Střední škola průmyslová a umělecká, Opava, příspěvková organizace

Praskova 399/8, 746 01 Opava

Mechanika I

VÝUKOVÝ MANUÁL

Mechanika

I

VÝUKOVÝ MANUÁL

Ing. Vítězslav Doleží

Opava 2019

Střední škola průmyslová a umělecká, Opava, příspěvková organizace

Mechanika

I

VÝUKOVÝ MANUÁL

Ing. Vítězslav Doleží

Tato práce slouží pro výuku předmětu Mechanika I na Střední škole průmyslové a umělecké v Opavě, příspěvkové organizaci.

Opava 2019

Obsah

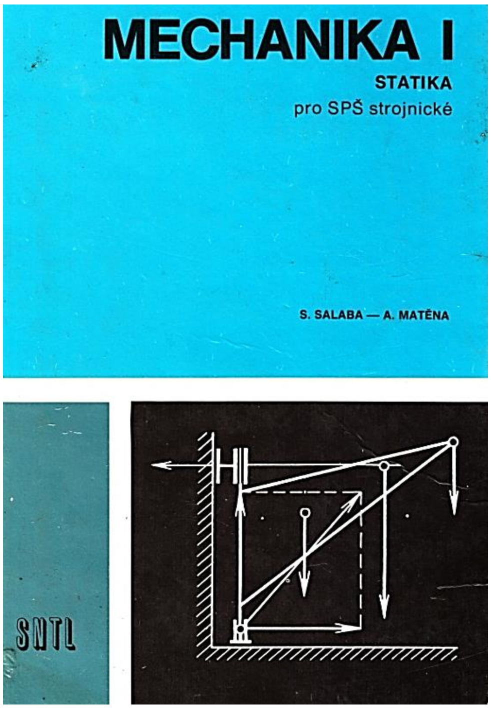
1 Úvod

1.1 Plán učiva

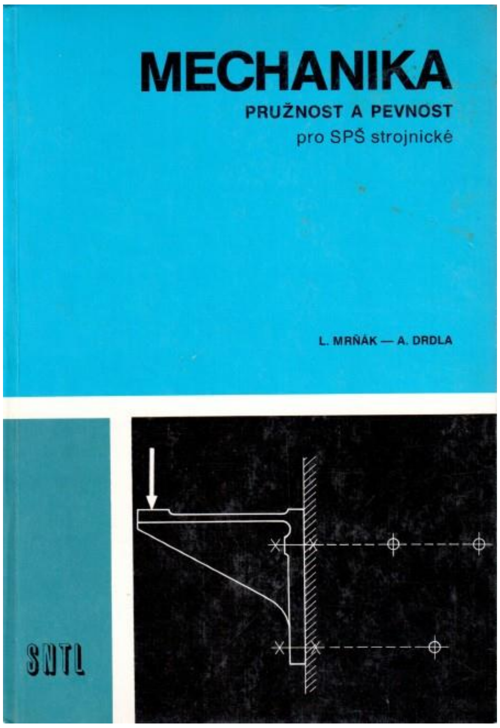
- Úvod, základní pojmy.
- Soustava sil na jedné nositelce.
- Obecná rovinná soustava sil.
- Rovinná soustava sil působících v jednom bodě.
- Prostorová soustava sil.
- Těžiště.
- Prutové soustavy.
- Statika jednoduchých mechanismů s pasivními odpory.
- Pružnost – pevnost (tah, tlak).
- Opakování učiva.
- Na konci roku před uzavřením známek kontrola všech sešitů, sešity musí být v absolutním pořádku, se všemi nakreslenými obrázky, se vším dopsaným učivem, s okraji tuší.

1.2 Pomůcky

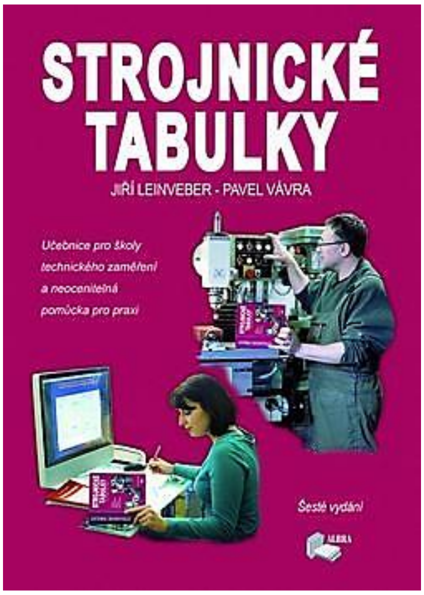
- Kniha MECHANIKA I – STATIKA pro SPŠ strojnické, S. Salaba, A. Matěna, SNTL, Praha 1977.

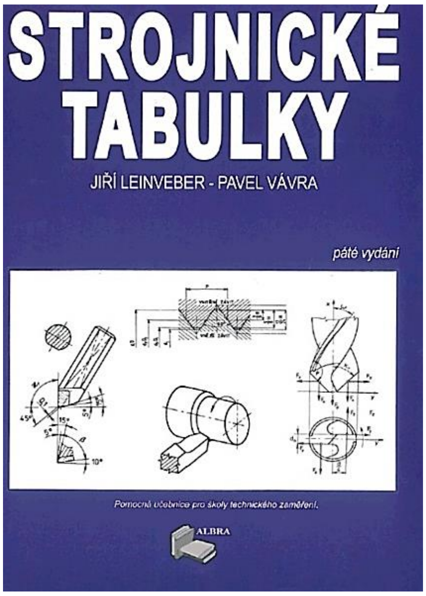


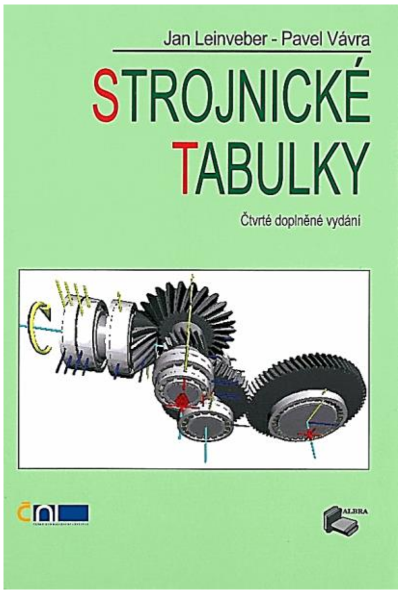
- Kniha MECHANIKA PRUŽNOST A PEVNOST pro SPŠ strojnické, L. Mrňák, A. Drdla, SNTL, Praha 1977.



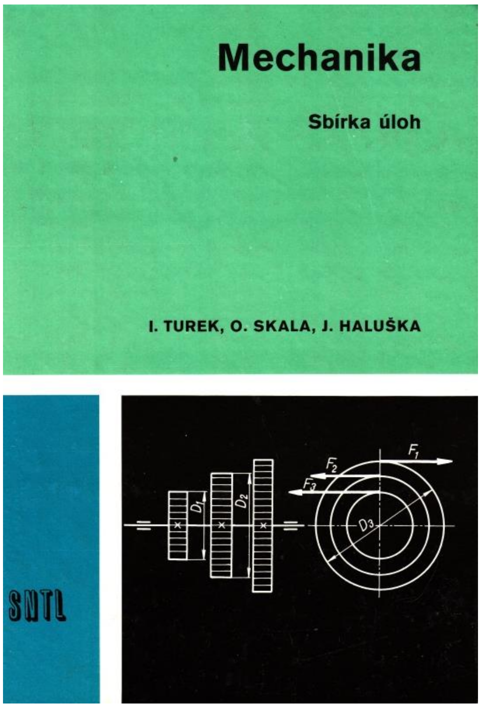
- Kniha Strojnické tabulky, Jan Lienveber a Pavel Vávra, ALBRA, Praha 2011.







- Kniha MECHANIKA – Sbírka úloh, TUREK, I., SKALA, O., HALUŠKA J., SNTL, Praha 1982.



- Nelinkovaný sešit A4 tlustý, okraje tuší 30 mm od vnější strany.
- Kalkulačka s goniometrickými funkcemi.
- Pero a pentelka 0,5 mm.
- Guma na gumování.
- Trojúhelníkové pravítko s ryskou.
- Jeden libovolný úhloměr.

1.3 Rozdělení mechaniky

Mechanika se zabývá hmotou a jejími neoddělitelnými projevy – silami a pohybem.

Podle skupenství vyšetřovaných objektů mechaniku dělíme na:

- Mechanika tuhých těles (statika, kinematika, dynamika).
- Mechanika kapalin (hydromechanika).
- Mechanika plynů a par (termomechanika, nauka o proudění).

Každá z těchto oblastí se dá rozdělit na tyto části:

- **Statika** – pojednává o rovnováze, tj. působení sil za klidu nebo přímočarém rovnoměrném pohybu.
- **Kinematika** – zkoumá pohyb v prostoru a čase bez příčin, které jej vyvolaly.

- **Dynamika** – zkoumá závislost mezi hmotou, pohybem a silami, tedy příčiny pohybu.
- **Pružnost a pevnost** – zkoumá namáhaní a deformaci těles, tedy účinky sil na těleso samé.

1.4 Zakladatelé mechaniky

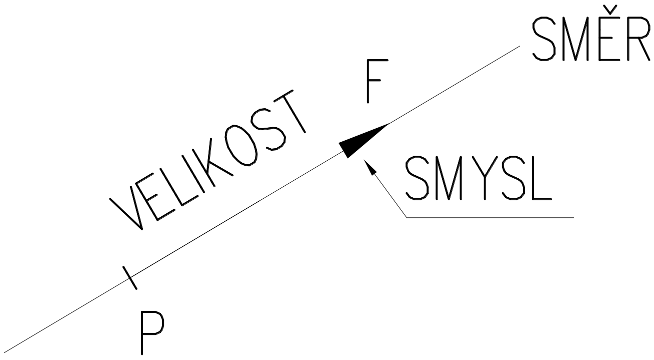
- Galileo Galilei – zkoumal pohyb, např. volný pád.
- Kepler – zkoumal kinematické zákony pohybu planet.
- Newton (1643 ÷ 1727) – zakladatel teoretické fyziky – zákony o pohybu, zákony gravitační, založil diferenciální počet, matematicky definoval zákony a jednotlivé svázal dohromady. Vše dostalo řád a matematickou zákonitost. Newtonovská mechanika nefunguje v mikrosvětě (atomy) a makrosvětě (astronomie – planety), v termodynamice a elektrodynamice. To vedlo postupně k teorii relativity.
- Euler – rozvinul Newtonovou fyziku.
- Bernoulli – rozvinul Newtonovou fyziku.
- d'Alambert – rozvinul Newtonovou fyziku.
- Lagrange – rozvinul Newtonovou fyziku.
- Laplace – rozvinul Newtonovou fyziku.
- Maxwell – termodynamika, elektrodynamika, světlo je vlnění (před Einsteinem).
- Einstein – teorie relativity – čas je relativní (hmota z energie) $E = m \cdot c^2$.
- Dirac a jiní – kvantová teorie světla (vlnová teorie byla dřív).

2 Síla

- Síla je fyzikální veličina, která udává vzájemné působení mezi tělesy.
- Jednotka síly: 1 N (Newton) – $[kg \cdot m/s^2] = [kg \cdot m \cdot s^{-2}] = [\frac{kg \cdot m}{s^2}]$.
- Definice N: Síla 1 N vyvolá u tělesa o hmotnosti 1 kg zrychlení $1\,\frac{m}{s^2}$.
- Síla je určena: působištěm, směrem, smyslem a velikostí.
- Takovéto veličiny se nazývají vektory.
- Veličiny určené pouze velikostí (práce, výkon…) se nazývají skaláry.

2.1 Grafické znázornění síly

Působiště je bod, kde síla působí na těleso.



Sílu značíme obvykle F, tíhovou sílu písmenem G.

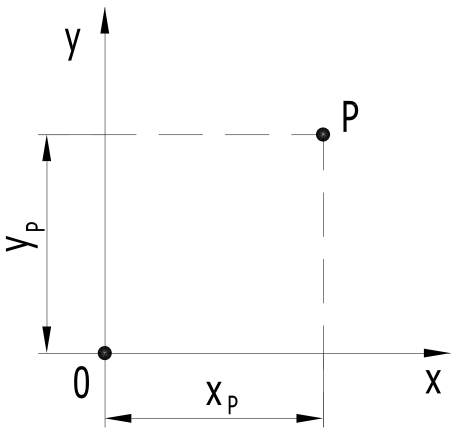
$G = m \cdot g$

m – hmotnost

g – tíhové zrychlení, g = 9,81 m · s^{-2}

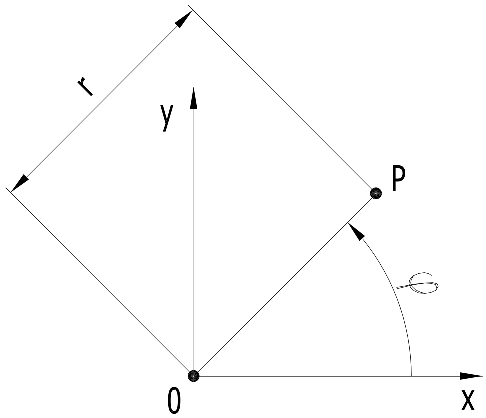
2.2 Určení bodu v rovině

a) kartézský souřadný systém



P [x_p, y_p]

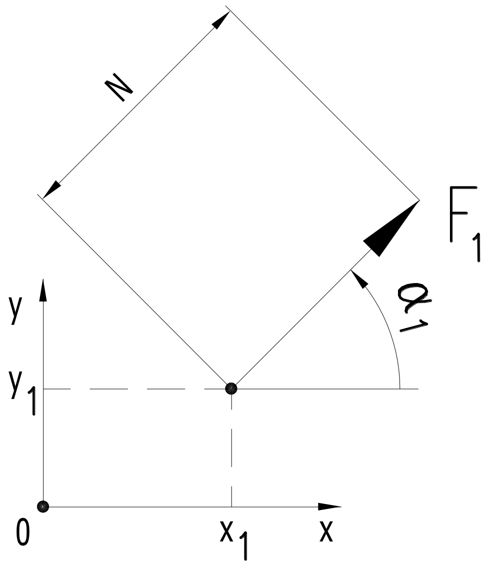
b) polární souřadný systém



P [r,φ]; r – délka průvodiče.

2.3 Určení síly v rovině

Potřebujeme znát působiště, směr, velikost a smysl.



Zápis: F [x_1, y_1, α_1, N]

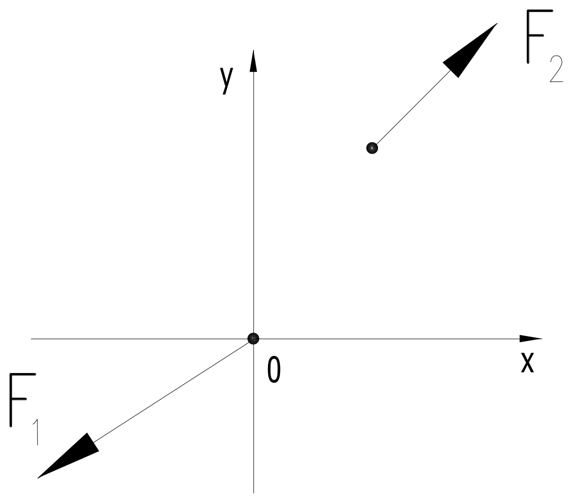
x_1, y_1 – poloha působiště;

α_1 – směrový úhel;

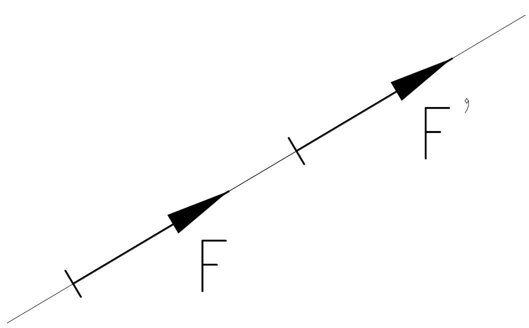
N – velikost.

Úhel α měříme vždy od kladné poloosy x, pro zobrazení velikosti síly volíme vhodné měřítko, např. 1 mm = 10 N.

Př.: $\mathrm{F}_1[0, 0, 200°, 500\ \mathrm{N}]$, $\mathrm{F}_2[10, 20, 45°, 300\ \mathrm{N}]$, 1 cm = 100 N.



Důležitá zásada – sílu můžeme po její nositelce libovolně posouvat, aniž se změní její účinek na tělese. Síly F a F' mají stejný účinek, pokud jsou stejně velké.



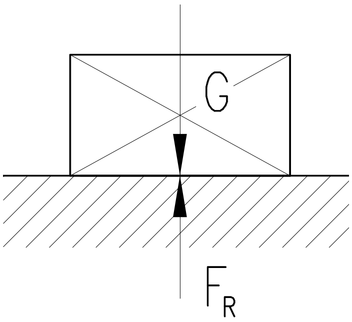
2.4 Zákon akce a reakce

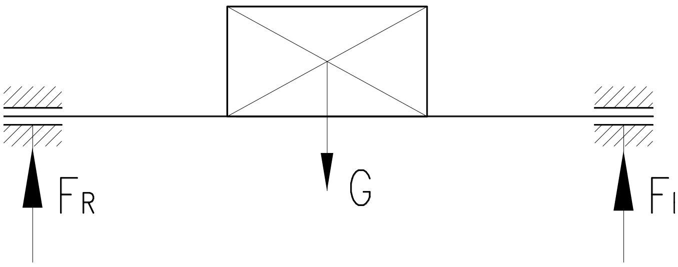
Při působení těles na sebe se síly objevují vždy v páru:

1. Síla akční (působící).
2. Síla reakční (proti působící síle).

Reakční síla (reakce) je obvykle účinek podpor na těleso. Reakce jsou tedy síly, kterými pevné okolí (rám, podpory…) působí na těleso a udržují je v rovnováze.

Př.:



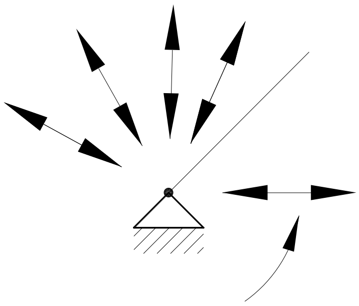


G – akční síla – tíha.

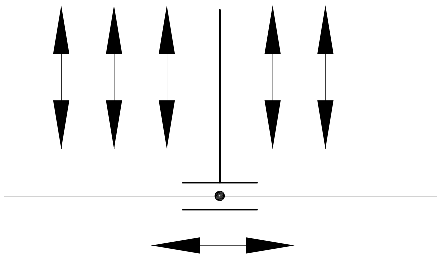
F_R – reakční síla – odpor podlahy.

$$F_R = \frac{G}{2}$$

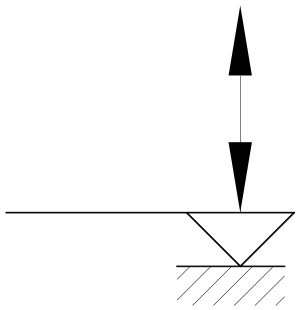
Podpory – jsou to úchyty (spoje), nebo opření těles.



Kloubová podpora – přenáší sílu všemi směry.

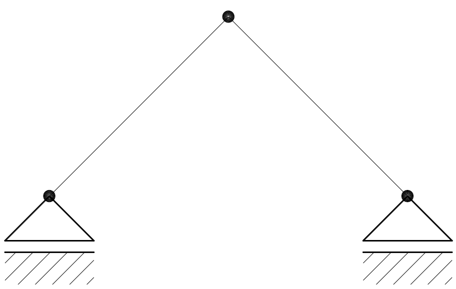


Posuvná podpora – přenáší svislé síly.



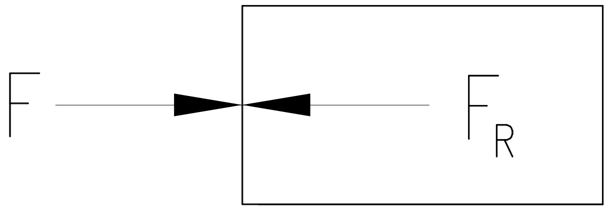
Obecná podpora – něco jen leží na rovině.

Pomocí těchto značek lze zjednodušeně nakreslit spojení několika součástí.



2.5 Newtonův zákon akce a reakce

Každá akční síla dává vzniknout stejně velké, ale opačně orientované síle – reakci.



Tyto dvě síly jsou vždy v rovnováze, působí v jedné přímce, jsou stejně velké, ale opačného smyslu.

2.6 Podmínky rovnováhy

Síly působící na jedné přímce (akční i reakční) jsou v rovnováze , jestliže jejich algebraický součet je roven nule. Říkáme, že výslednice sil je nulová.

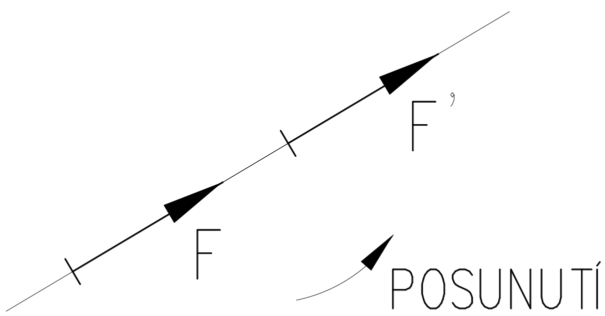
$\sum \mathrm{F_i} = 0$, opačný smysl = opačné znaménko ($F - F_r = 0$).

Poznámka: Pokud by soustava těles nebyla v rovnováze, začne se pohybovat, ale to už řeší dynamika.

3 Soustava sil na jedné nositelce

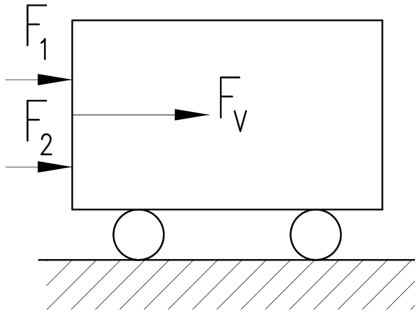
3.1 Nahrazení síly silou na téže nositelce

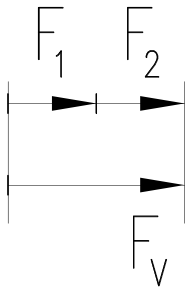
Působiště síly lze na její nositelce libovolně posunout, aniž se její účinek změní.



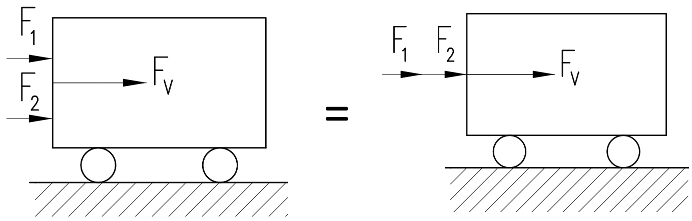
3.2 Výslednice sil na jedné nositelce (přímce)

Př.: Dva lidi tlačí vozík $F_1 = F_2 = 500$ N.





Stejný efekt mají lidi vedle sebe i za sebou.

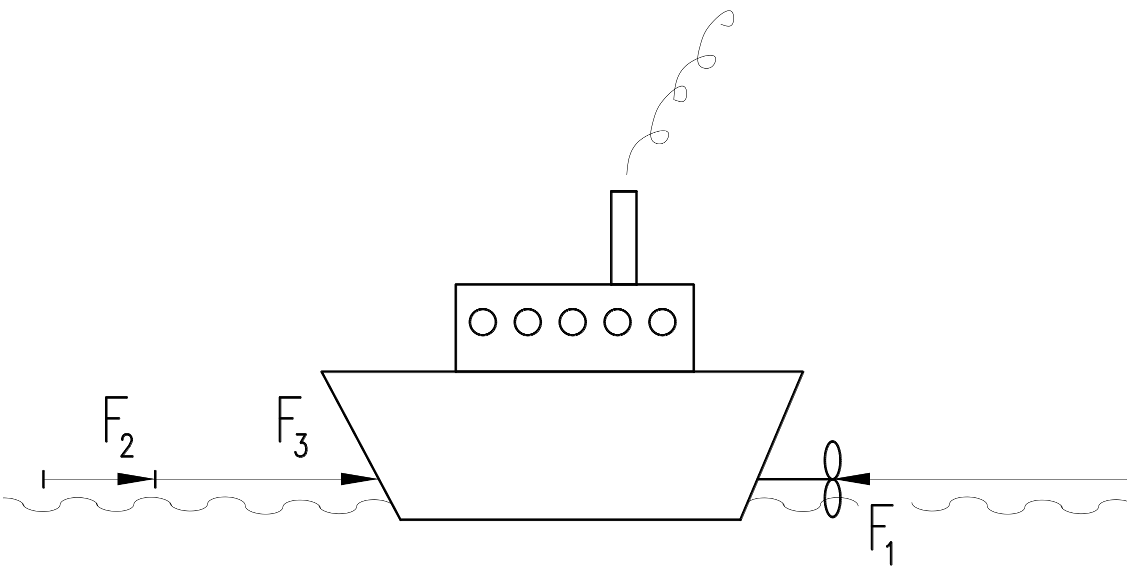


Výslednice sil působících na jedné nositelce je rovna jejich algebraickému součtu. Bereme ohled na znaménko, které odpovídá směru síly.

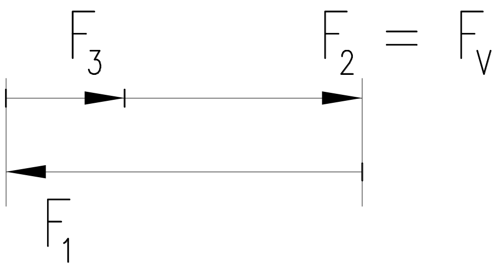
$$\mathrm{F_v} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F_i}$$

$$\mathrm{F_v} = \mathrm{F_1} + \mathrm{F_2} + \mathrm{F_3} + \dots + \mathrm{F_i} + \mathrm{F_{i+1}} + \dots + \mathrm{F_n}$$

Př.: Loď pluje proti větru stálou rychlostí. Lodní šroub vyvolává sílu $F_1 = 11.000$ N. Jaký odpor F_2 klade lodi vítr, jestliže odpor vody je $F_3 = 3.500$ N?



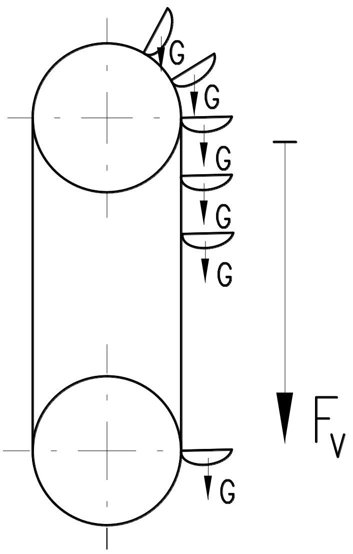
Graficky:



Početně: $F_2 = F_V = \sum F_i = F_1 - F_3 = 11.000 - 3.500 = 7.500\ \mathrm{N}$

Vítr klade lodi odpor 7.500 N.

Př.: Jakou silou je namáhán pás korečkového dopravníku, je–li naplněno 24 korečků a tíha jednoho plného korečku je G = 50 N.

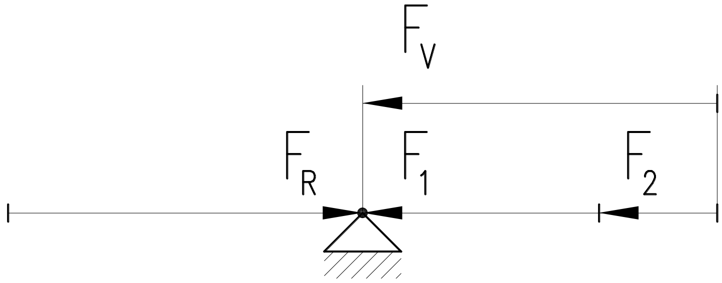


$F_v = G \cdot n = 50 \cdot 24 = 720\ \mathrm{N}$

Pás je namáhán silou 720 N.

3.3 Rovnováha sil na jedné nositelce

Soustavu sil uvedeme do rovnováhy zavedením reakční síly F_R v uložení. Tato reakční síla je stejně velká jako výslednice sil, ale má opačný smysl (znaménko).

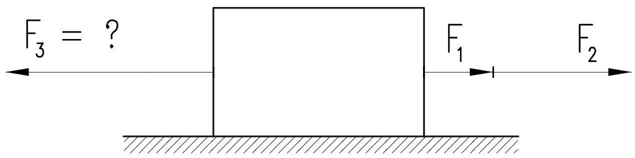


Musí platit podmínka rovnováhy:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = 0$$

Soustava sil je v rovnováze, když algebraický součet akčních i reakčních sil je nulový.

Př.: Na těleso působí vodorovné síly F_1 = 20 N a F_2 = 50 N, které jsou na společného nositele a působí ve stejném smyslu. Jakou sílu musíme připojit, aby tato soustava byla v rovnováze?



$$F_V = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0$$

$$F_1 + F_2 - F_3 = 0$$

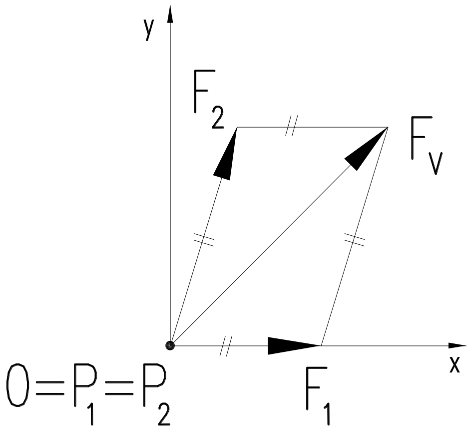
$$F_3 = F_1 + F_2 = 20 + 50 = 70\ \mathrm{N}$$

4 Rovinná soustava sil působících v jednom bodě

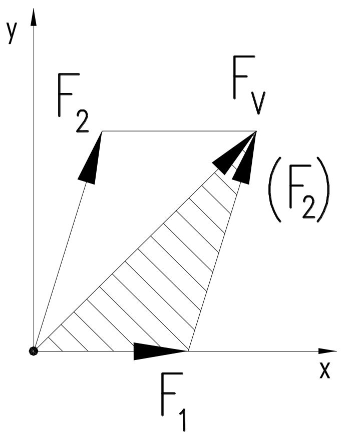
4.1 Grafické zjištění výslednice

Síly o společném působišti skládáme pomocí **silového rovnoběžníku**, nebo zjednodušeně pomocí **silového trojúhelníku**. Říkáme tomu také vektorový součet sil.

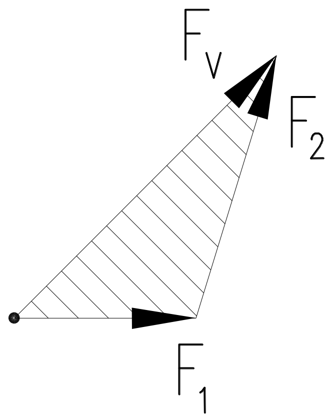
Silový rovnoběžník.



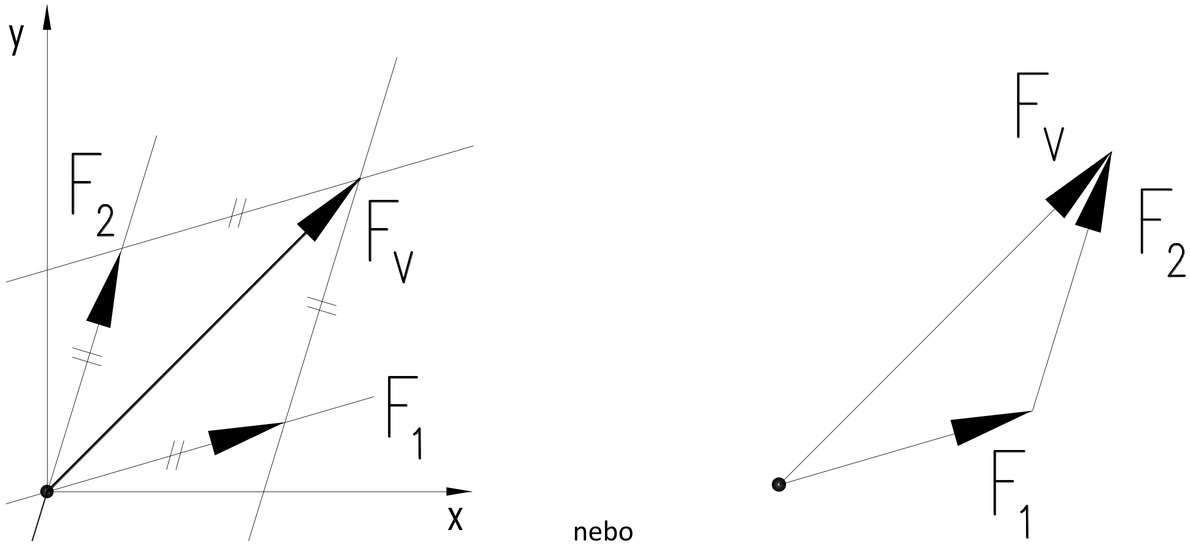
Silový trojúhelník.



Silový trojúhelník.

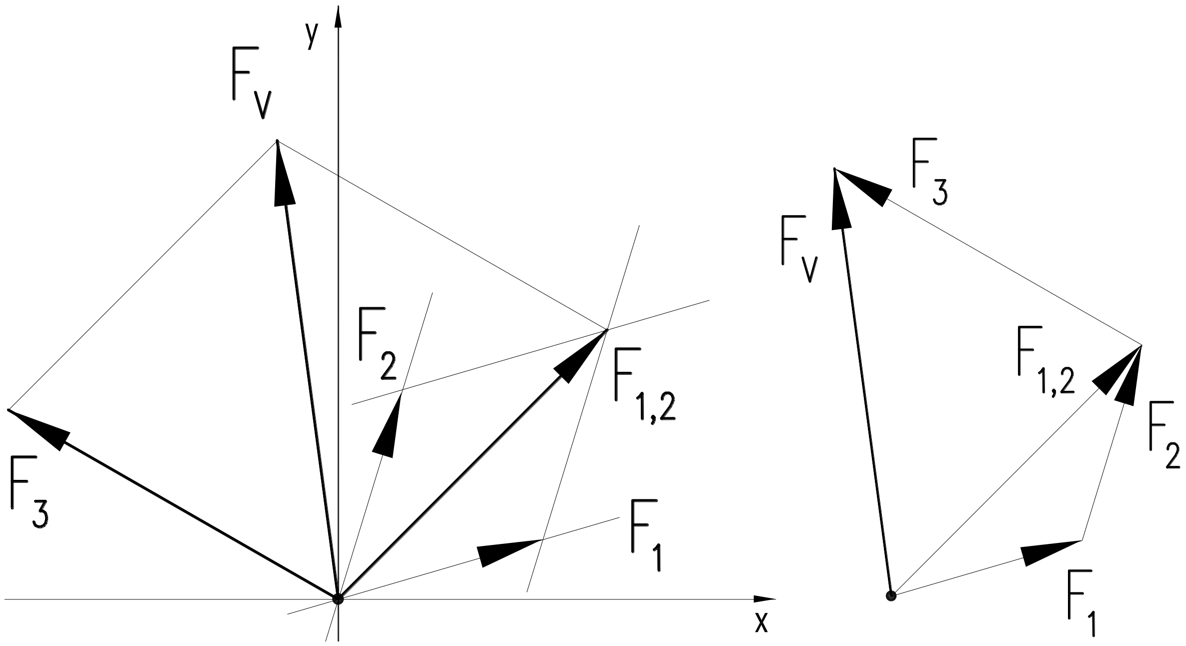


Př.: Určete graficky výslednici sil F_1 [0, 0, 20°, 35 N], F_2 [0, 0, 60°, 36 N], 1 mm = 1 N.



F_v= [0, 0, 37°, 62 N]

Výslednici několika sil o stejném působišti řešíme buď **postupným skládáním** dvou sil, nebo pomocí **silového mnohoúhelníku**.



Výslednice sil F_1 a F_2 je $F_{1,2}$

Výslednice sil $F_{1,2}$ a F_3 je F_V

Př.: Určete výslednici sil.

$F_1[0, 0, 0°, 50\ N]$

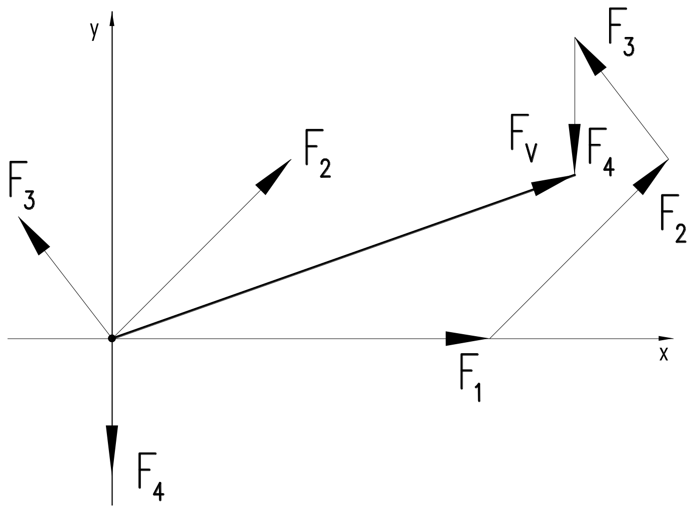
$F_2[0, 0, 60°, 40\ N]$

$F_3[0, 0, 120°, 20\ N]$

$F_4[0, 0, 270°, 30\ N]$

1 mm = 1 N

F_v[0, 0, 21°, 64 N]

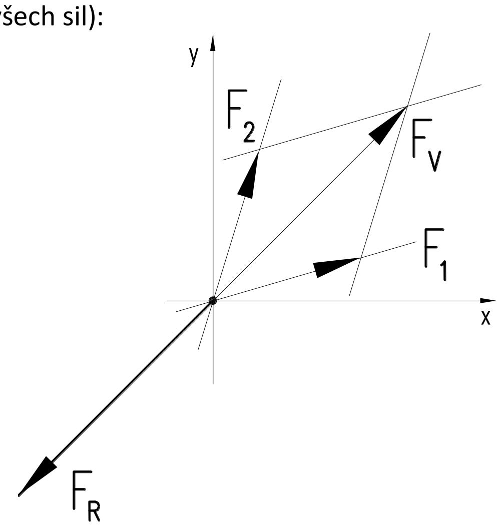


4.2 Rovnováha sil o stejném působišti

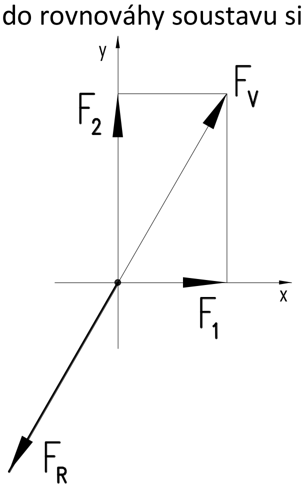
Soustavu sil o stejném působišti uvedeme do rovnováhy, připojíme–li sílu (reakci) o stejné velikosti, stejné nositelce, ale opačného smyslu, než je jejich výslednice.

Podmínka rovnováhy (vektorový součet všech sil):

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = 0$$

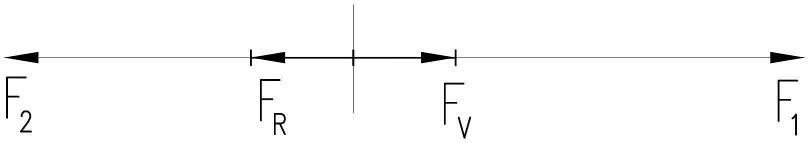


Př.: Uveďte do rovnováhy soustavu sil: $F_1[0, 0, 0°, 40\ N]$ a $F_2[0, 0, 90°, 50\ N]$.



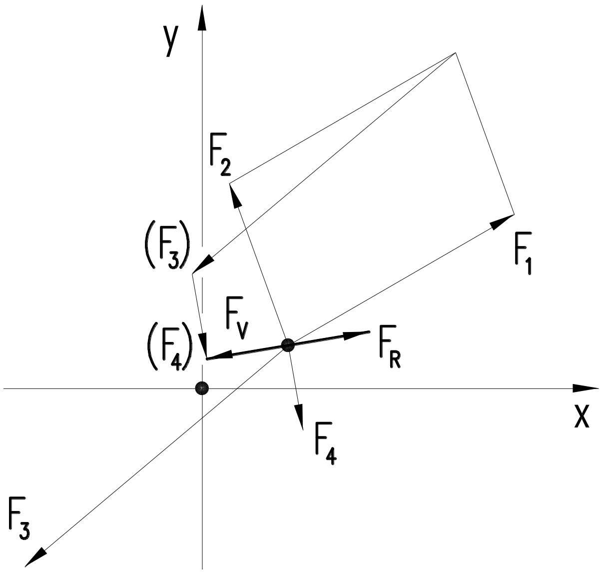
$F_R[0, 0, 232°, 64\ N]$

Př.: Uveďte do rovnováhy síly F_1[0, 0, 0°, 40 N] a F_2[0, 0, 180°, 30 N].



F_R[0, 0, 180°, 10 N]

Př.: Uveďte do rovnováhy soustavu sil F_1[10, 5, 30°, 30 N], F_2[10, 5, 110°, 20 N], F_3[10, 5, 220°, 40 N], F_4[10, 5, 280°, 10 N].

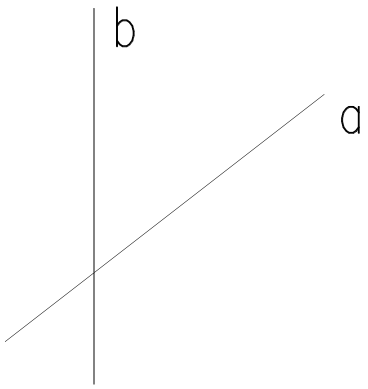


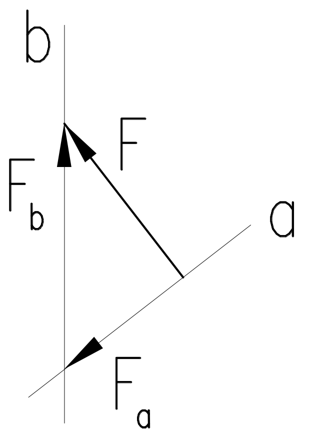
F_R[10, 5, 10°, 7,5 N]

4.3 Rozklad síly do dvou směrů

K rozložení síly použijeme silový trojúhelník nebo rovnoběžník. Rozkládaná síla je vlastně výslednice. Říkáme, že síla je rozložená do složek. Často rozkládáme sílu do dvou navzájem kolmých směrů.

Př.: Rozložte sílu F do dvou směrů – do směru a, b.



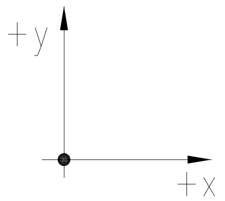


Síla F je vlastně výslednice složek F_a a F_b.

F_a – složka síly F do směru a, F_b – složka síly F do směru b.

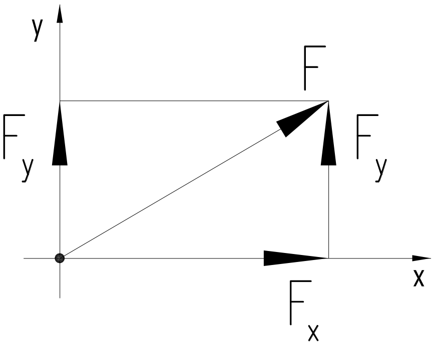
Šipky (smysly) sil musí být takové, aby síla F byla výslednice složek!

Př.: Rozložte sílu F[0, 0, 30°, 50 N] do směrů x a y.



Pravidlo:

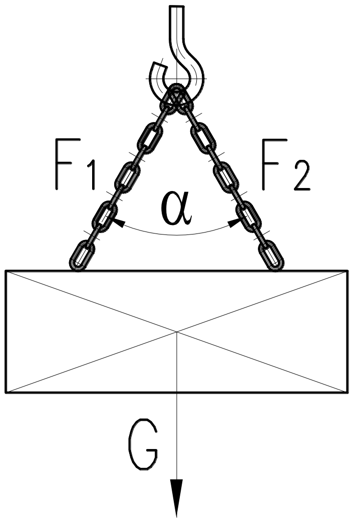
Co bude proti, bude záporné.



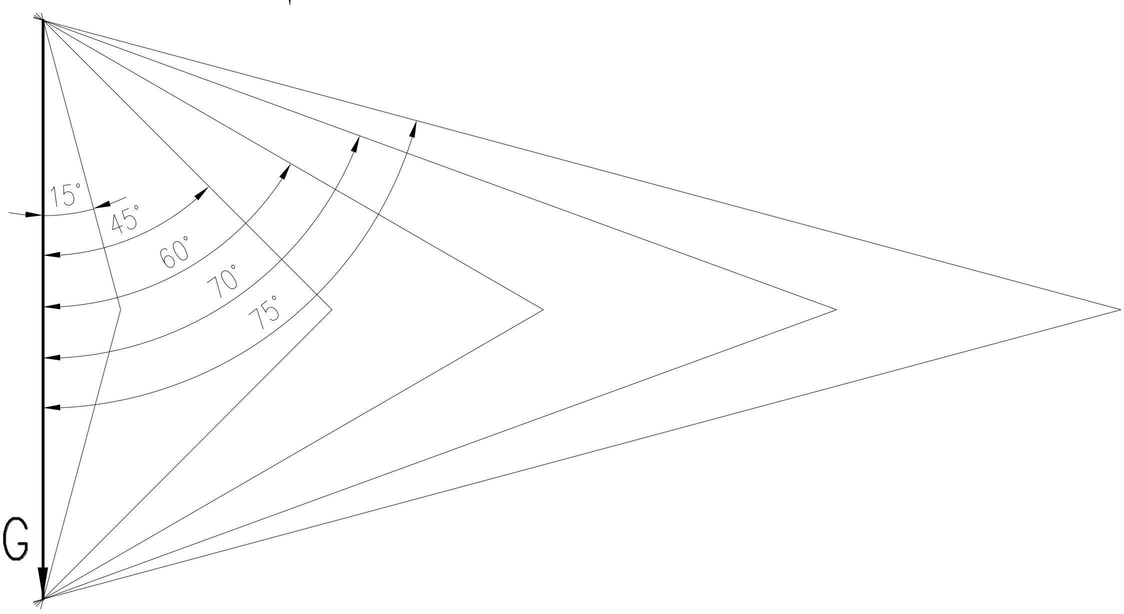
$F_x[0, 0, 0°, 43{,}5\ N]$

$F_y[0, 0, 90°, 25{,}5\ N]$

Př.: Tíha břemene je G = 10.000 N. Jak velká bude síla v řetězech jeřábu?

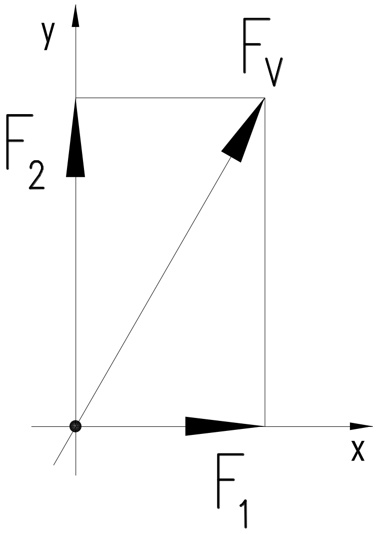


a) α = 30°	a) F_R = 5.200 N
b) α = 90°	b) F_R = 7.050 N
c) α = 120°	c) F_R = 10.000 N
d) α = 140°	d) F_R = 17.500 N
e) α = 150°	e) F_R = 19.000 N



Složky reakce mohou být větší než síla, která je vyvolá!

Př.: Rozložte sílu F_V[0, 0, 60°, 100 N] do souřadných os x, y.



10 mm = 20 N

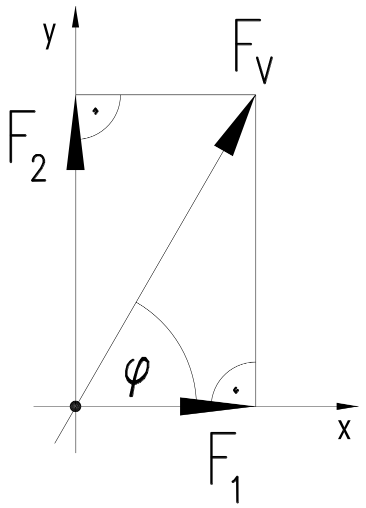
50 mm = 100 N

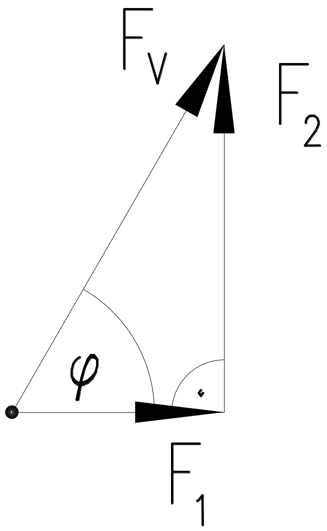
F_1[0, 0, 0°, 52 N]

F_2[0, 0, 90°, 86 N]

4.4 Početní řešení

4.4.1 Výslednice dvou kolmých sil





Pythagorova věta:

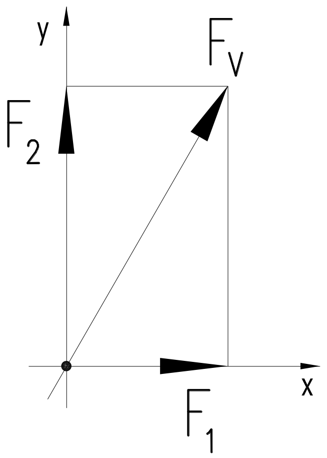
$$F_V^2 = F_1^2 + F_2^2$$

$$F_V = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\rightarrow \varphi$$

Př.: Početně určete výslednici sil F_1[0, 0, 0°, 200 N] a F_2[0, 0, 90°, 400 N].

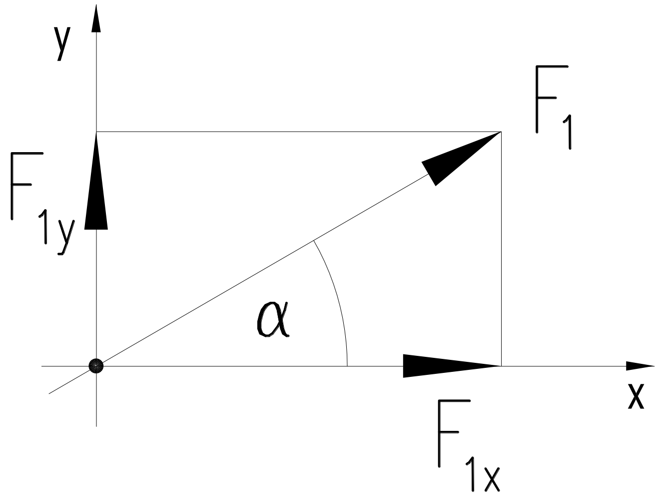


$$F_V = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{200^2 + 400^2} = 447{,}2\ \mathrm{N}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_2}{F_1} = \frac{400}{200} = 2$$

$$\varphi = 63{,}43° = 63°26'$$

4.4.2 Početní rozklad síly do dvou kolmých směrů

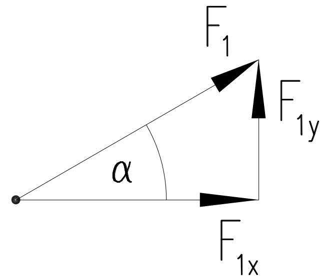


Síly rozkládáme do směrů x, y

F_{1x}, F_{1y} – složky síly

Známe: F_1, α

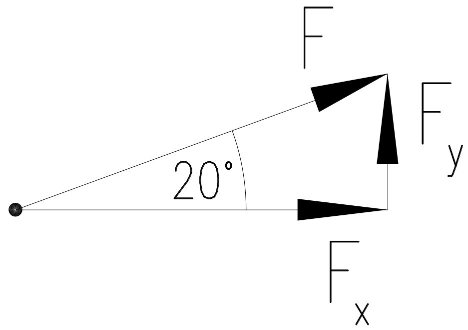
Řešíme pravoúhlý trojúhelník:



$$\sin\alpha = \frac{F_{1y}}{F_1} => F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{F_{1x}}{F_1} => F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha$$

Př.: Rozložte sílu F[0, 0, 20°, 50 N] do složek x, y.



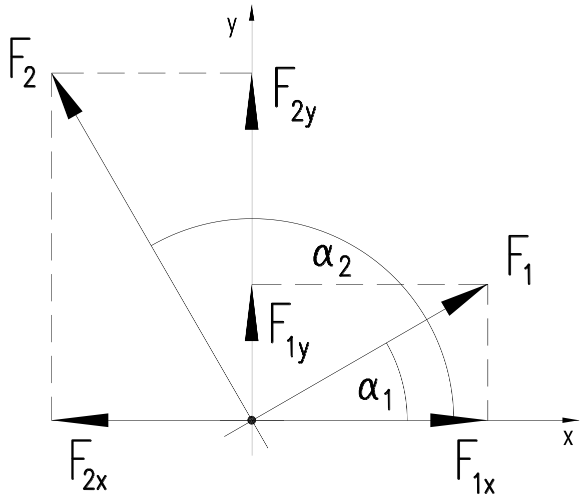
$$F_y = F \cdot \sin\alpha = 150 \cdot \sin 20 = 51{,}3\ \mathrm{N}$$

$$F_x = F \cdot \cos\alpha = 150 \cdot \cos 20 = 141\ \mathrm{N}$$

4.4.3 Výslednice sil

Úlohu řešíme postupně:

- Všechny síly rozložíme do složek x, y.



$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1$

$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1$

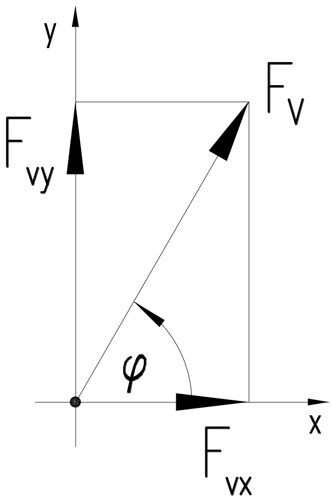
$F_{2x} = F_2 \cdot \sin\alpha_2$ (vyjde záporně)

$F_{2y} = F_2 \cdot \cos\alpha_2$

- Příslušné složky sečteme, případně odečteme (sily na společné nositelce). Domluva: kladná síla působí ve směru osy. Záporná proti.

$$F_{Vx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} \qquad\qquad F_{Vy} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y}$$

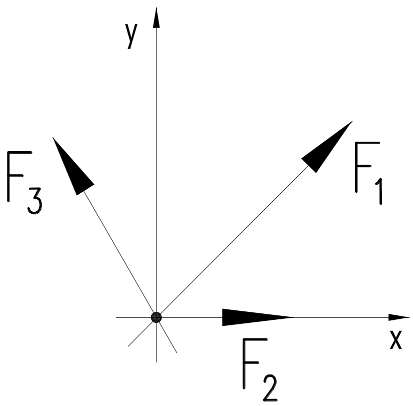
- Z výsledných složek (jsou kolmé) určíme výslednici.



$$F_V = \sqrt{F_{Vx}^2 + F_{Vy}^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_{Vy}}{F_{Vx}}$$

Př.: Určete početně výslednici sil $F_1[0, 0, 45°, 100\ N]$, $F_2[0, 0, 0°, 200\ N]$, $F_3[0, 0, 120°, 150\ N]$.



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 45° = 100\ \cdot \cos 45° = 71\ N$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 45° = 100 \cdot \sin 45° = 71\ N$$

$$F_{2x} = F_2 = 200\ N$$

$$F_{2y} = 0\ N$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos 120° = 150 \cdot \cos 120° = -75\ N$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin 120° = 150\ \cdot \sin 120° = 130\ N$$

$$F_{vx} = \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 71 + 200 + (-75) = 196\ N$$

$$F_{vy} = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 71 + 0 + 130 = 201\ N$$

$$F_v = \sqrt{{F_{vx}}^2 + {F_{vy}}^2} = \sqrt{196^2 + 201^2} = 281\ N$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{F_{vy}}{F_{vx}} = \frac{201}{196} = 1{,}026$$

$$\varphi = 45{,}72° = 45°43'$$

4.4.4 Početní řešení reakce

Opakování: Reakce má vždy stejnou velikost, ale opačný smysl než výslednice. Je to proto, že musí platit podmínka rovnováhy.

$\sum \overrightarrow{F_i} = 0$ (vektorově).

Tuto podmínku rovnováhy můžeme rozepsat do složek ve směru os x, y algebraicky.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

$$F_{RX} + F_{VX} = 0$$

$$F_{RX} = -F_{VX}$$

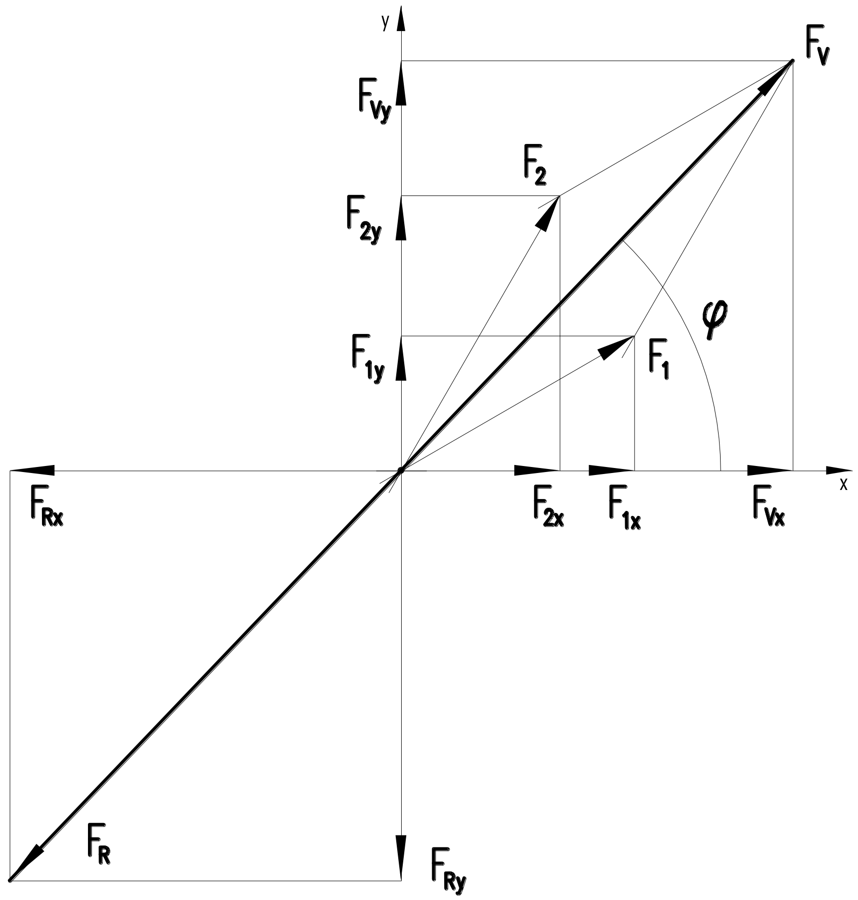
F_{Rx} – složka reakce

F_{Vx} – složka výslednice

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$$

$$F_{RY} + F_{VY} = 0$$

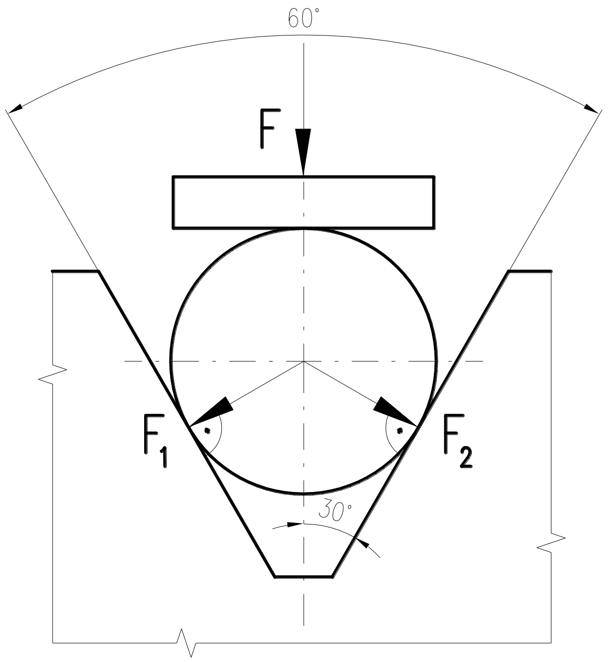
$$F_{RY} = -F_{VY}$$

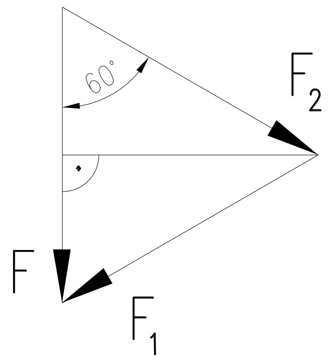


Postup:

- Určíme výslednici.
- Reakce je stejně velká, její úhel je ale o 180° větší (od osy x).

Př.: Kruhovou tyč průměru d = 100 mm upínáme v prizmatické podložce silou F = 5 kN. Jakou silou působí tyč na boky prizmatické podložky?

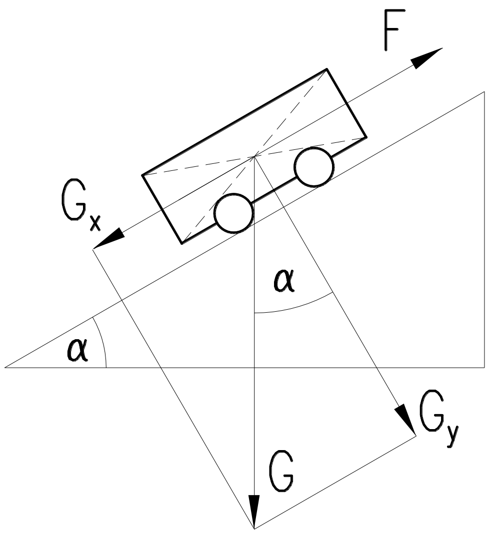


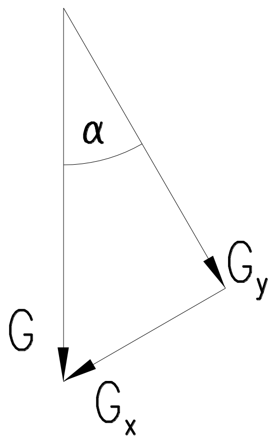


$$\cos 60° = \frac{\frac{F}{2}}{F_2}$$

$$F_2 = F_1 = \frac{\frac{F}{2}}{\cos 60°} = \frac{2.500}{\cos 60°} = 5.000\ \mathrm{N}$$

Př.: Jakou silou F musíme táhnout vozík do kopce s úhlem α = 15°. Hmotnost vozíku i s nákladem je m = 60 kg. Odpory tření zanedbejte.





$$G = m \cdot g = 60 \cdot 10 = 600\ \mathrm{N}$$

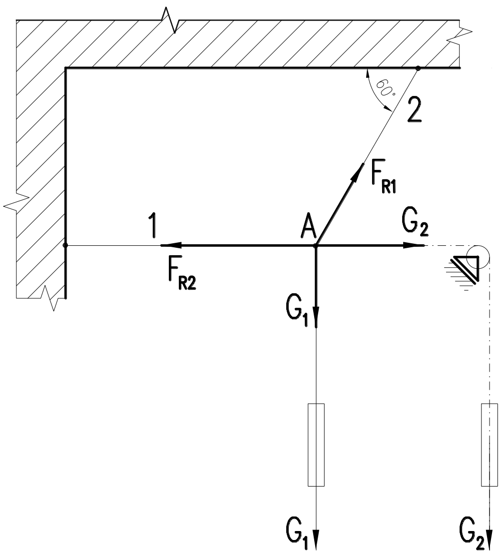
$$G_x = G \cdot \sin\alpha = 600 \cdot \sin 15° = 155{,}3\ \mathrm{N}$$

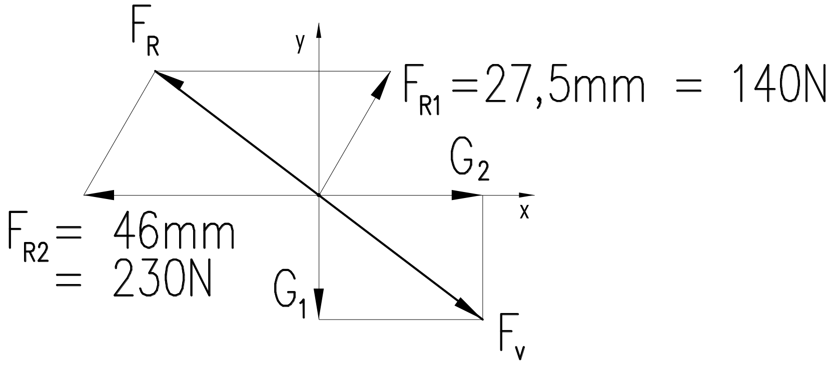
$$F \geq G_x$$

Př.: Dva pruty dle obrázku jsou spojeny v bodě A. V tomto bodě je zavěšeno břemeno o tíze $G_1 = 120$ N a pomocí kladky břemeno o tíze $G_2 = 160$ N. Určete graficky síly F_1, F_2 v jednotlivých prutech. Soustava je v rovnováze.

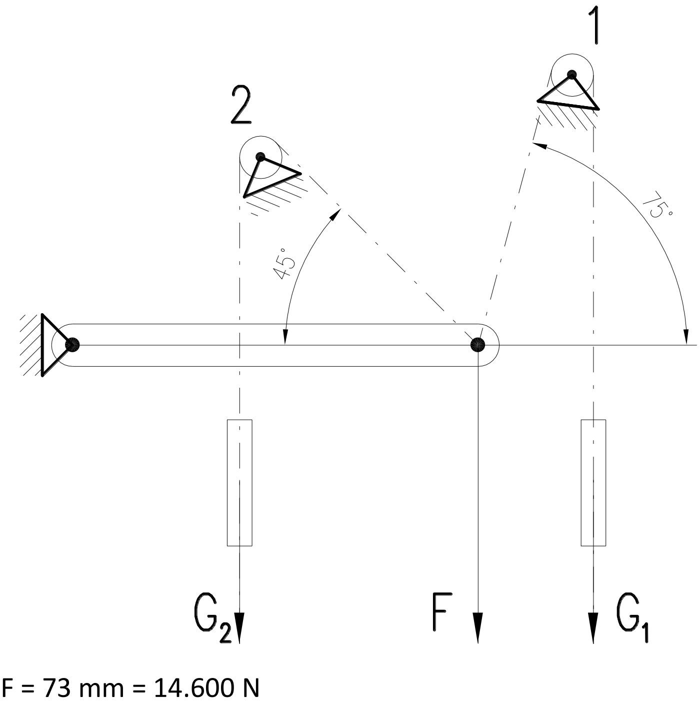
Podmínka rovnováhy:

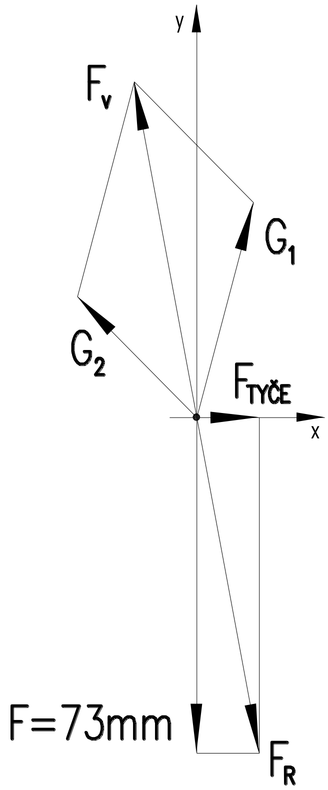
$$\sum F_i = 0$$





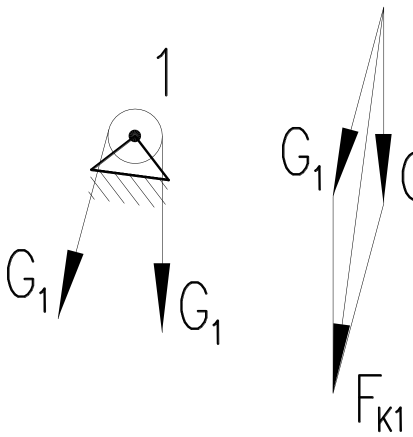
Př.: Tyč uložená na kloubu má na svém volném konci na laně zavěšena dvě závaží. Jakou silou F musíme tyč držet, aby zůstávala ve vodorovné poloze? Jaká síla působí na čepy kladek? Řešte graficky. G_1 = 9.500 N, G_2 =7.300 N, 1 mm = 2.000 N.





F = 73 mm = 14.600 N

Kladka 1:



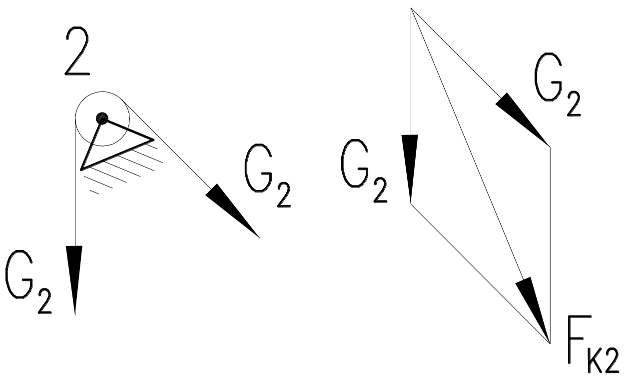
1 mm = 500 N

G_1 = 19 mm

F_{K1} = 38 mm

F_{K1} = 19.000 N

Kladka 2:



1 mm = 500 N

G_2 = 14,6 mm

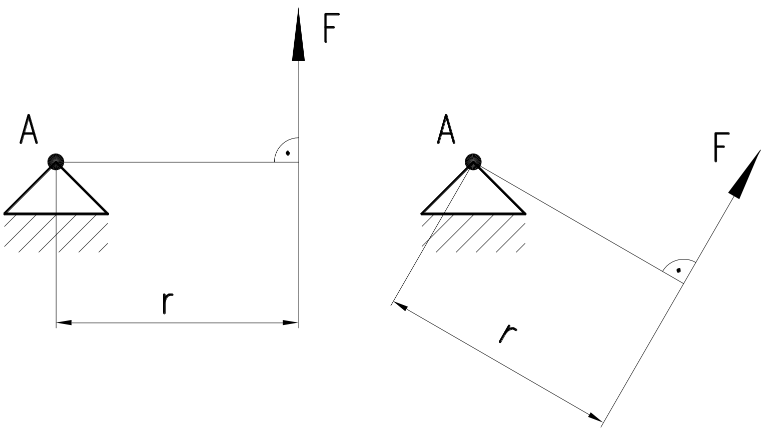
F_{k2} = 27 mm

F_{k2} = 13.500 N

5 Obecná rovinná soustava sil

5.1 Moment síly k bodu (ose)

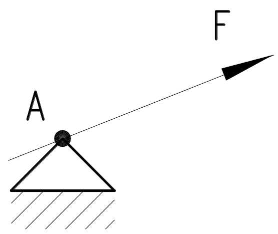
5.1.1 K bodu



Moment síly F k bodu A je roven součinu velikosti síly a její kolmé vzdálenosti k bodu A. Této vzdálenosti říkáme rameno.

$M_A = F \cdot r$ [N · m]

Př: Určete M_A:



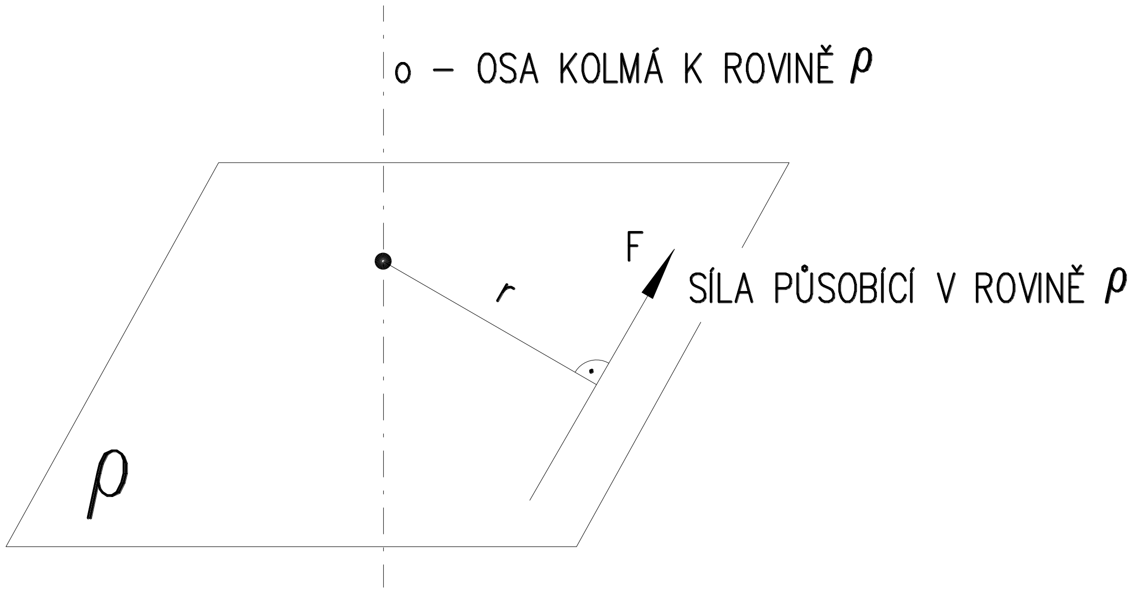
$M_A = F \cdot r$

$r = 0$

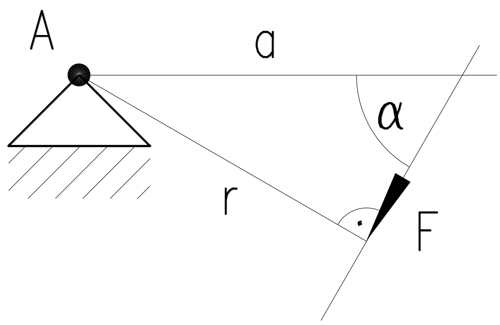
$M_A = F \cdot 0 = 0$

Moment síly k bodu, ležícímu na její nositelce, je vždy nulový.

5.1.2 K ose:



Př: určete moment síly F k bodu A.



F = 1.000 N; α = 60˚; a = 1 m

$$\sin\alpha = \frac{r}{a} \Rightarrow r = a \cdot \sin\alpha$$

$$r = 1 \cdot \sin 60° = 0{,}866\ \mathrm{m}$$

$$M_A = F \cdot r = 1.000 \cdot 0{,}866 = 866\ \mathrm{Nm}$$

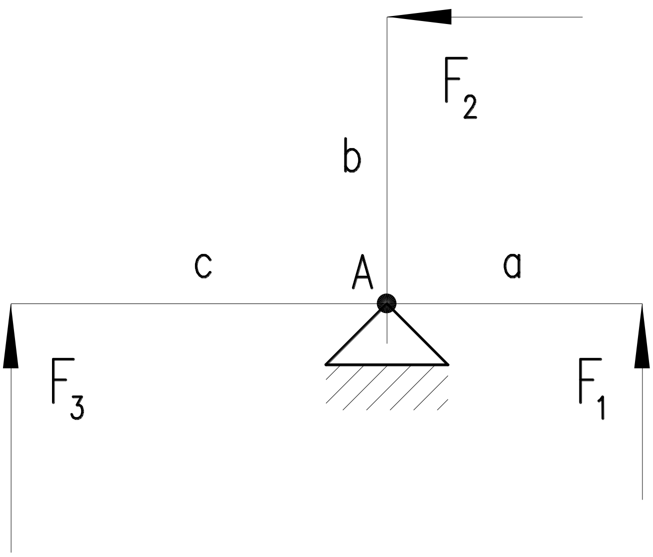
5.2 Moment silové soustavy

Působí-li na bod soustava několika sil, je jejich účinek roven účinku výslednice. Z toho vyplývá, že součin momentů jednotlivých sil je roven momentu výslednice.

Momentová věta:

$$M_v = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

Př.:



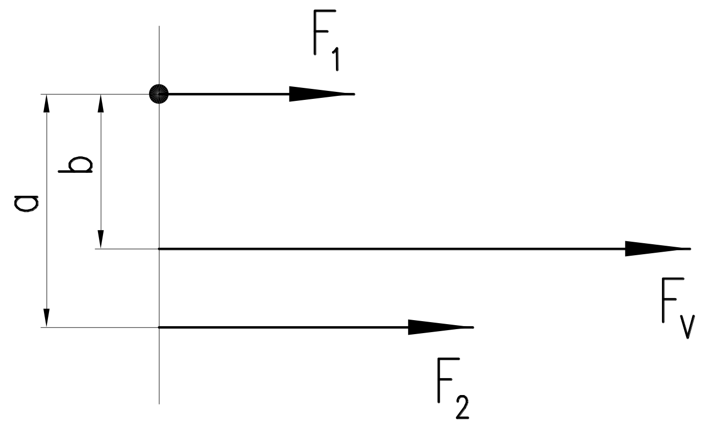
Záleží na znaménku!

Domluva: rotace ve směru hodinových ručiček **+**

$M_A = F_1 \cdot a + F_2 \cdot b - F_3 \cdot c$

5.3 Početní řešení soustavy rovinných rovnoběžných sil

Př.: Určete výslednici $F_1 = 50$ N; $F_2 = 80$ N; a = 0,5 m.



1. Velikost výslednice je dána součtem (rozdílem) působících sil.

$F_v = F_1 + F_2 = 50 + 80 = 130\ \mathrm{N}$

2. Směr výslednice je rovnoběžný se silami, smysl záleží na velikosti a smyslu jednotlivých sil.

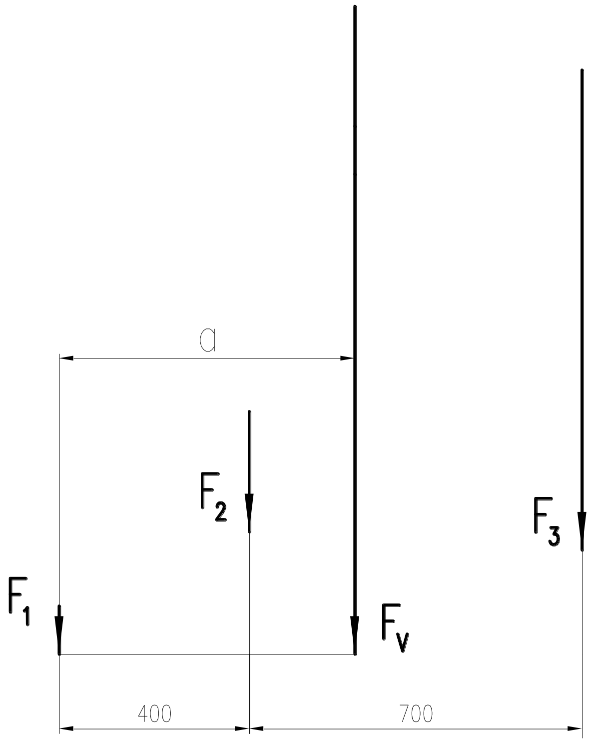
3. Umístění výslednice určíme z momentové věty $M_v = \sum M_i$

Momenty k počátku:

$$F_V \cdot b = F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot a \ => b = \frac{F_2 \cdot a}{F_V} = \frac{80 \cdot 0{,}5}{130} = 0{,}31\ \mathrm{m}$$

Výsledek: F_V[0, – 0,31, 0°, 130 N].

Př.: Určete výslednici soustavy tří rovnoběžných sil. Řešte početně.



F_1 = 1.000 N

F_2 = 2,5 kN

F_3 = 10 kN

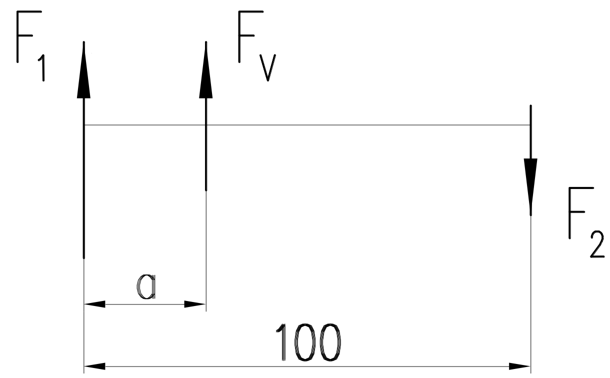
$F_v = \sum F_i = F_1 + F_2 + F_3 = 1.000 + 2.500 + 10.000 = 13.500$ N

$$M_v = \sum M_i$$

$$F_v \cdot a = F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 400 + F_3 \cdot 1.100$$

$$=> a = \frac{2.500 \cdot 400 + 10.000 \cdot 1.100}{13.500} = 888{,}9 \text{ mm}$$

Př.:



F_1 = 500 N

F_2 = 200 N

$F_v = F_1 - F_2 = 500 – 200 = 300$ N

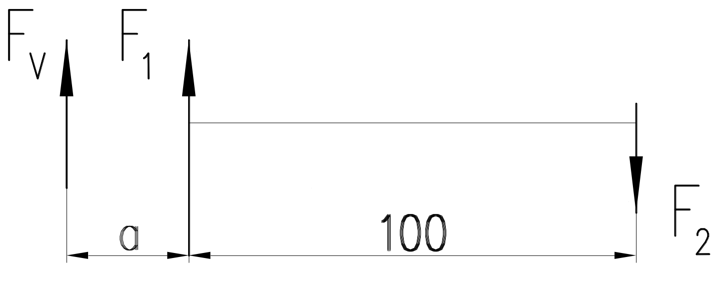
$$M_v = \sum M_i$$

$$F_v \cdot a = F_1 \cdot 0 - F_2 \cdot 100$$

$$=> a = \frac{-200 \cdot 100}{300} \cong -66{,}7 \text{ mm}$$

To znamená, že F_V bude vlevo od F_1.

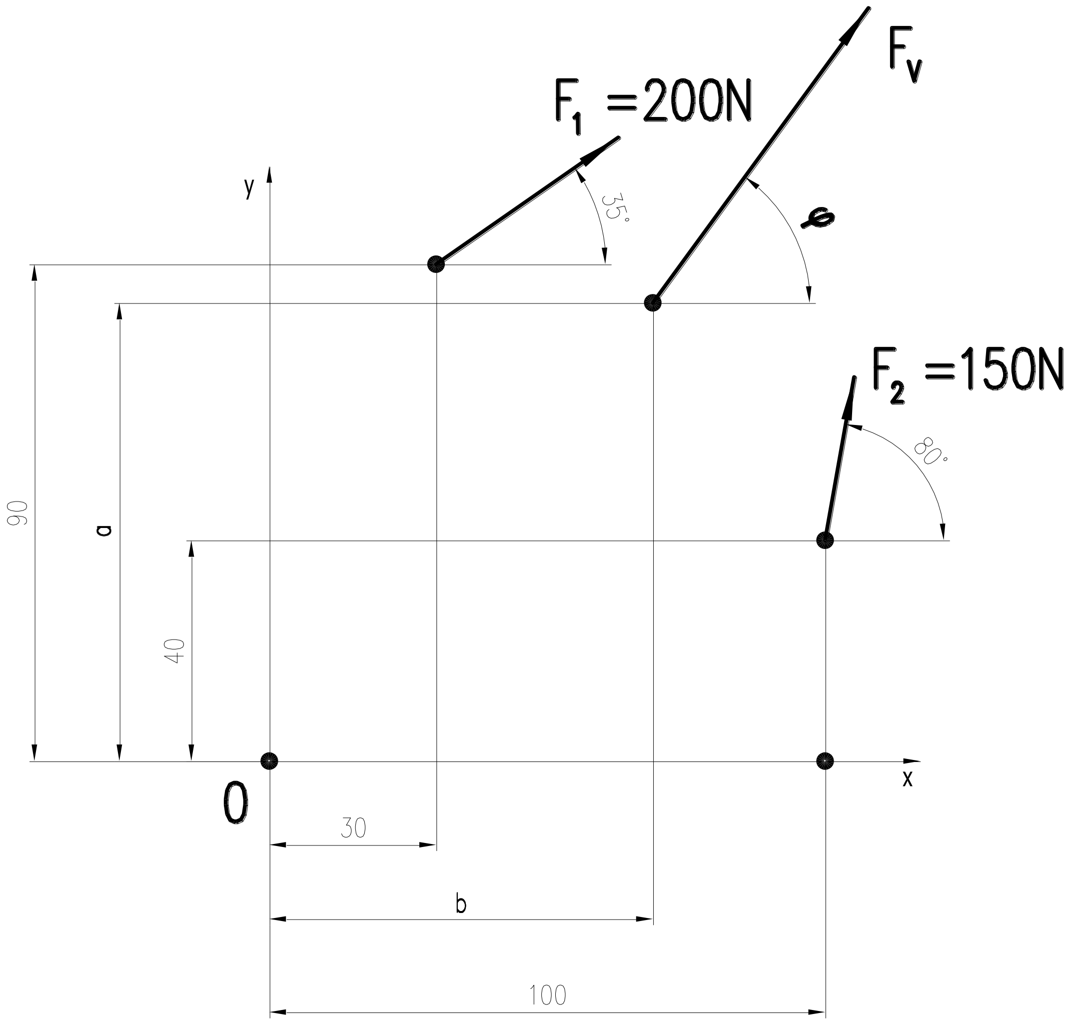
Ve skutečnosti tedy takto:



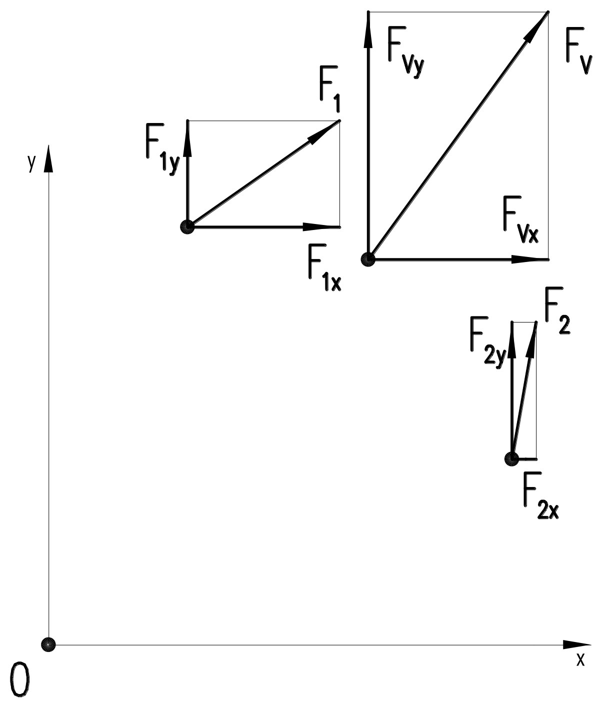
5.4 Početní řešení soustavy obecných rovinných sil

Síly rozložíme do směrů x a y, dostaneme vlastně dvě soustavy rovnoběžných sil. Řešíme složky výslednice F_x, F_y do směrů x, y a jejich polohu. V průsečíku složek výslednice je působiště výslednice. Velikost výslednice dostaneme složením jejích složek.

Př.:



1. Síly F_1 a F_2 rozložíme do složek x, y



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 35° = 200 \cdot \cos 35° = 163{,}8\ \mathrm{N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 35° = 114{,}7\ \mathrm{N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 80° = 150 \cdot \cos 80° = 26\ \mathrm{N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 80° = 147{,}7\ \mathrm{N}$$

2. Výslednice F_{vx}, F_{vy}, F_V.

$$F_{vx} = F_{1x} + F_{2x} = 163{,}8 + 26 = 189{,}8 \text{ N}$$

$$F_{vy} = F_{1y} + F_{2y} = 114{,}7 + 147{,}7 = 262{,}4 \text{ N}$$

$$F_v = \sqrt{{F_{vx}}^2 + {F_{vy}}^2} = \sqrt{189{,}8^2 + 262{,}4^2} = 323{,}8 \text{ N}$$

3. Z momentové rovnováhy k počátku určíme a, b:

$$F_{vx} \cdot a = F_{1x} \cdot 90 + F_{2x} \cdot 40 \Rightarrow a = \frac{163{,}8 \cdot 90 + 26 \cdot 40}{189{,}8} = 83{,}2 \text{ mm}$$

$$F_{vy} \cdot b = F_{1y} \cdot 30 + F_{2y} \cdot 100 \Rightarrow b = \frac{114{,}7 \cdot 30 + 147{,}7 \cdot 100}{262{,}4} = 69{,}4 \text{ mm}$$

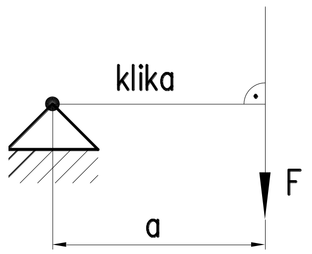
4. Vypočteme úhel φ

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{F_{Vy}}{F_{Vx}} = \frac{262{,}4}{189{,}8} = 1{,}383 \Rightarrow \varphi = 54{,}12° = 54°7'15''$$

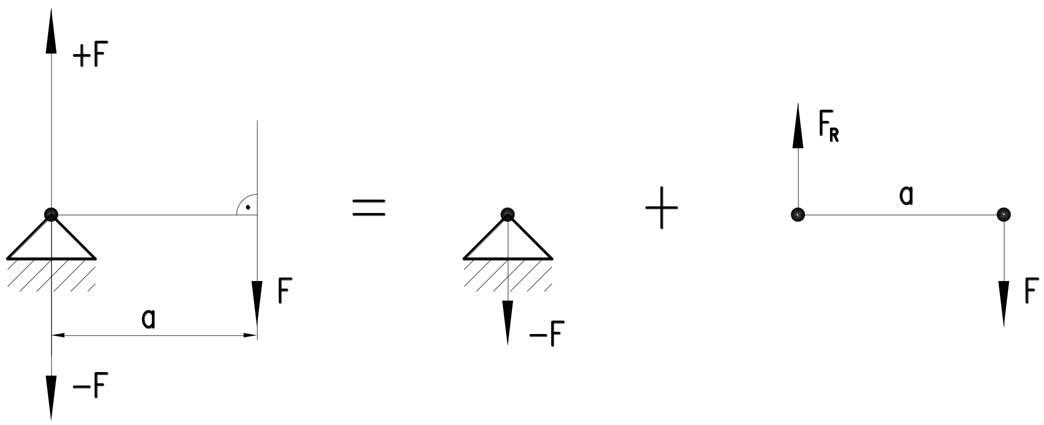
Výsledek: $F_V\,[69{,}4; 83{,}2; 54°; 324\ \text{N}]$.

5.5 Silová dvojice

Otáčení kolem osy je vždy způsobeno dvojicí sil.



Síla F se tuhostí kliky přenáší do osy otočného čepu a tento čep klade odpor proti této síle reakcí.



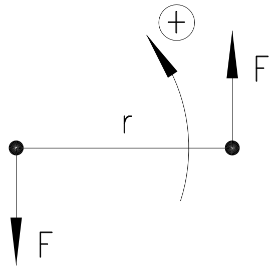
$M = F \cdot a$

Síla F a F + (F_R) tvoří takzvanou dvojici sil s momentem $M = F \cdot a$

Síla F – způsobuje reakční sílu uložení. Otáčení se tady vždy děje momentem silové dvojice.

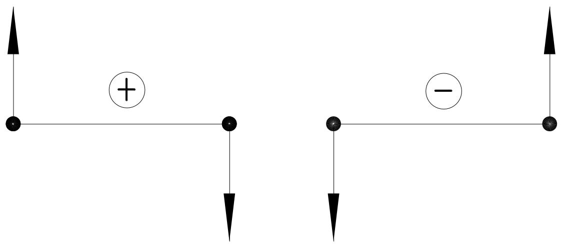
5.6 Moment silové dvojice

Silovou dvojici tvoří vždy dvě stejně velké síly stejného směru, ale opačného smyslu, které jsou od sebe vzdáleny o nějakou vzdálenost. Důsledkem takovéto dvojice sil je rotace tělesa.



$M = F \cdot r$

r – rameno silové dvojice

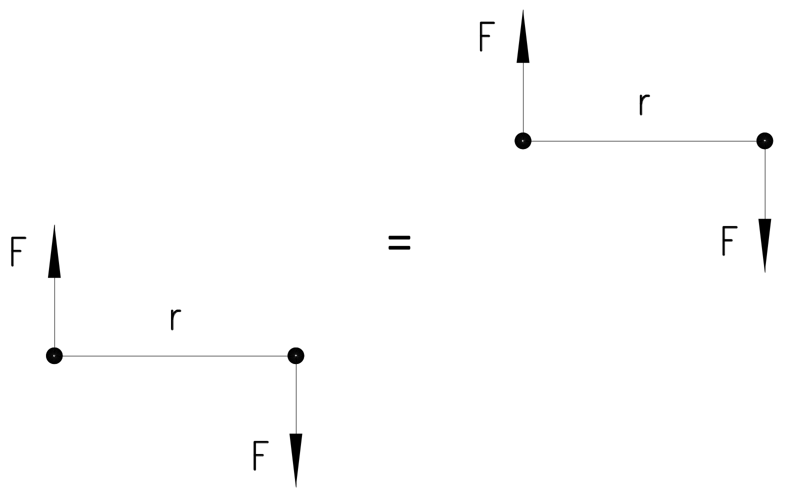


Domluva: kladný smysl rotace je ve směru hodinových ručiček

Velikost momentu silové dvojice závisí nejen na velikosti síly, ale i na jejich vzdálenosti (rameni). Např.: páka.

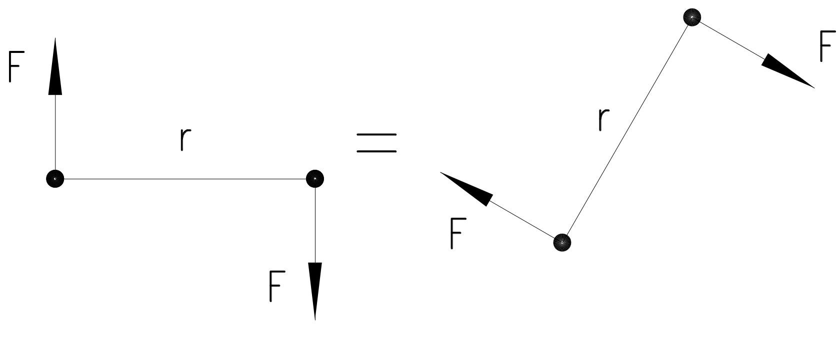
Účinek silové dvojice se nezmění, když ji:

1. Přeložím (posunu).



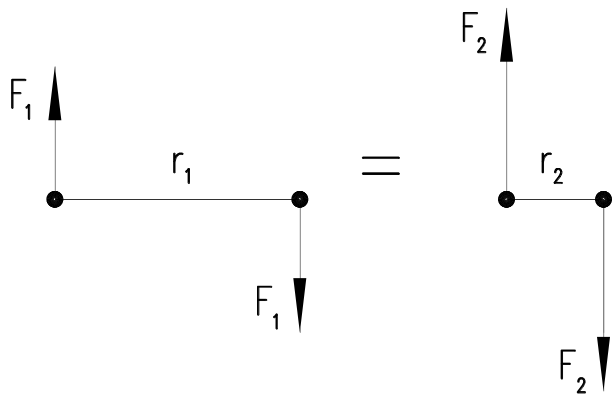
$M = F \cdot r$

2. Natočím.



$M = F \cdot r$

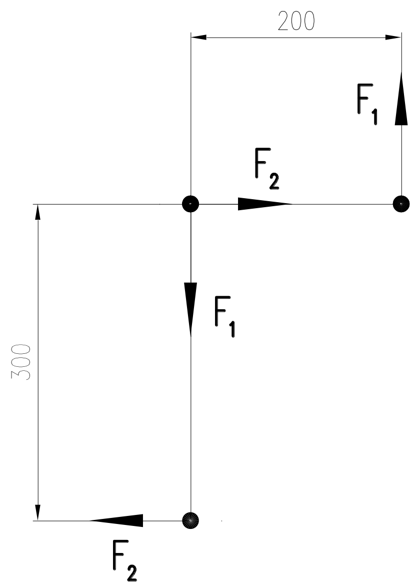
3. Nahradím jinou silovou dvojicí se stejným momentem.



$$M = F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

Účinky několika silových dvojic se sčítají (nebo odčítají) podle jejich znamének.

Př.: Určete výsledný účinek silových dvojic.



$F_1 = 500$ N

$F_2 = 200$ N

$$M = -F_1 \cdot 200 + F_2 \cdot 300 =$$
$$= -500 \cdot 200 + 200 \cdot 300 =$$
$$= -40.000 \text{ Nmm} = -40 \text{ Nm}$$

5.7 Rovnováha momentů

Opakování:

Rovnováha sil v rovině:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{ix}} = 0$$

Po rozepsaní do složek:

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

Rovnováha momentů:

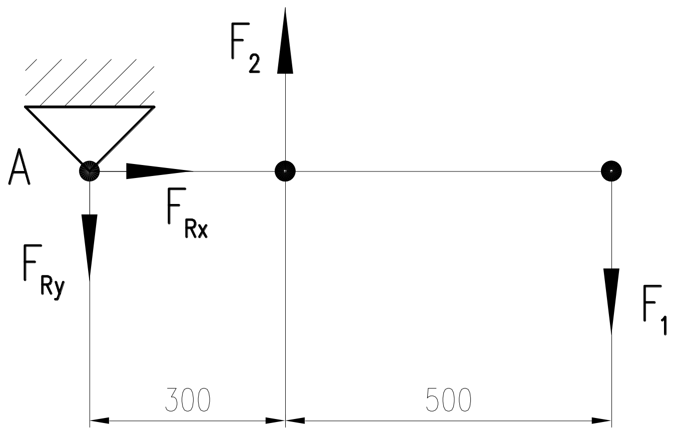
Těleso je v rovnováze proti otáčení, t.j. v momentové rovnováze, jestliže algebraický součet momentů všech sil a silových dvojic je roven 0.

Podmínka momentové rovnováhy:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{M_i} = 0$$

Je–li těleso v momentové rovnováze, neotáčí se.

Př.: Nosník uveďte silou F_2 do rovnováhy a určete reakci v uložení.



F_1 = 200 N

Podmínka momentové rovnováhy:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{M}_i = 0$$

Moment k místu A:

$$\mathrm{M_A = F_{Rx} \cdot 0 + F_{Ry} \cdot 0 - F_2 \cdot 300 + F_1 \cdot 800 = 0}$$

$$\mathrm{F_2 = \frac{F_1 \cdot 800}{300} = \frac{200 \cdot 800}{300} = 533\ N}$$

Podmínka silové rovnováhy:

Směr x:

$$\sum \mathrm{F_{ix}} = 0$$

F_{Rx} + 0 = 0 => F_{Rx} = 0

Směr y:

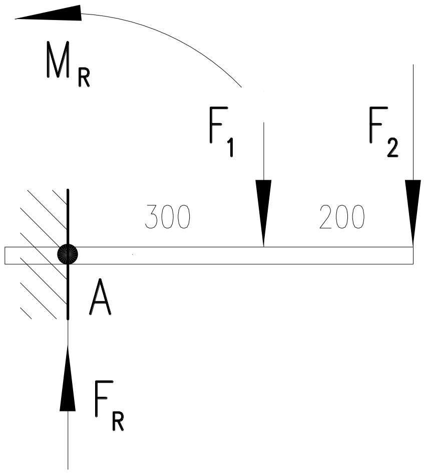
$$\sum \mathrm{F_{iy}} = 0$$

F_{Ry} – F_2 + F_1 = 0

F_{Ry} = – F_1 + F_2 = – 200 + 533 = + 333 N

F_R = F_{Ry} = + 333 N

Př.: Určete reakci v pevně zabetonované tyči



F_1 = 100 N

F_2 = 150 N

V místě A je tyč pevně zabetonovaná do zdi, není zde tedy otočný bod. V tomto uložení, kterému říkáme **vetknutí**, bude reakce nejen síla, ale i reakční moment M_R.

Silová rovnováha:

$$\sum F_{ix} = 0$$

(V ose x nemáme žádné složky).

$$\sum F_{iy} = 0$$

$– F_1 – F_2 + F_R = 0 \Rightarrow F_R = F_1 + F_2 = 100 + 150 = 250$ N

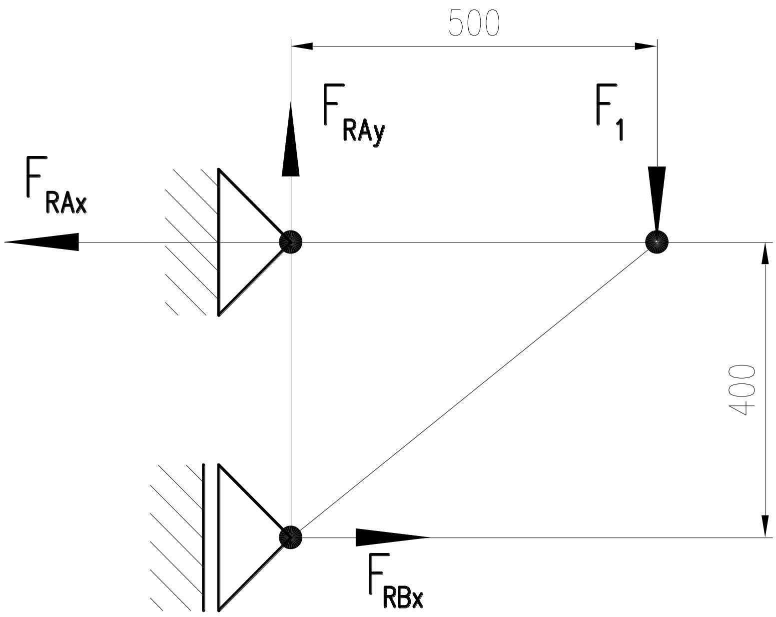
Momentová rovnováha:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$$

$F_1 \cdot 300 + F_2 \cdot 500 – M_R = 0$

$M_R = 100 \cdot 300 + 150 \cdot 500 = 105.000$ Nmm = 105 Nm

Př.: Určete reakce, F_1 = 100 N.



$$\sum F_{iy} = 0$$

$F_{RAy} = F_1 = 100$ N

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$$

$F_1 \cdot 500 – F_{RBx} \cdot 400 = 0$

$\Rightarrow F_{RBx}=125$ N

$$\sum F_{ix} = 0$$

$F_{RAx} – F_{RBx} = 0$

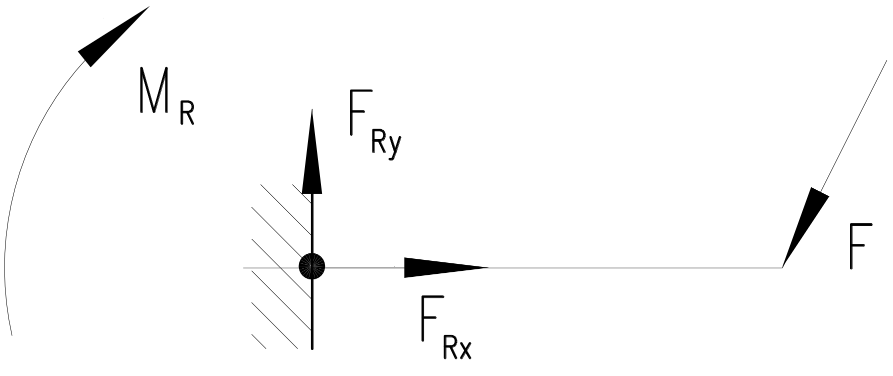
$F_{RAX} = F_{RBX} = 125$ N

5.8 Reakce nosníků

Dlouhou tenkou součást, zatíženou šikmo nebo kolmo na osu, nazýváme nosníkem.

Základní typy nosníků:

- Vetknutý.

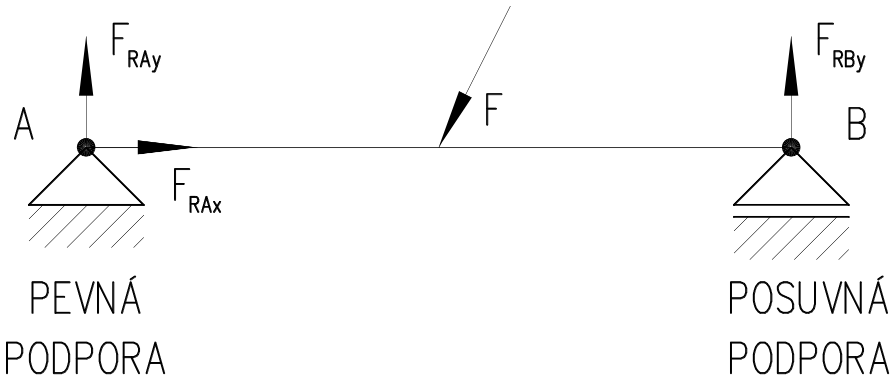


Reakce ve vetknutí:

2 síly F_{Rx}, F_{Ry} a moment M_R

(celkem 3 reakce).

- Na dvou podporách.



Jedna podpora musí být pevná (přenáší šikmou sílu) a druhá posuvná (přenáší jen svislou sílu).

Reakce nosníku:

strana A: F_{RAx}, F_{RAy}

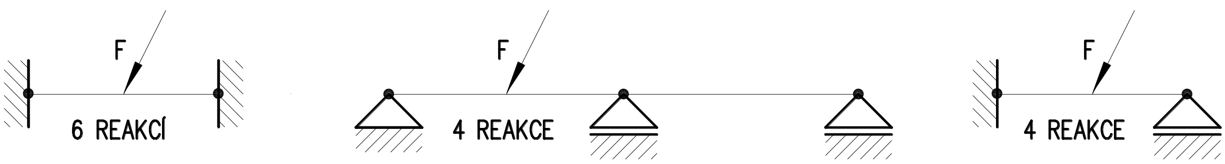
strana B: F_{RBy}

(celkem 3 síly).

Poznámka:

V rovině máme 3 podmínky statické rovnováhy ($\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$; $\sum M_i = 0$), tedy 3 rovnice. Z těchto rovnic mohu vypočítat 3 neznámé reakce. Pokud by uspořádání nosníku vyžadovalo větší počet reakcí, nelze takový nosník staticky řešit. Říkáme, že nosníky jsou staticky neurčité.

Příklady statických neurčitých nosníků:



5.9 Stupně volnosti

Těleso v rovině má 3 stupně volnosti, tj. tři možnosti pohybu:

- posuv v ose x;
- posuv v ose y;
- rotace.

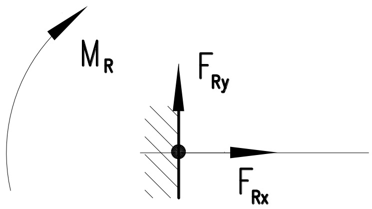
Těmto 3 stupňům volnosti odpovídají 3 rovnice statické rovnováhy (2 silové, 1 momentová) a 3 neznámé reakce. Použitím podpor odebíráme stupně volnosti podle druhu podpory.

Když je výsledný počet stupňů volnosti:

- > 0 – těleso se pohybuje;
- = 0 – je ve statické rovnováze (je staticky určité);
- < 0 – je staticky neurčité což neumím řešit.

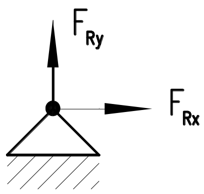
Podpory:

1) Vetknutí:



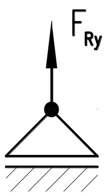
odebíráme 3 stupně volnosti, zjišťujeme 3 reakce F_{RX}, F_{RY}, M_R.

2) Pevná podpora:



odebíráme 2 stupně volnosti, zjišťujeme 2 reakce F_{RX}, F_{RY}.

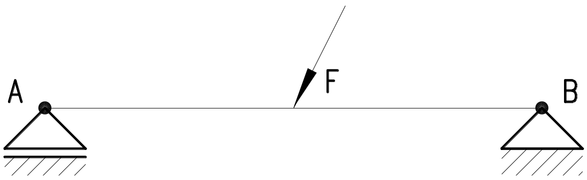
3) Posuvná podpora:



odebíráme 1 stupeň volnosti, zjišťujeme 1 reakci F_{RY}.

Př:

1.

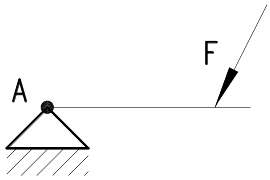


A – 1° volnosti

B – 2° volnosti

3 – 1 – 2 = 0 => je staticky určitý, je v rovnováze.

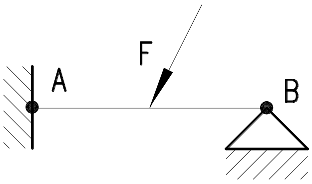
2.



A – 2° volnosti

3 – 2 = 1 > 0 => pohybuje se (mechanismus).

3.

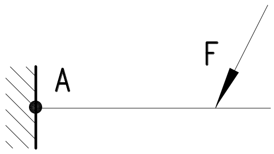


A – 3° volnosti

B – 2° volnosti

3 – 3 – 2 = – 2 < 0 => staticky neurčitý.

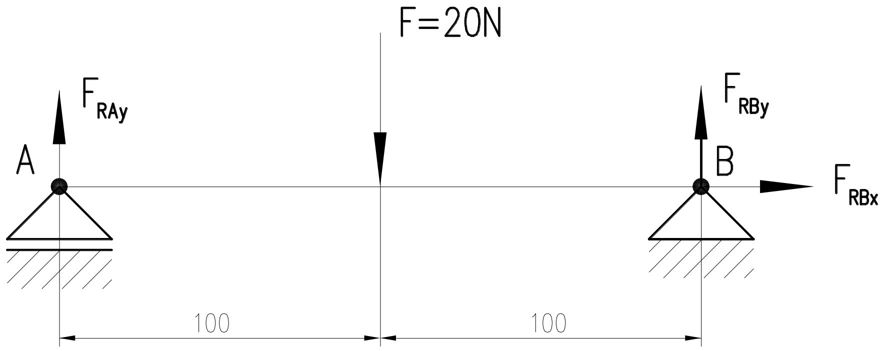
4.



A – 3° volnosti

3 – 3 = 0 => je staticky určitý.

Př: Řešte početně reakce nosníků.



Ve směru osy x: $\sum F_{ix} = 0$

$F_{RBx} = 0$

Ve směru y: $\sum F_{iy} = 0$

$F_{RAy} + F_{RBy} – F = 0$

Momentová rovnováha:

M_A: $\sum \mathrm{M_{iA}} = 0$ $F_{RAy} \cdot 0 + F \cdot 100 – F_{RBy} \cdot 200 + F_{RBx} \cdot 0 = 0$

$F_{RBy} = \frac{F \cdot 100}{200} = \frac{20 \cdot 100}{200} = 10$ N

M_B: $\sum \mathrm{M_{iB}} = 0$ $F_{RAy} \cdot 200 – F \cdot 100 = 0$

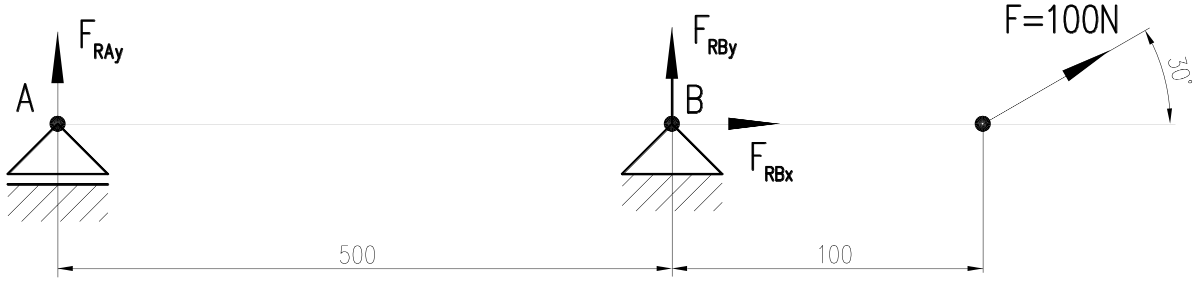
$F_{RAy} = \frac{F \cdot 100}{200} = \frac{20}{2} = 10$ N

Kontrola: $F_{RAy} + F_{RBy} – F = 0$

$F_{RAy} = F – F_{RB} = 20 – 10 = 10$ N

Poznámka: silovou podmínku lze nahradit vhodnou momentovou podmínkou.

Př.:



$F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 866$ N, $F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 500$ N

$\sum F_{ix} = 0$ $\quad F_{RBx} + F_x = 0$

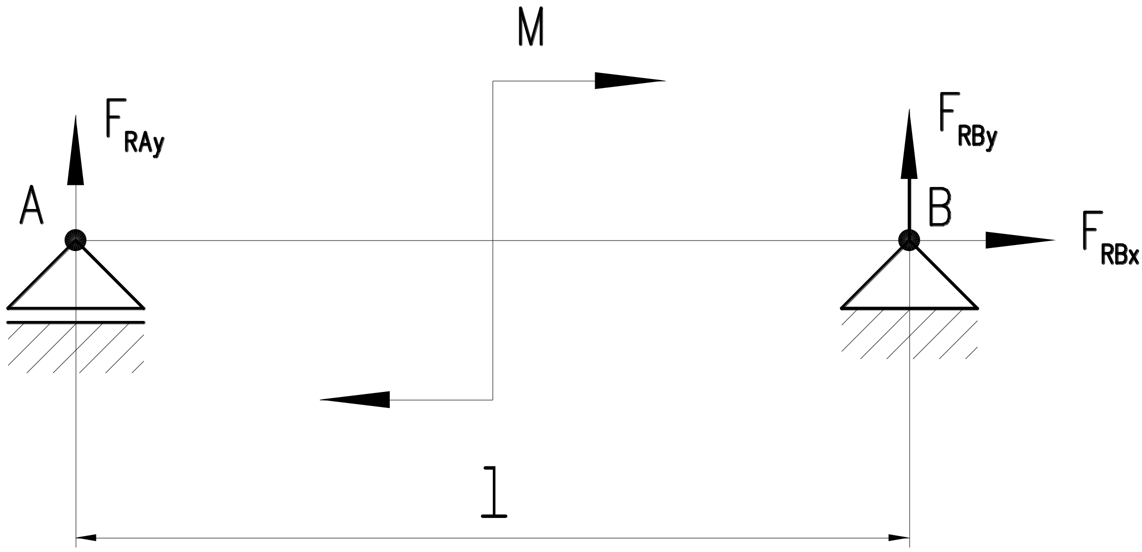
$F_{RBx} = - F_x = - 866$ N => Působí opačným směrem, než jsme uvažovali.

$\sum F_{iy} = 0$ $\quad F_{RAy} + F_{RBy} + F_y = 0 \Rightarrow F_{RBy} = - F_{RAy} - F_y = - 200 - 500 = - 700$N

$\sum M_{iA} = 0$ $\quad F_{RAy} \cdot 500 - F_y \cdot 200 = 0$

$F_{RAy} = \frac{Fy \cdot 200}{500} = \frac{500 \cdot 200}{500} = 200$ N

Př.:



M = 1.500 Nmm

l = 1.000 mm

$\sum F_{ix} = 0$ $\quad F_{RBx} = 0$ N

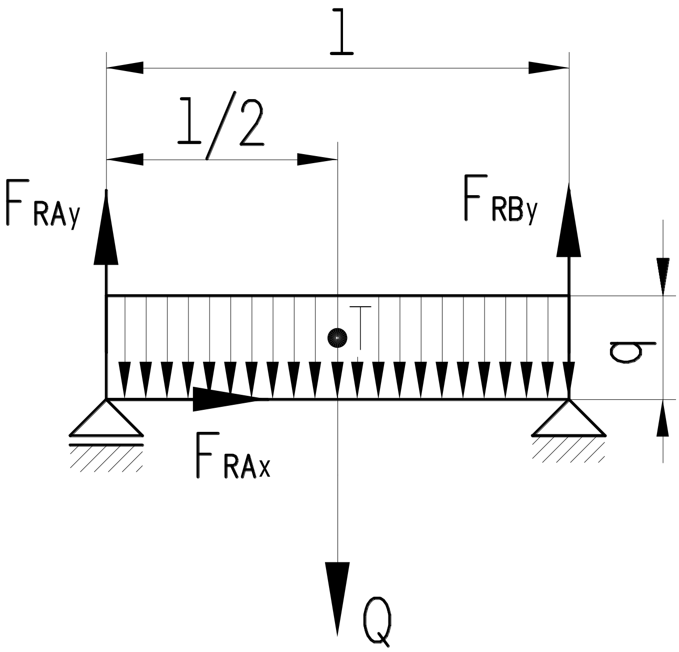
$\sum F_{iy} = 0$ $\quad F_{RAy} + F_{RBy} = 0 \Rightarrow F_{RAy} = - F_{RBy} = - 1{,}5$ N

$\sum M_{iA} = 0$ $\quad M - F_{RBy} \cdot l = 0 \Rightarrow F_{RBy} = \frac{M}{l} = \frac{1500}{1000} = 1{,}5$ N

5.10 Spojité zatížení

Je to zatížení např. od vlastní tíhy nosníků, tedy zatížení, které je rovnoměrně rozložené po určité délce. Velikost tohoto tzv. spojitého zatížení značíme **q** a jednotkou je **N/m**.

Tento nosník počítáme jako nosník zatížený silou **Q** umístěnou do těžiště spojitého zařízení.



Q = q · l

$$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow F_{RAx} = 0\ N$$

$$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow F_{RAy} - Q + F_{RBy} = 0 \Rightarrow F_{RBy} = Q - F_{RAy} = Q - \frac{Q}{2} = \frac{Q}{2}$$

$$\sum M_{iB} = 0 \Rightarrow F_{RAy} \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2} = 0 = F_{RAy} = \frac{Q \cdot \frac{l}{2}}{l} = \frac{Q}{2}$$

Př.: $q = 100\ N/m, l = 2\ m$

$Q = q \cdot l$

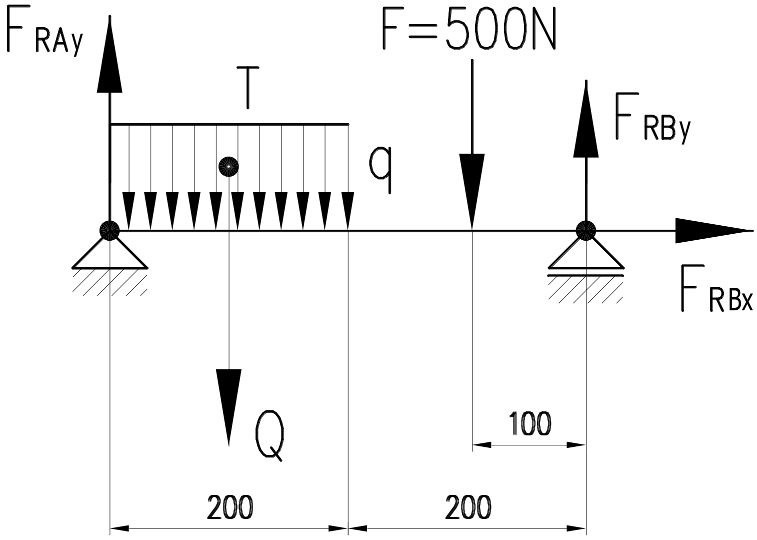
$Q = q \cdot l = 100 \cdot 2 = 200\ N$

$F_{RAx} = 0\ N$

$F_{RAy} = \frac{Q}{2} = \frac{200}{2} = 100\ N$

$F_{RBy} = \frac{Q}{2} = 100\ N$

Př.: $q = 10\frac{N}{mm}$, $l = 200$ mm.



$Q = q \cdot l = 10 \cdot 200 = 2.000\ N$

$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow F_{RBx} = 0$

$\sum F_{iy} = 0$

$F_{RAy} - Q - F + F_{RBy} = 0$

$\Rightarrow F_{RBy} = Q + F - F_{RAy} =$

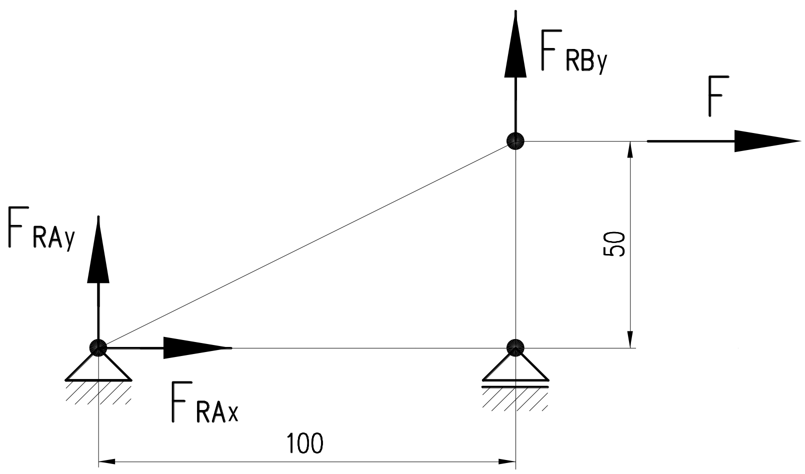
$= 2.000 + 500 - 1.625 = 875\ N$

$\sum M_{iB} = 0$

$F_{RAy} \cdot 400 - Q \cdot 300 - F \cdot 100 = 0$

$\Rightarrow F_{RAy} = \frac{Q \cdot 300 + F \cdot 100}{400} = \frac{2000 \cdot 300 + 500 \cdot 100}{400} = 1.625\ N$

Př.:



$F = 240\ N$

$\sum F_{ix} = 0$

$F_{RAx} + F = 0$

$\Rightarrow F_{RAx} = -F = -240\ N$

$\sum F_{iy} = 0$

$F_{RAy} + F_{RBy} = 0$

$\Rightarrow F_{RAy} = -F_{RBy}$

$F_{RBy} = 120\ N$

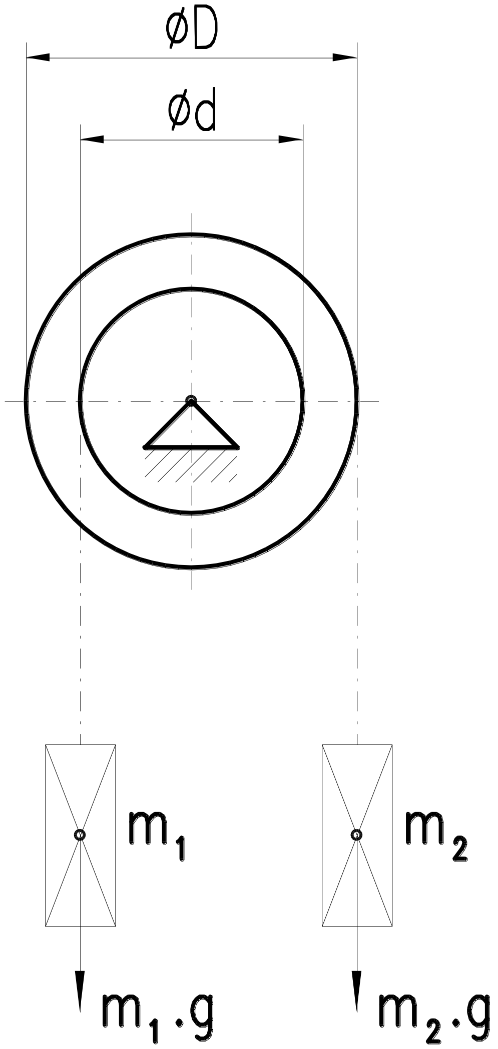
$\sum M_{iB} = 0$

$F \cdot 50 + F_{RAy} \cdot 100 = 0$

$\Rightarrow F_{RAy} = -\frac{F \cdot 50}{100} = -\frac{240 \cdot 50}{100} =$

$= -120\ N$

Př.: Na opakování rovnováhy momentů.



$$\sum M_i = 0$$

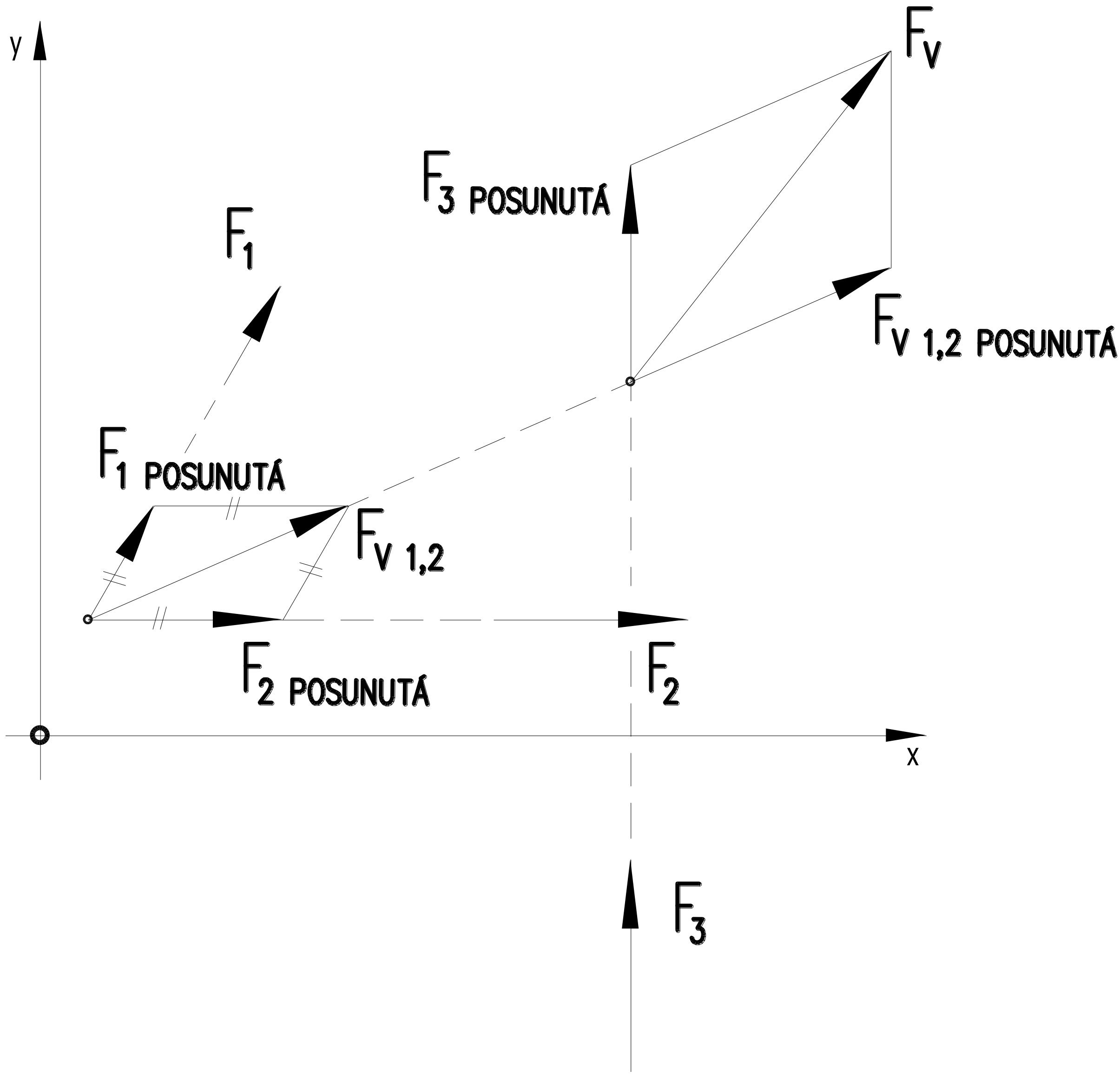
$$m_2 \cdot g \cdot \frac{D}{2} - m_1 \cdot g \cdot \frac{d}{2} = 0$$

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{d}{D}$$

5.11 Grafické řešení výslednice soustavy obecných rovinných sil

5.11.1 Metoda posunutí působiště

Řešíme postupným skládáním sil. Využíváme toho, že sílu můžeme na její nositelce libovolně posouvat, aniž se změní její účinek. Síly si posuneme tak, aby vždy dvě působily v jednom bodě.



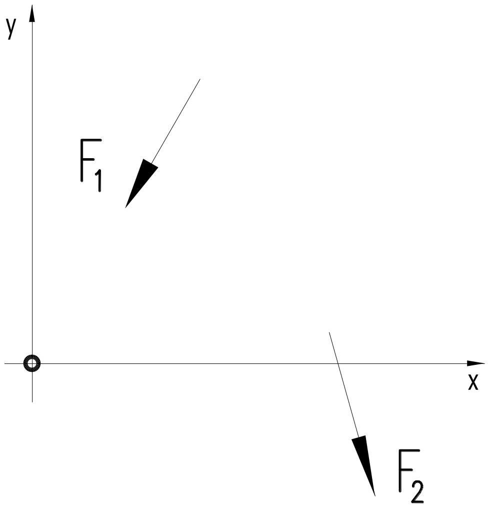
Postup:

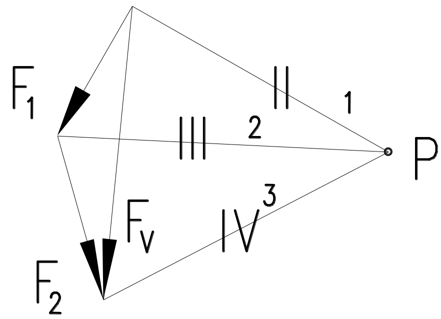
- Posuneme síly F_1, F_2 na svých nositelkách tak, aby měly společné působiště.
- Vyřešíme silovým rovnoběžníkem částečnou výslednicí $F_{V1,2}$.
- Posuneme síly $F_{V1,2}$ a F_3 tak, aby měly společné působiště.
- Vyřešíme výslednici $F_V(F_{V1,2,3})$.

Poznámka: Tento postup nelze použít u rovnoběžných sil, protože jejich průsečík je v nekonečnu.

5.11.2 Metoda postupného rozkládání

Sílu musíme rozložit do dvou směrů, které si libovolně zvolíme. Hledáme výslednici sil F_1, F_2.





Sestrojením silového trojúhelníku určíme výslednici, ale neznáme její polohu.

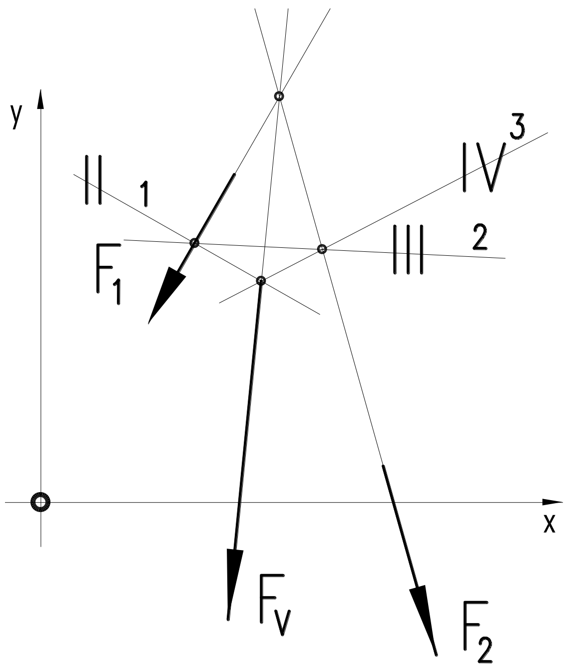
Sestrojíme další dva silové trojúhelníky, které znamenají rozklad síly do dvou směrů.

Sílu:

F_1 do 1, 2

F_2 do 2, 3

Síla F_v je potom automaticky rozložena do směrů 1, 3. Bod, ve kterém se směry protínají, se nazývá **pól**. Obrazci říkáme vláknový obrazec.



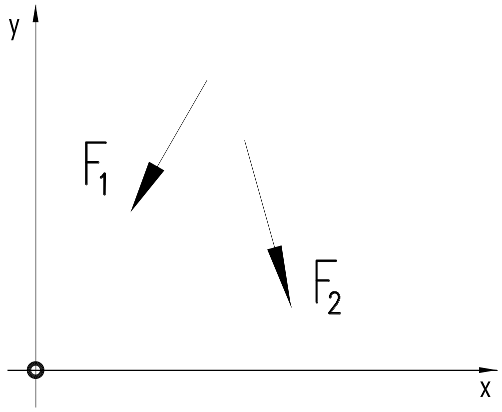
Tento rozklad sil přeneseme zpět do zadání a to takto:

Libovolným bodem síly F_1 vedeme vlákno 1, tam, kde vlákno 1 protne sílu F_1, vedeme vlákno 2. Tam, kde protne vlákno 2 sílu F_2, vedeme vlákno 3. Směry vláken jsou rovnoběžné se směry ve vláknovém obrazci. Výslednice pak musí procházet průsečíkem vláken 1 a 3. Její směr a velikost už známe z vláknového obrazce (silový trojúhelník).

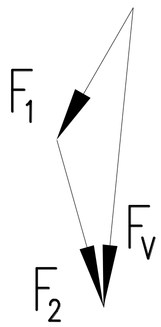
Tomuto řešení říkáme také řešení pomocí vláknového obrazce. V praktickém použití síly v jednotlivých vláknech nezakreslujeme, důležité jsou pouze směry vláken. Lze použít najednou pro více sil (silový mnohoúhelník).

Postup řešení:

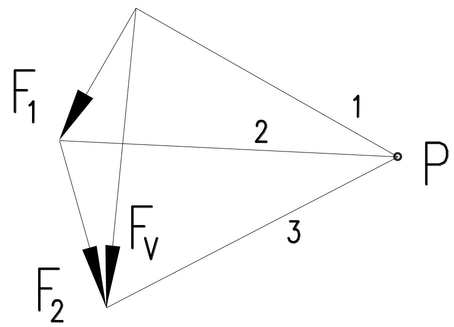
1) Nakreslit zadání.



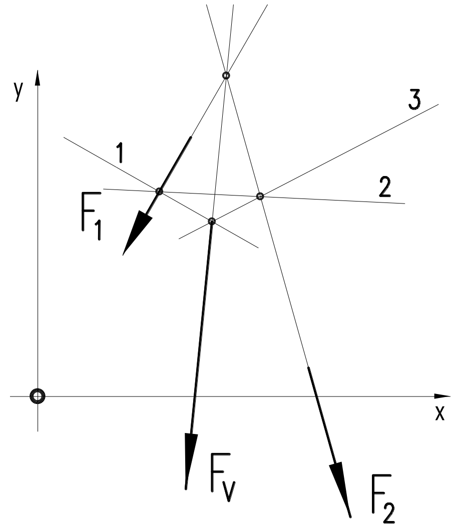
2) Sestrojit silový trojúhelník nebo mnohoúhelník.



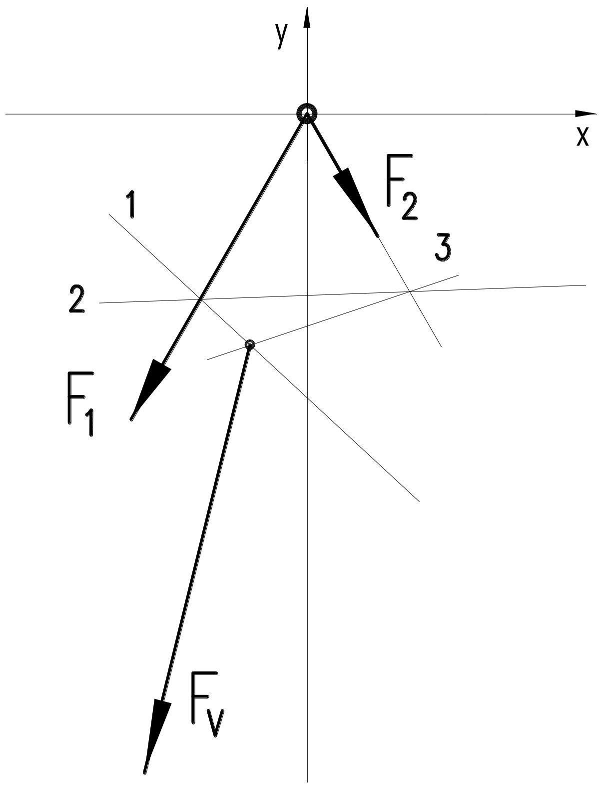
3) Zvolit pól P a sestrojit vlákna.

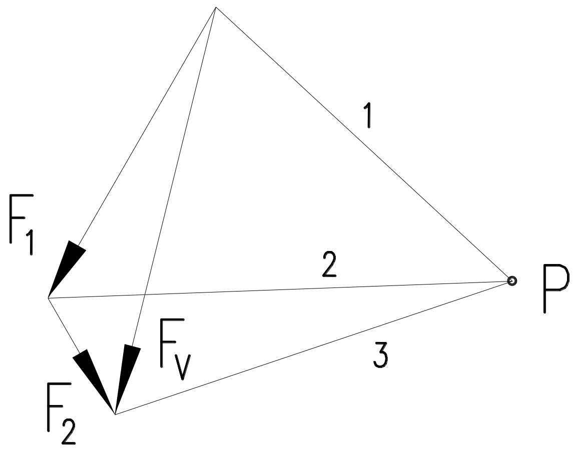


4) Vlákna rovnoběžně postupně převést do zadání tak, aby se příslušná vlákna protínala na příslušné síle. Tím se zjistí poloha výslednice.

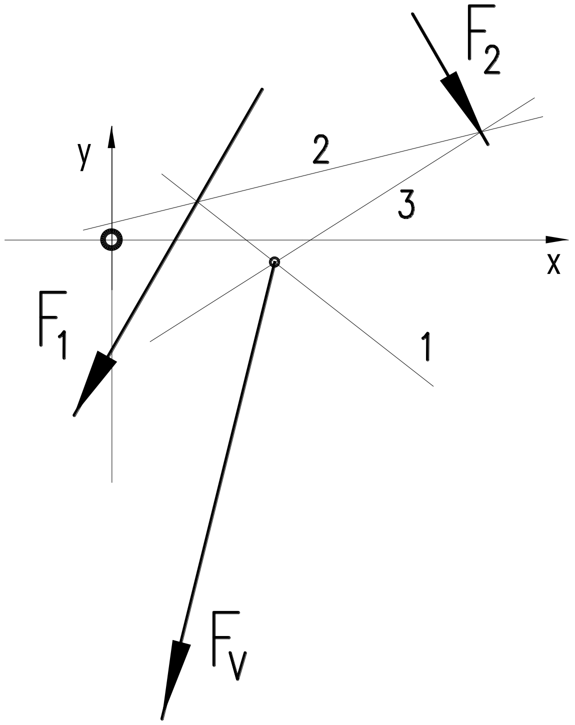


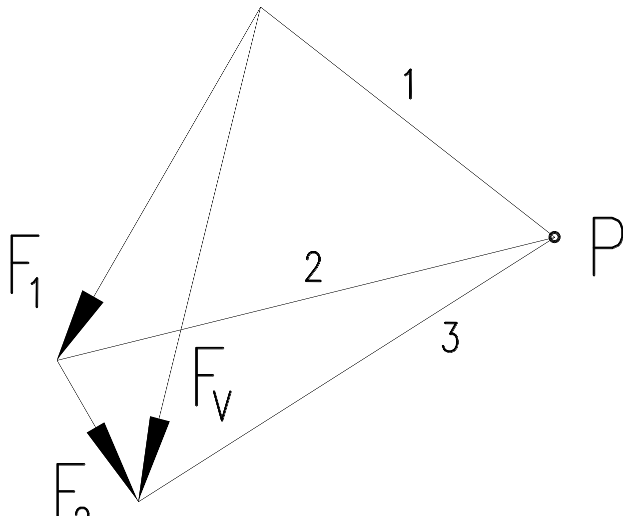
Př.: Určete výslednici vláknovým obrazcem, F_1[0, 0, 240°, 500 N], F_2[0, 0, 300°, 200 N].





Př.: Určete výslednici vláknovým obrazcem, F_1[20, 20, 240°, 500 N], F_2[40, 30, 300°, 200 N].

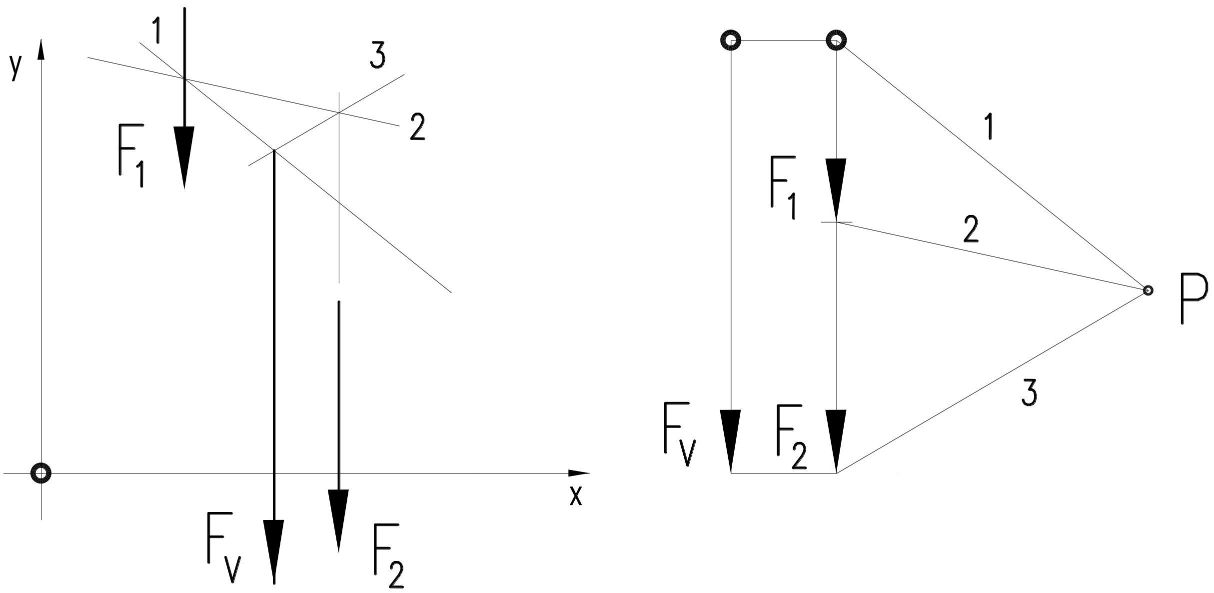




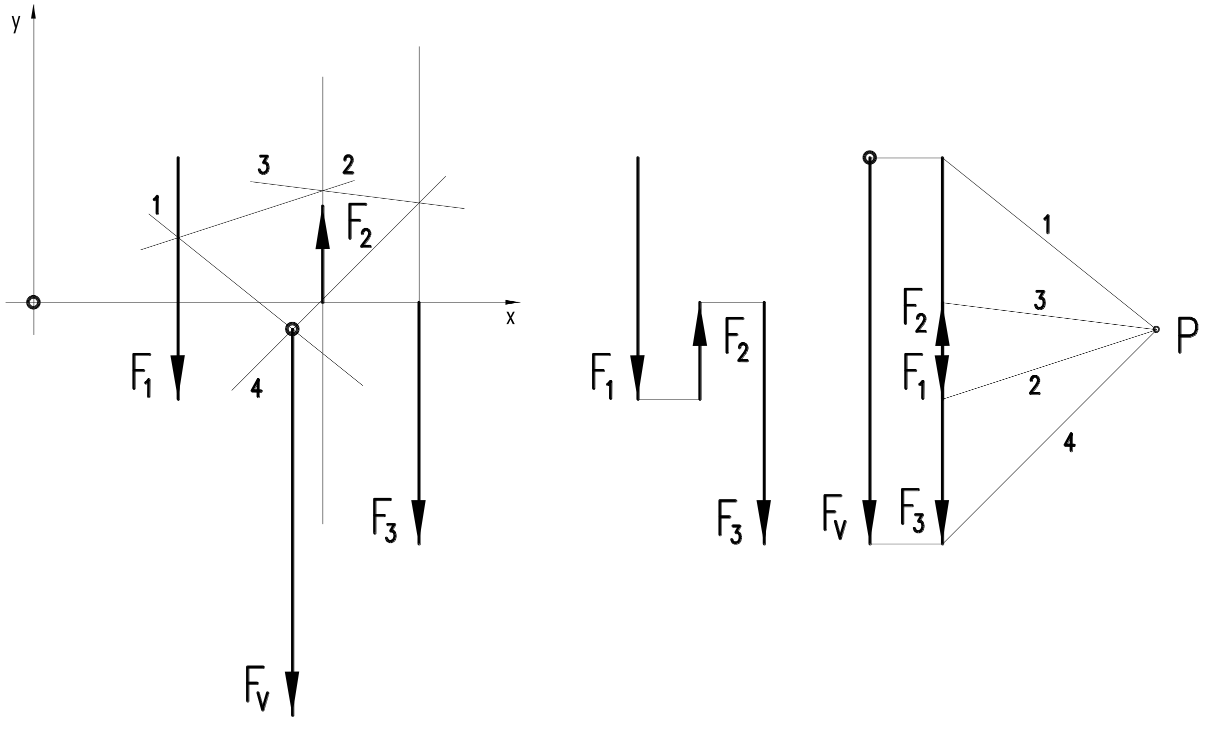
5.11.3 Grafické řešení výslednice rovinné soustavy dvou sil

Lze řešit pouze postupným rozkládáním, tedy vláknovým obrazcem. Silový trojúhelník, nebo mnohoúhelník degeneruje do úsečky.

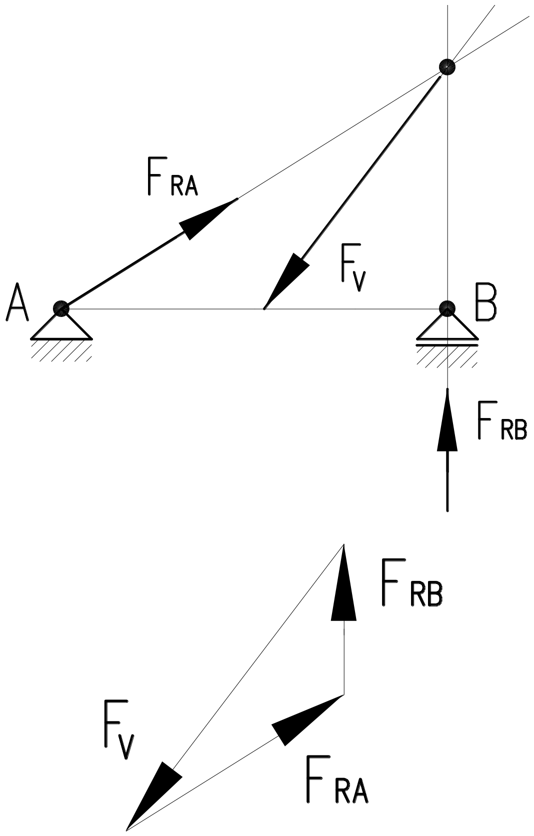
Určení výslednice:



Př.: Vyřešte graficky výslednici: F_1 [30, 30, 270°, 50 N], F_2 [60, 0, 90°, 20 N], F_3 [80, 0, 270°, 50 N].



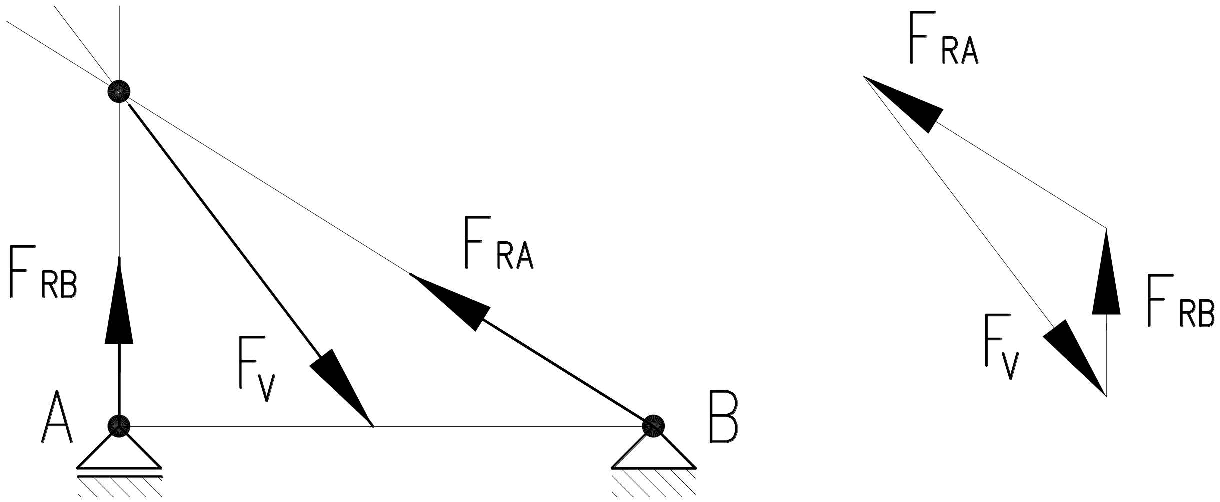
5.11.4 Grafické řešení reakcí nosníků



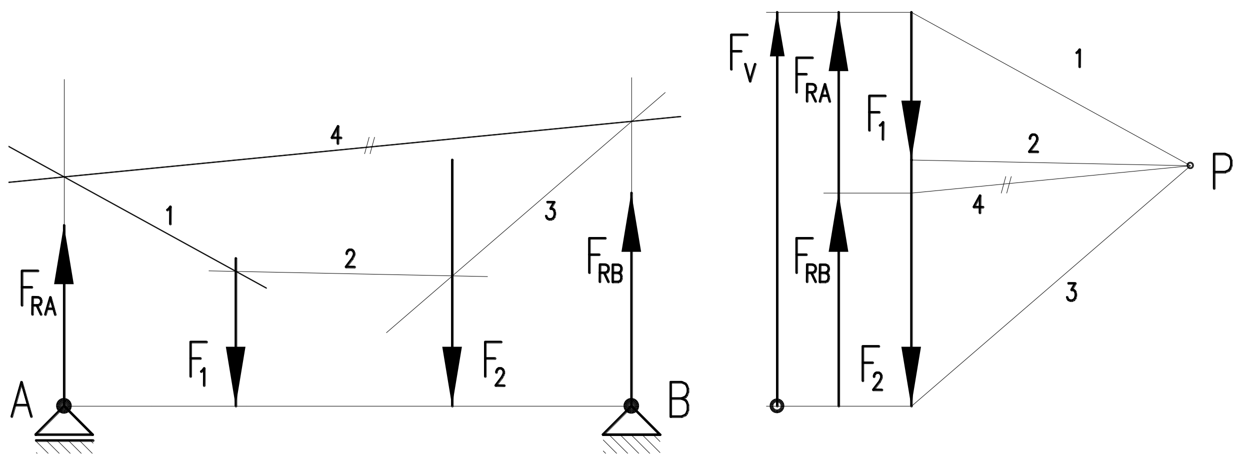
Nejprve určíme výslednici všech akčních sil – F_V.

Působí-li na těleso 3 síly a jsou v rovnováze, musí působit v jednom bodě. Známe směr výslednice F_V a směr reakce v posuvné podpoře F_{RB}. V průsečíku těchto směrů musí procházet reakce pevné podpory F_{RA}. Potom sestrojíme silový trojúhelník a z něj určíme velikost reakcí.

Př.: Určete graficky reakce, F_V = 100 N, 130°.



Př.: Určete graficky reakce, F_1 = 30 N, F_2 = 50 N.



U rovnoběžných sil musíme použít vláknový obrazec pro rozklad výsledné síly. Tam, kde protne vlákno 1 směr A, máme 1. bod pro vlákno 4, které nám určí velikost reakcí. Vlákno 3 a směr B dají 2. bod. Směr tohoto vlákna nám ve vláknovém obrazci rozloží výslednou sílu patřičné reakce. Vlákno č. 3 protíná směr B, tedy od vlákna 3 jde F_{RB}. Obdobně vlákno 1 a směr A.

5.11.5 Prostorová soustava sil

Výslednici sil majících společné působiště řešíme početně obdobně jako v rovině, síly rozkládáme do směrů x, y, z. Z těchto složek určíme výslednici. Grafické řešení je velmi obtížné z důvodu prostorového zobrazení na rovinu papíru. Reakce sil, majících společné působiště, řešíme z podmínek rovnováhy do směrů x, y, z.

$$\sum \mathrm{F_{ix}} = 0$$

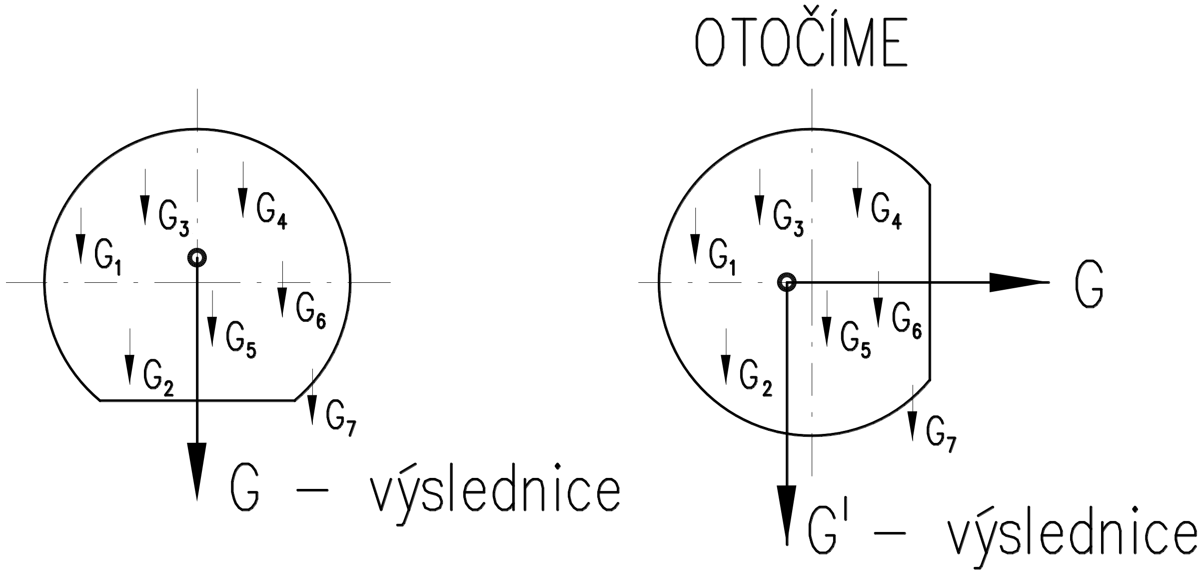
$$\sum \mathrm{F_{iy}} = 0$$

$$\sum \mathrm{F_{iz}} = 0$$

Řešení prostorové soustavy sil, nemajících společné působiště, je ještě obtížnější, musíme používat i tří momentových podmínek.

6 Těžiště

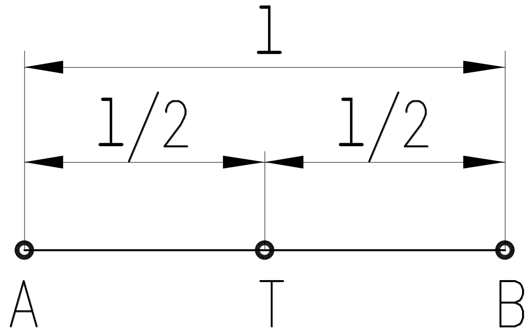
Definice: Těžištěm tělesa nazýváme bod, kterým stále prochází výslednice tíhových sil všech hmotných bodů tělesa, ať těleso natáčíme jakkoliv.



Má–li těleso rovinu nebo osu symetrie, leží na ní i těžiště. Určujeme těžiště čar, ploch a těles.

6.1 Těžiště čar

Využíváme poznatku, že těžiště úsečky je uprostřed.

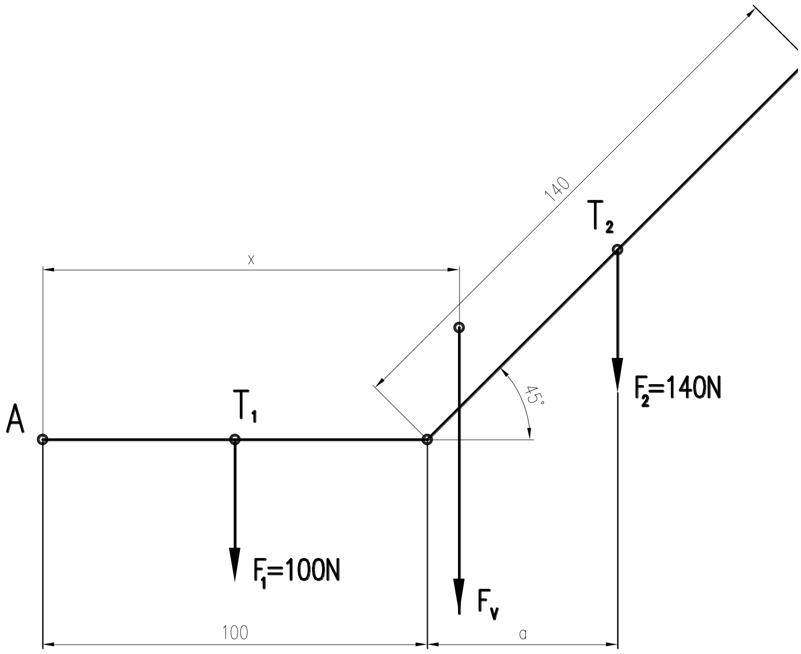


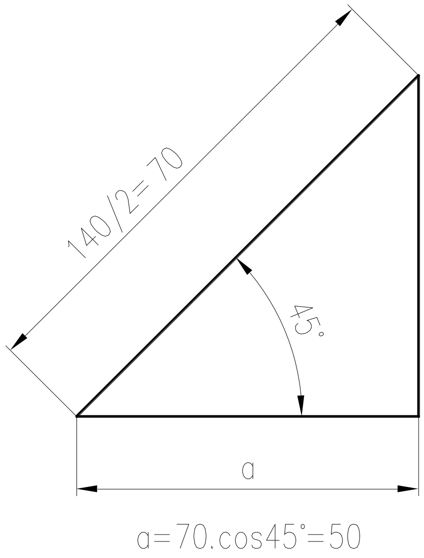
Uvažujeme stále stejný průřez čáry (tyče), pak nám postačí uvažovat pouze její délku.

Postup:

- Čáru rozdělíme na úsečky, případně kruhové oblouky.
- Do těžiště jednotlivých částí zavedeme sílu úměrnou tíze, tedy i jejich délce.
- Určíme výslednici těchto sil.
- Body 2 až 3 opakujeme pro kolmý směr.
- V průsečíku výslednic leží těžiště.

Př.: Určete těžiště tyče a jeho vzdálenost od bodu A.





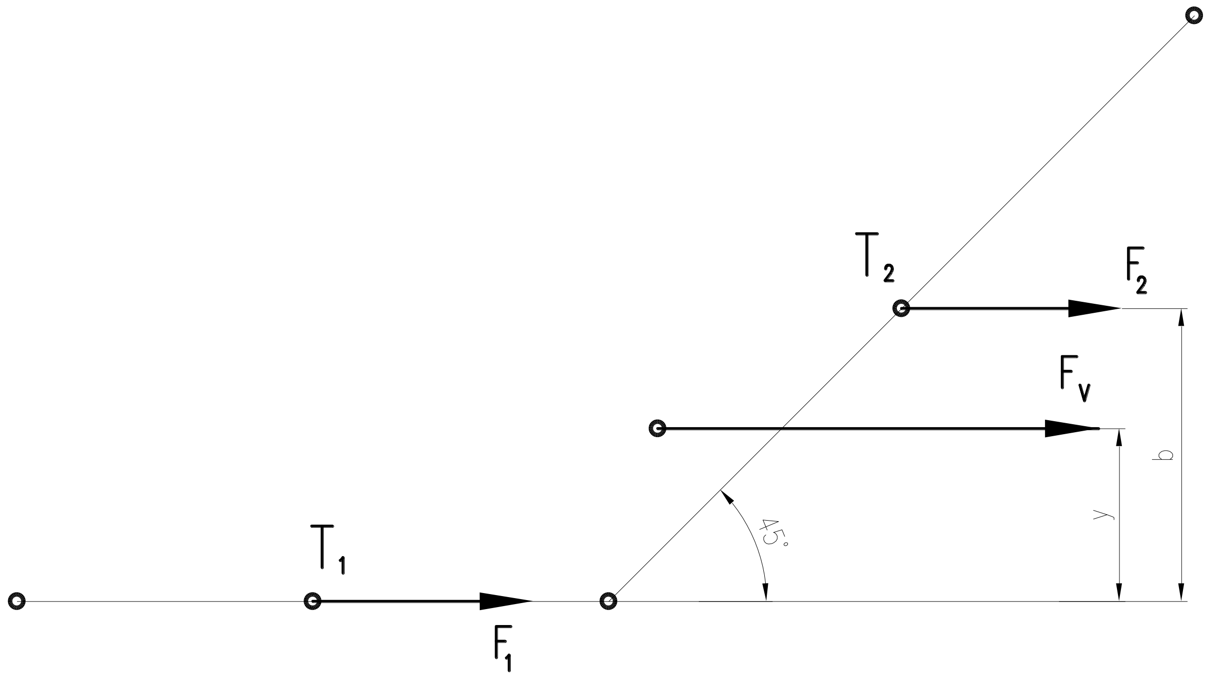
Výslednice: $F_V = F_1 + F_2 = 100 + 140 = 240$ N

Polohu F_V určíme z momentové rovnováhy k bodu A.

$F_V \cdot x = F_1 \cdot 50 + F_2 \cdot 150$ =>

$$x = \frac{100 \cdot 50 + 140 \cdot 150}{240} = 108{,}3\ \mathrm{mm}$$

Totéž pro směr y:



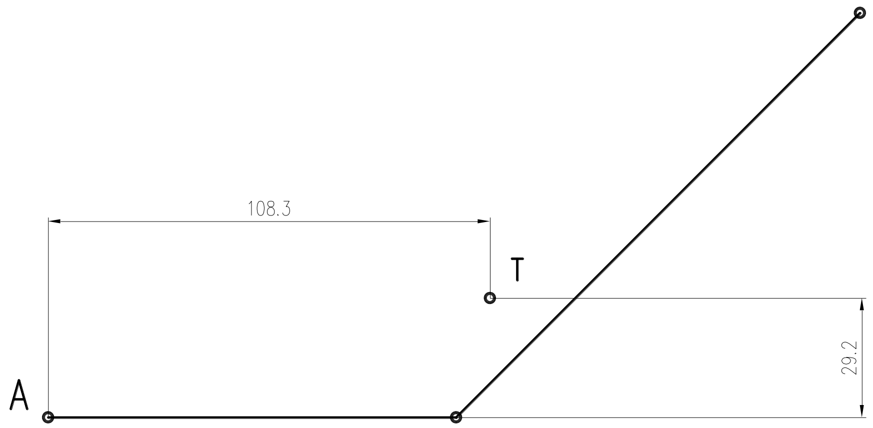
b = 70 · sin 45° = 50 mm

F_V = 240 N

Moment k bodu A:

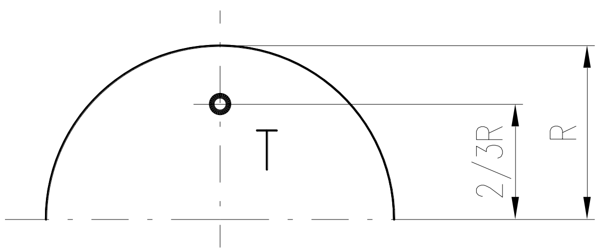
$F_V \cdot y = F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot b \Rightarrow y = \frac{F_2 \cdot b}{F_V} = \frac{140 \cdot 50}{240} = 29{,}2\ \text{mm}$

Výsledek:



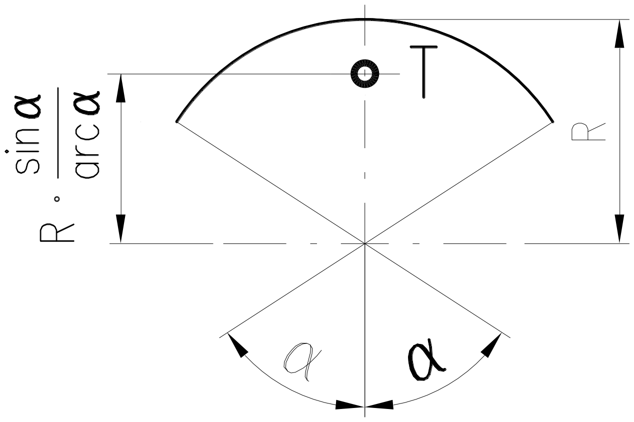
6.2 Těžiště částí kružnice

Půlkružnice.



Kruhový oblouk

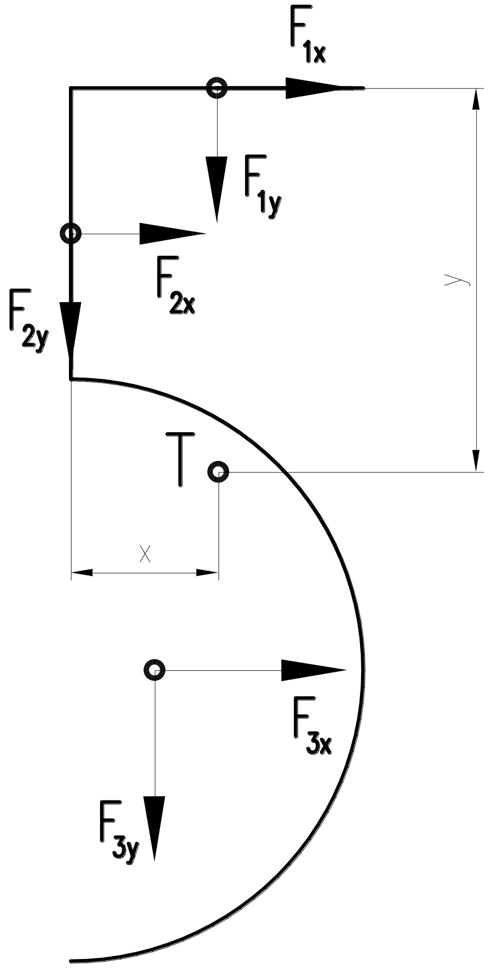
(pouze čára, ne plocha).



arc α je úhel α v radiánech

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^\circ$$

Př.: l_1 = 100 mm, l_2 = 100 mm, r = 100 mm.



F_1 = 100 N

F_2 = 100 N

$F_3 = \pi \cdot r \cong 314$ N

$F_V = F_1 + F_2 + F_3 = 100 + 100 + 314 = 514$ N

Směr x: $F_v \cdot x = F_{1y} \cdot 50 + F_{2y} \cdot 0 + F_{3y} \cdot \frac{2}{3} 100$

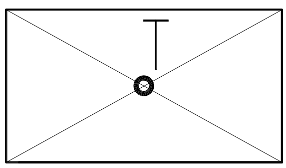
$$x = \frac{100 \cdot 50 + 314 \cdot \frac{200}{3}}{514} = 50{,}5 \text{ mm}$$

Směr y: $F_v \cdot y = F_{1x} \cdot 0 + F_{2x} \cdot 50 + F_{3x} \cdot 200$

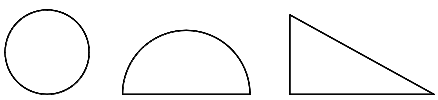
$$y = \frac{100 \cdot 50 + 314 \cdot 200}{514} = 131{,}9 \text{ mm}$$

6.3 Těžiště ploch

Využíváme poznatku, že obdélník má těžiště v průsečíku úhlopříček.



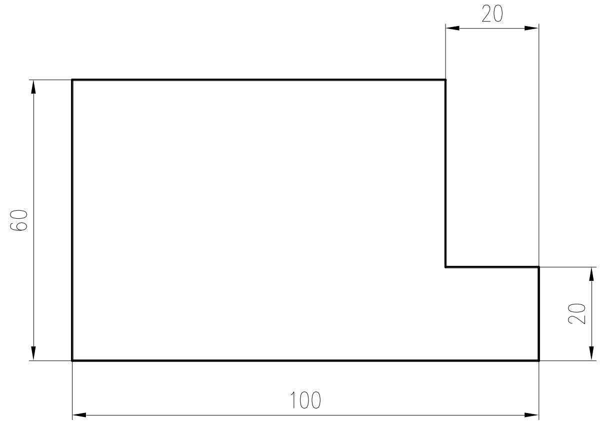
Součást tedy rozdělíme na obdélníky nebo na plochy, kde těžiště umíme určit.

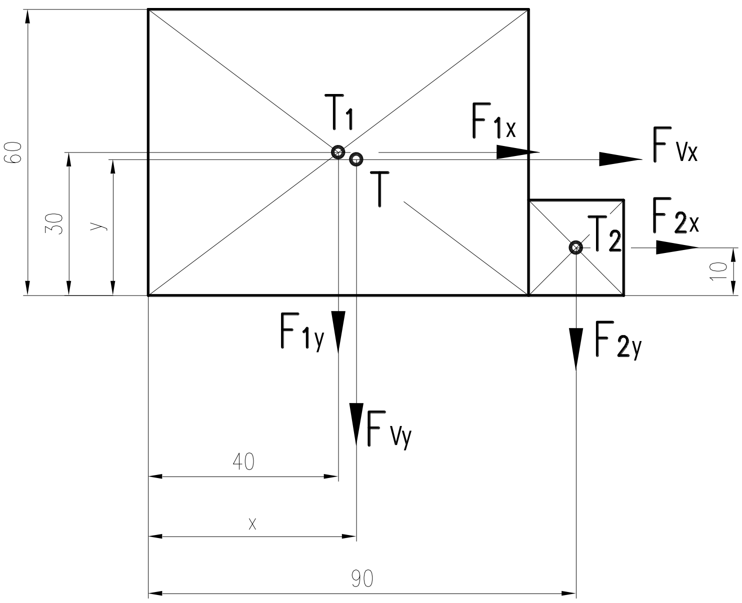


Uvažujeme stálou tloušťku materiálu (plochy), proto mohu pracovat pouze s obsahem plochy.

- Plochu rozdělíme na části, kde těžiště umíme určit.
- Do těžiště jednotlivých částí zavedeme sílu úměrnou jejich obsahu.
- Určíme výslednici těchto sil.
- Body 2 a 3 opakujeme pro druhý směr.

Př.: Určete těžiště:





$F_1 = 60 \cdot 80 = 4.800$ N

$F_2 = 20 \cdot 20 = 400$ N

$F_v = F_1 + F_2 = 4.800 + 400 = 5.200$ N

M_A:

$$F_{Vy} \cdot x = F_{1y} \cdot 40 + F_{2y} \cdot 90$$

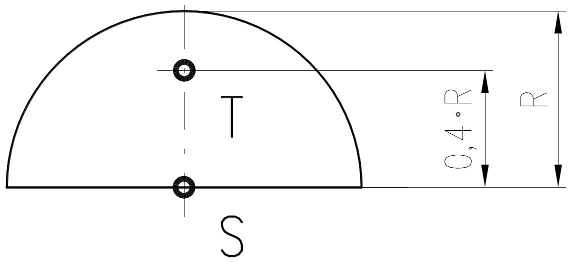
$$x = \frac{4.800 \cdot 40 + 400 \cdot 90}{5.200} = 43{,}8 \text{ mm}$$

$$F_{Vx} \cdot y = F_{1x} \cdot 30 + F_{2x} \cdot 10$$

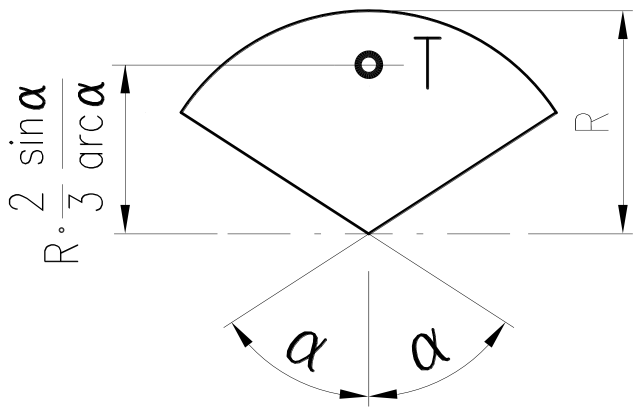
$$y = \frac{4.800 \cdot 30 + 400 \cdot 10}{5.200} = 28{,}5 \text{ m}$$

6.4 Těžiště geometrických ploch

Půlkruh:



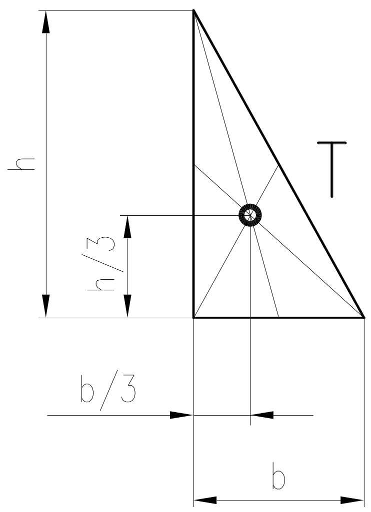
Kruhová výseč:



arc α je úhel α v radiánech

$$\text{arc}\,\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^\circ$$

Trojúhelník:



6.5 Těžiště těles

Postup je stále stejný, jen těžiště musíme určit ve 3 směrech (x, y, z) a jako sílu uvažujeme objem.

7 Stabilita

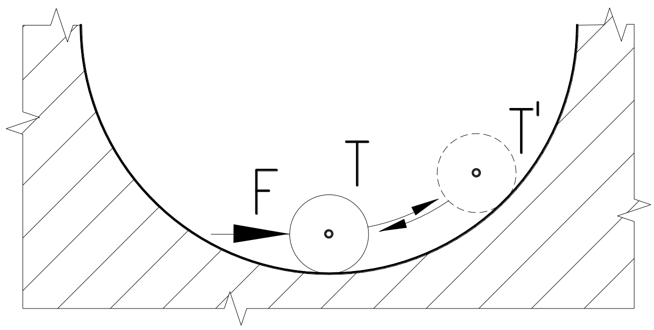
Představa:

Na těleso působí jeho tíha a těleso je v rovnováze. Na toto těleso budeme dále působit silou, která těleso vychýlí z rovnovážné polohy a pak touto silou přestaneme působit.

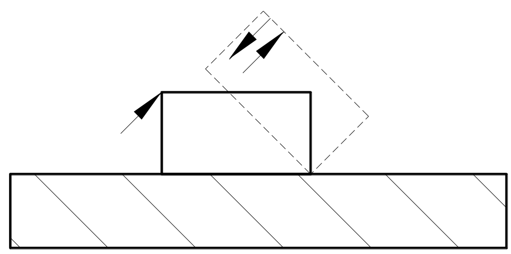
Mohou nastat 3 stavy:

Těleso se vrátí do původní polohy – rovnováha stálá (stabilní). Těžiště je nejvýše v původním stavu.

Kulička v důlku.

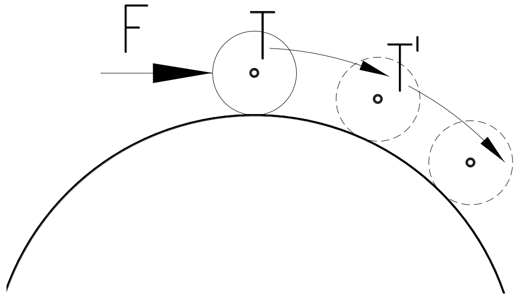


Ležící krychle.

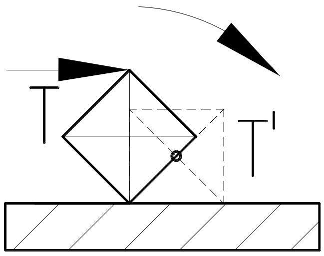


Těleso se pohybuje dál – rovnováha vratká (labilní). Těžiště je stále ve stejné výšce.

Kulička na kopečku.

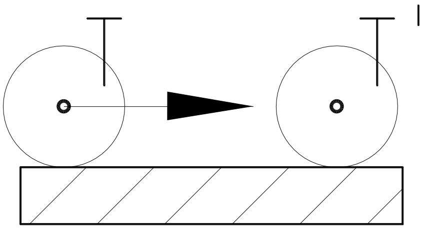


Krychle na hraně.

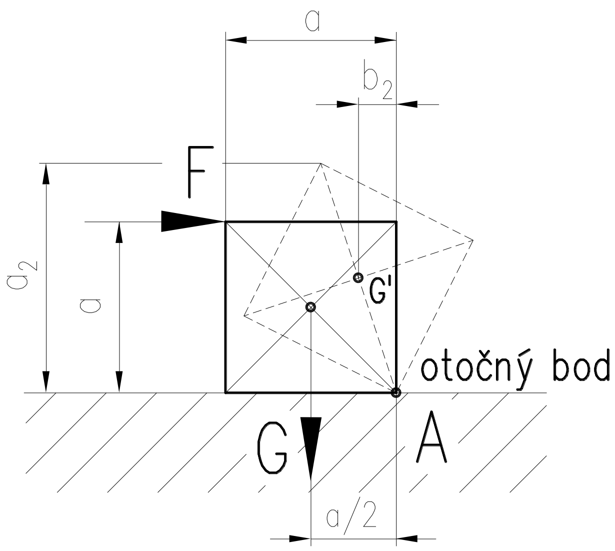


Těleso zůstane v nové poloze – rovnováha volná (indiferentní). Těžiště je stále ve stejné výšce.

Kulička na rovině.



Př.: Jakou silou musím působit, aby se krychle převrátila a kdy se převrátí? G – tíha krychle.

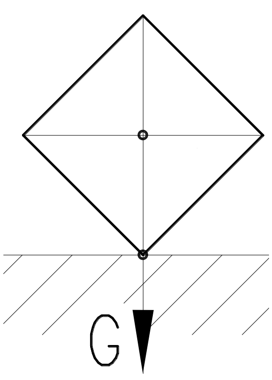


Aby se krychle začala pohybovat, klopný moment F · a musí překonat moment stability $G \cdot \frac{a}{2}$

M_A:

$$F \cdot a = G \cdot \frac{a}{2}$$

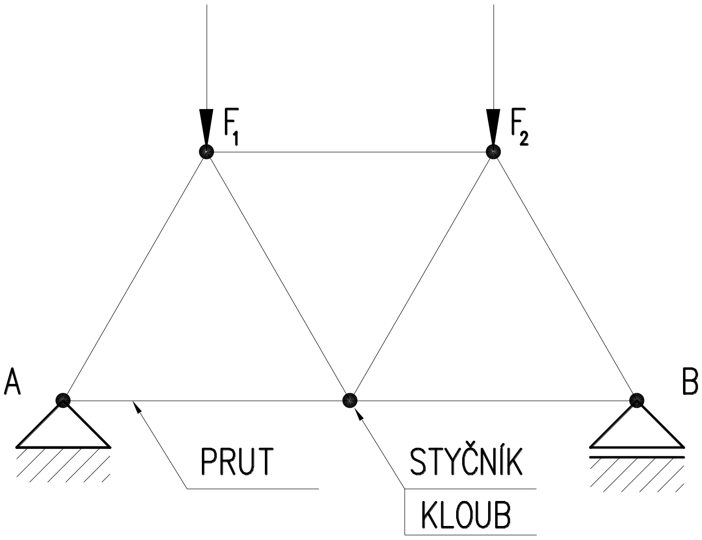
$$F = G \cdot \frac{a}{2a} = \frac{G}{2}$$

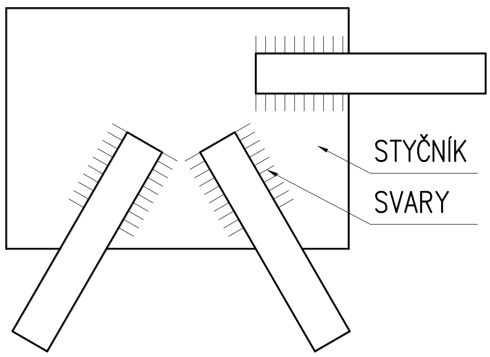


$a_2 > a$, $b_2 < \frac{a}{2}$ => rameno síly F se zvětšuje, rameno tíhy G zmenšuje, budeme tedy potřebovat neustále menší sílu F. Krychle se převrátí, když rameno tíhy G bude nulové, tedy když tíha G bude směřovat do otočného bodu (krychle bude na hraně), pak bude rovnováha labilní.

8 Prutové soustavy

Prutová soustava se skládá z jednotlivých prutů (tyčí), které jsou spolu spojeny ve styčnících svařením nebo nýtováním. Prutové soustavy jsou používané např. na nosné části mostů, lávek, stožárů… Styčníky ve výpočtu nahrazujeme kloubem.



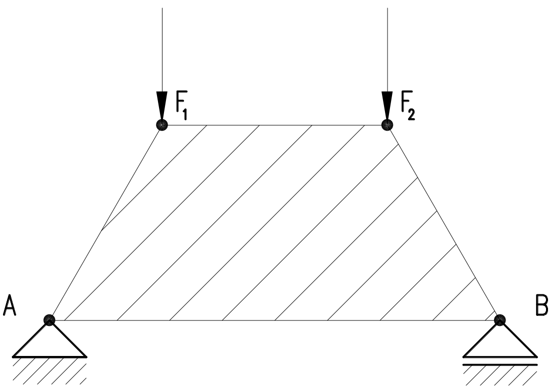


Pro výpočet musí být splněny následující podmínky:

- Síla (i reakce) může být zavedena pouze ve styčníku.
- Pruty musí být podstatně delší než styčník, pak můžeme styčník uvažovat jako kloub.
- Prutová soustava musí být dokonale tuhá, nesmí tvořit mechanismus, obrazce musí být staticky určité, tomu vyhovují trojúhelníky.
- Celá soustava musí být v rovnováze, pak umíme určit reakce.

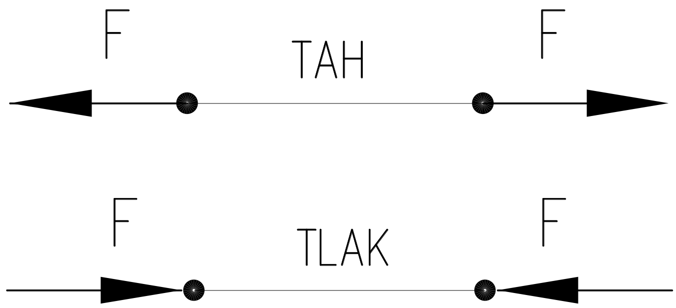
8.1 Určení reakcí:

Prutovou soustavu uvažujeme jako celek. Prutová soustava je v rovnováze, tedy umíme vypočítat reakce z podmínek rovnováhy.



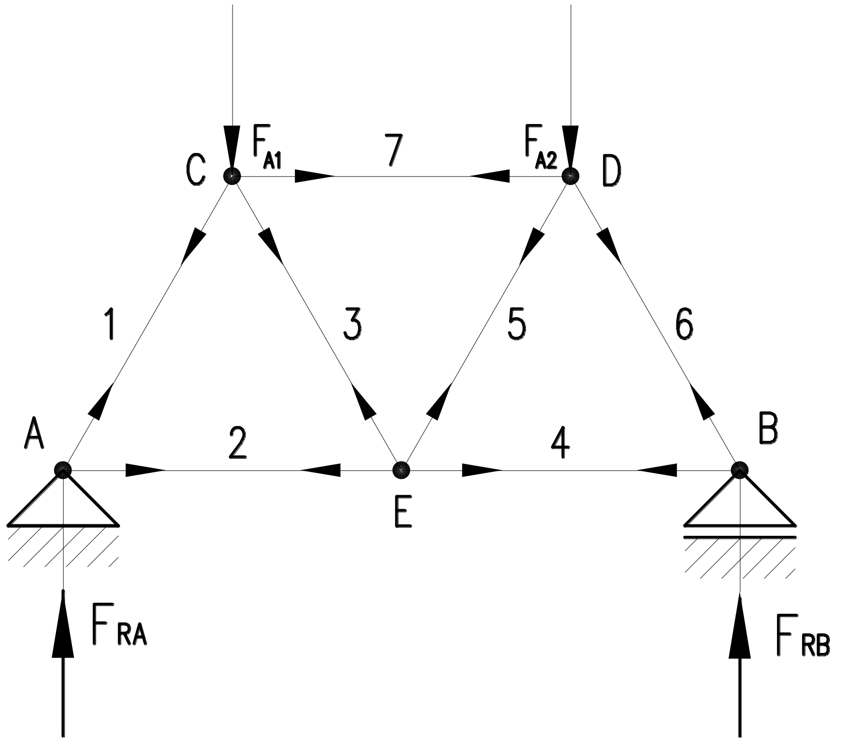
8.2 Namáhání prutů

Pruty jsou v rovnováze. Mohou být namáhány pouze tlakem nebo tahem.



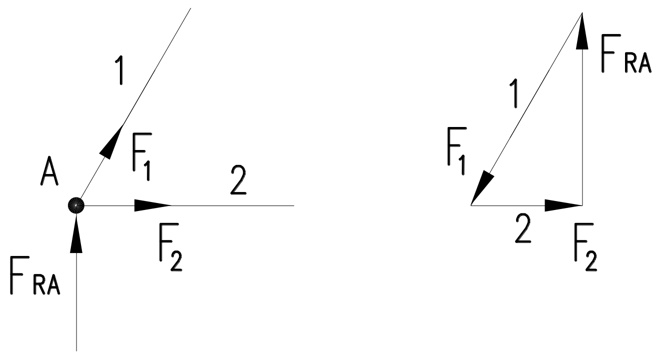
8.3 Namáhání styčníků

Ve styčnících musí být splněny podmínky rovnováhy $\sum \mathrm{F_i} = 0$.



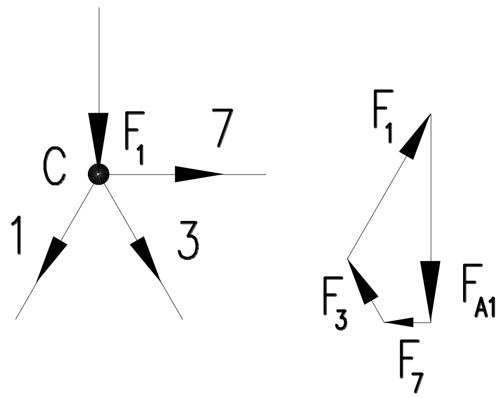
Například styčník A:

F_{RA} rozložíme do směrů 1, 2.

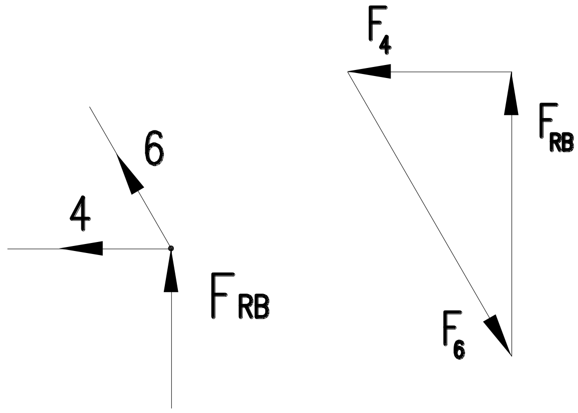


Šipky znázorňují směr síly působící z prutu na styčník. Tedy prut 2 namáhá styčník A tahem, prut 1 tlakem (ale namáhání prutu je opačné).

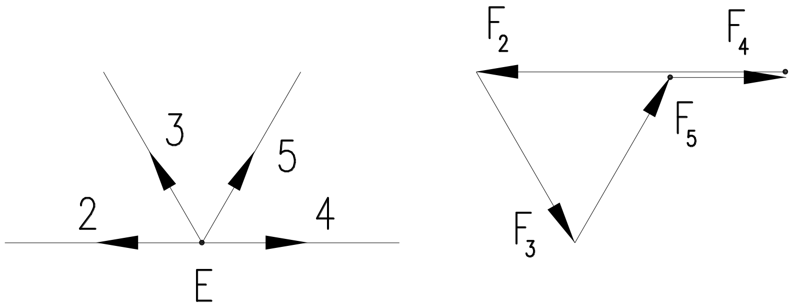
Styčník C – řešíme pruty 3,7



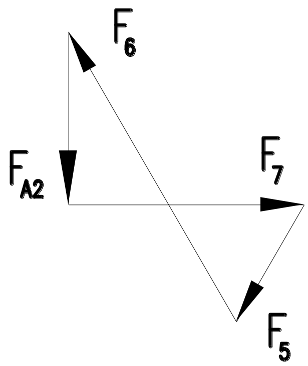
Styčník B řešíme pruty 6



Styčník E – řešíme pruty 4, 5



Styčník D (kontrola – nemusíme provádět)



Poznámka: V každém styčníku umíme určit pouze 2 neznámé síly. Musíme tedy řešit nejprve takové styčníky, kde máme jen 2 neznámé síly. Proto nelze začít styčníky C, D, E.

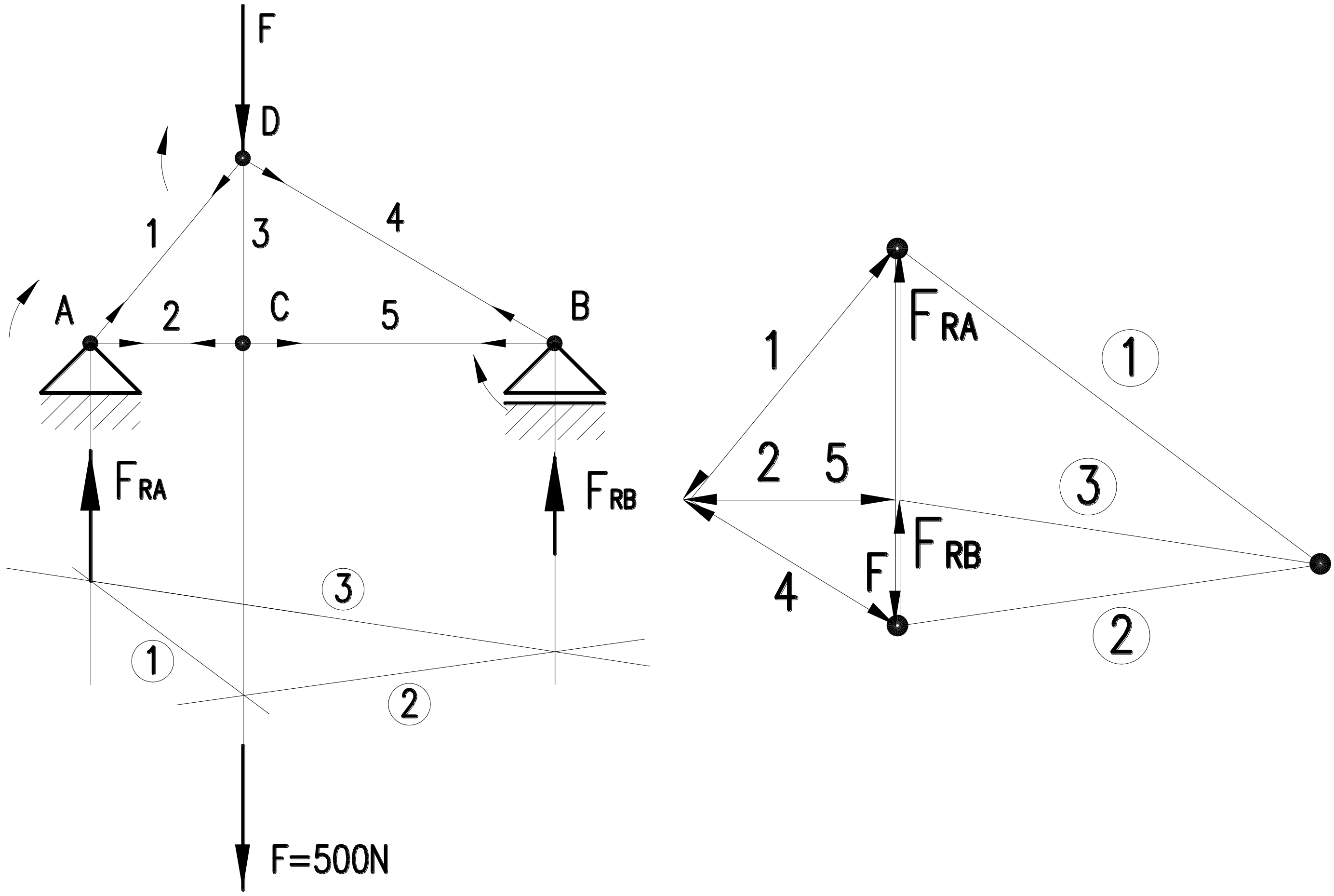
8.3.1 Grafické řešení

Metoda styčníková.

Vychází z podmínek rovnováhy v jednotlivých styčnících (síly o společném působišti). Řešení rovnováhy styčníků v předchozím případě bylo vlastně řešení metodou styčníkovou. Všechny styčníky lze graficky řešit v jediném obrazci, kterému říkáme **Cremonův obrazec**.

Postup řešení:

- Stanovíme reakce.
- Stanovíme smysl obcházení ve styčníku.
- Začneme styčníkem, kde máme jen 2 neznámé síly.
- Pokračujeme dalším styčníkem, kde jsou další 2 neznámé síly.
- Atd…



Síly v prutech, pruty, které tlačí do styčníku jsou záporné (–) tlak, pro tah jsou pak kladné (+).

1. – 420 N

2. + 300 N

3. + 500 N

4. – 360 N

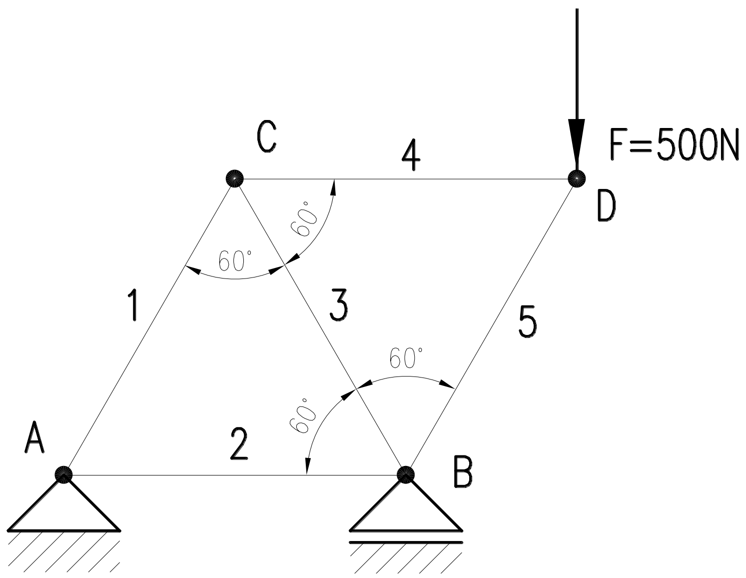
5. + 300 N

8.3.2 Početní řešení

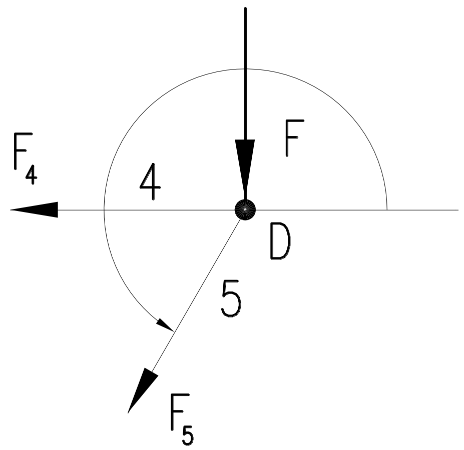
8.3.2.1 Metoda styčníková

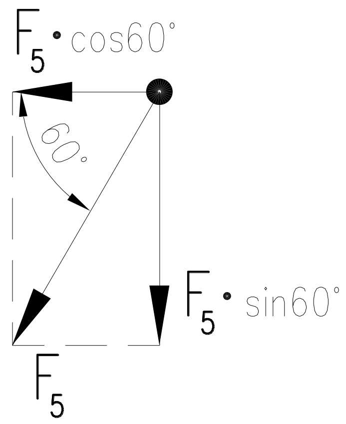
Podmínky rovnováhy v jednotlivých styčnících řešíme místo graficky početně. Jsou to síly působící v jednom bodě, máme tedy k dispozici dvě podmínky rovnováhy ($\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$). U neznámých sil v prutech předpokládáme, že jsou tahové, když vyjdou záporně, budou tlakové.

Př.: Určete početně síly v prutech 4 a 5.



Styčník D





$$\sum F_{ix} = 0$$

$$-F_4 - F_5 \cdot \cos60° = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$F + F_5 \cdot \sin60° = 0$$

$$F_5 = -\frac{F}{\sin60°} = -577N$$

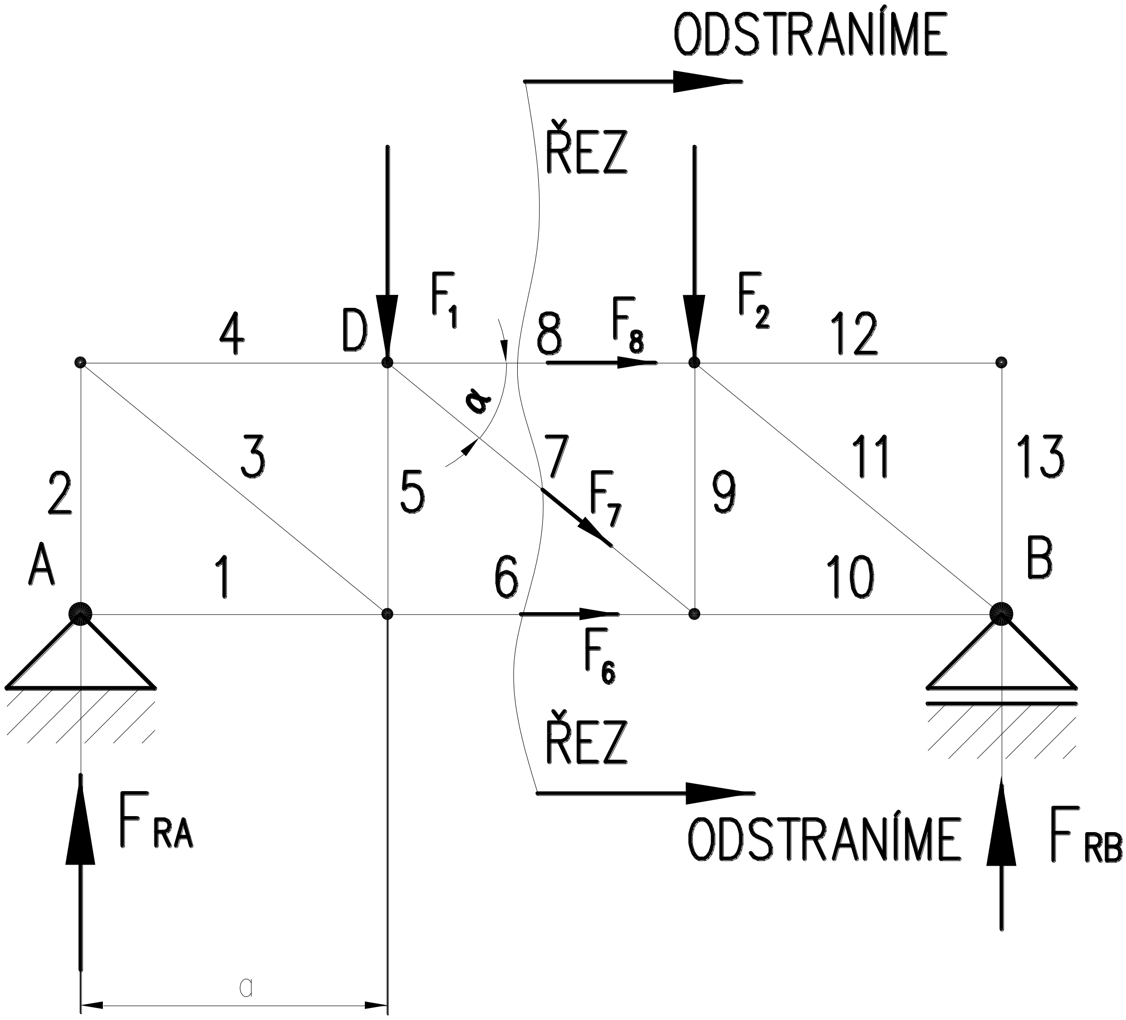
$$F_4 = -F_5 \cdot \cos60° = 577 \cdot \cos60° = 288\ N$$

Tato metoda je velmi zdlouhavá a náchylná k chybám.

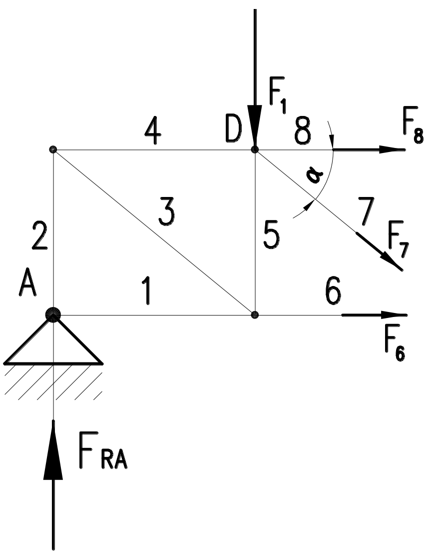
8.3.2.2 Metoda průsečná

Prutovou soustavu přerušíme myšleným řezem nejvýše ve 3 prutech, z nichž pouze 2 pruty s neznámými silami smí vycházet z jednoho styčníku. Pak při řešení můžeme použít všech 3 podmínek

$\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$, $\sum M_i = 0$. Řešíme pak rovnováhu jedné části řezu, druhou část nahradíme silami v prutech.



Prutovou soustavou rozdělíme na 2 části. Aby 1. část byla v rovnováze, musíme zavést vazební síly v přerušených prutech. Dále musí platit 3 podmínky rovnováhy.



$F_{7x} = F_7 \cdot \cos\alpha$

$F_{7y} = F_7 \cdot \sin\alpha$

$\Sigma F_{ix} = 0$

$F_8 + F_7 \cdot \cos\alpha + F_6 = 0$ => F_8

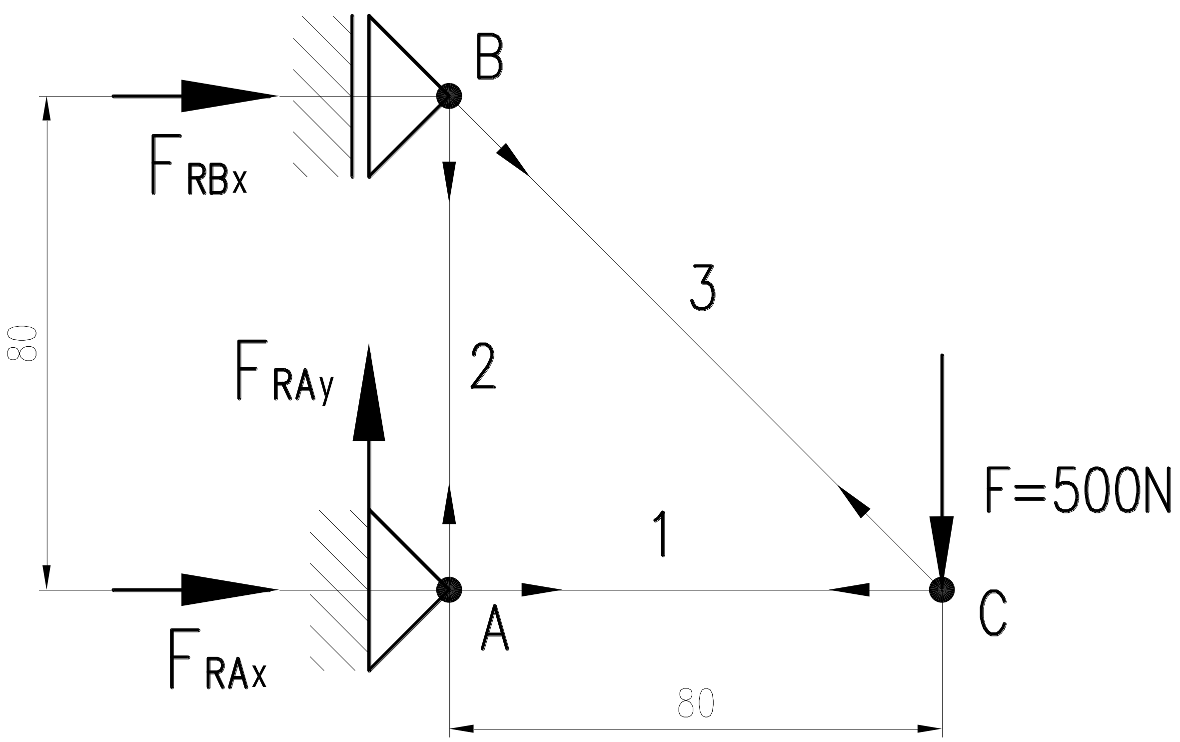
$\Sigma F_{iy} = 0$

$F_{RA} - F_1 - F_{7y} = 0$ => F_7

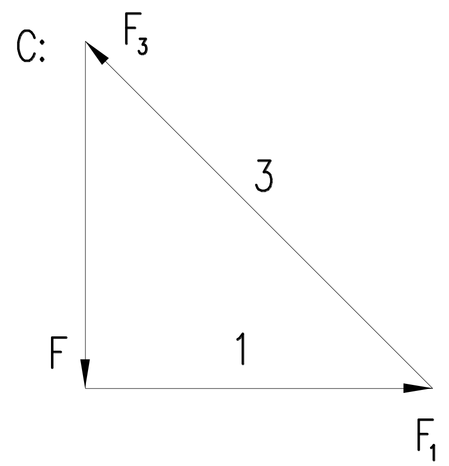
$\Sigma M_{iD} = 0$

$F_{RA} \cdot a - F_6 \cdot b = 0$ => F_6

Př.:



C:



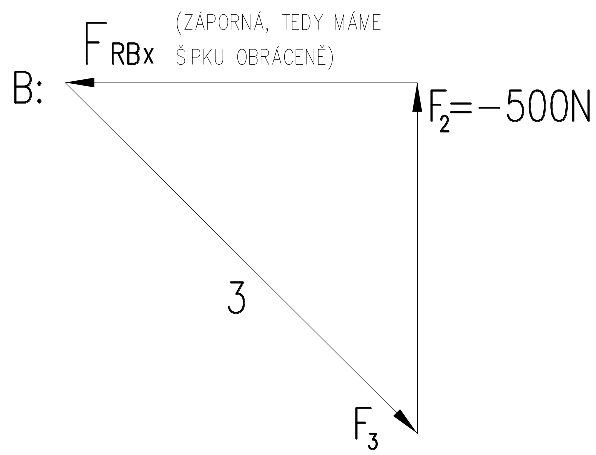
$F_1 = 500$ N

$F_3 = 700$ N

$\Sigma M_{i1} = 0$

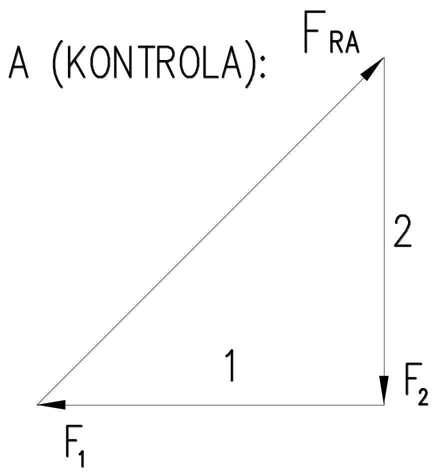
$F_{RBx} \cdot 80 + F \cdot 80 = 0 \Rightarrow F_{RBx} = -F = -500$ N

B:



$F_2 = -500$ N

A:



$\Sigma F_{ix} = 0$

$F_{RBx} + F_{Rax} = 0$

$F_{Rax} = - F_{RBx} = - (- 500) = 500$ N

$\Sigma F_{iy} = 0$

$F_{Ray} = - F = 0$

$F_{Ray} = F = 500$ N

$F_{RA} = \sqrt{{F_{RAx}}^2 + {F_{RAy}}^2} = \sqrt{500^2 + 500^2} = 707 \text{ N}$

Styčníková metoda:

C: $\Sigma F_{ix} = 0$

$F_1 + F_{3x} = 0$

$F_1 = - F_{3x} = - 500$ N

$\Sigma F_{iy} = 0$

$F - F_{3y} = 0 \Rightarrow F_{3y} = F = 500$ N

$F_3 = \frac{F_{3y}}{\cos 45°} = \frac{500}{\cos 45°} = 707 \text{ N}$

$F_{3x} = F_3 \cdot \cos 45° = 707 * \cos 45° = 500$ N

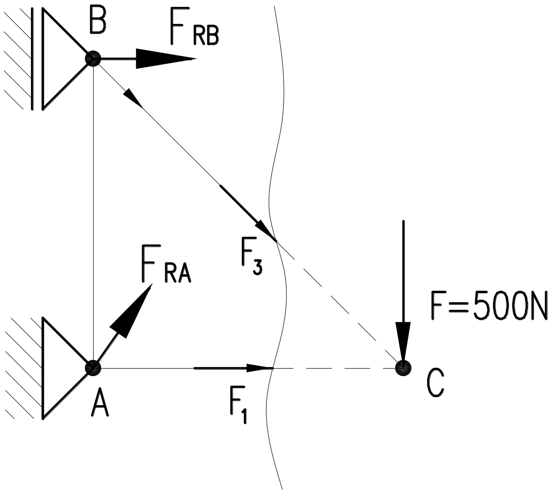
B: $F_{RB} + F_{3x} = 0$

$F_{RB} = - F_{3x} = - 500$ N

$F_2 - F_{3y} = 0$ N

$F_2 = F_{3y} = 500$ N

Průsečná metoda:



$\Sigma F_{ix} = 0$

$-F_{RB} - F_{RAx} - F_{3x} - F_1 = 0$

$\Sigma F_{iy} = 0$

$F_{RAy} - F_{3y} = 0$

$\Sigma M_i = 0$

$M_i = F_{RB} \cdot 80 + F_{3x} \cdot 80 = 0$

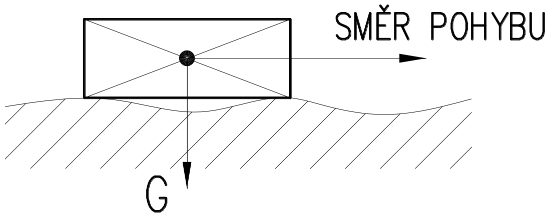
$F_{3x} = -F_{RB} = -(-500) = 500\ N$

$F_1 = -F_{RB} - F_{RAx} - F_{3x} = -(-500) - 500 - 500 = -500\ N$

$F_{3y} = F_{RAy} = 500\ N$

9 Statika jednoduchých mechanismů s pasivními odpory

K rovnoměrnému pohybu musíme ve skutečnosti vynaložit více síly, protože překonáváme tzv. **pasivní odpory**. Pasivní odpory jsou obvykle způsobeny povrchovými nerovnostmi pohybujícího se tělesa i podložky. Tyto nerovnosti brání tělesu v pohybu (drhnou o sebe). Takovému odporu říkáme **tření**.

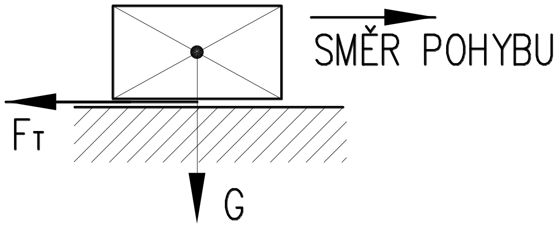


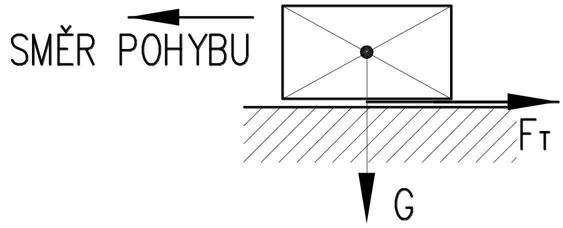
Pasivní odpory:

- Smykové tření.
- Čepové tření.
- Vláknové tření.
- Odpor při valení.

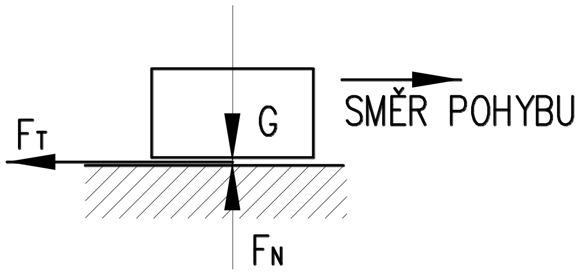
9.1 Smykové tření

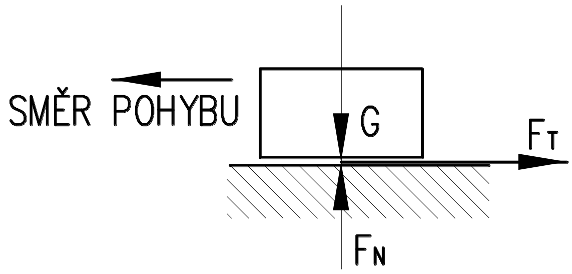
Při smykovém tření vzniká ve stykové ploše tzv. **třecí síla F_t**. Třecí síla působí vždy **proti pohybu**.

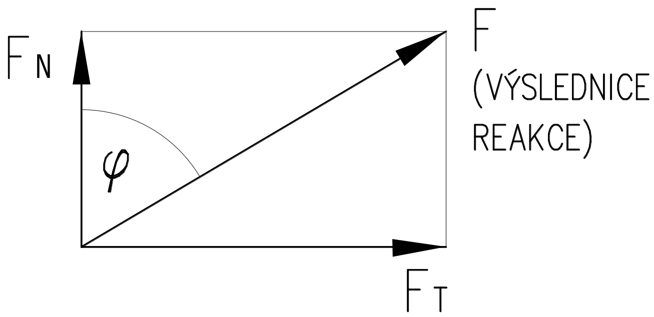




Pokusy se dá dokázat, že třecí síla závisí na normálné síle F_N, kterou jsou plochy přitlačovány k sobě (reakce na tíhu G) a na tzv. **součiniteli smykového tření f**.







$$\frac{F_t}{F_n} = \operatorname{tg} \varphi = f$$

φ – třecí úhel

Třecí sílu pak vypočteme z rovnice:

$\mathbf{F_t = F_n \cdot f}$ podmínka smykového tření

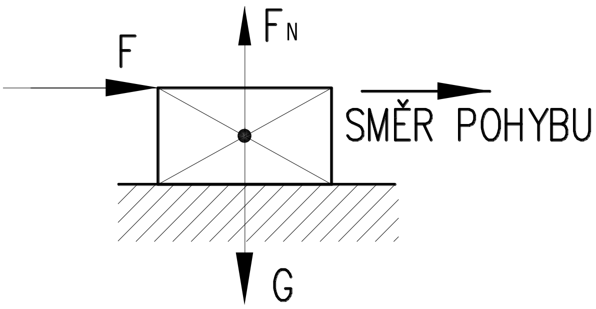
Součinitel smykového tření f závisí na materiálu třecích ploch, kvalitě jejich obrobení a na jejich mazání. Mazání nám tření velmi snižuje (vzniká olejový film), tedy součinitel smykového tření f klesá. Hodnoty součinitele smykového tření f najdeme ve strojnických tabulkách (někdy označeno μ).

Poznámka: Součinitel smykového tření f bývá za klidu poněkud větší, než za pohybu.

9.2 Pohyb tělesa po vodorovné rovině

Jakou potřebuji hnací sílu F?

Bez tření:



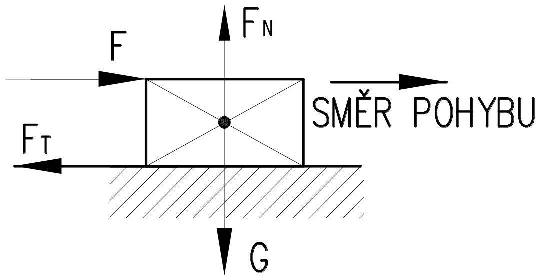
Podmínky rovnováhy:

$\Sigma F_{ix} = 0 \Rightarrow F = 0$

$\Sigma F_{iy} = 0 \Rightarrow F_N = G$

2 rovnice, 2 neznámé F, F_N

S třením:



Podmínky rovnováhy:

$\Sigma F_{ix} = 0 \Rightarrow F = F_t$

$\Sigma F_{iy} = 0 \Rightarrow F_N = G$

2 rovnice, 3 neznámé F, F_t, F_N.

Jako další rovnici použijeme podmínku smykového tření.

$F_t = F_N \cdot f$

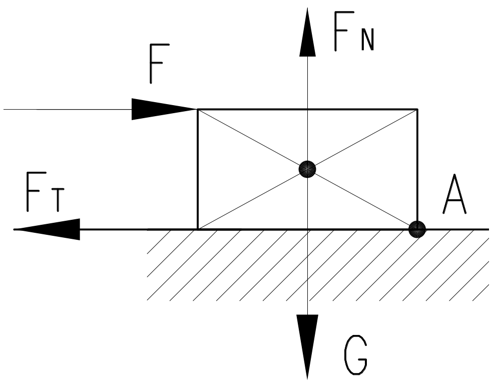
Po dosazení:

$F = F_t = F_N \cdot f = G \cdot f$

Závěr:

- $F < F_t$ – těleso se nebude pohybovat.
- $F = F_t$ – těleso se bude pohybovat rovnoměrně.
- $F > F_t$ – těleso se bude pohybovat zrychleně.

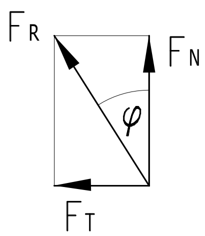
Př: Ocelový hranol o tíze 340 N leží na litinové podložce. Vypočtěte sílu F, kterou musíme hranol tlačit, aby se začal pohybovat. Podložka je znečištěna olejem.



$f = 0{,}13 \div 0{,}27$; bereme 0,2.

$\Sigma F_{ix} = 0 \Rightarrow F = F_t = F_N \cdot f = G \cdot f = 340 \cdot 0{,}2 = 68$ N

$\Sigma F_{iy} = 0 \Rightarrow F_N = G$



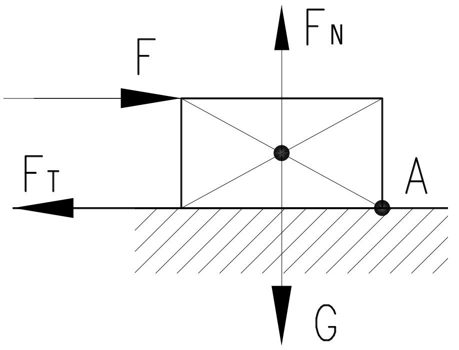
Výsledná reakce působící na těleso:

cosφ = $\frac{F_N}{F_R}$

tgφ = f = 0,2 => φ = 11,31°

F_R = F_N · cosφ = 340 · cos 11,31° = 333,4 N

Př: Posunu nebo převrátím krychli? Rozměry 1 × 1 × 1 m, m = 300 kg, f = 0,4.



$G = m \cdot g = 300 \cdot 9{,}81 = 2.943\ N$

$F_t = F_N \cdot f = 2.943 \cdot 0{,}4 = 1.177{,}2\ N$

Abychom bednu posunuli, musí platit: $F \geq F_t$

bereme $F = F_t$

Bednu převrátíme, pokud bude moment od síly F větší, než od tíhy G.

M_A:

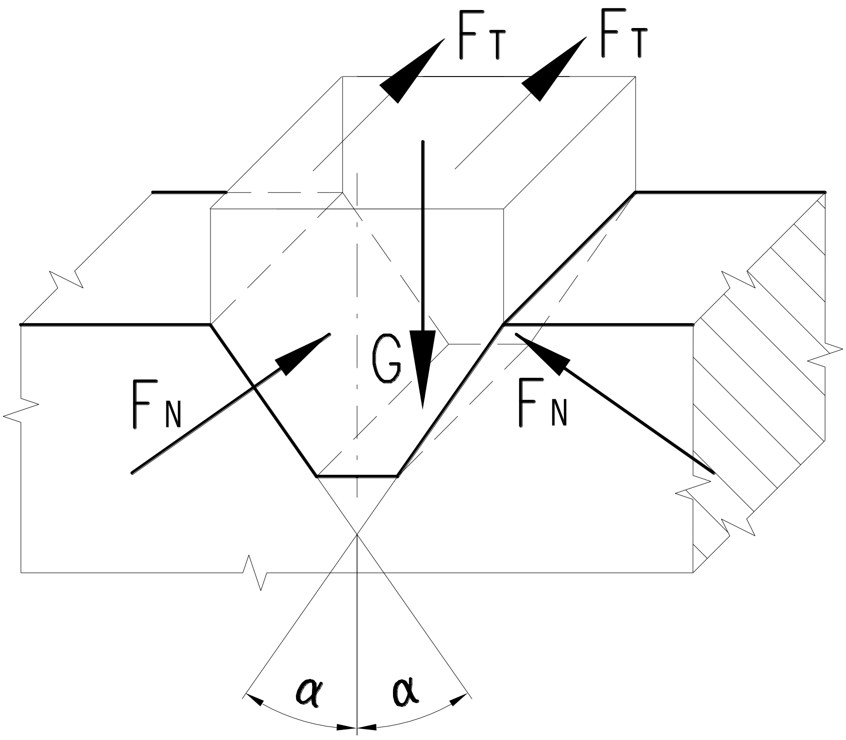
$F \cdot 1000 > G \cdot 500$

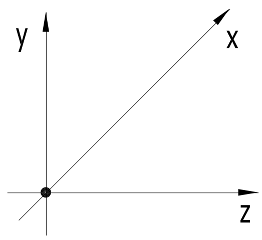
$1.177 \cdot 1.000 > 2.943 \cdot 500$

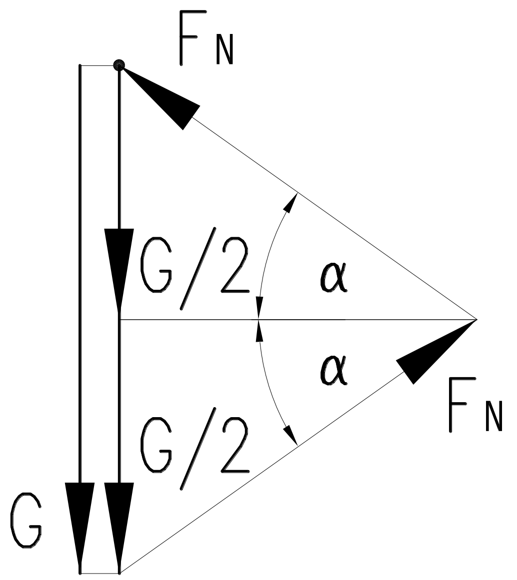
$1.177.200 \ngtr 1.471.500$ neplatí, tedy bednu nepřevrhneme.

9.3 Tření v klínové drážce

Určujeme hnací sílu F.

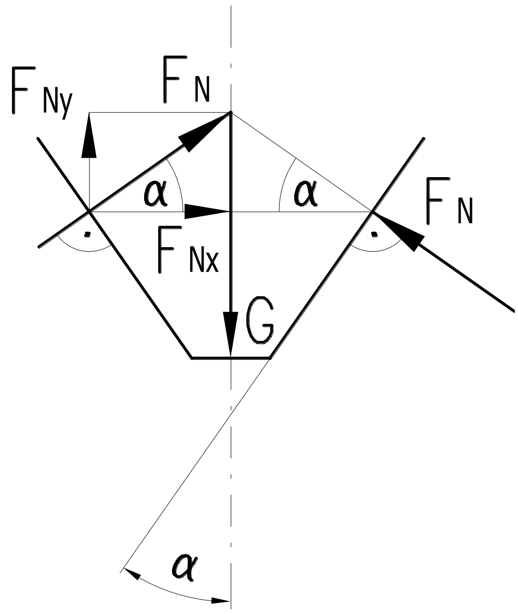






$$\sin\alpha = \frac{\frac{G}{2}}{F_N}$$

$$F_N = \frac{\frac{G}{2}}{\sin\alpha} = \frac{G}{2 \cdot \sin\alpha}$$



$$F_{Ny} = F_N \cdot \sin\alpha$$

Rovnováha k ose x:

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$F - F_t - F_t = 0$$

$$F = 2 \cdot F_t$$

Rovnováha k ose y:

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$G - F_N \cdot \sin\alpha - F_N \cdot \sin\alpha = 0$$

$$F_N = \frac{G}{2 \cdot \sin\alpha}$$

Jako třetí rovnici použijeme podmínku smykového tření.

$$F_t = F_N \cdot f$$

$$F = 2 \cdot F_t = 2 \cdot F_N \cdot f = 2 \cdot \frac{G}{2 \cdot \sin\alpha} \cdot f = G \cdot \frac{f}{\sin\alpha}$$

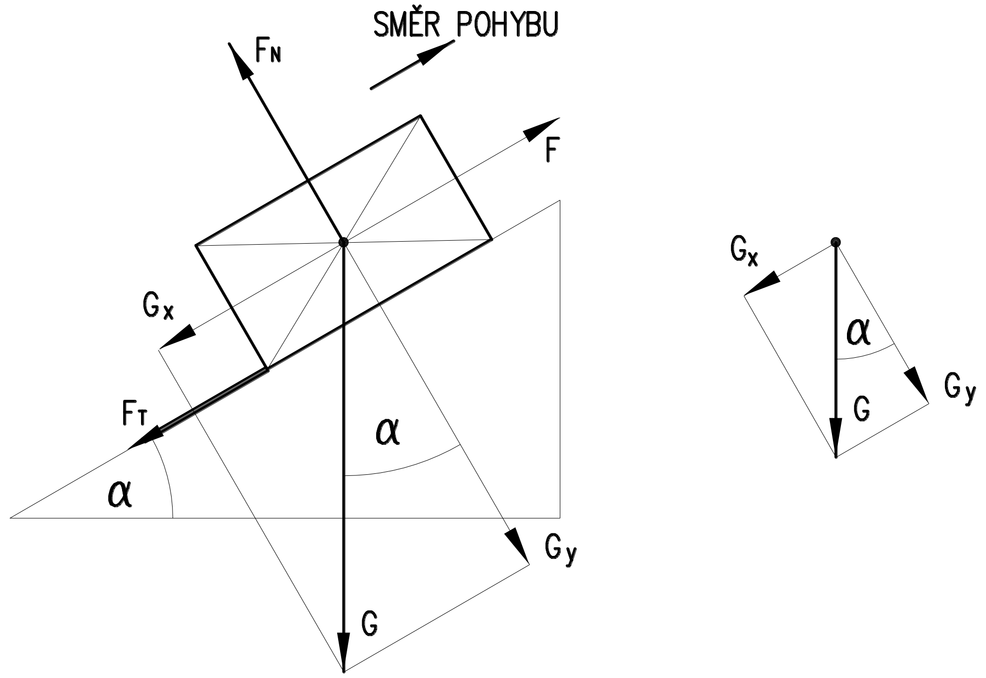
$$F = G \cdot \frac{f}{\sin\alpha}$$

Pro drážku α = 90° je sin α = 1.

Pro rovinu α = 180° je sin α = 0, F je pak hodně velká.

9.4 Pohyb po nakloněné rovině

9.4.1 Zvedání



Podmínky rovnováhy píšu do směrů nakloněné roviny a do směru na něj kolmého.

$$\sum F_{ix} = 0 \qquad \sum F_{iy} = 0$$

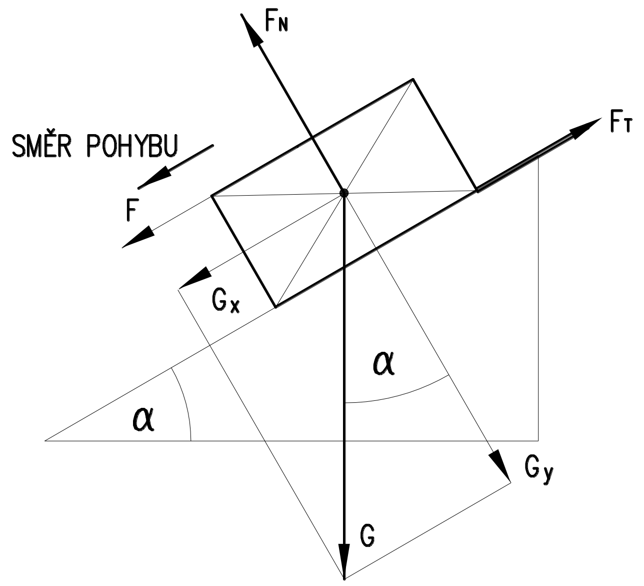
$$F - F_t - G_x = 0 \qquad F_N - G_y = 0$$

$$F = F_t + G \cdot \sin\alpha \qquad F_N = G \cdot \cos\alpha$$

Podmínka tření: $F_t = F_N \cdot f$

Hnací síla: $F = F_N \cdot f + G \cdot \sin\alpha = G \cdot \cos\alpha \cdot f + G \cdot \sin\alpha = G \cdot (f \cdot \cos\alpha + \sin\alpha)$

9.4.2 Spouštění



$$\sum F_{ix} = 0$$
$$F_t - G_x - F = 0$$
$$F = F_t - G \cdot \sin\alpha$$

$$\sum F_{iy} = 0$$
$$F_N - G_y = 0$$
$$F_N = G \cdot \cos\alpha$$

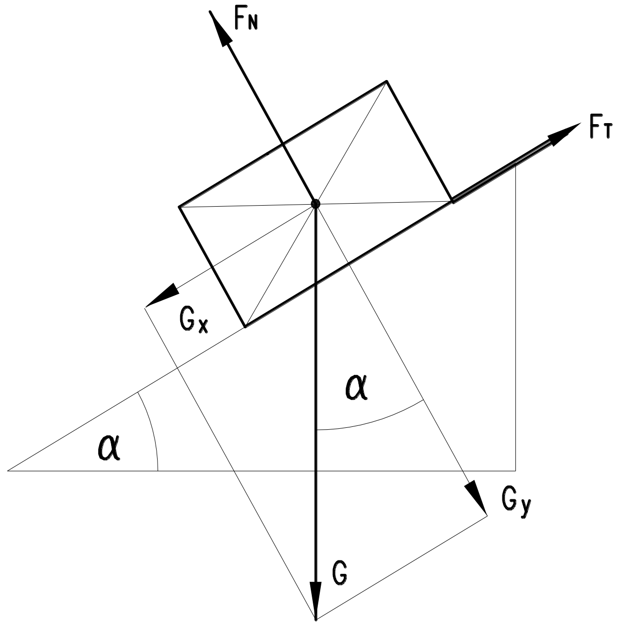
Podmínka tření: $F_t = F_N \cdot f$

Hnací síla: $F = F_N \cdot f - G \cdot \sin\alpha = G \cdot \cos\alpha \cdot f - G \cdot \sin\alpha = G \cdot (f \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)$

Pokud vyjde:

- F > 0 (pro malé α a velké f) – těleso musíme táhnout i dolů.
- F < 0 (velké α a malé f) – těleso samostatně sjíždí dolů, musíme ho brzdit, síla je opačného smyslu, a proto je záporná.
- F = 0 – přechodový stav.

9.4.3 Za jakých podmínek sjede těleso samovolně



$$\sum F_{ix} = 0$$
$$F_t - G_x = 0 \Rightarrow F_t = G \cdot \sin\alpha$$
$$\sum F_{iy} = 0$$
$$F_N - G_y = 0 \Rightarrow F_N = G \cdot \cos\alpha$$
$$F_t = F_N \cdot f$$

Těleso se snaží uvést do pohybu síla G_x, pohybu brání síla F_t.

Aby se těleso nepohybovalo, musí být:

$F_t > G \cdot \sin\alpha$

$F_N \cdot f > G \cdot \sin\alpha$

$G \cdot \cos\alpha \cdot f > G \cdot \sin\alpha$

$f > \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

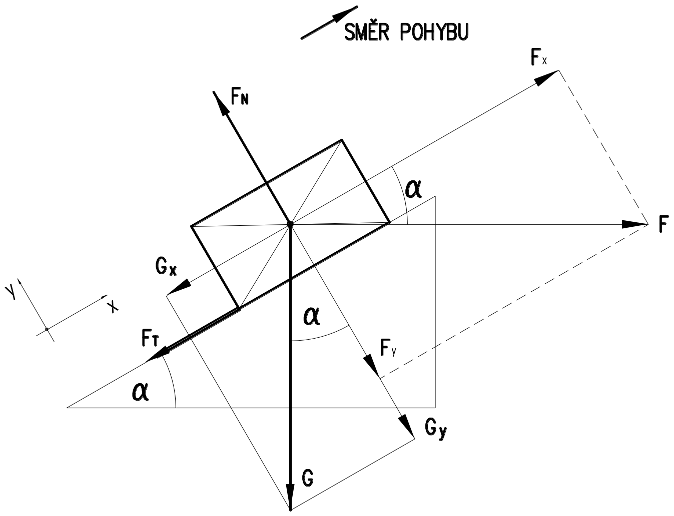
$f > tg\alpha$

$tg\varphi > tg\alpha$

$\varphi > \alpha$ Tedy třecí úhel φ musí být větší, než úhel nakloněné roviny.

Poznámka: Pokud se soustava s třením neuvede sama do pohybu, říkáme, že je samosvorná. Například klíny.

Př.: Zjistěte sílu F potřebnou k rovnoměrnému pohybu tělesa po nakloněné rovině.



$$f = 0{,}2;\ \alpha = 15°;\ G = 1.000\ \mathrm{N}$$

$$\sum F_{ix} = 0$$

$$F_x - G_x - F_t = 0$$

$$F \cdot \cos\alpha = F_t + G \cdot \sin\alpha$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

$$F_N - G_y - F_y = 0$$

$$F_N = G \cdot \cos\alpha + F \cdot \sin\alpha$$

$$F_t = F_N \cdot f$$

$$F \cdot \cos\alpha = F_N \cdot f + G \cdot \sin\alpha = f \cdot (G \cdot \cos\alpha + F \cdot \sin\alpha) + G \cdot \sin\alpha$$

$$F \cdot \cos\alpha = f \cdot G \cdot \cos\alpha + f \cdot F \cdot \sin\alpha + G \cdot \sin\alpha$$

$$F \cdot \cos\alpha - f \cdot F \cdot \sin\alpha = f \cdot G \cdot \cos\alpha + G \cdot \sin\alpha$$

$$F \cdot (\cos\alpha - f \cdot \sin\alpha) = G \cdot (f \cdot \cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$F = G \cdot \frac{f \cdot \cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - f \cdot \sin\alpha} = 1.000 \cdot \frac{0{,}2\ \cdot \cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - 0{,}2\ \cdot \sin 15°} = 495\ \mathrm{N}$$

9.5 Čepové tření

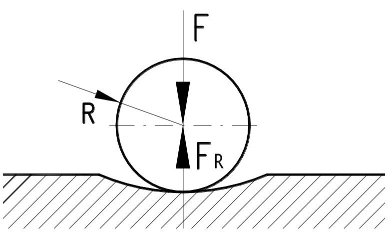
Kloubové (otočné) spojení se provádí pomocí čepů.

Čepy jsou radiální – síla je kolmá na osu čepu.

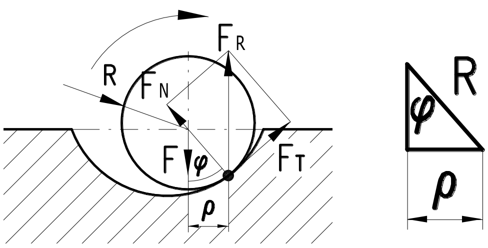
Čepy jsou axiální – síla v ose.

9.5.1 Radiální čep

V klidu.



Za otáčení – čep povyjede nahoru.



Dvojice sil F, F_R způsobí tzv. moment čepového tření, t.j. odpor proti otáčení čepu.

$M_č = F \cdot \rho$

$\rho = R \cdot \sin \varphi$

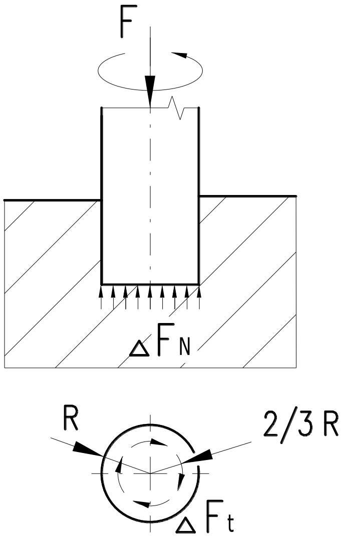
$M_č = F \cdot R \cdot \sin \varphi$

$f_č = \sin \varphi$

$M_č = F \cdot R \cdot f_č$

$f_č$ = součinitel čepového tření (najdeme jej ve strojnických tabulkách).

9.5.2 Axiální čep

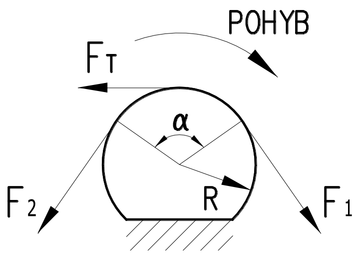


Třecí síla F_t je rovnoměrně rozdělena po celé ploše čepu. Uvažujeme, že výslednice působí na rameni $2/3 \cdot R$ pro nezaběhnutý čep a $1/2 \cdot R$ pro zaběhaný čep.

Moment čepového tření:

$M_č = F \cdot f \cdot ⅔ R$

9.6 Vláknové tření



Vzniká při smýkání lan a pásů po nehybné válcové ploše. Větší síla bude vždy tam, kde lano opouští válcovou plochu, tedy $F_1 > F_2$

Podmínka momentové rovnováhy:

$F_1 \cdot R - F_t \cdot R - F_2 \cdot R = 0$

$F_1 = F_2 + F_t$

Pro tento případ byla odvozena tzv. podmínka vláknového tření:

$\mathbf{F_1 = F_2 \cdot e^{\alpha \cdot f}}$

α – úhel opásání [rad];

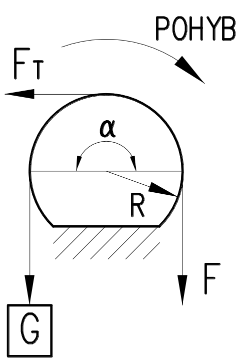
f – koeficient vláknového tření;

e = 2,718 –> základ přirozených logaritmů.

Zvedání břemene:

F > G

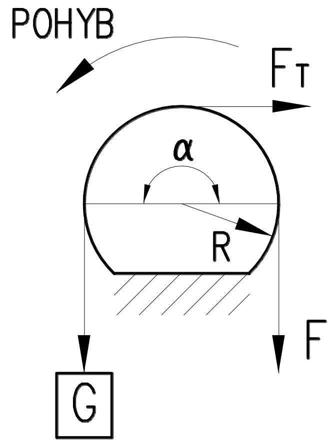
$F = G \cdot e^{\alpha f}$



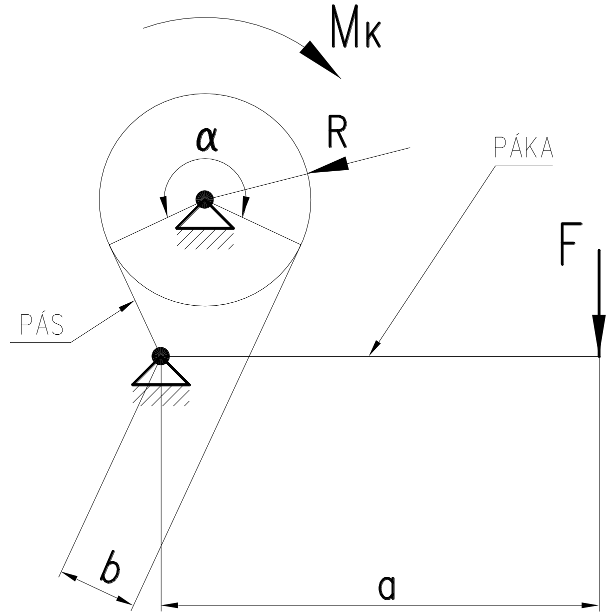
Spouštění břemene:

F < G

$G = F \cdot e^{\alpha f}$



Př.: Jak velkou silou musíme působit na pásovou brzdu, abychom ubrzdili kroutící moment M_K.
Uvolníme buben a páku.



Uvolnění bubnu:

$F_1 > F_2$

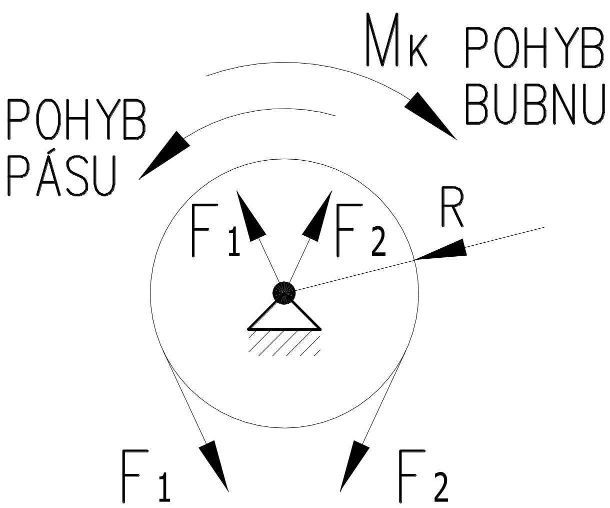
$F_1 = F_2 \cdot e^{\alpha f}$

Momentová rovnice:

$M_K + F_2 \cdot R - F_1 \cdot R = 0$

$M_K + F_2 \cdot R - F_2 \cdot R \cdot e^{\alpha \cdot f} = 0$

$$F_2 = \frac{M}{R \cdot (e^{\alpha \cdot f} - 1)}$$



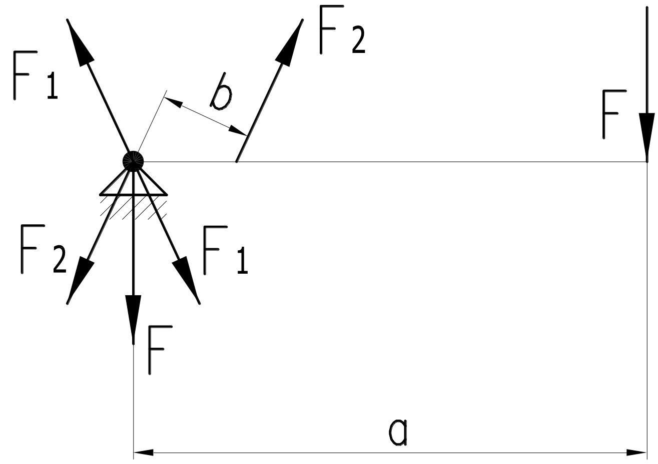
Uvolnění páky:

Momentová rovnováha:

$$F \cdot a - F_2 \cdot b = 0$$

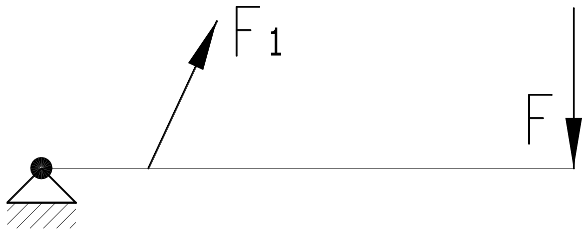
$$F = F_2 \cdot \frac{b}{a}$$

$$F = \frac{b}{a} \cdot \frac{M}{R} \cdot \frac{1}{e^{\alpha \cdot f} - 1}$$



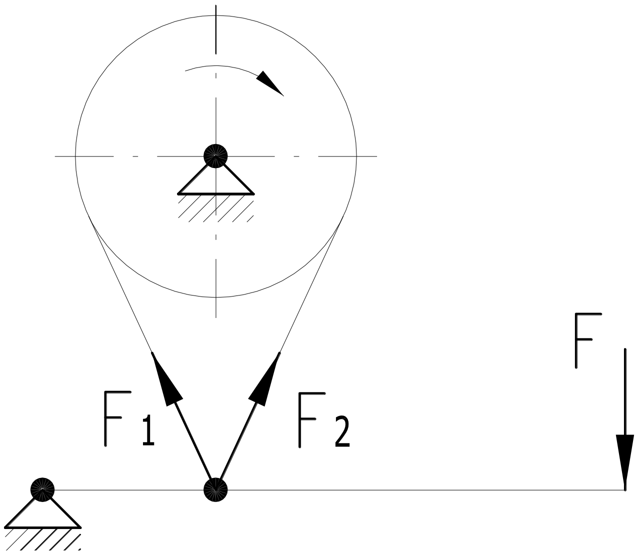
Poznámka:

Pro opačný smysl otáčení bychom potřebovali větší sílu F, protože na páku by namísto síly F_2 působila větší síla F_1. Tato brzda se tedy hodí pro jeden smysl otáčení.



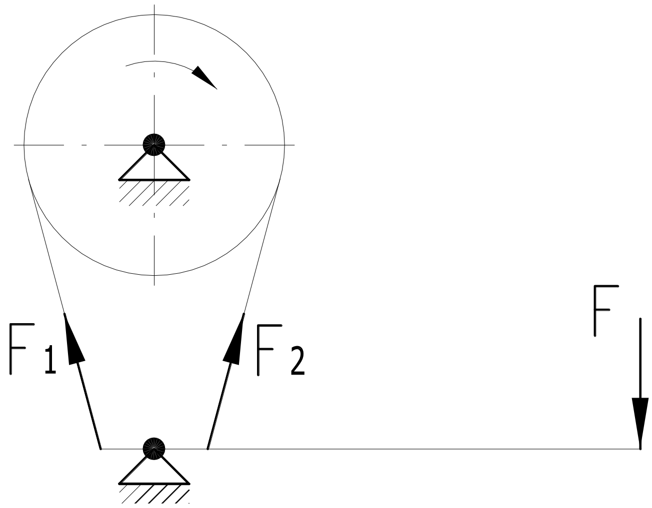
Součtová pásová brzda:

Brzdí oba smysly otáčení stejně, má větší sílu F.

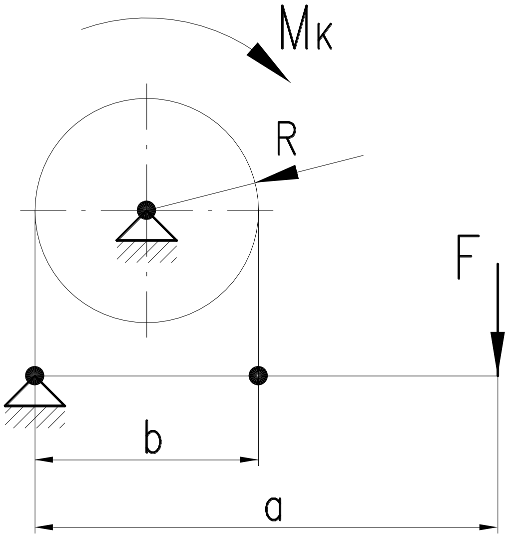


Diferenciální pásová brzda:

Momenty obou sil se odčítají, síla F_1 nám tedy pomáhá brzdit. Ovládací síla F je malá.



Př.: Vypočtěte ovládací sílu F pásové brzdy pro ubrzdění momentu 2 Nm, R = 30 cm, a = 1 m, materiál s koeficientem vláknového tření f = 0,5.



$$F = \frac{b}{a} \cdot \frac{M_k}{R \cdot (e^{\alpha f} - 1)}$$

$$\alpha = \pi$$

$$F = \frac{0{,}6}{1} \cdot \frac{2}{0{,}3 \cdot (2{,}718^{\pi \cdot 0{,}5} - 1)} = 1{,}05 \text{ N}$$

Př.: Řemenový převod:

$F_1 > F_2$

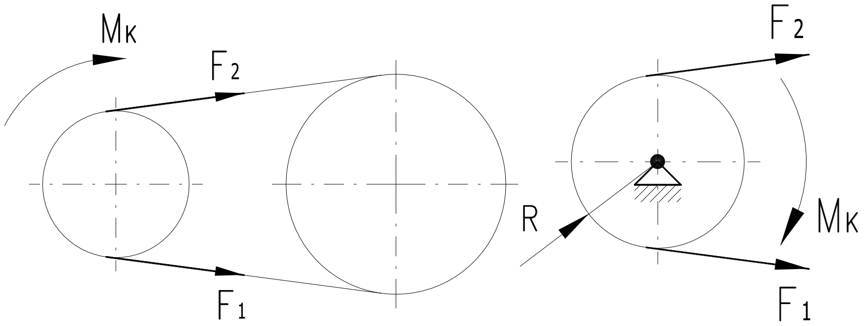
$M_K + F_2 \cdot R - F_1 \cdot R = 0$

$F_1 = F_2 \cdot e^{\alpha f}$

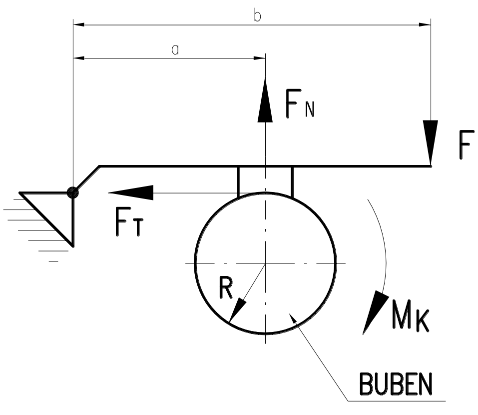
$=> F_1, F_2$

F_1 – maximální síla v řemenu.

F_2 – předpětí řemenu.



Př.: Jednošpalíková brzda. Jak velkou sílu F potřebujeme k ubrzdění M_K?



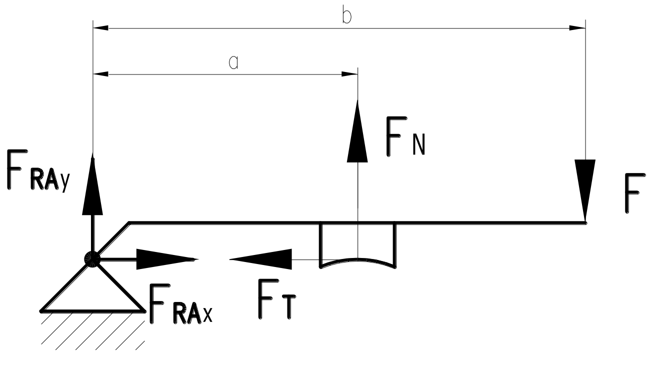
Uvolníme oba členy soustavy.

Páka: Podmínka momentové rovnováhy:

$$\sum M_i = 0$$

$$F_t \cdot 0 + F \cdot b - F_N \cdot a = 0$$

$$F = F_N \cdot \frac{a}{b}$$



Buben: Podmínka momentové rovnováhy:

$M_K - F_t \cdot R + F_N \cdot 0 = 0$

$F_t = \frac{M_k}{R}$

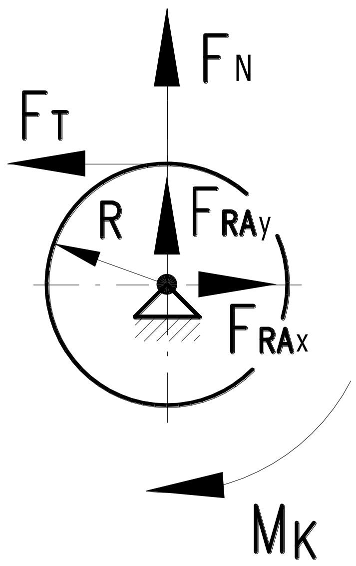
Podmínka tření:

$F_t = F_N \cdot f$

$F_N \cdot f = \frac{M_K}{R}$

$F_N = \frac{M_K}{R \cdot f}$

$F = \frac{M_K}{R \cdot f} \cdot \frac{a}{b}$



9.7 Odpor při valení

Při valení nedochází k prokluzu, tedy ke smýkání. Kolo i podložka nejsou absolutně tuhé, proto dochází k „zaboření“ kola, reakce pak nepůsobí pod osou kola. Tím vzniká tzv. valivý odpor.

a – nemusí být v ose válce.

Rovnováha do osy y:

$G - F_N = 0 => G = F_N$

Momentová podmínka rovnováhy k bodu A.

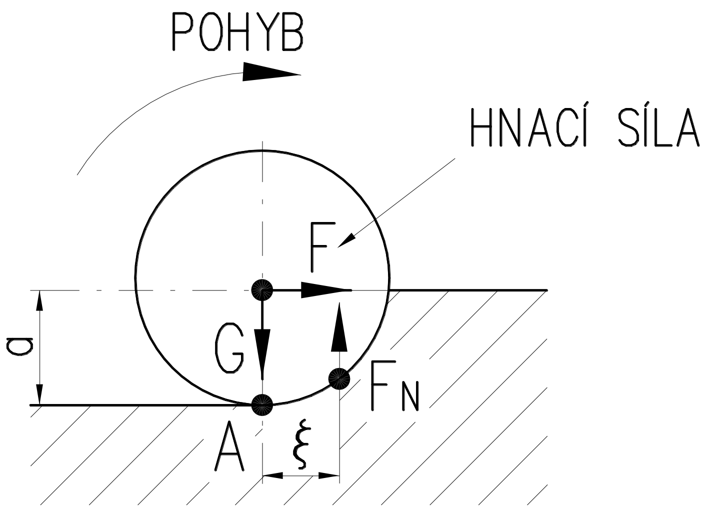
$F \cdot a - F_N \cdot \xi = 0$

ξ – rameno valivého odporu (v mm ve Strojnických tabulkách).

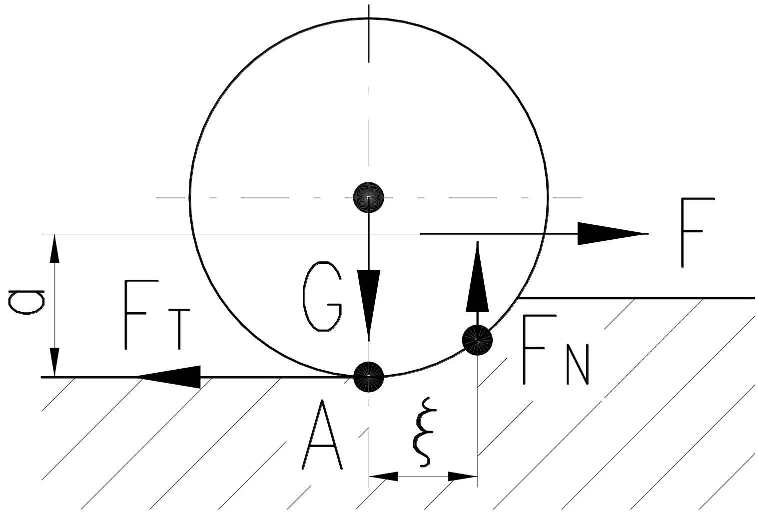
$G = F_N$

Tedy $F \cdot a - G \cdot \xi = 0$

Potom hnací síla: $F = \frac{G \cdot \xi}{a}$



Př.: Budeme válec posunovat nebo valit?



a) Posouvání:

$x: F = F_t$

$y: F_N = G$

$F_t = F_N \cdot f$

$F = G \cdot f$

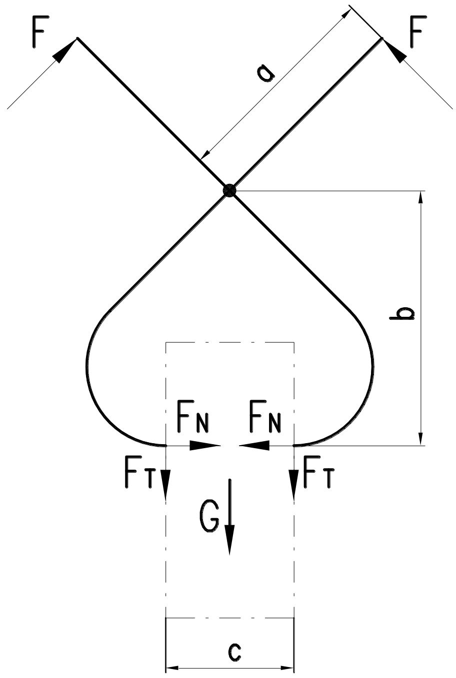
b) Valení:

$F \cdot a - G \cdot \xi = 0$

$F = G \cdot \frac{\xi}{a}$

Platí ten způsob pohybu, kde bude menší síla.

Př.: Jakou silou F musíme působit na rukojeti kleští, abychom uzvedli součást o hmotnosti m = 25 kg, f = 0,2.



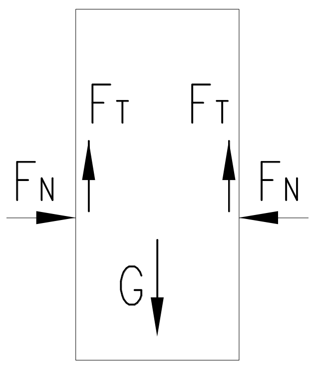
$a = 600\ \mathrm{mm}$

$b = 350\ \mathrm{mm}$

$c = 100\ \mathrm{mm}$

$G = m \cdot g = 25 \cdot 10 = 250\ \mathrm{N}$

Uvolněná součást:



Rovnováha:

$x: F_N = F_N$

$y: G = 2 \cdot F_t \Rightarrow F_t = \frac{G}{2}$

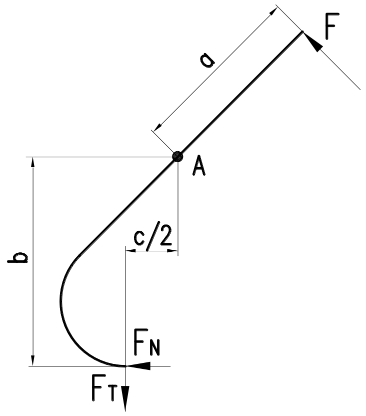
$F_T = F_N \cdot f = \frac{G}{2}$

Moment k bodu A:

$$F_N \cdot b - F_t \cdot \frac{c}{2} - F \cdot a = 0$$

$$F \cdot a = F_N \cdot b - F_t \cdot \frac{c}{2} = \frac{G}{2 \cdot f} \cdot b - \frac{G}{2} \cdot \frac{c}{2}$$

$$F = \frac{G \cdot (\frac{b}{f} - \frac{c}{2})}{2 \cdot a} = \frac{250 \cdot (\frac{350}{0,2} \cdot 350 - \frac{100}{2})}{2 \cdot 600} = 354\ \mathrm{N}$$



Př.: Jakou silou F musíme působit při zvedání tělesa o hmotnosti m = 100 kg. Vše je ocelové, mazané.

a) Přes kladku:

Průměr kladky $D_K = 200\ \mathrm{mm}$

Průměr čepu $D_č = 50\ \mathrm{mm}$

$f_č = 0,05$

$G = m \cdot g = 100 \cdot 10 = 1.000\ \mathrm{N}$

$$M_A: G \cdot \frac{D_K}{2} + M_č - F \cdot \frac{D_K}{2} = 0$$

$$M_č = F_V \cdot R \cdot f_č$$

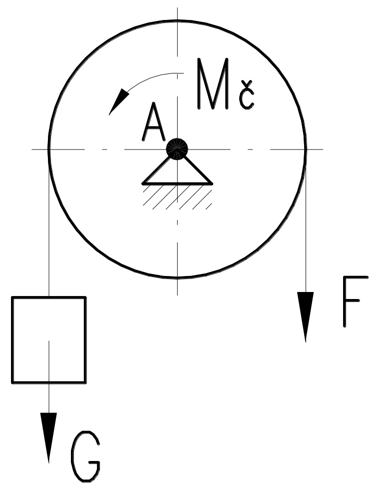
$$M_č = (G + F) \cdot f_č \cdot \frac{D_č}{2}$$

Potom:

$$G \cdot \frac{D_K}{2} + G \cdot f_č \cdot \frac{D_č}{2} + F \cdot f_č \cdot \frac{D_č}{2} - F \cdot \frac{D_K}{2} = 0$$

$$G \cdot (\frac{D_K}{2} + f_č \cdot \frac{D_č}{2}) + F \cdot (f_č \cdot \frac{D_č}{2} - \frac{D_K}{2}) = 0$$

$$F = \frac{G \cdot \left(\frac{D_K}{2} + \frac{D_č}{2} \cdot f_č\right)}{\frac{D_K}{2} - \frac{D_č}{2} \cdot f_č} = \frac{1.000 \cdot (100 + 25 \cdot 0,05)}{100 - 25 \cdot 0,05} = 1.025,3\ \mathrm{N}$$



b) Přes kulatinu (zablokovaná kladka):

$f = 0,05$

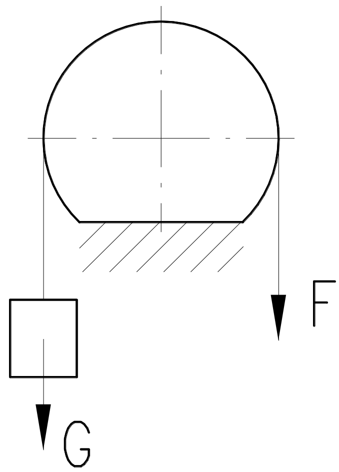
$G = m \cdot g = 1.000\ \mathrm{N}$

$F > G$

$F = G \cdot e^{\alpha f}$

$F = 1.000 \cdot e^{\pi \cdot 0,05}$

$F = 1.170\ \mathrm{N}$



Při zvedání přes kladku potřebujeme menší sílu.

Př.: Jakou silou táhnu auto do kopce?

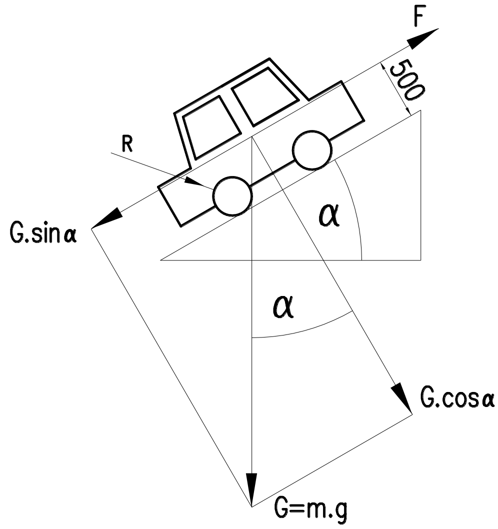
Hmotnost auta m = 800 kg, α = 10°, poloměr kol R = 400 mm, tažné lano ve výšce 500 mm.

Síla F musí překonat:

- tíhovou složku G · sinα;
- odpor valení 4 kol;
- tření v čepech (zanedbáme).

ξ = 3 mm (pneumatika asfalt).

$G = m \cdot g = 800 \cdot 10 = 8.000\ \mathrm{N}$



1. kolo:

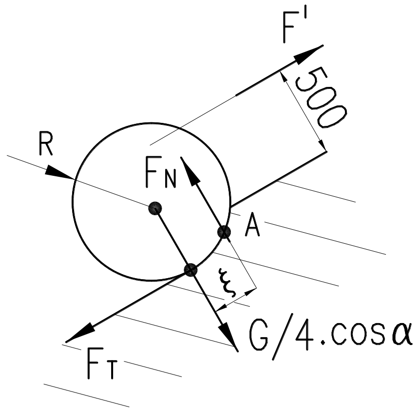
M_A :

$F' \cdot 500 - \frac{G}{4} \cdot \cos\alpha \cdot \xi = 0$

$F' = \frac{G \cdot \cos\alpha \cdot \xi}{4 \cdot 500} = \frac{8.000 \cdot \cos 10° \cdot 3}{4 \cdot 500} = 11{,}8\ \mathrm{N}$

$F = 4 \cdot F' + G \cdot \sin\alpha = 4 \cdot 11{,}8 + 8.000 \cdot \sin 10 =$

$= 1.436\ \mathrm{N}$



Př.: Jakou sílu F potřebujeme k ubrzdění břemene?

$R = 400\ \mathrm{mm}$

$a = 600\ \mathrm{mm}$

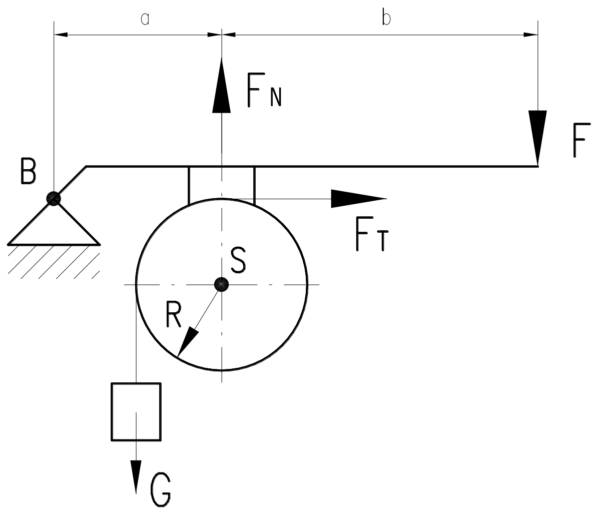
$b = 1.000\ \mathrm{mm}$

$f = 0{,}5$

$m = 100\ \mathrm{kg}$

$M = G \cdot R$

$G = m \cdot g = 100 \cdot 10 = 1.000\ \mathrm{N}$



$\sum M_{is} = 0$

$M - F_t \cdot R = 0$

$F_t = \frac{M}{R} = \frac{G \cdot R}{R} = G = 1.000\ \mathrm{N}$

$F_t = F_N \cdot f \Rightarrow F_n = \frac{F_t}{f}$

$\sum M_{iB} = 0$

$F\,(a + b) - F_N \cdot a = 0$

$F = \frac{F_N \cdot a}{a + b} = \frac{F_t}{f} \cdot \frac{a}{a + b} = \frac{1000}{0{,}5} \cdot \frac{600}{1600} = 750\ \mathrm{N}$

10 Pružnost – pevnost

Základy pružnosti a pevnosti položil Euler.

Působením síly na součást se stane následující:

- V součásti vznikne napětí.
- Součást se deformuje.

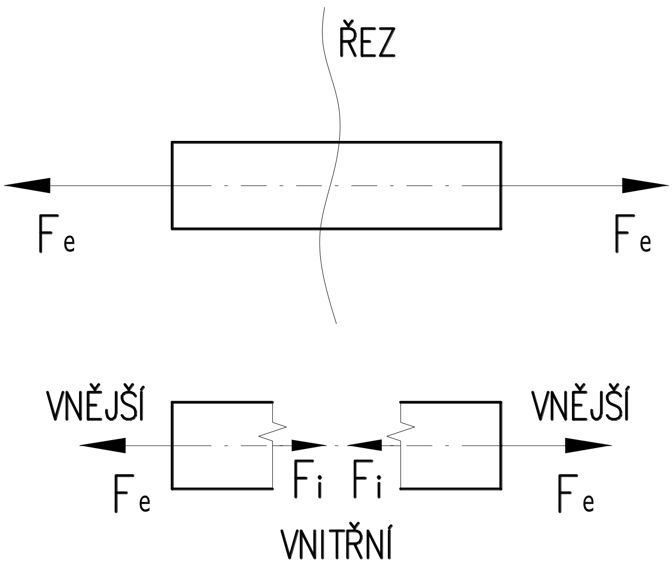
10.1 Síly

Na těleso (součást) působí **vnější síly** a to:

- Působící z vnějšku na těleso – síly, momenty, reakce, tlak větru…
- Síly vázané na hmotnost tělesa – gravitační síla (tíha), setrvačná síla, odstředivá síla…

Účinkem vnějších sil vznikají **vnitřní síly**, kterými se součást brání deformaci. Jejich velikost se určí z podmínek rovnováhy **metodou řezu** – součást se myšleně rozřízne, v místě řezu se zavedou vnitřní síly (jejich velikost určíme z podmínek rovnováhy).

Z vnitřních sil pak můžeme vypočítat napětí:

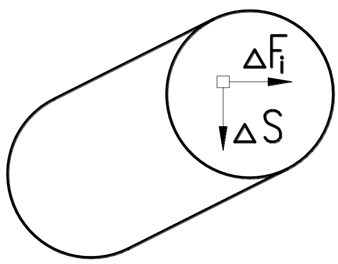


10.2 Napětí

Napětí zavádíme jako intenzitu vnitřcích sil $\sigma = \frac{\Delta F_i}{\Delta S}$

Směr napětí je shodný se směrem síly F_i (je to vektor).

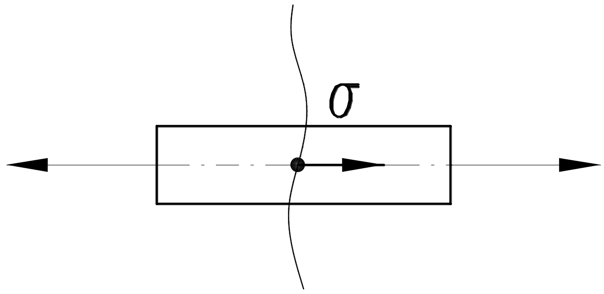
Jednotka: $\frac{N}{m^2} = Pa$, ve strojírenství se používá $\frac{N}{mm^2} = MPa$.



Máme dva druhy napětí

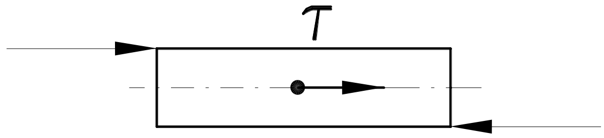
a) Normálná napětí – síla je kolmá k rovině řezu. Toto napětí se snaží částice materiálu odtrhnou nebo stlačit.

značíme σ [sigma]



b) Tečná napětí – síla leží v rovině řezu. Toto napětí se snaží částice materiálu po sobě posunout.

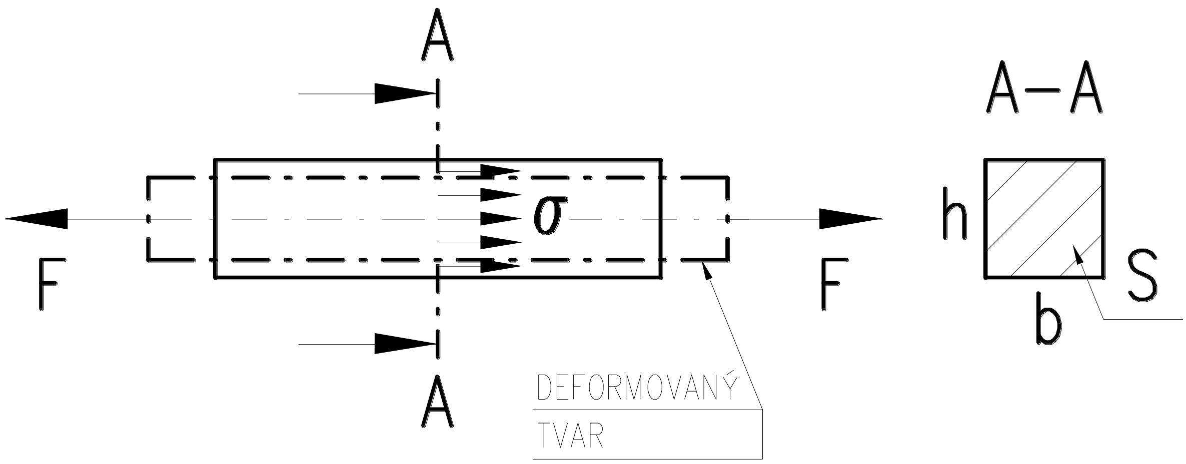
značíme τ [tau]



10.3 Základní druhy namáhání

Máme 5 základních druhů namáhání.

10.3.1 Tah



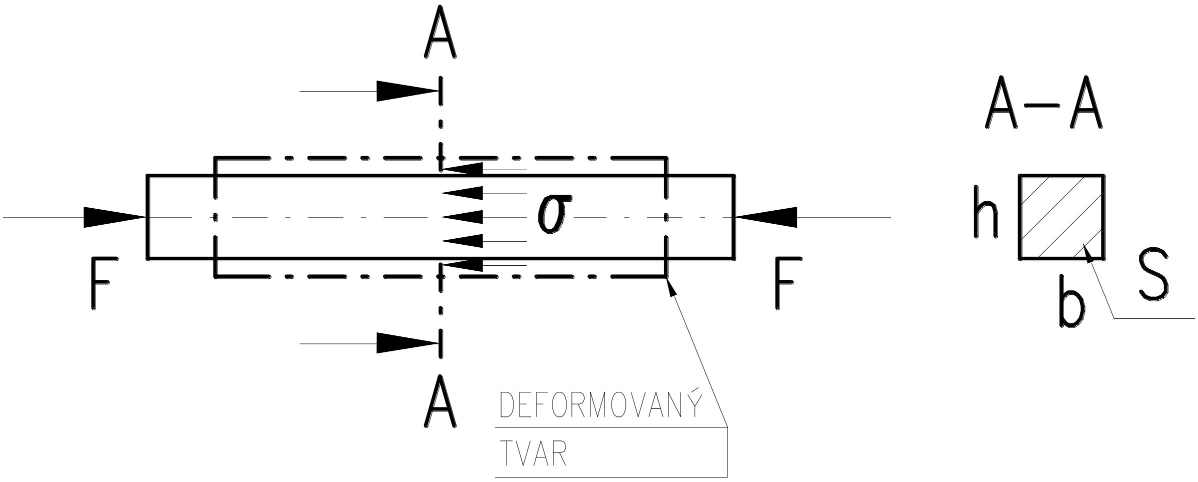
Součást se protahuje.

$\sigma_t = \frac{F}{S} = \frac{\text{zatěžující síla}}{\text{plocha průřezu (kolmého na působící sílu)}}$

$S = b \cdot h$

Napětí je po průřezu rozděleno rovnoměrně.

10.3.2 Tlak



Obdoba tahu.

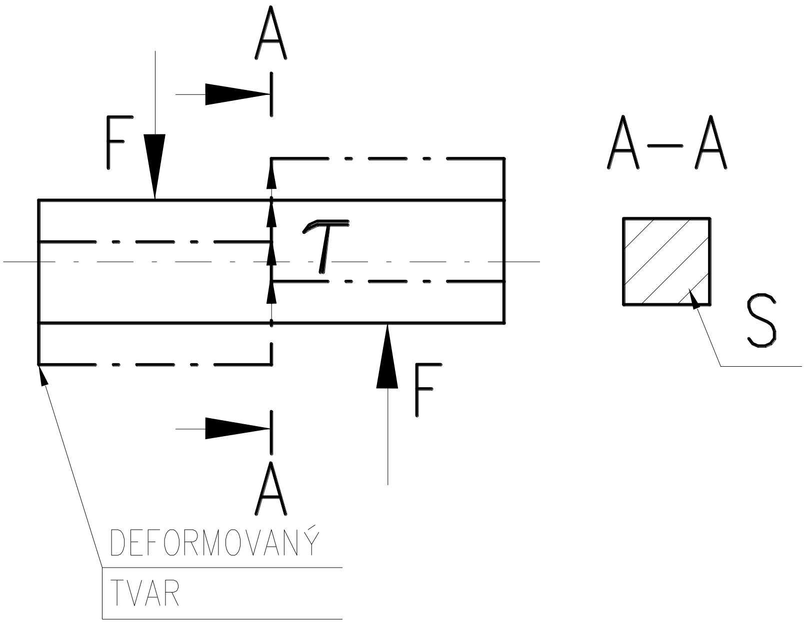
Součást se zkracuje.

$\sigma_d = \frac{F}{S} = \frac{\text{zatěžující síla}}{\text{plocha průřezu (kolmého na působící sílu)}}$

S = b · h

Napětí je po průřezu rozděleno rovnoměrně.

10.3.3 Smyk (střih)

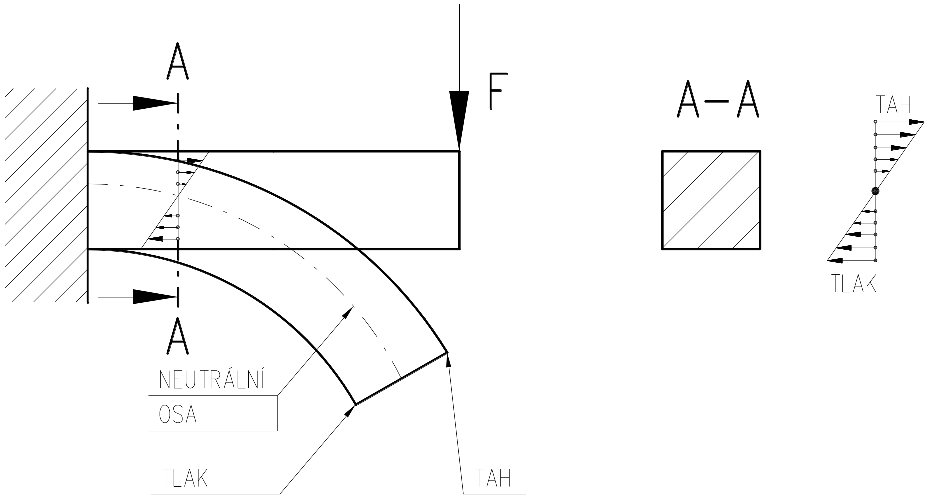


Součást se smýká (nastřihává).

$\tau_s = \frac{F}{S}$

Napětí je po průřezu rozděleno rovnoměrně.

10.3.4 Ohyb



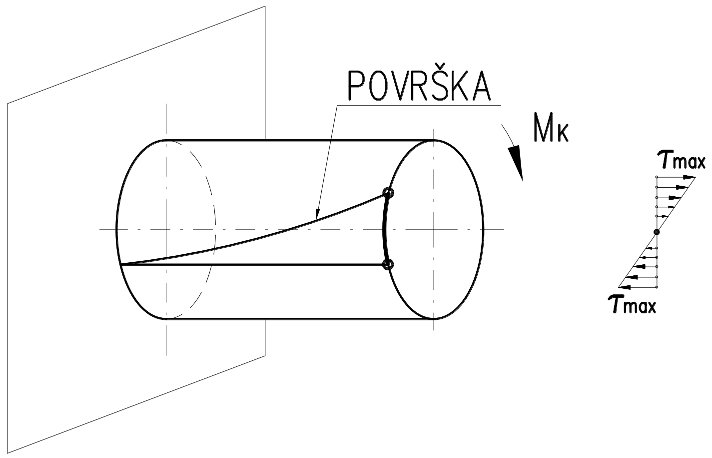
Součást se ohýbá vlivem ohybového momentu.

$W_O = \frac{b \cdot h^2}{6}$

Napětí je rozloženo nerovnoměrně, v horní polovině je tah, v dolní tlak. Neutrální osa má nulové napětí.

$$\sigma_O = \frac{M_O}{W_O} = \frac{\text{ohybový moment}}{\text{modul průřezu v ohybu}}$$

10.3.5 Krut



Součást se natáčí do šroubovice.

$$\tau_K = \frac{M_K}{W_K} = \frac{\text{kroutící moment}}{\text{modul průřezu v krutu}}$$

Napětí je rozloženo nerovnoměrně, v ose tyče je nulové.

Obecný závěr:

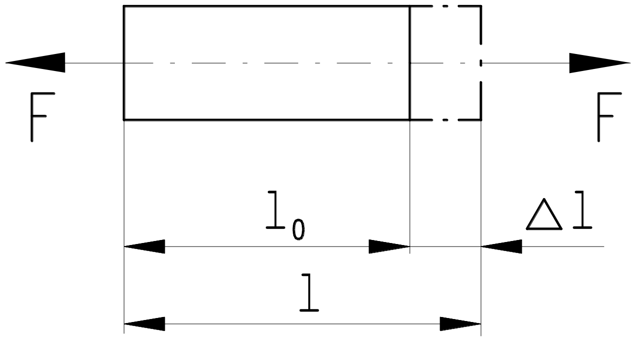
Napětí = $\frac{\text{zatížení}}{\text{charakteristická hodnota průřezu}}$

Uvedená namáhání je možné i kombinovat.

10.4 Základní druhy deformace

10.4.1 Prodloužení Δl

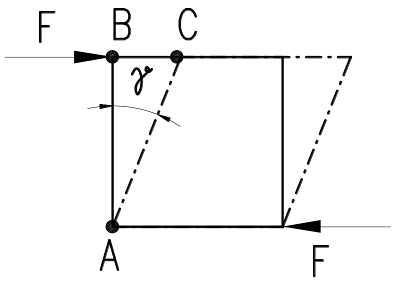
Tedy změna délky (záporná = zkrácení). Je způsobeno normálným napětím σ. (Znak delta – její velký a malý znak vypadá takto: Δ / δ)



Počítáme relativní prodloužení $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100$ [%]

10.4.2 Zkos γ

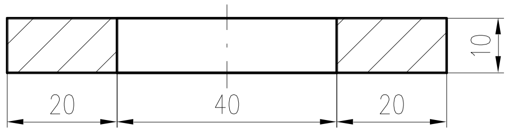
Je to změna úhlu. Odpovídá tečným napětím τ

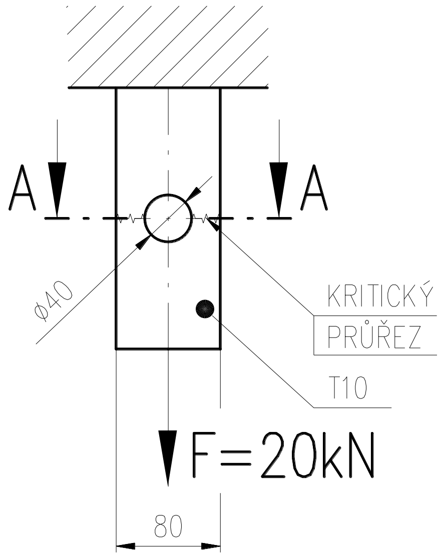


Pro malé úhly γ lze psát: $\text{tg}\,\gamma = \gamma = \frac{BC}{AB}$

Př.: Vypočítejte napětí v tažení tyči podle obrázku.

Počítáme v nejužším místě!





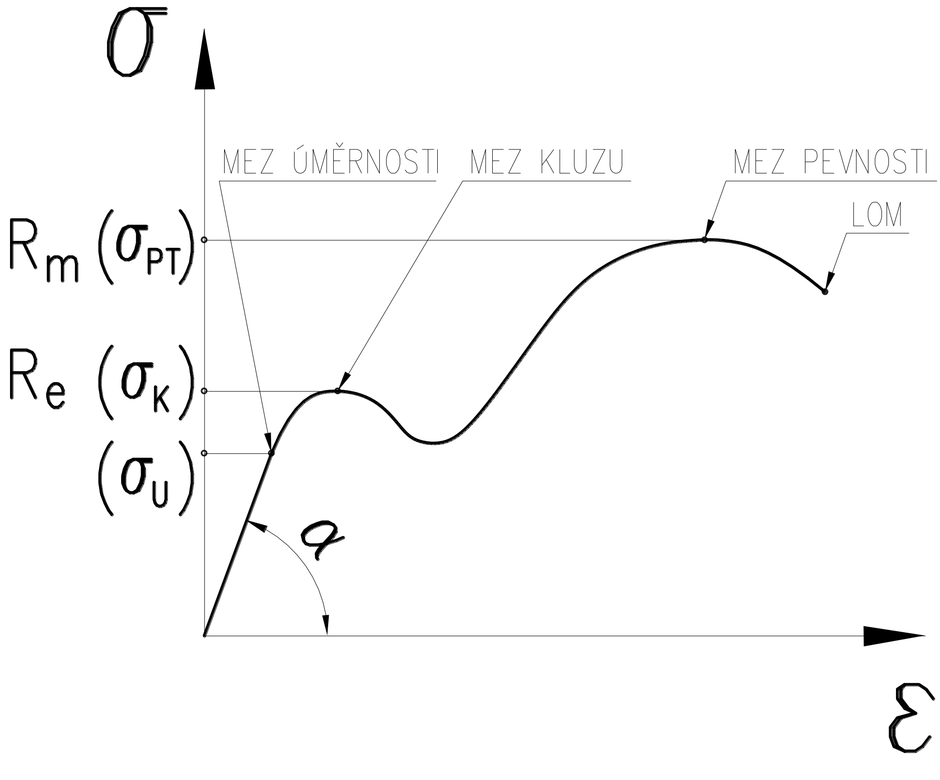
$$S = 2 \cdot 20 \cdot 10 = 400\ \mathrm{mm}^2$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{20.000}{400} = 50\ \mathrm{MPa}$$

10.5 Tah, tlak

10.5.1 Diagram tahové zkoušky

Tahová zkouška se provádí na normalizované zkušební tyčince, která se přetrhne tzv. trhacím strojem. V průběhu zkoušky stroj zapisuje závislost síly na prodloužení tyčinky, nebo častěji napětí na deformaci ε.



$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

První úsek diagramu je přímkový, lze ho proto popsat rovnicí přímky.

$\sigma = \text{tg}\alpha \cdot \varepsilon$

$\sigma = E \cdot \varepsilon$

Tento vztah se nazývá Hookeův zákon a udává nám vztah mezi napětím a relativní deformací.

Hodnota E – modul pružnosti v tahu.

$E_{oceli} = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa

$E_{litiny} = 0{,}85 \cdot 10^5$ MPa

Je to materiálová konstanta.

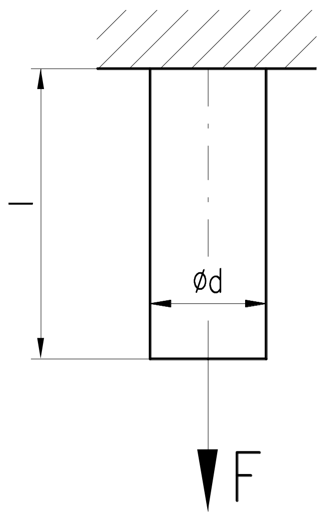
R_e – mez kluzu – je to napětí, při kterém se začínají výrazně rozvíjet plastické, tedy trvalé deformace.

R_m – mez pevnosti – je to napětí, při kterém součást praskne.

Při napětí nižším než R_e se součást po odlehčení vrátí do původního tvaru. Při napětí větším než R_e zůstane součást trvale deformovaná.

Hodnoty R_e a R_m najdeme v materiálových listech nebo ve Strojnických tabulkách.

Př.: Vypočítejte o kolik se prodlouží tyč o průměru d = 10 mm a délky 1 m, materiál – ocel E = 2,1 · 10⁵ MPa, F = 10 kN.



$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{10.000 \cdot 4}{\pi \cdot 10^2} = 127{,}32 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{127}{2{,}1 \cdot 10^5} = 0{,}000.6\ (= 0{,}06\%)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \varepsilon \cdot l = 0{,}000.6 \cdot 1.000 = 0{,}6 \text{ mm}$$

10.5.2 Dovolené napětí, bezpečnost

U strojních součástí obvykle nemůžeme připustit trvalé deformace, proto napětí musí být menší než mez kluzu materiálu R_e. V praxi musí být napětí podstatně menší než R_e, protože při výpočtu napětí působí spousta nepředvídaných vlivů (výrobní nepřesnosti, neznalost přesných sil, tolerance materiálu, zjednodušení výpočtů…).

Máme dvě možnosti řešení:

- **Dovolené napětí**

$$\sigma_t = \frac{F}{S} \leq \sigma_{Dovt}$$

Aby součást vyhověla, musí být napětí menší nebo rovné dovolenému napětí.

Určení dovoleného napětí:

$$\sigma_{Dovt} = \frac{R_e}{k}$$

k – bezpečnost

Velikost bezpečnosti ve volí podle nebezpečnosti stroje a podle neznalosti vedlejších vlivů ve výpočtu. Běžná hodnota bezpečnosti je 1,5 ÷ 5.

- **Bezpečnost**

$$k = \frac{R_e}{\sigma} \geq k_{min}$$

Bezpečnost se zavádí jako podíl meze kluzu R_e a vypočteného napětí. Tato bezpečnost musí být větší než minimální bezpečnost.

Doporučuje se spíše používat druhý způsob (bezpečnost), protože dává lepší přehled o zatížení součásti.

10.5.3 Typy úloh

- **Kontrolní výpočet** – počítáme napětí, případně bezpečnost.

$$k = \frac{R_e}{\sigma_t}$$

Př: Určete, zda tyč průřezu 8 × 10 mm vyhovuje bezpečnosti k_{min} = 2 při zatížení silou F = 5.000 N. Ocel 11 523 => R_e = 335 MPa.

$$\sigma_t = \frac{F}{S} = \frac{5.000}{8 \cdot 10} = \frac{5.000}{800} = 62{,}5 \text{ MPa}$$

$$k = \frac{R_e}{\sigma_t} = \frac{335}{62{,}5} = 5{,}36$$

Součást vyhovuje, jen je trochu předimenzovaná.

- **Návrhový výpočet**

Počítáme průřezové rozměry součásti.

Př: Navrhněte průměr kruhové tyče tak, aby při síle F = 5.000 N měla bezpečnost k = 2. Mat. tyče – $R_e = 335$ MPa.

k = $\frac{R_e}{\sigma_t}$ $=> \sigma_t = \frac{F}{k} = \frac{335}{2}$ = 167,5 MPa – maximální napětí, které může součást mít, aby k = 2

$$\sigma_t = \frac{F}{S} => S = \frac{F}{\sigma_t} = \frac{5.000}{167{,}5} = 30 \text{ mm}^2$$

$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ => $d = \sqrt{\frac{4 \cdot S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 30}{\pi}} = 6{,}16\ \mathrm{mm}$

V praxi použijeme nejbližší vyšší normalizovaný průměr tyče.

- **Výpočet maximálního zatížení**

Př: Vypočtěte maximální sílu, kterou můžeme natahovat čtvercovou tyč o hraně a = 20 mm z mat. 11 573 => $R_e = 230\ \mathrm{MPa}$, $k = 3$.

k = $\frac{R_e}{\sigma_t}$ => $\sigma_t = \frac{R_e}{K} = \frac{230}{3}$ = 76,7 MPa

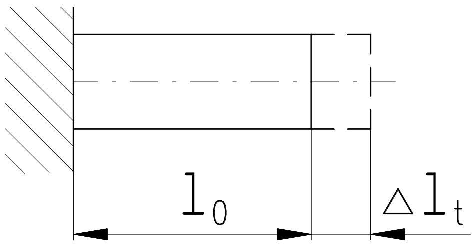
$\sigma_t = \frac{F}{S}$ => F = $\sigma_t \cdot S = \sigma_t \cdot a^2 = 76{,}7 \cdot 20^2$ = 30.680 N

10.6 Napětí vzniklé teplem

V praxi se často vyskytují případy, kdy je namáhaná součást vystavena ještě tepelným účinkům. Pokud zabráníme dilataci, napětí mohou být značná. Proto jsou např. mostní konstrukce uloženy na jednom konci naválečcích, dálková topná vedení mají dilatační kolena, kolejnice mezery.

Někdy nelze připustit dilataci součásti, neboť by pak neplnila svou funkci (utažený šroub na víku parní turbíny, nebo na hlavě válce spalovacího motoru). V těchto případech roztažení nebo smrštění vlivem tepelné změny vyvolá v součásti takové napětí, které by vzniklo prodloužením nebo zkrácením při tahu nebo tlaku.

Z fyziky délková roztažnost:



$\Delta l_t = \alpha \cdot l_o \cdot \Delta t$

l_0 – původní délka součásti

α – součinitel délkové roztažnosti, ocel $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$

Δt – rozdíl teplot

Podle Hookova zákona: $\sigma = \varepsilon \cdot E = \frac{\Delta l}{l_o} \cdot E$

0° = 273,15 K

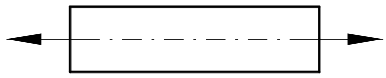
0° ≅ 273 K

Po dosazení:

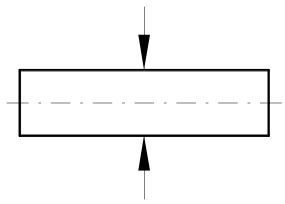
$\sigma = \frac{l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{l_0} \cdot E = \alpha \cdot \Delta t \cdot E$

10.7 Střih, smyk

Normálová napětí brání částicím se od sebe oddálit(nebo přiblížit) ve směru kolmém k rovině řezu.

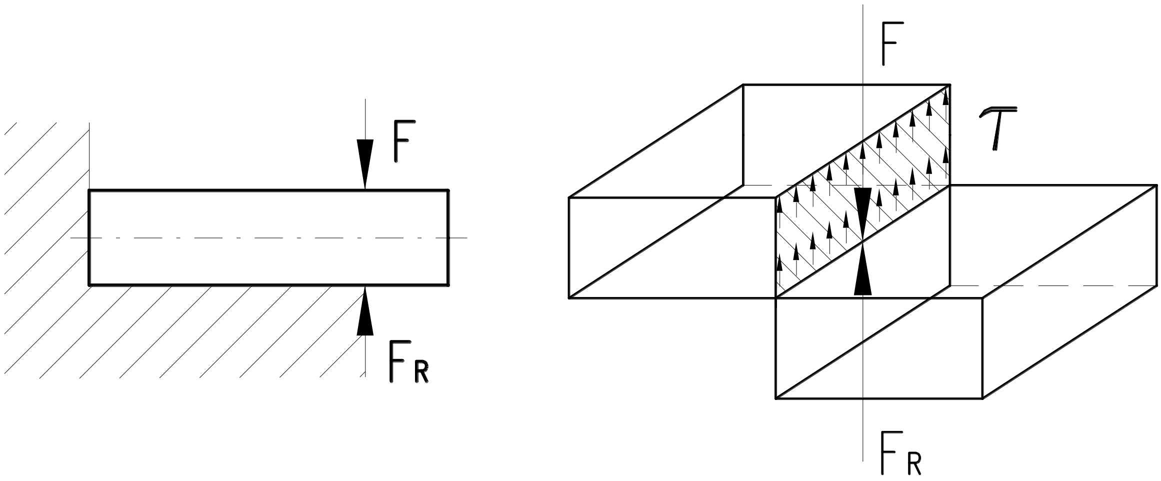


Tečná napětí vyjadřují vazbu částic tělesa, která jim brání se vůči sobě posouvat v rovině řezu.



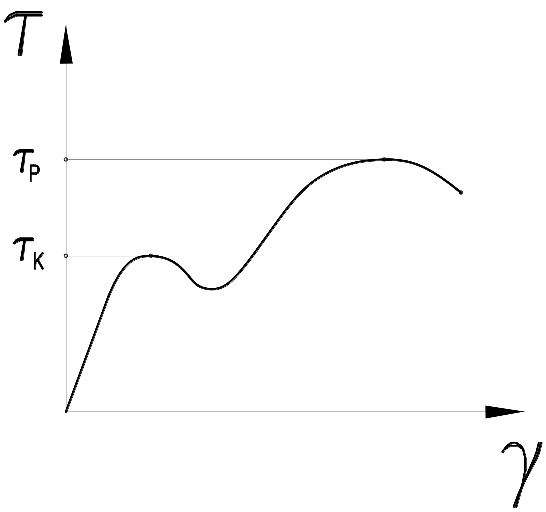
Dvě síly stejně velké, opačné orientace, ležící na společné nositelce, která prochází těžištěm průřezu a jsou kolmá na osu tyče, vytvoří tečné napětí.

Deformace vznikne posunutím sousedních vrstev proti sobě. Nazývá se zkos.



Prostý smyk se vyskytuje jen zřídka, například stříhání materiálu. Jinak se vyskytuje v kombinaci s ohybem (pokud je síla mimo těžiště).

Zkouška namáhání smykem



$$\tau = \frac{F}{S}$$

$\tau_{PS} = 0{,}6\ R_e$ – pro ocel.

$\tau_{PS} = 0{,}8 \div 1\ R_e$ – pro litinu.

Hookeův zákon pro smyk:

$$\boldsymbol{\tau = \gamma \cdot G}$$

G – modul pružnosti ve smyku.

G = 8 · 10^4 MPa – pro ocel.

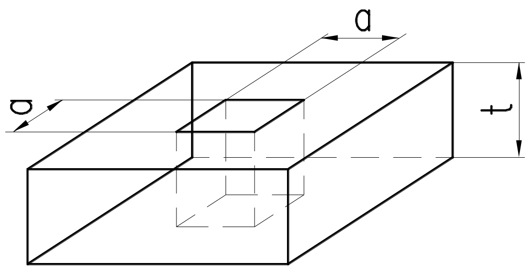
G = 4 · 10^4 MPa – pro litinu.

10.8 Stříhání materiálu

Musíme překonat mez pevnosti ve smyku

$$\tau_{max} = \frac{F}{S} \geq \tau_{Ps}$$

Př: Jaká síla je zapotřebí k vystřižení čtverce, τ_{Ps} = 300 MPa, a = 20 mm, t = 3 mm.



S = 4 · a · t = 4 · 20 · 3 = 240 mm^2

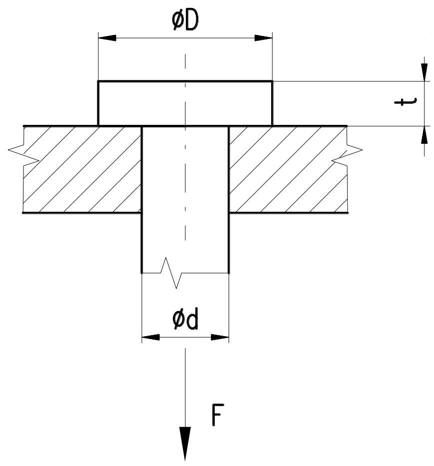
$$\tau_{Ps} = \frac{F}{S} => F = \tau_{Ps} \cdot S = 300 \cdot 240 = 72.000 \text{ N}$$

Př: Osazený konec tyče je namáhán silou F = 10 kN. Určete, který druh namáhání je pro tento případ nebezpečnější, je-li τ_{Ks} = 0,6 · R_e

D = 70 mm

d = 50 mm

t = 20 mm



$$\sigma_t = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{10.000}{\frac{\pi \cdot 50^2}{4}} = 5{,}1 \text{ MPa}$$

$$\tau_S = \frac{F}{S} = \frac{F}{\pi \cdot d \cdot t} = \frac{10.000}{\pi \cdot 50 \cdot 20} = 3{,}18 \text{ MPa}$$

Převedeme σ_t na τ: 0,6 · σ_t = 0,6 · 5,1 = 3,06 MPa

Porovnáme => τ_S je nebezpečnější.

Seznam použité literatury

- SALABA S. – MATĚNA A.: *MECHANIKA I – STATIKA pro SPŠ strojnické*. Praha: SNTL, 1977.
- MRŇÁK L. – DRDLA A.: *MECHANIKA – Pružnost a pevnost pro střední průmyslové školy strojnické*. Praha: SNTL, 1977.
- TUREK, I., SKALA, O., HALUŠKA J.: *MECHANIKA – Sbírka úloh*. Praha: SNTL, 1982.
- LEINVEBER, J. – VÁVRA, P.: *Strojnické tabulky*. 5. doplněné vydání. Praha: Albra, 2011. ISBN 80-7361-033-7.