), 204-213. https://doi.org/10.1111/ssm.12224

Weng, T. S. (2017). The importance of Mathematics and Science education in the context of digital technology on industrial innovation. *Research Journal of Applied Science, Engineering and Technology, 14*(11), 418-426. http://dx.doi.org/10.19026/rjaset.14.5142

נספח

מדריך ראיון חצי מובנה*

1. שלום רב, ספרי לי על עצמך?
2. מה תפקידך במערכת החינוך? שנות הוותק בחינוך? שנות הוותק בהוראת המתמטיקה? אילו תפקידים את ממלאת בבית הספר שבו את מלמדת?
3. אילו כיתות את מלמדת ובאילו רמות?
4. מהי מתמטיקה בעיניך? מהי חשיבותה לתפיסתך?
5. בשיעורים שלך, האם את מציגה את המתמטיקה לתלמידייך? אם כן, כיצד? אשמח לדוגמאות
6. כיצד לדעתך תלמידיך תופסים את המתמטיקה? אשמח לדוגמאות
7. ישנם תלמידים שנוהגים לשאול את המורה: "למה אני צריך ללמוד מתמטיקה?" האם נתקלת בכך? אם כן, מהי תשובתך בדרך כלל ומדוע?
8. מה דעתך על תכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר התיכון? מדוע?
9. האם היית משנה את תוכנית הלימודים? מדוע? אשמח לדוגמאות ספציפיות במידה שהמענה חיובי.
10. באילו שיטות הוראה את עורכת שימוש? אשמח לדוגמאות
11. מהי לדעתך שיטת ההוראה היעילה ביותר? מדוע?
12. מהי הוראה אינטגרטיבית? מה דעתך עליה? מדוע?
13. מהי תפיסתך לגבי הוראה אינטגרטיבית של מתמטיקה ומדעים?
14. האם את משלבת בין מתמטיקה ופיזיקה, בין מתמטיקה לביולוגיה, בין מתמטיקה לכימיה? אם כן, כיצד? אם לא, מדוע לא?
15. האם את חושבת שצריך להיות מומחה בתחום התוכן על מנת ללמד בצורה אינטגרטיבית? מדוע?
16. האם את מכירה תופעות מתמטיות בטבע? אם כן, אשמח לדוגמאות
17. האם את משלבת בהוראתך תופעות מתמטיות בטבע, כמו יחס הזהב או סדרת פיבונצ'י? אם כן, כיצד? אם לא, מדוע לא?
18. האם לדעתך תופעות מתמטיות בטבע יכולות לפתח את החשיבה של התלמידים? האם הם מסתכלים על המתמטיקה בצורה אחרת? מדוע?
19. צפי בסרטון הבא, איך סרטון זה יכול להשתלב בשיעורי המתמטיקה אם בכלל? מדוע? https://www.youtube.com/watch?v=kkGeOWYOFoA&feature=youtu.be
20. צפי בסדרת הסרטונים הבאים, האם לדעתך אפשר לעשות בהם שימוש בהוראה בכיתה? מדוע? https://www.e ol.co.il/articles/567#

* נוסח הריאיון כתוב בלשון נקבה, אך מיועד לשני המינים.

תובנה מספרית עושה את ההבדל[1]
חישוב מתוך תובנה מספרית אצל תלמידים מתקשים ולא מתקשים

מרים בן-יהודה
ורדה שרוני

ד"ר מרים בן-יהודה
מרצה בכמה מכללות, בהן מכללת שאנן, בנושאים הקשורים לליקויי למידה וקשיים במתמטיקה, דרכי הערכה והוראת מתמטיקה לתלמידים מתקשים.
עד שנת 2018 ראש התוכנית לתואר שני בליקויי למידה, דרכי הערכה והתערבות חינוכית, בעבר ראש החוג לחינוך מיוחד במכללה האקדמית בית ברל.

ד"ר ורדה שרוני
מומחית ללקויות למידה ופסיכולוגית. מרצה בכמה מכללות בנושאים הקשורים לליקויי למידה, דרכי הערכה והתערבות. בעבר הייתה ראש התוכנית לתואר שני בליקויי למידה, דרכי הערכה והתערבות חינוכית, ראש חוג לחינוך מיוחד וראש בית הספר לחינוך במכללה האקדמית בית ברל.

מבוא

פיתוח תובנה מספרית הוא יעד חשוב המודגש כיום בעת לימוד מתמטיקה בכיתות היסוד בארץ ובעולם. מערכת החינוך בארץ מדגישה שאין לעסוק בחישובים כדגש בלעדי, אלא להדגיש הבנה מושגית ותובנה מספרית. בתוכנית הלימודים נאמר שפיתוח תובנה מספרית הוא חלק מהתרבות המתמטית ויש לפתח תובנה מספרית המכוונת לתפיסה אינטואיטיבית ואיכותית של התחום הנלמד, זאת לצד פיתוח שליטה במיומנויות חישוב בעל פה ובכתב. תובנה מספרית מאפשרת לתלמידים לפעול בגמישות בעת טיפול במושגים מתמטיים ובעת בחירת דרכי הפתרון ולהבין אותם (נשר ואחרים, 2006). זוהי גם התפיסה הרעיונית המוצגת במסמך התאמת תוכנית הלימודים במתמטיקה לתלמידי החינוך המיוחד:

> אנו מאמינים שכל תלמיד, באשר הוא, זכאי ללמוד מתמטיקה על פי יכולותיו ולמרות קשייו. [...]חשוב לחשוף את התלמידים למגוון נושאים מתמטיים, לפתח בהם תובנות ומיומנויות בנושאים הנלמדים ולספק להם כלים שבעזרתם ישתמשו בהקשרים שונים של פתרון בעיות במתמטיקה[1] ובחיי היומיום. (מרק-זגדון ואחרים, 2014, עמ' 5)

לכן יש לשאוף שכל תלמיד ירכוש ידע ויפתח תובנה מספרית לצד מיומנות חישוב בסיסית ויש ללמד אותם בדרך זו. זוהי גם עמדת מעצבי החינוך המתמטי בעולם הגורסים שעל התלמיד לדעת לחשב בדרך מהירה ומדויקת ולהכיר את עובדות היסוד (בצירופי עובדות החיבור עד 18, כפל של מספרים חד-ספרתיים ופעולות חיסור וחילוק), ולהבין ששינון של עובדות יסוד אינו מספיק וצריך להנחות את התלמידים לעשות חישובים

1. המאמר עובד ותורגם על פי המאמר באנגלית:
Ben-Yehuda, M., & Sharoni, V. (2021). Number sense makes all the difference: Calculation using number sense by pupils with and without learning difficulties in Maths. Journal of Cognitive Education and Psychology, 20(1), 47-67. https://doi.org/10.1891/JCEP-D-20-00029
2. במאמר יש שימוש לחלופין במונחים 'חשבון' ו'מתמטיקה'.

מתוך תובנה מספרית (Baroody, 2006, 2016; National Council of Teachers of Mathematics, 2000; National Council of Teachers of Mathematics, n.d.).

היעד של מאמר זה הוא להדגיש את החשיבות שיש להוראת מתמטיקה בדרך של תובנה מספרית לכל התלמידים, כולל תלמידים מתקשים. המחקר בוחן את דרכי החישוב של תלמידים מתקשים ושאינם מתקשים בכיתות ג'–ו', כאשר מזמנים להם תרגילי חישוב שהם יכולים לפעול בהם ביעילות ובגמישות ומתוך תובנה מספרית.

מאמר זה הוא המשך למאמר קודם (בן-יהודה בן-יהודה, שרוני ואלמוג, 2014), שפותח בו הכלי שהשתמשו במאמר זה.

תובנה מספרית, מהירות חישוב ודיוק והקשר ביניהם

עד סוף שנות השמונים, המשתנים של מהירות ודיוק נחשבו לקובעים אם תלמיד יודע לחשב או לא. תלמיד שלא ידע לשלוף במהירות את עובדות היסוד נחשב לנכשל. לכן הושם דגש בהוראה על אימון ושינון שיביאו לידי שליטה בעובדות היסוד ובנוהלי החישוב. שינוי ניכר במגמות החינוך המתמטי התרחש משנות התשעים ואילך כאשר התקבעו המונחים "תובנה מספרית" ו"גמישות חישובית" והתגבשה ההבנה שיש לפתח ולספק כלים שבעזרתם התלמידים ירכשו ידע בדרכי חישוב לצד תובנה מספרית. תחילה נבהיר את המושגים המוזכרים בקטע זה ואת האופן שהם קובעים את דרכי החישוב במתמטיקה אצל תלמידים מתקשים ולא מתקשים.

שליטה בחישוב עובדות יסוד מתרחשת כאשר מתקיימת פעולה של שליפה אוטומטית, מהירה ומדויקת של התשובה מתוך הזיכרון לטווח ארוך. נסביר את היכולת להגיע לשליטה מהירה בחישוב באמצעות הגישה הנוירופסיכולוגית הגורסת ששליפה מהירה ומדויקת של עובדות יסוד וביצוע נכון של שלבים פרוצדורליים, קשורים לארגון רשת נוירונים במוחו של הלומד המאפשר יצירת קשרים אסוציאטיביים בין פרטי מידע. כאשר הלומד נדרש לחשב במהירות הוא משתמש בקשרים אסוציאטיביים בין עובדות היסוד שנקלטו בעבר וכך מתאפשרת שליפה מיידית של התשובה מתוך הזיכרון לטווח ארוך (Dehaene, 1997; Rusconi et al., 2006). משערים שאצל לומדים מתקשים ואצל לומדים עם הפרעת למידה, חל שיבוש ברשת האסוציאציות ולכן מתעכב המהלך המהיר של החישוב. קשיים בזיכרון לטווח ארוך או קשיים בזיכרון עבודה משפיעים על העיכוב במהירות התגובה ועל הדיוק (Mabbott & Bisanz, 2008). יצירת קשרים בדרך אסוציאטיבית ומתוך הבנה היא אסטרטגיה המאפשרת ללומד לעקוף את הקשיים שהוא חווה בעת שליפת המידע החישובי מתוך זיכרון העבודה ולחשב נכון, גם אם לא במהירות. לדוגמה: כשתלמיד מתקשה לשלוף חישוב כגון 19+7 מהזיכרון, תסייע לו האסוציאציה של ידיעת עובדת היסוד 9+7 וההבנה שאפשר לפרק ולאחד מספרים (10+7+9 או לחלופין 20+7-1).

אצל הילד הצעיר דרכי החישוב הבסיסיות מתפתחות בהדרגה ממצב התנסותי-פרוצדורלי לשלב של שליטה הנשענת על זכירה, כאשר התובנה המספרית היא אבן דרך חשובה ביותר בהתפתחות יכולתו להגיע לשליטה בחישוב (Baroody, 2006; Kilpatrick et al., 2001). בשלב ראשון, הילד מתנסה במהלך שימוש באסטרטגיות מנייה של חפצים או באמצעות האצבעות, או בספירה מילולית. בשלב השני מתפתחות אסטרטגיות של חשיבה ושימוש בידע קיים מתוך הבנה, לדוגמה: שימוש בהסקה כדי לקבוע מבחינה לוגית את התשובה לצירוף לא ידוע (אם 2X6=12 אז 4X6=24). בשני השלבים הראשונים משתרשת ההבנה של העקרונות והתהליכים הקשורים במספרים והיא משמשת תשתית המאפשרת התפתחות של תובנה מספרית. בשלב השלישי, הלומד מגיע בהדרגה לחישוב יעיל, מהיר ומדויק ולשליפה של התשובות מתוך מגוון של עובדות המאוחסנות בזיכרון. אחסון בזיכרון שמתבצע מתוך קישור העובדות למשמעות מסייע בחישוב מנטלי אוטומטי (Dehaene, 1997; US Department of Education, 2008; Boaler, 2014; Baroody, 2016), אלא שלא כל הילדים מגיעים לשלב זה. תלמידים שיש להם קשיי למידה, נאלצים להשקיע מאמץ רב בחישוב חוזר ובניסיונות להישאר בקשב ולא מתמקדים בגילוי דפוסים חוזרים ובהבנה (Baroody, 2016).

על אף שהמושג תובנה מספרית מעסיק את החוקרים מאז סוף שנות השמונים ויש הסכמה על חשיבותו, אין הסכמה על הגדרתו ודרכי איתורו. החוקרים מדגישים שאומנם קשה להגדיר מהי תובנה מספרית אך קל לזהות אותה כשהיא מתרחשת (Berch, 2005; Butterworth, 2005; Greeno, 1991; Russell, 2000).

המועצה הלאומית של מורי המתמטיקה בארצות הברית (NCTM, 2000, p. 32) מדגישה שתובנה מספרית היא חשובה ביותר בלימוד מתמטיקה בכיתות יסוד, שכן היא מעניקה לתלמידים שלוש הבנות עיקריות שמאפשרות להם:
א. להבין את מערכת המספרים ואת הדרכים לייצג מספרים;
ב. להבין את משמעות הפעולות וכיצד הן קשורות זו לזו;
ג. לחשב חישוב שוטף ולהשתמש באומדן. גם בתוכנית הלימודים בישראל (נשר ואחרים, 2006) מודגש רעיון התובנה המספרית המתבטא ב"ראייה אינטואיטיבית של מבנים מתמטיים ובקישורם לפעולות חשבון [...] ביכולת גיוס ידע וניסיון קודם על מנת לפתח אסטרטגיות פתרון שונות, בהבנת דרכי פתירה שונות ובגילוי פתיחות לדרכים חדשות" (נשר ואחרים, 2006, עמ' 11).

פוקנר וקיין (Faulkner & Cain, 2009) מציעים מודל לתיאור תובנה מספרית המדגיש את חשיבות האומדן ושפת המושגים המתמטיים (מושגי יסוד: גודל וכמות) ומתמקד בהבנה של המבנה העשרוני. חוקרים אחרים (Dehaene, 1997, 2001; Yang, 2005) מציינים מאפיינים דומים ואת החשיבות שבקיומה של סכמה של מבנים שהבסיס שלהם הוא ייצוגים מספריים מילוליים כמותיים וסימבוליים. מודל כזה מאפשר ללומד לשלוט בהערכת סדרי גודל, לזהות טעויות, לחשב בגמישות ובדרך מנטלית, לנוע בין כמויות במציאות לייצוגים המספריים שלהם ולייצג את אותו מספר בדרכים אחרות. יכולות אלה מאפשרות לאמוד כמויות ומספרים ולעשות פעולות חשבוניות בהם. ברץ' (Berch, 2005) סקר מאפיינים שקשורים לתובנה מספרית ואסף רשימה של שלושים מאפיינים בולטים של תובנה מספרית. לפי רשימה זו

המושג תובנה מספרית הוא מורכב וכולל מאפיינים הקשורים לאינטואיציה של האדם על אודות כמויות ומאפיינים הקשורים לידע של דרכי החישוב והמיומנות ביישומם. המשותף לכל המאפיינים הוא ההבנה שתובנה מספרית היא רכיב עיקרי ביכולת להבין את מבני הבסיס של האריתמטיקה הדרושה כדי לפתור בעיות מתמטיות ביעילות, בגמישות וביצירתיות ולהגיע להחלטות מתמטיות שימושיות המאפשרות לעשות פעולות ולעסוק במספרים מתוך הבנה.

עוד נושא שהספרות המחקרית עוסקת בו הוא מקורה של התובנה המספרית. נמצאו גישות מגוונות: גישה אחת גורסת שהמקור לתובנה מספרית הוא יכולת גנטית מולדת (Dehaene, 1997, 2001) וגישה שנייה גורסת שזו מיומנות נרכשת המתפתחת במהלך למידה והתנסות (Berch, 2005) או כתוצאה של למידה ישירה (Sayres & Andrews, 2015). דהאן (Dehaene, 1997, 2001) אומר שמבחינה אבולוציונית התפתחה תשתית מוחית המאפשרת פעילות מתמטית, גם בבני אדם וגם בבעלי חיים מסוימים. הוא מציג ראיות לכך שגם לבעלי חיים יש יכולת להבין ולבצע מניפולציות במספרים וגם לתינוקות בני 6–7 חודשים, ומביא מחקרים נוירופסיכולוגיים המציינים חסכים ביכולת זו אצל פגועי מוח. יש חוקרים (Greeno, 1991; Howden, 1989) הטוענים שתובנה מספרית היא מומחיות קוגניטיבית המתפתחת בהדרגתיות במהלך למידה, עיסוק במספרים והיכרות טובה איתם. אלה הסוברים שתובנה מספרית אינה יכולת ביולוגית ולא בהכרח תוצר של התנסות אינטואיטיבית ומפגש עם המספרים, תומכים בגישה של הוראה ישירה של תובנה מספרית ופיתוח של מיומנות זו אצל התלמידים (Sayres & Andrews, 2015).

מסקנות המחקרים הביאו לידי הבנה שלצד הדרישה להגיע לחישוב מהיר ומדויק יש לעודד תלמידים לפעול בדרך של תובנה מספרית, שכן בדרך זו הם מצליחים להתמודד טוב יותר עם מטלות החישוב (Baroody, 2006; Boaler, 2014; Barrera-Mora & Reyes-Rodriguez, 2019). שילוב זה בין מהירות חישוב ותובנה מספרית מוצג במסמך הסטנדרטים הבין-לאומי להוראת המתמטיקה כרהיטות חישובית הכוללת "איזון וקישור בין הבנה מושגית ובקיאות חישובית, הבנה עמוקה של מושגים ושימוש גמיש וזמין בהם במגוון רחב של יישומים" (NCTM, 2000, p. 35). לכן כאשר תלמידים מחשבים מתוך תובנה מספרית בדרך גמישה ויעילה, מהירה ומדויקת, נאמר שהם מפגינים רהיטות חישובית (Boaler, 2014; Russell, 2000).

קשיים ברכישת תובנה מספרית ורהיטות חישוב

על פי תקציר דוח הוועדה המייעצת לענייני מתמטיקה של ארה"ב (US Department of Education, 2008) ילדים צריכים לשלוט בחיבור ובחיסור מספרים שלמים עד סוף כיתה ג', ואילו עד סוף כיתה ה' על התלמידים לשלוט בכל ארבע פעולות החשבון במספרים שלמים. בכיתה ו' מצופה שהילדים ישלטו בפעולות חשבון בשלמים ובשברים. ידע זה הוא חיוני להתפתחות של חשיבה מתמטית וליכולת חישוב ברמות גבוהות יותר (NCTM, 2000). גם בארץ הדרישות הן דומות. תוכנית הלימודים (נשר ואחרים, 2006) דורשת לפתח בקרב התלמידים יכולת חישוב בעל פה ובכתב עד לשליטה בעובדות היסוד ובאלגוריתמים החישוביים. בסוף כיתה ג' על התלמידים לדעת בעל פה את כל המכפלות בלוח הכפל. בפועל, מורים למתמטיקה ואנשי מקצוע העובדים עם תלמידים מעריכים שכ-20%–30% מהתלמידים, ואולי אף יותר, חווים קשיים בלימוד החשבון[2](1). רובם אינם מצליחים להגיע לשליטה בדרכי חישוב בסיסיות. יש תלמידים החושבים שחישוב צריך להתבצע במהירות, דבר שיש בו קושי ומקור לפחדים וללחץ רב (Boaler, 2014; Remiraz et al., 2013).

אלה הם המאפיינים המרכזיים המצביעים על קיומו של קושי או לקות למידה במתמטיקה: טעויות רבות בביצוע החישוב בעל פה ובפרוצדורות[3] הפתרון בכתב; איטיות בהיזכרות ובשליפה של עובדות יסוד; קשיים במיומנויות השפה ושימוש בשפה מתמטית, וכן חוסר יכולת לייצג מידע בדרך סימבולית או לתת קוד מילולי כדי לאחסן מידע (ברוזה ובן-דוד קוליקנט, 2017; כץ ודרור, 2011; Geary, 2005). במסקנות ממבחני מיצ"ב שנערכו בארץ (משרד החינוך, 2010), עולה קושי רב אצל תלמידים בשאלות ובחישובים הדורשים מהתלמיד להשתמש בתובנה מספרית. נאמר בהן כי "תלמידים נאחזים בפתרון אלגוריתמי מורכב ואינם משתמשים באומדן או באסטרטגיה אחרת לייעול דרכי הפתרון" (עמ' 1). בוילר (Boaler, 2014) מצאה שתלמידים שאין להם תובנה מספרית ומשתמשים שימוש יתר בשינון עובדות, לעיתים קרובות נכשלים בהמשך הלמידה גם באלגברה.

התלונה הרווחת ביותר של הורים ושל מורים היא שהילדים "שוכחים מהר" את עובדות היסוד שלמדו ולא מצליחים ליצור מאגר של עובדות יסוד בזיכרון. תופעה זו נפוצה במיוחד אצל מתקשים בלמידה על רקע קשיים בתחום הזיכרון והשפה (Geary, 2003). הקושי מתבטא בעיקר בזיכרון העבודה (Working Memory) המאפשר ביצוע מניפולציות הדרושות לחישוב (Mabbott & Bisanz, 2008; Dehn, 2008; Bergman-Nutley & Klingberg, 2014). זיכרון עבודה חלש נמצא כמנבא קשיים אצל תלמידים מתקשים כבר בכיתה א' ומתבטא בביצוע איטי של חישוב. יש תלמידים הנשארים באסטרטגיות פשוטות של מנייה באמצעים מוחשיים, ובשל כך בזיכרון העבודה אין פניות קשב ליצירת אסוציאציות מתוך תובנה מספרית (מרק-זגדון, 2011). מחקרים אחרים עמדו על כך שקשר אסוציאטיבי חלש גורם לתלמידים מתקשים לחשב כל פעם מחדש בעזרת פרוצדורות לא יעילות הגוזלות זמן רב (Mabbott & Bisanz, 2008; דורפברגר ומלאכי, 2018). אולם כאשר מלווים את השינון בהבנה וביצירת קשרים, גדל מאגר הידע החישובי גם אצל תלמידים שהם איטיים בחישוב והאיטיות אף נעלמת בהמשך הלמידה (Gersten et al., 2005; Baroody,2006). כאשר מטלת החישוב ניתנת בכתב, פוחת העומס על זיכרון העבודה (Kyttälä at al., 2010). מחקר שנערך בכיתות ג'–ה' הראה כי בעת חישוב בכתב תלמידים הצליחו להשתמש באסטרטגיות מורכבות לעומת תרגילים זהים בעל פה וזאת בשל העומס הרב על זיכרון העבודה בעת חישוב בעל פה (Lucangeli et al., 2003). הקשיים בזיכרון גורמים גם לשליפה של מידע לא מדויק ולא רלוונטי, להסחות ולחוסר גמישות בעת החישוב (Baker et al., 2002).

2. במאמר יש שימוש לחלופין במונחים 'חשבון' ו'מתמטיקה'.

3. יש שימוש לחלופין במונחים 'נוהלי חישוב' ו'פרוצדורות חישוב'.

מערכת החינוך בארץ ובעולם מעודדת בשנים האחרונות הוראה בגישת התובנה המספרית כדרך לשיפור ההתמודדות של התלמידים עם משימות חישוב, שכן היא מפתחת גמישות ומפחיתה חשש. הילד לומד להתבונן בתהליכים שהוא פועל על פיהם, להצדיק את השימוש בהם ולהסביר אותם, לבקר את התוצאה ולזהות קשרים בין עובדות לחישובים. החוקרים מדגישים את החשיבות שבהקניית אסטרטגיות המעודדות שימוש בתובנה מספרית לתלמידים מתקשים וביניהם מתקשים שיש להם קשיים בזיכרון (Boaler, 2014; Mabbott & Bisanz, 2008; Zuhal, 2017).

מטרת מאמר זה היא להדגיש את החשיבות שיש להוראת מתמטיקה בדרך של תובנה מספרית לכל התלמידים ובעיקר למתקשים. המחקר בוחן את ההבדלים בין תלמידים מתקשים ולא מתקשים בכיתות ג'–ו' בעת ביצוע חישוב כאשר מוגשות להם מטלות המעודדות תובנה מספרית. היעד של מחקר זה הוא לבדוק אם גם תלמידים מתקשים יכולים לפתור תרגילים מתוך תובנה מספרית כאשר מלמדים אותם לבצע התבוננות פנימית בתהליכים שהם מבצעים ולהשתמש באסטרטגיות מתאימות.

השערות המחקר

א. בתרגילים המעודדים **תובנה מספרית**, תלמידים מתקשים יצליחו לפתור תרגילים בארבע פעולות חשבון במדויק בדומה לתלמידים לא מתקשים.

ב. יימצא הבדל בין תלמידים מתקשים ולא מתקשים **במשתנה מהירות החישוב** לטובת הלא מתקשים.

ג. יימצא הבדל בין חישוב בעל פה וחישוב בכתב אצל התלמידים המתקשים והלא מתקשים לטובת החישוב בכתב שיהיה **מהיר ומדויק יותר**, ושההבדל בין דרכי החישוב יהיה גדול יותר אצל התלמידים המתקשים.

שיטה

הליך

את המבדק שפיתחו החוקרות בן-יהודה, שרוני ואלמוג (2014) ומופיע בפרק "כלים", העבירו סטודנטיות ומורות שלמדו בקורסים בהוראה מותאמת במכללות שונות ברחבי הארץ. הנבדקים למדו בזרם הממלכתי, ממלכתי-דתי והחינוך החרדי. אוכלוסיית הנבדקים פרושה באזורים רבים בארץ, ובהם יש אוכלוסיות בעלות רמות סוציו-אקונומיות מגוונות ובמגזרים מגוונים של בתי ספר. החוקרות הדריכו את המורות המשתלמות כיצד להעביר את המבדק. המורות התבקשו להעבירו לתלמידים בכיתות רגילות (בטווח של כיתות ג' עד ו'). המורה בכיתה של התלמיד העריכה האם הוא נחשב תלמיד עם תפקוד תקין במתמטיקה – "תלמיד לא-מתקשה" או עם תפקוד לא-תקין – "תלמיד מתקשה".

תיאור המדגם

נתוני המדגם זהים לאלו של מחקר קודם שבו תוקף כלי האבחון (בן-יהודה ואחרות, 2014). המדגם הוא מדגם נוחות שבו השתתפו 179 תלמידים מגיל שבע ועשרה חודשים עד 12 ועשרה חודשים הלומדים בכיתות ג'–ו' בחינוך הרגיל. 122 תלמידים (68.2%) לומדים במסגרות בתי ספר ממלכתיים, 19 (10.6%) לומדים בבתי ספר ממלכתיים-דתיים, ו-38 תלמידים (21.2%) לומדים במסגרות של החינוך החרדי. התלמידים לומדים בבתי ספר ב-30 יישובים בארץ על פי הפריסה הזו: 60% לומדים בבתי הספר במחוז מרכז, 23% לומדים בבתי הספר במחוז תל אביב, 7% במחוז דרום ו-10% במחוז ירושלים. כמה מהם מגיעים מיישובים שהסטטוס הסוציו-אקונומי של רוב האוכלוסייה הוא בינוני–נמוך ונמוך (למשל בני ברק, בית שמש, נתיבות, קריית גת, אשדוד, אשקלון, ערד) והאחרים מיישובים שהסטטוס הסוציו-אקונומי הוא בינוני ובינוני-גבוה (כפר סבא, רעננה, צורן–קדימה, קיבוץ רמת הכובש, תל אביב, הרצלייה, רמת השרון, ירושלים).

המורה העריכה את הישגיהם של ה"תלמידים המתקשים" במתמטיקה נמוכים במידה ניכרת מהממוצע הכיתתי. כמה מהם מקבלים סיוע מסל שילוב. שיעור התלמידים המתקשים הוא 30% בממוצע מכלל המדגם שזהו ההרכב השכיח בכיתה הטרוגנית.

התפלגות התלמידים על פי כיתות, מין ורמת התפקוד מופיעה בלוח מס' 1.

לוח מס' 1: התפלגות התלמידים על פי כיתה, מין ורמת התפקוד (במספרים ובאחוזים בסוגריים).[4]

	מין		רמת התפקוד		סה"כ
	בנים	בנות	מתקשים	לא מתקשים	
כיתה ג'	23 (46.9)	26 (53.1)	16 (32.7)	33 (67.3)	49 (27.4)
כיתה ד'	13 (38.2)	21 (61.8)	8 (23.5)	26 (76.5)	34 (19.0)
כיתה ה'	31 (50.0)	31 (50.0)	22 (35.5)	40 (64.5)	62 (34.6)
כיתה ו'	18 (52.9)	16 (47.1)	9 (26.5)	25 (73.5)	34 (19.0)
סה"כ	85 (47.5)	94 (52.5)	55 (30.7)	124 (69.3)	179 (100.0)

כלים

מבדק חישוב

את המבדק פיתחו ותיקפו שלוש חוקרות (בן-יהודה ואחרות, 2014). המבדק מורכב משני חלקים (נספח 1):

א. שלוש מטלות של פעולות חיבור וחיסור: המטלות כללו עשרה תרגילי חיבור וחיסור שהיה על הנבדק לפתור בשלוש דרכים (Modalities): בעל פה, בכתב ובאמצעות זיהוי תשובות נכונות או שגויות בסימון "נכון" או "לא נכון". בהתחלה התבקשו הנבדקים לחשב את התרגילים בעל פה ולאחר הפסקה של 20 דקות ניתנה אותה מטלה בכתב. לאחר 20 דקות נוספות ניתנו לנבדקים תרגילי הזיהוי. בהפסקות הזמן הייתה הסחה באמצעות שיחה על נושאים אחרים והעברת מטלות אחרות לא מתמטיות.

4. הלוח מופיע גם בתוך בן-יהודה ועמיתות (2014).

ב. שלוש מטלות של פעולות כפל וחילוק: המטלות כללו שנים עשר תרגילי כפל וחילוק שגם הנבדק היה צריך לפתור אותם בשלוש דרכים: בעל פה, בכתב ובאמצעות זיהוי תשובות נכונות או שגויות. דרך ההעברה היה זהה לזה של מטלות חיבור-חיסור.

מתן ציון: בעבור כל מטלה נבדק זמן ביצוע בשניות (משתנה 'מהירות החישוב') וציון מספר התשובות הנכונות (משתנה 'הדיוק').

המבדק נבנה על סמך דרישות תוכנית הלימודים בחשבון בבית הספר היסודי (2006) ועל יסוד תאוריות ומחקרים בנושאים הקשורים ליכולת חישוב ותובנה מספרית. הוא מופיע כחלק ממערכת אבחון בלתי-פורמלית "אח"ד מי יודע" (בן-יהודה ושרוני, 2009). המבדק נמצא תקף ומהימן (בן-יהודה ואחרות, 2014).

המבדק הורכב ברובו מקבוצות של שניים או שלושה תרגילים שיש ביניהם קשר המעודד שימוש בתובנה מספרית. לדוגמה: התרגיל 19+6 מופיע אחרי התרגיל 9+6, מה שמאפשר לפתור אותו באמצעות הפקה של מידע חדש על סמך פתרון קודם ומתוך שימוש בתובנה מספרית.

ניתוח הממצאים

עיבוד הממצאים נעשה במתודולוגיה משולבת:

א. ניתוח סטטיסטי-כמותי:

ב. א.1 בדיקת ההתפלגויות של משתני הדיוק ומהירות החישוב אצל תלמידים 'מתקשים' ואצל 'לא מתקשים'.

א.2. בדיקת אחוזי הביצוע של המטלות בכלל המדגם ובנפרד ל'תלמידים מתקשים' ול'תלמידים לא מתקשים'.

א.3. השוואה בין מתקשים ולא מתקשים (מבחני t).

ג. ניתוח איכותני: ניתוח ציטוטים נבחרים הלקוחים מהשיח של התלמידים.

ממצאים

ההשערה הראשונה הייתה שתלמידים מתקשים יצליחו לפתור נכון תרגילים המבוססים על תובנה מספרית, בדומה לתלמידים לא מתקשים. שערנו שהצגת תרגילים שיש ביניהם קשר, לדוגמה: 19+6;9+6 תאפשר לחשב במדויק תוך שימוש בתובנה מספרית.

ההשוואה בין ממוצעי הדיוק של תלמידים מתקשים ולא מתקשים נעשתה באמצעות מבחן two-tailed. הממצאים מופיעים בלוח מס' 2.

לוח מס' 2: הבדלים בין ביצועי התלמידים המתקשים והלא מתקשים בכל המטלות במשתנה הדיוק

המטלה	מתקשים (n=55) ממוצע (ס.ת)	לא מתקשים (n=124) ממוצע (ס.ת)	t	p-value	עוצמת האפקט Cohen's d
חיבור-חיסור בעל פה	7.96 (2.16)	9.42 (1.30)	4.64	0.00	1.09*
חיבור-חיסור בכתב	8.44 (2.21)	9.48 (1.44)	3.21	0.00	0.74**
זיהוי חיבור-חיסור	9.00 (1.50)	9.75 (1.01)	3.41	0.00	0.77
כפל-חילוק בעל פה	7.60 (3.53)	10.68 (2.49)	5.85	0.00	1.32*
כפל-חילוק בכתב	8.20 (3.55)	10.99 (2.34)	5.34	0.00	1.22*
זיהוי כפל-חילוק	9.54 (3.53)	11.41 (2.00)	3.66	0.00	0.87*

* עוצמת אפקט גבוהה, ** עוצמת אפקט בינונית

מן הממצאים עולה כי ההבדלים בין מתקשים ולא מתקשים במשתנה הדיוק, הם בעלי משמעות (p-value=0.00). בבדיקת עוצמת אפקט ההבדל על פי Cohen's d (Cohen, 1988) בין ממוצעי הדיוק של תלמידים מתקשים לממוצעי הדיוק של התלמידים הלא מתקשים, נמצא ש-4 מתוך 6 הבדלים היו בעלי עוצמת אפקט גבוהה (מ-0.8 ומעלה). בפעולות החיבור והחיסור רק הבדל אחד (במשימה בעל פה) היה בעל אפקט גבוה מאוד. ההבדלים בכל מטלות הכפל והחילוק היו בעלי עצמה גבוהה. בהשוואת ממוצעי הדיוק של שתי הקבוצות במטלות חיבור-חיסור בכתב ובזיהוי, נמצאה עוצמת אפקט בינונית (מ-0.5 עד 0.8). המשמעות היא שההבדלים בין מתקשים ולא מתקשים באים לידי ביטוי בעיקר בפעולות הכפל-חילוק. ההבדלים פחות מובהקים בפעולות החיבור-חיסור, למעט בחיבור-חיסור בעל פה.

על פי ממצאים אלה ההשערה הראשונה לא אוששה. ייתכן שאחת הסיבות לכך היא העובדה שההבדלים במשתנה הדיוק חושבו על כלל התרגילים, גם אלו שיש ביניהם קשר של תובנה מספרית וגם אלו שאין ביניהם קשר כזה, ולכן עוצמת האפקט היא גבוהה או בינונית.

עם זה התבוננות ממוקדת בממוצעים ובסטיות התקן מעלה כמה ממצאים חשובים. נמצא שבמשתנה הדיוק בכל המשימות, גם בחיבור-חיסור וגם בכפל-חילוק, הביצוע הממוצע של התלמידים המתקשים היה גבוה יחסית (לפחות 8 תרגילים מתוך 10 בחיבור-חיסור ולפחות 8 תרגילים מתוך 12 בכפל-חילוק), מה שמעיד על רמת תפקוד מעל הממוצע. ההבדלים בין התלמידים המתקשים והלא מתקשים באים לידי ביטוי בסטיות התקן הגדולות יותר בקבוצת המתקשים, במיוחד בכפל-חילוק, המעידות על שונות גבוהה בקרב קבוצה זו.

כדי להבין טוב יותר את מהות ההבדלים נעשה רישום של טווח הדיוק באחוזים בכל מטלה אצל כלל המדגם ובכל שכבת גיל על פי רמת התפקוד (מתקשים ולא מתקשים). הממצאים מוצגים בלוח מס' 3.

לוח מס' 3: טווח הדיוק בכל מטלה על פי כיתות אצל כלל המדגם ולפי רמת תפקוד (באחוזים)

המטלה	כלל המדגם n=179	כיתה ג' (n=49)		כיתה ד' (n=34)		כיתה ה' (n=62)		כיתה ו' (n=34)	
		לא מתקשים (n=33)	מתקשים (n=16)	לא מתקשים (n=26)	מתקשים (n=8)	לא מתקשים (n=40)	מתקשים (n=22)	לא מתקשים (n=25)	מתקשים (n=9)
חיבור-חיסור בעל פה	97–86	100–69	97–88	88–55	100–85	91–68	100–88	100–67	100–85
חיבור-חיסור בכתב	99–83	100–56	100–88	100–62	100–92	95–71	100–90	100–78	100–92
כפל-חילוק בעל פה	98–69	92–38	100–71	100–25	100–81	95–33	100–77	100–50	100–79
כפל-חילוק בכתב	99–72	100–54	100–81	100–37	100–81	95–32	100–82	100–62	100–87

התבוננות בלוח מראה שכלל התלמידים במדגם פתרו את התרגילים בדרך טובה (מעל 69% דיוק), וניכר שאין הבדל גדול באחוז הדיוק בין ביצוע בעל פה לביצוע בכתב גם במטלת חיבור-חיסור וגם במטלת כפל-חילוק. כמו כן אפשר לזהות שבמטלות חיבור-חיסור בכל הכיתות אחוזי הדיוק הנמוכים גבוהים מאחוזי הדיוק הנמוכים במטלות כפל וחילוק. כלומר בכל הכיתות ניכר דיוק רב בחישוב תרגילי חיבור-חיסור מאשר חישוב תרגילי כפל-חילוק הן בעל פה והן בכתב.

בהשוואת הדיוק המירבי בחישוב של קבוצת התלמידים המתקשים והלא מתקשים בכל שכבת גיל, אפשר לראות שאין הבדל ניכר בין מתקשים ללא מתקשים בכל הכיתות ובכל המטלות (בין 91% ל-100%), למעט המתקשים בכיתה ד' שבמטלת חיבור-חיסור בעל פה הגיעו לרמת דיוק מקסימלית של 88%. כלומר **גם תלמידים מתקשים מסוגלים להגיע לדיוק גבוה** (בין 88% ל-100%), **כמו התלמידים הלא מתקשים.**

יש לציין שאחוז הדיוק הנמוך אצל המתקשים יכול להיחשב רמת ביצוע טובה יחסית (בדרך כלל מעל 50% מהתרגילים חושבו נכון). בחישוב תרגילי חיבור וחיסור נעו אחוזי הדיוק הנמוך בין 56% ל-100%.

ממצאים אלה מבהירים את אופי ההבדלים שנמצאו בין מתקשים ולא מתקשים.

הממצא המראה אחוזי דיוק נמוכים יותר בכל המטלות אצל המתקשים בכיתה ד' לעומת אצל המתקשים בכיתה ג' דורש עיון. ייתכן שתלמידים בכיתה ג' מרבים להתאמן בעובדות יסוד בחיבור-חיסור, בעוד בכיתה ד' מתמקדים בחישוב במספרים גדולים ובמעבר לשברים וממעטים לתרגל חישוב של עובדות יסוד.

עיון בממצאים מעלה שהיו תלמידים שהתקשו מאוד בתרגילים מסוימים, כגון:

6X8; 32:4	בחישוב תרגיל כפל זה בעל פה, אחוז הדיוק היה נמוך אצל המתקשים (בין 33% דיוק בכיתה ד' ל-50% בכיתה ו'), כך גם בתרגיל בכתב (אחוז הדיוק הגבוה ביותר שהושג היה 69%). בעת חישוב תרגיל החילוק בעל פה אחוז הדיוק היה נמוך אצל התלמידים המתקשים (מ-25% דיוק בכיתה ד' עד ל-50% בכיתה ו'), ואולם בשלב מטלת הזיהוי גם התלמידים המתקשים זיהו נכון איזו תשובה נכונה ואיזו שגויה. ייתכן שהסיבה היא שהתלמידים המתקשים ידעו מה התשובה הנכונה ולכן זיהו אותה, אך היו כאלה שהתקשו לשלוף אותה בעל פה או בכתב. אצל תלמידים שאינם מתקשים לא מצאנו קושי בשליפת עובדה זו (טווח הדיוק הוא בין 96% ל-100%).
12:4	חיזוק לקושי של תלמידים מתקשים בעיקר בפעולת חילוק, נמצא בבדיקת תרגיל זה הנחשב לתרגיל קל ומוכר. אצל התלמידים המתקשים אחוזי הדיוק נעו בין 62% ל-88%, בעוד אצל התלמידים הלא מתקשים אחוזי הדיוק היו גבוהים בין 94% ל-100%.

בדיקת הביצוע בתרגילים ספציפיים שהיו בהם אחוזי דיוק גבוהים מאפשרת תובנות נוספות על הביצוע של התלמידים המתקשים והלא מתקשים במטלות למיניהן:

8+7; 15-8	בפתרון התרגיל 7+8 נמצא שאחוז הדיוק דומה אצל מתקשים ואצל לא מתקשים, והמתקשים אף הצליחו מעט מהלא מתקשים (למשל בכיתות ו' אחוז הדיוק אצל מתקשים היה 89% לעומת 84% אצל הלא מתקשים). בפתרון התרגיל 8-15 אחוז הדיוק היה דומה אצל המתקשים ואצל הלא מתקשים (לא מתקשים 92% ומתקשים 89%). ייתכן שגם התלמידים המתקשים, בדומה ללא מתקשים, זיהו נכון קשר של הפיכות.
9+6; 19+6	הדרך שהתלמידים פתרו בה תרגילים אלה יכולה ללמד כי רק כמה מהתלמידים המתקשים זיהו את הקשר בין שני התרגילים האלה (תובנה מספרית), בעוד מרבית הלא מתקשים עשו זאת. בחישוב בעל פה בתרגיל 6+9 נמצאו הבדלים בין המתקשים ללא מתקשים בכל שכבות הגיל (טווח אחוזי הדיוק אצל המתקשים היה בין 69% ל-87% ואצל הלא מתקשים היה בין 88% ל-100%). פער זה לא השתנה בתרגיל 6+19 (טווח אחוזי הדיוק אצל המתקשים היה בין 63% ל-77% ואצל הלא מתקשים היה בין 85% ל97%-). בשיח שעשו התלמידים המתקשים בשלב הזיהוי, ועליו נרחיב בהמשך, ציינו רבים מהם שקיים קשר בין שני התרגילים. כלומר כאשר תלמידים מתקשים נדרשים לבצע חישוב באמצעות השוואה ויצירת קשר בין הביטויים החשבוניים, הם מצליחים לפתור את התרגילים.

על אף שההשערה הראשונה לא אומתה, הרי שאופי הפעילות בתרגילים שתוארו לעיל, מראה כי על אף ההבדל הסטטיסטי, גם תלמידים מתקשים יכולים להגיע לרמת דיוק דומה לזו של תלמידים לא מתקשים. ההבדל נגרם, בחלקו, בשל השונות הגדולה יותר אצל קבוצת המתקשים, ובחלקו בשל ההבדלים בערכי הדיוק הנמוכים.

ההשערה השנייה הייתה שיימצא הבדל בין תלמידים מתקשים ולא מתקשים **במשתנה מהירות החישוב.** בלוח מס' 4 מופיעים ממוצעי זמן חישוב התרגילים אצל תלמידים מתקשים ולא מתקשים.

מן הממצאים עולה שיש הבדלים מובהקים בין קבוצת המתקשים והלא מתקשים במהירות החישוב של כל המשימות בכל הדרכים. לתלמידים המתקשים נדרש זמן רב יותר במידה ניכרת לפתרון התרגילים מזה הנדרש מהתלמידים הלא מתקשים. עוצמת אפקט גבוהה נמצאה בשתי מטלות החיבור והחיסור (בעל פה, בכתב) ובכל מטלות הכפל-חילוק (בעל פה, בכתב, זיהוי).

הסתכלות מדוקדקת במשתנה מהירות החישוב מראה שבכל הפעולות (חיבור-חיסור, כפל-חילוק) ובשתי הדרכים (בעל פה ובכתב) ממוצעי זמני החישוב אצל המתקשים גבוהים מאלו של הלא מתקשים.

סטיות התקן (ס.ת.) אצל הלא מתקשים נעות בין 22.71 ל-52.49 בעוד אצל המתקשים הן נעות בין 44.15 ל-119.85, כלומר הן גם גבוהות יותר (אצל המתקשים) וגם מעידות על שונות רבה יותר בין הנבדקים, לעומת קבוצת הלא מתקשים. נתונים אלה מראים כי המתקשים אינם קבוצה הומוגנית לעומת הלא מתקשים שרמת ההומוגניות שלהם גבוהה יותר.

ישנה חשיבות מיוחדת לממצאים על אודות ממוצעים וסטיות התקן של כלל אוכלוסיית המדגם, שכן הם משקפים את המצב בכיתה הטרוגנית. זמני חישוב מעל כדקה בביצוע 10 תרגילי חיבור-חיסור בעל פה או בכתב ובביצוע 12 תרגילי כפל-חילוק בעל פה או בכתב, יכולים לשמש איתות למורה על קשיים בחישוב אצל תלמידיו. במחקר זה מצאנו שהממוצע לפתרון אוסף התרגילים במטלה הוא כ-68 שניות.

מניתוח מטלות הזיהוי עולה כי שיעור הדיוק היה גבוה כצפוי בכל הכיתות אצל המתקשים והלא מתקשים: בחיבור-חיסור 90–98 אחוזי הצלחה; בכפל-חילוק 91–99 אחוזי הצלחה; ולכן לא היה מקום להשוואה סטטיסטית. מהירות ביצוע מטלת הזיהוי, גם בחיבור-חיסור וגם בכפל-חילוק, הייתה גבוהה ולא שימשה גורם מבחין. מטלת הזיהוי אינה בודקת מיומנות של חישוב, אלא מיומנות של בקרה לצורך תיקון טעות. יש לזכור כי במחקר זה המוקד היה בהיבט של דיוק וזמן בחישוב. עם זה שיעור הדיוק הגבוה במטלות הזיהוי אצל המתקשים מחזק את

לוח מס' 4: זמן החישוב הממוצע בכל מטלה על פי רמת התפקוד

המטלה	מתקשים (n=55) ממוצע (ס.ת)	לא מתקשים (n=124) ממוצע (ס.ת)	t	p-value	עוצמת האפקט Cohen's d
חיבור-חיסור בעל פה	105.89 (46.06)	53.27 (22.71)	-8.06	0.00	1.99*
חיבור-חיסור בכתב	94.27 (52.71)	46.41 (29.62)	-6.30	0.00	1.51*
זיהוי חיבור-חיסור	86.55 (44.15)	55.45 (52.49)	-3.71	0.00	0.57**
כפל-חילוק בעל פה	138.69 (84.31)	67.29 (36.41)	-5.87	0.00	1.52*
כפל-חילוק בכתב	147.06 (105.78)	59.98 (44.35)	-5.67	0.00	1.49*
זיהוי כפל-חילוק	110.72 (119.85)	58.21 (41.29)	-2.93	0.00	0.82*

* עוצמת אפקט גבוהה, ** עוצמת אפקט בינונית

התפיסה שתלמידים מתקשים אכן יודעים לחשב את התרגילים אך מתקשים בשליפת הפתרון, בעיקר בדרכים בעל פה. למטלות הזיהוי הייתה חשיבות בחלק האיכותני של מחקר זה שבו הילד התבקש להסביר את התשובה שלו. מניתוח איכותני של השיח שניהלו התלמידים במהלך פתרון תרגילי הזיהוי, נבחין שכל התלמידים, המתקשים והלא מתקשים, הבחינו בקשר בין התרגילים שהוצגו להם.

אמירות מתוך השיח של התלמידים מעידות על הקשר בין דיוק בביצוע ובין זמן הביצוע ומדגימות שגם תלמידים מתקשים מחשבים מדויק כאשר ניתן להם זמן להפעלה של אסטרטגיות יעילות.

נציג כמה דוגמאות:

ענבל, תלמידה מתקשה, לומדת בכיתה ד' בבית ספר ממלכתי. הדוגמאות להלן לקוחות מהשיח שלה בזמן שפתרה את מטלת הזיהוי. הוצגו לפניה בעיות חישוב פתורות והיא התבקשה לזהות אם התשובות נכונות או שגויות ולומר את דעתה על הפתרונות המוצגים.

4X3=12; 4X6=14	ענבל: "הילד טעה. יש קשר. איך הוא לא רואה את זה שזה קשור?"
5X8=40; 6X8=41	ענבל: "אין היגיון במה שכתוב. זה לא נראה [נכון] ככה. 40 ועוד 1 זה שהוסיפו רק 1 וכאן צריך להוסיף עוד פעם אחת. כמה? 6?". מראיינת (מצביעה על התרגיל): ענבל: "שימי לב. 8. הייתי נותנת לו ציון טוב ואומרת לו שבפעם הבאה ישים לב למספרים"

ראוי לציין שזמן החישוב של ענבל במטלות הכפל היה ארוך מאוד (בעל פה 270 שניות ובכתב 260 שניות). בעת החישוב בעל פה היו לה שבע שגיאות והיא נעזרה באצבעות כדי לחשב, הייתה חסרת שקט, הרימה את קולה וחזרה ואמרה "עושים פעמים", "עושים פעם ועוד פעם". לעומת זאת בכתב היו לה רק שתי שגיאות. כלומר ענבל לא שולפת במהירות את עובדות היסוד בכפל, אך ניכר שהיא משתמשת באסטרטגיות חישוב הנשענות על הבנה. כאשר התרגילים רשומים לפניה היא מזהה קשר בין ביטויים חשבוניים ויודעת לשוחח עליהם.

נרי, תלמידה מתקשה, לומדת בכיתה ג'

;4X6=14 4X3=12	"לא יכול להיות 14. 6 ועוד 6 זה כבר 12, ואז 12 ועוד 12 זה 24".
12:4=2	"קשה לי להסביר. זה לא יכול להיות. זה לא נכון כי כפול 6 זה 12. זה [המ־ספר 4] מספר קטן. התלמיד מתבלבל וצריך ללמד אותו להסתכל".
13+6=17;3+6=9	"לא נכון. קשה להסביר. רואים ש 3+7=10 ואז 13+7=20 והורדתי 1 זה 19".

השיח של נרי מראה שגם תלמידים מתקשים מכירים אסטרטגיות שונות לחישוב ומשתמשים באומדן ("זה לא יכול להיות"), אם כי לעיתים מתקשים לחשב ברצף ובמדויק. מבחינים שנרי מכירה אסטרטגיות הנשענות על חוק הפילוג וכן על עקרון הפיצוי, אך השיח שלה מעיד על קושי לנהל את החישוב בעזרת זיכרון עבודה וכן על קושי ביישום ההבנה הטובה שלה.

דניאל, תלמיד מתקשה עם בעיות קשב וריכוז, לומד בכיתה ה' דניאל שוחח במהלך עשיית מטלות הזיהוי וענה לשאלת המאבחנת כיצד היה מציע ללמד את פותר התרגילים.

8+7=15; 7+8=14 15-8=6	"רק ראיתי שזה לא יכול להיות כי זה החילוף. וזה ההפך. זה צריך להיות אותו דבר. ואת זה הופכים וזה לא יכול להיות".
9+6=15 19+6=15 26-5=15	"לא הגיוני. זה קשור אחד בשני. את התלמיד הזה צריך ללמד הכול. הוא לא מבין מה קורה פה. זה קל כי רואים את הקשר. אם הוא לא רואה קשר אז יהיה לו קשה".

בעת ביצוע התרגילים במטלת חיבור-חיסור בכתב ענה דניאל נכון על התרגילים 19+6=25; 29+6=35 אך טעה כשפתר 25-6=21 ואמר: "ראיתי שזה חייב להיות 1 כי 6 פחות חמש שווה 1", כלומר על אף שמוכרת לו האסטרטגיה של חיפוש קשר של הפיכות, הוא לא יישם אותה בכל הפעמים. כאשר פתר את מטלת החישוב בעל פה אמר לעצמו בלחש "זה דומה" אך התקשה לשמור על קשר עם המטלה (אמר: "אוף, אוף, מה היה שם?"), הוא פתר במדויק את כל תרגילי החישוב בעל פה, אך זמן הביצוע היה ארוך (120 שניות).

חנוך, תלמיד עם לקויות למידה וקושי בשמירה על קשב, לומד בכיתה ג'

בשלב הזיהוי חנוך תיאר במהלך שיח שימוש באסטרטגיה של השוואה והסקה. אולם בשלב הראשון, כאשר נדרש לחשב בעל פה את התרגילים הוא חישב מדי פעם באצבעות ולא שם לב לקשר בין התרגילים השונים זה מזה. למשל: הוא חישב בעל פה את התרגיל 9+6 בספירת המשך, שם לב לקשר ל-19+6 ואמר "עושים ועוד 10", אך התחיל לחשב מההתחלה את התרגיל 29+6 בספירת המשך, כלומר התקשה להמשיך לנהל ברצף את מהלך הפתרון.

;9+6=15 19+6=15 25-6=15 ;29+6=35	"29 ועוד 6 זה הנכון כי זה כמו שחישב את 9+6=15 ורק היה צריך להוסיף עוד 20 אבל 19+6 זה ממש לא הגיוני. הילד בטח לא שם לב".

בדוגמאות אלה וברבות אחרות שלא הוצגו כאן, יש מקום להבחין שכאשר מזמנים לתלמידים מצבים המאפשרים להם להפעיל אסטרטגיה של השוואה הם מזהים את הקשר בין הביטויים החשבוניים ובונים ידע חדש על סמך הידע הקיים. כאשר לא מזמנים להם מצבים כאלה, הם מתחילים לחשב מחדש חישוב ארוך הגורר קשיים בניהול פרוצדורות החישוב.

בהשערה השלישית הנחנו שיימצא הבדל בין חישוב בעל פה וחישוב בכתב אצל התלמידים המתקשים והלא מתקשים לטובת החישוב בכתב שיהיה מהיר ומדויק יותר, ושההבדל בין דרכי החישוב יהיה גדול יותר אצל התלמידים המתקשים.

מחישוב הפערים בין ממוצעי הדיוק בלוח מס' 2 עולה שהפער בין חיבור-חיסור בעל פה לחיבור-חיסור בכתב אצל הלא מתקשים היה 0.06 לטובת ביצוע בכתב, בעוד אצל המתקשים היה 0.48. הפער בין כפל-חילוק בעל פה לחיבור-חיסור בכתב אצל הלא מתקשים היה 0.31 לטובת ביצוע בכתב, בעוד אצל המתקשים היה 0.60. הפער במשתנה הדיוק בין דרכי החישוב השונים זה מזה אצל המתקשים גבוה לעומת לא מתקשים.

בעניין מהירות החישוב (לוח 4) התמונה שונה במעט והפערים בין דרכי החישוב בקרב המתקשים והלא מתקשים אינם גדולים: הפער בין זמני החישוב של חיבור-חיסור בעל פה ובכתב אצל המתקשים הוא 11 שניות לטובת חישוב בכתב, ואצל הלא מתקשים הוא 7 שניות. בכפל-חילוק אצל המתקשים הפער הוא 9 שניות לטובת חישוב בעל פה ואצל הלא מתקשים הוא 8 שניות לטובת חישוב בכתב.

מכאן אפשר ללמוד שאכן יש הבדל בין דרכי החישוב, אך הוא בולט במשתנה הדיוק לעומת משתנה המהירות. מעניין שלחישוב תרגילי הכפל והחילוק בכתב נדרש למתקשים זמן רב מחישוב בעל פה, בעוד בכל שאר הפעולות נדרש לחישוב בעל פה זמן רב מאשר חישוב בכתב גם למתקשים וגם ללא מתקשים.

הסבר מתאים הוא ששליפת עובדות יסוד בעל פה דורשת משאבי זיכרון-עבודה מאשר כתב (Dehn, 2008; Mabbott & Bisanz, 2008) ולכן התלמידים התקשו יותר בעת חישוב בעל פה. בעת חישוב בכתב התלמידים יכלו לזהות בקלות מבחינה חזותית את הקשר בין התרגילים. יוצא מן הכלל היה אחוז הדיוק במטלת חיבור-חיסור בעל פה בכיתה ג' בכלל המדגם, שבו אחוז הדיוק הנמוך בעל פה (69%) היה גבוה מאשר בכתב (56%). ייתכן שבשל התרגול הרב בחישוב בעל פה בפעולות אלה בשלב למידה זה.

הדוגמאות להלן מעידות על ההבדלים בביצוע בכתב לעומת ביצוע בעל פה:

הילה, תלמידה מתקשה בכיתה ה', חישבה את תרגילי החיבור והחיסור בעל פה בזמן של 146 שניות (זמן ארוך מאוד לביצוע כל התרגילים במטלה). בעת החישוב בעל פה היא ביקשה לחזור כמה פעמים על התרגיל, השתמשה באסטרטגיה של מנייה באצבעות וחישבה כל תרגיל מההתחלה בלי להבחין בקשר בין תרגילים ומבלי ליישם את חוקי הפעולה (כגון בעת מצבי חילוף). עם זה בעת חישוב בכתב היא זיהתה קשר בין התרגילים, ופתרה את התרגיל מתוך יישום עקרון הפיצוי (אמרה: "אם 6 ועוד 9 [שווה 15] אז 19 ועוד 6 שווה 25"), וכן יישמה את חוק חילוף (7+8 ו-8+7).

כך גם אלמוג, תלמיד מתקשה הלומד בכיתה ה', העיד על עצמו: "הרבה יותר טוב לי לראות מה שכתוב. אני מבין אבל בורח לי כשזה לא כתוב". בכל זאת נמצא שהיה איטי יותר בפתרון בכתב (בעל פה 52 שניות ובכתב 95 שניות), ולא תמיד זיהה את הקשר בין התרגילים גם כאשר התרגילים היו רשומים בכתב. לדוגמה בעת חישוב בעל פה ובכתב פתר נכון את התרגיל 5X4 אך לא קישר לתרגילים 6X8 ו-5X8. לעומת זאת במטלת הזיהוי אמר שיש קשר בין התרגילים האלה ועל התרגיל 6X8=41 אמר "זה לא נכון כי מוסיפים עוד שמונה".

מערכות החינוך בארץ ובעולם מצפות שתלמידים בכיתה ג' ישלטו בחישוב עובדות יסוד בחיבור וחיסור במספרים שלמים (US Department of Education, 2008). ואכן, במחקר שלנו לא נמצא פער בין תלמידים מתקשים לתלמידים לא מתקשים בכיתה ג' בשני המשתנים של דיוק וזמן. אחוז הדיוק עולה במידה ניכרת ככל שעולה הגיל.

דיון ומסקנות

כמאבחנים, מורים וכחוקרים הנחשפים מדי יום ביומו לתלמידים מתקשים ולתלמידים עם ליקויי למידה במתמטיקה, חשוב לנו שהערכת הידע החישובי שלהם לא תישען אך ורק על משתנים של מהירות ודיוק בחישוב (ראו נתוני מבדק במאמר קודם – בן-יהודה ואחרות, 2014). עליה לכלול גם את חקירת דרכי החישוב של התלמידים, ניתוח השיח שלהם בשעה שהם מסבירים את החישוב וחשיפת המידה שהם משתמשים בה בתובנה מספרית. יש לבנות תוכניות התערבות לתלמידים מתקשים במתמטיקה על פי ממצאי הערכה המביאה בחשבון את כל המשתנים האלה.

מטרת מחקר זה היא ללמוד על הדרך שבה תלמידים מתקשים ולא מתקשים מבצעים חישוב של עובדות יסוד וחישובים פשוטים, כאשר המטלות המוצגות לפניהם מעודדות תובנה מספרית. לשם כך השתמשנו במבדק שכלל תרגילי חישוב בארבע פעולות חשבון בעל פה, בכתב ובמטלת זיהוי תשובות נכונות ושגויות. הוצגו לפני התלמידים תרגילים שאפשר ליישם בהם אסטרטגיות הנשענות על תובנה מספרית. התלמידים התבקשו בכמה מהמטלות להסביר את הדרך שבאמצעותה הם פתרו את התרגילים (בן-יהודה ואחרות, 2014).

השערת המחקר הראשונה הניחה שתלמידים מתקשים יצליחו לפתור במדויק תרגילים הנשענים על **תובנה מספרית** בדומה לתלמידים לא מתקשים. השערת המחקר השנייה הניחה שההבדל העיקרי בין תלמידים מתקשים ללא מתקשים בחישוב יהיה **במשתנה של מהירות** ביצוע התרגילים לטובת הלא מתקשים.

ההשערה הראשונה לא אומתה וההשערה השנייה אומתה. כצפוי ממצאי המחקר מראים שישנם הבדלים בין תלמידים מתקשים ללא מתקשים במשתנים של החישוב: דיוק ומהירות חישוב, באופן שתלמידים מתקשים מדייקים פחות והחישוב לוקח להם זמן ארוך יותר. ממצא זה ידוע וצפוי (Bryant et al., 2000). עם זה התבוננות ממוקדת בממוצעים ובסטיות התקן של משתנה הדיוק מראה שבכל המשימות, גם בחיבור-חיסור וגם בכפל-חילוק, הביצוע הממוצע של התלמידים המתקשים היה גבוה יחסית (לפחות 8 תרגילים מתוך 10 בחיבור-חיסור ולפחות 8 תרגילים מתוך 12 בכפל-חילוק), מה שמעיד על רמת תפקוד לפחות ממוצעת. נוסף על כך, בדיקת תהליך החישוב מראה שימוש בדרכי פתרון הנשענות על תובנה מספרית אצל התלמידים המתקשים כמו אצל התלמידים הלא מתקשים. אומנם יישום האסטרטגיות דורש מהתלמידים המתקשים זמן רב מאוד, אך הוא משפר את הביצוע שלהם. ממצא זה מראה שגם תלמידים מתקשים מצליחים לפתור נכון אם מקצים להם די זמן לשם שימוש באסטרטגיות הנשענות על תובנה מספרית. בולר (Boaler, 2014) מדווחת על ממצאים דומים.

עוד נמצא במחקר שיש תרגילים שרמת הדיוק בחישוב של התלמידים המתקשים דומה לזו של הלא מתקשים. היו תרגילים "קלים" שגם המתקשים דייקו בהם בכל מאת האחוזים (לדוגמה 4X5 ו-3X4). תרגילים אלה שימשו לתרגילי בסיס המאפשרים פתרון מתוך תובנה מספרית של תרגילים קשים יותר (לדוגמה 8X5 על בסיס התרגיל 4X5). ואכן, מניתוח השיח שהתלמידים ניהלו נמצא שהם היו ערים לקשר זה והשתמשו בו כאסטרטגיה לפתרון. לדוגמה: על פי השיח שהתלמידים ניהלו אפשר להבחין שבתרגילים 6+19; 6+9, הם ייעלו את החישוב באמצעות שימוש בתרגיל המוכר לפתרון תרגיל חדש, מה שמראה כי התלמידים השתמשו באסטרטגיה מתוך הבנה. תהליך זה של קישור עובדות מאפשר אחסון אקטיבי ויעיל בזיכרון המתפתח בבוא העת לשליטה בחישוב ומאפשר להשתמש בהם בחישובים מורכבים יותר (Baroody, 2006; Kilpatrick et al., 2001; 2016). ברודי (Baroody, 2006) ובולר (Boaler, 2014) מדגישים שעל המורים למתמטיקה להתמקד בתהליך זה ולחשוף את התלמידים לדפוסים החוזרים בעובדות היסוד (חוקי הפעולה) ולגילוי קשרים בין עובדות.

באשר לאיטיות בחישוב, לא מפתיע שממוצעי מהירות החישוב של התרגילים אצל התלמידים המתקשים היו נמוכים מאשר אצל הלא מתקשים, שכן יישום אסטרטגיות בחישוב דורש זמן. עם זה גם השונות במשתנה מהירות החישוב בקרב המתקשים הייתה גבוהה: היו כאלה שמהירות החישוב שלהם הייתה דומה לזו של הלא מתקשים, וכאלה שנדרש להם זמן רב יותר לחשב.

בהשערה השלישית הנחנו שיימצא הבדל בשתי דרכי החישוב (חישוב בעל פה וחישוב בכתב) גם אצל תלמידים מתקשים וגם אצל הלא מתקשים. מצאנו שבחישוב בכתב בארבע פעולות החשבון אצל התלמידים המתקשים והלא מתקשים ממוצעי הדיוק גבוהים מאשר בחישוב בעל פה. ההשערה מסתמכת על מודלים המסבירים שבעת פתרון תרגילים בעל פה יש הישענות רבה על זיכרון העבודה אצל תלמידים עם הפרעות בלמידה (Dehn, 2008; Mabbott & Bisanz, 2008; Kyttälä at al., 2010; Bergman-Nutley & Klingberg, 2014). זיכרון זה עשוי להיות חלש ולכן ביצוע התרגילים בעל פה קשה להם יותר. כאשר התרגיל מוצג חזותית יש פחות עומס על זיכרון העבודה ולכן הדיוק גבוה יותר וזמן הפתרון נמוך יותר (Barrera-Mora & Reyes-Rodriguez, 2019). הצגת תרגילים בכתב מאפשרת לתלמידים לזהות ביתר קלות את הקשר בין הסמלים הגרפיים שבתרגילים, להשוות ולפעול מתוך תובנה מספרית ומתוך כך להגיע לתוצאה מדויקת יותר לעומת חישוב בעל פה. עדות לכך ניתנה בשיח של התלמידים שאמרו "רואים שזה קשור", "רואים שזה אותו הדבר".

לגבי התלמידים המתקשים מצאנו ממצא מעניין והוא שבחישוב חיבור וחיסור בכיתה ג' היה הדיוק בחישוב בעל פה טוב מהחישוב בכתב. אין לנו הסבר ברור לממצא זה אך ייתכן שהסיבה היא שמורים להוראה מותאמת בכיתות יסוד מרבים לתרגל תרגילי חיבור וחיסור, שכן הם רואים בהם ידע בסיסי הדרוש ללומד המתקשה לצורך למידת המשך. בגיל מאוחר (כיתות ה'-ו') פוחת השינון ופוחתת מיומנות החישוב בעל פה. עוד מצאנו במחקר זה שבחישוב תרגילי הכפל והחילוק בכתב נדרש למתקשים זמן רב מאשר חישוב בעל פה, בעוד בכל שאר הפעולות נדרש זמן רב יותר לחשב בעל פה לעומת חישוב בכתב גם למתקשים וגם ללא מתקשים.

הממצא החשוב ביותר במחקר זה הוא **שגם תלמידים מתקשים יכולים להצליח כאשר מעודדים אותם לחשב בדרך של תובנה מספרית.** תובנה מספרית מחזקת את היכולת שלהם לזכור עובדות מתמטיות ולחשב ביעילות ובגמישות. שיחה, הנמקה ורפלקציה על הסיבות לשימוש בשיטות מגוונות מפתחות את הזיכרון ואת ההבנה ומאפשרות ללומד לפעול מתוך תחושת שליטה (Barrera-Mora & Reyes-Rodriguez, 2019). חשוב ללמד תלמידים שהישגיהם נמוכים להשתמש במספרים בגמישות ולפתח רהיטות חישובית ותובנה מספרית. מורים המדגישים שינון וחישוב מהיר של עובדות יסוד גורמים לתלמידים ללחץ ולחרדה ממקצוע המתמטיקה (Remiraz et al., 2013).

לממצאי מחקר זה יש כמה השפעות יישומיות חשובות:

א. נמצא שההבדל העיקרי בין תלמידים מתקשים לתלמידים לא מתקשים הוא במשתנה מהירות החישוב, וכאשר נותנים למתקשים די זמן כדי ליישם את אסטרטגיות החישוב מתוך תובנה מספרית הם מצליחים לפתור ברמה דומה לזו של הלא מתקשים, לפחות בחלק מהתרגילים. אם כך אפשר להסיק שבעת הערכת הידע שלהם יש לספק להם מטלות המאפשרות ליישם אסטרטגיות המסתמכות על תובנה מספרית ויש לתת להם די זמן כדי ליישם את התובנה המספרית שלהם.

ב. ראוי שמורים ומאבחנים לא יסתפקו בהסתכלות בתוצר החישוב בלבד אלא יבקשו מהתלמיד לתאר את הדרך שהוא פועל לפיה, את דרכי החשיבה שלו ואת האסטרטגיות שהוא משתמש בהן.

ג. ממוצעי זמן החישוב של כלל אוכלוסיית המדגם הלקוחים מכיתות הטרוגניות, מראים שהתלמידים פתרו 10 תרגילי חיבור וחיסור או 12 תרגילי כפל וחילוק, בזמן ממוצע של כ-68 שניות (למקבץ כולו). ממצא זה יכול לאותת למורה שכל מי שזמן החישוב שלו נמוך מממוצע זה במידה רבה עלול להיחשב מתקשה.

ד. מומלץ להגיש לתלמידים משימות המשלבות בין תרגילי חישוב בעל פה ובכתב, שכן החישוב בכתב לוקח פחות זמן.

ה. תוכניות התערבות ללימוד חישוב לתלמידים מתקשים צריכה לכלול שני מרכיבים מרכזיים: הוראה של אסטרטגיות המשתמשות בתובנה מספרית לצד אימון לשליפה מהירה של מידע חישובי.

ממצאי מחקר זה הם בסיס ראשוני לחקירה נוספת. במחקר זה התמקדנו בתרגילים שיש ביניהם קשר המאפשר יישום אסטרטגיות הנשענות על תובנה מספרית, ולא השווינו את הממצאים עם נתונים מתרגילים המוצגים במקרה ושאינם נשענים בהכרח על תובנה מספרית. יש מקום למחקר נוסף שירחיב את ההתבוננות בדרכי החישוב ויאפשר להשוות את מידת הדיוק ומהירות החישוב בתרגילים שיש ביניהם קשר הנשען על תובנה מספרית, לתרגילים המוצגים במקרה וללא קשר כזה. נוסף על כך, דרוש מחקר המשך שיוגדרו בו רמות קושי של התלמידים בדיוק רב על פי הישגים ולא רק על פי הערכות מורה.

רשימת מקורות

בן-יהודה, מ' ושרוני, ו' (2009). **אח"ד מי יודע?: אבחון חשבון דידקטי: ערכה לאבחון ואיתור קשיים בחשבון/מתמטיקה.** יסוד.

בן-יהודה, מ', שרוני, ו' ואלמוג, נ' (2014). פיתוח כלי לבדיקת המהירות והדיוק בחישוב המבוסס על תובנה מספרית בקרב תלמידים בכיתות ג'-ו'. **דפים, 58**, 197-224.

ברוזה, א' ובן-דוד קוליקנט, י' (2017). תהליכי למידה של תלמידים תת-משיגים במתמטיקה בסביבה עשירה בפיגומים ותיווך אינטנסיבי של מורה – חקר מקרה. **מספר חזק 2000, 28**, 29-14.

דורפברגר, ש' ומלאכי, ר' (2018). תרומתם של סוגי הוראה שונים לזכירת עובדות הכפל בקרב תלמידות יסוד בחינוך הממלכתי-דתי. **רב גוונים, 16**, 215-236.

כץ, ש' ודרור, ט' (2014). אמונות מחוללות פעולה – גם במתמטיקה. **שאנן, יט**, 195-219.

מרק-זגדון, נ' (2011). דיסקלקוליה התפתחותית: הגדרה, מאפיינים והשלכות דידקטיות. **מספר חזק 2000, 19**, 10-14.

נשר, פ', מאונטוויטן, מ', אוברמן, ג', אלברט, ג', וייס, ר', עמית, מ', פרידלנדר, א', קורן, מ', ראסלאן, א' ושטיינברג, ר' (2006). **תכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים.** משרד החינוך, התרבות והספורט. https://meyda.education.gov.il/files/Tochniyot_Limudim/Math/Yesodi/mavo1.pdf

מרק-זגדון, נ', בן יהודה, מ', זילבר-מלמד, ע', מירון, ר', סגליס, ב', פיילכנפלד, ד' ותנעמי, י' (2014). **מסמך התאמת תכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי לתלמידי החינוך המיוחד.** אגף פרסומים, משרד החינוך. https://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/matematika/mismach_hatamot.pdf

משרד החינוך. (2010). **מסקנות פדגוגיות ממבחן מיצ"ב במתמטיקה לכיתה ה' – תשס"ט.** https://cms.education.gov.il/NR/rdonlyres/ED8408A2-65F7-42F2-B297-3C840AE8D40D/127101/MaskanotPedagogiot1.

Andrews, P., & Sayers, J. (2015). Identifying opportunities for grade one children to acquire foundational number sense: Developing a framework for cross cultural classroom analysis. *Early Childhood Education Journal*, *43*(4), 257-267.

Baker, S., Gersten, R., Flojo, J., Katz, R., Chard, D., & Clarke, B. (2002). *Preventing mathematics difficulties in young children: Focus on effective screening of early number sense delays* (Vol. 305). Technical Report, Pacific Institutes for Research.

Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics*, *13*(1), 22-31. https://www.kentuckymathematics.org/docs/eerti-BaroodyTCM2006.pdf

Baroody, A. J. (2016). Curricular approaches to connecting subtraction to addition and fostering fluency with basic differences in grade 1. *PNA, 10*(3), 161-190. http://dx.doi.org/10.30827/pna.v10i3.6087

Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodriguez, A. (2019). Fostering middle school students number sense through contextualized tasks. *IEJEE, 12*(1), 75-86. https://www.iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/800/432

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense implications for children with Mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333-339. https://doi.org/10.1177/00222194050380040901

Bergman-Nutley, S., & Klingberg, T. (2014). Effect of working memory training on working memory, arithmetic and following instructions. *Psychological Research, 78*(6), 869-877. https://doi.org/10.1007/s00426-014-0614-0

Boaler, J. (2014). Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts. *Youcubed*, 1-28. https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2017/09/Fluency-Without-Fear-1.28.15.pdf

Bryant, D. P., Bryant, B. R., & Hammill, D. D. (2000). Characteristic behaviors of students with LD who have teacher-identified math weaknesses. *Journal of Learning Disabilities, 33*(2), 168-177. https://doi.org/10.1177/002221940003300205

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*(1), 3-18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Lawrence Earlbaum Associates.

Dehn, M. J. (2008). *Working memory and academic learning: Assessment and intervention*. John Wiley & Sons, Inc.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.

Dehaene, S. (2001). Précis of the number sense. *Mind & language, 16*(1), 16-36. https://doi.org/10.1111/1468-0017.00154

Faulkner, V. N., & Cain, C. (2009). The components of number sense: An instructional model for teachers. *Teaching Exceptional Children, 41*(5), 24-30. https://doi.org/10.1177/004005990904100503

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (n.d.). *CCSSM: Common core state standards for mathematics*. https://www.nctm.org/ccssm

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. https://www.rainierchristian.org/NCTM_principles-and-standards-for-school-mathematics.pdf

US Department of Education. (2008). *Foundations for success: The final report of the national mathematics advisory panel.* https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500486.pdf

Remiraz, G., Gunderson, E., A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2013). Math anxiety, working memory and math achievement, in early elementary school. *Journal of Cognition and Development, 14*(2), 187-202. https://doi.org/10.1080/15248372.2012.664593

Rusconi, E., Priftis, K., Rusconi, M. L., & Umilta, C. (2006). Arithmetic priming from neglected numbers. *Cognitive Neuropsychology, 23*(2), 227-239. https://doi.org/10.1080/13594320500166381

Russell, S. J. (2000). Developing computational fluency with whole numbers. *Teaching Children Mathematics, 7*(3), 1-9. https://investigations.terc.edu/inv2/wp-content/uploads/2017/10/Developing-Computational-Fluency-with-Whole-Numbers-in-the-Elementary-Grades.pdf

Yang, D. C. (2005). Number sense strategies used by 6th grade students in Taiwan. *Educational Studies, 31*(3), 317-333. https://doi.org/10.1080/03055690500236845

Zuhal, Y. (2017). Young children's number sense development: Age related complexity across cases of three children. *International Electronic Journal of Elementary Education, 9*(4), 891-902. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1146711.pdf

Geary, D. C. (2003). Learning disabilities in arithmetic: Problem-solving differences and cognitive deficits. In H. L. Swanson, K. R. Harris, & S. Graham (Eds.), *Handbook of learning disabilities* (pp. 199-212). The Guilford Press.

Geary, D. C. (2005). Role of cognitive theory in the study of learning disability in mathematics. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 305-307. https://doi.org/10.1177/00222194050380040401

Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology*, *47*(6), 1539-1552. https://doi.org/10.1037/a0025510

Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 293-304. https://doi.org/10.1177/00222194050380040301

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218. https://doi.org/10.2307/749074

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *The Arithmetic Teacher, 36*(6), 6-11. https://doi.org/10.5951/AT.36.6.0006

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academies Press.

Kyttälä, M., Aunio, P., & Hautamäki, J. (2010). Working memory resources in young children with mathematical difficulties. *Scandinavian Journal of Psychology*, *51*(1), https://doi.org/10.1111/j.1467-9450.2009.00736.x 1-15

Lucangeli, D., Tressoldi, P. E., Bendotti, M., Bonanomi, M., & Siegel, L. S. (2003). Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade. *Educational Psychology, 23*(5), 507-520. https://doi.org/10.1080/0144341032000123769

Mabbott, D. J., & Bisanz, J. (2008). Computational skills, working memory, and conceptual knowledge in older children with mathematics learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 41*(1), 15-28. https://doi.org/10.1177/0022219407311003

נספח 4: תרגילי חיבור-חיסור המרכיבים את המבדק

חלק א: חישוב בעל פה	**חלק ב: חישוב בכתב** (לאחר כ-20 דקות או הסחות)	**חלק ג: סימון נכון/לא נכון** (לאחר כ-20 דקות או הסחות) **הסבר בקול (זיהוי)**
3+6=	3+6=	3+6=9
13+6=	13+6=	13+6=17
9+6=	9+6=	9+6=15
19+6=	19+6=	19+6=15
29+6=	29+6=	29+6=35
25-6=	25-6=	25-6=15
8+7=	8+7=	8+7=15
7+8=	7+8=	7+8=14
15-8=	15-8=	15-8=6
14-7=	14-7=	14-7=6
זמן________	זמן________	זמן________
מספר שגיאות______	מספר שגיאות______	מספר שגיאות______

האם $\alpha=60^\circ$?
שילוב אירוע הוראה בהכשרת מורים

רותי ברקאי

ד"ר רותי ברקאי
ראש תוכנית לתואר שני בחינוך מתמטי לבית ספר יסודי במכללת סמינר הקיבוצים ומרצה בכירה במכללת סמינר הקיבוצים. כמו כן רותי היא חוקרת ומרצה באוניברסיטת תל אביב בחוג לחינוך מתמטי, מדעי וטכנולוגי. תחומי העניין המרכזיים שלה הם היבטים מתמטיים ודידקטיים של הוכחות של טענות מתמטיות, חשיבה מתמטית בגילים צעירים (3-6) ופיתוח מקצועי של סטודנטים להוראת מתמטיקה ושל מורים למתמטיקה ושילוב אירועי הוראה בתהליך זה.

תקציר

אחד ממרכיבי ידע תוכן פדגוגי הנחוץ להוראת מתמטיקה הוא ידע על דרכי חשיבה ושגיאות אופייניות של תלמידים. לפיכך חוקרים בחינוך מתמטי ממליצים לחשוף מורים וסטודנטים להוראת מתמטיקה לשגיאות תלמידים. אחת הדרכים המומלצות כאן היא באמצעות הצגה ובחינה של אירועי הוראה הכוללים שגיאות תלמידים. במחקר זה השתתפו 25 סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה לבית הספר העל-יסודי. המורים התבקשו לפתור מטלה טריגונומטרית שהוצגה לתלמידים בכיתה י"א, ובהמשך לדון באירוע הוראה המתמקד בשיח בין זוג תלמידים במהלך פתרון המטלה. בעוד כל הסטודנטים רשמו פתרון נכון, שמונה סיפקו רק אחד משני הפתרונות של משוואה טריגונומטרית שהתקבלה במהלך פתרון המטלה. כמעט כל הסטודנטים (23) זיהו לפחות שגיאה אחת משגיאות זוג התלמידים במהלך פתרון המטלה.

אירוע ההוראה מעלה דילמות באשר לתפקיד השרטוטים במטלות טריגונומטריות. מהמאמר עולה כי חשיפת הסטודנטים לאירוע הוראה מספקת הזדמנויות לדון בנושאים הקשורים לידע מתמטי ולמכשולים שתלמידיהם לעתיד עשויים להיתקל בהם בעת פתרון מטלות.

מילות מפתח: סטודנטים להוראת המתמטיקה; אירועי הוראה; שימוש בשגיאות בהוראת המתמטיקה.

מבוא

בעשורים האחרונים בחינוך מתמטי מומלץ לעסוק בדרכים מסוימות בדרכי חשיבה של תלמידים על מושגים ותהליכים מתמטיים. גוף הידע המצטבר בנושא דרכי חשיבה של תלמידים כולל מקרים מתועדים של שגיאות שמתרחשות לעיתים קרובות בתהליך הלמידה (למשל, Ashlock, 2010; Clements et al., 2013; Fritz et al., 2019; Grouws, 1992; Kilpatrick et al., 2001; Lester, 2007).

גוף ידע משלים מתאר ידע וגישות של מורים כלפי שגיאות מתמטיות של תלמידים ומספק עדויות לכך שידע תוכן של מורים ואמונותיהם על הדרכים לבחינת שגיאות תלמידים במהלך הלמידה משפיעים על דרכי הטיפול שלהם בשגיאות ועל דרכי ההוראה שלהם (למשל, Bray, 2011; Gagatsis & Kyriakides, 2000; Rach et al., 2012; Anderson et al., 2018). לפיכך חוקרים בחינוך מתמטי ממליצים להתמקד בין השאר בהתמקדות בשגיאות תלמידים בתוכניות להכשרה ולקידום של מורים למתמטיקה. אחת הדרכים המומלצות בהקשר זה היא בהצגה ודיון במקרים (cases) הכוללים שגיאות של תלמידים (למשל, Barnett, 1991; Smith & Friel, 2008; Walen & Williams; 2000).

מאמר זה מתאר מקרה מסוג אירוע הוראה (case) שהוצג לסטודנטים להוראת מתמטיקה במהלך לימודי הוראת מתמטיקה בבתי ספר על-יסודיים. אירוע ההוראה מתייחס למטלה טריגונומטרית שהוצגה לתלמידים בכיתה י"א, ומתמקד בשיח בין זוג תלמידים במהלך פתרון המטלה. הסטודנטים התבקשו לפתור את המטלה הטריגונומטרית שניתנה לתלמידים ולאחר מכן לדון, באמצעות סדרת שאלות, באירוע ההוראה ובשיח בין זוג התלמידים.

המאמר מתאר את הפתרונות שהציגו הסטודנטים למטלה הטריגונומטרית ואת התייחסותם לאירוע ההוראה. המאמר מתמקד בשתי שאלות:

1. באילו דרכים פתרו הסטודנטים את המטלה הטריגונומטרית?
2. האם הסטודנטים זיהו את השגיאות שעלו באירוע ההוראה בשיח בין זוג התלמידים?

רקע תאורטי

בחלק זה אתאר בקצרה את הספרות המחקרית על שימוש בשגיאות בהוראת המתמטיקה ולגבי הצגת אירועי הוראה בהכשרת מורים למתמטיקה.

בספרות המחקרית מוצגות גישות שונות בעניין התמקדות בשגיאות תלמידים בתהליך ההוראה. מאמרים וספרים מתארים ניסיונות ליצור רצפי הדרכה ללא שגיאות (ראו אצל Resnick & Ford, 1981). אחרים מציעים דרכים להשתמש בידע על שגיאות אופייניות לאבחון קשיי תלמידים ולפיתוח דרכי הוראה העוסקות בשגיאות (למשל, Ashlock, 2010; Radatz, 1980). גישה שונה ועכשווית יותר קוראת לשימוש בשגיאות כמנוף לעידוד חשיבת התלמידים על מושגים ותהליכים מתמטיים (למשל, Borasi, 1987, 1994; Durkin & Rittle-Johnson, 2012; Grobe & Renkl, 2007; Kazemi et al., 2009; Rushton, 2018; Schoenfeld, 2020).

התפיסה הרווחת כיום רואה בשגיאות חלק טבעי ובלתי נמנע מתהליך הלמידה. לפיכך היכרות עם דרכי חשיבה של תלמידים ועם שגיאות המתרחשות במהלך הלמידה היא מרכיב מרכזי של ידע תוכן פדגוגי הנחוץ להוראה בכלל (למשל, Shulman, 1986) ולהוראת מתמטיקה בפרט (למשל, Hill et al., 2008). ההכרה בחשיבות קידום ידע תוכן פדגוגי של מורים והרחבתו מציעה דרכים אחרות ליחס כלפי דרכי חשיבה של תלמידים במסגרות הכשרת מורים למתמטיקה ובמסגרות העוסקות בפיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה (למשל, Franke et al., 2001; Heinze & Reiss, 2007; Jacobs et al., 2010; Wilson et al., 2013; Zazkis, 2017; Zazkis & Herbst, 2018).

אחת הדרכים המוצעות היא בתיאור מקרים (cases) המציגים דרכי חשיבה של תלמידים וניתוח אירועים אלו עם מורים ומורים לעתיד. מאמר זה מתמקד במקרה מסוג אירוע הוראה כזה.

שולמן (Shulman, 1986) טען בהקשר לשימוש במקרים בהכשרת מורים כי "ידע מקרים" הוא רכיב חיוני של ידע שנדרש להוראה. שולמן מבהיר במאמרו כי "המקרה, במובנו זה, אינו סתם דיווח על מאורע או תקרית. מי שקורא למשהו 'מקרה' מבטא טענה תאורטית – הוא טוען שמדובר ב'מקרה של משהו' או בדוגמה לסוג רחב יותר של מקרים" (Shulman, 1986, p. 11).

מקרים רבים ומגוונים מוצגים במסגרת הכשרת מורים, ובכללם מוצגות דוגמאות לפתרון בעיות (Markovitz & Smith, 2008; Santagata & Guarino, 2011; Tirosh et al., 2019), נרטיבים (למשל, Henningsen, 2008; Pang, 2011; Silver et al., 2008), קטעי וידאו של שיעורים (למשל, Lin, 2005; van Es et al., 2014) ואירועים מתמטיים (Conner et al., 2011; Markovitz, 2008; Rotem & Ayalon, 2018).

אירוע ההוראה המוצג במאמר זה הוא אירוע מתמטי. אירועים מתמטיים הם מקרים שמתרחשים בכיתת המתמטיקה ויש בהם בעיה, דילמה, עימות, קיטוב או מתח כלשהו (מרקוביץ, 2003). הם עשויים להיות אירועי הוראה אמיתיים שהתרחשו בכיתה או מצבים היפותטיים הנשענים על דרכי חשיבה ותפיסות אופייניות של תלמידים כפי שהם מתוארים במחקרים או על ניסיון אישי.

אירועי הוראה הם קצרים יחסית ובדרך כלל מתארים פתרונות שגויים שהציעו תלמידים. לעיתים פתרונות אלה יכולים לשנות את תוכנית השיעור ולשמש הזדמנות להעמקת ההבנה המתמטית של התלמידים (Rotem & Ayalon, 2018). חלק מאירועי ההוראה מתמקדים בהרחבת ידע תוכן מתמטי שעשוי להיות מאתגר בעבור הלומדים. אחרים מתמקדים בסוגיות דידקטיות כדי לשפר ידע תוכן פדגוגי של לומדים מתוך בחינת נושאים כגון מה התלמיד שפתר מטלה מתמטית בדרך שגויה מבין ומה אינו מבין (מרקוביץ, 2003).

לפי רותם ואיילון (2021), שימוש באירועי הוראה במסגרת הכשרת סטודנטים להוראת המתמטיקה יכול לסייע בפיתוח מיומנות של שימת לב להיבטים מגוונים של הוראה ולמידה של המתמטיקה. למשל, בחינת ההיבט המתמטי שאירוע ההוראה מתמקד בו, דרכי חשיבה של תלמידים והיבטים קוגניטיביים, אפקטיביים וחברתיים.

המקרה המוצג במאמר זה הוא אירוע הוראה המציג פתרון שגוי שהציעו זוג תלמידים שעבדו במשותף על מטלה טריגונומטרית. סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה לבית הספר העל-יסודי התבקשו להציג קודם את פתרונותיהם למטלה ולאחר מכן לזהות שגיאות בפתרון התלמידים. המטרה בהצגת אירוע הוראה זה לסטודנטים להוראה הייתה כפולה: לקדם ולשפר ידע תוכן מתמטי ולעורר רגישות לרכיבים מסוימים במטלה שעלולים לשמש מוקד לקשיי תלמידים.

מתודולוגיה

מדגם

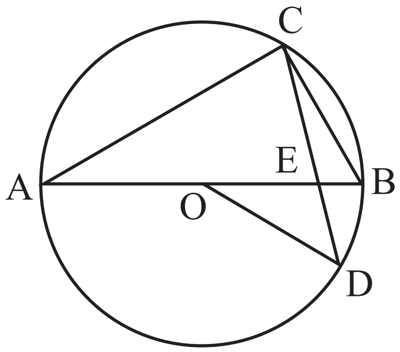
עשרים וחמישה סטודנטים הלומדים לקראת תעודת הוראה במתמטיקה לבית ספר על-יסודי השתתפו בסדנה המלווה את ההתנסות המעשית בהוראת מתמטיקה בבית הספר העל-יסודי. כל הסטודנטים הם בעלי תואר ראשון במקצועות עתירי מתמטיקה העושים הסבה להוראת המתמטיקה לבית הספר היסודי. הסטודנטים עדיין אינם מלמדים בבית ספר אלא צופים ומתנסים בהוראת מתמטיקה במסגרת ההכשרה המעשית שלהם.

כלי המחקר

1. מטלה בטריגונומטריה של המישור שהופיעה בבחינת בגרות במתמטיקה (חורף 2006, 5 יחידות לימוד).

נתון: מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
AB הוא קוטר במעגל.
המיתר CD חותך את הקוטר בנקודה E
(ראו ציור).
$\angle BAC = \angle BOD = \alpha$

i הבע באמצעות R ו-α את שטח המשולש BCD.
ii נתון כי $CB=\sqrt{3}R$ ושטח המשולש BCD הוא $3\sqrt{8}$. חשב את R.



2. אירוע הוראה שמתואר בו שיח בין זוג תלמידים (רון וגילה – שמות בדויים) במהלך שיעור מתמטיקה בכיתה י"א, והמורה ביקש מהם לפתור את המטלה הטריגונומטרית.

אירוע ההוראה

1. מורה: אחרי שפתרנו את סעיף i תפתרו את סעיף ii... אפשר לעבוד בזוגות.
2. רון וגילה פתרו יחד את סעיף ii.
3. גילה: מצאנו בסעיף קודם כי $CB=2R\sin\boldsymbol{\alpha}$
4. רון: נכון. כעת נתון כי $CB=\sqrt{3}R$ זה אומר כי $2R\sin\boldsymbol{\alpha}=\sqrt{3}R$
5. רון וגילה רושמים במחברות שלהם: $2R\sin\alpha=\sqrt{3}R$
6. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. $\boldsymbol{\alpha}=60°$
8. גילה [בהיסוס]: אה... אוי... אה... נראה לי שיש טעות בנתון של CB כי לא ייתכן ש $\boldsymbol{\alpha}=60°$.
9. רון: למה?
10. גילה: אם $\boldsymbol{\alpha}=60°$
אז $\angle CBD = 180° - \frac{3}{2}\alpha = 180° - \frac{3}{2}\cdot 60° = 180° - 90° = 90°$
כלומר הזווית ההיקפית CBD היא זווית ישרה.
11. רון: אה... נכון... וזווית היקפית השווה ל-90 מעלות נשענת על קוטר, כלומר CD הוא גם קוטר במעגל ולא ייתכן שלמעגל יהיו שני מרכזים O ו-E.
12. [רון וגילה בודקים אם הם לא טעו במהלך הפתרון]
13. רון [בהתלהבות]: אה... מצאתי... מצאתי.... שכחנו את האפשרות של $\alpha=120°$.
14. גילה [בשמחה]: יפה! כל הכבוד לך. עכשיו נמשיך ונשתמש בנתון של שטח המשולש וככה נמצא את רדיוס המעגל.

אירוע ההוראה זה נבחר משני טעמים: באירוע ההוראה מוצגת טעות אופיינית בפתרון משוואות טריגונומטריות. הטעות האופיינית היא התמקדות בפתרון אחד בלבד ולא במכלול הפתרונות של המשוואה (ובמידת הצורך פסילת פתרונות). שגיאה אופיינית זו בפתרון המשוואה הטריגונומטרית מוליכה לתשובה סופית נכונה למטלה כולה. נוסף על כך, אירוע ההוראה מעלה דילמות בעניין תפקיד השרטוטים בפתרון מטלות גאומטריות וטריגונומטריות.

באירוע הוראה זה אפשר לזהות שלוש שגיאות:

א. התעלמות מהפתרון $\sin(180-60)$. בפתרון של רון וגילה (שורה 7) אין התייחסות לכך שלמשוואה $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ יש שני פתרונות אפשריים (בעניין שזוויות במשולש): $\alpha_1=60°$ ו-$\alpha_2=120°$. רון וגילה היו צריכים להציג את כלל הפתרונות ולפסול את הפתרון $\alpha_2=120°$. פתרון זה נפסל היות ש-$\angle BAC=\alpha$ היא זווית במשולש ישר זווית ולכן $\alpha \neq 120°$.

ב. פסילת הפתרון $\boldsymbol{\alpha}=60°$. רון וגילה טענו כי לא ייתכן ש-$\alpha_1=60°$ מכיוון שאז הזווית ההיקפית $\angle CBD$ היא זווית ישרה ולא ייתכן ש-CD הוא קוטר במעגל (שורה 8-11). רון וגילה זיהו נכון, כי אם $\boldsymbol{\alpha}=60°$ אזי הזווית ההיקפית $\angle CBD$ היא זווית ישרה, אך לא התייחסו לכך שהשרטוט המוצג בבעיה הוא שרטוט כללי המתייחס למקרים שבהם $\alpha < 60°$. כאשר $\alpha=60°$ המיתר CD הוא קוטר והנקודה E מתלכדת עם הנקודה O.

ג. קבלת הפתרון $\alpha_2=120°$. בהמשך לשגיאה הקודמת (שגיאה ב) והדילמה של רון וגילה בעניין השרטוט. בסיום אירוע ההוראה (שורה 12-14) נזכרו רון וגילה כי ייתכן עוד פתרון למשוואה הטריגונומטרית ($\alpha_2=120°$) אך שגו כי זה הפתרון המתאים לערך הזווית α. פתרון זה שגוי כפי שהוסבר לעיל בשגיאה א.

אירוע הוראה זה הוא אחד מאירועי ההוראה הניתנים לסטודנטים

במסגרת פעילויות שמתקיימות בסדנה שמלווה את ההתנסות המעשית. הסטודנטים מתבקשים להגיב על אירועי הוראה. אירועי ההוראה נאספו במשך שנים מתצפיות בשיעורי מתמטיקה במגוון כיתות בבתי ספר על-יסודיים. השיעורים הוקלטו ותומללו, והנתונים שנכתבו על הלוח צולמו ושובצו במקומות המתאימים. המידע שנאסף ותומלל חולק לאירועי הוראה שהוצגו לסטודנטים.

מהלך המחקר

מהלך המחקר כולל שני שלבים. בשלב הראשון, באחד השיעורים בסדנה, התבקשו הסטודנטים לפתור בעצמם את המטלה הטריגונומטרית ולהגיש אותה. בשלב השני, לאחר הגשת הפתרונות שלהם למטלה הטריגונומטרית, קיבלו הסטודנטים את אירוע ההוראה עם ההנחיות האלה: "קראו בעיון את אירוע ההוראה וציינו היבטים מתמטיים שגויים שעלו בשיח המתמטי של זוג התלמידים. לגבי כל שגיאה: א. ציינו מהי השגיאה (ציינו את השורה/שורות באירוע ההוראה); ב. הסבירו מדוע זו שגיאה". הסטודנטים התבקשו להגיש בכתב את ההתייחסות שלהם על השגיאות המופיעות באירוע ההוראה. גם ההתייחסות על משימה זו הייתה עצמאית.

בניתוח הממצאים נבדקו תחילה הפתרונות המתמטיים שהציגו הסטודנטים למטלה הטריגונומטרית. נבדקה נכונות השלבים המגוונים שהציגו הסטודנטים בפתרון שלהם ונכונות התשובה הסופית שלהם לשני הסעיפים המופיעים במטלה הטריגונומטרית. לאחר מכן שני חוקרים סיווגו את תשובות הסטודנטים לאירוע ההוראה. חוקר אחד סיווג את תשובות הסטודנטים על פי שלוש השגיאות המופיעות בשיח בין שני התלמידים (רון וגילה), כלומר את השגיאות שהסטודנטים ציינו ואת ההסברים שלהם לשאלה מדוע זו שגיאה. חוקר נוסף אימת את הסיווג וקידד את הנתונים לפי קטגוריות אלה. הושגה הסכמה מלאה.

ממצאים

בסעיף זה אציג ראשית את פתרונות הסטודנטים למטלה הטריגונומטרית. לאחר מכן את התייחסות של הסטודנטים כלפי אירוע ההוראה. בתשובות הסטודנטים לאירוע ההוראה אדון בזיהוי השגיאות, בהסבר שלהם מדוע זו שגיאה וכל זאת תוך בחינת פתרונות שהם עצמם נתנו למטלה.

פתרונות הסטודנטים למטלה הטריגונומטרית

כל הסטודנטים פתרו נכון את סעיף i של המטלה ורשמו את הביטוי $S_{BCD}=2R^2\cdot \sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{3}{2}\alpha$. בפתרון סעיף ii כל הסטודנטים הציגו תשובה סופית נכונה (R=4). עשרים וארבע סטונדטים פתרו סעיף זה תוך כדי שימוש בשיקולים טריגונומטריה, 16 סטודנטים התייחסו בסעיף ii לשני פתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\alpha_1=60°$ ו-$\alpha_2=120°$) ופסלו את האפשרות של 120°. לעומתם שמונה סטודנטים (שליש מהסטודנטים) ציינו רק את האפשרות $\alpha_1=60°$ כפתרון המשוואה הטריגונומטרית.

התייחסות של הסטודנטים כלפי אירוע ההוראה

סטודנט אחד לא ענה על אירוע ההוראה. סטודנט אחר הציג התייחסות שגויה ואדון בה בהמשך. שאר הסטודנטים (23) ציינו **לפחות אחת משלוש** השגיאות באירוע ההוראה:

א. התעלמות מהפתרון *sin(180–60)*. שמונה סטודנטים ציינו כי בשורה 6 ו-7 התלמידים היו צריכים להתייחס לשתי האפשרויות ($\alpha_1=60°$ ו-$\alpha_2=120°$) ולפסול את האפשרות $\alpha_2=120°$.

ב. פסילת הפתרון $\boldsymbol{\alpha}=60°$. שמונה עשר סטודנטים ציינו כי בשורה 8-12 (או חלקן) התלמידים שגו שפסלו תוצאה זו ולא חשבו שהנקודות O ו-E יכולות להתלכד.

ג. קבלת הפתרון $\alpha_2=120°$. חמישה עשר סטודנטים ציינו את השגיאה בשורה 13 ו-14. הם טענו כי כאשר זוג התלמידים הבחינו ששכחו לרשום בסעיף 6 את הפתרון 120°, הם קבעו בשוגג שזהו הפתרון המתאים בעבור α.

טבלה 1 מציגה את שכיחות הסטודנטים שהתייחסו לכל אחת משלוש שגיאות אלו וזאת תוך בחינת דרך הפתרון שהם עצמם הציגו. השגיאות מוצגות בטבלה על פי סדר הופעתן באירוע ההוראה.

טבלה 1: שכיחות הסטודנטים על פי סוג הפתרון שלהם וסוג השגיאה שציינו

השגיאה / **פתרון הסטודנטים**	התעלמות מהפתרון *sin(180 – 60)*	פסילת הפתרון α=60°	קבלת הפתרון $\alpha_2=120°$
בפתרון המשוואה הטריגונומטרית רשמו $\alpha_1=60°$ ו-$\alpha_2=120°$ ופסלו את האפשרות $\alpha_2=120°$	5	15	12
בפתרון המשוואה הטריגונומטרית רשמו רק $\alpha_1=60°$	3	3	2
שיקולים גיאומטרים: $\alpha_1=60°$	---	---	1
סך הכול	**8**	**18**	**15**

טבלה 2 מציגה את שכיחות הסטודנטים שציינו סוגים מסוימים של שגיאות לצד התמקדות בפתרונות שלהם. למשל, מהשורה הראשונה בטבלה אפשר לראות כי שלושה סטודנטים ציינו את כל שלוש השגיאות וכי שלושתם פתרו את המטלה בכלים טריגונומטריים והתמקדו בשני הפתרונות של המשוואה הטריגונומטרית ופסילת הפתרון שאינו מתאים.

משורה שלישית, למשל, אפשר לראות כי עשרה סטודנטים ציינו את שתי השגיאות: פסילת הפתרון α=60° וקבלת הפתרון α_2=120° וכי תשעה מהם פתרו את המטלה בכלים טריגונומטריים והתמקדו בשני הפתרונות של המשוואה הטריגונומטרית ופסילת הפתרון שאינו מתאים וסטודנט אחד הציג רק פתרון אחד למשוואה הטריגונומטרית.

טבלה 2: שכיחות הסטודנטים על פי סוג השגיאות שציינו ודרך הפתרון שלהם

	השגיאות של זוג התלמידים			דרך הפתרון של הסטודנטים			
	התעלמות מהפתרון *sin (180-60)*	פסילת הפתרון α_1=60°	קבלת הפתרון α_2=120°	α_1=60° ו-α_2=120° ופסלו את α_2=120°	רשמו רק α_1=60°	שיקולים גאומטריים α_1=60°	**מספר סטודנטים (סה"כ)**
1	v	v	v	3	--	--	3
2	v	v	--	2	--	--	2
3	--	v	v	9	1	--	10
4	v	--	--	1	2	--	3
5	--	v	--	1	2	--	3
6	--	--	v	--	1	1	2
	8	**8**	**15**	**16**	***6**	**1**	**23**

(*) שמונה סטודנטים הציגו פתרון זה כאשר התבקשו לפתור את המטלה הטריגונומטרית, אך אחד מהם לא ענה על ניתוח אירוע ההוראה והשני (יוסי – שאליו אתייחס בהמשך) הציג יחס שגוי כלפי אירוע ההוראה.

אציג כעת דוגמאות לתשובות של שישה סטודנטים על פי סוגי השגיאות שציינו. סטודנט אחד מכל אחת מהשורות שבטבלה 2 (אנה, בתיה, גל, דני, הלל ועלי – שמות בדויים). לבסוף אעסוק בתשובתו של הסטודנט (יוסי – שם בדוי) שהציג התייחסות שגויה בניתוח אירוע ההוראה.

התייחסות לשלוש השגיאות המופיעות באירוע ההוראה (שורה 1 בטבלה 2)

כפי שאפשר לראות מטבלה 2 שלושה סטודנטים התמקדו בכל שלוש השגיאות המופיעות באירוע ההוראה. בפתרון המטלה הטריגונומטרית, סטודנטים אלה פתרו את סעיף ii של המטלה הטריגונומטרית תוך שימוש בכלים טריגונומטריים, התייחסו לשני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית ופסילת הפתרון α_2=120°.

למשל, פתרון המטלה הטריגונומטרית של אנה:

א	$CB = 2R\sin\alpha$	מסעיף (i)
ב	$CB = \sqrt{3}R$	נתון
ג	$2R\sin\alpha = \sqrt{3}R$	משורה א וב
ד	$2\sin\alpha = \sqrt{3}$	
ה	$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	
ו	$\alpha_1 = 60°$ או $\alpha_2 = 180 - \alpha_1 = 180° - 60° = 120$	

ז	$\angle BAC = \alpha$	$\alpha \neq 120°$ היא זווית במשולש ישר זווית ולכן חדה
ח	$\alpha = 60°$	
ט	$S_{BCD} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3}{2}\alpha$	מסעיף (i)
י	$S_{BCD} = 8\sqrt{3}$	נתון
יא	$2R^2 \cdot sin\,60 \cdot sin\,30 \cdot sin\,90 = 8\sqrt{3}$	משורה ט ו-י
יב	$2R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 8\sqrt{3}$	
יג	$R^2 = 16$	
יד	$R = \mp 4$	
טו	$R = 4$	רדיוס

אציין כי פתרון זה היה הפתרון של מרבית הסטודנטים שהציגו את שני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית ופסלו את הפתרון α_2=120.

התייחסותה של אנה לאירוע ההוראה:

א. בעניין התעלמותם של רון וגילה מהפתרון *sin(180–60)*, אנה רשמה:

בשורה 7 α=60° אינו הפתרון היחיד למשוואה שבשורה 6, נראה כי התלמידים חשבו כי למשוואה יש פתרון יחיד. למשוואה הטריגונומטרית בשורה 6 יש אינסוף פתרונות, וקיימים שני פתרונות בטווח שבין 0 ל-360.

ב. בעניין הטעות של רון וגילה בפסילת הפתרון $\alpha=60°$ אנה רשמה:

> התלמידים הסיקו מהחישובים שעשו בשורה 10, שלא ייתכן ש-$\alpha=60°$ כי אז נובע ש-CD הוא קוטר (כפי שנאמר בשורה 11). אולם ייתכן כי CD הוא אכן קוטר במעגל, וכי הנקודות E ו-O מתלכדות.

ג. בעניין זה שהתלמידים קיבלו את הפתרון $\alpha_2=120°$:

> זה נכון ש-$\alpha_2=120°$ הוא גם פתרון למשוואה שבשורה 6, אבל אפשרות זו לא תיתכן כי אז נובע שבמשולש ישר זווית ABC סכום הזווית גדול מ-$180°$. לכן האפשרות $\alpha_2=120°$ אינה יכולה להתקיים והפתרון הוא $\alpha=60°$.

התייחסות להתעלמות מהפתרון *sin(180–60)* ופסילת הפתרון $\alpha=60°$ (שורה 2 בטבלה 2)

אפשר לראות מטבלה 2 כי שני סטודנטים דנו בשתי השגיאות הראשונות המופיעות באירוע ההוראה: התעלמות מהפתרון *sin (180–60)* ופסילת הפתרון $\alpha=60°$.

שני סטודנטים אלה פתרו את סעיף ii של המטלה הטריגונומטרית מתוך שימוש בכלים טריגונומטריים, התמקדות בשני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית ופסילת הפתרון $\alpha_2=120°$.

סטודנט אחד פתר פתרון דומה לפתרון של אנה, ואילו הסטודנטית השנייה, בתיה, שאף היא השתמשה בכלים טריגונומטריים בפתרון המטלה, התמקדה בשני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית אך לא כמו שאר הסטודנטים שפסלו את הפתרון $\alpha_2=120°$ משיקולים גאומטריים הנוגעים למשולש ישר הזווית ABC (ראו הוכחה של אנה). בתיה פסלה פתרון זה באמצעות הצבת $\alpha_2=120°$ בביטוי של שטח המשולש שהתקבל בסעיף i במטלה הטריגונומטרית.

בתיה רשמה:

$$S_{BCD} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3}{2}\alpha$$

$$2R^2 \cdot \sin 120 \cdot \sin 60 \cdot \sin 180 = 0$$

סתירה

בעניין אירוע ההוראה בתיה ציינה שרון וגילה התעלמו מהפתרון $\sin(180-60)$: "קיימת עוד אפשרות של הזווית α. $\alpha_2=180°-60°$. צריך לבדוק את כל האפשרויות ולפסול אחת מהן."

כמו כן בתיה ציינה שהתלמידים שגו שפסלו את הפתרון $\alpha=60°$:

> הטענה בשורה 11 אינה נכונה מכיוון שיש עוד אפשרות, כלומר שהנקודות E ו-O מתלכדות. זו שגיאה נפוצה כי התלמידים מתבססים על השרטוט שהוא בעצם נותן רק אפשרות אחת של הנתונים.

התייחסות לפסילת הפתרון $\alpha=60°$ וקבלת הפתרון $\alpha_2=120°$ (שורה 3 בטבלה 2)

מטבלה 2 רואים כי מרבית הסטודנטים (10) התמקדו בשתי שגיאות בעת ניתוח אירוע ההוראה: פסילת הפתרון $\alpha=60°$ וקבלת הפתרון $\alpha_2=120°$.

סטודנט אחד פתר את המטלה הטריגונומטרית כאשר ציין רק את האפשרות $\alpha_1=60°$ כפתרון המשוואה הטריגונומטרית. הסטודנטים האחרים (9) פתרו את סעיף ii של המטלה הטריגונומטרית בדרך שפתרה אנה. למשל, גל פתרה את סעיף ii בדרך דומה לפתרון של אנה (שימוש בכלים טריגונומטריים לצד בחינת שני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית ופסילת הפתרון $\alpha_2=120°$).

בעניין אירוע ההוראה גל ציינה שרון וגילה שגו שפסלו את הפתרון $\alpha=60°$:

> הם [התלמידים] קיבלו שזווית CBD ישרה ולכן מתקבל ש-CD הוא קוטר במעגל. התלמידים טענו שזה לא ייתכן כיוון שלמעגל יכולים להיות שני מרכזים. אבל אין שום נתון בשאלה שסותר שנקודות E ו-O מתלכדות (וכל שאר הזוויות מסתדרות עם זה).

בהמשך גל ציינה שהתלמידים שגו שקיבלו את הפתרון $\alpha_2=120°$:

> רון אמר שהם שכחו שיש פתרון נוסף למשוואה שקיבלו בשורה 6 והוא: $\alpha_2=120°$. זה רעיון נכון באופן כללי (כי גם $\alpha_1=60°$ וגם $\alpha_2=120°$ פותרים את המשוואה) אך במקרה זה $120°$ אינו יכול להיות פתרון.

מעניין לציין כי גל (כמו שלושה סטודנטים אחרים) ציינה לטובה שהתלמידים (רון וגילה) הפעילו בקרה על הפתרון שלהם. גל רשמה: "ייאמר לזכותם שהם לא הסתפקו בפתרון שלהם בהצבה עיוורת של המשתנים אלא אימצו ביקורתיות ובדקו שהפתרון שלהם הוא הגיוני. לרוע מזלם זה דווקא מה שהכשיל אותם."

התייחסות להתעלמות מהפתרון *sin(180–60)* (שורה 4 בטבלה 2)

שלושה סטודנטים דנו בשגיאה הראשונה של רון וגילה, התעלמות מהפתרון *sin(180-60)* (ראו טבלה 2). סטודנט אחד מתוך השלושה פתר את המטלה הטריגונומטרית פתרון דומה לפתרון של אנה. מעניין לציין כי שני הסטודנטים האחרים פתרו את סעיף ii של המטלה הטריגונומטרית והשתמשו בכלים טריגונומטריים כאשר התמקדו רק בדרך בעבור פתרון המשוואה הטריגונומטרית $\alpha=60°$.

למשל, **פתרון המטלה הטריגונומטרית של דני:**

שלבי הפתרון של דני דומים לפתרון של אנה עד שורה ה (כולל). דני לא התייחס לשני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית (שורה ו–ז בפתרון של אנה) ורשם: $\alpha=60°$. לאחר מכן דני המשיך כמו אנה (שורה ט–טו בפתרון של אנה).

אציין כי פתרון זה היה הפתרון של כל שמונת הסטודנטים שהציגו למשוואה הטריגונומטרית רק את הפתרון $\alpha_1=60°$.

בהקשר לאירוע ההוראה, דני רשם: "אי אפשר להסיק ש-$\alpha_1=60°$ כפי שהתלמידים פתרו (שורה 7). צריך לבדוק גם את האופציה $\alpha_2=120°$ ואז לפסול אותה."

התייחסות לפסילת הפתרון $\alpha=60°$ (שורה 5 בטבלה 2)

מטבלה 2 אפשר לראות כי שלושה סטודנטים דנו בשגיאה של פסילת הפתרון $\alpha=60°$.

סטודנט אחד פתר את המטלה תוך התייחסות לשתי התשובות המתאימות למשוואה הטריגונומטרית ופסילת התשובה שאינה מתאימה (כמו הפתרון של אנה). שני הסטודנטים האחרים פתרו את המטלה הטריגונומטרית תוך התייחסות רק לפתרון אחד למשוואה הטריגונומטרית. סטודנטים אלו הציגו פתרון דומה לפתרון של דני. למשל, הלל פתר את המטלה הטריגונומטרית התייחסות רק לאפשרות $\alpha_1=60°$ כפתרון המשוואה הטריגונומטרית (הלל פתר פתרון דומה לפתרון של דני).

בעניין אירוע ההוראה הלל רשם לגבי כך שהתלמידים פסלו את הפתרון $\alpha=60°$: "התלמידים מצאו שזווית CBD היא זווית ישרה. חבל שלא חשבו על כך שהישר CD הוא קוטר ונקודה E מתלכדת עם מרכז המעגל O."

התייחסות לקבלת הפתרון $\alpha_2=120°$ (שורה 6 בטבלה 2)

שני סטודנטים הבחינו באירוע ההוראה כי רון וגילה שגו שקבעו כי הפתרון הוא $\alpha_2=120°$.

סטודנט אחד פתר את המטלה הטריגונומטרית תוך התייחסות רק בפתרון אחד של המשוואה הטריגונומטרית $\alpha_1=60°$. הסטודנט הציג פתרון דומה לפתרון של דני. הסטודנט השני, עלי, הציג פתרון ייחודי לסעיף ii של המטלה הטריגונומטרית. עלי פתר סעיף זה תוך שימוש בכלים גאומטריים.

פתרון המטלה הטריגונומטרית של עלי:

$\triangle$ CBA	משולש ישר זווית (זווית C היא זווית היקפית על קוטר)
$AB=2R$	נתון
$CB=\sqrt{3}R$	נתון
$AC^2+CB^2=AB^2$	משפט פיתגורס
$AC^2+3R^2=4R^2$	
$AC=R$	
$\triangle$ ACO	משולש שווה צלעות
$\alpha=60°$	

יש לציין כי בדרך פתרון ייחודית זו, הפתרון $\alpha=60°$ מתקבל ישירות בלי צורך לדון בשני פתרונות ופסילת אחד מהם. בעניין אירוע ההוראה ושיח בין זוג התלמידים, עלי הזכיר רק שהתלמידים טעו שחשבו כי הפתרון הוא $\alpha_2=120°$. עלי הסביר זאת: "בשורה 13 התלמיד אומר שהפתרון הוא $\alpha=120°$ וזה לא נכון כי אז מקבלים שסכום הזוויות במשולש ישר הזווית ABC יהיה מעל $180°$."

שינוי הפתרון הסופי מנכון לשגוי לאחר התנסות באירוע ההוראה

כפי שציינתי, סטודנט אחד (יוסי) הציג התייחסות שגוי כלפי אירוע ההוראה.

בפתרון המטלה הטריגונומטרית יוסי פתר את סעיף ii לצד שימוש בכלים טריגונומטריים וראה רק את האפשרות $\alpha_1=60°$ כפתרון המשוואה הטריגונומטרית. הפתרון של יוסי דומה לפתרון של שמונה הסטודנטים שפתרו את המטלה והשתמשו בכלים טריגונומטריים ללא התייחסות לאפשרות של $\alpha_2=120°$. מהתייחסותו של יוסי כלפי אירוע ההוראה, נראה כי יוסי השתכנע מהשיח של זוג התלמידים כי לא ייתכן ש-$\alpha_1=60°$ וקיבל את ההחלטה (השגויה) של זוג התלמידים כי $\alpha=120°$.

יוסי ראה כי התלמידים התעלמו מהפתרון *sin(180-60)*: "בשורה 7 הם רשמו $\alpha_1=60°$ ומשתמע שהם חשבו כי למשוואה בשורה 6 יש פתרון יחיד. למשוואה הטריגונומטרית בשורה 6 קיימים שני פתרונות בטווח שבין 0 ל-360."

תשובתו של יוסי נכונה, אך לאחר מכן יוסי רשם: "רק בשורות 13 ו-14 הם [התלמידים] רואים כי ייתכן גם הפתרון $\alpha_2=120°$, אם הם היו רואים זאת מראש זה לא היה יוצר להם את כל הבלגן ש-CD הוא קוטר".

יוסי שגה ולא הבחין כי הזווית α היא במשולש ישר זווית ABC ולכן לא ייתכן כי היא זווית קהה. נראה כי יוסי, כמו זוג התלמידים, לא הבחין ש-CD הוא קוטר במעגל וכי הנקודות E ו-O מתלכדות.

לסיכום, כל הסטודנטים (25) פתרו נכון (R=4) את המטלה הטריגונומטרית שהתבקשו לפתור. כשני שליש מהם (17) הציגו שלבי פתרון נכונים. שישה עשר סטודנטים השתמשו בכלים טריגונומטריים לפתרון המטלה, התייחסו לשני הפתרונות המתאימים למשוואה הטריגונומטרית $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ופסלו כנדרש את הפתרון $\alpha_2=120°$.

סטודנט אחד השתמש בכלים גאומטריים לפתרון המטלה ולכן קיבל את הפתרון המתאים בעבור הזווית α. עם זאת כשליש מהסטודנטים (8) הציגו פתרון טריגונומטרי והתייחסו רק לפתרון אחד של המשוואה הטריגונומטרית שמתקבל בין $0°$ ל-$90°$ $(\alpha=60°)$.

מטבלה מספר 2 (שורה 4) אפשר לראות כי שני סטודנטים, מבין השמונה שהציגו פתרון אחד למשוואה הטריגונומטרית, ציינו בניתוח אירוע ההוראה כי זוג התלמידים שגו שלא בחנו גם את הפתרון $(180-\alpha)$ והצדיקו את פסילתו. שני סטודנטים אחרים (שורה 3 ושורה 6 בטבלה 2) הבחינו שזוג התלמידים שגו שקיבלו את הפתרון $\alpha_2=120°$.

דיון ומסקנות

מאמר זה בחן שתי שאלות:

1. באילו דרכים סטודנטים המתכשרים להוראה במתמטיקה בבית ספר על-יסודי פותרים את המטלה הטריגונומטרית המהווה את הבסיס לאירוע ההוראה?
2. האם הסטודנטים מזהים את השגיאות שעלו בשיח בין זוג התלמידים באירוע ההוראה?

בחלק זה אסכם את הממצאים ואדון בשאלות אלה ואציג סוגיות פדגוגיות העולות מאירוע ההוראה ומתשובות הסטודנטים.

מהממצאים עולה כי כשליש מהסטודנטים התייחסו רק לפתרון אחד של המשוואה הטריגונומטרית $(\alpha_1=60°)$. ייתכן שהצגת פתרון אחד בלבד נובעת מההתמקדות בנתוני הבעיה ומפסילה נכונה של הזווית הגדולה מ-$90°$, אך חשוב לציין כי בכתיבת פתרון המטלה יש להציג את שני הפתרונות

המתאימים ולנמק את הסיבה לפסילת אחד מהם. לפיכך הבקשה מהסטודנטים להעריך את דרך הפתרון של זוג התלמידים חשפה את כלל הסטודנטים לשני הפתרונות של המשוואה הטריגונומטרית (ובפרט אלה שציינו פתרון אחד בלבד למשוואה הטריגונומטרית). כך דיון עם הסטודנטים על אירוע ההוראה לצד שיח בין זוג התלמידים יכול להעמיק את הידע המתמטי שלהם וזאת נוסף על תרומה להיבטים אחרים של ידע פדגוגי, כגון ידע על דרכי חשיבה של לומדים (Leuders et al., 2018; Moyer & Milewicz, 2002; Prediger, 2010).

מעבר לדיון על פתרונות של משוואה טריגונומטרית והצעדים שיש לרשום בתהליך הפתרון, אירוע הוראה זה מעלה דילמה הנוגעת לתפקיד השרטוטים בהצגת מטלה ללומדים. השרטוט שליווה את המטלה אומנם מתאר מצב כללי אך מציג את הנקודות E ו-O כשתי נקודות שונות זו מזו. לעומת זאת בסעיף ii של המטלה הנקודות E ו-O מתלכדות והן אותה נקודה. מצב זה היה סיבה עיקרית לקושי של זוג התלמידים באירוע ההוראה. דיון שיכול לעלות בכיתת הסטודנטים מתוך בחינת שרטוט המוצג במטלה זו, יכול להתמקד בין השאר בהנחות לא מוצדקות של לומדים על שרטוטים גאומטריים, כמו למשל ההנחה כי O ו-E חייבות להיות נקודות שונות זו מזו. חשיפה לבעיות שמעודדות הנחות בלתי מוצדקות עשויה לעורר דיון פורה על שימוש נכון בשרטוט בעת פתרון בעיות בטריגונומטריה וגאומטריה (Dvora, 2012).

אלה הן שאלות שעולות במיוחד בעניין אירוע הוראה זה: האם נכון מבחינה מתמטית להציג את השרטוט כפי שהוצג במטלה זו? האם נכון מבחינה פדגוגית לעשות זאת? מהן חלופות מתאימות להצגת השרטוט למטלה? האם ראוי להציג שרטוט נפרד לכל אחד מחלקי המטלה הטריגונומטרית?

סוגיות אלה ראויות למחקר ולדיון עם סטודנטים להוראה, מורים ותלמידים.

לבסוף, במחקר זה הוזמנו סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה לבית הספר העל-יסודי, לפתור מטלה טריגונומטרית שניתנה לתלמידים בכיתה י"א ולבחון אירוע הוראה המתמקד בפתרון של זוג תלמידים למטלה זו. אף לא אחד מהסטודנטים, במהלך הפתרון שהוא נתן למטלה הטריגונומטרית, התייחס לסוגיה הקשורה בהתלכדות הנקודות O ו-E (ואכן, אין צורך להתייחס לכך). עם זה, זוג התלמידים באירוע ההוראה הניחו הנחה לא מוצדקת ששתי הנקודות לא יכולות להתלכד.

אירוע ההוראה חשף את הסטודנטים להבדל בין דרך החשיבה שלהם על המטלה ובין דרך החשיבה של זוג התלמידים. מצב זה שיש בו הבדל בין דרך החשיבה של המורה לדרך החשיבה של התלמידים קורה לעיתים קרובות במהלך ההוראה ויש חשיבות שמורים לעתיד יהיו מודעים לכך ויכירו דרכי חשיבה אחרות של תלמידים (למשל, Zazkis, 2017; Zazkis & Herbst, 2018). אירועי הוראה מזמנים היכרות עם דרכי חשיבה של תלמידים (מרקוביץ, 2003; Smith & Friel, 2008).

נציין כי אירוע ההוראה שהוצג לסטודנטים במחקר זה מסתיים בכך שזוג התלמידים (רון וגילה) פוסלים את התשובה הנכונה בעבור הזווית α ומקבלים את התשובה השגויה (α_2=120°). לפיכך זו הזדמנות לקיים דיון עם הסטודנטים בסוגיה: כיצד היו הם מתייחסים לאירוע ההוראה הזה אילו הם היו המורים בכיתה זו? האם היו מציגים לכל תלמידי הכיתה את שלבי הפתרון של זוג התלמידים (כולל הדילמה שלהם בין התוצאה לשרטוט) ומקיימים על כך דיון עם התלמידים? האם היו מגיבים נקודתית רק על תשובתם של רון וגילה? האם היו מציגים מטלה זו בכיתה?

במהלך ההכשרה של סטודנטים להוראה התמודדות עם אירועי הוראה המציגים פתרונות של תלמידים יכולה לספק הזדמנויות לדון בנושאים הקשורים הן בידע המתמטי שלהם והן במכשולים שתלמידיהם העתידיים עשויים להיתקל בהם בעת פתרון מטלות. אירוע הוראה זה יכול לעודד גם דיון בסוג המשימות הטריגונומטריות והגאומטריות הניתנות לתלמידי תיכון ולסוגיית השרטוטים המלווים משימות אלה. לפיכך הצגת אירועי הוראה הכוללים מקרים אמיתיים היא בהחלט אחת הדרכים לבחינת ממדים חיוניים של ידע הנדרש להוראת המתמטיקה.

רשימת מקורות

מרקוביץ, צ' (2003). **ניתוח אירועים מתמטיים בכיתה**. מכון מופ"ת.

רותם, ס' ואיילון, מ' (2021). מודל לאפיון אירועים קריטיים שזוהו על ידי סטודנטים להוראת מתמטיקה במהלך ההתנסות המעשה. בתוך ב' זילברמן, נ' חן-חדד ות' עובדיה (עורכים), **JCRME 9: כנס ירושלים התשיעי למחקר בחינוך מתמטי (עמ' 85-89)**. ירושלים, ישראל. https://www.jct.ac.il/media/5855/ucrme_9_takzirim_21-16-%D7%A1%D7%A4%D7%A8-

Anderson, R. K., Boaler, J., & Dieckmann, J. A. (2018). Achieving elusive teacher change through challenging myths about learning: *A blended approach. Education Sciences*, 8(3), 1-33. https://doi.org/10.3390/educsci8030098

Ashlock, R. B. (2010). *Error patterns in computation: Using error patterns to help each student learn* (10th ed.). Charles E. Merrill.

Barnett, C. (1991). Building a case-based curriculum to enhance the pedagogical content knowledge of mathematics teachers. *Journal of Teacher Education, 42*(4), 263-272. https://doi.org/10.1177/002248719104200404

Bray, W. (2011). A collective case study of the influence of teachers' beliefs and knowledge on error-handling practices during class discussion of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(1), 2-38. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.1.0002

Heinze, A., & Reiss, K. (2007). Mistake-handling activities in the mathematics classroom: Effects of an in-service teacher training on students’ performance in geometry. In J. H. Woo, H. C., Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceeding of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 9-16). PME, Seoul, South Korea. https://www.emis.de/proceedings/PME31/3/9.pdf

Henningsen, M. (2008). Getting to know Catherine and David: Using a narrative classroom case to prmote inquiry and reflection on mathematics, teaching, and learning. In M. S. Smith & S. N. Friel (Eds.), *Cases in mathematics teacher education: Tools for developing knowledge needed for teaching* (pp. 47-56). Association of Mathematics Teacher Educators.

Hill, H. C., Ball, L. D., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresemathed-uc.41.2.0169

Kazemi, E., Franke, M., & Lampert, M. (2009). Developing pedagogies in teacher education to support novice teachers’ ability to enact ambitious instruction. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (Vol. 1, pp. 12-30). MERGA. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.589.9274&rep=rep1&-type=pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy.

Lester, F. K. (Ed.). (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics.* Information Age.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 2-8.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166-208. https://doi.org/10.2307/749507

Clements, M. A. K., Bishop, A. J, Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). (2013). *Third international handbook of mathematics education.* Springer-Verlag.

Conner, A., Wilson, P. S., & Kim, H. J. (2011). Building on mathematical events in the classroom. *ZDM*, *43*(6-7), 979-992. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0362-1

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, *22*(3), 206-214. https://doi.org/10.1016/j.learnin-struc.2011.11.001

Dvora, T. (2012). *Unjustified assumptions in geometry made by high school students in Israel* [Doctoral dissertation]. Tel Aviv .University

Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Fennema, E. (2001). Capturing teachers’ generative growth: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Educational Research Journal, 38*(3), 653-689. https://doi.org/10.3102/00028312038003653

Fritz, A., Haase, V. G., & Räsänen, P. (Eds.). (2019). *International handbook of mathematical learning difficulties from the laboratory to the classroom.* Springer.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers’ attitudes towards their pupils’ mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, *6*(1), 24-58. https://doi.org/10.1076/1380-3611(200003)6:1;1-I;FT024

Grobe, C. S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes? *Learning and Instruction*, *17*(6), 612-634. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.008

Grouws, D. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. National Council of Teachers of Mathematics.

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (Eds.). (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Routledge.

Rotem, S., & Ayalon, M. (2018). Using critical events in pre-service training: Examining the coherence level between interpretations of students' mathematical thinking and interpretations of teachers' responses. In E. Bergqvist, M. Osterholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), *Proceeding of the 42nd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 51-58). PME.

Rushton, S. J. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal, 3*(1), Article 4. https://doi.org/10.1186/s40928-018-0009-y

Santagata, R., & Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM*, *43*(1), 133-145. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0292-3

Schoenfeld, A. H. (2020). Reframing teacher knowledge: A research and development agenda. *ZDM, 52*(1), 359-376. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01057-5

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Silver, E. A., Clark, L. M., Gosen, D. L., & Mills, V. (2008). Using narrative cases in mathematics teacher professional development: Strategic selection and facilitation issues1. In M. S. Smith & S. N. Friel (Eds.), *Cases in mathematics teacher education: Tools for developing knowledge needed for teaching* (Vol. 4, pp. 89-102). Association of Mathematics Teacher Educators, San Diego State University.

Smith, M. S., & Friel, S. (Eds.). (2008). *Cases in mathematics teacher education: Tools for developing knowledge needed for teaching*. Association of Mathematics Teacher Educators, San Diego State University.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E. S., & Barkai, R. (2019). Using theories and research to analyze a case: Learning about example use. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*, 205-225. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9386-y

Leuders, T., Dörfler, T., Leuders, J., & Philipp, K. (2018). Diagnostic competence of mathematics teachers: Unpacking a complex construct. In T. Leuders, K., Philipp, & J. Leuders (Eds.), *Diagnostic competence of mathematics teachers* (pp. 3-31). Springer.

Lin, P. J. (2005). Using research-based video-cases to help pre-service primary teachers conceptualize a contemporary view of mathematics teaching. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(3), 351-377. https://doi.org/10.1007/s10763-004-8369-5

Markovitz, Z. (2008). Is 1¼ the consecutive of ¼? Mathematics classroom situations as part of math lessons. *Mathematics in School*, *37*(1), 10-12. https://doi.org/10.2307/30216087

Markovitz, Z., & Smith, M. (2008). Cases as tools in mathematics teacher education. In T. Wood (Ed.), *International handbook of mathematics teacher education* (pp. 39-64). Sense.

Moyer, P. S., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 293-315. https://doi.org/10.1023/A:1021251912775

Pang, J. (2011). Case-based pedagogy for prospective teachers to learn how to teach elementary mathematics in Korea. *ZDM, 43*(6), 777-789. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0352-3

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: The case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 73-93. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9119-y

Rach, S., Ufer, S., & Heize, A. (2012). Learning from errors: Effects of a teacher training on students' attitudes towards and their individual use of errors. In T. Y. Tso (Ed.), *Opportunities to learn in mathematics education: Proceedings of the 36th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3., pp. 329-336). PME.

Radatz, H. (1980). Student's errors in the mathematical learning process: A survey. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 16-20.

van Es, A. E., Tunnet, J., Goldsmith, T. L., & Seago, N. (2014). A Framework for the facilitation of teachers' analysis of video. *Journal of Teacher Education*, *65*(4), 340-356. https://doi.org/10.1177/0022487114534266

Walen, S. B., & Williams, S. R. (2000). Validating classroom issues: Case method in support of teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(1), 3-26. https://doi.org/10.1023/A:1009917510318

Wilson, P. H., Mojica, G. F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2)*,* 103-121. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.003

Zazkis, R. (2017). Lesson play tasks as a creative venture for teachers and teacher educators. *ZDM, 49*(1)*,* 95-105. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0808-6

Zazkis, R., & Herbst, P. (Eds.). (2018). *Scripting approaches in mathematics education: Mathematical dialogues in research and practice*. Springer.

"מוזימטיקה" ו"מוזיקה אקדמית" - שתי תוכניות התערבות מוזיקליות ללימוד שברים בקרב ילדי כיתות ד'

ליבי עזריהו, סוזן קורי, רבקה אלקושי ואסתר עדי-יפה

ד"ר ליבי עזריהו

מוזיקאית ומרצה בפקולטה לחינוך מוזיקלי במכללת לוינסקי לחינוך. מורה למוזיקה בבתי ספר מעל 23 שנה, מדריכה פדגוגית לפרחי הוראה בחינוך מוזיקלי ומנחת סדנת סטאז' למורים חדשים. במחקריה היא מתמקדת בלמידה רב-תחומית המשלבת מתמטיקה ומוזיקה. פרסומיה כוללים שירים ללימוד לוח הכפל ומאמרים בכתבי עת בין-לאומיים בנושא למידה רב-תחומית.

ד"ר סוזן קורי

יו"ר התוכנית לחינוך כללי ומיוחד לגיל הרך בבית הספר ללימודים מתקדמים במכללת טורו בניו יורק. קורי היא חוקרת ראשית בפרויקט במימון פדרלי בשם מוזיקה "אקדמית צעירה וחשיבה חישובית בגן". היא עובדת עם מורים בבתי ספר ועמיתים כדי ללמד מושגים מתמטיים באמצעות מוזיקה. פרסומיה כוללים מאמרים בכתבי עת בין-לאומיים בנושא למידה רב-תחומית.

ד"ר רבקה אלקושי

פסנתרנית ומרצה בכירה למוזיקה. היא לימדה מוזיקה לתואר ראשון ושני, העבירה סדנאות למחנכי מוזיקה מטעם משרד החינוך, והנחתה תלמידי דוקטורט. אלקושי מתמקדת בחקר התפיסה והאוריינות המוזיקלית, פדגוגיה לפסנתר, ויישום שיטת אורף. פרסומיה כוללים יצירות מוזיקליות, ספרים בנושא הוראת פסנתר, פדגוגיית אורף ואוריינות מוזיקלית. פרסמה פרקי ספרים ומאמרים בכתבי עת בין-לאומיים בנושא תפיסה מוזיקלית וחקר האוריינות המוזיקלית.

פרופ' אסתר עדי-יפה

פרופסור חבר בבית הספר לחינוך, אוניברסיטת בר-אילן, ראש התוכנית להתפתחות הילד וחברה במרכז הרב-תחומי לחקר המוח ע"ש לסלי וסוזן גונדה (גולדשמיד) בבר-אילן. עדי-יפה מנהיגה קבוצת חוקרים הכוללת מורות וגננות בחינוך הרגיל והמיוחד, ואנשי מקצועות הבריאות (קלינאות תקשורת, ריפוי בעיסוק ופיזיותרפיה) החוקרים רכישת מיומנות אצל ילדים צעירים בתחום המוטורי, השפתי הקוגניטיבי והחברתי, והקשרים בין למידה והתפתחות בתחומים אלו. לעדי-יפה מעל 50 פרסומים בנושאים של למידה וזיכרון, והיא ממחברות תוכנית הלימודים לגיל הרך בישראל.

תקציר

הקשר בין מוזיקה למתמטיקה הוכר מאז ימי פיתגורס, אפלטון ואריסטו, שכתבו על החפיפה וההקבלה בין שני התחומים (Bamberger & Disessa, 2003). שתי הדיסציפלינות באות לידי ביטוי באמצעות השימוש בשפה ייצוגית ובסמלים (Papadopoulos, 2002). מחקרים עדכניים דנים בשאלה האם פעילויות מוזיקליות בבית הספר מגבירות את כישורי המתמטיקה של התלמידים.

מחקרים שחקרו את השפעת המוזיקה על כישורי המתמטיקה של התלמידים הניבו תוצאות מעורבות. רוב המחקרים בחנו את השפעת הנגינה בכלים אינסטרומנטליים והראו ראיות מועטות להעברה מסוג זה (לסקירה, ראו Sala & Gobet, 2017). אחרים קישרו בין הידע המושגי והפרוצדורלי הטמון במוזיקה ובמתמטיקה, כאשר התוצאות העידו על השפעות חיוביות (An & Tillman, 2015; Courey et al., 2012). לפיכך במחקר זה עשינו רפליקציה לתוכנית התערבות שנעשתה בארצות הברית והוכיחה השפעה חיובית של חיבורים מפורשים על לימוד מקצבים ושברים, "מוזיקה אקדמית" (Courey et al., 2012), והשווינו אותה לתוכנית חדשנית, "מוזימטיקה", המסתמכת על יצירות מוזיקליות ומתמקדת בלימוד מקצבים ומנגינות. מטרת מחקר זה היא לבחון האם תוכניות התערבות מוזיקליות, בדגש על לימוד מקצבים ומנגינות, תורמות לשיפור הישגי התלמידים בתחום השברים בכיתה ד'.

מילות מפתח: שברים; למידה רב-תחומית; העברה; מוזיקה.

רקע תאורטי

מחקרים מעידים כי ידע מוקדם בתחום השברים מנבא הישגים מתמטיים לאחר מכן. הבנת שברים הכרחית להצלחת התלמידים באלגברה. עם זה שברים הם בין המושגים המתמטיים הקשים ביותר להבנה וללמידה בתוכנית הלימודים בבית הספר היסודי (Organisation for Economic Co-operation and Development, 2016). בכיתה ד' התלמידים נדרשים להבין את מהות השבר וגודלו, לייצג שברים בסמלים, איורים ובציר מספרים, להשוות בין שברים למיניהם ולחבר ולחסר שברים בעלי מכנים זהים או מוכלים. חלוקת הזמן במוזיקה עומדת בהקבלה טבעית לשברים מתמטיים. לדוגמה, במשקל של 4/4 תו שלם שווה לארבע פעימות, תו החצי שווה לשתי פעימות ותו הרבע שווה לפעימה אחת. במוזיקה אנו משתמשים בטרמינולוגיה זהה למתמטיקה כאשר מדובר בחלוקת הזמן: שלם, חצי, רבע, שמינית וכו'.

העברה של מיומנויות

העברה בלמידה מתרחשת כאשר ידע שנרכש בתחום אחד מוכלל לתחומים חדשים או מגביר את היכולות הקוגניטיביות הכלליות. יעילות המעבר משדה אקדמי אחד למשנהו תלויה בדמיון של תהליך הלמידה. העברה קרובה מתרחשת כאשר לשני חומרי הלמידה יש הקשר דומה מאוד. העברה רחוקה מתרחשת כאשר המיומנויות והמושגים הנלמדים בדרך מסוימת יכולים להיות מנוצלים ביעילות בדרך אחרת לחלוטין. תלמידים נוטים להציג העברה קרובה הרבה יותר מהעברה רחוקה (Hallam, 2015; Sala & Gobet, 2017). במחקר זה נבחן העברה בין חלוקת הזמן במוזיקה ובין שברים. ישנה הקבלה מוזיקלית בין מקצב לשברים $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ (חלוקת הצליל השלם). לעומת זאת כאשר מדובר בשברים שהמכנה שלהם אינו חזקה של 2 (למשל $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$) ההקבלה למקצב מוזיקלי נדירה. בשל הבדל זה נראה בקשר הראשון העברה קרובה ואילו בקשר השני העברה רחוקה (Courey et al., 2012; Jaschke et al., 2013).

העברה של ידע וכישורים אקדמיים ממוזיקה למתמטיקה

ממצאים הקשורים להעברה משיעורי מוזיקה להישגים במתמטיקה אינם חד-משמעיים. לדוגמה קוסטה-גיאומי (Costa-Giomi, 2004) לימדה 117 ילדים בבית הספר היסודי שיעורי פסנתר שלוש שנים. ילדים בקבוצת הביקורת לא השתתפו בהוראת מוזיקה רשמית. התוצאות הראו שהוראת פסנתר לא השפיעה על הישגי התלמידים במתמטיקה. לעומת זאת תוכניות התערבות מוזיקליות הכוללות במפורש מושגים מתמטיים במסגרת שיעורים משולבים ומאפשרות תרגול רלוונטי, מספקות ראיות להעברה וקשר חיובי בין המוזיקה לשיפור בהישגי המתמטיקה (An & Tillman, 2015; Courey et al., 2012; Ribeiro & Santos, 2017). לדוגמה קואורי ועמיתיה (Courey et al., 2012) בחנו את השפעתה של תוכנית התערבות "מוזיקה אקדמית"על לימוד שברים בכיתה ג'. ההתערבות המוזיקלית כללה 12 מפגשים שהעביר פעמיים בשבוע במשך שישה שבועות מורה למוזיקה וחוקר באוניברסיטה. בקבוצת הביקורת למדו שיעורי מתמטיקה סטנדרטים. התוצאות הראו שתלמידי "מוזיקה אקדמית" השתמשו במושגים מוזיקליים כדי לפתח הבנה של השלם וחלקיו, ואלה סייעו להם לפתור בעיות חישוב בשברים (Courey et al., 2012). תוכנית זו הובאה כהוכחה להעברה קרובה מהוראת מקצב לידע בתחום השברים (Jaschke et al., 2013).

שתי גישות בחינוך מוזיקלי

כאשר שוקלים העברה מהוראת מוזיקה להבנה מתמטית יש להביא בחשבון שתי גישות שונות זו מזו בחינוך מוזיקלי: א. הגישה האקוסטית הפשוטה; ב. הגישה ההוליסטית. הגישה האקוסטית הפשוטה מתמקדת ברכיבי המוזיקה (למשל מנגינה, קצב וכו') ותרומתם להבנת מוזיקה. מחקרים המשתמשים בגישה זו כללו קטעים קצרים של תבניות מקצב, הרמוניה או צלילים מעטים ובחנו את תהליך פיתוח ההבנה של 'אבני היסוד' של המוסיקה (Bamberger, 1999; Barrett, 2005; Steinbeis & Koelsch, 2008; Upitis, 1987). מחקרים המשתמשים בגישה ההוליסטית מדגישים את הצורך לגשת להוראת מוזיקה באמצעות ראייה רחבה יותר המאמצת איכויות הוליסטיות של מוזיקה (Elkoshi, 2002, 2017; Kaschub & Smith, 2009; Serafine, 1988). תלמידים שמקבלים הדרכה מוזיקלית הוליסטית מאזינים למוזיקה, מנגנים ויוצרים אותה לצד התמקדות במרכיבים מוזיקליים. בעוד בגישה האקוסטית הפשוטה חומרים מוזיקליים מתמקדים במיוחד באלמנטים מוזיקליים (למשל קצב), בגישה ההוליסטית משתמשים ביצירות מוזיקליות אותנטיות בשיעורים (Wiggins & Espeland, 2012).

היתרון של מלודיה על קצב בהעברה ממוזיקה למיומנויות אחרות

חוקרים טוענים כי גובה הצליל והקצב במוזיקה מייצגים שני ממדים בלתי תלויים של מוזיקה, ומעובדים בחלקים של המוח

שאינם חופפים (Carroll-Phelan & Hampson, 1996). האלאם (Hallam, 2015) סקרה מחקרים שבדקו את השפעת הקצב לעומת קצב משולב עם מלודיה על אימון בהבנת הנקרא. ממצאי המחקר הראו שההוראה המוזיקלית המפתחת הבנה של המלודיה תומכת גם בשטף הקריאה ומגבירה את הבנת הנקרא. דאייר ועמיתיו(Dyer, 2017) בדקו את השפעת הקצב והמלודיה על פיתוח מיומנויות מוטוריות מורכבות וממצאי המחקר הראו שהמלודיה מספקת יתרון על פני הקצב בלבד.

שלב המחקר

במחקר זה בחנו את ההשפעה של שתי תוכניות התערבות, "מוזיקה אקדמית" (Courey et al., 2012) ו"מוזימטיקה", כדי לשפר את הישגי התלמידים בתחום השברים. התוכנית "מוזיקה אקדמית" שחזרה את הניסוי שנעשה בארצות הברית והתמקדה בהוראת מקצבים בלבד בעוד התוכנית החדשה, "מוזימטיקה", שילבה לימוד של מקצבים ומנגינות. התלמידים נבחנו במתמטיקה לפני ההתערבות ואחריה, וגם שלושה ושישה חודשים לאחר ההתערבות. תלמידי כיתה ד' למדו לכתוב מקצבים מוזיקליים ולעשות תבניות קצביות באמצעות מחיאות כפיים והקשה על תופים. הם חיברו תווים יחד כדי לייצר מספר אמיתי (שבר), ויצרו בעיות חיבור וחיסור עם תווים. בדקנו את ההעברה הקרובה מתווים לשברים $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$, כלומר שברים מתורגלים. התוכנית "מוזימטיקה" כללה האזנה ליצירות מוזיקליות הטומנות בחובן חלוקות טבעיות אחרות במלודיה וכך היה אפשר לבחון העברה רחוקה לשברים שאינם מתורגלים (לדוגמה $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$).

השערות המחקר

1. תלמידים שישתתפו בתוכנית ההתערבות "מוזיקה אקדמית" (Courey et al., 2012) וישוו את ערכי המקצב לשברים $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$, ישתפרו בהישגיהם הלימודיים בשברים המתורגלים.
2. תלמידים שישתתפו בתוכנית ההתערבות "מוזימטיקה" שבה משווים את ערכי המקצב לשברים $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ ואת חלוקת המלודיה ל"שברים אחרים" ($\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$), ישתפרו בהישגיהם הלימודיים בשברים המתורגלים והלא מתורגלים.

שיטת המחקר

משתתפים

המשתתפים הם 77 תלמידי כיתה ד' בני תשע בלי הכשרה מוזיקלית קודמת, הלומדים בשלוש כיתות של בית ספר יסודי אחד במרכז הארץ המופעל ומפוקח מטעם משרד החינוך, בעלי רקע סוציו-אקונומי בינוני. האישור התקבל ממשרד החינוך (10.32/399/2016) והורי התלמידים חתמו על הסכם השתתפות ילדיהם במחקר. הכיתות חולקו באקראי לשלוש קבוצות: כיתת "מוזימטיקה" (n=30), כיתת "מוזיקה אקדמית" (n=25) וכיתה שלישית (n = 22) ששימשה קבוצת ביקורת.

מהלך המחקר

כל שלוש קבוצות המחקר קיבלו 12 שיעורים של 40 דקות בנושא שברים שנלמדו פעמיים בשבוע במסגרת מערכת בית הספר הרגילה (התלמידים למדו 6 שיעורים במתמטיקה בכל שבוע, 2 שיעורים בנושא שברים ועוד 4 שיעורים בנושאים אחרים). כל השיעורים נלמדו על פי תוכנית הלימודים במתמטיקה של משרד החינוך והדגישו את משמעותם של שברים, שמות שונים לשבר, הבנת החלקים השווים של השלם, שוויון ואי שוויון בין שברים למיניהם וחיבור וחיסור של שברים עם מכנים זהים או מוכלים. מורה למתמטיקה מצוות בית הספר העבירה שיעורי מתמטיקה בכל שלוש הקבוצות. בקבוצות המחקר הצטרפה למורה זו מורה למוזיקה אחת (חוקרת מהאוניברסיטה) שלימדה את החלק המוזיקלי של השיעור. צמד המורות קיבלו מראש הנחיה כיצד ללמד בכל קבוצה.

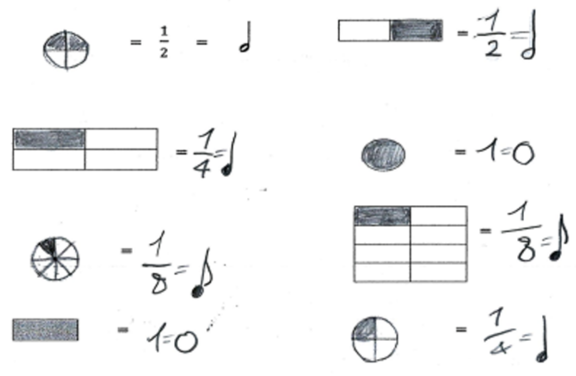
שתי תוכניות ההתערבות המוזיקליות, "מוזימטיקה" ו"מוזיקה אקדמית" מסתמכות על שיטת קודאי (שיטה מקובלת בחינוך המוזיקלי המדגישה את הלמידה בכמה דרכים: חזותי, שמיעתי וקינסתטי) (Wheeler & Raebeck, 1985). בתוכניות התערבות אלה נכחו שני מורים בכיתה, מורה למוזיקה (20 דקות) ומורה למתמטיקה (20 דקות). בחלק המוזיקלי התלמידים למדו לקרוא ולכתוב מקצבים והתמקדו בקשר שבין תווי המוזיקה לשברים $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$, בעוד בחלק המתמטי המורה למתמטיקה לימדה גם שברים עם מכנים אחרים. המורה למוזיקה הדגימה כיצד לדקלם, למחוא ולכתוב תבניות מקצב, שכל אחת מהן מורכבת מארבע פעימות. ראשית, התלמידים למדו את מקצב הרבע (ארבעה מחיאות כפיים שמרכיבות תיבה אחת). לאחר מכן הם למדו להחזיק את הפעמה השנייה, השלישית והרביעית כדי ליצור תו שלם. בדומה התלמידים למדו לדקלם, למחוא ולכתוב את תווי החצי ותווי השמיניות.

ככל שהתקדמה ההוראה, המשיכה המורה למוזיקה להראות כיצד לתופף את תבניות הקצב באמצעות טמבורין ומקלות מקצב. התלמידים התאמנו בבניית תבניות מקצב בתחום תיבה של 4/4. הם השוו את הערכים של מקצבי המוזיקה לשברים (ראו איור 1). התלמידים הונחו כיצד להקביל את שפת המוזיקה לשפה המתמטית ולייצוגים וסמלים של שברים (ראו איור 2). נוסף על ייצוג השברים בתווים, התלמידים למדו לייצג שברים באמצעות מעגלים, טבלאות וציר המספרים. התלמידים למדו לחבר ולחסר ערכי מקצב מגוונים ולהשוותם לשברים מתמטיים (ראו איור 3). נוסף על כך, באופן זה התלמידים למדו לחבר ולחסר שברים בעלי מכנים מוכלים (ראו איור 4). בעוד התלמידים למדו כיצד לחבר ולחסר תווים, המורה למתמטיקה הראתה כיצד הם יכולים להוסיף ולחסר את השברים בעלי אותו מכנה, וגם שברים עם מכנים מוכלים. התלמידים מילאו בכל שיעור דף עבודה מוזיקלי ומתמטי. עקבנו אחר ההבנה של התלמידים בדפי העבודה ודפי העבודה בכיתה נאספו ונבדקו בכל יום.

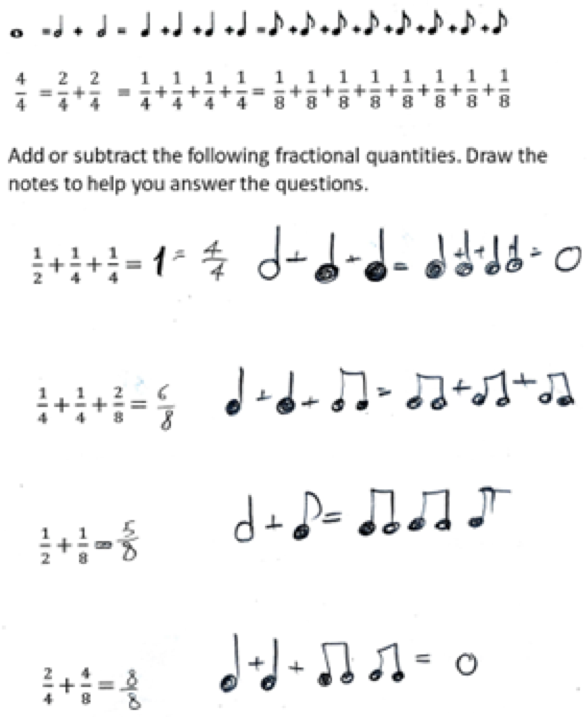
איור 1: דוגמה למעבר התלמידים בין ייצוגי שברים בתווים ובמספרים

2. ציירו את התו ואת השבר המתאים.

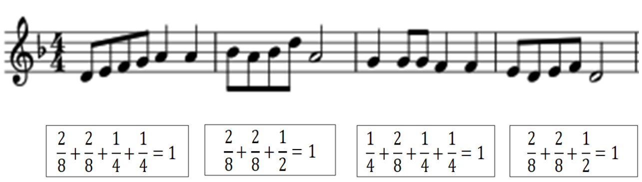
הדוגמה הראשונה נכתבה בשבילכם.



איור 2: דוגמה למעבר התלמידים בין ייצוגי שברים בטבלאות, בעיגולים, בתווים ובמספרים



איור 3: דוגמה לחיבור שברים עם מכנים מוכלים בעזרת תווים



איור 4: דוגמה למעבר התלמידים בין תווים לשברים

תוכנית ההתערבות "מוזימטיקה": במהלך ההתערבות הקשיבו התלמידים לכמה יצירות מוזיקליות: חלק מן הקונצ'רטו גרוסו מאת הנדל, אופ. 6 מס' 7; חלק מן "גן עדן וגהנום" מאת ונגליס; ושירים עממיים. יצירות מוזיקליות אלה הדגימו את חלוקת הזמן במוזיקה, והתלמידים יכלו לשמוע את הערכים היחסיים של המקצבים המופיעים בזמן שלמדו לכתוב את תבניות המקצב. המורות למוזיקה ולמתמטיקה השתמשו באותו מינוח של שמות השבר כדי להבין את חלוקת הזמן ואת המספר. בכל אחד מ-12 השיעורים היו הפעילויות האלה: ראשית, התלמידים מחאו כפיים ותופפו את תבניות הקצב כדי לחזור על השיעור האחרון (5–7 דקות). לאחר מכן נלמד קטע מוזיקלי חדש (13–15 דקות) והתלמידים התאמנו לכתוב מקצבים בתיבה של 4/4. בחלק השני של השיעור התלמידים למדו להקביל את סמל השבר לסמל התו באמצעות דפי עבודה. נוסף על כך, התלמידים למדו לחבר ולחסר שברים עם מכנים זהים או מוכלים באמצעות תווים.

תוכנית ההתערבות "מוזיקה אקדמית": היא רפליקציה של מחקר שערכו בארצות הברית קוּאורי ועמיתיה (Courey et al., 2012). ששת השיעורים הראשונים (40 דקות כל אחד) התמקדו בכתיבת מקצבים ובלמידת הערך הטמפורלי שלהם במשקל של 4/4. ששת השיעורים האחרונים התמקדו בהקבלת המקצבים לשברים מתמטיים. רצף ההוראה היה כזה: התלמידים מחאו ותופפו תבניות מקצב בתיבות של 4/4 (2–3 דקות); המורה למוזיקה חזרה על השיעור הקודם והציגה את מטרות היום (10 דקות) והתלמידים התאמנו בכתיבת מקצבים; התלמידים למדו חומר חדש (8 דקות); ב-20 הדקות הנשארות השלימו התלמידים דפי עבודה על פי התכנים הנלמדים בכל שיעור.

קבוצת הביקורת: תלמידים בקבוצת הביקורת למדו את נושא השברים בדרך רגילה עם המורה בכיתה במשך 12 שיעורים של 40 דקות. התלמידים עבדו בספרי הלימוד ובמחברות אישיות. בשני השיעורים הראשונים החלה המורה למתמטיקה ללמד את משמעות השברים. בשיעורים 3–4 למדו התלמידים לייצג חלקים משלם באמצעות איורים ולהבין שברים עם מונה גדול מ-1. בארבעת השיעורים האלה התמקדו התלמידים בגודל השבר ושוויון בין שברים שונים. לבסוף בארבעת השיעורים האחרונים למדו התלמידים לחבר ולחסר שברים עם מכנים זהים ומוכלים. כל שיעור התחיל עם סקירה קצרה של השיעור האחרון והמשיך עם נושא חדש. המורה השתמשה בייצוגים גרפיים וציר מספרים כדי להדגים את נושא השברים. השיעורים כללו 20 דקות של הוראה ואחריה 20 דקות של עבודה במחברות ובספרי הלימוד.

כלי המחקר

מיומנויות מתמטיות כלליות: ניתנה גרסה עברית של מבחן המתמטיקה WISC R-95 (Ryan et al., 1988; Wechsler, 1998). זהו מבחן בעל דרגות קושי עולות ובו 24 שאלות. כל תשובה נכונה מזכה בנקודה אחת, והמבחן נעצר לאחר שלוש טעויות רצופות.

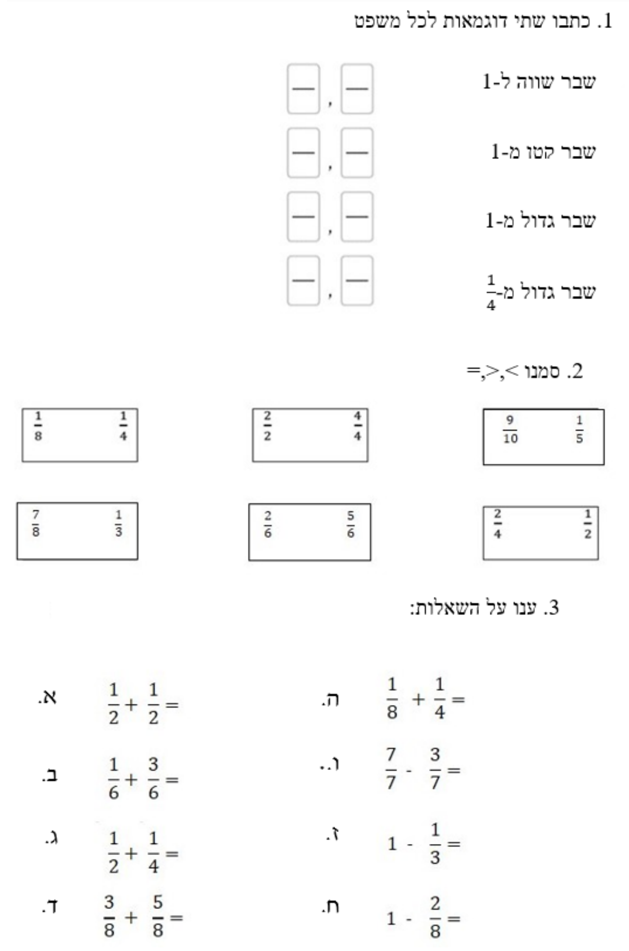
מבחן שברים: מבחן השברים נלקח מתוך תוכנית הלימודים של משרד החינוך לכיתה ד' (Mevarech & Kramarski, 1997). המבחן כלל שאלות של ייצוג השבר באיור ובמספר,

שוויון שברים, שברים על ציר המספרים, וכן חיבור וחיסור של שברים עם מכנים זהים או מוכלים. המבחן מתוקנן עם ערך אלפא של קרונבך שנע בין 73 ל-79. ציון הניקוד המרבי במבחן היה 100, עם 8 שאלות המספקות הזדמנות ליותר מתשובה אחת (ראו איור 5).

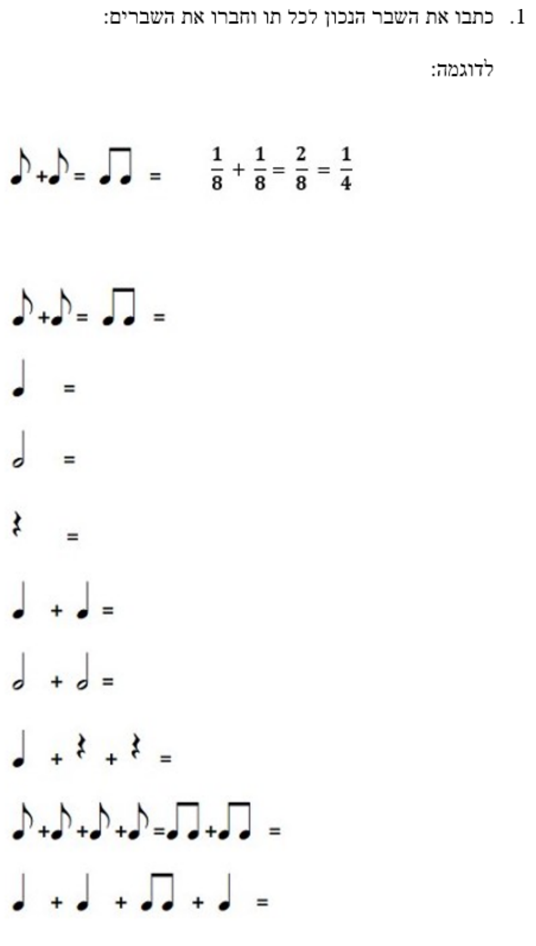
דפי עבודה מוזיקליים: שנים עשר דפי עבודה מוזיקליים ניתנו לתלמידים בקבוצות הניסוי, אחד בכל מפגש. התלמידים התבקשו לכתוב מקצבים, לכתוב תבניות מקצב במשקל של 4/4 ולהמיר תווים מוזיקליים בתווים בעלי אותו משך. פרוצדורות של חישוב שברים כללו חיבור וחיסור של סמלים מוזיקליים ופענוח התוצאה במונחים של משך המוזיקה (Courey et al., 2012).

דפי עבודה בשברים: 12 גיליונות עבודה בנושא שברים ניתנו לקבוצות המחקר, בעוד התלמידים בקבוצת הביקורת עבדו בספרי הלימוד ובמחברות אישיות. הידע הוערך באמצעות בחינת היחס בין השלם וחלקיו לייצוגים הגרפיים המגוונים של השברים. פרוצדורות חישוב השברים כללו חיבור וחיסור של שברים עם מכנים דומים ומוכלים (Courey et al., 2012).

מבחן מוזיקה: מבחן המוזיקה אומץ ממחקרה של קוּאורי ועמיתיה (Courey et al., 2012), וכלל פריטים המבקשים מהתלמידים לזהות תווים מוזיקליים, להתאים את השבר המקביל לערך של התו ולהוסיף ולחסר תווים בעלי ערכי מקצב מגוונים כדי לשמור על 4/4 בכל תיבה (ראו איור 6). הציון המקסימלי למדד זה היה 100.



איור 5: חלק ממבחן השברים



איור 6: חלק ממבחן המוזיקה

תכנון הניסוי וניתוח נתונים

ניתוח מדידות חוזרות 2X3 ANOVA של קבוצה (מוזימטיקה/מוזיקה אקדמית) X זמן (לפני ההתערבות/לאחר ההתערבות) בוצע כדי לנתח את השיפור בציוני מבחן השברים כשהזמן הוא המשתנה החוזר. בדיקת אינטראקציה (Keppel, 1991) בוצעה כדי לחקור את האינטראקציה בין הקבוצה לזמן. ניתוח מדידות חוזרות 2X2 ANOVA של קבוצה (מוזימטיקה/מוזיקה אקדמית) X זמן (לפני ההתערבות/אחרי ההתערבות) בוצע כדי להשוות בין ציוני המוזיקה של קבוצת "מוזימטיקה" לעומת קבוצת "מוזיקה אקדמית". שלושה ושישה חודשים לאחר ההתערבות, ANOVA חד-כיוונית שימשה להשוואה בין ציוני מבחני השברים בין שלוש הקבוצות. הניתוחים השוו בין שלוש הקבוצות בשלושה תנאים: מבחן שברים כללי, מבחן שברים מתורגלים, מבחן שברים לא מתורגלים. ניתוחי התוצאות שלושה ושישה חודשים לאחר ההתערבות השוו שני תנאים: מבחן שברים מתורגלים ומבחן שברים לא מתורגלים.

תוצאות

טבלה 1 מציגה נתוני סטטיסטיקה תיאורית וציונים ממוצעים של תלמידים וסטיות תקן למבחנים המקדימים. מבחן ANOVA חד-כיווני המשווה את הניקוד הממוצע של שלוש הקבוצות לא הראה הבדלים מהותיים. לא היו הבדלים בין המינים בין הקבוצות ($\chi2$ (2) = 0.16, p = .88).

טבלה 1: סטטיסטיקה תיאורית – תוצאות מבחן מקדים וסטיות תקן

	Comparison group (n=22)		MusiMath group (n=30)		Academic music group (n=25)		η^2	F	p
Measures	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*			
Gender %male	.50		.46		.52				
Age	115.2	4.01	114.6	5.21	113.9	3.51	.01	.52	.60
Pre-Math	23.05	17.74	17.53	8.68	22.32	19.32	.03	1.03	.36
Pre – $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ fractions	22.03	17.01	17.59	8.97	21.09	19.76	.02	0.61	.54
Pre – other fractions	28.45	27.37	16.63	15.50	29.02	21.24	.07	2.97	.06
Pre-Music			6.53	3.85	7.68	4.75	.02	.97	.33
Wisc-Math	14.91	1.57	14.90	1.90	15.04	1.74	.00	0.65	.95

*Pre = Pretest, מבחן מקדים.   Age = גיל בחודשים.

ידע מתמטי

תוצאות לפני התערבות ואחריה: רפליקציה של מחקרה של קוארי ועמיתיה (Courey et al., 2012)

ציוני המתמטיקה של שלוש הקבוצות מוצגים בטבלה 2. יש לציין כי לא היו הבדלים מובהקים בין הקבוצות לפני ההתערבות (טבלה 1). הניתוח של הפער בין לפני ההתערבות ובין הפער אחריה (ראו טבלה 3) עמד על עליות ניכרות בציוני המתמטיקה, וחשף שכל הקבוצות שיפרו את ביצועיהן. עם זה גודל השיפור היה שונה בין הקבוצות, כאשר ההישגים הגדולים ביותר נמצאו בקבוצת "מוזימטיקה" וההישגים הנמוכים ביותר נמצאו בקבוצת הביקורת. ניתוח אינטראקציה הראה שיפור גדול בקבוצת "מוזימטיקה" מאשר בקבוצת הביקורת ($F(1,50) = 10.00$, Bonferroni, $p < .01$, $\eta2 = .17$). הפערים שנמצאו בקבוצת ״מוזיקה אקדמית״ היו גבוהים מאלה שנמצאו בקבוצת הביקורת. עם זה הניתוח הראה רק מגמה שלא עמדה בתיקון סטטיסטי ($F(1,45) = 4.70$, Bonferroni, $p = .12$). לא נמצא הבדל בין שתי קבוצות ההתערבות (שתיים מתוך שלוש הקבוצות).

טבלה 2: ציוני מתמטיקה – לפני ההתערבות ואחריה

Groups	Pre		Post	
	M	*SD*	*M*	*SD*
Music scores				
“MusiMath”	6.53	3.85	88.73	11.77
“Academic Music”	7.68	4.75	86.76	12.50
Math scores				
“MusiMath”	17.53	8.68	82.10	16.20
“Academic Music”	23.32	8.68	82.72	15.15
Comparison	23.05	17.74	73.05	12.73

טבלה 3: שיפור ההישגים במוזיקה ובמתמטיקה מלפני ההתערבות ואחריה

	Pre-to post-intervention				*Specific group effects*			
	df	*F*	η^2	*p*		*df*	*t*	*d*
Overall test scores								
Group	2, 74	0.74	.02	.48	MusiMath	29	22.64***	
Time point	1, 74	957.40	.93	.001	Academic Music	24	16.52***	
Group X Time Point	2, 74	5.01	.12	.008	Comparison	21	15.47***	
$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ *fractions*								
Group	2, 74	0.69	.02	.50	MusiMath	29	19.52***	
Time point	1, 74	815.44	.92	.001	Academic Music	24	15.21***	
Group X Time Point	2, 74	4.29	.10	.017	Comparison	21	15.54***	
Other fractions								
Group	2, 74	2.05	.05	.13	MusiMath	29	25.60***	
Time point	1, 74	692.15	.90	.001	Academic Music	24	15.84***	
Group X Time Point	2, 74	4.51	.11	.014	Comparison	21	9.25***	
Music scores								
Group	1, 53	0.05	.00	.83	MusiMath	29	41.24***	
Time point	1, 53	2848.92	.98	.000	Academic Music	24	34.55***	
Group X Time Point	1, 53	1.07	.02	.31				

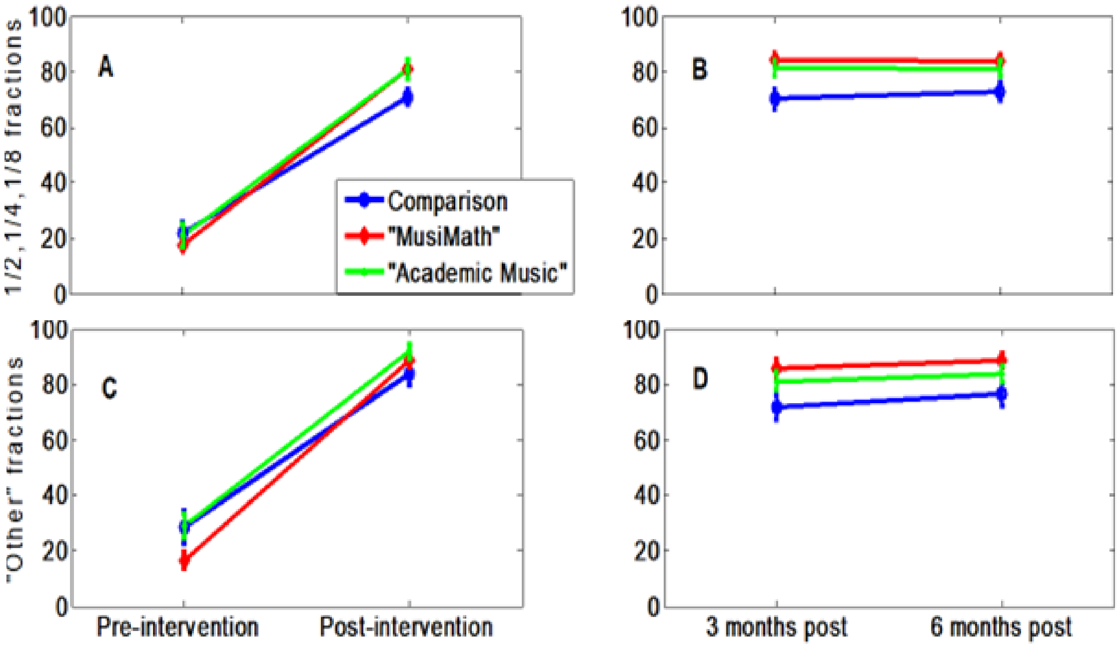
***p<.001

תוצאות לפני ההתערבות ואחריה בשברים שהתאמנו עליהם

לפני ההתערבות לא נמצאו הבדלים מובהקים בין הקבוצות (טבלה 1, איור 7 A). הניתוח של הפרשי ציוני השברים שהתאמנו עליהם מלפני ההתערבות ואחריה זהה לתוצאות של ציוני המבחנים הכוללים, כולל אינטראקציה מובהקת של קבוצה X נקודת זמן (טבלה 3). ניתוח אינטראקציה הראה שיפור גדול בקבוצת "מוזימטיקה" מאשר בקבוצת הביקורת ($F(1,50) = 8.18$, Bonferroni, $p < .05$, $\eta^2 = .14$). קבוצת "מוזיקה אקדמית" השתפרה יותר מקבוצת הביקורת. עם זה הניתוח הראה רק מגמה שלא עמדה בתיקון ($F(1,45) = 4.46$, Bonferroni, $p = .12$). לא היה הבדל בין שתי קבוצות ההתערבות (שתיים מתוך שלוש הקבוצות).

תוצאות לפני ההתערבות ואחריה בשברים שלא התאמנו עליהם

לפני ההתערבות לא נמצאו הבדלים מובהקים בין הקבוצות (טבלה 1, איור 7 C). הניתוח של הפרשי ציוני השברים שלא התאמנו עליהם מלפני ההתערבות עד לאחריה זהה לתוצאות ציוני המבחנים הכוללים, כולל אינטראקציה מובהקת של קבוצה X נקודת זמן (טבלה 3). ניתוח אינטראקציה הראה שיפור גדול בקבוצת "מוזימטיקה" מאשר בקבוצת הביקורת ($F(1,50) = 8.83$, Bonferroni, $p < .05$, $\eta 2 = .15$). לא היה הבדל בין קבוצת "מוזיקה אקדמית" ובין קבוצת הביקורת או קבוצת "מוזימטיקה".



איור 7: ציוני מבחן השברים (ממוצע וסטיית תקן). A ו-B שברים מתורגלים, C ו-D שברים שאינם מתורגלים. ציוני השברים הותאמו לציון מקסימלי 100

תוצאות לאחר שלושה ושישה חודשים אחרי ההתערבות בשברים שהתאמנו עליהם

שלושה ושישה חודשים לאחר ההתערבות, שתי קבוצות ההתערבות עלו בביצועיהן על קבוצת הביקורת (שלושה חודשים אחר כך: $F(2,74) = 6.19$, $p < .01$, $\eta 2 = .14$, Bonferroni $p < .01, .05$; שישה חודשים אחר כך: $F(2,74) = 4.98$, $p < .01$, $\eta 2 = .12$, Bonferroni $p < .01, .05$; $p < .025$). לא נמצא הבדל מהותי בין שתי קבוצות ההתערבות בציוני מבחן השברים שהתאמנו עליהם.

תוצאות לאחר שלושה ושישה חודשים אחרי ההתערבות בשברים שלא התאמנו עליהם

שלושה ושישה חודשים לאחר ההתערבות, קבוצת "מוזימטיקה" עלתה בביצועיה על קבוצת הביקורת ($F(2,74) = 3.88, 4.15$, $ps < .025$, $\eta 2 = .10, .09$; Bonferroni, $ps < .05$) ללא הבדל מהותי בין קבוצת "מוזיקה אקדמית" ובין קבוצת "מוזימטיקה" או קבוצת הביקורת בציוני שברים שלא התאמנו עליהם.

ידע מוזיקלי בתוכניות ההתערבות

שתי הקבוצות, מוזימטיקה ומוזיקה אקדמית, השתפרו בציוני המבחנים (טבלה 2), דבר המלמד על כך שתוצאות התלמידים לאחר ההתערבות היו גבוהות מהציונים שלהם לפני ההתערבות (טבלה 3). לא הופיעו הבדלים קבוצתיים או אינטראקציה של קבוצה X זמן.

תווים מוזיקליים בידע תחום השברים

בתוכניות ההתערבות המתוארות, כתיבת המקצבים נוצלה להשגת העברה בין מוזיקה למתמטיקה. לכן חשוב ללמוד את הקשר בין השיפור בכתיבת התווים לשיפור בציונים במתמטיקה מתחילת ההתערבות ועד סופה. מניתוחי קורלציה עולה כי קיים מתאם בין השיפור במוזיקה לשיפור בציוני מתמטיקה מלפני ההתערבות ואחריה בשתי קבוצות ההתערבות. המתאם היה גבוה במובהק בקבוצת "מוזימטיקה" מאשר בקבוצת "מוזיקה אקדמית" ("MusiMath" $r(30) = .74$, $p < .001$; "Academic Music" $r(25) = .42$, $p < .05$; $z = 1.75$, $p = .08$).

תלמידים משתי תוכניות התערבות מילאו דפי עבודה במוזיקה ובמתמטיקה. השוואה בין דפי העבודה בין שתי קבוצות ההתערבות לא הראתה הבדלים בציונים ($t's < 1.38$, $p's > .17$). ניתוח קורלציה הראה קשר בין ציוני דפי העבודה במוזיקה ובמתמטיקה ("MusiMath" program: $r(30) = .46, .47$, $p < .05, .01$; "Academic Music": $r(25) = .42, .46$, $p < .05$, .49).

נתונים אלה מדגישים את הרעיון של התקדמות מקבילה במוזיקה ובמתמטיקה.

דיון

במחקר הנוכחי השווינו שתי תוכניות להוראת המוזיקה, "מוזימטיקה" ו"מוזיקה אקדמית", המקשרות בין היבטים מקבילים זה לזה הטמונים במקצבים ובשברים, כדי לשפר את הידע בנושא שברים בכיתה ד'. בעוד התוכנית "מוזיקה אקדמית" הסתמכה על הוראת קצב בלבד, תוכנית "מוזימטיקה" כללה יצירות מוזיקליות אותנטיות המתמקדות במקצבים בתוך המנגינה. שתי תוכניות המוזיקה השתמשו בתבניות מקצב במשקל 4/4 , בשתיהן התלמידים למדו לכתוב תווים מוזיקליים המקבילים לשברים של $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ ובשתיהן התלמידים השוו מקצבים לשברים ופתרו באמצעותם בעיות חיבור/חיסור. נבדקה העברת ידע מושגי וחישובים נלווים לשברים מתורגלים, וכן לשברים שאינם מתורגלים (למשל, $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$). שתי קבוצות המוזיקה השתפרו במובהק בציוני מבחן השברים הכלליים (אם כי קבוצת ה"מוזיקה אקדמית" הראתה רק מגמה) ועלו בציוני קבוצת הביקורת בין שלושה לשישה חודשים לאחר ההתערבות בשברים המתורגלים. במבחן השברים שאינם מתורגלים, קבוצת "מוזימטיקה" השתפרה במובהק לעומת קבוצת הביקורת בין מבחן הקדם למבחן שאחרי ההתערבות ובין המבחנים שלושה ושישה חודשים לאחר ההתערבות. נתונים אלה מראים כי היתרון שנצבר בהתערבות בשברים המתורגלים על ידי שתי קבוצות ההתערבות המוזיקלית, כמו היתרון שנצבר בשברים לא מתורגלים על ידי קבוצת "מוזימטיקה" על פני קבוצת ההשוואה, נמשך שלושה ושישה חודשים לאחר התערבות.

רפליקציה של התוכנית מוזיקה אקדמית

במחקר הנוכחי, מצאנו השפעה חיובית על רפליקציה של תוכנית ההתערבות "מוזיקה אקדמית" שהציגו קוּאורי ועמיתיה (Courey et al., 2012). עם זה בקבוצת הביקורת הייתה רק מגמה של שיפור בציוני השברים לפני ההתערבות ואחריה. תוצאה זו חוזרת על הממצאים המדווחים במחקר של קוּאורי ועמיתיה (Courey et al., 2012).

לימוד שברים מתורגלים בשתי תוכניות ההתערבות

המחקר הנוכחי התמקד בהשוואת ההשפעה של שתי גישות מוזיקליות (אקוסטית לעומת הוליסטית) על הישגי המתמטיקה בתחום השברים. העברה קרובה נבדקה באמצעות בדיקת היכולת להקביל מקצבים מוזיקליים לשברים $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$. השוואת פערי הציונים בשברים המתורגלים הראתה שקבוצות ההתערבות השתפרו יותר מקבוצת הביקורת מלפני ההתערבות ואחריה, וכן משלושה עד שישה חודשים לאחר ההתערבות. ממצאים אלה מדגישים את האפקטיביות של העברה קרובה. העברה קרובה ממוזיקה לידע מתמטי מתרחשת כאשר הוראת המוזיקה מדגישה את היחס המפורש בין ידע מתמטי ספציפי ובין תכונות של אלמנטים מוזיקליים (Jaschke et al., 2013).

לימוד שברים שאינם מתורגלים בשתי תוכניות ההתערבות

ההעברה הרחוקה נבדקה באמצעות בדיקת היכולת להקביל את התווי המוזיקלי לשברים עם מכנים הנשענים על חלוקה אחרת מ-2 (למשל $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$), שלא תורגלו בהתערבות המוזיקה. המחקר הנוכחי השווה בין שתי גישות מוזיקליות, הגישה האקוסטית והגישה ההוליסטית, בהנחה שהגישה ההוליסטית תציג השפעות רבות יותר. ההשוואה בין ציוני מבחני השברים על פני שלוש קבוצות המחקר הראתה שהשיפור מלפני ההתערבות

ואחריה ניכר בקבוצת "מוזימטיקה" מאשר בקבוצת הביקורת, ורק תלמידים בקבוצת "מוזימטיקה" עלו על הביצועים של התלמידים בקבוצת הביקורת בשברים שלא תורגלו שלושה ושישה חודשים לאחר ההתערבות. ממצאים אלה מרחיבים את תוצאות ההעברה הקרובה להעברה רחוקה ועולים בקנה אחד עם מחקרים קודמים המציינים יתרון בהוראת מוזיקה המדגישה שילוב של מלודיה ומקצב על המקצב בלבד (Dyer et al., 2017; Hallam, 2015; Patscheke et al., 2018). הוספה של ממד מוזיקלי אחר, מלודיה, שמעבירה חלוקות טבעיות אחרות הקשורות לצורה המוזיקלית, עשויה להקל על ההעברה המרוחקת לשברים עם מכנים הנשענים על חלוקה אחרת מ-2. לדוגמה, בקבוצת "מוזימטיקה", התלמידים האזינו לקונצ'רטו גרוסו של הנדל אופ. 6 מס' 7, המכיל שלושה משפטים מלודיים. קטע זה מתוך הקונצ'רטו נותח כמקשה שלמה, המחולקת לשלושה חלקים שווים. התלמידים הקבילו את אורך כל הקטע ל-$\frac{3}{3}$, נוסף על למידה של ערכי המקצב המרכיבים את היצירה. שיעור המתמטיקה נגע לפעילות זו מתוך התחשבות בתפיסת החלק השלם בשבר 1/3"".

היעילות של תוכניות ההתערבות

בשתי קבוצות ההתערבות השיפור בציוני המתמטיקה היה בקורלציה עם עלייה מקבילה בציוני המוזיקה. כמו כן נמצא מתאם בין ציוני דפי העבודה השבועיים במוזיקה ובמתמטיקה. נתונים אלה מראים שהתלמידים בקבוצות הניסוי הוכיחו יכולת לייצג את הידע המושגי שנרכש בתווים מוזיקליים בשברים. תוכניות ההתערבות המוזיקליות קשרו במפורש מקצבים ושברים, והעניקו לתלמידים את היכולת לרכוש ידע במרומז באמצעות פעילות חוזרת של מחיאות כפיים, דקלומים ותיפופים קצביים, שעודדו לכתיבת תווים המבטאים את ערך הצליל. פעילויות אלה משפיעות ככל הנראה על יכולת ההכללה של הידע של השלם וחלקיו (Rittle-Johnson et al., 2001), ועולות בקנה אחד עם הרעיון שילדים לומדים מחוויות הכוללות למידה משולבת ומפורשת (Julius & Adi-Japha, 2016; Nemeth et al., 2013).

ממצאי המחקר עולים בקנה אחד עם מחקרים קודמים התומכים בתוכניות התערבות מוזיקליות המשפרות מיומנויות קוגניטיביות ואקדמיות אחרות לא מוזיקליות, במיוחד אם הקשר בין מוזיקה למתמטיקה מתבטא במפורש (An & Tillman, 2015; Courey et al., 2012; Ribeiro & Santos, 2017). לדוגמה נמצא כי אימונים מוזיקליים שאינם אינסטרומנטליים והשתמשו בהוראה מפורשת של אסטרטגיות כדי לזהות תכונות מוזיקליות, שיפרו את הקוגניציה בתחום המספרי והיו כלי שימושי לשיקום ילדים עם הישגים נמוכים במתמטיקה (Ribeiro & Santos, 2017). מנגד, המטא-אנליזה של סאלה וגובט (Sala & Gobet, 2017) שהתמקדה באימון מוזיקלי אינסטרומנטלי, טענה כי העברה רחוקה מהמוזיקה לכישורים שאינם מוזיקליים הייתה מוגבלת ונמצאה רק לכמה מיומנויות קוגניטיביות (כלומר אינטליגנציה וזיכרון) ולא לכישורים אקדמיים. בקבוצת "מוזימטיקה" לעומת קבוצת "מוזיקה אקדמית", נמצא מתאם גבוה בין הידע של כתיבת התווים ובין הידע בשברים. השיפור בציוני מבחני המוזיקה היו במתאם עם מבחני השברים הלא מתורגלים לאחר התערבות רק בקבוצת "מוזימטיקה". ייתכן שהמגוון הגדול של תת-חלוקות בתוך יצירה מוזיקלית מחזק את ההבנה המושגית של שברים (Perry et al., 2010) באמצעות אנלוגיה גדולה בין היחסים המוזיקליים למתמטיים. במיוחד חלוקות משנה שונות זו מזו המוטבעות בקצב (כלומר $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$) והמנגינה (כלומר $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$) תרמו להבדלים.

מסקנות ומגבלות המחקר

לסיכום, תוצאות המחקר הנוכחי מדגימות את הפוטנציאל של השימוש במוזיקה כדי ללמד שברים בתוכנית הלימודים היסודית. ההוראה המוזיקלית כנושא בלתי נפרד מתוכנית הלימודים היסודית תורמת לידע המושגי והפרוצדורלי של שברים. עם זה במהלך עריכת רפליקציה של המחקר של קוארי ועמיתיה (Courey et al., 2012), נמצא כי קבוצת ה"מוזיקה האקדמית" עלתה בביצועיה על קבוצת הביקורת רק בשברים המתורגלים. ממצא זה מעיד על מגבלות להעברת ידע משיעורי מוזיקה למתמטיקה. המורים צריכים לשקול את ההקבלות המדויקות בין מוזיקה למתמטיקה בעת עיצוב תוכנית משולבת. ממצאי המחקר הנוכחי תומכים בשימוש בגישה ה'הוליסטית' ולא בגישה ה'אקוסטית', כאשר הראשונה עשויה להקל על העברה משוכללת יותר.

המסקנות המדווחות כאן חייבות לבוא בחשבון במגבלות המחקר. גודל המדגם היה קטן, וכל השיעורים היו מבית ספר יסודי אחד כדי למזער את ההבדלים. בתי הספר היסודיים כוללים בדרך כלל 2–4 כיתות לכל קבוצת גיל, עם דרגות מסוימות של הטרוגניות בקרב ילדים בתוך השיעורים. מחקרים קודמים שבחנו את ההשפעות של תוכניות התערבות מוזיקליות על כישורי המתמטיקה כללו משתתפים מעטים יחסית (An & Tillman, 2015; Courey et al., 2012). כמו כן קבוצת הביקורת קיבלה את תוכנית הלימודים הסטנדרטית לשברים,

רשימת מקורות

An, S. A., & Tillman, D. A. (2015). Music activities as a meaningful context for teaching elementary students mathematics: A quasi-experiment time series design with random assigned control group. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(1), 45-60. https://doi.org/10.30935/scimath/9420

Bamberger, J. (1999). Learning from the children we teach. *Bulletin of the Council for Research in Music Education, 142*, 48-74.

Bamberger, J., & Disessa, A. (2003). Music as embodied mathematics: A study of a mutually informing affinity. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *8*(2), 123-160. https://doi.org/10.1023/B:IJCO.0000003872.84260.96

Barrett, M. S. (2005). Representation, cognition, and communication: Invented notation in children's musical communication. In D. Miell, R. MacDonald, & D. J. Hargreaves (Eds.), *Neurosciences*, *24*(6), 665-675. https://doi.org/10.1515/revneuro-2013-0023

Julius, M. S., & Adi-Japha, E. (2016). A developmental perspective in learning the mirror-drawing task. *Frontiers in Human Neuroscience*, *10*, Article 83. https://doi.org/10.3389/fnhum.2016.00083

Kaschub, M., & Smith, J. P. (2009). A principled approach to teaching music composition to children. *Research & Issues in Music Education, 7*(1), Article 5. https://commons.lib.jmu.edu/rime/vol7/iss1/5

Keppel, G. (1991). *Design and analysis: A researcher's handbook* (3rd ed.). Prentice-Hall.

Nemeth, D., Janacsek, K., & Fiser, J. (2013). Age-dependent and coordinated shift in performance between implicit and explicit skill learning. *Frontiers in computational neuroscience, 7*, Article 147. https://doi.org/10.3389/fncom.2013.00147

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (1997). Improve: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal, 34*(2), 365-394. https://doi.org/10.3102/00028312034002365

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2016). *OECD, PISA 2015 Results: What students know and can do-student performance in Mathematics, reading, and science*. OECD Publishing.

Papadopoulos, A. (2002). Mathematics and music theory: From Pythagoras to Rameau. *The Mathematical Intelligencer, 24*(1), 65-73. https://doi.org/10.1007/BF03025314

Patscheke, H., Degé, F., & Schwarzer, G. (2018). The effects of training in rhythm and pitch on phonological awareness in four- to six-year-old children. *Psychology of Music*, 47(3), 376-391. https://doi.org/10.1177/0305735618756763

Perry, L. K., Samuelson, L. K., Malloy, L. M., & Schiffer, R. N. (2010). Learn locally, think globally: Exemplar variability supports higher-order generalization and word learning. *Psychological science, 21*(12), 1894-1902. https://doi.org/10.1177/0956797610389189

Ribeiro, F. S., & Santos, F. H. (2017). Enhancement *Musical communication* (pp. 117-142). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198529361.003.0006

Carroll-Phelan, B., & Hampson, P. J. (1996). Multiple components of the perception of musical sequences: A cognitive neuroscience analysis and some implications for auditory imagery. *Music Perception: An Interdisciplinary Journal*, *13*(4), 517-561. https://doi.org/10.2307/40285701

Costa-Giomi, E. (2004). Effects of three years of piano instruction on children's academic achievement, school performance and self-esteem. *Psychology of music*, *32*(2), 139-152. https://doi.org/10.1177/0305735604041491

Courey, S. J., Balogh, E., Siker, J. R., & Paik, J. (2012). Academic music: Music instruction to engage third-grade students in learning basic fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(2), 251-278. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9395-9

Dyer, J. F., Stapleton, P., & Rodger, M. (2017). Transposing musical skill: Sonification of movement as concurrent augmented feedback enhances learning in a bimanual task. *Psychological Research, 81*(4), 850-862. http://doi.org/10.1007/s00426-016-0775-0

Elkoshi, R. (2002). An investigation into children's responses through drawing, to short musical fragments and complete compositions. *Music Education Research, 4*(2), 199-211. https://doi.org/10.1080/1461380022000011911

Elkoshi, R. (2017). What are the most colorful sounds you ever saw? Exploring children's and adults' chromasthetic responses to classical music. In R. Elkoshi, G. Russo-Zimet, D. Cohen, & Y. Shohat (Eds.), *Rainbow inspirations in art: Exploring color as metaphor in poetry, visual art and music* (pp. 183-222). Nova.

Hallam, S. (2015). *The power of music: A research synthesis of the impact of actively making music on the intellectual, social and personal development of children and young people.* Institute of Education University College.

Jaschke, A. C., Eggermont, L. H. P., Honing, H., & Scherder, E. J. A. (2013). Music education and its effect on intellectual abilities in children: A systematic review. *Reviews in the*

Upitis, R. (1987). Children's understanding of rhythm: The relationship between development and music training. *Psychomusicology: A Journal of Research in Music Cognition*, *7*(1), 41-60. http://dx.doi.org/10.1037/h0094187

Wechsler, D. (1998). *Wisc-R95//Wechsler intelligence scale for Children-Revised-Manual* [Psychological tests kit]. Ministry of Education. (Hebrew version).

Wheeler, L., & Raebeck, L. (1985). *Orff and Kodaly adapted for the elementary school* (3rd ed.). W. C. Brown.

Wiggins, J., & Espeland, M. I. (2012). Creating in music learning contexts. In G. E. McPherson & G. F. Welch (Eds.), *The Oxford handbook of music education* (Vol. 1, pp. 341-360). Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199730810.013.0021

of numeric cognition in children with low achievement in mathematic after a non-instrumental musical training. *Research in Developmental Disabilities*, *62*, 26-39. https://doi.org/10.1016/j.ridd.2016.11.008

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 346-362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Ryan, J. J., Utley, A. P., & Worthen, V. E. (1988). Comparison of two IQ conversion tables for the Vocabulary-Block Design short form. *Journal of Clinical Psychology, 44*(6), 950-952. https://doi.org/10.1002/1097-4679(198811)44:6<950::AID-JCLP2270440616>3.0.CO;2-6

Sala, G., & Gobet, F. (2017). When the music’s over. Does music skill transfer to children’s and young adolescents’ cognitive and academic skills? A meta-analysis. *Educational Research Review*, *20*, 55-67. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2016.11.005

Serafine, M. L. (1988). *Music as cognition: The development of thought in sound.* Columbia University Press.

Steinbeis, N., & Koelsch, S. (2008). Comparing the processing of music and language meaning using EEG and fMRI provides evidence for similar and distinct neural representations. *PloS one*, *3*(5), e2226. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0002226

רוטינות מורה כאבני בניין של תהליכי הוראה

אביטל אלבום-כהן

טלי נחליאלי

אנה ספרד

ד"ר אביטל אלבום-כהן

מורה למתמטיקה בתיכון על שם אהרון קציר ברחובות. שותפה בפרויקטים מחקריים בחינוך מתמטי.

פרופ׳ טלי נחליאלי

מכשירת מורים למתמטיקה במכללת לוינסקי לחינוך. מחקריה מתמקדים בהוראה ובביצוע של פרקטיקות להוראת מתמטיקה, בהכשרת מורים ובהתפתחות מקצועית של מורים.

פרופ׳ אנה ספרד

פרופסור אמריטה לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה. היא חוקרת התפתחות של שיח מתמטי בחיי פרט ולאורך היסטוריה.

תקציר

מאמר זה מתבונן במלאכת ההוראה מנקודת מבט קומוגניטיבית. הוא ממשיג את מה שמורים ומורות עושים כרוטינות ודן בתובנות שמשתמעות מכך.

מילות מפתח: קומוגניציה; רוטינות; פרקטיקות הוראה; ממוצבות.

מבוא

בשנה האחרונה (2020–2021) ניצבנו כולנו לפני מציאות של הוראה מרחוק שלא אפשרה לנו לממש את הפרקטיקה שלנו בדרכים המוכרות. למשל, במצב החדש לא יכולנו לנטר את פני התלמידים כדי לקבל משוב מיידי לדברינו ולא תמיד יכולנו לבקש מהתלמידים תגובה מהירה על שאלה ששאלנו. רוטינות קטנות של הוראה שהפעלנו עד כה בלי לחשוב פעמיים סירבו לעשות את מלאכתן. לפיכך נאלצנו למצוא דרכים אחרות כדי לעמוד באתגרי ההוראה. הכורח הזה האיר את האוטומטיות בהתנהלות שלנו לפני המשבר ואת הקושי במציאת דרכי הוראה חלופיות.

אם כך, קשיים רבים הגיעו עם המגפה. אולם צרה זאת, כמו כל אחת אחרת, היא גם הזדמנות ללמידה. עם ההתנסות החדשה התקבל גם אישור לאמירתו המפורסמת של היידגר, הפילוסוף הגרמני, על הפטיש: שבירתו של כלי הופכת אותו מבלתי נראה לגלוי לעין (Heidegger, 1980). אכן, כל עוד פעולות ההוראה התנהלו כסדרן, הן נעשו בלי מחשבה מראש ולא התעמקנו בהן. ועכשיו, אחרי שהשינוי "שבר", ובכך גם חשף את פעולות ההוראה שחזרנו עליהן בעבר בלי משים, אנחנו יכולות לבחון את עשייתנו השגרתית – את הפרקטיקות שלנו – בחינה ביקורתית. פרקטיקות הוראה הן נושא המאמר שלהלן.

מדוע לדבר על הוראה במונחים של פרקטיקות (או רוטינות)?

המונח "פרקטיקה" הוא בבחינת מילת-באז (buzzword) בימים אלה, ועל אף שימושיו הנרחבים בשיח המקצועי, אין הסכמה באשר למשמעותו המדויקת. בחלק הזה נראה מדוע הפכה מילה זו למרכזית כל כך ונדון בדרכים מגוונות שבהן משתמשים בה.

לאחרונה הצטבר ידע מחקרי רב על האופן שהוראה מעצבת את הלמידה (Tabach et al., 2020; Desimone & Long, 2010). עם זאת, עדיין לא ברור כיצד תוכניות להכשרת מורים יכולות להכין מורים לקראת הוראה שתקדם למידה בדרך בעלת משמעות (Grossman & McDonald, 2008). תוכניות הכשרה אוניברסיטאיות המוצגות בדוחות ובמסמכים למיניהם (למשל: דו"ח מקינזי (Barber & Mourshed, 2007)) מדגישות חשיבות ידע תאורטי, דיסציפלינרי ופדגוגי של מי שאמורים להיות מורים והן ממעיטות לעסוק בפרקטיקה – בהתנסות הכוללת שימוש בידע בסיטואציות אמיתיות. בדוחות אלה מועלית הטענה שבשל חסך זה מורים המסיימים תוכניות הכשרה אלה אינם מוכנים למציאות המורכבת בכיתות בבתי הספר. עם זאת, מתרבים סימנים שהחל שינוי: תוכניות רבות עוברות ממיקוד בידע הנדרש להוראה לעיסוק נרחב בשאלות של שימוש בידע זה בפועל – לשימוש בו ככלי להתמודדות עם מצבים כיתתיים אמיתיים. זאת כדי לעזור לאלה העתידים להיות מורים לפתח פרקטיקות הוראה שתתמוכנה בלמידת התלמידים בדרך הטובה ביותר (Ball & Forzani, 2009).

שינוי כזה כבר הוצע בעבר. בשנות השישים והשבעים בארה"ב נעשה ניסיון להתמקד בהכשרה מבוססת מיומנויות (competency-based). מיקוד זה הביא לידי יצירת מעין "רשימת מיומנויות" שסטודנטים להוראה היו אמורים להתנסות בהן, אך ההתנסות במיומנויות אלה הייתה טכנית בעיקרה ולעיתים רבות – שטחית. בשנות השמונים התהפכה התמונה. רפורמות בתוכניות להכשרת מורים הציעו להתמקד בחשיבה של מורים, בידע פדגוגי ובידע דיסציפלינרי (Shavelson & Stern, 1981). בשל שינוי דגשים זה הדגישו תוכניות הכשרה חדשות סוגיות פדגוגיות למיניהן אבל לא זימנו התנסויות ביישומן בפועל. לסטודנטים להוראה היו הזדמנויות רבות לפתח חשיבה פדגוגית ויכולת לעשות רפלקציה על ההוראה, אבל בקושי היו להם הזדמנויות ליישם ידע זה בכיתה, כשהם נדרשים להתאימו להקשר לימודי-הוראתי אמיתי.

כדי לשלב בין למידה תאורטית ובין ההוראה בפועל, הציעו חוקרים ואנשי חינוך להתמקד ברעיון של פרקטיקות הוראה (Ball & Forzani, 2010; Grossman, 2018; Matsumoto-Royo & Ramírez-Montoya, 2021; TeachingWorks, 2020). כאמור לעיל, למרות היותה של המילה "פרקטיקה" מילת מפתח ועל אף השימוש הרחב בה בשיח המקצועי, אין הסכמה באשר למשמעותה המדויקת. בספרות המקצועית והמחקרית אפשר אומנם למצוא הגדרות רבות, אך לרוב הן אינן ברורות דיין. למשל, באתר (Core Practices Consortium 2020), פרקטיקות ליבה בהוראה מוגדרות "רכיבים הניתנים לזיהוי (שהם מרכזיים להוראה ומעוגנים במטרות דיסציפלינריות) שמורים יכולים להפעיל כדי לתמוך בלמידה. פרקטיקות ליבה כוללות אוסף של אסטרטגיות, רוטינות ופעילויות הניתנות לפירוק לחלקים קטנים באופן שיאפשר למורים ללמוד אותן" (עמ' 4). הגדרה זאת מאפשרת לדון בכלליות בפרקטיקות הוראה. עם זאת, לא הוסבר בה מה הן אסטרטגיות, מה הן רוטינות ובאילו פעילויות מדובר. בשל חסכים אלה, הגדרה זאת אינה מאפשרת הכרעה ברורה בשאלה מה נחשב לפרקטיקת ליבה ומה לא, ובעיקר אין לדעת ממנה מה היא הישות הנקראת "פרקטיקת הוראה" ומה הם הרכיבים שלה.

חוסר הבהירות של המושג פרקטיקות מתבטא גם בריבוי השימושים שנעשים בו בקהילה המקצועית. למשל, באוניברסיטת מישיגן הפרקטיקות מתפרשות על מגוון רחב של פעולות הוראה (תכנון, הוראה, זמן לא פורמלי עם תלמידים, תקשורת עם עמיתים, משפחות וחברי קהילה אחרים), ואילו בתוכנית U-ACT באוניברסיטת וושינגטון המונח פרקטיקה נוגע רק למה שהמורים עושים במהלך ההוראה בכיתה (Grossman, 2018).

גישות שונות לפרקטיקות נבדלות גם מבחינת התכנים. הן במישיגן והן בוושינגטון מדובר בפרקטיקות חוצות תחומי דעת. יש גם אוספים ספציפיים לתחום תוכן מסוים. למשל, בסטנפורד, עסקו בנפרד בלימודי האנגלית, המדעים וההיסטוריה.

במאמר זה אנחנו מציעות הסתכלות אחרת בפרקטיקות הוראה שקושרת בין המושגים "פרקטיקה" ל"רוטינה". לכן כדי להסביר לְמה אנחנו קוראות פרקטיקה עלינו לומר קודם מהי רוטינה. נעסוק בכך בפרק הבא.

רוטינה מהי?

מורה בכיתה צריכה לפעול מייד. מכאן עולה השאלה: מה מאפשר פעולה מיידית כזאת? התשובה המתבקשת היא ניסיון. כלומר כאשר מורה מרגישה צורך לפעול, היא פונה אל הניסיון שלה בחיפוש אחר רוטינה מתאימה. החיפוש שנעשה בלי מחשבה כולל פנייה של המורה אל מצבי עבר שנראים לה כדומים דיים למצב הנוכחי כדי שתחזור כעת על מה שנעשה אז.

כדי להגדיר את המושג רוטינה, נתבונן בשיחה שלהלן, הלקוחה מתוך שיעור מבוא למספרים מרוכבים בכיתה י"ב. השיחה התקיימה בשלב התחלתי בשיעור שבו המורה הכינה את התשתית הרעיונית להצגת המספרים המרוכבים.

1.	מורה	עכשיו אמרנו שאין פתרון [למשוואה ריבועית] אם יש לי מספר שלילי מתחת לשורש,
2.	מורה	תגידו לי בבקשה למה? למה אין לי?
3.	תלמידים	[דיבור בעת ובעונה אחת]
4.	מורה	רגע, דברו אחד אחד.
5.	מורה	כן, [פונה אל תלמידה 1].
6.	נעמה	בגלל ששורש זה בעצם נותן מספר שהמכפלה שלו בעצמו זה מספר אחר.

7.	מורה	בואי תנסי לנסח את זה ככה שאני אבין...
8.	מורה	רגע [לתלמיד אחר שרוצה לדבר]
9.	נעמה	בגלל שאם משהו שלילי, כדי שיצא שלילי, זה מספר חיובי ומספר שלילי צריך לכפול אותם.
10.	מורה	אוקיי? כדי שמספר שלילי יהיה מכפלה של שני גורמים,
11.	נעמה	הוא צריך להיות אחד שלילי ואחד חיובי
12.	מורה	אחד חייב להיות שלילי ואחד חיובי
13.	רחל	הסימנים שלהם צריכים להיות שונים
14.	מורה	ולכן, אם אני לוקחת מספר ואני מכפילה אותו בעצמו
15.	נעמה ורחל יחד	זה אף פעם לא יהיה שלילי
16.	מורה	זה בחיים לא יהיה שלילי
17.	מורה	זאת אומרת שאנחנו יודעים שאין מספר, אני אגיד, [כותבת בו-זמנית על הלוח] אין מספר ממשי, מהמספרים שאנחנו מכירים עד עכשיו, שאם נעלה אותו בריבוע, נקבל מספר שלילי.

מתוך השיחה ומתוך הידיעה שפעולות המורה מוכרות לנו, שכן ראינו פעולות דומות אצל מורים אחרים, אנחנו למדות שהתקשורת הזו בין המורה לתלמידים כוללת דפוסים של פעולות הוראה. משמעות הדבר היא שהמורה ביצעה פעולות כאלה במצבים דומים בעבר או שהיא צפתה במורים שביצעו פעולות דומות במצבים דומים.

על פי הגישה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008), פעולות שחוזרות על עצמן שוב ושוב, כלומר דפוסי עשייה, נקראות **רוטינות.** רוטינות באות לידי ביטוי כאשר אדם מוצא את עצמו בעת צורך לפעול בסיטואציה מוכרת. לכן בעניין הנוכחי של מקצוע ההוראה, אנחנו מזהות את פעולות המורה כרוטינות. לדוגמה בתכתוב שלעיל המורה שואלת שאלה וּמְמַנָּה תלמידה שתענה. אלה פעולות הוראה שגרתיות שהן לחם חוקם של מורים רבים. אלה פעולות שחוזרות על עצמן ולכן נראה בהן רוטינות.

על כן וכפי שכבר נאמר כשאנו נמצאים במצב שאנו חשים בו מחויבים לפעול, אנו נוטים להיזכר במצב קודם שהוא דומה דיו למצב הנוכחי כדי לחזור על פעולות שנעשו אז. ההיזכרות לא צריכה להיות מודעת – הזיכרון רשום בגופנו ואנו נוטים לפעול מבלי להזדקק לתיווכה של חשיבה מפורשת. כדי לקצר את האופן שאנחנו מדברים על פרקטיקות, נקרא ל"מצב שאנו חשים בו צורך לפעול" – **מצב מטלה,** ול"אוסף הרוטינות שהופעלו במצבים קודמים שדומים דיים למצב הנוכחי", נקרא **מרחב תקדימים.** הדבר שהרוטינה מבקשת להשיג אותו ייקרא **מטלה** והפעולות שייעשו כדי להשיג מטלה זו ייקראו **הליך** (Lavie et al., 2019).

נחזור להתבונן בדוגמה לעיל.

האפיזודה שבתכתוב גורמת לנו להיזכר בתקדימים מהכיתה של עצמנו. למשל אנו יודעים שמילים דומות נאמרו שם כשרצינו לוודא כי תלמידינו מודעים לכך שכאשר הדיסקרימיננטה שלילית אין למשוואה ריבועית פתרונות, ושהם אף יכולים להצדיק טענה זו. כפי שאפשר לזהות בתכתוב, כדי לממש את המטלה הזאת, המורה מבצעת סדרה של פעולות שמהוות את ההליך של הרוטינה: היא מציגה שאלה לתלמידים (1, 2), מְמַנָּה משיבה (5), מפקחת על מתן תשובה (7) ומסכמת את התשובה (17). המטלה וההליך מפורטים בטבלה 1.

טבלה 1: הדגמה של רוטינה כצמד של מטלה והליך

מטלה	הליך	ציטוט (+תורות לדוגמה
לוודא שתלמידים מודעים לכך שלמשוואה ריבועית שבה הדיסקרימיננטה שלילית אין פתרונות ממשים ושהם יכולים לנמק מידע	תציגי שאלה לתלמידים	עכשיו אמרנו שאין פתרון אם יש לי מספר שלילי מתחת לשורש [...] אז תגידו לי בבקשה, למה? למה אין לי? (1, 2)
	תמני משיבה	כן, [פונה אל תלמידה 1]. (5)
	תפקחי על מתן תשובה	בואי תנסי לנסח את זה ככה שאני אבין... (7)
	תסכמי את התשובה	זאת אומרת שאנחנו יודעים שאין מספר, אני אגיד, [כותבת בו זמנית על הלוח] אין מספר ממשי, מהמספרים שאנחנו מכירים עד עכשיו, שאם נעלה אותו בריבוע, נקבל מספר שלילי. (17)

כלומר אנחנו קובעות שפעולות הוראה הן רוטינות בשל העובדה שהן נעשות שוב ושוב בידי אותה המורה, או משום שהן נפוצות בקהילה, או בגלל שתי העובדות האלה גם יחד. לפיכך הקביעה כי אוסף של פעולות מסוימות שהן רוטינה היא פרשנית ונעשית בידי החוקרים. המורה עצמה לא בהכרח מודעת לעובדה שהיא מפעילה רוטינה. כמו הפטיש של היידגר, היא עשויה לשים לב כאשר מסיבות כלשהן הרוטינה תפסיק לעבוד. למשל, בעת שנאלצנו ללמד מרחוק, רוטינת הוראה שנשברה במידה בולטת בהרבה כיתות הייתה זו שהפעילה המורה כדי לגרום לתלמידים להתבטא בספונטניות, וכן רוטינות הקשורות לכתיבה על הלוח. הפרשנות שמולידה רוטינה כוללת שלבים מספר: ראשית, בחינה של פעולות ספציפיות שהמורה עושה כדי לזהות הליכים. שנית, ניסוח ההליך, כלומר ניסוח מרשם כללי שמתאר את הפעולות שהמורה עושה. לאחר מכן על פי ההליך ועל פי הנסיבות (כגון דברי המבצע עצמו בשעת הפעולה, מרכיבים של מצב המטלה, ההיסטוריה של ביצועי אותו אדם במצבים אחרים וכו'), ניסוח המטלה של המורה בעיני עצמה, כלומר מה שהמורה ניסתה להשיג. הן ניסוח ההליך והן ניסוח המטלה הם תוצאה של פרשנות.

רוטינות כמבנים פרקטליים

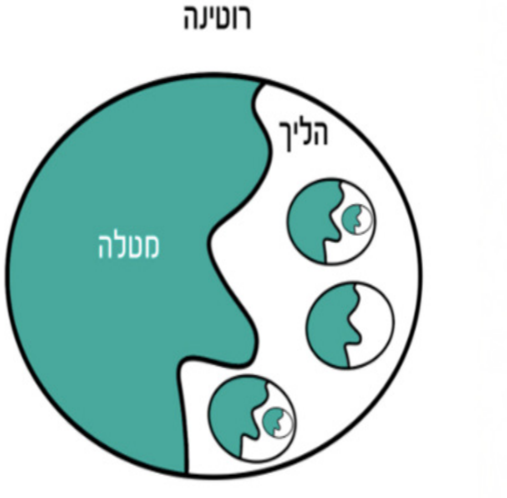
ניתוח מעמיק של תכונות של רוטינות מלמד כי לרוטינה יש מבנה פרקטלי, שכן כל שלב בהליך הוא מטלה שדורשת עשייה של הליך נוסף. כלומר כל שלב בהליך הוא רוטינה בפני עצמה. כדי להדגים את הטענה נחזור לדוגמה שפתחנו בה. נשים לב שכל אחד מארבעת השלבים של ההליך שצוינו קודם (הציגי שאלה לתלמידים, תמני משיבה, תפקחי על מתן תשובה ותסכמי את התשובה) הוא מטלה שדורשת ביצוע של הליך. כך, למשל, אפשר לראות בשלב של "הציגי שאלה לתלמידים" מטלה שכדי לממש אותה יש לבצע הליך שבמקרה זה מורכב משני תת-הליכים: "הציגי את הטענה" ו"שאלי – למה זה כך?". לסיכום, אנחנו מציגות רוטינה כצמד של מטלה והליך, כאשר אפשר לפרק שוב שלבים מסוימים של ההליך לצמד של <מטלה , הליך>, כלומר לרוטינות קטנות יותר. במקרה של האפיזודה שלעיל, המטלה היא לוודא כי תלמידים מודעים לכך שלמשוואה ריבועית שבה הדיסקרימיננטה שלילית אין פתרונות ממשיים ושהם יכולים לנמק טענה זו. בטבלה 2 שלהלן, כל אחד משלבי ההליך שהוצג בטבלה 1 הוא מטלה שההליך שלה מתואר בעמודה השמאלית בטבלה 2.

טבלה 2: הדגמה של פרישת תת-הליכים של הליך נתון

	הליך		תת תהליכים
1	הציגי שאלה לתלמידים	א	הציגי את הטענה
		ב	שאלי למה זה כך
2	תמני תמונה	א	תני לתלמידים להציע תשובות
		ב	מנעי דיבור בו-זמנית
		ג	תני זכות דיבור
3	תפקחי על מתן תשובה	א	הקשיבי והעריכי שלא בקול רם
		ב	אם יש צורך דרשי שיפור
		ג	מנעי דיבור בו-זמני
		ד	אם יש צורך חיזרי על א-ג (בסעיף 3)
4	תסכמי את התשובה	א	נסחי תחילת משפט ועצרי
		ב	הקשיבי להמשכי התלמידים
		ג	עשי revoicing
		ד	אם יש צורך חזרי על א-ג (בסעיף 4)
		ה	תאמרי מילה שמציינת את השלמת השלב

באותו אופן אפשר לראות את המטלה המתוארת לעיל כמייצגת חלק מהליך שמממש מטלה גדולה ממנה, כגון ההליך של הצגת עצם מתמטי חדש שלא היה מוכר עד כה לתלמידים (המספרים המרוכבים, במקרה הנוכחי). לפיכך נציין שרוטינות יכולות להופיע במידות שונות זו מזו, החל מרוטינות אטומיות שאי אפשר לפרקן לרוטינות קטנות יותר, וכלה ברוטינות גדולות יותר, שעשייתן עשויה לארוך ימים ואף שבועות. הרוטינות הגדולות הן אלה שנכנה כאן פרקטיקות הוראה. הווה אומר, לרוטינה של הצגת שאלה לתלמידים אנחנו לא נקרא פרקטיקת הוראה. את השם נשמור לפרקטיקה "גדולה", כגון הצגת עצם מתמטי חדש. שימו לב כי ממדי רוטינות לא נמצאים בהתאם לחשיבותן. רוטינות הוראה אטומיות משפיעות לעיתים על תוצאות ההוראה לא פחות, ולפעמים אף יותר, מרוטינות גדולות יותר. אנחנו נוטים לבצע רוטינות אטומיות בלי משים ולכן אנחנו לא בהכרח מודעים להשפעתן על תלמידינו.

איור 1[1] מדגים את המבנה הפרקטלי של רוטינה.



איור 1: מבנה פרקטלי של רוטינה

רוטינות כבסיס לפעולה יצירתית

לכאורה פעולה שחוזרת על עצמה מצמצמת את חופש הפעולה ואת היצירתיות של מורה. אנחנו סבורות כי ההפך הוא הנכון. בלי רוטינות אנחנו לא יכולות להיות יצירתיות. המיומנות של מורים להפעיל אוסף רחב של רוטינות היא שמאפשרת להם להשיג מגוון רחב של מטרות הוראה. היצירתיות יכולה לבוא לידי ביטוי בשתי דרכים: ראשית, כפי שכל אדריכל יוצר מלבנים הזמינות לכולם בניינים מיוחדים משלו, כך יכולה המורה להרכיב את הרוטינות שלה בדרכים אחרות. שנית, היא יכולה לעשות אותה מטלה פעם באמצעות הרכבה אחת של רוטינות-משנה, ופעם באמצעות הרכבה אחרת.

גיוס של רוטינה במצב מטלה והאתגר שבו

על פניו יש מחיר שצריך לשלם כדי שהשליפה של רוטינה מתאימה תהיה מהירה ויעילה. הוא מתבטא בצמצום מרחב החיפוש אחר תקדים ושאפשר לעשות אותו רק בין אותן התנסויות העבר שהתרחשו במצבי מטלה דומים **מאוד** לזה שאנו נמצאים בו בזמן הבחירה. לפיכך כשמורה מלמדת, צמצום מרחב התקדימים יבוא לידי ביטוי שבמהלך השיעור היא תחפש רוטינות לפעולה רק בין אירועים שהתרחשו בכיתה דומה עם משתתפים דומים ובאותו שלב של השיעור. כך המורה תאבד את היכולת לבחון את הרלוונטיות והיעילות של רוטינות אחרות שהיא הפעילה במצבים שאינם נראים לה דומים מספיק. כל זה משקף את התופעה הנקראת במחקר "ממוצבות של למידה" (situativity of learning) (Lave & Wenger, 1991). ממוצבות בהוראה היא התופעה שמורים בכיתה נוטים להיזכר ברוטינות רק במצבים דומים מאוד לאלה שבהם הרוטינות נלמדו או נעשו לראשונה. הממוצבות היא זאת שאחראית, למשל, על הנטייה הידועה של מורים חדשים להגביל את בחירת רוטינות ההוראה שלהם לשחזור של רוטינות הוראה של מורים שהיו להם בבית ספר או באוניברסיטה והם נחשפו אליהן כתלמידים. כמו כן היא זו שמעניקה לרוטינות שלנו עמידות בפני שינוי, שכן אנחנו נוטים לבחור ברוטינות שנחשפנו אליהן בעבר במצבים דומים לזה שבו אנחנו נדרשים לבחור. אחת הדרכים שהמורה יכולה להתמודד עם חוסר הגמישות בבחירת רוטינות שנובע מהממוצבות היא תכנון מוקפד של השיעור, והיחשפות

1. את האיור הכינה אורנה אלבוים.

יוזמה לרוטינות של מורים אחרים. כל אלה יעזרו למורה להימנע במהלך השיעור מבחירה אוטומטית ברוטינות. כעת בחירה כזאת תיעשה מתוך מחשבה ובתכנון מראש.

פיתוח רוטינות חדשות והאתגר שבו

פיתוח רוטינות חדשות, פירושו פיתוח של מאגר תקדימים עשיר שיימצא בו תקדים לכל מצב מטלה העשוי להיווצר בכיתה. סוד ההוראה האיכותית הוא בקיום אוספים כאלה. אבל כיצד מורה יוצרת את המאגר שלה? וכיצד, במקרה הצורך, המורה תחליף רוטינות ישנות בחדשות?

במשך שנים רבות מורים למדו את מלאכת ההוראה באוניברסיטאות ובמכללות למורים בעיקר מתוך הקשבה לתיאורים מילוליים של פרקטיקות הוראה. אבל בשל האתגר של ממוצבות הלמידה, היעילות של תיאורים מילוליים עלולה להיות מוגבלת. המצב שהוצג בו התיאור המילולי (למשל בכיתה האקדמית שבה הוכשרה המורה) שונה מאוד מהמצב בכיתה שבו המורה אמורה ליישם רוטינה זאת, ולכן יש סיכוי לא מבוטל שכשהיא תצטרך לקבל החלטה מיידית בכיתה, היא לא תפנה למאגר הרוטינות שנלמדו באוניברסיטה. גם אם היא תחפש בין הרוטינות האלה, היכולת שלה לזהות את זו המתאימה למצב המטלה הנוכחי דומה ליכולתה ללמוד לשחות מקריאת הוראות. לסיכום, רוטינות חדשות שנלמדות באמצעות תיאורים מילוליים עלולות לא להתממש בגלל ממוצבות של הוראה ולמידה.

אם כן, מאותם שיקולים שמהם למדנו כי יעילותה של למידת רוטינות רק מתיאורים מילוליים היא נמוכה, נוכל להסיק כעת כי למידה מתוך **עשייה** תהיה יעילה מאוד. עוצמתה של התנסות בהוראה בפועל נובעת מהיותה חוויה גופנית, רב-חושית, ואף רגשית, ובתור שכזו היא מציידת את המתנסה בסימני זיהוי רבים ומגוונים שיהיה אפשר להשתמש בהם בעתיד באיתור הרוטינה. נוסף על ההתנסות בפועל, אחת הדרכים המקובלות כיום בהכשרה ופיתוח מקצועי של מורים היא באמצעות צפייה בשיעורים מצולמים (Sherin, 2003). אפשר אפוא ללמוד לעיתים רוטינות הוראה חדשות לא רק מתוך התנסות ואימון בהוצאתן אל הפועל, אלא גם מתוך צפייה ברוטינות ההוראה של מורים אחרים. צפייה בשיעורים מצולמים (גם של המורה הלומד עצמו) מאפשרת לצופה לזהות מתוך כל מה שקורה בכיתה את מה שמניע את המורה המצולם להפעיל את הרוטינות הנצפות. מכאן שצפייה מושכלת יכולה לצייד מורים חדשים (וגם מורים מנוסים) במאגר תקדימים רחב ומגוון שמורה יחידה לא יכולה לבנות בכוחות עצמה.

עד כאן הראינו כי ללמידת רוטינות באמצעות עשייה או באמצעות צפייה בעשייה של מורים מנוסים יתרון חשוב על למידתן מתוך הקשבה לדיבור. עם זאת, גם ללמידה מתוך תיאורים מילוליים יתרון משלה: היא מציידת אותנו במרשם כללי שאפשר ליישמו במגוון רחב של מצבי מטלה. במילים אחרות, לרוטינה שנלמדה בדרך מילולית יש פוטנציאל רב שיתממש אם רק נתגבר על הממוצבות. אם כך, הדרך היעילה ביותר ללמוד רוטינות חדשות היא השילוב בין השלוש: בין הלמידה מתוך הקשבה לדיבור ובין למידה מתוך צפייה בעשייה ובין למידה מתוך עשייה בפועל. זה מחזיר אותנו לתמורות שחלו בתוכניות להכשרת מורים שעסקנו בהן בראשית המאמר.

התאוריה שבבסיס ההמשגה הקומוגניטיבית של פרקטיקות הוראה מסבירה את הכשלון של הניסיונות האלה ואת הנחיצות בשילוב שלוש הדרכים ללמידת פרקטיקות הוראה חדשות.

מה היתרונות של המשגת ההוראה במונחים של רוטינות?

במאמר זה הצגנו תאוריה שרואה במלאכת ההוראה מלאכה המעוגנת במאגרים של רוטינות. לפיה, רוטינה היא הצמד מטלה–הליך. על כן ההליכים או דפוסים של פעולות ההוראה והמטלות שהם באים לממש עומדים במרכז ההוראה. המשגה בהירה של רוטינות הוראה מאפשרת תקשורת יעילה יותר על הוראה. במילים "יעילה יותר" אנו מתכוונות כאן שההמשגה המוצעת מגבירה הבנה הדדית בין אלה העוסקים במלאכת ההוראה. בזכות התמקדות ברוטינות, כפי שהן מוגדרות כעת, גדל הסיכוי שכל המעורבים בתהליכי הוראה ידברו על "אותו דבר" ויתמקדו בשל כך באותם היבטים של התהליכים אלה. התאוריה מאירה באור חדש קשיים מוכרים של הוראה ושל התפתחות מקצועית של מורים. התאוריה מסבירה את הקשיים האלה בתיאור המנגנונים של שליפת רוטינה בזמן אמת בכיתה, של למידת רוטינות ושל פיתוח רוטינות חדשות. הכרת המנגנונים האלה חשובה ליצירת מערכים להתפתחות מקצועית יעילה הן של אלה שרק לומדים להיות מורים והן של מורים מנוסים.

נוסף על כך, המעבר לדיבור במונחים של רוטינות מרחיב את הטווח של דפוסי ההוראה שאפשר לדון בהם, והוא כולל כעת מגוון רחב של רוטינות, החל מהקטנות ביותר, ונקראות בספרות teaching moves (למשל: Resnick et al., 2010), וכלה ברוטינות גדולות, כמו ניהול דיונים, המכונות פרקטיקות (Grossman & McDonald, 2008).

נשים לב שבמאמר זה לא עסקנו בהיבטים נורמטיביים של פרקטיקות, כלומר לא עסקנו בשאלות של אילו פרקטיקות הוראה כדאי לאמץ ומה אפשר להרוויח מפרקטיקות הוראה למיניהן. הכלים שהצגנו מאפשרים לשוחח עם מורים גם על שאלות כמו "מה עשיתם בפועל (בשיעור או לפניו)?" וגם להציג לפניהם פרקטיקות נורמטיביות מוכנות לאימוץ. לסיכומו של דבר, התאוריה הקומוגניטיבית של רוטינות הוראה מאפשרת לקיים שיח רפלקטיבי פורה, העשוי להניב שיפור בהוראה, ובעקבותיו לגרום גם לקידום בלמידת מתמטיקה בבית הספר.

רשימת מקורות

Ball, D. L., & Forzani, F. M. (2009). The work of teaching and the challenge for teacher education. *Journal of Teacher Education*, *60*(5), 497-511.

Ball, D. L., & Forzani, F. M. (2010). What does it take to make a teacher? *Phi Delta Kappa, 92(*2), 8–12. https://doi.org/10.1177/003172171009200203

Barber, M., & Mourshed, M. (2007*). How the world's best-performing school systems come out on top*. McKinsey & Company. https://www.mckinsey.com/industries/education/our-insights/how-the-

learning, teaching, and human development (pp. 163-194). Springer.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge University Press.

Shavelson, R. J., & Stern, P. (1981). Research on teachers' pedagogical thoughts, judgments, decisions, and behavior. *Review of educational research*, *51*(4), 455-498. https://doi.org/10.2307/1170362

Tabach, M., Hershkowitz, R., Azmon, S., & Dreyfus, T. (2020). Following the traces of teachers' talk-moves in their students' verbal and written responses. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(3), 509-528. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09969-0

TeachingWorks. (2020). Hight-leverage practices. https://library.teachingworks.org/curriculum-resources/high-leverage-practices/

worlds-best-performing-school-systems-come-out-on-top

Core Practices Consortium. (2020). https://www.corepracticeconsortium.org/

Desimone, L., & Long, D. (2010). Teacher effects and the achievement gap: Do teacher and teaching quality influence the achievement gap between Black and White and high-and low-SES students in the early grades? *Teachers College Record*, *112*(12), 3024-3073.

Gamoran Sherin, M. (2003). New perspectives on the role of video in teacher education. In J. Brophy (Ed.), *Using video in teacher education* (pp. 1-27). Emerald Group Publishing Limited. https://doi.org/10.1016/S1479-3687(03)10001-6

Grossman, P. (Ed.). (2018). *Teaching core practices in teacher education.* Harvard Education Press.

Grossman, P., & McDonald, M. (2008). Back to the future: Directions for research in teaching and teacher education. American Educational Research Journal 45(1), 184-205. https://doi.org/10.3102/0002831207312906

Heidegger, M. (1980). *Being and time* (J. Macquarrie and E. R. Robinson, Trans.). Oxford. (Original work published 1927)

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153–176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Matsumoto-Royo, K., & Ramírez-Montoya, M. S. (2021). Core practices in practice-based teacher education: A systematic literature review of its teaching and assessment process. *Studies in Educational Evaluation*, *70*, Article 101047. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2021.101047

Resnick, L.B., Michaels, S., & O'Connor, C. (2010). How (well structured) talk builds the mind. In R. Sternberg & D. Preiss (Eds.), *Innovations in educational psychology: Perspectives on*

לזכרה של ד"ר ליאורה נוטוב

עטרה שריקי

פרופ׳ עטרה שריקי
מרצה במסגרת התואר הראשון והשני בפקולטה למדעים בסמינר הקיבוצים - המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאמנויות, ומנחה סטודנטים לתארים מתקדמים. תחומי המחקר שלה נוגעים להתפתחות המקצועית של מורים למתמטיקה, טיפוח היצירתיות המתמטית, חינוך בינתחומי ל - STEAM Science, Technology, Engineering,) Art and Mathematics), ההיסטוריה של המתמטיקה, והיבטים הקשורים להוראה ולמידה מקוונת של מתמטיקה.

ליאורה נוטוב (31 בדצמבר 1963– 28 באוגוסט 2022), הלכה לעולמה בגיל 59.

ליאורה יקרה,

נפגשנו לראשונה לפני למעלה מ-30 שנה, כאשר היית סטודנטית שלי בקורס דידקטיקה של הוראת המתמטיקה במחלקה להוראת המדעים בטכניון. כבר אז זיהיתי את הסקרנות הגדולה שלך, את החשיבה היצירתית, את החריצות הבלתי מתפשרת, ובעיקר – את התשוקה העצומה שלך להוראת המתמטיקה. לפני כעשר שנים דרכינו הצטלבו בשנית. הזמנת אותי לחדר שלך באותה המחלקה בטכניון, ומה שהתחיל כשיחה של "השלמת פערים" הפך עד מהרה לחברות אמיצה ולשיתופי פעולה מקצועיים מרתקים.

מעולם לא פחדת לחלום. אף פעם לא חששת להעז להגשים את החלומות שלך. לא היה משהו שאינו בר-הגשמה בעבורך. כך יצאנו שתינו להרפתקאות נפלאות של הגשמת חלומות על מתמטיקה ועל חינוך מתמטי. ביחד יצרנו קהיליות של מורים ותלמידים שבשיתוף פעולה חקרו נושאים מתמטיים שהיו חדשים להם; ביחד פיתחנו קורסים שנועדו לטפח את המיומנויות הרכות של סטודנטים בד בבד עם עבודה שיתופית על פתרון בעיות מתמטיות הנשענות על אתגרים מחיי היום-יום; ביחד חקרנו סוגיות שקשורות לתפיסות של מורים את מאזן הכוחות בכיתה והשפעתו על הוראת המתמטיקה ועוד ועוד.

אבל גולת הכותרת היא ללא ספק העשייה המשותפת רבת-השנים שלנו בנושא הפרקטלים, הנושא ששבה את ליבך עוד בהיותך סטודנטית. ואת, כדרכך, לא הסתפקת בחומרי הלמידה וההוראה שפיתחנו בנושא, וחלמת בגדול – "בואי נכתוב ספר על פרקטלים", אמרת לי יום אחד. ואני, שלמדתי לבטוח ביכולת שלך לראות קדימה, נסחפתי אחר ההתלהבות המדבקת שלך. במשך כשנתיים עמלנו על כתיבת הספר, ובימים אלה הוא בשלבי העריכה הסופית מטעם מכון מופ"ת. כמה חבל שלא הספקת לאחוז אותו בשתי ידייך ולומר לי: "את רואה, אמרתי לך שנכתוב ספר על פרקטלים!".

****

ב-2 באוגוסט קיבלתי ממך את הודעת הווטסאפ שבה כתבת שאת מעבירה את הימים בחלוקת מתנות אישיות לאנשים שיקרים לך, והזמנת אותי לבוא לקחת את המתנה שייעדת בעבורי. התחבקנו ארוכות והזלנו הרבה דמעות. לשתינו היה ברור שלא יהיו עוד הרבה הזדמנויות לחיבוקים.

ליאורה אהובה,

אני כל כך מתגעגעת לשיחות שלנו על החיים, לשיחות שלנו על חינוך, ליצירתיות שלך וליכולת שלך לראות את הדברים בדרך לא שגרתית. מתגעגעת לנסיעות המשותפות שלנו לכנסים, לרגעים האלה שבהם התבוננתי מהצד בהתפעלות מהאופן שאת נכנסת ללב של אנשים שפגשת רק שתי דקות קודם לכן, וגם מתגעגעת... בטח לא תאמיני... למסעות המפרכים שהיית לוקחת אותי אליהם בנסיעות שלנו (מתנצלת שלא הפסקתי לקטר בעליות התלולות...). חבל שאת לא יכולה לקרוא את כל מה שכתבו עליך בפייסבוק. עד כמה חשובה היית בעבור רבים מהסטודנטים שלך, עד כמה הם ראו בך "אישיות מדהימה", אישה משכמה ומעלה", "מיוחדת במינה" ו"מורה לחיים".

אלברט איינשטיין אמר שאיננו יכולים להגיע למקום שבו אנו חולמים להיות מחר, אלא אם כן נשנה את החשיבה שלנו היום. ליאורה אהובה, בדיוק ככה אזכור אותך תמיד!

שאנן
ע״ש דר׳ יבנין
האקדמית הדתית לחינוך