PRODUTOS TOPOLÓGICOS
E FUNÇÕES CARDINAIS

Renata Grunberg

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: Topologia Geral
Orientadora: Profa. Dra. Ofelia Teresa Alas

- São Paulo, junho de 1991 -

Este trabalho foi financiado pelo CNPq

RESUMO

O trabalho apresenta o estudo da preservação de algumas propriedades topológicas em produtos de espaços topológicos e de grupos topológicos. São provados teoremas e são exibidos exemplos, algumas vezes utilizando axiomas adicionais a ZFC e técnicas de Forcing. Finalmente, com o estudo de propriedades em produtos, é descrita uma condição para que um grupo paratopológico seja um grupo topológico e, posteriormente, um método mais geral para obter resultados desse tipo.

ABSTRACT

This work presents the study of the preservation of some properties on topological products of spaces and topological groups. Theorems are proved and examples are shown, sometimes using additional axioms to ZFC and Forcing techniques. Finally, by studying some properties on products a sufficient condition for a topological group to be a topological group is described and afterwards a more general method for obtaining results of this kind is also shown.

Aos meus pais,

AGRADECIMENTOS

- A minha orientadora, Profa. Ofelia Teresa Alas, pela dedicação e paciência, pela amizade e pelo exemplo.
- Aos meus avós, tios, primos e às minhas irmãs.
- Ao Prof. Newton C. A. da Costa.
- Aos docentes do Departamento de Matemática, em especial, Daciberg Lima Gonçalves, Iole de Freitas Druck, Maria Stella Amorim Coutinho Castilla, Odilon Otávio Luciano, Chaim Samuel Hönig, Francisco Miraglia Neto, Stavros Christodoulou, Paulo Domingos Cordaro.
- Aos meus "especiais" amigos: Carlos Alberto Lopes Dantas, Carlos Henrique Barbosa Gonçalves, Lúcia Renato Junqueira, Márcia Salzano, Pedro Lívio Bolzan de Paiva, Lúcio Marcos Gonçalves Prado, Hugo de los Santos Rojas, Yamin Muyal, Carlos correa Filho e Juliana Rita Fleitas.
- A Cássio Shimuta e Artur H. Tomita, pela amizade e pela paciência em todos esses anos.
- Ao Prof. Frank Tall, pelo incentivo.
- Ao Eduardo, pelo companheirismo e pela presença.
- A Walter V. Fernandes, pela digitação.
- Aos funcionários da Biblioteca, da Xerox e pessoal da SPG.

PREFÁCIO

O objetivo deste trabalho é apresentar o estudo da preservação de certas propriedades em produtos de espaços topológicos e de grupos topológicos.

A maioria dos resultados é composta por contra-exemplos, isto é, a maioria das propriedades não é preservada em produtos. Para tornar isso possível, foi necessária a utilização de axiomas consistentes com ZFC e técnicas de Forcing.

No capítulo I são dados os preliminares. No Capítulo II são dados contra-exemplos (em ZFC ou não) em espaços topológicos. No capítulo III é provado que uma das propriedades (pseudocompacidade) é preservada em produtos arbitrários de grupos topológicos. No capítulo IV é apresentada uma condição suficiente, para preservar compacidade enumerável, que é de certa forma natural em grupos topológicos, considerando o Teorema IV-3.2. O capítulo V apresenta os contra-exemplos (nenhum em ZFC) para grupos topológicos. O capítulo VI apresenta uma aplicação do estudo de propriedades em produtos topológicos à determinação de quando um grupo paratopológico é grupo topológico.

No final de cada capítulo, nos comentários finais, são dadas as fontes dos resultados.

NOTAÇÕES

Denotaremos, a menos de menção explícita,

(a) Se X é conjunto, $|X|$ será a cardinalidade de X.

(b) $\omega = \aleph_0$ será o conjunto dos ordinais finitos, $\mathbb{N}$ idem, $\omega_1 = \omega^+ = \aleph_1$.

(c) $\mathbb{R}$ será o conjunto dos números reais.

(d) τ, λ, κ serão cardinais finitos.

(e) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \mu$ serão ordinais.

(f) $c = |\mathbb{R}|$.

(g) $[B]^\lambda = \{X \subset B : |X| = \lambda\}$ e $[B]^{<\lambda} = \cup_{\tau<\lambda}[B]^\tau$.

(h) Se f é função $\mathrm{dom}(f)$ será seu domínio, $\mathrm{Im}(f)$ sua imagem e se, $f : X \to Y \quad f''(X) = \{f(y) : y \in X\}$.

(i) Se X é espaço topológico e $A \subset X, \overline{A}^X$ e $cl_X(A)$ denotam, ambos o fecho de A em X. Quando não houver possibilidade de confusão denotaremos $\overline{A}$ ou $cl(A)$.

$\mathrm{int}(A)$ será o interior de A.

(j) $\kappa^\lambda = \{f : \mathrm{dom}(f) = \lambda \text{ e } \mathrm{Im}(f) \subset \kappa\}$.

(k) Se $x \in \kappa^\lambda$ e $h(x) \in \kappa \quad x \wedge h(x) \in \kappa^{\lambda+1}$ onde $x \wedge h(x)(\alpha) = x(\alpha)$ se $\alpha < \lambda$ e $x \wedge h(x)(\lambda) = h(x)$

(l) CH é a hipótese do contínuo, i.é $c = \omega_1$.

(m) GCH é a hipótese generalizada do contínuo, i.é, $2^\kappa = \kappa^+$.

(n) Teoremas, Lemas e Proposições.

Ao se referir a algum deles, o algarismo romano indicará o capítulo onde se encontra, o primeiro algarismo arábico indicará o parágrafo, no capítulo. A ausência de algarismo romano indica a presença no mesmo capítulo.

(o) Se $x \in X, [\{x\}] = \{A \subset X : x \in A\}$

(p) Se $A \subset G$, onde G é um grupo, $[A]$ será o grupo gerado por A. O contexto evitará confusões com o item o.

(q) Se κ é cardinal e $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é família de conjuntos

i) $\pi_\gamma : \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in\gamma} X_\alpha$, onde $\gamma < \kappa$, é a projeção.

ii) $\pi^\gamma : \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \to X_\gamma$ é a projeção.

iii) Se $\Delta \subsetneq \kappa$

$\pi_\Delta : \prod_{\alpha\in\kappa} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$, é a projeção.

(r) Se $f : X \to Y$ é função e $A \subseteq X$, $f \nearrow_A$ é a restrição de f a A.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

1. CONSISTÊNCIA E INDEPENDÊNCIA

A - Definições

Seja L uma linguagem e Σ um conjunto de sentenças dessa linguagem:

Definição 1.1 Seja ϕ uma fórmula de L : ϕ é dita *consistente com* Σ se e somente se $\Sigma \cup \{\phi\}$ for consistente e ϕ é dita *independente* de Σ se ambos $\Sigma \cup \{\phi\}$ e $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ forem consistentes.

Lema 1.1 $\Sigma \cup \{\phi\}$ é consistente se e somente se não é possível $\Sigma \vdash \neg\phi$.

Lema 1.2 Se $\Sigma \vdash \phi$ então existe $\Sigma' \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma' \vdash \phi$ e Σ' é finita.

Nesse trabalho, L será a linguagem da Teoria dos Conjuntos e Σ será ZFC (i.e., a axiomática de Zermelo-Frankel, com o Axioma da Escolha).

B - Relativização e o Teorema de Gödel

Definição 1.3 Uma *interpretação* relativa da Teoria dos Conjuntos nela mesma consiste de duas fórmulas, $M(x, v)$ e $E(x, y, v)$, com todas as variáveis livres exibidas.

Se ϕ é uma fórmula, definimos $\phi^{M,E}$ trocando $x \in y$ por $E(x, y, v)$ e restringindo as variáveis ligadas, que passam a variar sobre M, isto é, os x tais que $M(x, v)$.

Nas relativizações usuais, quando M é classe definida ou conjunto, $E(x, y, v)$ é $x \in y$ e $M(x, v)$ é $M(x)$ (ou $x \in v$, se M é conjunto).

Em [K], capítulo IV, parágrafo 8, podemos constatar que relativizações levam a demonstrações de consistência.

Além disso, obtemos a internalização do Teorema da Completude de Gödel:

Teorema 1.1 Para cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ da linguagem da Teoria dos Conjuntos

$$\mathrm{ZFC} \vdash \forall < M, E > \forall x_1, \ldots, x_n (\phi^{M,E}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow < M, E > \models [\phi][< x_1, \ldots, x_n >]$$

onde $[\phi]$ é uma constante adicionada à linguagem de ZFC, que representa ϕ formalmente e $< M, E >$ é modelo para ZFC. Dessa forma

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{cons}(\mathrm{ZFC} + \phi) \leftrightarrow \exists < M, E > \phi^{M,E}(x_1, \ldots, x_n)$$

C - Comentários finais

As demonstrações e definições precisas podem ser encontradas em [K].

2. PRINCÍPIOS COMBINATÓRIOS

A - O Axioma de Martin

O Axioma de Martin (MA) pode ser visto como uma versão mais fraca da Hipótese do Contínuo, já que CH $\rightarrow$ MA e utilizando-se forcing pode-se provar cons(ZFC) $\rightarrow$ cons(ZFC + MA + $2^\omega \neq \omega_1$). Ao invés de negar a existência de cardinais entre ω e 2^ω, afirma que, se eles existem, devem se comportar, num certo sentido, como ω. Algumas consequências de MA podem ilustrar este fato:

1 - $\kappa < 2^\omega \rightarrow 2^\kappa = 2^\omega$

2 - $\kappa < 2^\omega \rightarrow$ A união de κ subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue nula tem medida nula.

3 - $\kappa < 2^\omega \rightarrow$ A intersecção de κ abertos densos em $\mathbb{R}$ é não vazia.

Resta notar que 1, 2, 3 são automaticamente válidas para $\kappa = \omega$.

Daremos agora o enunciado do Axioma de Martin, usando ordens parciais:

Definição 2.1 Uma *ordem parcial* é um par $< \mathbb{P}, \leq >$ tal que $\mathbb{P} \neq \emptyset$ e $\leq$ é uma relação em $\mathbb{P}$ que é transitiva, i.e. $\forall p \forall q \forall r (p \leq q \wedge q \leq r \rightarrow p \leq r)$.

Abusaremos da notação ao denotar uma ordem parcial somente por $\mathbb{P}$.

De agora em diante, seja $\mathbb{P}$ uma ordem parcial.

Definição 2.2 Uma *cadeia* em $\mathbb{P}$ é um subconjunto C de $\mathbb{P}$ tal que se $p, q \in C$ então $p \leq q$ ou $q \leq p$.

Definição 2.3 Se $p, q \in \mathbb{P}$, p e q são ditos *compatíveis* se $\exists r \in \mathbb{P}, r \leq p \wedge r \leq q$, caso contrário p e q são ditos *incompatíveis*, o que denotaremos $p \perp q$.

Um subconjunto A de $\mathbb{P}$ é dito uma *anticadeia* se todos os seus elementos forem dois a dois incompatíveis.

Definição 2.4 $\mathbb{P}$ tem a condição da cadeia enumerável (c.c.c.) se e somente se toda anticadeia em $\mathbb{P}$ for enumerável.

Definição 2.5 $D \subseteq \mathbb{P}$ é dito *denso* se e somente se $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D(q \leq p)$.

Definição 2.6 $G \subseteq \mathbb{P}$ é dito um *filtro* se satisfizer às seguintes condições:

(a) $\forall p, q \in G \exists (r \in G r \leq p \wedge r \leq q)$

(b) $\forall p \in G \forall q \in \mathbb{P}(q \geq p \rightarrow q \in G)$

Definição 2.7 Se κ é um cardinal, MA(κ) é a sentença:

Se $\mathbb{P}$ é uma ordem parcial que tem c.c.c. e $\mathcal{D}$ é uma família de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ com $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ então existe um filtro G, $G \subseteq \mathbb{P}$ tal que $G \cap D \neq \emptyset, \forall D \in \mathcal{D}$.

2.8 *O Axioma de Martin (MA)* é: $\forall \kappa < 2^{\omega}(\mathrm{MA}(\kappa))$.

B - Combinatória Infinita

Definição 2.9 Seja κ um cardinal infinito. Se $x, y \subseteq \kappa$, x e y são quase disjuntos ($q.d.$) se e somente se $|x \cap y| < \kappa$. Uma *família q.d.* é $\mathcal{A} \subseteq P(\kappa)$ tal que $\forall x \in \mathcal{A}(|x| = \kappa)$ e todos os elementos de $\mathcal{A}$ são dois a dois q.d. Uma família $\mathcal{A}$ nessas condições é dita maximal, se não existe outra, satisfazendo às mesmas condições que contém $\mathcal{A}$ propriamente.

Teorema 2.1 Se $\kappa \geq \omega$ e $2^{<\kappa} = \kappa$ então existe uma família $q.d$ com $|\mathcal{A}| = 2^{\kappa}$ e $\mathcal{A} \subset P(\kappa)$.

Definição 2.10 Uma família $\mathcal{A}$ de conjuntos é chamada um Δ-sistema sse existe um conjunto fixo r, chamado de *raiz* do Δ-sistema tal que se $a, b \in \mathcal{A}, a \neq b \rightarrow a \cap b = r$.

Teorema 2.2 (*Lema do Δ-sistema*) Seja κ cardinal infinito. Seja $\theta > \kappa$ cardinal regular tal que $(\forall \alpha < \theta)(|\alpha^{<\kappa}| < \theta)$ e $|\mathcal{A}| \geq \theta$ e $\forall x \in \mathcal{A}(|x| < \kappa)$. Então $\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{B}| = \theta$ e $\mathcal{B}$ é Δ-sistema.

Comentários finais

As demonstrações dos Teoremas e Lemas desse parágrafo, novamente podem ser encontradas em [K].

3. FORCING

A técnica de Forcing foi criada em 1963, resolvendo o problema da independência do Axioma da Escolha e da Hipótese Generalizada do Contínuo.

Apesar da abordagem inicial desse método desenvolvido por Cohen ter sido sintática, a abordagem usada neste trabalho será semântica, isto é, usará modelos para ZFC.

Como o Teorema da Incompletude de Gödel afirma a improvabilidade da consistência de ZFC em ZFC e, portanto, a inexistência de modelos para ZFC (em ZFC), a estrutura formal usada para demonstrar cons(ZFC) $\rightarrow$ cons(ZFC + Φ), onde Φ é uma fórmula da linguagem da Teoria dos Conjuntos, será a seguinte:

Assuma que podemos derivar uma contradição de ZFC + Φ (i.e. ZFC + Φ é inconsistente). Então existe uma lista finita de axiomas de ZFC + $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ tal que $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \vdash \psi \wedge \neg\psi$.

Mas, pelo método de forcing, mostraremos que ZFC $\vdash \exists N(\Phi_1^N \wedge \ldots \wedge \Phi_n^N)$ e logo ZFC $\vdash \exists N(\psi^N \wedge \neg\psi^N)$.

O processo acima descrito é totalmente finitista, evitando, assim, dificuldades metamatemáticas.

Finalmente, ao se dizer "Seja M um modelo transitivo enumerável para ZFC" (c.t.m.) deve-se entender um modelo transitivo enumerável para uma lista finita de axiomas convenientes de ZFC, isto é, na notação anterior, $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\} \setminus \{\Phi\}$.

Uma descrição do desenvolvimento histórico do forcing pode ser encontrada em [Mo].

De agora em diante, fixaremos um c.t.m. para ZFC.

Definição 3.1 Uma ordem parcial, $\mathbb{P}$, tem maior elemento se existe $1 \in \mathbb{P}$ tal que $\forall q \in \mathbb{P}\ (q \leq 1)$.

Desse momento em diante, ao se usar forcing todas as ordens parciais consideradas terão maior elemento.

Segundo, ainda, as definições de $\underline{2}$. Seja $\mathbb{P}$ uma ordem parcial,

Definição 3.2 Um filtro G é dito $\mathbb{P}$-*genérico sobre* M se $\forall D \subset \mathbb{P}$ denso $(D \in M \rightarrow G \cap D \neq \emptyset)$.

Lema 3.1 Se M é enumerável e $p \in \mathbb{P}$ então existe um filtro G que é $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$.

Lema 3.2 Se Mé c.t.m. para ZF $-P$ (onde P é o axioma das partes), $\mathbb{P} \in M$ é tal que $\forall p \in \mathbb{P}, \exists q, r \in \mathbb{P}, q \leq p, r \leq p \wedge r \perp q \quad (*)$ então, se G é $\mathbb{P}$-genérico sobre M, tem-se $G \notin$ M.

Definição 3.3 Uma ordem que satizfaz $(*)$ é dita não atômica.

De fato, se $G \in$ M, a extensão é trivial. O lema 3.2 nos explica o que a extensão a ser definida tem "a mais" do que o modelo inicial.

Definição 3.4 τ é um $\mathbb{P}$-*nome* $\rightarrow \tau$ é uma relação e $\forall <\sigma, p> \in \tau[\sigma$ é$\mathbb{P}$-nome e $p \in \mathbb{P}]$.

OBS.: A definição anterior é uma definição por recursão transfinita, como a seguinte:

Definição 3.5 Se $G \subseteq \mathbb{P}$, e (τ é $\mathbb{P}$-nome)$^{\mathrm{M}}$ $\underline{\mathrm{val}(\tau, G)} = \{\mathrm{val}(\sigma, G) : \exists p \in G(<\sigma, p> \in \tau)\}$.

Denotaremos val(τ, G) por $\underline{\tau_G}$.

Definição 3.6 $V^{\mathbb{P}}$ é a classe dos $\mathbb{P}$-nomes e $M^{\mathbb{P}}$ é $V^{\mathbb{P}} \cap \mathrm{M} = \{\tau : (\tau$ é $\mathbb{P}$-nome$)^M\}$.

Definição 3.7 Seja M c.t.m. tal que $\mathbb{P} \in$ M. Seja $G \subseteq \mathbb{P}$ então $\underline{\mathrm{M}[G] = \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}}$.

Lema 3.3 Se Né modelo transitivo para ZFC tal que M $\subset N$ e $G \in$ N então M$[G] \subset N$.

Definição 3.8 Se $x \in$ M, defina recursivamente $\underline{\check{x} = \{<\check{y}, 1>: y \in x\}}$

Definição 3.9 $\Gamma = \{<\check{p}, p>: p \in \mathbb{P}\}$.

Lema 3.4 Se M é um modelo transitivo para ZFC, $\mathbb{P}$ é ordem parcial, $\mathbb{P} \in$ M e $G \subseteq \mathbb{P}$ é um filtro não vazio, então:

(a) $\forall x \in M(\check{x} \in M^{\mathbb{P}} \wedge \text{val}(\check{x}, G) = x)$

(b) $\text{M} \subset \text{M}[G]$

(c) $\text{val}(\Gamma, G) = \text{G}$

(d) M$[G]$ é transitivo

(e) Os ordinais de M são os mesmos de M$[G]$.

Definição 3.10 Se $E \subset \mathbb{P}, p \in \mathbb{P}$. E *é denso sob* p sse

$$\forall q \leq p \exists r \leq q(r \in E)$$

Lema 3.5 Se $\mathbb{P} \in \text{M}, E \subseteq \mathbb{P}, E \in \text{M}$. Seja G $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Então

(a) ou $G \cap E \neq \emptyset$ ou $\exists q \in G$ tal que $\forall r \in E(r \perp q)$

(b) se $p \in G$ e E é denso sob $\mathbb{P}$ então $G \cap E \neq \emptyset$

Definição 3.11 Seja $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ uma fórmula com todas as variáveis livres mostradas, M c.t.m. para ZFC, $\mathbb{P}$ ordem parcial, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ e $p \in \mathbb{P}$. Então $p \Vdash_{P,M} \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ (lê-se p *força* ϕ) $\Leftrightarrow \forall G(G$ $\mathbb{P}$-genérico sobre M $\wedge\, p \in G) \rightarrow \phi^{\text{M}[G]}((\tau_1)_G, \ldots, (\tau_n)_G)$.

Escreveremos $\Vdash$ ao invés de $\Vdash_{P,M}$ quando não houver perigo de confusão.

Lema 3.6 Na notação da Definição 3.11

(a) $(p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge q \leq p) \rightarrow q \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

(b) $(p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge p \Vdash \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \leftrightarrow p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

Note que essa definição é feita, em geral em V, não em M, pois pelo lema 3.2, na maioria dos casos, $G \notin$ M. Porém pode ser encontrada em [K] uma definição em M que é equivalente à dada, e a partir da qual chegamos ao "Teorema Fundamental do Forcing".

Teorema 3.1 Se G é $\mathbb{P}$-genérico sobre M e $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ é fórmula com as variáveis livres exibidas, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$, então

$$(\phi((\tau_1)_G, \ldots, (\tau_n)_G)))^{\mathrm{M}[G]} \Leftrightarrow \exists p \in G \; p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

Finalmente,

Teorema 3.2 Se M é c.t.m. para ZFC, $< \mathbb{P}, \leq, 1 >$ p.o em M e G $\mathbb{P}$-genérico sobre M, então M$[G]$ satisfaz ZFC.

OBS.: Denotaremos por $\underline{o(\mathrm{N})}$ os ordinais de N.

Definição 3.12 $\underline{Fn(I, J)} = \{P : |p| < \omega \wedge p$ é função, $\mathrm{dom}(p) \subseteq I \wedge \mathrm{Im}(p) \subseteq J\}$

Ordenado por $p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p$.

Definição 3.13 Se $\mathbb{P} \in$ M, $\mathbb{P}$ *preserva cardinais* $\leftrightarrow$ se G é $\mathbb{P}$-genérico sobre M $\forall \beta \in O(\mathrm{M})$ $((\beta$ é cardinal$)^M \leftrightarrow (\beta$ é cardinal$)^{M[G]})$.

Teorema 3.3 Se $\mathbb{P} \in$ M e ($\mathbb{P}$ tem c.c.c)$^{\mathrm{M}}$ então $\mathbb{P}$ preserva cardinais.

Lema 3.7 Se I é arbitrário e J é enumerável, $Fn(I, J)$ tem c.c.c. e portanto preserva cardinais.

Corolário 3.7 (Em M)

Se $\mathbb{P} \subseteq Fn(I, J)$, J enumerável é tal que para todos $a, b \in \mathbb{P}$ com $a(x) = b(x), \forall x \in \mathrm{dom}(a) \cap \mathrm{dom}(b), a \cup b \in \mathbb{P}$, então $\mathbb{P}$ tem c.c.c. e portanto preserva cardinais.

Teorema 3.4 Assuma $\mathbb{P} \in$ M, ($\mathbb{P}$ tem c.c.c.)$^{\mathrm{M}}$ e $A, B \in$ M. Seja G $\mathbb{P}$-genérico sobre M e $f \in$ M$[G]$ $f : A \to B$. Então existe $F : A \to P(B), F \in M$ e $\forall x \in A$ $(f(a) \in F(a)) \wedge (|F(a)| \leq \omega)^{\mathrm{M}})$.

OBS.: Se G é $Fn(I,J)$ genérico $\bigcup G : I \to J$ é função sobrejetora.

Comentários finais

Uma descrição completa e detalhada dos fatos mencionados neste parágrafo pode ser encontrada em [K].

4. GRUPOS TOPOLÓGICOS

Definição 4.1 Seja $< G, \cdot >$ um grupo e seja τ uma topologia sobre G. Dizemos que $< G, \cdot, \tau >$ é um grupo topológico se:

(a) $\cdot : G \times G \to G$ é τ-contínua

(b) $f : G \to G$

$x \mapsto f(x) = x^{-1}$ é τ-contínua

Nesse trabalho, consideraremos somente grupos topológicos T_1, isto é, $\forall x \forall y \in G\ \exists V$ vizinhança de x tal que $y \notin$ V.

Teorema 4.1 [En]

Se G é um grupo topológico T_1 então G é Tychonoff.

Teorema 4.2 [H.R.]

Seja G um grupo topológico T_1. G é metrizável se e somente se existe um sistema fundamental enumerável de vizinhanças sobre e (o elemento neutro de G).

Lema 4.1 Seja G um grupo e $\mathcal{V} \subset P(G)$ com a propriedade das intersecções finitas i.e. (toda intersecção finita de elementos de $\mathcal{V}$ é não vazia). Se $\mathcal{V}$ satisfaz

(a) $\forall U \in \mathcal{V}, \exists V \in \mathcal{V}$ tal que $V^2 \subset U$

(b) $\forall U \in \mathcal{V}, \exists V \in \mathcal{V}$ tal que $V^{-1} \subset U$

(c) $\forall U \in \mathcal{V}$ e $\forall x \in U, \exists V \in \mathcal{V}$ tal que $x.V \subset U$

(d) $\forall U \in \mathcal{V}$ e $\forall x \in G, \exists V \in \mathcal{V}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$

(e) $\forall VU \in \mathcal{V}, \exists W \in \mathcal{V} \quad W \subset U \cap$ V

então $\{xU\}_{\substack{U \in \mathcal{V} \\ x \in G}}$ e $\{Ux\}_{\substack{U \in \mathcal{V} \\ x \in G}}$ são bases abertas para uma topologia em G que tornam G um grupo topológico.

Além disso, se $\mathcal{V}$ satisfaz f) $\forall x \in G(x \neq$ e $\to \exists U \in \mathcal{V}$ tal que $x \notin$ U).

Então G é grupo topológico T_1.

Teorema 4.3 [[H.R.] pag. 71]

Seja G um grupo compacto com identidade e. Então, para cada família $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vizinhanças de e, existe um subgrupo normal compacto N de G tal que N$\subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ e G/N é metrizável, $\omega(G/N) = \omega$.

Teorema 4.4 [Ha]

Seja G um grupo topológico. Seja E um subconjunto de Baire de G, isto é, pertencente à menor σ-álgebra que contém todos os fechados G_δ. Então existe um subgrupo normal (no sentido algébrico), compacto, e de Baire, Y, de G, tal que $E = \cup_{i=1}^{n} x_i Y$.

5. ALGUNS CONCEITOS TOPOLÓGICOS

Definição 5.1 Um espaço topológico é dito *pseudocompacto* se $\forall f : X \to \mathbb{R}$ contínua é limitada.

Definição 5.2 Uma família $\{V_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X, espaço topológico é dita *localmente finita* se todo ponto de X admite uma vizinhança que encontra um número finito de elementos de $\{V_i\}_{i\in I}$.

Com essas definições é fácil perceber que:

Teorema 5.1 Um espaço topológico X é pseudocompacto $\Leftrightarrow$ toda família localmente finita, de abertos, é finita.

6. FUNÇÕES CARDINAIS

Definição 6.1 Uma *função cardinal* é uma associação de um cardinal a cada espaço topológico de forma que a espaços homeomorfos seja associado o mesmo cardinal.

Em seguida, vamos definir algumas funções cardinais.

Seja X um espaço topológico

Definição 6.2

(a) *Peso*: $\underline{w(X)} = \min\{|B| :$ é base de abertos para $X\} + \omega$

(b) *Caráter*: $\underline{\chi(X)} = \sup\{\chi(X,x) : x \in X\} + \omega$ onde

$\chi(X,x) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}$ é sistema fundamental de vizinhanças para $x\}$

(c) *Celularidade*: $c(X) = \min\{\alpha :$ qualquer família de abertos 2 a 2 disjuntos tem cardinalidade $\leq \alpha\} + \omega$

(d) *Grau de Lindelöf*

$L(X) = \min\{\kappa :$ toda cobertura aberta de X admite subcobertura de cardinalidade $\leq \kappa\}$

(e) *tightness*

$t(X) = \sup\{t(p, X) : p \in X\}$ onde $t(p, X) = \min\{\alpha : \forall B \subset \mathrm{X}(p \in \overline{B} \rightarrow \exists \mathrm{M} \subseteq B)(p \in \overline{M} \wedge |M| \leq \alpha)\}$

(f) *Pseudo-caráter* (para X T_1)

$\psi(X) = \sup\{\psi(p, X) : p \in X\}$ onde $\psi(p, X) = \min\{|V| : V$ é família de abertos e $\{p\} = \cap V\}$

7. ULTRAFILTROS E O COMPACTIFICADO DE STONE-ČECH

A - O compactificado de Stone Čech

Neste parágrafo será definido o compactificado de Stone Čech, e será dada uma definição do mesmo através de ultrafiltros, X será um espaço topológico completamente regular.

Definição 7.1 Um par $< cX, c >$ onde cX é um espaço toploógico e $c : X \to cX$ é contínua é dita uma compactificação de X se:

(i) $c''(X) = \{c(x) : x \in X\}$ é denso em cX;

(ii) $c : X \to c''(X)$ é homeomorfismo;

(iii) cX é compacto.

Assumiremos, devido a (ii), $X \subseteq cX$, quando conveniente.

Teorema 7.1 Existe uma compactificação de X, $< \beta X, \beta >$, tal que se $f : X \to Y$ é contínua e Y é compacto então $\exists \tilde{f} : \beta X \to Y$ que estende f. Essa é a *compactificação de Stone Čech* de X.

Teorema 7.2 Se $< cX, c >$ é uma compactificação de X tal que toda função $f : X \to Y$ contínua, Y compacto, admite extensão $\tilde{f} : cX \to Y$ então $< cX, c >$ é *equivalente* a $< \beta X, \beta >$, isto é, $\exists h : cX \to \beta X$ homeomorfismo tal que $h \circ c = \beta$.

Teorema 7.3 Se toda função contínua $f : X \to I = [0,1]$ é estendível a $\tilde{f} : aX \to I$ onde aX é uma compactificação de X, então aX é equivalente a βX.

Teorema 7.4 Se $\mathbb{N}$ é o conjunto dos naturais com a topologia discreta, então todo subconjunto infinito fechado $F \subset \beta\mathbb{N}$ tem cardinalidade 2^c $(c = |\mathbb{R}|)$.

Definição 7.2 Denotaremos $X^* = \beta X \backslash X$.

Comentários finais

Todas as demonstrações podem ser encontradas em [En].

B - Ultrafiltros em conjuntos

Definição 7.3 Seja X um conjunto. Um *filtro* em X é um subconjunto f de $P(X)$ tal que

(a) $A, B \in f \rightarrow A \cap B \in f$

(b) $A \in f$ e $X \supset B \supset A \rightarrow B \in f$ (c)$\emptyset \notin f$.

Um *ultrafiltro* em X é um filtro maximal, isto é, não está contido propriamente em nenhum outro filtro.

Lema 7.1:

(a) Toda família $\mathcal{A} \subset P(X)$ com a propriedade das intersecções finitas (p.i.f.), i.é, toda intersecção finita de elementos de $\mathcal{A}$ é não vazia, pode ser estendida a um filtro.

(b) Todo filtro pode ser estendido a um ultrafiltro.

(c) $u \subset P(X)$ é ultrafiltro $\leftrightarrow$ u é filtro e $\forall A \in P(X) \quad A \in u$ ou $X \backslash A \in u$.

Definição 7.4 Um ultrafiltro u em X é dito *não principal* se $\{x\} \notin u \quad \forall x \in$ X caso contrário é dito *principal*.

C - Compactificação de Stone Čech de espaços discretos

Seja X um espaço discreto. Coloque $U(X) = \{\mathcal{U} \subseteq P(X)$ t.q. $\mathcal{U}$ é ultrafiltro$\}$. Seja $E \subseteq X$.

$$\mathrm{N}(E) = \{\mathcal{U} \in \mathrm{U}(X) : E \in \mathcal{U}\}$$

$$B = \{N(E) : E \in P(X)\}$$

B é base para a topologia de $U(X)$ pois $N(E) \cap N(F) = N(E \cap F)$.

Lema 7.2 $U(X)$ com essa topologia é Hausdorff.

Demonstração: Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in U(X)$ tal que $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$. Então $\exists E \in P(X)$ tal que $E \in \mathcal{U} \backslash \mathcal{V}$.

Logo, $\mathcal{U} \in N(E), \mathcal{V} \in N(X \backslash E)$ e $N(E) \cap N(X \backslash E) = \emptyset$.

Lema 7.3 $U(X)$ com essa topologia é compacto.

Demonstração: Seja $\mathcal{G}$ cobertura de $U(X)$ por abertos $\forall \mathcal{U} \in U(X), \exists E_{\mathcal{U}} \subset X$ e $G_{\mathcal{U}} \in \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{U} \in \mathrm{N}(E_{\mathcal{U}}) \subset G_{\mathcal{U}}$.

Se nenhuma coleção finita de conjuntos $N(E_{\mathcal{U}})$ cobre $U(X)$, então os complementos $U(X) \backslash (E_{\mathcal{U}}) = N(X \backslash E_{\mathcal{U}})$ tem p.i.f. e consequentemente os conjuntos $X \backslash E_{\mathcal{U}}$ tem p.i.f. Logo, pelo lema 7.1, (a) e (b), $\exists \mathcal{V} \in U(X)$ tal que $X \backslash E_{\mathcal{U}} \in \mathcal{V}, \forall \mathcal{U} \in U(X)$. Em particular, $N \backslash E_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ e, portanto, $\mathcal{V} \in \mathrm{U(X)} \backslash \mathrm{N}(E_{\mathcal{V}})$, contra a escolha.

Definição 7.3 Se $x \in X$ defino $\mathcal{U}_x = \{E \subseteq X : x \in E\}$.

Lema 7.4 A função

$$f : X \to U(X)$$

$$x \to \mathcal{U}_x$$

é um homeomorfismo de X sobre um conjunto denso de $U(X)$.

Demonstração:

(a) $\{\mathcal{U}_x : x \in X\}$ é denso em $U(X)$

Seja $\phi \neq E \subseteq X$. $\exists x_0 \in E$, portanto, $\mathcal{U}_{x_0} \in N(E)$

(b) $\{\mathcal{U}_x\}$ é aberto em $\mathrm{U}(X)$ pois $\{\mathcal{U}_x\} = \mathrm{N}(\{x\})$

Como X é discreto e $\{\mathcal{U}_x : x \in X\}$ também, f é homeomorfismo (já que é trivialmente injetora).

Identifique X com $\{\mathcal{U}_x : x \in X\}$.

Lema 7.5 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ limitada. Então existe $\tilde{f} : U(X) \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\tilde{f} \nearrow_X = f$.

Demonstração: $\forall \mathcal{U} \in U(X), \{f''(E) : E \in \mathcal{U}\}$ tem p.i.f. Como $\overline{f''(E)}$ é compacto, $\forall E \in \mathcal{U}$, $K_{\mathcal{U}} = \bigcap_{E \in \mathcal{U}} \overline{f''(E)}$ é não vazio.

Defina $\tilde{f}(\mathcal{U})$ de forma que $\tilde{f}(\mathcal{U}) \in K_{\mathcal{U}}$ (*). $\tilde{f}$ é contínua:

Seja $\mathcal{U}_0 \in \mathrm{U}(X)$ e $\epsilon > 0$

$$E_0 = \{x \in X : |f(X) \backslash \tilde{f}(\mathcal{U})| < \epsilon\}$$

Como $f''(E)$ tem pontos no segmento $(\tilde{f}(\mathcal{U}_0) - \epsilon, \tilde{f}(\mathcal{U}_0) + \epsilon), \forall E \in \mathcal{U}_0$, por (*).

$$\Rightarrow E_0 \cap E \neq \emptyset, \forall E \in \mathcal{U}_0, \text{ logo } E_0 \in \mathcal{U}_0$$

logo $\mathcal{U}_0 \in N(E_0)$.

Logo $|f(\mathcal{U}) - f(\mathcal{U}_0)| \leq \epsilon\ \forall \mathcal{U} \in N(E_0)$, pois $\mathcal{U} \in N(E_0) \to E_0 \in \mathcal{U}$ logo $f(\mathcal{U}) \in \overline{f''(E_0)}$.

Logo $f(\mathcal{U}) \in [f(\mathcal{U}_0) - \epsilon, f(\mathcal{U}_0) + \epsilon]$.

Corolário 7.1 $U(X)$ é equivalente a βX.

Demonstração: Os lemas provados e o teorema 7.3 nos dão o resultado.

8. O ESPAÇO DE STONE

Neste parágrafo fixaremos $< \mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 >$ uma álgebra booleana denotada por $\mathbb{B}$.

Definição 8.1 $a, b \in \mathbb{B}, a \leq b \leftrightarrow a \wedge b = a$.

Definição 8.2 Dizemos que $u \subset \mathbb{B}$ é um *filtro* em $\mathbb{B}$ se satizfaz:

(a) $a, b \in u \rightarrow a \wedge b \in u$

(b) $a \in u \quad b \in \mathbb{B} \quad a \leq b \rightarrow b \in u$

(c) $0 \notin \mathcal{U}$

OBS.: Note que o filtro em um conjunto X definido no parágrafo 7 é caso particular de filtro sobre a álgebra booleana $< P(X), \cup, \cap, \emptyset, X >$.

Definição 8.3 Dizemos que um filtro u em $\mathbb{B}$ é um *ultrafiltro* em $\mathbb{B}$ se não está contido propriamente em nenhum outro filtro em $\mathbb{B}$.

Teorema 8.1 São equivalentes

(a) v é ultrafiltro

(b) $a \in \mathbb{B}, a \in v$ ou $\neg a \in v$.

Lema 8.1 Se $\mathcal{F} \in \mathbb{B}$ tem p.i.f. então existe um ultrafiltro em $\mathbb{B}, v$, tal que $\mathcal{F} \subseteq v$.

Definição 8.4 $\underline{S(\mathbb{B})}$ é o conjunto dos ultrafiltros sobre $\mathbb{B}$.

Definição 8.5

$$\psi . B \rightarrow P(S(\mathbb{B}))$$

$$a \mapsto \{u : a \in u\}$$

Teorema 8.2 $\psi(\mathbb{B}) = \{\psi(a) : a \in B\}$ é base para $S(B)$.

Demonstração: Trivial usando que

$\psi(0) = \emptyset$

$\psi(1) = S(\mathbb{B})$

$\psi(a \wedge b) = \psi(a) \wedge \psi(b)$

Teorema 8.3 $S(B)$ é compacto.

Demonstração: Análoga à do parágrafo 7.

Teorema 8.4 $\psi(a)$ é fechado $\forall a \in \mathbb{B}$.

Demonstração: Basta notar que $\psi(a) = S(B) \backslash \psi(\neg a)$.

Teorema 8.5 Seja $\mathbb{P}$ uma ordem parcial. Então existe uma álgebra booleana completa $\mathbb{B}$ e $i : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{B}$ tal que $\{i(x) : xX \in \mathbb{P}\}$ é denso em $\mathbb{B}$ i.e. $\forall y \in \mathbb{B}, y \neq 0, \exists x \in \mathbb{P}$ tal que $i(x) \leq y$ e

1 - $p \leq q \rightarrow i(p) \leq i(q)$

2 - $p \perp q \leftrightarrow i(p) \perp i(q)$

Demonstração: Defina uma topologia em $\mathbb{P}$ como se segue:

Se $p \in \mathbb{P}$, seja $N_p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$. Dê a $\mathbb{P}$ a topologia cuja base é $\{N_p : p \in \mathbb{P}\}$.

Seja $\mathbb{B} = \{A \subset \mathbb{P} : A$ é aberto e $\text{int}(\overline{A}) = A\}$ i.e os abertos regulares de $\mathbb{P}$.

Para $p \in \mathbb{P}$, defina $i(p) = \text{int}(\overline{N}_p)$.

i) $i''(\mathbb{P})$ é denso:

Seja b um aberto regular não vazio. Tome $p \in b$, $N_p \subseteq b$, logo $i(p) = \text{int}(\overline{N}_p) \subseteq \text{int}(\overline{b}) = b$.

ii) $p \leq q \rightarrow i(p) \leq i(q)$ trivial.

iii) Supondo que p e q sejam compatíveis $\exists r \quad r \leq p$ e $r \leq q$ e, portanto, por ii), $i(r) \leq i(p)$ e $i(r) \leq i(q)$. Se $p \perp q \rightarrow N_p \cap N_q = \emptyset$.

Como N_q é aberto $\overline{N}_p \cap N_q = \emptyset$.

Logo $i(p) \cap N_q = \mathrm{int}(N_p) \cap N_q = \emptyset$.

Mas $i(p)$ é aberto, portanto, $i(p) \cap \overline{N}_q = \emptyset$. Logo $i(p) \cap \mathrm{int}(\overline{N}_q) = i(p) \wedge i(q) = \emptyset$. ■

CAPÍTULO II

EXEMPLOS EM ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Neste capítulo são estudados alguns resultados à respeito da não preservação de funções cardinais em produtos de espaços topológicos.

1 - CELULARIDADE

Em [K-Teorema 2.24], usando M.A., é provado que se $\{X_i\}_{i\in I}$ é família de espaços topológicos tal que $c(X_i) = \omega, \forall i \in I$ então, se $X = \prod_{i\in I} X_i, c(X) = \omega$.

O exemplo seguinte nos mostra que o resultado mencionado acima não é Teorema de ZFC.

Teorema 1.1 Seja M modelo transitivo enumerável para ZFC. Seja κ tal que (κ é cardinal infinito)$^{\mathrm{M}}$. Seja $\mathbb{P} = Fn([\kappa]^2, 2)$, então, se G é $\mathbb{P}$-genérico sobre M, em M$[G]$ existem ordens parciais Q e $\mathbb{R}$ que têm c.c.c., mas em $\mathbb{R} \times \mathrm{Q}$ existe anticadeia de cardinalidade κ.

Demonstração: Tome $D_{\alpha,\beta} = \{p \in \mathbb{P} : \{\alpha, \beta\} \in \mathrm{dom}(p)\}$ $\alpha, \beta \in \kappa$ $\quad E_i = \{p \in \mathbb{P} : i \in \mathrm{im}(p)\}, i = 0, 1$.

Temos que $D_{\alpha,\beta}$ é denso para $\alpha, \beta \in \kappa$ e E_i é denso para $i = 0, 1$.

Portanto, se G é $\mathbb{P}$-genérico sobre M, em M$[G], UG = F : [\kappa]^2 \to 2$ sobrejetora.

Seja $C = \{\{\alpha, \beta\} \in [\kappa]^2 : F(\{\alpha, \beta\}) = 0\}$

Defina

$$\mathbb{R} = \{s \in [\kappa]^{<\omega} : [s]^2 \subseteq C\}$$

$$Q = \{s \in [\kappa]^{<\omega} : [s]^2 \subseteq K/C\}$$

Ordene $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ por inclusão reversa, i.é $p \leq q \Leftrightarrow q \subseteq p$

1 – $\mathbb{R}$ tem c.c.c. (em M$[G]$).

Seja $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ em M$[G]$.

Por I-3.7, $\mathbb{R}$ tem c.c.c., portanto preserva cardinalidades.

Seja τ – $\mathbb{R}$-nome tal que $\tau_G = f$ e $\dot{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$-nome tal que $(\dot{\mathbb{R}})_G = \mathbb{R}$.

Pelo Teorema I-3.1, $\exists p \in G$ tal que $p \Vdash \tau : \check{\omega}_1 \to \dot{\mathbb{R}}$.

Como conjuntos finitos de ordinais são absolutos, para todo $\epsilon \in \omega_1$, temos que

$$f(\epsilon) \in [\kappa]^{<\omega} \to f(\epsilon) = s_\epsilon \in \mathrm{M}$$

Usando I-3.1, novamente podemos tomar $p_\epsilon \leq p$ tal que $p_\epsilon \Vdash \tau(\check{\epsilon}) = \check{s_\epsilon}$.

Podemos assumir, se preciso estendendo o domínio de p_ϵ (não alterando nada, por I-3.6) que $\mathrm{dom}(p_\epsilon) = [t_\epsilon]^2$, para algum $t_\epsilon \in [\kappa]^{<\omega}$ e $[s_\epsilon]^2 \subseteq \mathrm{dom}(p_\epsilon) = [t_\epsilon]^2$ e logo $s_\epsilon \subseteq t_\epsilon$.

Seja $\mathcal{A} = \{t_\epsilon : \epsilon < \omega_1\}$, $|t_\epsilon| < \omega$.

Portanto pelo Teorema 2.2 (lema do Δ-sistema) $\exists B \subseteq \omega_1, |B| = \omega_1$ tal que $\epsilon, \eta \in B$ e $\epsilon \neq \eta \to t_\epsilon \cap t_\eta = r$.

$[r]^2$ é finito.

Seja $K = \{0,1\}^{[r]^2}$.

Seja $f \in$ K.

$$K_f = \{\epsilon \in B : P_\epsilon \nearrow_{[r]^2} = f\}$$

$$\cup_{f \in K} K_f = B$$

Como K é finito e B infinito, $\exists f$ tal que $|K_f| \geq \omega_1$. Portanto $\exists \epsilon, \eta \in B$, $\epsilon \neq \eta$ tal que $p_\epsilon \nearrow_{[r]^2} = p_\eta \nearrow_{[r]^2}$, isto é, $\exists \epsilon, \eta \in \omega_1$ $\epsilon \neq \eta$ tal que $p_\epsilon \nearrow_{[t_\epsilon \cap t_\eta]^2} = p_\eta \nearrow_{[t_\epsilon \cap t_\eta]^2}$. Portanto, $\exists q$ extensão de $p_\epsilon \cup p_\eta$ em $[t_\epsilon \cup t_\eta]^2$. Colocando $q(\{\alpha, \beta\}) = 0$ se $\alpha \in t_\epsilon \backslash t_\eta$ e $\beta \in t_\eta \backslash t_\epsilon$. Logo, $q \Vdash \dot{f}''([s_\epsilon \cup s_\eta]^2) = 0$, já que se H é $\mathbb{P}$-genérico sobre M e $q \in H$, usando que $s_\epsilon \subseteq t_\epsilon, [s_\epsilon \cup s_\eta]^2 \subseteq [t_\epsilon \cup t_\eta]^2$ e $q \nearrow_{[t_\epsilon \cup t_\eta]^2 = 0}$.

Temos que $\cup H(\{\alpha, \beta\}) = 0$ se $\{\alpha, \beta\} \in [s_\epsilon \cup s_\eta]^2$.

Portanto, $q \Vdash f''([s_\epsilon \cup s_\eta]^2) = \{0\}$ e $q \leq p$.

por I-3.6. Em $M[G]$ $s_\epsilon \cup s_\eta \in \mathbb{R}$ e estende s_ϵ e s_η.

De forma análoga Q tem c.c.c.

Como $|\mathbb{R}| = |Q| = \kappa$, a anti-cadeia em $\mathbb{R} \times Q$ tem cardinalidade no máximo κ.

Além disso.

$$\{\alpha\} \in \mathbb{R} \cap Q, \forall \alpha \in \kappa \text{ pois } [\{\alpha\}]^2 = \emptyset$$

Logo $\{< \{\alpha\}, \{\alpha\} >: \alpha \in \kappa\} \subseteq \mathbb{R} \times Q$. Se $\{\alpha, \beta\} \in [\kappa]^2$ e $F(\{\alpha, \beta\}) = 0$ (1) então $\{\alpha, \beta\} \notin Q(\mathbb{R})$. Logo $< \{\alpha\}, \{\alpha\} >$ e $< \{\beta\}, \{\beta\} >$ são incompatíveis em $\mathbb{R} \times Q$, portanto, $\mathbb{R} \times Q$ tem anticadeia de cardinalidade κ.

Pelo Teorema I-8.5, $\mathbb{R}$ e Q podem ser imersas em álgebras booleanas B_r e B_q, respectivamente. Usando a densidade de $i_r''(\mathbb{R})$ e $i_q''(Q)$ é fácil mostrar que B_r e B_q têm c.c.c. e $B_r \times B_q$ tem cardinalidade κ e uma anti-cadeia de cardinalidade κ.

Lema 1.2 Usando a notação de I-8, $a \wedge b = 0$ (i.é $a \perp b$) $\leftrightarrow \psi(d) \cap \psi(b) = \emptyset$

Demonstração: $\rightarrow$: Suponha $u \in \psi(a) \cap \psi(b)$. Então $a, b \in u$, logo $a \wedge b \in u$, logo $a \cap b \neq 0$
$\leftarrow$: Se $a \wedge b = c \neq 0$, seja u ultrafiltro tal que $c \in u$. Então $a \in u$ e $b \in u$, logo $u \in \psi(a) \cap \psi(b)$.

Novamente, seguindo a notação de I-8, denomine $X = S(B_r)$ e $Y = S(B_q)$.

Lema 1.2 $c(X \times Y) \geq \kappa$.

Demonstração: Seja $\{< p_\alpha, q_\alpha >: \alpha \in \kappa\}$ anti-cadeia em $B_r \times B_q$.

Se $\psi_r : B_r \rightarrow X \quad \psi_q : B_q \rightarrow Y$ são as aplicações de I-8,

$$\{\psi_r(p_\alpha) \times \psi_q(q_\alpha) : \alpha \in \kappa\}$$

é família de abertos. Provaremos que são dois a dois disjuntos:

Suponha que não. Existem $\alpha, \beta \in \kappa; p, q \in X \times Y$ tal que

$$(p, q) \in \psi_n(p_\alpha) \times \psi_q(q_\alpha) \cap \psi_r(p_\beta) \times \psi_q(q_\beta)$$

Portanto $p \in \psi_r(p_\alpha) \cap \psi_n(p_\beta)$

Portanto $p_\alpha \in p \wedge p_\beta \in p$ e logo $p_\alpha \wedge p_\beta \in p$. Logo $p_\alpha \wedge p_\beta = c \neq 0$.

Analogamente, $q_\alpha \wedge q_\beta = d \neq 0$.

Logo $< c, d > \neq 0 \in B_r \times B_q$.

Portanto $0 \neq < c, d > \leq \begin{matrix} < p_\alpha, q_\alpha > \\ < p_\beta, q_\beta > \end{matrix}$

ABSURDO!!

Lema 1.3 $c(X \times Y) \leq \kappa$.

Demonstração: Suponha que exista $\mathcal{A} = \{\psi_r(P_\alpha) \times \psi_q(q_\alpha) : \alpha < \kappa^+\}$ família de abertos dois a dois disjuntos.

Seja $A_\alpha = \{p_\beta : p_\alpha \wedge p_\beta = 0\}$

$$p_\alpha \wedge p_\beta = 0 \rightarrow \psi_r(p_\beta) = \psi_r(\neg p_\alpha)$$

Logo, se p_{β_1} e $p_{\beta_2} \in A_\alpha$, teremos $q_{\beta_1} \wedge q_{\beta_2} = 0$, pois os elementos de $\mathcal{A}$ são dois a dois disjuntos.

Temos então duas situações que podem ocorrer em $\mathcal{A}$.

$$\begin{matrix} \phi(\neg p_\alpha) \times \phi(q_\beta) \\ \phi(\neg p_\alpha) \times \phi(\neg q_\beta) \end{matrix} \tag{1}$$

Tome $B = \{p_\gamma : \gamma < \kappa^+\}$.

Se $p_\alpha = p_\gamma \rightarrow \psi_q(q_\alpha) \cap \psi_q(q_\gamma) = \emptyset$

$$\text{portanto } \psi_q(q_\gamma) = \psi_q(\neg q_\alpha)$$

Temos, novamente, duas situações

$$\begin{matrix} \psi_r(p_\alpha) \times \psi_q(q_\alpha) \\ \psi_r(p_\gamma) \times \psi_q(\neg q_\alpha) \end{matrix} \tag{2}$$

Nesse caso, tomo

$$g : \kappa^+ \longrightarrow \{p_\alpha : \alpha < K\}$$

$$g(0) = p_0 \qquad g(\beta) = p_{\min\{\gamma:\gamma>\beta\wedge p_\gamma\neq p_\beta\}}$$

por (2) g está bem definida e é trivialmente injetora.

Tomo $\mathrm{Im}\,(g)$.

Dessa forma, podemos supor $\{p_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ dois a dois distintos.

Defino então $f : \kappa^+ \longrightarrow \{P_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ por indução,

$$f(0) = p_0$$

$$f(\beta) = p_{\min\{\gamma:p_\gamma\in B\setminus(\cup_{\epsilon<\beta}A_\epsilon\cup\{f(\alpha):\alpha<\beta\}\}}$$

$|\cup_{\epsilon<\beta} A_\epsilon| \leq \kappa$, pois κ^+ é regular e $|A_\epsilon| = 2$.

Temos então, $\{f(\beta) : \beta < \kappa^+\}$.

Re-enumerando e retomando os correspondentes teremos $\mathcal{A}^* = \{< p_\alpha, q_\alpha >: \alpha < K^+\}$

com

$$\alpha \neq \beta \longrightarrow \begin{cases} p_\alpha \neq p_\beta \\ p_\alpha \wedge p_\beta \neq 0 \end{cases}$$

Fazendo o mesmo com os q_α obtemos $B = \{< p_\alpha, q_\alpha >: \alpha < \kappa^+\}$

$$\text{com } \alpha \neq \beta \longrightarrow \begin{cases} p_\alpha \neq p_\beta, q_\alpha \neq q_\beta \\ p_\alpha \wedge p_\beta \neq 0 \qquad q_\alpha \wedge q_\beta \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

e $B \subset \mathcal{A}$

$$\text{portanto } \{\psi_r(p_\alpha) \times \psi_q(q_\alpha) :< p_\alpha, q_\alpha >\in B\}$$

é família de abertos dois a dois disjuntos de $X \times Y$ de cardinalidade κ^+:

$B^* = \{< p_\alpha, q_\alpha >: \alpha < \kappa^+\}$ é anti-cadeia em $B_r \times B_s$.

Suponha que não, então $\exists \alpha, \beta, \alpha \neq \beta$ tal que $\exists < a, b > \leq \begin{matrix} < p_\alpha, q_\alpha > \\ < p_\beta, q_\beta > \end{matrix}$ e, por (3), $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Logo $\exists u \in X$ tal que $a \in u$ $\quad \exists v \in Y$ tal que $b \in v$.

$$\text{Logo } p_\alpha, p_\beta \in u \text{ e } q_\alpha, q_\beta \in v.$$

$$\text{Logo } < u, v >\in \psi_r(p_\alpha) \times \psi_q(q_\alpha) \cap \psi_r(p_\beta) \times \psi_q(p_\beta)$$

ABSURDO!!

Mas $B_r \times B_s$ só tem anticadeias de cardinalidade $\leq \kappa$.

Logo, temos o resultado.

Podemos reunir os resultados no seguinte teorema:

Teorema 1.2 Seja M ctm para ZFC e $\kappa \in M$ tal que (κ é cardinal infinito)$^{\mathrm{M}}$. Então existe $\mathbb{P} \in M$, ordem parcial tal que para todo G $\mathbb{P}$-genérico sobre M, $\exists X, Y \in M[G]$ espaços topológicos tais que:

$$\mathrm{M}[G] \models c(X) = c(Y) = \omega \text{ e } c(X \times Y) = \kappa$$

Corolário 1.1 cons (ZFC) $\rightarrow$ cons (ZFC)+$\exists X, Y$ espaço topológico tal que $c(X) = c(Y) = \omega$ e $c(X \times Y) > \omega$).

2. PSEUDOCOMPACIDADE E COMPACIDADE ENUMERÁVEL

Seja X espaço topológico Hausdorff.

Definição 2.1 X é *enumeravelmente compacto* se e somente se toda cobertura aberta enumerável de X admite subcobertura finita.

Definição 2.2 X é *pseudocompacto* se e somente se toda função $f : X \to \mathbb{R}$ contínua é limitada, isto é, $\exists [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Im}(f) \subseteq [a,b]$.

É trivial ver que:

Lema 2.1 X é enumeravelmente compacto se e somente se todo subconjunto infinito de X possui ponto de acumulação.

Lema 2.2 Se X é enumeravelmente compacto então X é pseudocompacto.

Construiremos, agora, espaços X e Y enumeravelmente compactos tais que $X \times Y$ não é pseudocompacto.

Lema 2.3 Existem espaços enumeravelmente compactos X e Y tais que:

i) $\omega \subseteq X \subseteq \beta\omega, \omega \subseteq Y \subseteq \beta\omega$

ii) $X \cap Y = \omega$

Demonstração: Faremos a construção por indução transfinita:

Tome $X_0 = Y_0 = \omega$.

Assuma X_α e Y_α definidos para todo $\alpha < \gamma$ com: (a) $\alpha < \beta < \gamma \to X_\alpha \subseteq X_\beta$ e $Y_\alpha \subseteq Y_\beta$. (b) $\alpha + 1 \leq \gamma$ então toda sequência em $X_\alpha(Y_\alpha)$ tem ponto de acumulação em $X_{\alpha+1}(Y_{\alpha+1})$. (c) $X_\alpha \cap Y_\alpha = \omega, |X_\alpha| \leq c, |Y_\alpha| \leq c$. (d) Se $\alpha \leq \gamma$ é ordinal limite $X_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} X_\beta$ e $Y_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} Y_\beta$.

Resta-nos, portanto, o caso sucessor, i.é $\gamma = \alpha + 1$:

Pegue, para cada sequência em X_α um ponto de acumulação em $\beta\omega \backslash X_\alpha$ (possível, pelo teorema I-7.4, usando que $|X_\alpha| \leq c$.

Tome $X_{\alpha+1}$ como X_α unido com esses pontos. Obviamente, como $c^\omega = c, |X_{\alpha+1}| \leq c$.

Para cada sequência em Y_α, tome um ponto de acumulação em $\beta\omega \backslash X_{\alpha+1}$ (possível por I-7.4). $Y_{\alpha+1}$ será Y_α unido com esses pontos.

Trivialmente se verificam (a), (b), (c) e (d). ∎

Tome $X = \cup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha \qquad Y = \cup_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha$.

Temos os espaços procurados. ∎

Lema 2.4 Se X e Y são os espaços do Lema 2.3, então $X \times Y$ não é pseudo-compacto.

Demonstração: Tome $H = \{< n, n >: n \in \omega\} \subseteq \beta\omega \times \beta\omega \quad H \subseteq X \times Y$ e H é discreto em $X \times Y$ pois o é em $\beta\omega \times \beta\omega$.

H é fechado em $X \times Y$:

Se $\Delta = \{< u, u >: u \in \beta\omega\}$, Δ é fechado em $\beta\omega \times \beta\omega$ logo $\overline{H} \subseteq \Delta$.

Logo, se $< p, q >$ é ponto de acumulação de H, $< p, q > \in \Delta$. Portanto, $p = q$ e por (ii) $p = q \in \omega$. Absurdo, pois H é discreto em $\beta\omega \times \beta\omega$.

Temos que H é aberto em $X \times Y$, pois $H = \{< n, n >: n \in \omega\}$ o é em $\beta\omega \times \beta\omega$.

Tome $f(< n, n >) = n + 1 \ \forall < n, n > \in H$ e $f \nearrow_{X \backslash H} = 0$.

f é contínua, pois H e $X \backslash H$ são abertos-fechados disjuntos.

Logo $X \times Y$ não é pseudocompacto e pelo lema 2.2 não é enumeravelmente compacto.

Corolário 2.1 Existe um espaço Z, enumeravelmente compacto tal que $Z \times Z$ não é pseudocompacto.

Demonstração: Tome $Z = X \cup Y$.

Se tomarmos $Z = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$.

$X \times Y$ será homeomorfo a $(X \times \{0\}) \times (Y \times \{1\})$ que é aberto-fechado em $Z \times Z$. Portanto, H será homeomorfo a um aberto-fechado em $Z \times Z$ e, pelo mesmo raciocínio, temos que $Z \times Z$ não é pseudocompacto.

3. O GRAU DE LINDELÖF $L(X)$

Definição 3.1 Denotaremos $\mathbb{R}_{[}$ o espaço topológico cujo conjunto base é o conjunto dos números reais e a topologia gerada pelos abertos do tipo $[a, b[, a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. Daremos a esse espaço o nome de reta de Sorgenfrey.

Proposição 3.1 $d(\mathbb{R}_{[}) = \omega$.

Demonstração: Basta notar que Q é denso em $\mathbb{R}_{[}$.

Proposição 3.2 $\mathbb{R}_{[}$ é Lindelöf, i.é $L(X) = \omega_0$.

Demonstração: Pode ser encontrada em [En].

Proposição 3.3 $X = \mathbb{R}_{[} \times \mathbb{R}_{[}$ não é Lindelöf.

Demonstração: Se $\mathbb{R}_{[} \times \mathbb{R}_{[}$ fosse Lindelöf, seria normal. Mas $\Delta = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$, Δ é fechado e discreto em $\mathbb{R}_{[} \times \mathbb{R}_{[}$ e $d(\mathbb{R}_{[} \times \mathbb{R}_{[}) = \omega$. Pelo Lema de Urysohn, precisamos de 2^c funções contínuas para separar os subconjuntos de Δ, mas como $d(X) = \omega$, só há c funções contínuas de $X \to \mathbb{R}$.

Logo X não é Lindelöf. ■

Temos então um exemplo de um espaço X com $L(X) = \omega$ e $L(X \times X) > \omega$.

Comentários finais

O teorema 1.1 está na demonstração do Teorema 3.1 de [J1].

O restante do parágrafo 1 fiz para completar a demonstração do que está enunciado no mesmo teorema de [J1].

O parágrafo 2 é o detalhamento da demonstração que aparece em 3.1 de [V]. A demonstração original da década de 50 está em [NJ] e [TH].

O parágrafo 3 é exemplo clássico.

CAPÍTULO III

GRUPOS TOPOLÓGICOS PSEUDOCOMPACTOS

Em II-1 obtivemos um espaço topológico Z enumeravelmente compacto tal que $Z \times Z$ não é pseudocompacto. É fácil notar que Z não é homogêneo e consequentemente não pode ser um grupo topológico.

Neste capítulo estudaremos o comportamento, no que se refere a pseudocompacidade, de produtos de grupos topológicos pseudocompactos.

Neste capítulo, assumiremos todos os grupos topológicos T_1, e portanto completamente regulares, $\underline{e}$ será o elemento neutro do grupo.

Definição 1.1 Um grupo topológico G é dito *totalmente limitado* se para toda V, vizinhança de e, existem $x_1, \ldots, x_n$ em G tais que $G = \cup_{i=1}^{n} x_i V$.

Enunciaremos agora um teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [We].

Teorema 1.1 Todo grupo topológico G que é totalmente limitado é subgrupo topológico denso de um grupo topológico compacto $\overline{G}$, e essa compactificação é única a menos de isomorfismo deixando G fixo.

Teorema 1.2 Todo grupo topológico pseudocompacto é totalmente limitado.

Demonstração: Seja G um grupo topológico não totalmente limitado.

Então existe U, vizinhança de $\underline{e}$ e uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_k \notin \cup_{n<k} x_n . U$.

Escolha $V = V^{-1}$, vizinhança simétrica tal que $V^4 \subseteq U$, e, para cada k, escolha $f_k : G \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f_k(x_k) = k$ e $f_k \nearrow_{G \setminus x_k V} = 0$ (usando que G é completamente regular).

$\mathcal{A} = \{x_k V\}_{k \in \mathbb{N}}$ é localmente finita:

Tome $x \in G$. xV é vizinhança de x.

Se $y \in xV \cap x_k V, y = xv_1 = x_k v_2, v_1, v_2 \in V$ portanto $x = x_k v_2 v_1^{-1}$. Portanto $x \in x_k V^2$ (*)

Se $xV \cap xv_{k'} V \neq \phi$, usando raciocínio análogo, teremos $x \in x_{k'} V^2$ (**) e nesse caso, por (*) e (**), teríamos

$$x = x_k w_1 = x_{k'} w_2 \quad w_1, w_2 \in V^2$$

Portanto $x_{k'}^{-1}.x_k = w_2(w_1)^{-1} \in V^2(V^{-1})^2 = V^2V^2 = V^4 \subseteq U$. Portanto $x_{k'}^{-1} x_k \in U$, portanto $x_k \in x_{k'}.U$ e pela definição de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$k \leq k'$

Logo se $\begin{array}{c} xV \cap x_k V \neq \phi \\ xV \cap x_n V \neq \phi \end{array} \Rightarrow n \leq k.$

Temos então o resultado.

Usando a finitude local de $\{x_k V\}_{k \in \mathbb{N}}$, defina $f : G \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

f é contínua e não é limitada. Portanto G não é pseudocompacto.

Lema 1.1 O produto $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de grupos topológicos totalmente limitados é totalmente limitado.

Demonstração: Seja $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$. Seja U vizinhança básica da identidade $\underline{e}$ em G.

$U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ onde $U_\alpha \neq G_\alpha$ em um número finito de elementos de A.

Seja $I = \{\alpha \in A : U_\alpha \neq G_\alpha\}$.

Para cada $\alpha \in A$. Seja $A_\alpha = \{x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^{k_\alpha}\} \subseteq G_\alpha$ onde $G_\alpha = \cup_{l=1}^{k_\alpha} x_\alpha^l U_\alpha$.

Seja $\widetilde{\pi A_\alpha}$ o seguinte conjunto:

$$x \in \widetilde{\pi A_\alpha} \Leftrightarrow p(x) \in \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$$

onde $p : G \to \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ é a projeção e $x_\beta = e_\beta$ se $\beta \notin I$ $(x = (x)_{\alpha \in A})$.

Os elementos de $\widetilde{\pi_{\alpha \in I} A_\alpha}$ são os procurados.

Proposição 1.1 Se X é compacto, então $\psi(X) = \mathcal{X}(X)$.

Demonstração: Se $\psi(X) = \kappa$. Seja $\{\Lambda_\alpha : \alpha < k\}$ família de abertos de X tal que $\cap_{\alpha<\kappa} \Lambda_\alpha = \{x\}$.

Tome V_{Λ_α} aberto em X tal que $x \in V_{\Lambda_\alpha} \subseteq \overline{V_{\Lambda_\alpha}} \subseteq \Lambda_\alpha$. Considere $\mathcal{A} = \{\overline{V_\Lambda} : \alpha < \kappa\}$. $\mathcal{A}$ tem p.i.f. Considere $\mathcal{B}$ a família das intersecções finitas de elementos de $\mathcal{A}$ $|\mathcal{B}| = \kappa$.

Seja U aberto, $x \in U$. Suponha que $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \kappa$ $(\overline{V_{\Lambda_{\alpha_1}}} \cap \cdots \cap \overline{V_{\alpha_n}}) \cap X \backslash U \neq \phi$.

$\{B \cap X \backslash U : B \in \mathcal{B}\}$ tem p.i.f. Como X é compacto

$$\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B \cap X \backslash U \text{ é não vazia}$$

mas $\cap_{B \in \mathcal{B}} B = \cap_{\alpha<\kappa} \overline{V_{\Lambda_\alpha}} = \{x\}$ e $x \notin X \backslash U$. Absurdo.

Logo $\forall U$ aberto, $x \in U \to \exists B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset U$, pois $V_{\Lambda_{\alpha_1}} \cap \ldots \cap V_{\Lambda_{\alpha_n}} \subseteq \overline{V_{\Lambda_{\alpha_1}}} \cap \ldots \cap \overline{V_{\Lambda_{\alpha_n}}}$.

Portanto $\mathcal{X}(x, X) \leq \kappa, \forall x \in X$.

Portanto $\mathcal{X}(X) \leq \kappa = \psi(X)$.

Como $\psi(X) \leq \chi(X), \psi(X) = \chi(X)$.

Proposição 1.2 Seja G grupo topológico compacto e N subgrupo fechado, G_δ de G. Então $\mathcal{X}(G/N) = \omega$.

Demonstração: Como G/N é compacto, mostraremos que $\psi(G/N) = \omega$. Teremos o resultado, pela proposição 1.1.

Temos que $N = \cap_{n \in \omega} O_n$, O_n aberto em X.

Temos que se

$$\pi : G \to G/N$$

$$x \mapsto [x]$$

é a projeção, $\pi''(O_n)$ é aberto, já que $\pi^{-1}(\pi''(O_n)) = \mathcal{O}_n.N = \cup_{k\in\omega} kO_n$ que é aberto.

Lembrando que

$$a \sim b \leftrightarrow b^{-1}a \in N \leftrightarrow [a] = [b]$$

Além disso, $\{[e]\} = \cap_{n\in\omega}\pi''(O_n)$ pois $[e] \in \cap_{n\in\omega}\pi''(O_n)$ e:

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $O_{n^2} \subseteq O_{n-1}$, pois: por indução finita construiremos $O'_n : n \in \omega$ com a propriedade $O'_1 = O_1$. Suponhamos válido para $k < n$.

Seja $^\bullet$ $G \times G \to G$, a operação de grupo que é contínua.

Tome $W = \bullet^{-1}(O'_{n-1})$

W é aberto em $G \times G$.

Para $t \in N$ fixo: para $z \in N$ $\exists V_z \times W^z_t \subseteq W$ vizinhança de (z, t).

$\{W^z_t : z \in N\}$ é cobertura de N. Portanto possui subcobertura finita $A_t = \{W^{z_1}_t, \ldots, W^{z_n}_t\}$.

Tome $V_t = (V_{z_1} \cup \cdots \cup V_{z_n}) \times \bigcap_{i=1}^n W^{z_i}_t = Y_t \times Z_t \subseteq W^d.Y_t$ e Z_t abertos.

$$N \times \{t\} \subseteq Y_t \times Z_t \subseteq W$$

$\{Z_t : t \in N\}$ é cobertura de N e, portanto, admite subcobertura finita $\{Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n}\}$.

Tome $V = Y_{t_1} \cap \cdots \cap Y_{t_n}$ e $W' = Z_{t_1} \cup \ldots \cup Z_{t_n}$

$$N \times N \subseteq V \times W' \subseteq W$$

Tome $O''_n = V \cap W'$.

$$N \subseteq O''_n \text{ e } O''_n \times O''_n \subseteq W \quad \text{portanto } (O''_n)^2 \subseteq O'_n$$

Tome $O'_n = O_n \cap O''_n$ e temos o resultado. ∎

Dessa forma, se $[p] \in \cap_{n\in\omega}\pi''(O_n)$

$$\leftrightarrow p \in \bigcup_{n\in\omega} O_n N \leftrightarrow p \in \bigcap_{n\in\omega}(O_n. \bigcap_{k\in\omega} O_k) \subseteq \bigcap_{n\in\omega}\bigcap_{k\in\omega} O_n O_k$$

$$= \bigcap_{n\in\omega}\bigcap_{k\geq n} O_n O_k = \bigcap_{n\in\omega}\bigcap_{k\geq n} O_{n-1} = \bigcap_{n\geq 1} O_{n-1} = N$$

pois $O_n O_k \subseteq O_{n-1}$.

Portanto, temos $p \sim e$.

Logo $\cap_{n\in\omega}\pi''(O_n) = \{[e]\}$.

Definição 1.2 Seja G um grupo topológico totalmente limitado, definimos

$$\mathcal{N} = \{N : N \text{ é subgrupo fechado normal de } \overline{G} \text{ e é } G_\delta\}$$

Teorema 1.3 Seja G grupo topológico totalmente limitado. São equivalentes:

(a) G é pseudocompacto;

(b) Todo transladado de um elemento de $\mathcal{N}$ encontra G;

(c) Todo subconjunto de Baire não vazio de $\overline{G}$ encontra G;

(d) Todo subconjunto G_δ não vazio de $\overline{G}$ encontra G;

(e) Toda função $f : G \to \mathbb{R}$ contínua admite uma extensão contínua a $\overline{G}$, isto é, $\overline{G} = \beta G$.

Demonstração:

(a) $\to$ (b)

Se (b) falha $x_0.N \cap G = \emptyset$ para algum $x_0 \in \overline{G}$ e $N \in \mathcal{N}$. Como N não é aberto, pois se o fosse teríamos $\exists y \in x_0 N \cap G$, já que G é denso em $\overline{G}$.$\overline{G}/N$ é infinito:

Suponhamos que $\overline{G}/N$ seja finito.

$$\overline{G}/N = \{eN, x_1 N, \ldots, x_n N\}$$

$$x_i N \cap x_j N = \emptyset$$

$$x_i N \text{ é fechado } i = 1, \ldots, n$$

e $N = G \setminus \cup_{i=1}^{n} x_i N$ é aberto. Absurdo!

Como $\overline{G}/N$ é grupo topológico e $\mathcal{X}(\overline{G}/N) = \omega$ (Proposição 1.2), pelo Teorema I-4.2, $\overline{G}/N$ é metrizável.

$\overline{G}/N$ é compacto infinito e homogêneo, portanto

$$f : \overline{G}/N\backslash\{x_0N\} \to \mathbb{R}$$

$x \mapsto \dfrac{1}{d(x, x_0N)}$ é contínua e ilimitada.

$$\begin{tikzcd} \overline{G}\backslash x_0N \arrow[rr, "g"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R} \\ & \overline{G}/N\backslash\{x_0N\} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$g = f \circ \pi$ é contínua e ilimitada e $G \subseteq \overline{G}\backslash x_0N$.

Portanto, $g \nearrow_G$ é contínua.

Além disso, tomando

$$A_M = \{t \in \overline{G}\backslash x_0N : |g(t)| > M\}$$

A_M é aberto em $\overline{G}$.

Como G é denso em $\overline{G}\backslash x_0N$

$$A_M \cap G \neq \emptyset, \forall M \in \mathbb{R}$$

Portanto $g \nearrow_G$ é ilimitada.

Portanto G não é pseudocompacto.

(b) $\to$ (c)

É trivial usando I-4.4.

(d) $\to$ (b)

Trivial

(b) $\to$ (e)

Seja $f : G \to \mathbb{R}$ contínua. $\mathcal{B}$ base enumerável para a topologia de $\mathbb{R}$.

Para cada $B \in \mathcal{B}, \exists U_B \subset \overline{G}$ aberto tal que $f^{-1}(B) = U_B \cap G$.

Por I-4.4 existe $N_B \in \mathcal{N}$ tal que $cl_{\overline{G}}(U_B) = N_B.cl_{\overline{G}}(U_B)$.

Tomo $N = \cap_{B\in\mathcal{B}} N_B . N \in cl$ e $cl_{\overline{G}} U_B = N.cl_{\overline{G}} U_B \ \forall B \in \mathcal{B}$.

Provamos

$$x_1 \in G \text{ e } x_2 \in G \qquad x_1^{-1}x_2 \in N \to f(x_1) = f(x_2)$$

Suponha que não.

$\exists B_1, B_2$ vizinhanças de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ respectivamente tal que B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}$ e $cl(B_1) \cap cl(B_2) = \phi$.

Como f é contínua em G, temos

$$clf^{-1}(B_1) \cap cl_G(f^{-1}(B_2)) = \emptyset$$

i.é $cl_G(U_{B_1} \cap G) \cap cl_G(U_{B_2} \cap G) = \emptyset$ $(*)$ temos $x_2 \in N.cl_G(U_{B_1} \cap G) \subset Ncl_{\overline{G}}(U_{B_1}) = cl_{\overline{G}}(U_{B_1})$.

Portanto $x_2 \in cl_G(U_{B_1} \cap G)$ e é óbvio que $x_2 \in cl_G(U_{B_2} \cap G)$.

Contrariando $(*)$. ■

Dado x_0 em $\overline{G}$, escolha $x \in x_0 N \cap G$ e coloque $\overline{f}(x_0) = f(x)$.

$\overline{f}$ é contínua.

Seja $x_0 \in \overline{G}, \epsilon > 0$. Encontraremos U, vizinhança de $\underline{e}$ tal que $|\overline{f}(x_0) - \overline{f}(y_0)| < \epsilon$ se $y_0 \in x_0 U$.

Seja $x \in x_0 N \cap G$ e seja V vizinhança de $\underline{e}$ em G tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ se $y \in xV \cap G$. Seja U vizinhanç¡a de $\underline{e}$ em $\overline{G}$ tal que $U^2 \subset V$. Por I-4.3 $\exists M \in \mathcal{N}$ tal que $M \subset U \cap N = U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ (pois N é G_δ) e, portanto, por (b), existe $z \in (x.x_0^{-1} y_0 M) \cap G$.

Como $z \in x.x_0^{-1}.y_0.N \subset Ny_0N = y_0N$ (N é subgrupo normal), tem-se $\overline{f}(y_0) = f(z)$.

Como

$$z \in x.x_0^{-1}.M \subset x.U.M \subset xU^2 \subset xV$$

$$\text{temos que } |\overline{f}(x_0) - \overline{f}(y_0)| = |f(x) - f(z)| < \epsilon$$

(e) $\to$ (a)

Trivial.

Teorema 1.4 O produto de qualquer conjunto de grupos pseudocompactos é pseudocompacto.

Demonstração: Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ coleção de grupos pseudocompactos. A unicidade do teorema 1.1. nos garante que se $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Então $\overline{G} = \prod_{\alpha \in A} \overline{G}_\alpha$.

De acordo com 1.3, temos que mostrar que cada G_δ não vazio de $\prod_{\alpha \in A} \overline{G}_\alpha$ encontra G.

Seja U em G_δ, i.é. $\emptyset \neq U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, onde cada U_n é um conjunto da forma $\prod_{\alpha \in A} U_{n,\alpha}$, onde cada $U_{n,\alpha}$ é aberto em $\overline{G}_\alpha$ e, para cada n, temos $U_{n,\alpha} = \overline{G}_\alpha$, exceto para um número finito de elementos de A. Seja $V_\alpha = \bigcap_{n=1}^{+\infty} U_{n,\alpha}, V_\alpha \neq \emptyset (U \neq \emptyset)$ e V_α é G_δ em $\overline{G}_\alpha$. Portanto, $\exists x_\alpha \in V_\alpha \cap G_\alpha$, pois G_α é pseudocompacto.

$$\text{Se } x = (x_\alpha)_{\alpha \in A}, \text{ então } x \in U \cap G$$

■

Comentários finais

Este capítulo é a exposição de [WeR]. As demonstrações do Teorema 1.2, Teorema 1.3 e Teorema 1.4 são detalhamentos das de [WeR].

O Lema 1.1, Proposição 1.1 e Proposição 1.2 foram demonstrados para que as demonstrações pudessem ser completadas.

CAPÍTULO IV

ESPAÇOS p-COMPACTOS E ESPAÇOS p-SEQUENCIAIS

Neste parágrafo, definiremos espaços que são generalizações dos espaços enumeravelmente compactos e X será um espaço topológico Tychonoff.

1. ESPAÇOS p-COMPACTOS

Teorema 1.1 X é enumeravelmente compacto $\Leftrightarrow$ dada $f : \omega \to X$, sua extensão $\overline{f} : \beta\omega \to \beta X$ satisfaz $\overline{f}(p) \in X$ para algum $p \in \omega$ (*).

Demonstração:

$\Rightarrow$ Seja $f : \omega \to X$.

Se $\{f(n) : n \in \omega\} \subseteq X$ é finito.

Tome $x \in X$ tal que $|\{n : f(n) = x\}| = \omega$.

Tome $B = \{n : f(n) = x\}$ e tome um ultrafiltro p, não principal em ω, tal que $B \in p$.

Suponha que $\overline{f}(p) \neq x$.

$\exists V_{\overline{f}(p)}, V_x$ vizinhanças abertas disjuntas de $\overline{f}(p)$ e x, respectivamente.

Usando a construção de I-7-C, e que $\overline{f}$ é contínua, tome $E \subseteq \omega$ tal que

$$p \in N(E) \subseteq \overline{f}^{-1}(V_{\overline{f}(p)}),$$

$$E \cap B = \emptyset$$

pois, caso contrário, tome $n_0 \in B \cap E$.

$$p' = [\{n_0\}] \in N(E)$$

e $\overline{f}(p') = x$, absurdo!

Mas $p \in N(E) \to E \in p$ e $B \in p \quad \to E \cap B = \emptyset \in p$.

Absurdo!

Portanto $\overline{f}(p) = x \in X$.

Se $\{f(n) : n \in \omega\}$ é infinito tem ponto de acumulação x.

Seja $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$ sistema fundamental de vizinhanças de x.

Tome $A_i = \{n \in \omega : f(n) \in V_i\}$.

$A = \{A_i : i \in I\}$ tem p.i.f., portanto, existe um ultrafiltro não principal p em ω tal que $A \subset p$.

$\overline{f}(p) = x$:

Demonstração: Suponha que $\overline{f}(p) \neq x$.

$\exists V_{\overline{f}(p)}$ e V_x vizinhanças abertas disjuntas (*). Como $\overline{f}$ é contínua, $\exists W = N(E) \subset \beta\omega$ tal que $p \in N(E)$ (i.é, $E \in p$) tal que $\overline{f}''(N(E)) \subseteq V_{\overline{f}(p)}$.

V_x é vizinhança de x em βX.

Tome $V_{i_0} \subseteq V_x \cap X$.

$A_{i_0} \cap E \neq \emptyset$, pois ambos pertencem a p. Seja $n_0 \in A_{i_0} \cap E$.

$$[\{n_0\}] \in N(E) \text{ portanto } f(n_0) \in V_{\overline{f}(p)}$$

$$\text{e } n_0 \in A_{i_0} \text{ portanto } f(n_0) \in V_{i_0} \subseteq V_x$$

Absurdo por (*).

$\Leftarrow$ Seja $Y = \{x_n : n \in \omega\}$ infinito, $Y \subseteq X$. Tome

$$f : \omega \to X$$

$$f(n) = x_n$$

por hipótese, $\exists p \in \omega^*$ tal que $\overline{f}(p) = x \in x$ é ponto de acumulação de Y:

Seja V vizinhança de x em βX.

f é contínua, portanto, $\exists E \subset \omega$ tal que

$$p \in N(E) \text{ e } \overline{f}''(N(E)) \subset V$$

Mas $E \neq \emptyset$, $\exists n_0 \in E$, portanto, $f(n_0) \in \overline{f}''(N(E)) \subset V$. Mas $f(n_0) \in Y$.

Portanto, $f(n_0) \in Y \cap V \quad \forall n_0 \in E$. ■

O Teorema 1.1 nos leva à seguinte generalização de compacidade enumerável.

Definição 1.1 Seja $p \in \omega^*$, X espaço topológico Tychonoff. X é dito *p-compacto* se e somente se, dada $f : \omega \to X$, e $\overline{f}$ sua extensão, $\overline{f} : \beta\omega \to \beta X$, temos que $\overline{f}(p) \in X$.

Lema 2.2 X é p-compacto $\Rightarrow$ X é enumeravelmente compacto.

Demonstração: É corolário trivial do Teorema 1.1.

Teorema 1.2 Se X é um espaço Tychonoff, então X é p-compacto $\Leftrightarrow$ dada $\{x_n : n \in \mathrm{N}\}$ seqüência em X, $\exists z \in X$ tal que para toda vizinhança V de z $\{n : x_n \in V\} \in p$.

Definição 1.2 Se z é tal que, para toda vizinhança V de z, $\{n : x_n \in V\} \in p$, diz-se que z é o *p-limite* de $\{x_n : n \in \omega\}$ e se escreve $z = p - \lim x_n$.

Demonstração do Teorema 1.2

$\Leftarrow$ Seja $f : \omega \to X$ e x o p-limite de $\{f(n) : n \in \omega\}$.

Tome $\overline{f} : \beta\omega \to \beta X$ que estende f.

Se $\overline{f}(p) \neq z$, existem vizinhanças disjuntas $V_{\overline{f}(p)}, V_z$.

Mas $\overline{f}$ é contínua, logo $\exists E \subseteq \omega$, $p \in N(E) \subseteq f^{-1}(V_{\overline{f}(p)})$.

Pela definição, se $B = \{n : f(n) \in V_z\}$, $B \in p$.

Mas $E \in p$, logo $B \cap E \neq \emptyset$.

Suponha $n \in B \cap E$.

$$n \in B \to f(n) \in V_z$$

$$n \in E \to f(n) \in V_{\overline{f}(p)}$$

Absurdo!.

Logo $\overline{f}(p) = z$.

$\Rightarrow$ Seja $\{x_n : n \in \omega\}$ seqüência em X.

Tome

$$f : \omega \longrightarrow X$$

$$n \mapsto x_n$$

$$\overline{f}(p) = z \in X$$

e $\overline{f} : \beta\omega \longrightarrow \beta X$ sua extensão.

Provaremos que z é o p-limite de $(x_n)_{n\in\omega}$.

Seja V vizinhança de z.

Como $\overline{f}$ é contínua, $\exists E \subseteq \omega, E \in p$ tal que $p \in N(E)$ e $\overline{f}''(N(E)) \subseteq V$ i.é, $\forall u \in \beta\omega(E \in u \rightarrow \overline{f}(u) \in V)$.

Seja $n \in \omega, n \in E.E \in [\{n\}]$,

Portanto, $f(n) = \overline{f}[\{n\}] \in V$.

Portanto $E \subseteq \{n : f(n) \in V\}$.

Como $E \in p$, $\{n : f(n) \in V\} \in p$.

A partir do teorema acima, podemos definir p-compacidade em espaços não Tychonoff:

Definição : X é p-compacto se toda seqüência em X possuir p-limite.

Teorema 1.3 p-compacidade é fechada para subespaços fechados e para produtos.

Demonstração: Usaremos a equivalência do Teorema 1.2.

1. Subespaços fechados:

Seja $F \subseteq X$ fechado e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq F \subseteq X$. Seja z o p-limite de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para toda vizinhança V de z, $A_V = \{n : x_n \in V\} \in p$. Logo $A_V \neq \emptyset$. Portanto, $V \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Portanto, $z \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Como F é fechado, $z \in F$. ■

2. Produtos

Seja $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ família de espaços p-compactos e $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

Seja $\{x^n\}_{n\in\omega}$ seqüência em X, $x_n = (x^n_\alpha)_{\alpha \in I}$

Então, se $\alpha \in I$ $(x^n_\alpha)_{n\in\omega}$ tem p-limite em X_α, z_α.

Tome $z = (z_\alpha)_{\alpha\in I} \in X$. Seja $W = \prod_{\alpha\in I} W_\alpha$ vizinhança básica de z em X.

$F = \{\alpha : W_\alpha \neq X_\alpha\}$ é finito.

$$\text{Se } A_\alpha = \{n : x^n_\alpha \in W_\alpha\}, A_\alpha \in p$$

$$\text{Logo } A = \bigcap_{\alpha\in F} A_\alpha \in p$$

$$\begin{aligned}\{n : X^n \in W\} &= \bigcap_{\alpha\in I}\{n : X^n_\alpha \in W_\alpha\} = \bigcap_{\alpha\in F}\{n : x^n_\alpha \in W_\alpha\}\\ &= A \in p\end{aligned}$$

■

OBS.: Se X é compacto, usando a definição, é trivial observar que X é p-compacto $\forall p \in \omega^*$.

Lema 1.2 Seja $f : X \to Y$ contínua. Se z for p-limite de $\{x_n : n \in \omega\}$ então $f(z)$ é p-limite de $\{f(x_n) : n \in \omega\}$.

Corolário 1.3 O produto de espaços p-compactos é enumeravelmente compacto.

Obtivemos, assim, uma condição suficiente para que o produto de espaços enumeravelmente compactos seja enumeravelmente compacto, a saber, que exista $p \in \omega^*$, tal que cada um deles seja p-compacto.

Obviamente o espaço Z construído em II-1 não é p-compacto para nenhum $p \in \omega^*$ e todo espaço compacto é p-compacto para todo $p \in \omega^*$. Na parte 2 deste capítulo, construiremos espaços p-compactos, não obrigatoriamente compactos.

Teorema 1.4 Seja $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ uma família de espaços topológicos. Então o espaço produto $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ é enumeravelmente compacto $\Leftrightarrow \forall f : \omega \to X, \quad \exists r \in \omega^*$ tal que $\pi_\alpha \circ f$ tem r-limite em X_α, onde $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ é a projeção, $\forall \alpha \in I$.

Demonstração:

$\Rightarrow$ X é enumeravelmente compacto e $B = \{f(n) : n \in \omega\}$, pelo Teorema 1.1, $\exists r$ tal que $x = r\text{-}\lim x_n = f(n)$. Como as projeções são contínuas, pelo Lema 1.2 temos o resultado.

$\Leftarrow$ Seja $x_\alpha = r - \lim \pi_\alpha \circ f(n)$, tome $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$ e $B = \cap\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in F\}$ vizinhança básica de $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}, F \subseteq I$ finito. Queremos provar que

$$B' = \{n \in \omega : f(n) \in B\} \in r$$

Mas, $\forall \alpha \in F \quad B'_\alpha = \{n \in \omega : \pi_\alpha \circ f(n) \in U_\alpha\} \in r$ e $B' = \cap_{\alpha \in F} B'_\alpha$.

Portanto, $B' \in r$. ∎

Teorema 1.5 Seja $\{X_{\alpha : \alpha \in I}\}$ família de espaços topológicos, $X = \prod X_\alpha$ é enumeravelmente compacto $\Leftrightarrow \forall J \in [I]^{2^c}$, $\prod\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ é enumeravelmente compacto.

Demonstração:

$\Rightarrow$ Trivial.

$\Leftarrow$ Se $J \subseteq I$, denote $X_J = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

Se X_I não é enumeravelmente compacto, pelo Teorema 1.4, $\exists f : \omega \to X_I$ tal que $\forall r \in \omega^*, \exists \alpha_r \in I$ tal que $\pi_{\alpha_r} \circ f$ não tem r-limite em X_{α_r}.

Coloque $J = \{\alpha_r : r \in \omega^*\}$.

$$|J| \leq |\omega^*| \leq 2^c$$

Por hipótese, X_J é enumeravelmente compacto. Mas, $\pi_J \circ f : \omega \to X_J$ ($\pi_J : X \to X_J$, projeção) não tem ponto de acumulação, pois se tivesse, por 1.1, teria p-limite para $p \in \omega^*$ e como $\pi_\alpha \circ f$ é contínua, $\pi_\alpha \circ f$ teria p-limite, contrariando a definição de α_p. ∎

Teorema 1.6 Seja X espaço topológico Tychonoff. São equivalentes:

(i) $\forall\kappa$ cardinal, X^κ é enumeravelmente compacto;

(ii) X^{2^c} é enumeravelmente compacto;

(iii) $X^{|X|^\omega}$ é enumeravelmente compacto;

(iv) $\exists r \in \omega^*$ tal que X é r-compacto.

Demonstração:

(i) $\rightarrow$ (ii) Trivial.

(ii) $\rightarrow$ (iii) Teorema 1.5.

(iv) $\rightarrow$ (i) Teorema 1.3 e Lema 1.1.

(iii) $\rightarrow$ (iv)

Tome $\{f_\alpha : \alpha \in |X|^\omega\}$ o conjunto das seqüências em X.

Defina $g : \omega \rightarrow X^{|X|^\omega}$ de tal forma que $\pi_\alpha \circ g(n) = f_\alpha(n), \alpha \in |X|^\omega$. g é seqüência em $X^{|X|^\omega}$ e $\pi_\alpha \circ g = f_\alpha$.

Como $X^{|X|^\omega}$ é enumeravelmente compacto, $\exists r \in \omega^*$ tal que g tem r-limite (Teorema 1.1).

Como as projeções são contínuas, f_α tem r-limite, $\forall\alpha < |X|^\omega$, e temos o resultado.

2 - $\beta_p(x)$

Sejam X espaço topológico Tychonoff e $p \in \omega^*$.

Teorema 2.1 Nas condições acima, existe um espaço $\beta_p(X), X \subseteq \beta_p X \subseteq \beta X$ tal que $\beta_p(X)$ é p-compacto, X é denso em $\beta_p(X)$ e tal que se $f : X \rightarrow Y, Y$ Tychonoff p-compacto, f contínua, então $\exists\overline{f} : \beta_p(X) \rightarrow Y, \overline{f} \nearrow_X = f$.

Demonstração: Construiremos, por indução nos ordinais $\alpha < \omega_1$ uma seqüência de espaços $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ satisfazendo:

(i) $\forall\beta \in \omega_1 \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 < \beta \rightarrow X_{\alpha_1} \subseteq X_{\alpha_2} \subseteq \beta X$;

(ii) $\forall \beta \in \omega_1 \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \beta \to$ toda seqüência em X_{α_1} tem p-limite em X_{α_2}.

$\beta_p(X)$ será $\cup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$.

A construção:

Tome $X_0 = X$.

Suponha X_γ construído para todo $\gamma < \beta$, satisfazendo (i) e (ii).

Seja $\sum_\beta$ o conjunto de todas as seqüências de $\cup_{\gamma<\beta} X_\gamma$.

Se $\sigma \in \sum_\beta$, seja x_σ seu p-limite em βX.

Tome $X_\beta = \{x_\sigma : \sigma \in \sum_\beta\} \cup \bigcup_{\gamma<\beta} X_\gamma$.

X_β satisfaz (i) e (ii) trivialmente:

$\beta_p(X) = \cup_{\gamma<\omega_1} X_\gamma$ é p-compacto:

Seja $\{x_n : n < \omega\} \subseteq \beta_p(X)$.

Se $x_n \in X_{\beta_n}$, seja $\alpha = \sup\{\beta_n : n < \omega\}$.

Como ω_1 é regular, $\alpha < \omega_1$.

Logo $G = \{x_n : n < \omega\} \subseteq X_\alpha$.

Portanto, $\exists x_\sigma \in X_{\alpha+1} \subseteq \beta_p(X)$ tal que x_σ é p-limite x_n. ■

Trivialmente, X é denso em $\beta_p(X)$. Seja T espaço Tychonoff, p-compacto e $f : X \to T$ contínua.

$\exists \tilde{f} : \beta X \to \beta T$ estendendo f.

Resta-nos provar que $\tilde{f}''(\beta_p(X)) \subseteq T$. Por indução:

$$\tilde{f}''(X_0) = f''(X_0) \subseteq T$$

Se $\tilde{f}''(X_\alpha) \subseteq T, \forall \alpha < \beta$.

Seja $x_\sigma \in X_\beta \backslash \cup_{\alpha<\beta} X_\alpha$, i.é, $x_\sigma = p\text{-}\lim \sigma, \sigma \in \sum_\beta$ pelo Lema 1.2, $\tilde{f}(x_\sigma)$ é p-limite de $\tilde{f}''(\sigma) \subseteq T$. Mas o p-limite é único e T é p-compacto. Portanto, $\tilde{f}(x_\sigma) \in T$. ■

3. p-COMPACIDADE EM GRUPOS TOPOLÓGICOS

Assumiremos todo grupo topológico T_1

Teorema 3.1 Se G é um grupo topológico totalmente limitado, então existe um grupo topológico p-compacto. G é denso nesse grupo e nenhum subespaço próprio desse grupo que contém G é enumeravelmente compacto e esse grupo é único, a menos de isomorfismo deixando G fixo.

Demonstração: Pelo Teorema III-1.3, $\beta G = \overline{G}$. Na construção do Teorema 2.1, substitua X por G e βG por $\overline{G}$.

Tomando $\beta_p(G)$ como o grupo procurado, temos que, pelo teorema 1.7, é p-compacto e não contém propriamente nenhum p-compacto contendo G.

$\beta_p(G)$ é grupo topológico.

- $\beta_p(G)$ é grupo:

Provaremos por indução nos $(G_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$.

$\alpha = 0 \to$ Trivial.

α limite $\to$ Trivial.

$\alpha = \beta+1$, $x, y \in G_\alpha$ $\quad x = p\text{-}\lim(x_n)$ $\quad y = p\text{-}\lim(y_n)$. Mas as operações são contínuas, definimos $x = p\text{-}\lim x_n^{-1}$ e $xy = p\text{-}\lim(x_n y_n)$.

Resta-nos provar a unicidade.

Suponha que H é outro grupo p-compacto contendo G como subgrupo topológico denso, e tal que nenhum subespaço propriamente contido em H, contendo G, seja p-compacto.

Como H é totalmente limitado (Teorema 1.2) pelo Teorema 1.1, $\exists \overline{H}$ e pela unicidade $\overline{G} = \overline{H}$ a menos de um isomorfismo deixando G fixo. Pela construção de $\beta_p(G)$, verificaremos que esse isomorfismo leva $\beta_p(G)$ em H. Como essa imagem é p-compacta, contém G e a minimalidade de H nos diz que a imagem é todo H, provando, assim, a asserção.

Teorema 3.2 São equivalentes:

(i) $\exists p \in \omega^*$ tal que todo grupo topológico enumeravelmente compacto é p-compacto;

(ii) Todo produto de grupos topológicos enumeravelmente compactos é enumeravelmente compacto.

Demonstração:

(i) $\rightarrow$ (ii) Teorema 1.3 e Lema 1.1.

(ii) $\rightarrow$ (i) Suponha que (i) é falso. Para cada $p \in \omega^*$, tome $G(p)$ enumeravelmente compacto mas não p-compacto.

Tome, para cada $p \in \omega^*$ $f_p : \omega \rightarrow G(p)$ tal que $\overline{f}_p : \beta\omega \rightarrow \beta(G(p))$ satisfaz $\overline{f}_p(p) \notin G(p)$.

Se tomarmos $f : \omega \rightarrow G$, onde $G = \prod_{p \in \omega^*} G(p)$ tal que $(f(n))_p = f_p(n)$.

Usando que cada $G(p)$ é infinito e pseudocompacto e que o produto de grupos topológicos pseudocompactos é pseudocompacto, pelo Teorema 8.25 de [W]

$$\beta(G) = \prod_{p \in \omega^*} \beta(G(p))$$

Se G é enumeravelmente compacto, pelo Teorema 1.1, $\exists q \in \omega^*$ tal que

$$\overline{f} : \beta\omega \rightarrow \beta G$$

$$\overline{f}(q) = x \in G$$

Mas $\overline{f} = (\overline{f}_p)_{p \in \omega^*}$, isto é, $\overline{f}(q) = (\overline{f}_p(q))_{p \in \omega^*}$.

Em particular, $\overline{f}_q(q) = x_q \in G(q)$.

ABSURDO!

O Teorema 3.2 nos mostra que o conceito de p-compacidade em grupos topológicos não é uma abstração qualquer, e sim a necessária para garantir a preservação da compacidade enumerável em produtos de grupos topológicos.

4. ESPAÇOS p-SEQUENCIAIS

Definição 4.1 Seja X espaço Tychonoff e $p \in \omega^*$. Dizemos que X é p-sequencial se $\forall A, A \subset X$, se A é não fechado, então $\exists f : \omega \to X$ tal que $\{f(n) : n \in \omega\} \subseteq A$ e $\overline{f}(p) \in X \backslash A$, onde $\overline{f} : \beta\omega \to \beta X$ é a extensão de f.

Alguns lemas de demonstração trivial:

Lema 4.1 X é sequencical $\to X$ é p-sequencial para todo $p \in \omega^*$.

Lema 4.2 $t(X) = \omega \Leftrightarrow \forall B \subset X, \forall X \in \overline{B} \quad \exists n \in \omega$ tal que $x \in B^n$, onde $B^0 = B$ e $B^{n+1} = \{x \in X : \exists A \subset B^n, |A| \leq \omega, X \in \overline{A}\}$.

Lema 4.3 Se $f : \omega \to A$ é tal que $\overline{f}(p) \in X$, então $\overline{f}(p) \in \overline{A}$.

Teorema 4.1 [Ar]

Seja G um grupo topológico compacto, então $w(G) = t(G)$.

Teorema 4.2 Seja G um grupo topológico compacto. São equivalentes:

1 - $t(G) = \omega$;

2 - $\exists p \in \omega^*$ tal que G é p-sequencial;

3 - $\forall p \in \omega^* \quad G$ é p-sequencial.

Demonstração:

$1 \to 3$

Pelos Teoremas 4.1 e I-4.2, G é metrizável e, portanto, sequencial. Portanto, G é p-sequencial para todo $p \in \omega^*$.

(pelo Lema 4.1)

$2 \to 3$ Trivial.

$3 \to 1$ Lemas 4.3 e 4.2.

OBS.: O teorema anterior nos mostra a trivialidade do problema de Moore-Mrowka (um espaço compacto tal que $t(X) = \omega$ é sequencial?) no caso de grupos topológicos. Cabe ressaltar que o caso geral do problema foi mostrado ser independente de ZFC:

[Os] $\diamondsuit \rightarrow \exists X$ compacto, com $t(X) = \omega$ e X não sequencial.

[B] PFA $\rightarrow \forall X$ compacto, $t(X) = \omega \rightarrow X$ sequencial.

Comentários finais

O conceito de p-compacidade foi extraído de [G e S].

O Teorema 1.1 é uma demonstração que fiz do enunciado em [V].

O Teorema 1.2 é demonstração feita por mum do resultado em [C2]. O Teorema 1.3 aparece em [G S].

Os Teoremas 1.4, 1.5 e 1.6 aparecem demonstrados em [V].

O parágrafo 2 aparece em [G S].

A parte inicial do parágrafo 3 está em [G e S]. O Teorema 3.2 está demonstrada em [C1], porém a demonstração neste trabalho é diferente. Fiz uma demonstração que tornasse mais clara a razão pela quel o resultado só vale para grupos topológicos.

O Teorema 4.2 se encontra enunciado em [C1] e mostra a trivialidade da solução do problema de Moore-Mrowka no caso de grupos topológicos.

CAPÍTULO V

EXEMPLOS EM GRUPOS TOPOLÓGICOS

Após constatarmos a não preservação de propriedades topológicas como pseudo-compacidade, compacidade enumerável, celularidade e grau de Lindelöf enumerável em produtos de espaços topológicos no capítulo II, no capítulo III, constatarmos que a pseudocompacidade é preservada em produtos arbitrários de grupos topológicos e de, no capítulo IV, encontrarmos uma condição suficiente para garantir que o produto de grupos topológicos enumeravelmente compactos é enumeravelmente compacto, neste capítulo, construiremos em ZFC, ZFC + A (onde A é uma sentença da linguagem da Teoria dos Conjuntos consistente com ZFC) ou usando Forcing, exemplos de grupos topológicos cujos produtos também não preservam as propriedades restantes.

1. O GRAU DE LINDELÖF

Definição 1.1 Seja X um espaço topológico. $N \subseteq X$ é dito *magro* se $\operatorname{int} \overline{N} = \phi$.

Definição 1.2 Definimos $N(\omega_1)$ como sendo a seguinte afirmação: existe uma família $\mathcal{N}$ de cardinalidade ω_1 de subconjuntos magros em 2^ω tal que, para cada subconjunto magro $N \subseteq 2^\omega, \exists N' \in \mathcal{N}$ tal que $N' \supseteq N$.

Definição 1.3 Um espaço é dito *de Luzin* se todo subconjunto magro é enumerável.

Definição 1.4 $\mathcal{B} \subseteq \tau(X)\backslash\{\phi\}$ é uma π-base se $\forall G \subseteq X$ aberto, $\exists B \in \mathcal{B}$, com $B \subseteq G$.

Lema 1.1 CH $\rightarrow N(\omega_1)$.

Demonstração: 2^ω é espaço métrico separável portanto possui B base enumerável.

Tomo $\mathcal{N} = \{N \subseteq 2^\omega : N \text{ é magro e fechado}\}$.

Seja

$$\phi : \mathcal{N} \rightarrow [B]^\omega$$

$$N \mapsto \{O_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \cup O_{n_i} = 2^\omega \backslash N$$

ϕ é injetora, portanto $|\mathcal{N}| \leq |[B]^\omega| = 2^\omega = \omega_1$ e se N é magro $N \subset \overline{N} \in \mathcal{N}$.

Teorema 1.1 $N(\omega_1) \rightarrow$ Existe um subgrupo topológico de Luzin de 2^ω cujo quadrado não é Lindelöf.

Demonstração: É óbvio que 2^α é homeomorfo a 2^ω $\forall \alpha \in \omega_1 \backslash \omega$. Para cada $\alpha \in \omega_1 \backslash \omega$, fixemos $\mathcal{N}_\alpha$, família de fechados magros tal que para cada subconjunto magro $N \subset 2^\alpha$, existe $N' \in \mathcal{N}_\alpha$ tal que $N \subseteq N'$ e $|\mathcal{N}_\alpha| \leq \omega_1$.

Considere $\mathcal{N} = \bigcup_{\alpha \in \omega_1 \backslash \omega} \{\pi_\alpha^{-1}(N) : N \in \mathcal{N}_\alpha\}$, onde $\pi_\alpha : 2^{\omega_1} \rightarrow 2^\alpha$ é projeção.

Lema: Seja $N \subset 2^{\omega_1}$ fechado, $\operatorname{int} N = \emptyset$, então $\exists \gamma > 0, \exists B \subset 2^\alpha$ magro em 2^γ tal que $B \times \{0,1\}^{\omega_1 \backslash \gamma}$ é magro em 2^{ω_1} e $N \subseteq B \times \{0,1\}^{\omega_1 \backslash \gamma}$.

Demonstração: Como $c(2^{\omega_1}) = \omega$ e $X \backslash N$ é aberto em 2^{ω_1} $c(2^{\omega_1} \backslash N) = \omega$.

Tomemos $\mathcal{A} = \{V_n : n < \omega\}$ coleção maximal de abertos básicos dois a dois disjuntos em $X \backslash N$.

$$V_n = \prod_{i \in \omega_1} V_n^i$$

Tome $A_n = \{i \in \omega_1 : V_n^i \neq \{0,1\}\}$ $\quad |A_n| < \omega$, para todo $n \in \omega$.

Se $A = \bigcup_{n<\omega} A_n, |A| \leq \omega$.

Tome $\gamma = \sup A, \gamma < \omega_1$.

Se $\Lambda = \bigcup_{n<\omega} V_n$, então $\Lambda = W \times \{0,1\}^{\omega_1 \backslash \gamma}$, onde W é aberto em $\{0,1\}^\gamma$, e W é denso em $\{0,1\}^\gamma$ (pois $\operatorname{int}(N) = \emptyset$)

Temos que $\pi_\gamma(N) \subseteq \{0,1\}^\gamma \backslash W$ pois se $x = (x_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \in N$ e $(x_\alpha)_{\alpha<\gamma} \in W$, teríamos $x \in \Lambda$, absurdo!

E $\{0,1\}^{\gamma}\backslash W$ é fechado e magro em 2^{γ}.

$N \subseteq (\{0,1\}\backslash W) \times \{0,1\}^{\omega_1\backslash\gamma}$ é magro em 2^{ω_1}. ■

Lema 1.3 $\forall N \subset 2^{\omega_1}$ magro, $\exists N' \in \mathcal{N}$ magro tal que $N \subset N'$.

Demonstração: Tome $N \subset 2^{\omega_1}$ magro.

Tome B e γ_0 do lema anterior.

Seja $\pi = \pi_{\gamma_0} : 2^{\omega_1} \rightarrow 2^{\gamma_0+1}$.

Portanto $\pi''(B)$ é magro em 2^{γ_0+1}.

Logo $\exists N_\alpha \in \mathcal{N}$ tal que $\pi''(B) \subset N_\alpha$.

$$\pi^{-1}(\pi''(B)) \in \pi^{-1}(N_\alpha)$$

Mas $\pi^{-1}(\pi''(B)) = B$. Portanto $N \subset B \subset \pi^{-1}(N_\alpha)$.

Usando que $|(\omega_1\backslash\omega) \times (\omega_1\backslash\omega)| = |\omega_1\backslash\omega|$, ordene $\mathcal{N}$ pelos ordinais em $\omega_1\backslash\omega$ de tal forma que

$$\pi_\beta^{-1}(\pi_\beta''(N_\beta)) = N_\beta$$

Bastando notar que $\pi_\beta^{-1}(\pi_\beta''(\pi_\alpha^{-1}N)) = \pi_\alpha^{-1}(N)$.

Fixe em 2^{ω_1} uma π-base de abertos e fechados básicos $\{P_\alpha : \alpha \in \omega_1\backslash\omega\}$ tal que $\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(P_\alpha)) = P_\alpha$.

Seja M o conjuto de pares $x_\beta^0, x_\beta^1, \beta \in \omega_1\backslash\omega$ de pontos de 2^{ω_1} que satisfazem às condições:

1 - $x_\beta^0(\gamma) = x_\beta^1(\gamma) = 0 \quad \forall\gamma \in \omega_1\backslash\beta$;

2 - $(1 - x_\beta^0(\delta))(1 - x_\beta^1(\delta)) = 0 \quad \forall\delta \in \beta$;

3 - $x_\beta^0 \in P_\beta$;

Escolhemos os pontos de tal maneira que, se X denota o subgrupo de 2^{ω_1} gerado por M.

4 - $|X \cap N_\alpha| \leq \omega, \forall\alpha \in \omega_1\backslash\omega$.

4 $\rightarrow$ nos garante que X é subgrupo de Luzin.

$3 \rightarrow$ nos garante que X é denso em 2^{ω_1}.

Proposição 1.1 X^2 não é Lindelöf.

Demonstração: Seja $V_\alpha^0 = \{y \in 2^{\omega_1} : y(\alpha) = 0\}$.

$\sigma = \{V_\alpha^0 \times V_\alpha^0 : \alpha \in \omega_1\}$ é cobertura de X^2 por (1). Mas se $\sigma' \subset \sigma$ é enumerável

$$\exists \beta \in \omega_1 \backslash \omega, \quad \beta > \sup\{\alpha : V_\alpha^0 \times V_\alpha^0 \in \sigma'\}$$

Portanto $< x_\beta^0, x_\beta^1 > \notin \cup\sigma'$ (por (2)).

Portanto σ' não é cobertura. ∎

OBS.: $c(X) = \omega$, pois $d(2^{\omega_1}) = \omega$ e X é denso em 2^{ω_1}:

Seja $\{O_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma família de abertos, dois a dois disjuntos, em X.

$$O_\alpha = V_\alpha \cap X, V_\alpha \text{ aberto em } 2^{\omega_1}$$

Se $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset \rightarrow V_\alpha \cap V_\beta \cap X \neq \emptyset$, pois X é denso.

Portanto, $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$.

Portanto $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$.

Portanto $\{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é família de abertos dois a dois disjuntos em 2^{ω_1}. Absurdo, pois $d(2^{\omega_1}) = \omega$.

Faremos agora a construção dos pontos.

Tome $\beta \in \omega_1 \backslash \omega$ e suponha x_α^0 e x_α^1 já construídos para todo $\alpha \in \beta \backslash \omega$.

Seja X_β o subgrupo de 2^{ω_1} gerado por $\{x_\alpha^0, x_\alpha^1 : \alpha \in \beta \backslash \omega\}$.

Coloque $\mathcal{C}_\beta = \{x + N_\alpha : x \in X_\beta, \alpha \in \beta \backslash \omega\}$.

Claramente $|\mathcal{C}_\beta| = \omega$, indexamos os elementos pelos naturais

$$\mathcal{C}_\beta = \{N_k : k \in \omega\} \quad \beta = \{\delta_i : i \in \omega\}$$

Como $\beta > \alpha, \pi_\beta^{-1}(\pi_\beta''(N_k)) = N_k, \forall k \in \omega$ e $\pi_\beta^{-1}.(\pi_\beta''(P_\beta)) = P_\beta$.

Dizemos que u e $v \in 2^{\Delta}$ são admissíveis se

$$(1 - u(\delta))(1 - v(\delta)) = 0 \quad \forall \delta \in \Delta$$

Definiremos agora, dois pontos admissíveis em 2^{β} por indução:

$\exists \Delta_0 \subset \beta, u_0 \in 2^{\Delta_0}$ tal que $|\Delta_0| < \omega \quad \delta_0 \in \Delta_0$ e $\pi_{\Delta_0}^{-1}(u_0) \subseteq P_\beta$, pois P_β é aberto e, portanto, contém um aberto básico $\pi_{\delta_0}^{-1}(u_0)$.

Construa $v_0 \in 2^{\Delta_0}$ tal que u_0 e v_0 são admissíveis.

Suponha que para $i \in \omega$ encontramos

$$\Delta_i \subset \beta, |\Delta_i| < \omega \text{ e } \{\delta_j \quad j \leq i\} \subseteq \Delta_i$$

e pontos u_i e v_i e admissíveis tal que

$$\{u_i, v_i, u_i + v_i\} \cap \pi''_{\Delta_i}(N_0 \cup \ldots \cup N_i) = \emptyset$$

Descreveremos o $i+1$-ésimo passo da indução:

Como N_{i+1} é magro, $\exists \Delta' \subset \beta, u' \in 2^{\Delta'}$ tal que $\Delta_i \subset \Delta'$, $|\Delta'| < \omega \quad \delta_{i+i} \in \Delta'$ e $u' \notin \pi''_{\Delta'}(N_{i+1})$, pois $\pi_\beta^{-1}(\pi''_\beta(N_{i+1})) = N_{i+1}$ e já que $F = \pi''_\beta(N_{i+1})$ é fechado (pois é compacto).

$$\exists V = \prod_{i \in \beta} V_i \subseteq 2^{\beta} \backslash F$$

$$I = \{i \in \beta : V_i = \{x_i\} \neq \{0,1\}\}$$

tomo $\Delta' = \Delta \cup \{\delta_{i+1}\} \cup I$, garantindo que $u'(i) = x_i$ se $i \in I$.

Produza facilmente $v' \in 2^{\Delta'}$ tal que u' e v' são admissíveis.

Escolha $\Delta'' \subset \beta, v'' \in 2^{\Delta''}$ tal que $\Delta' \subseteq \Delta''$:

$$|\Delta''| < \omega \quad v' \subseteq v'', v'' \notin \pi''_{\Delta''}(N_{i+1})$$

Produza $u'' \in 2^{\Delta''}$ tal que u'' e v'' são admissíveis.

Ache agora $\Delta_{i+1} \subset \beta \quad c_{i+1} \subseteq 2^{\Delta_{i+1}}$ tal que $\Delta'' \subseteq \Delta_{i+1}$, $|\Delta_{i+1}| < \omega, \delta_{i+1} \in \Delta_{i+1}$ $c_{i+1} \supseteq u'' + v''$ e $c_{i+1} \notin \pi_{\Delta_{i+1}}(N_{i+1})$.

Produza $u_{i+1}, v_{i+1} \in 2^{\Delta_{i+1}}$ tal que são admissíveis.

$$u'' \subseteq u_{i+1}, v'' \subseteq u_{i+1}$$

$$u_{i+1} + v_{i+1} = c_{i+1}$$

Notamos que podemos tomar $u_i \subseteq u_{i+1}, v_i \subseteq v_{i+1}$. Obtemos dois pontos admissíveis $u, v \in 2^\beta \quad u = \cup u_i \quad v = \cup v_i$, completando, se preciso, se $\alpha \in \beta \setminus \cup_{i \in \omega} \Delta_i$, de forma a permanecer admissível.

Coloque $x^0_\beta(\alpha) = u(\alpha) \quad x^1_\beta(\alpha) = v(\alpha)\ \forall \alpha \in \beta$ e $x^0_\beta(\alpha) = x^1_\beta(\alpha) = 0$ se $\alpha \in \omega_1 \setminus \beta$ $x^0_\beta \in P_\beta$, pois u_i estende u_0 e $\pi^{-1}_{\Delta_i}(u_i) \subseteq P_\beta$.

x^0_β, x^1_β e $x^0_\beta + x^1_\beta \notin UC_\beta$ por construção.

Também, pela construção,

$$\forall \gamma > \alpha \quad x^0_\gamma, x^1_\gamma, x^0_\gamma + x^1_\gamma \notin \cup\{N_\beta + x : x \in X \text{ e } \beta \in \gamma \setminus \omega\}$$

Portanto, $x \in X \cap N_\alpha \rightarrow x \in [\{x^0_\epsilon, x^1_\epsilon \quad \epsilon < \alpha\}] = X_\alpha$ ■

Portanto, $|X \cap N_\alpha| \leq |X_\alpha| \leq \omega$ ■

Lema 1.4 Se X é espaço de Luzin com $c(X) = \omega$, então X é Lindelöf.

Demonstração: Suponha que não seja Lindelöf. Seja $\mathcal{O} = \{O_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ recobrimento aberto de X sem sub-recobrimento enumerável (*).

Afirmação: Se $B \subseteq \omega_1$ é tal que $|B| \leq \omega$, então $\overline{\cup_{\alpha \in B} O_\alpha} \neq X$.

Demonstração: Suponha que $\exists B \subseteq \omega_1, |B| \leq \omega$ tal que $\overline{\cup_{\alpha \in B} O_\alpha} = X$.

Seja $F = \overline{\cup_{\alpha \in B} O_\alpha} \setminus \cup_{\alpha \in B} O_\alpha$. Por (*), $F \neq \emptyset$. Além disso, F é fechado e $\mathrm{int}\,(F) = \emptyset$. Como X é de Luzin, F é enumerável, i.é, $F = \{y_n : n \in \omega\}$. Seja α_n tal que $y_n \in O_{\alpha_n}$ $\mathcal{O}' = \{O_\alpha : \alpha \in B\} \cup \{O_n : n \in \omega\}$ é sub-recobrimento enumerável de $\mathcal{O}$, contra (*). ■

Podemos supor, então, que $O_\beta \backslash \overline{\cup_{\gamma<\beta} O_\gamma} \neq \emptyset$.

Tome, agora, $V_0 = O_0$ e $V_\alpha = O_\alpha \backslash \overline{\cup_{\gamma<\alpha} O_\gamma}$.

$\{V_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ é família de abertos de X dois a dois disjuntos, contrariando $c(X) = \omega$.

Temos então o resultado.

Como o espaço construído no Teorema 1.1 é denso em 2^{ω_1} e $c(2^{\omega_1}) = \omega$, esse espaço tem celularidade enumerável. Como também é espaço de Luzin, é Lindelöf.

Podemos resumir o resultado no seguinte corolário:

Corolário 1.4 $N(\omega_1) \rightarrow$ existe um grupo topológico X, Tychonoff, com $L(X) = \omega$ e $L(X \times X) = \omega_1$.

Portanto, cons(ZFC) $\rightarrow$ cons(ZFC $+N(\omega_1) + \exists X$, grupo topológico, com $L(X) = \omega$ e $L(X \times X) > \omega$).

2. CELULARIDADE

Neste parágrafo constataremos que a celularidade não é preservada em produtos de grupos topológicos.

Cabe notar que o procedimento utilizado em II-1 não cabe nesse contexto pois, em geral, os espaços de Stone de uma ordem parcial não são nem homogêneos; logo não podem ser grupos topológicos.

Lema 2.1 Seja κ cardinal infinito. Existe uma seqüência de subconjuntos de κ $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, satisfazendo:

1 - $|A_\alpha| = 2, \forall\alpha < \kappa$

2 - $\alpha \neq \beta \rightarrow A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ mais geralmente, se $\alpha < \beta \quad x \in A_\alpha, y \in A_\beta \rightarrow x < y$.

3 - $\cup\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} = \kappa$.

Demonstração: Faremos a construção por indução transfinita.

$$A_0 = \{\phi, \{\phi\}\}$$

e se A_β está definido para todo $\beta < \gamma$,

$$A_\gamma = \{\min(\kappa \setminus \cup_{\beta<\gamma} A_\beta), \min(\kappa \setminus \cup_{\beta<\gamma} A_\beta) + 1\}$$

Notando que, se $\gamma < \kappa$

$$|\cup_{\beta<\gamma} A_\beta| \leq 2|\gamma| = |\gamma| < \kappa \text{ e portanto } (\kappa \setminus \cup_{\beta<\gamma} A_\beta) \neq \emptyset$$

SUB LEMA:

$\forall\beta < \kappa$, se $A_\beta = \{\theta, \theta+1\}$ e $\epsilon < \theta \quad \exists\alpha < \beta$ tal que $\epsilon \in A_\alpha$.

Demonstração: Suponha que $\exists\beta < \kappa, \theta \in A_\beta \wedge \epsilon < \theta$ tal que $\epsilon \notin \cup_{\alpha<\beta} A_\alpha$.

Seja $\alpha_0 < \kappa$ o menor ordinal β com essa propriedade e ϵ_0 o menor ϵ.

Temos: $\forall \beta < \epsilon_0 \quad \exists \eta < \alpha_0$ tal que $\beta \in A\eta$ e $\epsilon_0 \in \kappa \setminus \cup_{\eta < \alpha_0} A_\eta$

Portanto, $\epsilon_0 = \min(\kappa \setminus \cup_{\mathcal{N} < \alpha_0} A_\eta)$.

Portanto, $\epsilon_0 \in A_{\alpha_0} \rightarrow$ ABSURDO!

Tomemos $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < k\}$.

(1) é trivial, (2) o sub-lema nos garante,

(3) Suponha que $\cup \mathcal{A} \neq \kappa$.

Tome $\gamma = \min(\kappa \setminus \cup \mathcal{A}$.

O sub-lema nos garante que $\cup \mathcal{A} = \gamma$. Absurdo, pois nesse caso teríamos $|\gamma| = \kappa$.

Note que $\forall \beta < \kappa \quad A_\beta = \{\theta, \theta + 1\}$ para algum θ.

Lema 2.2 Seja M c.t.m. para ZFC, $\mathbb{P}$ ordem parcial c.c.c. e τ $\mathbb{P}$-nome em M, $q^* \in \mathbb{P}$.

Então $\mathcal{A}' = \{a : q^* \Vdash \breve{a} \in \tau\} \in M$, isto é, $\mathcal{A}'$ é efetivamente um conjunto em M.

Demonstração: $\forall G$ $\mathbb{P}$-genérico sobre M, se $q \in G \rightarrow a \in \tau_G$.

Portanto, $\exists t \in G$ tal que $< \breve{a}, t > \in \tau$.

Portanto, $\breve{a} \in \pi(\tau)$ (projeção na $1^{\underline{a}}$ coordenada).

Tome $A^* = \{x \in \pi(\tau) : q^* \Vdash x \in \tau\}$.

Seja $\psi(x, b) \leftrightarrow \exists y(x = \breve{y} \wedge \breve{b} = x) \vee (\neg \exists y(x = \breve{y} \wedge b = \tau \times \{1\})$

ψ é uma relação bem fundada e "set-like". Logo, temos a possibilidade de fazer indução no rank.

Logo, temos que se $a \neq b \quad \breve{a} \neq \breve{b}$, pois suponha $\breve{a} = \breve{b}$. Então $\{< \breve{c}, 1 >: c \in a\} = \{\check{<}d, 1 >: d \in b\}$. Mas, por hipótese de indução, $< \breve{c}, 1 > = < \breve{d}, 1 >$, então $c = d$. Assim, temos o resultado.

Temos então $\forall x \exists ! b \psi(x, b)$.

Se $(A^{**})' = \{b : \exists x \in A^* \psi(x, b)\}$ pelo axioma da substituição

$$(A^{**})' \in M$$

$A^{**} = (A^{**})' \backslash \{\tau \times \{1\}\} \in M$.

Portanto, $A' = \{b \in A^{**} : q \Vdash \check{b} \in \tau\} \in M$ pelo esquema de axiomas de compreensão.

■

Lema 2.3 Seja M c.t.m. para ZFC. Seja $\mathbb{P} \in M$ uma ordem parcial c.c.c. em M tal que $(\mathbb{P} = \kappa)^M$, κ cardinal infinito em M. Então se A é família de conjuntos finitos de ordinais em $M[G]$ (onde G é $\mathbb{P}$-genérico sobre M), $(|\mathcal{A}| = \kappa^+)^{M[G]}$, então $\exists \mathcal{A}' \in M$ tal que

$$M[G] \models \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \wedge |\mathcal{A}'| = \kappa^+$$

Demonstração: Pelo Teorema I-3.3,

$$(\kappa^+)^M = (\kappa^+)^{M[H]} \quad \forall H \quad \mathbb{P}\text{-genérico sobre } M$$

$M[G] \models \mathcal{A}$ é família de conjuntos finitos de ordinais e $|\mathcal{A}| = \kappa^+$.

Seja τ $\mathbb{P}$-nome sobre M tal que $\mathcal{A} = \tau_G$. Pelo Teorema I-3.1, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \tau$ é família de conjuntos finitos de ordinais e $\mathcal{A} = \kappa^+$.

Mostraremos que o conjunto

$$D = \{q \in \mathbb{P} : \exists \mathcal{A}' \in M \ q \Vdash \check{\mathcal{A}}' \subset \tau \wedge |\mathcal{A}'| = \check{\kappa^+}\}$$

é denso sob p.

Seja $q \leq p$. Pelo Lema I-3.6, $q \Vdash \tau$ é família de conjuntos finitos de ordinais e $|\tau| = \check{\kappa^+}$.

Em $M[G]$

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$$

$A_\alpha \in M$, pois $\mathrm{Ord}(M) = \mathrm{Ord}(M[G])$ e conjuntos finitos são absolutos.

Pelo Teorema I-3.3, $\exists q_\alpha \leq q$ tal que $q_\alpha \Vdash \check{A}_\alpha \in \tau$.

Portanto, $M[G] \models \{q_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq \mathbb{P}$.

Logo, $M[G] \models |\{q_\alpha : \alpha < \kappa^+\}| \leq \kappa$, pois $\mathbb{P} \in M$ e $(|\mathbb{P}| = \kappa)^M$.

Consequentemente, $\exists q' = q_{\alpha_0}$ tal que se $C = \{\alpha < \kappa : q' \Vdash \check{A}_\alpha \in \tau\}$ então $|C| = \kappa^+$.

Tomo esse $q' \leq q$.

Pelo Lema 2.2

$$A' = \{a : q' \Vdash \check{a} \in \tau\} \in M$$

Temos que

I - $q' \Vdash \check{A}' \subseteq \tau$, pois, seja H genérico tal que $q' \in H$. Como $q' \leq p$, $p \in H$.

Portanto, $a \in A' \to a \in \tau_H$, por definição.

II - $q' \Vdash |\check{A}'| = \check{\kappa^+}$

Suponha que não $\exists H$ $\mathbb{P}$-genérico sobre M, $q' \in H$ tal que

$$M[H] \Vdash |A'| \leq \kappa$$

Portanto, $\exists f \in M[H] \quad f : \kappa \to A'$ sobrejetora.

Pelo Teorema I-3.4,

$$\exists F : \kappa \to P(A') \text{ tal que } F \in M, f(\alpha) \in F(\alpha) \text{ e } (|F(\alpha)| \leq \omega)^M$$

Portanto, $A' \subseteq \cup_{\alpha<\kappa} F(\alpha)$. Portanto, $(|A'| = \kappa)^M$.

Seja $g : A' \to \kappa$, $g \in M$ bijetora.

$$g \in M[G] \Rightarrow (|A'| = \kappa)^{M[G]}$$

Mas, em $M[G]$

Se $B = \{A_\alpha : \alpha \in C\}$

$$B \subset A' \text{ portanto } (|A'| \geq |B|)^{M[G]}$$

$$\text{Portanto, } (|A'| \geq \kappa^+)^{M[G]}$$

Absurdo!

Portanto, $q' \Vdash A' \subset \tau$ e $|\check{A}'| = \check{\kappa^+}$.

Portanto, $q' \in D \wedge q' \leq q$. Logo, provamos que D é denso.

Como $p \in G$, pelo Lema I-3.5,

$$G \cap D \neq \emptyset$$

Portanto, $\exists t \in G \quad t \Vdash \check{A}' \subset \tau \wedge |\check{A}'| = \kappa^+$.

Portanto $M[G] \models A' \subseteq \tau_G$ e $|A'| = \kappa^+$.

Teorema 2.1 Seja M c.t.m. para ZFC + GCH. Seja $\kappa \in M$ tal que $M \models \kappa$ é cardinal infinito. Então existe $\mathbb{P}$ ordem parcial em M tal que, se H é $\mathbb{P}$-genérico sobre M, $M[H] \models$ existe um grupo topológico G tal que $c(G) = \kappa$ e $c(G \times G) = \kappa^+$.

Demonstração: Usando o Lema 2.1, tome em M uma família $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}, A_\alpha = \{\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha + 1\}$$

Defina $\mathbb{P}$ da seguinte forma: $f \in \mathbb{P} \leftrightarrow f$ é função $\wedge |\mathrm{dom}(f)| < \omega \wedge \mathrm{Im}(f) \subseteq \{0, 1\} \wedge \mathrm{dom}(f) \subseteq \kappa \wedge \mathrm{dom}(f)$ é a união de elementos de $\wedge(\epsilon_\alpha, \epsilon_\alpha + 1 \in \mathrm{dom}(f) \rightarrow (1 - f(\epsilon_\alpha)(1 - f(\epsilon_\alpha + 1)) = 0$

$$p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p$$

Pelo Lema I-3.7, $\mathbb{P}$ tem c.c.c.

Usando GCH e o Teorema I-2.1, construa funções $\theta'_\alpha : \alpha \rightarrow \{\epsilon_\beta : \beta < \kappa\}$, $\alpha \in \kappa^+ \backslash \kappa$ tal que $\{\mathrm{Im}(\theta'_\alpha)\}_{\alpha \in \kappa^+ \backslash \kappa}$ forme uma família quase disjunta com a propriedade de que se $d \subseteq \kappa^+ \quad |d| < \kappa$, $\{\alpha / \mathrm{Im}(\theta'_\alpha) \cap d = \emptyset\} \neq \emptyset$.

Seja Λ o subconjunto de todos os subconjuntos finitos de $\kappa^+ \times \{0, 1\}$ com a operação $a + b = (a \backslash b) \cup (b \backslash a)$.

$(\Lambda, +)$ é grupo abeliano de ordem 2.

Tome H $\mathbb{P}$-genérico sobre M qualquer. $\forall \alpha \in \kappa^+ \backslash \kappa$, defina

$$A^0_\alpha = \{\beta \in \alpha : \cup H(\theta'_\alpha(\beta)) = 1\}$$

$$UA^1_\alpha = \{\beta \in \alpha : \cup H(\theta'_\alpha(\beta)+1) = 1\}$$

$$A^0_\alpha \cup A^1_\alpha \subseteq \alpha$$

Mas, pela definição de $\mathbb{P}$, se $\theta'_\alpha(\beta) = \epsilon_{\eta_\beta}$

$$\cup H(\epsilon_{\eta_\beta}) = 1 \text{ ou } \cup H(\epsilon_{\eta_\beta}+1) = 1$$

Portanto, $A^0_\alpha \cup A^1_\alpha = \alpha$.

Note que H tem nome canônico $\Gamma = \{< \check{p}, p >: p \in \mathbb{P}\}$ e que a definição de A^0_α e A^1_α é feita a partir de Γ.

Fixe G $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Seja Φ_α o subgrupo de Λ construído como se segue.

Para $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$. Se $a \in \Lambda \quad a \in \Phi_\alpha \leftrightarrow$

1 - $< \alpha, 0 >, < \alpha, 1 > \notin a$

2 - Para todo $\beta \in \alpha$ vale:

(a) se $\beta \in A^0_\alpha \cap A^1_\alpha$, então $< \beta, 0 >, < \beta, 1 >$ pertencem ambos a a ou nenhum;

(b) se $\beta \in A^0_\alpha \backslash A^1_\alpha$, então $< \beta, 0 > \notin a$;

(c) se $\beta \in A^1_\alpha \backslash A^0_\alpha$, então $< \beta, 1 > \notin a$.

Φ_α é subgrupo de Λ.

Se $b \subset \kappa^+ \backslash \kappa, |b| < \omega$.

Defina $F_b = \cap\{\Phi_\alpha : \alpha \in b\}$.

F_b é subgrupo de Λ, pois é intersecção de subgrupos.

Seja $\mathcal{F}$ a família de todos os conjuntos da forma F_b.

Verificaremos que $\mathcal{F}$ satisfaz o Lema I-4.1:

(a) Trivial, pois F_b é subgrupo e, portanto, $F_b^2 = F_b$.

(b) Trivial, pois $\forall x \in \Lambda, x^{-1} = x$, portanto, $F_b^{-1} = F_b$.

(c) Trivial, pois F_b é subgrupo, portanto, $x \in F_b \rightarrow xF_b = F_b$.

(d) Trivial, pois Λ é grupo abeliano.

(e) Trivial, pois $F_{b \cap c} \subseteq F_b \cap F_c$.

Logo, por Lema I-4.1, se τ é a topologia gerada por $\mathcal{F}$, $(\Lambda, +, \tau)$ é grupo topológico.

Temos ainda:

Λ é Tychonoff:

Demonstração: Pelo Teorema I-4.1, basta provar que Λ é T_1, i.é, $\cap\mathcal{F} = \{\emptyset\}$.

Se $\alpha \in \kappa^+\backslash\kappa \quad <\alpha, 0>, <\alpha, 1> \notin a \in \Phi_\alpha$.

Logo $<\alpha, 0>, <\alpha, 1> \notin \cap\mathcal{F} \subseteq \Phi_\alpha$.

Seja $\beta \in \kappa$.

Seja $p \in \mathbb{P}$.

Como dom(p) é finito, $\exists\alpha_0$ tal que dom$(p) \cap$ Imagem$(\theta'_{\alpha_0}) = \emptyset$.

Tome $q = p \cup \{<\theta'_{\alpha_0}(\beta), 1>, <\theta'_{\alpha_0}(\beta) + 1, 0>\} \quad q \leq p \quad q \Vdash <\check{\beta}, 0> \notin \check{a} \in \Phi_{\check{\alpha_0}}$.

Portanto, $D = \{q : \exists\alpha_0 \quad q \Vdash <\beta, \check{0}> \notin \check{a} \in \check{\Phi_{\alpha_0}}\}$ é denso. Portanto, $G \cap D \neq \phi$.

Portanto, $\exists p' \in G \quad p' \Vdash <\beta, \check{0}> \notin \check{a} \in \Phi_{\check{\alpha_0}}$. ■

$C(\Lambda^2) \geq \kappa^+$.

Demonstração: $\forall\alpha \in \kappa^+\backslash\kappa$, seja

$$V_\alpha^0 = \{<\alpha, 0>\} + \Phi_\alpha$$

$$V_\alpha^1 = \{<\alpha, 1>\} + \Phi_\alpha$$

$\{V_\alpha^0 \times V_\alpha^1 : \alpha \in \kappa^+\backslash\kappa\}$ é família de abertos dois a dois disjuntos, i.é, se $\beta < \alpha \quad V_\alpha^0 \cap V_\beta^0 = \emptyset$ ou $V_\alpha^1 \cap V_\beta^1 = \emptyset$.

Como $\beta \in A_\alpha^0 \cup A_\alpha^1$. Suponha $\beta \in A_\alpha^0$.

Mostraremos que $V_\beta^0 \cap V_\alpha^0 = \emptyset$:

Seja $a \in V_\beta^0 \cap V_\alpha^0$.

Então $a \in V_\beta^0 = \{<\beta, 0>\} + \Phi_\beta$.

Logo $<\beta, 0> \in a$ e $<\beta, 1> \notin a$.

Além disso, $a \in V_\alpha^0 = \{<\alpha, 0>\} + \Phi_\alpha$.

Logo $a = (\{<\alpha, 0> \backslash a'\}) \cup (a' \backslash \{<\alpha, 0>\})$. Como $<\alpha, 0> \notin a', \forall a' \in \Phi_\alpha$,

$a = \{< \alpha, 0 >\} \cup a'$.

Portanto, $< \beta, 0 > \in a' \wedge < \beta, 1 > \notin a'$ e, consequentemente, $\beta \notin A^0_\alpha \rightarrow$ CONTRADIÇÃO.

Analogamente,

$$\beta \in A^1_\alpha \rightarrow V^1_\alpha \cap V'_\beta = \emptyset$$

Proposição: A celularidade de Λ é menor ou igual a κ.

Demonstração: Suponha $\{a_\alpha + F_{b_\alpha} \quad \alpha < \kappa^+\} \quad b_\alpha \subseteq \kappa^+ \backslash k$ finito $a_\alpha \in \Lambda$ seja família de abertos dois a dois disjuntos em $M[G]$.

Tome $\mathcal{A} = \{< a_\alpha, b_\alpha >: \alpha \in \kappa^+\}$.

Exatamente com a mesma demonstração do Lema 2.3 (apesar de $< a_\alpha, b_\alpha >$ não ser um conjunto finito de ordinais, a_α é finito $a_\alpha \subset \kappa^+ \times \{0,1\}, b_\alpha$ finito $b_\alpha \subset \kappa^+ \backslash \kappa$) já que o conceito de par ordenado é absoluto.

Tome $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1 \in M$ e $M[G] \models |\mathcal{A}_1| = \kappa^+$. Como $\mathcal{A}_1 \in M$ e $\mathbb{P}$ é c.c.c. $\rightarrow (\kappa^+)^M = (\kappa^+)^{M[G]} \quad M \models |\mathcal{A}_1| = \kappa^+$. Tome $B_1 = \{a_\alpha :< a_\alpha, b_\alpha > \in \mathcal{A}_1\} \in M \quad |B_1| = \kappa^+$

Uso o Δ-system lema em B_1, obtendo e $\in \Lambda$ e $B_2 \subseteq B_1 \quad |B_2| = \kappa^+$ e $a_\alpha \cap a_\beta =$ e se $a_\alpha, a_\beta \in B_2$.

Como $a_\alpha \neq a_\beta$ se $\alpha \neq \beta \quad a_\alpha \backslash \mathrm{e} \neq \phi$, pois como e $\subseteq a_\alpha$, se $a_\alpha \backslash \mathrm{e} = \emptyset, a_\alpha =$ e e teríamos $\beta \neq \alpha$ e $a_\alpha \subseteq a_\beta$, logo $(a_\alpha + F_{b_\beta}) \cap (a_\beta + F_{b_\beta} \neq \emptyset$

Tomo $\mathcal{A}_2 = \{< a_\alpha, b_\alpha >, a_\alpha \in B_2\}$

Seja $a \in \Lambda$

$$\tilde{a} = \{\alpha \in \kappa^+ : a \cap \{< \alpha, 0 >, < \alpha, 1 >\} \neq \emptyset\}$$

Seja $\{< a_\alpha, b_\alpha >_{\alpha < \kappa} \subseteq \mathcal{A}_2$ qualquer $\exists < u, v > \in \mathcal{A}_1$ tal que $\min(\widetilde{u \backslash \mathrm{e}}) > \max\{\tilde{a}_\alpha \cap b_\alpha\}$.

Demonstração: $\alpha_0 = \sup_{\alpha < k}(\tilde{a}_\alpha \cup b_\alpha)$ é menor que κ^+ (pois este é regular).

Suponha que $\forall u \in B_2 \exists \gamma \leq \alpha_0$ tal que

$$< \gamma, 0 > \in u \backslash \mathrm{e} \text{ ou } < \gamma, 1 > \in u \backslash \mathrm{e} \quad (*)$$

Seja $B_\gamma = \{u \in B_2 :< \gamma, 0 > \text{ ou } < \gamma, 1 > \in u \backslash e\}$

$\cup_{\gamma \leq \alpha_0} B_\gamma = B_2$ por (*) e $|B_2| = \kappa^+$.

$$\exists \gamma_0 < \alpha_0 \text{ tal que } |B_{\gamma_0}| = \kappa^+$$

Sejam

$$B^0_{\gamma_0} = \{u \in B_{\gamma_0} :< \gamma, 0 > \in u \backslash e\}$$

$$B^j_{\gamma_0} = \{u \in B_{\gamma_0} :< \gamma, 1 > \in u \backslash e\}$$

$|B^0_{\gamma_0}| = \kappa^+$ ou $|B^1_{\gamma_0}| = \kappa^+$.

Suponhamos que $|B^0_{\gamma_0}| = \kappa^+$

$$u, v \in B^0_{\gamma_0} \qquad < \gamma^0_0, 0 > \in u \backslash e$$

$$< \gamma^0_0, 0 > \in v \backslash e$$

Portanto, $e = u \cap v \supseteq e \cup \{< \gamma_0, 0 >\}$ ABSURDO!

Portanto, $\exists u \in B_2$ tal que $\min(\widetilde{u \backslash e}) > \max_{\alpha < k} \{\widetilde{a_\alpha} \cup b_\alpha\}$.

Tome v tal que $< u, v > \in \mathcal{A}_2$, satisfazendo a condição $v = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$

■

Lema:

$$\forall p \in \mathbb{P} \exists q \leq p \; \exists \alpha \in \kappa \; q \Vdash \check{a_\alpha} \cup \check{u} \in \check{u} + F_{\check{v}} \qquad (I)$$

Demonstração: $\{a_\alpha \backslash e \quad \alpha < \kappa^+\}, a_\alpha \in B_2$ é família disjunta de conjuntos não vazios, logo

$$|\{\alpha \in \kappa^+ :< \beta_i, 0 > \in a_\alpha \backslash e\}| = 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

e $|\{\alpha \in k^+ :< \beta_i, 1 > \in a_\alpha \backslash e\}| = 1 \quad i = 1, \ldots, k$.

Retiro da minha família aqueles que ocasionalmente tiverem essa propriedade e continuo com um conjunto de cardinalidade κ^+.

Seja $b_0 = a_0 \backslash e$

$b_\alpha = a_{\beta_0} \backslash e$, onde $\beta_0 = \min\{\gamma | \widetilde{a_\gamma \backslash e} \cap \bigcup_{\epsilon<\alpha} \tilde{b_\epsilon} \neq \emptyset\}$ existe pois $| \cup_{\gamma<\alpha} \tilde{b_\gamma}| < \kappa$, isto é,

$$\epsilon \in \bigcup_{\gamma<\alpha} \tilde{b_\gamma} \rightarrow \exists \gamma_0 < \epsilon, 0 >\in b_{\gamma_0} \text{ ou } \exists \gamma_1 < \epsilon, 0 >\in b_{\gamma_1}$$

Logo, por exemplo, se $< \epsilon, 0 >\in b_{\gamma_0}$ $\exists$ no máximo um ψ, tal que $< \epsilon, 1 >\in a_\psi \backslash e$. ■

Logo $\{b_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ é tal que se $\beta \in v$, $b_\alpha \cap \{<\beta, 0>, <\beta, 1>\} = \emptyset$ e $\tilde{b}_\alpha \cap \tilde{b}_\gamma = \emptyset$ se $\alpha = \gamma$. ■

Para simplificar a notação, suponha que a nossa família $\{a_\alpha \backslash e : \alpha < \kappa^+\}$ já tivesse as propriedades acima.

Seja $v_1 \subseteq v$ tal que, se $\beta \in v_1$ então $|\{\alpha \in \kappa^+ : \widetilde{a_\alpha \backslash e} \cap \beta \neq \phi\} = \kappa$ $(**)$.

É claro que v_1 é o subconjunto de v dos β que são maiores do que o menor β' tal que a condição acima é válida. A explicação seguinte mostrará que esse conjunto v_1 é não vazio (E).

Assumindo isto, restringiremos a demonstração ao caso em que $v_1 = v$. Tomando os $\alpha \in \kappa^+$ satisfazendo $(**)$.

Tome $p \in \mathbb{P}$

$$\exists \alpha \in \kappa \text{ tal que } \{a^\beta = \theta'_\beta((\widetilde{a_\alpha \backslash e} \cap \beta) : \beta \in v\}$$

é família disjunta e nenhum elemento intercepta dom(p):

Demonstração:

$$v = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}; \beta_1 < \ldots < \beta_k$$

$$\text{dom}(p) = \{\epsilon_{\alpha_1}, \epsilon_{\alpha_1} + 1, \ldots, \epsilon_{\alpha_r}, \epsilon_{\alpha_r} + 1\}$$

Tomo

$$A = \bigcup_{\substack{1<i,j<k \\ i\neq j}} ((\operatorname{Im} \theta'_{\beta_i} \cap \operatorname{Im} \theta_{\beta_j}) \cup \operatorname{dom} p), \quad |A| \leq \kappa$$

$$B = \{\alpha \in \kappa^+ : \theta'_{\beta_i}(\alpha) \in A \quad i = 1 \ldots k\}$$

Como θ'_{β_i} é injetora

$$|B| \leq \kappa$$

Tomo $\alpha_0 = \max \underbrace{\{\alpha/(\widetilde{a_\alpha \backslash e} \cap B) \neq \phi\}}_{C'}$ c' tem cardinalidade κ, pois se tem cardinalidade κ^+

$$a \in [C']^{<\omega} \quad B_a = \{\alpha : \widetilde{a_\alpha \backslash e} \cap B = a\}$$

Como $|B| \leq \kappa \exists a_0 \neq \emptyset$ tal que $|B_a| = \kappa^+$

$$\exists \alpha_1 \quad \alpha_2 \text{ tal que } a = \widetilde{a_{\alpha_1} \backslash e} \cap B$$

$$a = \widetilde{a_{\alpha_2}} \backslash e \cap B$$

Portanto, $\widetilde{a_{\alpha_1} \backslash e} \cap \widetilde{a_{\alpha_2} \backslash e} \supseteq a \neq \emptyset$ Absurdo!

Tome $\alpha_1 > \alpha_0$ tal que $\widetilde{a_{\alpha_1} \backslash e} \cap \beta_1 \neq \phi$.

Se $\beta \in v$

Suponha $\epsilon \in \theta'_{\beta_1}((\widetilde{a_{\alpha_1} \backslash e}) \cap \beta_1) \cap \theta'_{\beta_2}((\widetilde{a_{\alpha_1} \backslash e}) \cap \beta_2)$. Existem $\epsilon_1 \in \beta_1 \cap \widetilde{a_{\alpha_1} \backslash e}$ $\quad \epsilon_2 \in \beta_2 \cap \widetilde{a_{\alpha_2} \backslash e}$ tal que $\theta'_{\beta_1}(\epsilon_1) = \theta'_{\beta_2}(\epsilon_2)$

$$\Rightarrow \epsilon \in A$$

Portanto, $\epsilon_1 \in B$ e $\epsilon_2 \in B$.

Portanto, $\epsilon_1 \in \widetilde{a_{\alpha_1} \backslash e} \cap B$.

ABSURDO! Pois $\alpha_1 > \alpha_0$.

Obviamente se $\epsilon \in \mathrm{dom}(p), \epsilon \in A$.

Portanto, $\epsilon_1 \in v$, absurdo! ∎

Para cada $\beta \in v$ definamos q_β com $\mathrm{dom}(q_\beta) = \{\epsilon, \epsilon + 1; \epsilon \in a^\beta\}$ da seguinte maneira.

$$\epsilon \in a^\beta, \epsilon \in \theta'_\beta(\gamma) \quad \gamma \in \widetilde{a_{\alpha_1} \backslash e}$$

Se $<\gamma, 0>, <\gamma, 1> \in a_{\alpha_1} \backslash e$

$$q_\beta(\epsilon) = q_\beta(\epsilon + 1) = 1$$

Se $<\gamma, 0> \in a_\alpha \backslash e$ mas $<\gamma, 1> \notin a_{\alpha_1} \backslash e$

$$q_\beta(\epsilon) = 0 \quad q_\beta(\epsilon + 1) = 1$$

Se $< \gamma, 0 > \notin a_{\alpha_1} \backslash e$ mas $< \gamma, 0 > \in a_{\alpha_1} \backslash e$

$$q_\beta(\epsilon) = 1 \quad q_\beta(\epsilon + 1) = 0$$

$$q = p \cup \bigcup_{\beta \in v} \{q_\beta\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{dom}(q_{\beta_i}) \cap \mathrm{dom}(q_{\beta_i} = \emptyset \\ \text{e } \mathrm{dom}(q_{\beta_i}) \cap \mathrm{dom}(p) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow q \text{ é condição}$$

Portanto, $q \Vdash \check{a_{\alpha_1} \backslash e} \in \Phi_{\check{\beta}} \quad \forall \beta \in v$.

Portanto, $q \Vdash \check{a_{\alpha_1} \backslash e} \in F_{\check{V}}$

Finalmente, $q \Vdash \check{a_{\alpha_1}} \cup \check{u} \in \check{u} + F_{\check{v}}$ ∎

$D = \{q \in \mathbb{P} |$ satisfaz (I) é denso$\}$ $\quad G \cap D \neq \emptyset$.

Tendo o Lema:

$u \backslash e \in F_{b_{\alpha_1}}$, pois $\min(\widetilde{u \backslash e}) > \max b_{\alpha_1}$

Portanto, $u \cup a_{\alpha_1} \in a_\alpha + F_{b_{\alpha_1}} (= a_\alpha + u \backslash e)$ e $M[G] \models a_{\alpha_1} \cup u \in u + F_v$.

Absurdo!

Finalmente, notamos que se $v_1 \neq v$, a demonstração não é modificada.

Tome $\beta_1 = \min\{\beta \in v | \exists A \subset \{\widetilde{a_\alpha \backslash e} : \alpha < \kappa\} \widetilde{a_\alpha \backslash e} \cap \beta \neq \emptyset$ se $\widetilde{a_\alpha \backslash e} \in A$ e $|A| = \kappa\}$.

Se $\beta > \beta_1$, satisfaz (**).

Se $\beta < \beta_1$, $A_\beta = \{\widetilde{a_\alpha \backslash e} \in A : \beta \cap \widetilde{a_\alpha \backslash e} \neq \phi\}$

$$|A_\beta| < \kappa$$

Tomo $A' = A \backslash \cup_{\substack{\beta \in v \\ \beta < \beta_1}} A_\beta$.

Trabalho com A' ao invés de A:

Portanto, tomando o α_1 da demonstração

$$q \Vdash \widetilde{a_{\alpha_1} \backslash e} \in \Phi_{\check{\beta}} \quad \forall \beta \in v_1$$

e $1 \Vdash \widetilde{a_{\alpha_1} \backslash e} \in \Phi_{\check{\gamma}} \quad \forall \gamma \in v \backslash v_1$, pois se H é $\mathbb{P}$-genérico qualquer.

Como $a_{\alpha_1}\backslash e \cap \gamma = \emptyset$

$$a_{\alpha_1}\backslash e \in \Phi_\gamma,$$

independente do H.

Portanto, $1 \Vdash \widetilde{a_{\alpha_1}\backslash}e \in \Phi_{\check{\gamma}}$ ■

Logo, como $q \leq 1, q \Vdash \widetilde{a_{\alpha_1}\backslash}e \in \Phi_{\check{\beta}} \quad \forall \beta \in v.$ ■

EXPLICAÇÃO DE (E).

Se $\widetilde{a_\alpha\backslash}e \cap \beta = \emptyset$ para todo $\beta \in v$. Como $\beta \notin \widetilde{a_\alpha\backslash}e$, teremos que $\forall \beta \in v a_\alpha\backslash e \in \Phi_\beta$. Logo $a_\alpha\backslash e \in F_v$ e como $\min(\widetilde{u\backslash}e) > \max\{b_\alpha\}$,

$$u\backslash e \in F_{b_\alpha} \quad \forall \alpha < k$$

Mas nesse caso teríamos

$$a_\alpha + u\backslash e \in a_\alpha + F_{b_\alpha}$$

$$\text{e } u + a_\alpha\backslash e \in u + F_v, \text{ já que são iguais}$$

Absurdo!

Logo, $\forall \alpha \in \kappa\ \exists \beta \in v\ \widetilde{a_\alpha\backslash}e \cap \beta \neq \emptyset$.

Posso tomar então $\{a_\alpha : \alpha < k\}$ tal que $\widetilde{a_\alpha\backslash}e \cap \beta \neq \emptyset \quad \forall \beta \in v_1 \quad \forall \widetilde{a_\alpha\backslash}e$.

3. O PRODUTO DE GRUPOS TOPOLÓGICOS ENUMERAVELMENTE COMPACTOS

No capítulo II foi construído um espaço topológico enumeravelemente compacto cujo quadrado não é pseudocompacto. Pelo resultado obtido no capítulo III, X não é um grupo topológico.

No capítulo IV constatamos que o produto qualquer de grupos topológicos enumeravelmente compactos ser enumeravelmente compacto é equivalente a existir um $p \in \omega^*$ tal que todo grupo topológico enumeravelmente compacto é p-compacto. Dessa forma, nota-se que o conceito de p-compacidade não é tão geral assim.

É natural perguntar se o produto de dois grupos topológicos enumeravelmente compactos seria enumeravelmente compacto.

Neste parágrafo, construiremos, com o auxílio de MA, dois grupos topológicos G e H enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto. A técnica usada será semelhante à do exemplo do capítulo II.

Definição 3.1 Um grupo $(G, +, 0)$ é dito *booleano* se todo elemento de G tiver ordem 2, isto é, $a + a = 0, \forall a \in G$.

Lema 3.1 Sejam G e H grupos booleanos e sejam A e B subgrupos de G. Sejam $p : A \to H, q : B \to H$ homomorfismos. Se $p \nearrow_{A \cap B} = q \nearrow_{A \cap B}$ então existe um homomorfismo $r : A + B \to H$ que estende a ambos, p e q.

Demonstração: Defina $r(a + b) = p(a) + q(b)$, para $a \in A$ e $b \in B$.

Corolário 3.1 Se G e H são grupos booleanos e A é subgrupo de G e $q : A \to H$ é homomorfismo, $\forall y \in G \backslash A, \forall b \in H$, existe um homomorfismo $p : \{0, y\} + A \to H$ que estende q e $p(y) = b$.

Teorema 3.1 (M.A.) Existe um grupo topológico enumeravelmente compacto, infinito que não possui seqüências convergentes não triviais.

Demonstração: Nosso exemplo E será um subgrupo de 2^c. Construiremos subgrupos E_α de 2^κ $\omega \leq \alpha \leq c$, com $E_\alpha = \{x_{\alpha,\epsilon} : \epsilon < \sigma_\alpha\}$, onde $\sigma_\omega = \omega$, $\sigma_{\alpha+1} = \sigma_\alpha + |\sigma_\alpha|$ e $\sigma_\lambda = \sup_{\omega\leq\alpha<\lambda} \sigma_\alpha$, para $\omega < \lambda \leq c$, λ limite. É óbvio que $\sigma_c = c$.

As seguintes condições serão satisfeitas:

1 - $\epsilon < \eta < \sigma_\alpha \rightarrow x_{\alpha,\epsilon} \neq x_{\alpha,\eta}$ $(\omega \leq \alpha < \sigma_\alpha)$

2 - $\epsilon < \sigma_\alpha \rightarrow x_{\alpha,\epsilon} \subseteq x_{\beta,\epsilon}$ $(\omega \leq \alpha < \beta \leq c)$

3 - $\epsilon, \eta, \mu < \sigma_\alpha$ com $x_{\alpha,\epsilon} + x_{\alpha,\eta} = x_{\alpha,\mu}$ então $x_{\beta,\mu} + x_{\beta,\eta} = x_{\beta,\mu}$ se $\alpha < \beta < c$.

Como $\sigma_c = c$, enumeraremos $[c]^\omega$ como $\{I_\epsilon \quad \omega \leq \epsilon < c\}$ tal que $I_\epsilon \subseteq \sigma_\epsilon (\omega \leq \epsilon < c)$.

Encontraremos $\lambda_\epsilon < \sigma_{\epsilon+1}$ tal que

4 - Se $\omega \leq \epsilon < \alpha$ então $x_{\alpha,\lambda_\epsilon}$ é ponto de acumulação de $\{x_{\alpha,\eta} : \eta \in I_\epsilon\}$

$$\omega < \alpha \leq c$$

5 - $|\{\eta \in I_\epsilon \quad x_{\epsilon+1}, \eta(\epsilon) = i\}| = \omega \quad i = 0, i = 1 \quad \omega \leq \epsilon < c.$

Por 4, com $\alpha = c$, E é enumeravelmente compacto. Por 5 e 2, com $\beta = c$, E não admite seqüências convergentes não triviais.

A CONSTRUÇÃO: Por indução em $\omega \leq \alpha \leq c$.

Tome E_ω um subgrupo infinito enumerável de 2^ω e enumere-o de forma a satisfazer 1.

Assuma E_α conhecido e satisfazendo às condições para $\omega \leq \alpha < \delta \quad \omega < \delta \leq c$.

CASO 1: δ é ordinal limite.

$$\epsilon < \sigma_\delta \rightarrow \exists \omega \leq \alpha < \delta \text{ tal que } \epsilon \in \sigma_\alpha$$

A condição 2 nos obriga a definir

$$x_{\delta,\epsilon} = \bigcup \{x_{\alpha,\epsilon} | \omega \leq \alpha < \delta \wedge \epsilon < \delta_\alpha\}$$

Verificação das condições:

1 - $\epsilon < \eta < \sigma_\delta$

$$\eta \in \sigma_\alpha \quad \omega \leq \alpha < \delta$$

Pela hipótese de indução $x_{\alpha,\epsilon} \neq x_{\alpha,\eta}$.

Portanto, $\exists t \in \alpha, x_{\alpha,\epsilon}(t) \neq x_{\alpha,\eta}(t)$

$$\Downarrow$$

$$x_{\delta,\epsilon}(t) = x_{\alpha,\epsilon}(t) \neq x_{\alpha,\eta}(t) = x_{\delta,\eta}(t)$$

2 - Trivial

3 - $\alpha < \delta$

$$\epsilon, \eta, \mu \in \sigma_\alpha$$

$$x_{\alpha,\epsilon} + x_{\alpha,\eta} = x_{\alpha,\mu}$$

Por hipótese de indução, 3 é válido para $\alpha \leq \beta < \delta$.

Seja $t \in \delta$. Como δ é limite, $\exists \alpha \leq \gamma \in \delta$ tal que $t \in \gamma$.

Portanto, $x_{\gamma,\epsilon}(t) + x_{\gamma\eta}(t) = x_{\gamma,\mu}(t)$ e temos o resultado. ■

5 - Não há o que demonstrar.

4 - Seja $\omega \leq \epsilon < \delta$ e $L \in [\delta]^\omega$ arbitrário. Devemos achar $\eta \in I_\epsilon$ tal que $x_{\delta,\epsilon} \neq x_{\delta,\lambda_\epsilon}$ e $x_{\delta,\lambda_\epsilon} \nearrow_L \subseteq x_{\delta,\eta}$.

Demonstração: $\exists \gamma, \omega \leq \gamma < \delta$ tal que $L \subseteq \gamma$ e $\epsilon < \sigma_\gamma$.

Por 4, para $\alpha = \gamma$

$\exists \eta \in I_\epsilon$ com $x_{\gamma,\eta} \neq x_{\delta,\lambda_\epsilon}$ e

$$x_{\gamma,\lambda_\epsilon} \nearrow_L \subseteq x_{\gamma,\eta}$$

esse é o η procurado pelo caso $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$ de 2.

CASO 2: δ é sucessor.

$\delta = \gamma + 1$

Como 2^γ é compacto, o caso $\alpha = \gamma$ de 1 implica que $\{x_{\gamma,\eta} \quad \eta \in I_\gamma\}$ tem ponto de acumulação d.

Pegue $c' \in 2^\gamma \backslash E_\gamma, c' = d$ se $d \notin E_\gamma$.

Tomo $H = \{0, c'\} + E_\gamma$.

Como $c' \notin E_\gamma, E_\gamma \cap (c' + E_\gamma) = \emptyset$.

Podemos indexar $H \backslash E_\gamma$ injetivamente com $\{x_{\gamma,\epsilon} \quad \sigma_\alpha \leq \epsilon < \sigma_{\alpha+1}\}$ e λ_γ tal que $x_{\gamma,\lambda_\gamma} = c'$.

Então

6 - Se $\omega \leq \epsilon \leq \gamma$ então $x_{\gamma,\lambda_\epsilon}$ é ponto de acumulação de $\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\epsilon\}$.

A hipótese de indução nos dá 6 para $\omega \leq \epsilon < \gamma$ e $x_{\gamma,\lambda_\gamma}$ já está escolhido.

Queremos encontrar uma função $h : H \rightarrow 2$ tal que $E_{\gamma+1} = \{x^\wedge h(x) : x \in H\}$, satisfazendo:

A - h é homomorfismo.

B - $\omega \leq \epsilon \leq \gamma$ então $x_{\gamma,\lambda_\epsilon}$ é ponto de acumulação de $\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\epsilon$ e $h(x_{\gamma,\lambda_\epsilon}) = h(x_{\gamma,\lambda_\epsilon})\}$.

C - $|\{\eta \in I_\gamma \quad h(x_{\gamma,\eta}) = i\}| = \omega$ para $i = 0$ ou $i = 1$.

Trocaremos B por uma condição simples.

Para $\omega \leq \epsilon \leq \gamma$.

Defino $\mathcal{K}_\epsilon = \{\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\epsilon \wedge x_{\gamma,\eta} \neq x_{\gamma,\lambda_\epsilon} \wedge x_{\gamma,\lambda_\epsilon} \nearrow_L \subseteq x_{\gamma,\eta}\} : L \in [\gamma]^\omega\}$

$$\mathcal{K} = \cup\{\{x_{\gamma,\lambda_\epsilon} + K : K \in \mathcal{K}_\epsilon\} : \omega \leq \epsilon \leq \gamma\}$$

Provaremos, agora, que B é equivalente a $B' : \forall K \in \mathcal{K} \exists x \in K$ tal que $h(x) = 0$.

Se $\omega \leq \epsilon \leq \gamma$, então $x_{\gamma,\lambda_\epsilon}$ é ponto de acumulação de

$$\{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\epsilon\}$$

$B \leftrightarrow B'$

$B \rightarrow B'$:

Seja $K \in \mathcal{K}$

$K = x_{\gamma,\lambda_\epsilon} + K', K' \in \mathcal{K}_\epsilon$, tomo o L associado.

Mas, por B, $x_{\gamma,\lambda_\epsilon}$ é ponto de acumulação de $C = \{x_{\gamma,\eta}/\eta \in I_\epsilon \text{ e } h(x_{\gamma,\eta}) = h(x_{\gamma,\lambda_\epsilon})\}$ (**).

Portanto, $\forall L \in [\gamma]^\omega, \exists x_{\gamma,\eta} \in C$ tal que $x_{\gamma,\eta} \neq x_{\gamma,\lambda_\epsilon} \wedge x_{\gamma,\lambda_\epsilon} \nearrow_L\subseteq x_{\gamma,\eta}$.

Portanto, $x_{\gamma,\eta} \in K' \in \mathcal{K}_\epsilon$.

Portanto, $x_{\gamma,\lambda_\epsilon} + x_{\gamma,\eta} \in K$ e $h(x_{\gamma,\lambda_\epsilon}) + h(x_{\gamma,\eta}) = h(x_{\gamma,\lambda_\epsilon} + x_{\gamma,\eta}) = 0$, por (**).

Tomando $x = x_{\gamma,\lambda_\epsilon} + x_{\gamma,\eta}$ temos o resultado.

$B' \rightarrow B$:

Seja $L \in [\gamma]^\omega$.

Tome $A_L = \{x_{\gamma,\eta} : \eta \in I_\epsilon, x_{\gamma,\eta} \neq x_{\gamma,\lambda_\epsilon} \wedge x_{\gamma,\lambda_\epsilon} \nearrow_L\subseteq x_{\gamma,\eta}\} \in \mathcal{K}_\epsilon$.

Tome $x_{\gamma,\lambda_\epsilon} + A_L \in \mathcal{K}$.

Por B', $\exists x \in x_{\gamma,\lambda_\epsilon} + A_L$ tal que $h(x) = 0$, isto é, $\exists x_{\gamma,\eta}$ tal que $h(x_{\gamma,\eta}) = h(x_{\gamma,\lambda_\epsilon})$ e $x_{\gamma,\lambda_\epsilon} \nearrow_L\subseteq x_{\gamma,\eta}$.

Portanto, $x_{\gamma,\lambda_\epsilon}$ é ponto de acumulação de C.

Construiremos h.

LEMA (M.A.) Seja H um grupo booleano, $I \in [H]^\omega$ $\mathcal{K} \subseteq [H]^\omega$ tal que $|H| < c$ e $|\mathcal{K}| < c$, então $\exists h : H \rightarrow 2$ homomorfismo tal que

(a) $|I \cap h^{-1}(\{i\})| = \omega \quad i = 0, 1$

(b) $K \cap h^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset \quad \forall K \in \mathcal{K}$

Demonstração: Seja $\mathcal{I}$ uma coleção infinita de subconjuntos dois a dois disjuntos de I. Seja $\mathcal{L} = \mathcal{I} \cap \mathcal{K}$.

Precisamos encontrar um homomorfismo $h : H \rightarrow 2$ tal que

(c) $L \cap h^{-1}(\{i\}) \neq \phi, \forall L \in \mathcal{L} \quad i = 0, 1$

Considere a seguinte ordem parcial:

$$\mathbb{P} = \{p | \exists \text{ um subconjunto finito } A \text{ de } H \text{ tal que } p : A \to 2 \text{ é homomorfismo}\}$$

$$p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p$$

Está claro que se $F \subseteq \mathbb{P}$ é filtro, então $S = \bigcup_{p \in F} \operatorname{dom}(p)$ é subgrupo de H e $\cup F : S \to 2$ é homomorfismo: $a \in \operatorname{dom}(p), b \in \operatorname{dom}(p')$.

$\exists q \in F, q \leq {p \atop p'}$. Portanto, $a, b \in \operatorname{dom}(q)$. Portanto, $a + b \in \operatorname{dom}(q)$. Portanto, $a + b \in S$.

A h procurada será $\cup F$, para F conveniente.

Temos:

1 - $D_x = \{p \in \mathbb{P} | x \in \operatorname{dom}(p)\}$ é denso.

2 - $\mathcal{D} = \{D_x : x \in H\}$.

3 - $\mathcal{E} = \{E_{L_i} : L \in \mathcal{L}, i = 0, 1\}$

$$E_{L_i} = \{p \in \mathbb{P} | \exists y \in L \cap \operatorname{dom}(p) | p(y) = i\} \text{ é denso}$$

$$\text{e } |\mathcal{D} \cup \mathcal{E}| < c$$

$\mathbb{P}$ tem c.c.c.

Seja $Q \subseteq \mathbb{P}$ não enumerável.

Usando o Δ-system Lema em $\{\operatorname{dom}(p) : p \in Q\}$ $\quad \exists \Delta$ finito, $\exists Q' \subseteq Q$, $|Q'| = \omega_1$ tal que $\operatorname{dom}(p) \cap \operatorname{dom}(q) = \Delta, \forall p, q \in Q'$.

Como existe é um número finito de funções de Δ em 2,

$$\exists p, q \in Q' \text{ tal que } p \neq q \wedge p \upharpoonright_\Delta = q \upharpoonright_\Delta$$

Pelo Lema 3.1, $\exists h : \operatorname{dom}(p) + \operatorname{dom}(q) \to 2$ tal que h estende ambos.

MA $\to \exists F$ filtro tal que $F \cap M \neq \emptyset, \forall M \in \bigcup \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$.

Se tomarmos $h = \cup F$, teremos a função.

Se usarmos o lema para a $\mathcal{K}$ construída, obtemos h satisfazendo (a) e (b) do lema e portanto A, B, C.

Resta-nos verificar que $E_{\gamma+1} = \{x^\wedge h(x) : x \in H\}$ satisfaz 1-5.

Basta tomar $x_{\delta,\epsilon} = x_{\gamma,\epsilon} \wedge h(x_{\gamma,\epsilon})$.

Temos: 1, 2 triviais.

3 - Trivial usando que h é homomorfismo.

4 - Por construção e B.

5 - Por C. ∎

Se $E = \cup_{\alpha<c} E_\alpha$

E é enumeravelmente compacto por 4. Trivialmente, E não admite seqüências convergentes não triviais:

Suponha $x_n \rightarrow x$ em E.

$$x_n = \bigcup_{\beta<c} x_{\beta,\eta_n}$$

$$x_n \nearrow_\epsilon \rightarrow x \nearrow_\epsilon \quad \forall \epsilon < c$$

$$x_n \nearrow_\epsilon = x_{\epsilon,\eta_n}$$

$$I = \{\eta_n : n \in \mathrm{N}\}$$

Seja ϵ tal que $I \subseteq \sigma_\epsilon$, temos $x_{\epsilon+1,\eta_n} \rightarrow x \nearrow_{\epsilon+1}$.

$\forall \mathcal{E} < \epsilon$

$$\omega = |\{\eta \in I \quad x_{\epsilon+1,\eta}(\mathcal{E}) = i\}|$$

$$x(\mathcal{E}) = 0 \text{ ou } 1$$

Tome V aberto básico em $x \nearrow_{\epsilon+1}$

$$V = \prod_{\alpha<\epsilon+1} V_\alpha, L = \{\alpha : V_\alpha \neq \{0,1\}\} \subseteq [\epsilon+1]^\omega, \text{ tome } \varphi \in L$$

donde $|\{\eta_n \in I : x_{\epsilon+1,\eta_n}(\varphi) \neq x \nearrow_{\epsilon+1} (\varphi)\}| = \omega$.

Portanto, não é verdade que $n > n_0 \rightarrow x_{\epsilon+1,\eta} \in V$. ∎

Lema 3.2 Seja X um espaço enumeravelmente compacto Hausdorf, regular. Se $I \subset X$ infinito é tal que nenhum subconjunto seu, infinito, tem precisamente um ponto de acumulação. Então I tem, ao menos, c pontos de acumulação.

Demonstração: Tome x_0 e x_1 pontos de acumulação distintos de I e V_{x_0} e V_{x_1} vizinhanças disjuntas desses pontos, fechadas.

$A_0 = V_{x_0} \cap I \quad A_1 = V_{x_1} \cap I$ são fechados disjuntos e infinitos (pois x_0 e x_1 são pontos de acumulação e X é regular) (*).

Fazendo o mesmo com A_0 e A_1, obtemos

$$A_{00}, A_{01} \subset A_0$$

e $\quad A_{10}, A_{11} \subset A_1$ fechados disjuntos

Em geral, se $A_{s\nearrow_n}$ já está bem definido para $s \in^{\omega} \{0,1\}$, $A_{s\nearrow_n} \cup \{(n+1,0)\}$ e $A_{s\nearrow_n} \cup \{(n+1,1)\}$ é definido como em (*).

Como X é enumeravelmente compacto para $s \in \{0,1\}^{\omega}, A_s = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_{s\nearrow_n} \neq \phi$

$a_s \in A_s$ e a_s é ponto de acumulação de I.

Portanto, como $s \neq s' \rightarrow a_s \neq a_{s'}$ temos o resultado.

Teorema 3.2 (MA) Existem grupos enumeravelmente compactos cujo produto não é enumeravelmente compacto.

Demonstração: Tome E do teorema 3.1, grupo topológico booleano sem seqüências não triviais convergentes.

Serão construídos subgrupos enumeravelmente compactos E_0, E_1 de E tal que $|E_0 \cap E_1| = \omega$.

Então $E_0 \times E_1$ tem subgrupo infinito fechado enumerável.

$$\Delta = \{< x, y > \in E_0 \times E_1 : x = y\}$$

$$= \{< x, x >: x \in E_0 \cap E_1\} \text{ pois } E \text{ é Hausdorff}$$

e Δ é enumerável.

Se $E_0 \times E_1$ fosse enumeravelmente compacto, pelo Lema 3.2, $|\Delta| \geq c$, absurdo!

Construiremos, agora E_0 e E_1.

Defina $\sigma_0 = \omega$ e $\sigma_{\alpha+1} = \sigma_\alpha + |\sigma_\alpha|$, $\alpha < c$.

$\sigma_\lambda = \sup_{\beta<\lambda} \sigma_\beta$ se λ é limite $\lambda \leq c$

$\sigma_c = c$

$$[c]^\omega =< I_\alpha : \alpha \leq c > \text{ tal que } I_\alpha \subseteq \sigma_\alpha$$

Construiremos duas seqüências infinitas estritamente crescentes $< E_{i,\alpha} : \alpha < c >$ de subgrupos de E.

E_0 será $E_{0,c}$ e E_1 será $E_{1,c}$.

Cada $E_{i,\alpha}$ será indexado. $E_{i,\alpha} = \{y_{i,\epsilon} : \epsilon < \sigma_\alpha\}$ e para cada α:

1 - $y_{i,\epsilon} \neq y_{i,\eta}$ $\quad i = 0,1 \quad \epsilon, \eta < \sigma_\alpha$

2 - $E_{0,\alpha} \cap E_{1,\alpha} = E_{0,0} \quad \forall \alpha \leq c$

Portanto, $(E_0 \cap E_1) = E_{00}$.

3 - $\{y_{i,\epsilon} : \epsilon \in I_\alpha\}$ tem ponto de acumulação em $E_{i,\alpha+1}$.

Construiremos, novamente, por indução:

E_{00} subgrupo, $|E_{00}| = \omega$, enumeravelmente compacto. Se $\alpha < c$ é limite, $E_{0,\alpha} = \cup_{\beta<\alpha} E_{0,\beta}$ e $E_{1\alpha} = \cup_{\beta<\alpha} E_{1\beta}$

Seja $\alpha < c$, $E_{i,\alpha}$ $i = 0,1$ já conhecidos. Escolha c_i ponto de acumulação de $\{y_{i,\epsilon} : \epsilon \in I_\alpha\}$ tal que $c_0 \notin E_{0,\alpha} + E_{1,\alpha}$ e $c_1 \notin \{0, c_0\} + E_{0,\alpha} + E_{1,\alpha}$.

Isso é possível, pois, pelo Lema 3.2 $\{y_{i,\epsilon} : \epsilon \in I_\alpha\}$ tem c pontos de acumulação e $|E_{0,\alpha} + E_{1,\alpha}| = \sigma_\alpha < c$ e

$$|E_{0,\alpha} + E_{1,\alpha} + \{0, c_0\}| = \sigma_\alpha < c$$

Defina $E_{i,\alpha+1} = \{0, c_i\} + E_{i,\alpha}$

Como $|E_{i,\alpha}| = \alpha$ e $c_i \notin E_{i,\alpha}$

$$|E_{i,\alpha+1} \backslash E_{i,\alpha}| = |\sigma_\alpha|$$

Logo, podemos indexar

$$E_{i,\alpha+1} \backslash E_{i,\alpha} \text{ como } \{y_{i\alpha} : \sigma_\alpha \leq \alpha < \sigma_i + |\sigma_\alpha|\}$$

Observe que

$$(c_0 + E_{0,\alpha}) \cap E_{1,\alpha} = \emptyset (**)$$

pois $c_0 \notin E_{0,\alpha} + E_{1,\alpha}$ e $E_{0,\alpha+1} \cap (\{0, c_1\} + E_{1\alpha}) = \emptyset$, pois $c_1 \notin \{0, c_0\} + E_{1,\alpha} + E_{0,\alpha}$ (*)

$$E_{00} = E_{0\alpha} \cap E_{1\alpha} = E_{0,\alpha+1} \cap E_{1,\alpha+1}$$

■

Comentários finais

O Teorema 1.1 é o Teorema 2 de [Ma]. Demonstrei os outros resultados, inclusive os sub-lemas na demonstração principal de modo a detalhar. Com isso, pude obter os outros resultados, inclusive a conclusão.

O parágrafo 2 é uma pequena generalização do Teorema 4 de [Ma]. Os outros lemas e teoremas, demonstrei de modo a tornar isto possível: o Lema 2.3, crucial no processo, é adaptação do enunciado em [Ma]. Obtive a demonstração utilizando algumas indicações análogas em [Ro].

Os teoremas 3.1 e 3.2 se encontram em [vD]. Os outros resultados do parágrafo 3, fiz de modo a poder detalhar as mesmas.

CAPÍTULO VI

ESPAÇOS E-COMPACTOS E UMA APLICAÇÃO AOS GRUPOS PARATOPOLÓGICOS

1. ESPAÇOS E-COMPACTOS

Neste capítulo enunciaremos um conceito que generaliza compacidade. É conhecido o teorema que afirma que todo espaço topológico Tychonoff é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^m$ para algum cardinal m. Através disso, é feita a construção usual do compactificado de Stone-Čech de um espaço Tychonoff.

A partir desse contexto, a definição a seguir parecerá natural.

Definição 1.1 Sejam E, X espaços topológicos. X é dito *E-regular* se é homeomorfo e um subespaço de um produto de cópias de E. X é dito *E-compacto* se é homeomorfo a um subespaço fechado de um produto de cópias de E.

Teorema 1.1 Dado X espaço topológico E-regular, existe $\beta_E(X)$, E-compacto tal que X é denso em $\beta_E(X)$ e, para todo espaço E-compacto Y e para toda $f : X \to Y$ contínua, existe $\tilde{f} : \beta_E(X) \to Y$ que estende f. Reciprocamente, se uma E-compactificação de X satisfaz à propriedade acima, então é equivalente a $\beta_E(X)$, isto é, existe um homeomorfismo entre eles que deixa X fixo.

Notando que um espaço é Tychonoff, se e somente se é $[0,1]$-regular e que é compacto se e somente se é $[0,1]$-compacto, podemos constatar que o Teorema 1.1. e os Teoremas I-7.1 e I-7.2 são totalmente análogos.

Notação: $D = \{0,1\}$ e N é o conjunto dos números naturais.

Definição 1.2 X é *0-dimensional* se possui base de abertos fechados.

Proposição 1.1: Um espaço topológico X é D-regular ou N-regular se e somente se X é 0-dimensional.

Teorema 1.2 Seja X espaço topológico 0-dimensional. Então $\beta_D(X)$ é o espaço dos ultrafiltros de subconjuntos abertos-fechados de X,$\mathcal{U}$, onde se U é aberto-fechado em X e se $N(U) = \{p \in U : U \in p\}$, $\mathcal{B} = \{N(U) : U \subset X$ aberto-fechado$\}$ é base de abertos para esse espaço.

Corolário 1.1: $\beta_D(\omega) = \beta(\omega)$.

Definição 1.3 Seja X 0-dimensional. Dizemos que X é N-*pseudocompacto* se toda $f : X \rightarrow \mathrm{N}$ contínua, tem imagem finita.

Definição 1.4 $f : X \rightarrow Y$ é dita *c.o.-fechada* se a imagem de todo aberto-fechado é fechada.

Definição 1.5 $X \subseteq Y$ está E-*imerso* em Y se toda $f : X \rightarrow E$ contínua pode ser estendida a $\tilde{f} : Y \rightarrow E$.

Lema 1.1: Se $S \subset T$ denso é D-imerso em $T \Leftrightarrow$ abertos-fechados disjuntos em S têm fechos disjuntos em T.

Demonstração:

$\Rightarrow$ Trivial.

$\Leftarrow f : S \rightarrow \{0,1\}$ contínua.

$A = f^{-1}(\{0\})$ e $B = f^{-1}(\{1\})$ são abertos-fechados em S. Por hipótese, $cl_T(A) \cap cl_T(B) = \emptyset$ e logo $T = cl_T(A) \cup cl_T(B)$.

Teorema 1.3 Sejam X e Y 0-dimensionais e

1 - $\pi_X : X \times Y \to X$ é c.o.-fechada;

2 - Se Z é aberto-fechado em $X \times Y$, então $cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z) = \cup\{cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z \cap (\{x\} \times Y)) : x \in X\}$;

3 - $X \times Y$ está D-imerso em $X \times \beta_D(Y)$.

Então $1 \Rightarrow 2$ e $2 \Rightarrow 3$.

Demonstração: Denote $Z_x = Z \cap (\{x\} \times Y)$.

Se (2) falha, $\exists (x_0, p) \in X \times \beta_D(Y)$ tal que

$$(x_0, p) \in cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z) \setminus \cup \{cl_{X\times\beta_D Y}(Z_x) : x \in X\}$$

Em particular, $(x_0, p) \notin cl_{X\times\beta_D Y}(Z_{x_0})$.

Seja V vizinhança aberto-fechada de (x_0, p) tal que $V \cap cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_{x_0}) = \emptyset$ e $f : X \times \beta_D(Y) \to D = \{0, 1\}$

$$f \nearrow_V = 0 \quad f \nearrow_{X\times\beta_D Y\setminus V} = 1$$

f é contínua (pois V é aberto-fechado).

Tome $Z_1' = Z \cap V \subset X \times Y$.

Z_1' é aberto-fechado em $X \times Y$.

$$(x_0, p) \in cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_1')$$

mas, $x_0 \notin \pi''(Z_1')$, pois caso contrário, $x_0 \in \pi_x''(Z \cap V)$ e, portanto, $\exists q \in Y$ tal que $(x_0, q) \in Z \cap V$.

Mas, trivialmente,

$$(x_0, q) \in (\{x_0\} \times \beta_D(Y)) \cap Z = Z_{x_0}$$

Portanto, $(x_0, q) \in V \cap cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_{x_0})$.

Absurdo, pois $V \cap cl_{x\times\beta_D(Y)}(Z_{x_0}) = \emptyset$ ■

Mas, por (1), $x_0 \in \pi''_X(cl_{X\times\beta_y}(Z'_1)) \subseteq cl_X(\pi_X(Z'_1)) = \pi''_X(Z'_1)$. Absurdo! ■

$2 \Rightarrow 3$ Seja $X \times Y$ o S do Lema 1.1 e $T = X \times \beta_D(Y)$.

Se Z_1 e Z_2 são abertos-fechados disjuntos em S.

$$cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_1) \cap cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_2) =$$

$$[\cup\{cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_1)_x : x \in X\}] \cap [\cup\{cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_2)_x : x \in X\}]$$

Mas, $x_1 \neq x_2 \rightarrow cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_1)_{x_1} \cap cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_2)_{x_2} = \emptyset$.

Omitiremos o índice do fecho, por comodidade.

Portanto, $= \cup\{cl(Z_1)_x \cap cl(Z_2)_x\}$

$$cl(Z_1)_x = cl(Z_1 \cap (\{x\} \times \beta_D(Y))$$

$$cl(Z_2)_x = cl(Z_2 \cap (\{x\} \times \beta_D(Y))$$

Mas, $(a, b) \in cl(Z_1)_x \rightarrow a = x$, pois, $cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_1)_x \subseteq \{x\} \times \beta_D(Y)$ (fechado) $\approx \beta_D(\{x\} \times Y)$ e $\{x\} \times Y$ está D-imerso em $\beta_D(Y)$.

Portanto, $cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_1)_x \cap cl_{X\times\beta_D(Y)}(Z_2)_x = \emptyset$. ■

Teorema 1.4 Seja X 0-dimensional.

X é N-pseudocompacto se e somente se toda família localmente finita de abertos-fechados de X é finita.

Demonstração:

$\Leftarrow$ Tomo $f : X \rightarrow \mathrm{N}$ ilimitada.

$$O_n = f^{-1}(\{n\})$$

$\{O_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ é família de abertos-fechados, localmente finita, não finita.

$\Rightarrow$ Tome $\{O_n\}$ localmente finita, de abertos-fechados, não finita.

Escolha $x_1 \in O_i$ distintos e coloque $f_i \nearrow_{O_i} = i \quad f_i \nearrow_{X\setminus O_i} = 0$.

Tome $f(x) = \max\{f_i(x) : i \in \mathrm{N}\}$.

f é contínua: $\forall x \in X \exists V_x$ tal que $\exists i_0 = \max\{i : V_x \cap O_i \neq \emptyset\}$, $f_i \nearrow_{V_x} = 0$ se $i > i_0$.

Portanto, $f \nearrow_{V_x} = \max\{f_1, \ldots, f_{i_0}\}$ e a demonstração está terminada. ■

Teorema 1.5 Seja X 0-dimensional. São equivalentes:

i) X é N-pseudompacto;

ii) $\forall$ seqüência $W_1 \supset \ldots \supset W_n \supset \ldots$ de abertos-fechados, $\cap_{i=1}^{\infty} W_i$ é não vazia;

iii) $\forall$ família $\{V_i\}_{i \in \omega}$ de abertos-fechados com p.i.f. $\cap_{i=1}^{+\infty} V_i \neq \emptyset$.

Demonstração:

i $\Rightarrow$ ii O Teorema 1.4 nos dá que $\{W_i\}_{i \in \omega}$ não é localmente finita.

Portanto, $\exists x$ tal que $\forall V_x$, $V_x \cap W_i \neq \emptyset$ para um número infinito de $i \in \omega$. Se $V_x \cap W_{i_0} = \emptyset, V_x \cap W_i = \emptyset \forall i > i_0$. Absurdo!

Portanto, $x \in \overline{W_i} = W_i \quad \forall i \in \omega$.

Portanto, $x \in \cap W_i$.

ii $\Rightarrow$ iii Basta tomar $W_i = V_1 \cap \ldots \cap V_i$.

iii $\Rightarrow$ i Se $f : X \rightarrow \omega$, contínua, não tem imagem finita.

Tome $V_i = \{x \in X : f(x) > i\}$.

$\{V_i\}_{i \in \omega}$ é coleção de abertos-fechados com p.i.f. tal que $\cap_{i \in \omega} V_i = \emptyset$.

Teorema 1.6 Se $X \times Y$ é N-pseudocompacto, então X e Y o são e $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ é c.o.-fechada.

Demonstração: X e Y são trivialmente N-pseudocompactos.

Suponha que π_X não seja c.o.-fechada.

Tome Z aberto-fechado e $x_0 \in cl(\pi_X''(Z)) \setminus \pi_X''(Z)$.

Portanto, $(x_0, y) \notin Z, \forall y \in Y$.

Tome $f \nearrow_Z = 0$ e $f \nearrow_{X \times Y \setminus Z} = 1$.

Note que $\{x_0\} \times Y \subseteq x \times Y \setminus Z$.

Construiremos seqüências

$$(x_k)_{k\in\omega}, (y_k)_{k\in\omega}, (U_k)_{k\in\omega}, (V_k)_{k\in\omega}, (W_k)_{k\in\omega}$$

satisfazendo

$$(*) \quad x_k \in U_k, y_k \in V_k, x_0 \in W_k \quad \forall k \in \omega$$

$$U_k \subseteq X, V_k \subseteq Y, W_k \subseteq X \text{ aberto-fechados } \forall k \in \omega$$

e

$$U_k \times V_k \subseteq f^{-1}(\{0\})$$

$$W_k \times V_k \subseteq f^{-1}(\{1\})$$

$$W_k \times U_k \subseteq W_{k-1}$$

Por indução finita:

Escolha $(x_1, z_1) \in Z$.

Como f é 1 em $\{x_0\} \times Y$, existem vizinhanças abertas-fechadas V_1 de y_1 e U_1 de x_1 e W_1 de x_0 tal que

$$U_1 \times V_1 \subset f^{-1}(\{0\})$$

$$W_1 \times V_1 \subset f^{-1}(\{1\})$$

Suponha agora (*) satisfeito para todo $k \leq n$. Temos que $W_n \cap \pi''_X(Z) \neq \emptyset$.

Portanto, $\exists (x_{n+1}, y_{n+1}) \in Z$.

$\exists U_{n+1}, G$ abertos-fechados $U_{n+1} \subseteq X \quad G \subseteq Y$, $U_{n+1} \times G$ vizinhança de (x_{n+1}, y_{n+1}) tal que $U_{n+1} \subseteq W_n$ e $U_{n+1} \times G \subset f^{-1}(\{0\})$.

Como $f \nearrow_{\{x_0\}\times Y} = 1$, $\exists W_{n+1}$ vizinhaça de x_0 e N vizinhança de y_{n+1} abertas-fechadas tal que

$$W_{n+1} \times N \subseteq f^{-1}(\{1\}) \text{ e } W_{n+1} \subseteq W_n$$

Coloque $V_{n+1} = G \cap N$.

Temos todas as condições satisfeitas, completando a indução.

Temos, então, $\{U_n \times V_n\}_{n\in\omega}$ é seqüência não finita de abertos-fechados e $X \times Y$ é N-pseudocompacto.

Pelo Teorema 1.4, $\{U_n \times V_n\}_{n\in\omega}$ não é localmente finita.

Portanto, $\exists(x,y) \in X \times Y$ tal que $\forall V_{(x,y)} \cap U_n \times V_n \neq \emptyset$ para um número infinito de $n \in \omega$.

Portanto, $f(x,y) = 0$, já que f é contínua.

Mas, cada vizinhança de (x,y) encontra um número infinito de $\{V_{n_k} \times W_{n_k}\}$.

Portanto, cada vizinhança de (x,y) encontra um número infinito de elementos de $(W_k \times V_k)_{k\in\mathbb{N}}$, pois, seja $V = V^1 \times V^2$ vizinhança de (x,y).

$$(V^1 \times V^2) \cap (U_{n_{k-1}} \times V_{n_{k-1}}) \neq \emptyset \text{ e } (V^1 \times V^2) \cap (U_{n_k} \times V_{n_k}) \neq \emptyset$$

isto é,

$$\exists x^1 \in V^1 \cap U_{n_{k-1}}, x^2 \in V^2 \cap V_{n_{k-1}}$$

$$y^1 \in V^1 \cap U_{n_k}, y^2 \in V^2 \cap V_{n_k}$$

Mas, $U_{n_k} \subseteq W_{n_{k-1}}$. Portanto, $y^1 \in V^1 \cap W_{n_{k-1}}$.

Portanto, $(y^1, x^2) \in (V^1 \times V^2) \cap (W_{n_{k-1}} \times V_{n_{k-1}})$ ■

Logo, $f(x,y) = 1$

ABSURDO! ■

Teorema 1.7 Se $X \times Y$ é N-pseudocompacto, então $\beta_D(X \times Y) = \beta_D(X) \times \beta_D(Y)$

Demonstração: Como $X \times Y$ é N-pseudocompacto, o Teorema 1.6 nos diz que π_X é c.o.-fechada e o Teorema 1.3 ($1 \to 3$), nos diz de $X \times Y$ é D-imerso em $X \times \beta_D(Y)$. Como $X \times Y$ é denso em $X \times \beta_D(Y), X \times \beta_D(Y)$ é N-pseudocompacto.

Colocando $\beta_D(Y) \doteq X$ e $X \doteq Y$ no Teorema 1.3, $\pi_{\beta_D(X)}$ é co-fechada e pelo Teorema 1.3, $X \times \beta_D(Y)$ é D-imerso em $\beta_D(X) \times \beta_D(Y)$.

Portanto, $X \times Y$ é D-imerso em $\beta_D(X) \times \beta_D(Y)$.

Portanto, $\beta_D(X \times Y) = \beta_D(X) \times \beta_D(Y)$.

Como comentário final, é importante notar que nem sempre $\beta(Y) = \beta_D(Y)$ para Y 0-dimensional. Em [En], página 449, ex. 6.2.20, é dado exemplo de um espaço Y 0-dimensional tal que $\beta(Y)$ não é 0-dimensional. Portanto, nesse caso, não podemos ter $\beta(Y) = \beta_D(Y)$.

2. UMA APLICAÇÃO AOS GRUPOS PARATOPOLÓGICOS

Definição 2.1 Um grupo $(G, +, e)$, com uma topologia τ é dito em *grupo paratopológico* se $+ : G \times G \to G$ for τ-contínua.

Neste parágrafo, estabeleceremos uma condição para que um grupo paratopológico G seja um grupo topológico.

Teorema 2.1 [P.f] Todo grupo paratopológico regular localmente enumeravelmente compacto é grupo topológico.

Definição 2.1 Sejam X espaço topológico 0-dimensional, $p \in \omega^*$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ seqüência. $y \in X$ é dito $p - D$-limite de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ $(y = p - D - \lim x_n)$ se $\tilde{f}(p) \in X$, onde $\tilde{f} : \beta(\omega) = \beta_D(\omega) \to \beta_D(X)$ é extensão de $f : \omega \to X \quad n \mapsto x_n$.

Lema 2.1: Seja $p \in \omega^*, x \in X$ é $p - D$-limite de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \Leftrightarrow \{n : x_n \in V\} \in p$ para toda V vizinhança de x.

Demonstração:

$\Rightarrow$ Seja $f : \omega \to x \quad n \mapsto x_n$

$\tilde{f}(p) = x \in X$. $\tilde{f}$ é contínua.

Se V é vizinhança de x, $\exists V'$ aberto em $\beta_D(X)$ tal que $V' \cap X = V$.

Seja $E \subseteq \omega$ tal que $p \in N(E)$ e $\tilde{f}''(N(E)) \subseteq V'$. Se $n \in E$, $[\{n\}] \in N(E)$.

Portanto, $\tilde{f}(n) = f(n) \in V$.

Portanto, $E \subseteq \{n : x_n \in V'\} = \{n : x_n \in V\}$ e $E \in p$. Portanto, $\{n : x_n \in V\} \in p$.

$\Leftarrow$ Suponha que $\tilde{f}(p) \neq x$.

$$\exists V_1, V_2 \text{ tal que } x \in V_1, \tilde{f}(p) \in V_2 \text{ e } V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Portanto, $\tilde{f}$ é contínua $\to \exists E \subseteq \omega$ tal que $p \in N(E)$ e $\tilde{f}''(N(E)) \subseteq V_2$.

Mas, $N' = \{n : x_n \in V_1\} \in p$. Portanto, $N' \cap E \neq \emptyset$.

Tome $n_0 \in N' \cap E$, $x_{n_0} \in V_1$ e $x_{n_0} \in V_2$. Absurdo!

Corolário 2.1: X é $p - D$-compacto $\rightarrow X$ é enumeravelmente compacto.

Corolário 2.2: O $p - D$-limite para uma seqüência é único.

Lema 2.2: Sejam x e y 0-dimensionais, $f : x \rightarrow y$ contínua. Se X é $p - D\text{-}\lim X_n$, então $f(x)$ é $p - D\text{-}\lim f(x_n)$.

Demonstração: Trivial, usando o Lema 2.1.

Definição 2.2 X é dito $p - D$-compacto para $p \in \omega^*$ se toda seqüência em X admite $p - D$-limite.

Corolário 2.3: Se X é D-compacto, então é $p - D$-compacto para todo $p \in \omega^*$.

Teorema 2.1 Seja X 0-dimensional. Então existe $\beta_p^D(X), X \subseteq \beta_p^D(X) \subseteq \beta_D(X)$ tal que $-\beta_p^D(X)$ é $p-D$-compacto e se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e Y é $p-D$-compacto $\exists \tilde{f} : \beta_p^D(X) \rightarrow Y$ que estende f.

Demonstração: Construiremos, por indução transfinita, uma seqüência de conjuntos $< X_\alpha : \alpha < \omega_1 >$ satisfazendo

1 - $\alpha < \beta \rightarrow X_\alpha \subseteq X_\beta$ e toda seqüência de X_α tem $p - D$-limite em X_β.

A contrução:

$X_0 = X$

γ é limite $\rightarrow X_\gamma = \cup_{\beta<\gamma} X_\beta$

$\gamma = \beta + 1$

Para cada seqüência $\sigma \in \Sigma$ de X_β, tome o $p - D$-limite $x_\sigma \in \beta_D(X)$

$$X_\gamma = X_\beta = \cup\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$$

Obviamente $< X_\gamma : \gamma < \omega_1 >$ satisfaz 1. Tome $\beta_p^D(X) = \cup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$.

Obviamente $X \subseteq \beta_p^D(X) \subset \beta_D(X)$ e $\beta_p^D(X)$ é p-compacto.

Seja $f : X \to Y$ contínua, Y $p - D$-compacto, $\exists \tilde{f} : \beta_D(X) \to \beta_D(Y)$ que estende f.

Resta provar que se $x \in \beta_p^D(X)$, então $f(x) \in Y$.

Provaremos por indução, usando os X_α construídos.

$\alpha = 0$ trivial, pois $\tilde{f}''(X) = f''(X) \subseteq Y$.

α-limite trivial.

$\alpha = \beta + 1$

Tome $x \in X_\alpha \backslash X_\beta$. $\exists \sigma = (x_n)_{n \in \mathrm{N}}$ seqüência de X_β tal que $x = p - D - \lim \sigma$.

Pelo Lema 2.2 e hipótese de indução, $\tilde{f}(x_n) \in Y \quad \forall n \in \omega$ e $\tilde{f}(x)$ é $p - D - \lim \tilde{f}(x_n)$.

Como o $p - D$-limite é único e Y é $p - D$-compacto, $\tilde{f}(x) \in Y$. ■

Teorema 2.2 Sejam X e Y 0-dimensionais. Se $\beta_D(X \times Y) = \beta_D(X) \times \beta_D(Y)$, então $\beta_p^D(X \times Y) = \beta_p^D(X) \times \beta_p^D(Y)$.

Demonstração: Usando a construção do Teorema 2.1, provaremos, por indução, que

$$(X \times Y)_\alpha = X_\alpha \times Y_\alpha \quad \forall \alpha \leq \omega_1$$

$\alpha = 0 \to$ Trivial.

α-limite $\quad a \in (X \times Y)_\alpha \to \exists \gamma < \alpha$ tal que $a = (x, y) \in (X \times Y)_\gamma \overset{Hip.Ind.}{\longrightarrow} (x, y) \in X_\gamma \times Y_\gamma$.

Portanto, $x \in X_\gamma \wedge y \in Y_\gamma$.

Portanto, $x \in X_\alpha \wedge y \in Y_\alpha$, portanto, $a \in X_\alpha \times Y_\alpha$.

$$a \in X_\alpha \times Y_\alpha \to \exists \gamma < \alpha (a \in X_\gamma \times Y_\gamma) \overset{Hip.Ind.}{\longrightarrow} a \in (X \times Y)_\gamma$$

Portanto, $a \in (X \times Y)_\alpha$ ■

$\alpha = \beta + 1$

Seja $\{(x_n, y_n) : n \in \omega\}$ seqüência em $X_\beta \times Y_\beta$.

$x = p - D\text{-}\lim x_n \qquad y = p - D\text{-}\lim y_n \qquad (x, y) \in X_\alpha \times Y_\alpha$

Como $\beta_D(X \times Y) = \beta_D(X) \times \beta_D(Y)$, (x, y) é $p - D$-lim(x_n, y_n), pois, se U e V são vizinhanças de x e y em $\beta_D(X)$ e $\beta_D(Y)$, respectivamente, $U \times V$ é vizinhança de (x, y) em $\beta_D(X) \times \beta_D(Y) = \beta_D(X \times Y)$.

Portanto, $\{n : x_n \in U\} \cap \{n : y_n \in V\} = \{n : (x_n, y_n) \in U \times V\} \in p$.

Pelo Lema 2.1, $(x, y) \in (X \times Y)_\alpha$.

Trivialmente, se $(x, y) \in \beta_D(X) \times \beta_D(Y) = \beta_D(X \times Y)$, é $p - D$-limite de (x_n, y_n).

Portanto, $x = p - D\text{-lim}\, x_n \qquad y = p - D\text{-lim}\, y_n$.

Portanto, $(X \times Y)_\alpha = X_\alpha \times Y_\alpha$.

Teorema 2.3 Se X é grupo paratopológico, 0-dimensional e $\beta_D(X \times X) = \beta_D(X) \times \beta_D(X)$, então $\beta_p^D(X)$ é grupo paratopológico 0-dimensional.

Demonstração: Pelo Teorema 2.2

$$\beta_p^D(X \times X) = \beta_p^D(X) \times \beta_p^D(X)$$

Portanto, pelo Teorema 2.1, se $\cdot : X \times X \to X$ e a operação de grupo, ela admite uma extensão $\tilde{\cdot} : \beta_p^D(X) \times \beta_p^D(X) \to \beta_p^D(X)$.

Precisamos provar:

1 - $\tilde{\cdot}$ é associativa;

2 - O elemento neutro, e, de X é o de $\beta_p^D(X)$;

3 - Cada elemento de $\beta_p^D(X)$ admite inverso.

Mostraremos que, utilizando a notação do Teorema 2.1, que 1, 2, 3 valem para $(X_\alpha, \tilde{\cdot} \nearrow_{X_\alpha \times X_\alpha})$, bastando também verificar que:

4 - $\tilde{\cdot}''(X_\alpha \times X_\alpha) \subseteq X_\alpha$.

Para simplificar a notação, ao invés de $\tilde{\cdot}_\alpha = \tilde{\cdot} \nearrow_{X_\alpha \times X_\alpha} (a, b)$, escrveremos $a.b$.

Por indução, 4 é trivial, tendo em vista a definição. Logo, $\tilde{\cdot}_\alpha$ é contínua.

Demonstração de 1: Por indução, $\alpha = 0$ e α limite são casos triviais.

Se $(x, y, z) \in X_\alpha \times X_\alpha \times X_\alpha$ com $X = p - D\text{-}\lim x_n$, $y = p - D\text{-}\lim y_n$, $z = p - D\text{-}\lim z_n$ (obviamente, tomando $x_n = x$, se $x \in X_\beta$, é análogo par y e z).

$(x.y).z = (p - D - \lim x_n.p - D - \lim y_n).p - D - \lim z_n$. Pelo Lema 2.2 $= (p - D - \lim(x_n.y_n)).p - D - \lim z_n$. Novamente, usando o Lema 2.2 $= p - D - \lim(x_n.y_n).z_n$.

Pela hipótese de indução, $(x_n.y_n).z_n = x_n.(y_n.z_n)$.

Logo $= p - D - \lim x_n.(y_n.z_n)$.

Pelo Lema 2.2 $= (p - D - \lim x_n).(p - D - \lim y_n.z_n)$.

Pelo Lema 2.2 $= x.(p - D - \lim y_n.p - D - \lim z_n = x.(y.z)$ ■

Demonstração de 2: Por indução.

Para $\alpha = 0$ e α-limite, é trivial.

Se $\alpha = \beta + 1$.

Se $x \in X_\alpha \backslash X_\beta, x = p - D - \lim x_n$, onde $(x_n)_{n \in \mathrm{N}} \subseteq X_\beta$.

$x.\mathrm{e} = p - D - \lim x_n.\mathrm{e} = p - D - \lim x_n.p - D - \lim \mathrm{e}$.

Pelo Lema 2.2 $= p - D - \lim x_n.\mathrm{e} =$ (pela hipótese de indução) $p - D - \lim x_n = x$ ■

Demonstração de 3: Por indução, $\alpha = 0$ e α-limite são casos triviais.

$\alpha = \beta + 1$

Se $x \in X_\alpha \backslash X_\beta \quad x = p - D - \lim x_n$, onde $(x_n)_{n \in \mathrm{N}} \subseteq X_\beta$.

Pela hipótese de indução, existe $x_n^{-1} \in X_\beta$, para todo $n \in \mathrm{N}$.

Seja $y = p - D - \lim x_n^{-1}$.

$x.y = p - D - \lim x_n.p - D - \lim x_n^{-1} = p - D - \lim x_n.x_n^{-1} = p - D - \lim \mathrm{e} = \mathrm{e}$ ■

O resultado está demonstrado.

Teorema 2.4 Se X é grupo paratopológico 0-dimensional, tal que $X \times X$ é N-pseudocompacto, então X é grupo topológico.

Demonstração: Pelo Teorema 1.7, $\beta_D(X) \times \beta_D(X) = \beta_D(X \times X)$. Pelo Teorema 2.3,

$\beta_p^D(X)$ é grupo paratopológico.

Mas $\beta_p^D(X)$ é enumeravelmente compacto. Portanto, pelo Teorema 2.1, é grupo topológico. Mas X é subgrupo de $\beta_p^D(X)$.

Portanto, também é grupo topológico. ■

2.5 Finalmente, podemos notar que o procedimento anterior também pode ser generalizado, bastando tomar um espaço topológico E com as seguintes condições:

1 - E Tychonoff;

2 - $\beta_E(\omega) = \beta(\omega)$.

Dessa forma, se X for E-regular, temos definição análoga a 2.1 para $p - E$-compacto e análogos para: Lema 2.1, Corolário 2.1, Corolário 2.2 e Teoremas 2.1, 2.1, 2.3.

Logo, se X for um grupo paratopológico E-regular com $\beta_E(X \times X) = \beta_E(X) \times \beta_E(X)$, X será um grupo topológico. Resta encontrar condições para que isto se verifique.

Comentários finais

O capítulo VI teve como objetivo uma aplicação do estudo de produtos de espaços e grupos topológicos. Retirei o conceito de E-compacidade de [E.T.O.] e, baseado em [Gr], obtive uma condição para que um grupo paratopológico fosse, de fato, um grupo topológico. Apeser de não acrescentar resultado a [Gr] (já que um espaço N-pseudocompacto é pseudocompacto), ele leva a um método mais geral, em 2.5, que usa técnica semelhante para obter resultados desse tipo.

As definições 1.1 e 1.2 foram tiradas de [E.T.O.]. As demonstrações dos Teoremas 1.1, 1.2 e Proposição 1.1 também se encontram em [E.T.O.]. Os resultados seguintes do parágrafo 1 foram baseados nos do capítulo de compactificação de produtos de [W] e em [En], porém tendo demonstrações mais simples.

Os resultados e definições do parágrafo 2, fiz generalizando e adaptando os conceitos do capítulo IV deste trabalho e de [Gr], de modo a, combinando com os resultados do parágrafo 1, chegar ao Teorema 2.4. 2.5 é o método geral mencionado.

BIBLIOGRAFIA

[Ar] Arkhangelskii, A.V. *Structure and classification of topological spaces and their subspaces.* Russian Mathematical Surveys, 35-3, pg. 1-23, 1980.

[B] Balogh, Z. *On compact Hausdorff spaces of countable tightness.* Proc. American Mathematical Society, pg. 755-764, 1989.

[C.1] Comfort, W.W. *Topological groups*, in Handbook of Set-Theoretic Topology, Ed. Kunen and Vaughan, North Holland, 1980.

[C.2] Comfort, W.W. *Problems on topological and other homogeneous spaces.* Preprint.

[C.N.] Comfort, W.W. & Negreponts, S. *The theory of ultrafilters.* Springer Verlag, 1974.

[v.D.] Dowen, Eric K. van *The product of two countably compact topological groups.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 262, n. 2, dez. 1980.

[En] Engelking, R. *General topology.* Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann Verlag, 1989.

[E.T.O.] Eda K., Takemitsu K. & Ohta H. *N-compactness and its applications,* in Topics in General Topology. ed. K. Monta e J. Nagata, North Holland, 1989.

[Gr] Grant, Douglass L. *The Wollace Problem and continuity of the inverse.* Preprint.

[G e S] Ginsburg, John & Saks, Victor. *Some applications of ultrafilters in topology.* Pacific Journal of Mathematics, vol. 57, n. 2, 1975.

[H] Halmos, P.R. *Measure theory.* Van Nostrand ed., 1989.

[H.R.] Hewitt, E. & Ross, K.A. *Abstract harmonic analysis.* vol. I, Springer Verlag, 1963.

[J.1] Juhász, I. *Cardinal functions II,* in Handbook of Set-Theoretic Topology. Ed. Kunen e Vaughan, North Holland, 1980.

[K] Kunen, K. *Set theory, an introduction to independence proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol 102, North Holland, 1980.

[Ma] Malykhin, V.I. *Nonpreservation of properties of topological groups on taking their* *square.* Siberian Mathematical Journal, 28, 1987.

[Mo] Moore, G.H. *The origins of forcing,* in Logic Colloquium 86, Ed. F.R. Drake e J.K. Truss - Studies in Logica and the Foundations of Mathematics, vol 124, North Holland, 1988.

[N] Nagata, J. *Modern general topology.* North Holland, 2.ed, 1985.

[N.J.] Novak, J. *On the cartesian product of two compact sets.* Fund. Math. 40, 1953.

[Os] Ostaszewski, A. *On countably compact perfectly normal spaces.* J. London Mathematical Society, 14, 1976.

[Pf] Pfister, H. *Continuity of the inverse.* Proceedings of the American Mathematical Society, vol 950, n. 2, 1985.

[Ro] Roitman, Judy. *Adding a random or a Cohen real: topological consequences and the effect of Martin's Axiom.* Fund. Math., vol. 103, 1979.

[wR] Rudin, Walter. *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications.* Duke Math. J., 23, 1956.

[T.H.] Teresaka, H. *On the cartesian product of compact spaces.* Osaka Math. J., 4, 1952.

[V] Vaughan, J.E. *Countably compact and sequentially compact spaces,* in Handbook of Set-Theoretic Topology, Ed. Kunen e Vaughan, North Holland, 1980.

[W] Walker, R. *The Stone-Čech compactification.* Springer Verlag, 1974.

[We] Weil, Andre. *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale.* Publ. Math. Univ. Strasbourg, Hermann, Paris, 1937.

[W e R] Comfort, W.W. & Ross, K.A. *Pseudocompactvness and uniform continuity in topological groups.* Pacific Journal of Mathematics, vol. 16, n. 3, 1966.