Dr. Cynthia Hog-Angeloni Dr. D. Festi

4. Übung zur Vorlesung

Topologie

im Wintersemester 19/20

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Auf $\mathbb{R}$ wird durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ eine Äquivalenzrelation definiert. Zeigen Sie, dass $X := \mathbb{R}/\sim$ unendlich viele Punkte hat, und die Quotiententopologie die Klumpentopologie $\{\emptyset, X\}$ ist.

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Die *konvexe Hülle* einer Menge ist die kleinste abgeschlossene und konvexe Menge, die die gegebene Menge enthält.
Zeigen Sie: Die konvexe Hülle endlich vieler Punkte $x_1, \dots, x_n$ im $\mathbb{R}^d$ ist gegeben durch alle Punkte der Form $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, wobei $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Aufgabe 3: (30 Punkte)

Der topologische Raum $\mathbb{RP}^n$ ist gegeben als $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, wobei

$$(x_0, ..., x_n) \sim (y_0, ..., y_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ sodass } y_i = \lambda x_i \text{ für alle } i.$$

Man bezeichnet die Restklasse von $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ in $\mathbb{RP}^n$ mit $[x_0 : \dots : x_n]$.
Betrachten Sie für $i = 0, ..., n$ die Mengen $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{RP}^n \mid x_i \neq 0\}$ und die Abbildungen $\varphi_i \colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\varphi_i([x_0 : \dots : x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i})$.
Zeigen Sie, dass

(a) die Mengen U_i eine offene Überdeckung von $\mathbb{RP}^n$ bilden,

(b) die Abbildungen φ_i Homöomorphismen sind,

(c) $\mathbb{RP}^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 4: (Universelle Eigenschaft der Quotiententopologie) (30 Punkte)

Seien X, Y zwei topologische Räume, und sei $p \colon X \to Y$ eine stetige und surjektive Abbildung. Zeigen sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Abbildung $p : X \to Y$ lässt sich mit einem Quotienten identifizieren. Das heisst es gibt eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X und einen Homöomorphismus $f : Y \to X/\sim$, sodass $f \circ p = \pi$, wobei π die Projektion von X auf $X/\sim$ ist.

(ii) Für jeden topologischen Raum Z und jede stetige Abbildung $g \colon X \to Z$ so dass für jede $a, b \in X$, $p(a) = p(b)$ impliziert dass $g(a) = g(b)$, gibt es genau eine stetige Abbildung $f \colon Y \to Z$ so dass $f \circ p = g$.

(iii) Für jeden topologischen Raum Z und jede Abbildung $g \colon Y \to Z$

$$g \text{ stetig} \Leftrightarrow g \circ p \text{ stetig.}$$

Abgabe am Montag, den 18.11. um 8 Uhr.