Particionamento de espaços e grupos topológicos em subconjuntos densos disjuntos

Roberto Emilio Madariaga García

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: **Topologia Geral e Conjuntística**
Orientador: **Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, Novembro de 1998-

Particionamento de espaços e grupos topológicos em subconjuntos densos disjuntos

Este exemplar corresponde
à redação final da tese corrigida,
defendida por Roberto Madariaga
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 22 de dezembro de 1998.

Comissão julgadora

Prof. Dr. Artur Hideyuki Tomita (orientador) - IME-USP
Profa. Dra. Ofélia Teresa Alas - IME-USP
Prof. Dr. Francisco Antonio Doria - UFRJ

Resumo

Mostramos vários resultados sobre partições de espaços topológicos em subconjuntos densos. Assim definimos:

Um espaço é (κ-) resolúveis se possui dois (κ) conjuntos densos disjuntos.

Um espaço é ($\kappa-$) irresolúvel se não é ($\kappa-$) resolúvel.

Um espaço X é maximalmente resolúvel se é $\Delta(X)$-resolúvel, onde $\Delta(X)$ é a menor cardinalidade de um aberto não vazio.

Um grupo G é fortemente resolúvel se toda topologia de grupo não discreta em G é resolúvel

Mostramos que:

A união de subespaços (κ-) resolúveis é (κ-) resolúvel. Espaço métricos e localmente compactos são maximalmente resolúveis.

Assumindo a existência de um cardinal mensurável, damos exemplos de espaços infinitamente resolúveis mas não maximalmente resolúveis. Se um espaço é n-resolúvel para cada $n \in \mathbb{N}$, então ele é ω-resolúvel.

Todo grupo abeliano com 2-posto finito é fortemente resolúvel, e assumindo um princípio combinatório a recíproca é verdadeira.

Mostramos que a existência de grupos abelianos irresolúveis não discretos é independente de ZFC.

Abstract

We present several results concerning the partition of a topological space in dense subsets.

Thus, we use the following definitions: a space is ($\kappa-$) resolvable if it can be splitted into two (κ) disjoint dense subsets.

A space is ($\kappa-$) irresolvable if it is not ($\kappa-$) resolvable.

A space is maximally resolvable if it is $\Delta(X)$-resolvable, where $\Delta(X)$ is the minimum cardinality of a non-empty open subset.

A group G is strongly resolvable if every non-discrete group topology on G is resolvable.

We show that the union of ($\kappa-$) resolvable subspace is ($\kappa-$) resolvable.

Metric spaces and locally compact spaces are maximally resolvable.

If a space is n-resolvable for each $n \in \mathbb{N}$ then it is ω-resolvable.

Every Abelian group of finite rank 2 is strongly resolvable and assuming a combinatorial principle (derived from Martin's Axiom) the reverse implication is also true.

We show that the existence of a non-discrete irresolvable Abelian group is independent of ZFC.

Agradecimentos.

Ao Prof. Dr. Artur Tomita, por sua orientação e ajuda na dissertação, como também por sua amizade.

Às amizades feitas no Brasil, especialmente a:

Carlos Cordova, que foi meu irmão de Mamy.

Marco Antonio e Any, com sua filha Javiera, por todos os bons momentos vividos juntos.

Luis e Danisa, com sua filha Fernanda, que foram minha segunda família adotiva, aqui no Brasil.

Laura Cardenas, Ivan, Laura Ramos, Esteban (el cuñado), Gaspar, Irene.

Gonzalo e Juani, com seu filho Alexis, que foram minha primeira família adotiva, aqui no Brasil.

À turma de chilenos do IME (Raul, Juan, Marcia, Bernardo, Violeta, Cristian, etc.).

A todos meus amigos do Chile, especialmente a minha família, ao Pairre, à Mairre, à Clayita, meus quatros irmãos, como também ao Danilo e Jose Toribio.

A minha família de graduação: Marisol, Esteban, Isabel, Cristian e Oscar.

E, para que não fique com ciúmes, com açúcar e com afeto, ao meu amor Veronica.

Sumário

Introdução

A dissertação trata sobre partições de um espaço topológico em subconjuntos densos, assim utilizamos as seguintes definições: Um espaço topológico é (κ-) resolúvel se possui dois (resp. κ) subconjuntos densos disjuntos.

Um espaço topológico é (κ-) irresolúvel se ele não é (κ-) resolúvel.

No primeiro Capítulo, em 1.1 fazemos um resumo dos conceito e propriedades conjuntísticas e topológicas a serem utilizadas nas seções seguintes.

Em 1.2, introduzimos o conceito de espaço Resolúvel e demonstramos algumas proposições básicas para o desenvolvimento da tese, por exemplo que a união de subespaços (κ-) resolúveis é (κ-) resolúvel.

Em 1.3, introduzimos o conceito de espaço irresolúvel e demonstramos que toda topologia maximal com respeito às topologias T_i (com $i = 2, 3, 3\frac{1}{2}$) sem pontos isolados é irresolúvel. Assim, temos a existência de espaços irresolúveis sem pontos isolados.

No segundo Capítulo, fazemos um estudo sobre a (κ-) resolubilidade em diversos espaços topológicos.

Um espaço topológico X é maximalmente resolúvel se ele for $\Delta(X)$-resolúvel, onde $\Delta(X) = min\{|U| \; : \; U$ é aberto não vazio de $X\}$.

No início de 2.1, demonstramos que todo espaço de peso finito é maximalmente resolúvel; como também espaços metrizáveis ou localmente compactos Hausdorff. Continuamos demonstrando que todo grupo totalmente limitado é maximalmente resolúvel e mostramos uma generalização deste resultado.

Um espaço topológico é fortemente irresolúvel se todo subespaço dele é irresolúvel. Em 2.2, introduzimos o conceito de espaço fortemente irresolúvel e demonstramos a existencia de espaços maximalmente resolúveis e espaços fortemente irresolúveis com caráter de dispersão igual a κ, para cada cardinal regular κ.

No caso em que κ não é um cardinal regular demonstramos o mesmo, mas somente para espaços maximalmente resolúveis, e o caso para espaços fortemente irresolúveis é analizado.

Um espaço topológico é hereditariamente irresolúvel se todo subespaço aberto dele é irresolúvel.

Em 2.3, iniciamos o caminho para encontrar espaços resolúveis não maximalmente resolúveis. Para isto introduzimos o conceito de hereditariamente irresolúvel e demonstramos alguns lemas técnicos.

Em 2.4, mostramos a existência de espaços Hausdorff n-resolúveis que não são $(n+1)$-resolúveis (portanto resolúveis não maximalmente resolúveis). Assumindo a existência de um cardinal mensurável damos exemplos de espaços infinitamente resolúveis mas não maximalmente resolúveis.

Encerramos o segundo capítulo mostrando que se um espaço é n resolúvel para cada número natural n, então ele é ω-resolúvel. Também mostramos que todo espaço regular enumeravelmente compacto sem pontos isolados é ω-resolúvel.

Um grupo $(G, \cdot)$ é fortemente resolúvel se toda topologia de grupo não discreta em $(G, \cdot)$ é resolúvel.

O terceiro Capítulo trata sobre resolubilidade em distintos grupos topológicos. Em 3.1, introduzimos o conceito de grupo fortemente resolúvel e demonstramos que todo grupo abeliano com 2-posto finito é um grupo fortemente resolúvel.

Em 3.2, assumindo um princípio combinatório que é consequência do Axioma de Martin, mostramos a existência de uma topologia de grupo irresolúvel não discreta no grupo $\bigoplus_{n<\omega} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}(2)$. Assim temos que um grupo abeliano é fortemente resolúvel se e somente se tem 2-posto finito.

O quarto Capítulo trata sobre a existência de grupos irresolúveis em ZFC. Em 4.1, demonstramos que para cada topologia de grupo abeliano irresolúvel, existe um subgrupo aberto enumerável de ordem dois e portanto irresolúvel. Também mostramos que todo grupo topológico abeliano irresolúvel não discreto é de primeira categoria.

Em 4.2, demonstramos que se G, G_1, G_2 são grupos topológicos não discretos com G_1 e G_2 grupos abelianos então $G \times G$ e $G_1 \times G_2$ são resolúveis.

Encerramos o quarto capítulo e a dissertação demonstrando que a existência de uma topologia de grupo irresolúvel não discreta num grupo abeliano implica a existência de um P-ponto. Portanto a existência de grupos abelianos irresolúveis não discretos é independente de ZFC, pois num modelo de Shelah não existem P-pontos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conceitos Básicos

Apresentamos nesta seção algumas definições e propriedades básicas da teoria dos conjuntos, da teoria de grupos, da topologia geral e dos grupos topológicos que serão usados com familiaridade nas seções seguintes.

Teoria dos Conjuntos.

A referência utilizada para os conceitos conjuntistas é o livro de Kunen [K.80]. Trabalharemos no contexto da axiomática de Zermelo-Fraenkel com o Axioma da Escolha (ZFC).

Denotaremos a diferença entre dois conjuntos A e B por $A \backslash B$. Sejam $f : X \to Y$ uma função, $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, então usaremos as seguintes notações: $im(f)$ para a imagem da função f. Denotamos por $f(A)$ a imagem de A por f e $f^{-1}(B)$ a pré-imagem de B por f. A restrição da função f ao conjunto A será denotada por f/A.

Um conjunto é dito transitivo se cada elemento de A é também um subconjunto de A. Um conjunto A é um ordinal se é transitivo e bem ordenado por $\in$.

Observamos que os elementos de um ordinal são também ordinais. Usaremos as letras gregas $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ para designar ordinais. Se α e β são ordinais e $\alpha \in \beta$ dizemos que $\alpha < \beta$ e estas duas expresões são equivalentes.

Seja α um ordinal, se define $s(\alpha)$ ou $\alpha + 1$ como o ordinal $\alpha \cup \{\alpha\}$ chamado ordinal sucessor de α. Um ordinal α é dito ordinal sucessor se existe um ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$; e α é dito ordinal limite se $\alpha \neq 0$ e α não é ordinal sucessor.

Dois conjuntos A e B são equipotentes se existe uma função $f : A \to B$ bijetora. Se A é um conjunto bem ordenado, se define a cardinalidade de A ($|A|$) como o menor ordinal α equipotente a A. Sob o Axioma da Escolha, todo conjunto é bem ordenado e portanto $|A|$ é definido para todo conjunto A. A cardinalidade do conjunto dos números naturais é ω, o menor ordinal limite. Um cardinal é um ordinal α tal que $\alpha = |\alpha|$ i.e. α não é equipotente a nenhum ordinal menor que o próprio α. Usaremos as letras gregas $\lambda, \kappa, \tau, \nu, \mu$ para designar cardinais.

Se κ é um cardinal, κ^+ é o menor cardinal maior que κ. Dizemos que κ é um cardinal sucessor se $\kappa = \lambda^+$ para algum cardinal λ ; κ é um cardinal limite se $\kappa > \omega$ e não é um cardinal sucessor.

Se A é um conjunto e κ um cardinal, definimos os seguintes conjuntos: $[A]^\kappa = \{B \subseteq A : |B| = \kappa\}$, $[A]^{<\kappa} = \{B \subseteq A : |B| < \kappa\}$ e $[A]^{\leq\kappa} = \{B \subseteq A : |B| \leq \kappa\}$.

Sejam α e β ordinais. Uma função $f : \alpha \to \beta$ é cofinal se $im(f)$ é não limitada em β, i.e. $sup(im(f)) = \beta$. A cofinalidade de β, denotada por $cof(\beta)$, é o menor ordinal α tal que existe uma função cofinal $f : \alpha \to \beta$. Assim $cof(\beta) \leq \beta$ e se β é sucessor então $cof(\beta) = 1$. Um ordinal β é dito regular se é ordinal limite e $cof(\beta) = \beta$; e é dito singular se é ordinal limite e $cof(\beta) < \beta$.

Valem os seguintes fatos em relação à cofinalidade:

(i) Se α é regular então α é um cardinal.

(ii) κ^+ é regular para todo cardinal infinito κ.

Teoria de Grupos.

A referência utilizada para teoria de grupos é o livro de Fuchs [F.70]. Um grupo consiste num conjunto não vazio G munido de uma operação binária '$\cdot$' que satisfaz os seguintes axiomas

(i) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(ii) existe $1 \in G$ tal que $1 \cdot a = a$ $\forall a \in G$

(iii) $\forall a \in G$ existe $b \in G$ tal que $b \cdot a = 1$.

Sejam $(G, \cdot)$ um grupo, $C, D \subseteq G$ e a, b elementos de G, então denotamos:

ab como o produto de a por b (i.e. $a \cdot b$).

aC como o conjunto $\{ac : c \in C\}$.

$C \cdot D$ como o conjunto $\{cd : c \in C$ e $d \in D\}$.

Quando um grupo for expressado com a notação aditiva (i.e. $(G, +)$) usaremos analogamente as notações $a + C = \{a + c : c \in C\}$ e $C + D = \{c + d : c \in C$ e $d \in D\}$, e o elemento neutro será denotado por 0.

Seja $(G, \cdot)$ um grupo e $a \in G$, então definimos a ordem de a como $o(a) = min\{n \in \mathbb{N} : a^n = 1\}$. No caso de existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall g \in G)$ ($g^m = 1$), definimos a ordem do grupo $(G, \cdot)$ por $o(G) = min\{n \in \mathbb{N} : (\forall g \in G) (g^n = 1)\}$.

Assumiremos conhecidos os conceitos e resultados básicos de teoria de grupos, como por exemplo: subgrupos, coclasses, subgrupos normais, grupos quocientes, homomorfismos, soma direta.

Uma família finita de elementos $\{g_i : i < n\}$ de um grupo $(G, +)$ é dita linearmente independente se para cada $n_i \in \mathbb{Z}$, se $\sum_{i<n} n_i g_i = 0$ então $(\forall i < n)(n_i g_i = 0)$. Uma família infinita de elementos de G é chamada linearmente independente se cada subfamília finita dela é linearmente independente.

Uma família linearmente independente $\mathcal{F}$ de $(G, +)$ é chamada maximal se não existe uma família linearmente independente em $(G, +)$ contendo $\mathcal{F}$ propriamente.

O posto livre de torção de um ponto $(G, +)$ é $r_0(G) = min\{|\mathcal{F}| : P(\mathcal{F}), Q_0(\mathcal{F})\}$ onde $P(\mathcal{F})$ é '$\mathcal{F}$ é família linearmente independente maximal de $(G, +)$', e $Q_0(\mathcal{F})$

é '$\mathcal{F}$ só possui elementos de ordem infinita'. Dado um número primo p, o p-posto de $(G,+)$ é

$$r_p(G) = min\{|\mathcal{F}| \ : \ P(\mathcal{F}) \ , \ Q_p(\mathcal{F})\}$$

onde $Q_p(\mathcal{F})$ é '$\mathcal{F}$ só possui elementos de ordem p'. O Teorema 16.3 de [F.70] mostra que os postos $r_0(G)$, $r_p(G)$ de um grupo $(G,+)$ são invariantes de $(G,+)$.

Proposição 1.1 Seja $(G,+)$ um grupo abeliano. Então são equivalentes:

(i) G contém uma cópia isomorfa do grupo $\bigoplus_\omega\{0,1\}$

(ii) existem infinitos elementos em G de ordem 2

(iii) $r_2(G) \geq \omega$

Demonstração

$i \Rightarrow ii)$ é claro

$ii \Rightarrow iii)$ Senão, temos que $r_2(G) < \omega$. Assim, existe uma $\mathcal{F}$ família linearmente independente maximal finita, onde todo elemento de $\mathcal{F}$ é de ordem 2. Seja G' o subgrupo gerado por $\mathcal{F}$, então G' é finito. Logo, existe $x \in G \backslash G'$ de ordem 2. Seja $\mathcal{F}' = \{x\} \cup \mathcal{F}$, como $\mathcal{F}$ é linearmente independente e $x \in G \backslash G'$ temos que $\mathcal{F}'$ é linearmente independente e $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$. Isto é uma contradição, pois $\mathcal{F}$ é maximal.

$iii \Rightarrow i)$ Seja $\mathcal{F}$ família linearmente independente maximal em $(G,+)$. Como $r_2(G) \geq \omega$, temos que $\mathcal{F}$ é infinita. Sejam $\{x_i \in \mathcal{F} \ : \ i < \omega\}$ uma subfamília linearmente independente de $\mathcal{F}$, e G' o subgrupo gerado por $\{x_i \ : \ i < \omega\}$. Como $\{x_i \ : \ i < \omega\}$ é linearmente independente temos que cada elemento de G' se escreve de maneira única como $\sum_{i \in I} x_i$ onde $I \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Assim definimos

$$\begin{array}{rccl} \psi \ : & \bigoplus_\omega\{0,1\} & \rightarrow & G' \\ & f & \rightarrow & \sum_{i \in sup(f)} x_i \end{array}$$

onde $sup(f) = \{n < \omega \ : \ f(n) \neq 0\}$. Claramente, ψ é bijetora.
Vamos demonstrar que ψ é isomorfismo. Sejam $f,\ g \in \bigoplus_{\omega}\{0,1\}$. Então

$$\begin{aligned}
\psi(f+g) &= \sum_{i\in sup(f+g)} x_i \\
&= \sum_{i\in(sup(f)\setminus sup(g)\ \cup\ sup(g)\setminus sup(f))} x_i \\
&= \sum_{i\in sup(f)\setminus sup(g)} x_i + \sum_{i\in sup(g)\setminus sup(f)} x_i \\
&= \sum_{i\in sup(f)\setminus sup(g)} x_i + \sum_{i\in sup(f)\cap sup(g)} x_i + \sum_{i\in sup(f)\cap sup(g)} x_i + \sum_{i\in sup(g)\setminus sup(f)} x_i \\
&= \sum_{i\in sup(f)} x_i + \sum_{i\in sup(g)} x_i \\
&= \psi(f) + \psi(g)
\end{aligned}$$

assim temos (i).

■

Um grupo $(G,+)$ é dito divisível se, para cada $a \in G$ e cada $n \in \mathbb{N}^+$, existe $x \in G$ tal que $nx = a$. O Teorema 23.1 de [F.70] mostra que se $(G,+)$ é grupo divisível então

$$G \approx \bigoplus_{r_0(G)} \mathbb{Q} \bigoplus \Big(\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \Big(\bigoplus_{r_p(G)} \mathbb{Z}(p^\infty) \Big) \Big)$$

onde $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \ : \ p$ é número primo maior que $1\}$ e

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{n<\omega} \{x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ : \ p^n x = 0\}$$

Dado um grupo abeliano $(G,+)$ dizemos que um grupo divisível H é grupo divisível minimal contendo G se $G \subseteq H$ e todo subgrupo próprio divisível de H

não contém G. O teorema 24.4 de [F.70] mostra que dado um grupo abeliano $(G,+)$ existe $\tilde{G}$ grupo divisível minimal contendo G, e se H é grupo divisível minimal contendo G então

$$H \approx \bigoplus_{r_0(G)} \mathbb{Q} \bigoplus (\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} (\bigoplus_{r_p(G)} \mathbb{Z}(p^\infty)))$$

assim $\tilde{G}$ é unicamente determinado a menos de isomorfismos.

Topologia Geral.

Foi utilizado como referência básica para os conceitos topológicos o livro de Engelking [EN.77]. Um espaço topológico é um par $(X, \mathcal{J})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{J}$ é uma topologia definida no conjunto X. Quando não houver dúvidas em relação à topologia nos referimos ao espaço $(X, \mathcal{J})$ por espaço X. Seja $Y \subseteq X$, para denotar a topologia induzida em Y utilizamos $(Y, \mathcal{J}_Y)$, $(Y, \mathcal{J})$ ou simplesmente dizemos que Y é um subespaço de $(X, \mathcal{J})$.

Assumiremos conhecidos os conceitos básicos da topologia geral, como por exemplo: conjunto aberto, conjunto fechado, vizinhanças de um ponto, base para o espaço, base para um ponto, fecho de um conjunto, interior de um conjunto, axiomas de enumerabilidade e separação (espaços T_i para $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$). Assumiremos que os espaços T_i são T_1 para todo $i \geq 1$. Usaremos também os termos Hausdorff para T_2, regular para T_3, Tychonoff ou completamante regular para $T_{3\frac{1}{2}}$, e normal para T_4.

Seja A um subconjunto de um espaço $(X, \mathcal{J})$. Denotamos por $cl_{(X,\mathcal{J})}(A)$ o fecho de A em $(X, \mathcal{J})$ e denotamos por $int_{(X,\mathcal{J})}(A)$ o interior de A em $(X, \mathcal{J})$. Quando não houver dúvidas em relação ao espaço topológico, denotamos o fecho de A por $cl(A)$, $cl_X(A)$ ou $cl_{\mathcal{J}}(A)$ e o interior de A por $int(A)$, $int_X(A)$ ou $int_{\mathcal{J}}(A)$.

Em mais de uma demonstração vamos a usar as duas seguintes proposições para construir topologias num conjunto dado.

Proposição 1.2 Seja X um conjunto e seja $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X tal que

(B1) Para cada U_1, $U_2 \in \mathcal{B}$ e cada $x \in U_1 \cap U_2$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

(B2) Para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$.

Seja $\mathcal{J}$ a família de subconjuntos de X que são a união de alguma subfamília de $\mathcal{B}$, então $(X, \mathcal{J})$ é um espaço topológico e $\mathcal{B}$ é uma base para o espaço topológico $(X, \mathcal{J})$ (a topologia $\mathcal{J}$ é chamada de topologia gerada por $\mathcal{B}$).

Demonstração

Como $\cup\phi = \phi$ e $\cup\mathcal{B} = X$ temos que ϕ, $X \in \mathcal{J}$. Agora sejam U, $V \in \mathcal{J}$ vamos demonstrar que $U \cap V \in \mathcal{J}$. Suponhamos que $U \cap V \neq \phi$, assim dado $x \in U \cap V$, como $x \in U \in \mathcal{J}$ temos que existe $U_0 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_0 \subseteq U$, analogamente existe $V_0 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_0 \subseteq V$ e por (B1) temos que existe $W_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W_x \subseteq U_0 \cap V_0 \subseteq U \cap V$, assim temos que $U \cap V = \cup\{W_x : x \in U \cap V\} \in \mathcal{J}$.

Agora seja $\mathcal{F}$ subfamília de $\mathcal{J}$ então claramente temos que $\cup\mathcal{F} \in \mathcal{J}$, e portanto temos que $(X, \mathcal{J})$ é espaço topológico e a definição de $\mathcal{J}$ garante que $\mathcal{B}$ é base de $(X, \mathcal{J})$.

■

Proposição 1.3 Seja X um conjunto e para cada $x \in X$ seja $\mathcal{B}_x$ uma família de subconjuntos de X tais que

(BP1) Cada $\mathcal{B}_x$ é não vazio e para cada $U \in \mathcal{B}_x$ temos que $x \in U$.

(BP2) Se $x \in U \in \mathcal{B}_y$ então existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subseteq U$.

(BP3) Para cada U_1, $U_2 \in \mathcal{B}_x$ existe $U \in \mathcal{B}_x$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Então $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x : x \in X\}$ satisfaz as propriedades (B1) e (B2), e $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ é sistema de vizinhanças da topologia gerada por $\mathcal{B}$ (a topologia gerada por $\mathcal{B}$ é dita topologia gerada pelo sistema de vizinhanças $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$).

Demonstração

Sejam $V,\ W \in \mathcal{B}$ tal que $V \cap W \neq \phi$, pela definição de $\mathcal{B}$ temos que existem $y,\ z \in X$ tais que $V \in \mathcal{B}_y$ e $W \in \mathcal{B}_z$, agora seja $x \in V \cap W$ por (BP2) existem $V_0,\ W_0 \in \mathcal{B}_x$ tais que $V_0 \subseteq V$ e $W_0 \subseteq W$ e por (BP3) temos que existe $U \in \mathcal{B}_x$ tal que $U \subseteq V_0 \cap W_0$ assim temos que $x \in U \in \mathcal{B}$ e $U \subseteq V \cap W$. A condição (BP1) garante (B2) e a definição de $\mathcal{B}$ garante que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ é sistema de vizinhanças da topologia gerada por $\mathcal{B}$.

■

Grupos Topológicos.

Em geral se define uma topologia num conjunto arbitrário, em particular pode-se definir num grupo algébrico, assim para aproveitar a estrutura do grupo podemos exigir que a topologia satisfaça algumas propriedades extras com respeito ao grupo algébrico. Assim definimos grupos topológicos e fazemos um pequeno resumo das propriedades que serão utilizadas deles nas seções seguintes.

Definição 1.4 Seja $(G,\cdot)$ um grupo e seja $\mathcal{T}$ uma topologia em G então dizemos que $((G,\cdot),\mathcal{T})$ é um grupo topológico se

(G1) $m : G \times G \to G$ dada por $m(x,y) = x \cdot y$ é contínua.

(G2) $i : G \to G$ dada por $i(x) = x^{-1}$ é contínua.

Proposição 1.5 Seja $((G,\cdot),\mathcal{T})$ um grupo topológico e para cada $h \in G$ sejam

$$\begin{aligned} \rho_h : G \to G \quad &\text{dada por} \quad \rho_h(g) = g \cdot h \\ \lambda_h : G \to G \quad &\text{dada por} \quad \lambda_h(g) = h \cdot g \\ i : G \to G \quad &\text{dada por} \quad i(g) = g^{-1} \end{aligned}$$

Então para cada $h \in G$ temos que ρ_h , λ_h , i são homeomorfismos de G em G.

Demonstração

Por (G2) temos que i é contínua e como $i^{-1} \equiv i$ temos que i é homeomorfismo. Agora sejam $\varphi : G \to G \times \{h\}$ dada por $\varphi(g) = (g, h)$ e $\psi \equiv m/G \times \{h\}$, como $\rho_h \equiv \psi \circ \varphi$ e ψ, φ são contínuas temos que ρ_h é contínua e como $(\rho_h)^{-1} \equiv \rho_{h^{-1}}$ temos que ρ_h é homeomorfismo. Para λ_h a demonstração é análoga.

■

Proposição 1.6 Seja $((G, \cdot), \mathcal{T})$ um grupo topológico e seja $\mathcal{B}_1$ base de abertos de 1 então

$$\mathcal{B} = \{gU \ : \ g \in G \ , \ U \in \mathcal{B}_1\} \ \text{ e } \ \mathcal{B}' = \{Ug \ : \ g \in G \ , \ U \in \mathcal{B}_1\}$$

são bases de $\mathcal{T}$.

Demonstração

Sejam $U \in \mathcal{T}$ e $h \in U$ como $\lambda_{h^{-1}}$ é homeomorfismo temos que $h^{-1}U = \lambda_{h^{-1}}(U) \in \mathcal{T}$ e como $1 \in h^{-1}U$ temos que existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $V \subseteq h^{-1}U$, assim $hV = \lambda_h(V) \subseteq \lambda_h(h^{-1}U) = h(h^{-1}U) = U$. Portanto temos que $h \in hV \subseteq U = U$ e assim $\mathcal{B}$ é base de $\mathcal{T}$. Para $\mathcal{B}'$ a demonstração é analoga.

■

Proposição 1.7 Seja $((G, \cdot), \mathcal{T})$ um grupo topológico e seja U um aberto então para cada $A \subseteq G$ temos que $A \cdot U$ e $U \cdot A$ são abertos.

Demonstração

Como $A \cdot U = \bigcup\limits_{a \in A} (aU) = \bigcup\limits_{a \in A} \lambda_a(U)$ e λ_a é um homeomorfismo temos que $\lambda_a(U)$ é aberto, logo $A \cdot U$ é aberto. Para $U \cdot A$ a demonstração é análoga.

■

Proposição 1.8 Seja $((G,\cdot),\mathcal{T})$ um grupo topológico e seja $\mathcal{B}_1$ uma base de abertos de 1, então

(i) Para cara $U \in \mathcal{B}_1$ existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $V \cdot V \subseteq U$.

(ii) Para cada $U \in \mathcal{B}_1$ existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

(iii) Para cada $U \in \mathcal{B}_1$ e cada $h \in U$ existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $hV \subseteq U$.

(iv) Para cada $U \in \mathcal{B}_1$ e cada $h \in U$ existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $hV(h^{-1}) \subseteq U$.

Demonstração

(i) Como $1 \cdot 1 = 1 \in U$ e m é contínua temos que existe $V_1 \times V_2$ aberto básico de $G \times G$ tal que $(1,1) \in V_1 \times V_2 \subseteq m^{-1}(U)$, seja $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $V \subseteq V_1 \cap V_2$ assim temos que $V \cdot V \subseteq V_1 \cdot V_2 \subseteq U$.

(ii) Como i é homeomorfismo temos que $i(U) = U^{-1}$ é aberto e como $1 \in U^{-1}$ temos que existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $V \subseteq U^{-1}$ logo $V^{-1} = i(V) \subseteq i(U^{-1}) = U$.

(iii) Como $\lambda_{h^{-1}}$ é homeomorfismo temos que $\lambda_{h^{-1}}(U) = h^{-1}U$ é aberto e como $1 \in h^{-1}U$ temos que existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $V \subseteq h^{-1}U$ logo
$h^{-1}V = \lambda_h(V) \subseteq \lambda_h(h^{-1}U) = U$.

(iv) Como $\lambda_{h^{-1}}$ e ρ_h são homeomorfismos temos que $h^{-1}U = \lambda_{h^{-1}}(U) \in \mathcal{T}$ logo $h^{-1}Uh = \rho_h(h^{-1}U) \in \mathcal{T}$ e como $1 \in h^{-1}Uh$ temos que existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $V \subseteq h^{-1}Uh$ logo $Vh^{-1} \subseteq \rho_{h^{-1}}(h^{-1}Uh) = h^{-1}U$ e portanto temos que
$hVh^{-1} = \lambda_h(Vh^{-1}) \subseteq \lambda_h(h^{-1}U) = U$.

■

Definição 1.9 Seja $((G,\cdot),\mathcal{T})$ um grupo topológico e $A \subseteq G$. Então A é chamado simétrico se $A = A^{-1}$.

Proposição 1.10 Seja $((G,\cdot),\mathcal{T})$ um grupo topológico então existe $\mathcal{B}_1$ base de abertos simétricos de 1.

Demonstração

Seja $\mathcal{B}_1'$ uma base de abertos de 1 então $\mathcal{B}_1 = \{U^{-1} \cap U \ : \ U \in \mathcal{B}_1'\}$ é base de abertos simétricos de 1.

■

Corolario 1.11 Seja $((G,\cdot),\mathcal{T})$ um grupo topológico e seja U uma vizinhança de 1 então existe V vizinhança de 1 tal que $cl_G(V) \subseteq U$.

Demonstração

Seja $\mathcal{B}_1$ uma base de abertos simétricos de 1 então pela Proposição 1.8 existe $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $V \cdot V \subseteq U$. Vamos demonstrar que $cl_G(V) \subseteq U$. Seja $x \in cl_G(V)$, como $x \in xV \in \mathcal{T}$ temos que $V \cap xV \neq \phi$. Seja $v_1 \in V \cap xV$ então existe $v_2 \in V$ tal que $v_1 = xv_2$ logo $x = v_1 v_2^{-1} \in V \cdot V^{-1} = V \cdot V \subseteq U$, portanto temos que $cl_G(V) \subseteq U$.

■

Proposição 1.12 Seja $((G,\cdot),\mathcal{T})$ um grupo topológico. Se $(G,\mathcal{T})$ é T_0 então $(G,\mathcal{T})$ é regular.

Demonstração

Sejam $U \in \mathcal{T}$ e $g \in U$. Como $1 \in g^{-1}U \in \mathcal{T}$ pelo Corolário 1.11 temos que existe $V \in \mathcal{T}$ tal que $1 \in V \subseteq cl_G(V) \subseteq g^{-1}U$. Como λ_g é homeomorfismo temos que $g\ cl_G(V)$ é fechado e como $gV \subseteq g\ cl_G(V)$ temos que $cl_G(gV) \subseteq g\ cl_G(V)$. Portanto

$$g \in gV \subseteq cl_G(gV) \subseteq g\ cl_G(V) \subseteq g(g^{-1}U) = U$$

e como $(G,\mathcal{T})$ é T_0 temos que $(G,\mathcal{T})$ é regular.

■

Definição 1.13 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço topológico e seja " $\sim$ " uma relação de equivalência em X. Para cada $x \in X$, seja $[x]$ a classe de equivalência de x. Então $q : X \to X/\sim$, dada por $q(x) = [x]$, é a função quociente e $\mathcal{J}_q = \{U \subset X/\sim\, : \; q^{-1}(U) \text{ é aberto}\}$ é a topologia quociente.

Proposição 1.14 Seja $((G, \cdot), \mathcal{T})$ um grupo topológico e seja H um subgrupo normal de G. Seja " $\sim$ " uma relação de equivalência em G dada por $x \sim y \Leftrightarrow y^{-1}x \in H$. Então $(G/H,\ \mathcal{T}_q)$ é um grupo topológico, onde $(G/H,\ \mathcal{T}_q)$ é a topologia quociente.

Demonstração

Vamos demonstrar que q é função aberta. Seja U aberto em G, então $q^{-1}(q(U)) = \cup\{Uh \;:\; h \in H\}$, assim $q^{-1}(q(U))$ é aberto, logo $q(U)$ é aberto.

Seja $U \in \mathcal{T}_q$ então $V = q^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ logo $V^{-1} \in \mathcal{T}$ portanto $q(V^{-1}) \in \mathcal{T}_q$. Seja $v \in V$, como $(q(v))^{-1} = q(v^{-1})$ temos que $U^{-1} = (q(V))^{-1} = q(V^{-1}) \in \mathcal{T}_q$. Assim $i_q : G/H \to G/H$ dada por $i_q(x) = x^{-1}$ é continua.

Sejam $U \in \mathcal{T}_q$ e $x, y \in G/H$ tais que $xy \in U$. Seja $V = q^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ e $g, h \in G$ tais que $q(g) = x$ e $q(h) = y$. Como $q(gh) = q(g)q(h) = xy \in U$ temos que $gh \in V$, portanto existem $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ tais que $g \in V_1$, $h \in V_2$ e $V_1 \cdot V_2 \subseteq V$. Logo $x = q(g) \in q(V_1) \in \mathcal{T}_q$, $y = q(h) \in q(V_2) \in \mathcal{T}_q$ e $q(V_1) \cdot q(V_2) = q(V_1 \cdot V_2) \subseteq q(V) = U$. Assim $m_q : G/H \times G/H \to G/H$ dada por $m_q(x, y) = xy$ é contínua

■

Proposição 1.15 Seja $((G, \cdot), \mathcal{T})$ um grupo topológico e seja H um subgrupo normal de G. Se H é fechado em $(G, \mathcal{T})$ então $(G/H,\ \mathcal{T}_q)$ é regular.

Demonstração

Como H é fechado temos que $G\backslash H$ é aberto assim $q(G\backslash H) = (G/H)\backslash\{[0]\}$ é aberto e portanto $\{[0]\}$ é fechado logo $(G/H,\ \mathcal{T}_q)$ é T_1 e pela Proposição 1.12 temos que $(G/H,\ \mathcal{T}_q)$ é regular.

■

1.2 Espaços Resolúveis

Nesta seção introduzimos a teoria de espaços resolúveis. Assim nas primeiras proposições demonstramos alguns resultados básicos para o desenvolvimento da dissertação relacionados à resolubilidade em espaços e continuamos mostrando outros resultados básicos em grupos topológicos.

Definição 1.16 Um espaço X é dito κ-resolúvel se existe uma família de cardinalidade κ, de subconjuntos densos em X, dois a dois disjuntos. Quando $\kappa = 2$, X é dito resolúvel.

De acordo com a definição 1.16 o caso de $\kappa = 1$ é trivial pois todo espaço, resolúvel ou não resolúvel, é 1-resolúvel.

Proposição 1.17 Seja X um espaço κ-resolúvel então cada aberto não vazio de X é κ-resolúvel.

Demonstração

Pela Definição 1.16, existe uma família $\mathcal{F} = \{D_\alpha\ :\ \alpha < \kappa\}$ de subconjuntos densos em X, dois a dois disjuntos. assim $\mathcal{F}_0 = \{D_\alpha \cap U\ :\ \alpha < \kappa\}$ é família de densos em U, dois a dois disjuntos.

■

Proposição 1.18 Seja Y um subespaço de $(X, \mathcal{J})$. Se Y é κ-resolúvel então $cl_X(Y)$ é κ-resolúvel.

Demonstração

Pela Definição 1.16, existe uma família $\mathcal{F} = \{D_\alpha \subseteq Y \ : \ \alpha < \kappa\}$ de densos em Y, dois a dois disjuntos. Como Y é denso em $cl_X(Y)$ e cada D_α é denso em Y, temos que cada D_α é denso em $cl_X(Y)$. Assim $\mathcal{F}$ é uma família de densos em $cl_X(Y)$, dois a dois disjuntos.

■

Teorema 1.19 Seja $\mathcal{F}$ uma família de subespaços não vazios de $(X, \mathcal{J})$ tal que cada elemento de $\mathcal{F}$ é κ-resolúvel. Então $\cup\mathcal{F}$ é κ-resolúvel.

Demonstração

Sem perda de generalidade, suponhamos que $X = \cup\mathcal{F}$. Seja

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X) : & (\forall C \in \mathcal{C})(\ C \text{ é } \kappa\text{-resolúvel }) \text{ e} \\ & (\forall\ E, F \in \mathcal{C})(\ E \neq F \Rightarrow E \cap F = \phi\ ) \end{array} \right\}$$

Assim $\mathcal{A}$ é não vazio e $(\mathcal{A}, \subseteq)$ é um ordem parcial onde cada cadeia crescente $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ é limitada superiormente por $\cup\mathcal{B}$. Pelo Lema de Zorn existe $\mathcal{F}' = \{F_\beta \ : \ \beta < \lambda\}$ elemento maximal de $\mathcal{A}$ onde cada F_β é κ-resolúvel. Assim pela Definição 1.16 existe $\mathcal{F}_\beta = \{D_\alpha^\beta \subseteq F_\beta \ : \ \alpha < \kappa\}$ família de subconjuntos densos em F_β dois a dois disjuntos.

Para cada $\alpha < \kappa$, seja $D_\alpha = \cup\{D_\alpha^\beta \ : \ \beta < \lambda\}$ e seja $\mathcal{D} = \{D_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}$.

Afirmação (i) $\mathcal{D}$ é família de subconjuntos dois a dois disjuntos.

Afirmação (ii) Cada D_α é denso em $\cup\mathcal{F}'$.

Afirmação (iii) $\cup\mathcal{F}'$ é denso em X.

Por (ii) e (iii) temos que cada D_α é denso em X. Assim $\mathcal{D}$ é família de densos em X, dois a dois disjuntos portanto X é κ-resolúvel.

Demonstração da afirmação (i)

Seja $\alpha < \gamma < \kappa$ e suponhamos que existe $x \in D_\alpha \cap D_\gamma$. Logo existe $\beta < \lambda$ tal que $x \in D_\alpha^\beta \subseteq F_\beta$ e existe $\theta < \lambda$ tal que $x \in D_\gamma^\theta \subseteq F_\theta$.
Se $\beta \neq \theta$ então $F_\beta \cap F_\theta = \phi$ mas $x \in F_\beta \cap F_\theta = \phi$ o que é contraditório.
Se $\beta = \theta$, como $\alpha \neq \gamma$ temos que $D_\alpha^\beta \cap D_\gamma^\beta = \phi$ mas $x \in D_\alpha^\beta \cap D_\gamma^\beta$ o que é contraditório.

Demonstração da afirmação (ii)

Dado $\alpha < \kappa$ e U aberto de X tal que $U \cap (\cup\mathcal{F}) \neq \phi$, existe $\beta < \lambda$ tal que $U \cap F_\beta \neq \phi$. Como D_α^β é denso em F_β temos
$o \neq (U \cap F_\beta) \cap D_\alpha^\beta \subseteq (U \cap (\cup\mathcal{F})) \cap D_\alpha$ logo D_α é denso em $\cup\mathcal{F}$.

Demonstração da afirmação (iii)

Suponhamos que existe um aberto U não vazio de X tal que $U \cap (\cup\mathcal{F}) = \phi$. Como U é não vazio e $X = \cup\mathcal{F}$, então existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $U \cap F \neq \phi$ e pela Proposição 1.17 temos que $U \cap F$ é κ-resolúvel. Seja $\mathcal{C} = \mathcal{F}' \cup (U \cap F)$, assim $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{C}$ mas $\mathcal{F}'$ é elemento maximal de $\mathcal{A}$ o que é contraditório, portanto $\cup\mathcal{F}'$ é denso em X .

■

Definição 1.20 Um espaço X é dito homogêneo se para cada x, $y \in X$ existe um homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(x) = y$.

Corolario 1.21 Todo espaço homogêneo com um subespaço não vazio κ-resolúvel é κ-resolúvel.

Demonstração

Seja X um espaço homogêneo e Y subespaço não vazio de X κ-resolúvel. Seja $y \in Y$ e para cada $x \in X$ seja $f_x : X \to X$ um homeomorfismo tal que $f_x(y) = x$, assim $X = \cup\{f_x(Y) \ : \ x \in X\}$.

Como Y é κ-resolúvel e f_x é homeomorfismo então para cada $x \in X$ temos que $f_x(Y)$ é κ-resolúvel, logo pelo Teorema 1.19 temos que X é κ-resolúvel.

■

Corolario 1.22 Todo grupo topológico com subespaço não vazio κ-resolúvel é κ-resolúvel.

Demonstração

Todo grupo topológico é homogêneo, assim basta aplicar o Corolário 1.21.

■

Proposição 1.23 Todo grupo topológico com subgrupo próprio denso é resolúvel.

Demonstração

Seja G um grupo topológico e H um subgrupo próprio denso de G.
Vamos demonstrar que $G \backslash H$ é denso em G. Senão existe U aberto não vazio de G tal que $U \subseteq H$. Seja $g \in G \backslash H$ e seja $u \in U \subseteq H$. Como $gu^{-1}U$ é aberto não vazio e H é denso temos que existe $h \in gu^{-1}U \cap H$. Assim
$ug^{-1}h \in ug^{-1}(gu^{-1}U) = U \subseteq H$ e como H é subgrupo temos que $g \in H$, o que é contraditório.

■

Corolario 1.24 Todo grupo topológico com um subgrupo não fechado é resolúvel.

Demonstração

Seja G um grupo topológico e seja H um subgrupo não fechado de G.

Afirmação: $cl_G(H)$ é subgrupo de G.

Assim pela Proposição 1.23 $cl_G(H)$ é resolúvel e pelo Corolário 1.22 G é resolúvel.

Demonstração da afirmação

Seja $a \in cl_G(H)$ vamos demonstrar que $a^{-1} \in cl_G(H)$. Seja V aberto tal que $a^{-1} \in V$, assim $a \in V^{-1}$ e V^{-1} é aberto. Como $a \in cl_G(H)$ temos que existe $h \in V^{-1} \cap H$, assim $h^{-1} \in V$ logo $h^{-1} \in V \cap H$. Portanto $a^{-1} \in cl_G(H)$.
Sejam $a,\ b \in cl_G(H)$, vamos demonstrar que $ab \in cl_G(H)$. Seja W aberto talque $ab \in W$ então existem abertos U e V tais que $a \in U$, $b \in V$ e $U \cdot V \subseteq W$. Como a e b pertencem ao fecho de H temos que existem h_1 e h_2 em H tais que $h_1 \in V$ e $h_2 \in V$. Assim $h_1 h_2 \in U \cdot V \subset W$ logo $W \cap H \neq \phi$ e portanto $ab \in cl_G(H)$.

■

Proposição 1.25 Seja G um grupo topológico e seja H um subgrupo normal e fechado de G tal que G/H com a topologia quociente é resolúvel, então G é resolúvel.

Demonstração

Como G/H é resolúvel pela Definição 1.16 existe $D \subseteq G/H$ tal que D e $(G/H)\backslash D$ são densos em G/H.

Vamos demonstrar que $q^{-1}(D)$ é denso em G.

Seja U aberto não vazio em G. Como $q(U)$ é aberto não vazio, temos que $q(U) \cap D \neq \phi$ logo existe $d \in q^{-1}(D)$ tal que $q(d) \in q(U)$. Assim existe $u \in U$ tal que $q(u) = q(d) \in D$ logo $u \in q^{-1}(D)$. Portanto $U \cap q^{-1}(D) \neq \phi$.

Vamos demonstrar que $G\backslash q^{-1}(D)$ é denso em G.

Seja U aberto não vazio em G. Como $q(U)$ é aberto não vazio, temos que $q(U) \cap (G/H)\backslash D \neq \phi$ logo existe $p \in q^{-1}((G/H)\backslash D)$ tal que $q(p) \in q(U)$. Assim existe $u \in U$ tal que $q(u) = q(p)$ logo $u \in q^{-1}((G/H)\backslash D) = G\backslash q^{-1}(D)$ portanto $U \cap G\backslash q^{-1}(D) \neq \phi$.

■

Comentários

O conceito de espaços Resolúveis foi introduzido por Hewitt [HE.43] e foi generalizado para κ-resolúvel por Ceder [1] em 1964.

Comfort e Feng [2] mostraram em 1993 o Teorema 1.19 e a partir deste resultado eles puderam unificar as demonstrações de diversos resultados previamente conhecidos e a demonstração apresentada está em [C.G.96].

1.3 Espaços Irresolúveis

Esta seção está dedicada a mostrar a existência de espaços não resolúveis.

Definição 1.26 Um espaço $(X, \mathcal{J})$ é dito κ-irresolúvel se $(X, \mathcal{J})$ não é κ-resolúvel. Quando $\kappa = 2$, X é dito irresolúvel.

Definição 1.27 Um espaço $(X, \mathcal{J})$ é dito maximal se $\mathcal{J}$ é maximal em relação às topologias em X sem pontos isolados.

Proposição 1.28 Todo espaço Hausdorff maximal é irresolúvel.

Demonstração

Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço Hausdorff maximal. Se $(X, \mathcal{J})$ é resolúvel pela Definição 1.16 existe $D \subseteq X$ tal que D e $X\backslash D$ são densos em $(X, \mathcal{J})$. Seja $\mathcal{J}'$ a topologia gerada pela base $\mathcal{J} \cup \{U \cap D \,:\, U \in \mathcal{J}\}$. Assim D é aberto em

---

[1] J.G. Ceder, On maximally resolvable spaces, Fund. Math. 55 (1964) 87-93.

[2] W.W. Comfort and Li Feng, The union of resolvable spaces is resolvable, Math. Japon. 38 (1993) 413-414.

$(X, \mathcal{J}')$ logo $X \backslash D$ não é denso em $\mathcal{J}'$, portanto $\mathcal{J}' \neq \mathcal{J}$ e como $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$ temos que $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{J}'$.

Vamos demonstrar que $\mathcal{J}'$ não possui pontos isolados.

Senão, existe $x \in X$ tal que $\{x\} \in \mathcal{J}'$, assim temos que existe $U \in \mathcal{J}$ tal que $\{x\} = U \cap D$. Como $\mathcal{J}$ não possui pontos isolados temos que existe $y \in U \backslash \{x\}$. Como $\mathcal{J}$ é Hausdorff temos que existe $V \in \mathcal{J}$ tal que $y \in V$ e $x \notin V$, logo $y \in V \cap U$ e $x \notin V \cap U$ assim $(V \cap U) \cap D = \phi$. Agora como $V \cap U$ é aberto não vazio em $(X, \mathcal{J})$ temos que D não é denso, o que é contraditório.

Portanto $\mathcal{J}'$ não possui pontos isolados e como $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{J}'$ temos que $\mathcal{J}$ não é maximal o que é contraditório, portanto $(X, \mathcal{J})$ é irresolúvel.

■

Definição 1.29 Seja X um conjunto então:

(i) $\mathcal{H}(X)$ denota a classe das topologias Hausdorff em X sem pontos isolados.

(ii) $\mathcal{R}(X)$ denota a classe das topologias Regulares em X sem pontos isolados.

(iii) $\mathcal{CR}(X)$ denota a classe das topologias Completamente Regulares em X sem pontos isolados.

Proposição 1.30 Seja X um conjunto, então toda topologia maximal em $\mathcal{H}(X)$ é irresolúvel.

Demonstração

Seja $\mathcal{J}$ uma topologia maximal em $\mathcal{H}(X)$. Vamos demonstrar que $(X, \mathcal{J})$ é espaço maximal. Seja $(X, \mathcal{J}')$ um espaço sem pontos isolados tal que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$. Como $(X, \mathcal{J})$ é Hausdorff temos que $\mathcal{J}' \in \mathcal{H}(X)$ e pela maximalidade de $\mathcal{J}$ temos que $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$.

Agora pela proposição 1.28 temos que $(X, \mathcal{J})$ é irresolúvel.

■

A seguir mostramos um lema técnico para poder demonstrar o análogo da Proposição 1.30 para $\mathcal{R}(X)$ e $\mathcal{CR}(X)$.

Definição 1.31 Para cada $f : X \to \mathbb{R}$ o simbolo $\mathcal{J}_f$ representa a topologia em X gerada pela sub-base $\mathcal{J} \cup \{f^{-1}(V) \ : \ V$ é aberto em $\mathbb{R}\}$.

Lema 1.32 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço e seja $f : X \to \mathbb{R}$. Então:

(i) Se $\mathcal{J} \in \mathcal{R}(X)$ então $\mathcal{J}_f \in \mathcal{R}(X)$.

(ii) Se $\mathcal{J} \in \mathcal{CR}(X)$ então $\mathcal{J}_f \in \mathcal{CR}(X)$.

(iii) Seja $U \in \mathcal{J}$ tal que para cada aberto V de $\mathbb{R}$, $U \cap f^{-1}(V) = \phi$ ou $|U \cap f^{-1}(V)| \geq \omega$ então $(U, \mathcal{J}_f)$ não possui pontos isolados.

Demonstração

(i) Pela Definição 1.31 temos que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_f$ assim $\mathcal{J}_f$ é Hausdorff.

Seja $p \in X$ e $U \in \mathcal{J}_f$ tais que $p \in U$. Como $U \in \mathcal{J}_f$ temos que existe $W \in \mathcal{J}$ e existe V aberto em $\mathbb{R}$ tais que $p \in W \cap f^{-1}(V) \subseteq U$. Como $p \in W \in \mathcal{J}$ e $\mathcal{J}$ é regular temos que existe $W_0 \in \mathcal{J}$ tal que $p \in W_0 \subseteq cl_{\mathcal{J}_f}(W_0) \subseteq cl_{\mathcal{J}}(W_0) \subseteq U$. Como $f(p) \in V$, e V é aberto em $\mathbb{R}$ temos que existe um aberto V_0 em $\mathbb{R}$ tal que $f(p) \in V_0 \subseteq cl_{\mathbb{R}}(V_0) \subseteq V$. Como f é contínua em $(X, \mathcal{J}_f)$ temos que $f^{-1}(cl_{\mathbb{R}}(V_0))$ é fechado, logo

$$p \in f^{-1}(V_0) \subseteq cl_{\mathcal{J}_f}(f^{-1}(V_0)) \subseteq f^{-1}(cl_{\mathbb{R}}(V_0)) \subseteq f^{-1}(V).$$

Seja $U_0 = W_0 \cap f^{-1}(V_0)$, assim temos que $U_0 \in \mathcal{J}_f$ e

$$p \in U_0 \subseteq cl_{\mathcal{J}_f}(U_0) \subseteq cl_{\mathcal{J}_f}(W_0) \cap cl_{\mathcal{J}_f}(f^{-1}(V_0)) \subseteq W \cap f^{-1}(V) \subseteq U$$

portanto $(X, \mathcal{J}_f)$ é regular.

(ii) Pela Definição 1.31 temos que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_f$ assim $\mathcal{J}_f$ é Hausdorff.

Seja $p \in X$ e $U \in \mathcal{J}_f$ tais que $p \in U$. Como $U \in \mathcal{J}_f$, temos que existe $W \in \mathcal{J}$ e existe V aberto em $\mathbb{R}$ tais que $p \in W \cap f^{-1}(V) \subseteq U$. Como $p \in W \in \mathcal{J}$ e $\mathcal{J}$ é Tychonoff temos que existe $g : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{J}$-contínua tal que $g(p) = 0$ e $g/(X \backslash W) \equiv 1$.

Como V é aberto em $\mathbb{R}$ e $f(p) \in V$ temos que existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $h(f(p)) = 0$ e $h/(\mathbb{R} \backslash V) \equiv 1$. Assim $h \circ f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{J}_f$-contínua e $h \circ f(p) = 0$ e $h \circ f/(X \backslash f^{-1}(V)) \equiv 1$.

Seja $T : X \to \mathbb{R}$ dada por $T \equiv \frac{1}{2}(g + h \circ f)$. Assim T é $\mathcal{J}_f$-contínua e $T(p) = 0$ $T/(X \backslash (W \cup f^{-1}(V))) \equiv 1$ portanto $(X, \mathcal{J}_f)$ é Tychonoff.

(iii) Senão existe $p \in U$ tal que $\{p\}$ é $\mathcal{J}_f$-aberto em U. Como $\mathcal{J}$ não possui pontos isolados temos que existe V aberto de $\mathbb{R}$ tal que $\{p\} = U \cap f^{-1}(V)$. Assim $|U \cap f^{-1}(V)| = 1$ o que é contraditório.

■

Teorema 1.33 Seja X um conjunto, então toda topologia maximal em $\mathcal{R}(X)$ ou maximal em $\mathcal{CR}(X)$ é irresolúvel.

Demonstração

Sobre a existência de uma topologia maximal em $\mathcal{R}(X)$ (ou em $\mathcal{CR}(X)$). Cada cadeia de topologias crescentes $\mathcal{F}$ em $\mathcal{R}(X)$ $(\mathcal{CR}(X))$ sem pontos isolados é limitada pela topologia $\mathcal{J}'$, que é gerada pela base $\cup\mathcal{F}$. Assim pelo lema de Zorn existe uma topologia maximal em $\mathcal{R}(X)$ $(\mathcal{CR}(X))$.

Seja $\mathcal{J}$ uma topologia maximal em $\mathcal{R}(X)$ (ou em $\mathcal{CR}(X)$).

Vamos demonstrar que $(X, \mathcal{J})$ é irresolúvel.

Senão existe $D \subseteq X$ tal que D e $X \backslash D$ são densos em $(X, \mathcal{J})$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in D \\ 1 & \text{se } x \in X \backslash D \end{cases}$$

Pelo Lema 1.32 temos que $\mathcal{J}_f \in \mathcal{R}(X)$ $(\mathcal{J}_f \in \mathcal{CR}(X))$ e como f é $\mathcal{J}_f$-contínua temos que D e $X \backslash D$ são $\mathcal{J}_f$-fechados, assim pela Definição 1.31 temos que $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{J}_f$.
Suponhamos que

$$(\forall U \in \mathcal{J})\ (\forall V \text{aberto em } \mathbb{R})\ (\ U \cap f^{-1}(V) = \phi \ \text{ ou } \ |U \cap f^{-1}(V)| \geq \omega\ )$$

então pelo Lema 1.32 temos que $(X, \mathcal{J}_f)$ não possui pontos isolados, mas $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{J}_f \in \mathcal{R}(X)$ $(\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{J}_f \in \mathcal{CR}(X))$ o que é contraditório, portanto $(X, \mathcal{J})$ é irresolúvel.

Mostraremos que

$$(\forall U \in \mathcal{J})\ (\forall V \text{aberto em } \mathbb{R})\ (\ U \cap f^{-1}(V) = \phi \ \text{ ou } \ |U \cap f^{-1}(V)| \geq \omega\ )$$

Seja $U \in \mathcal{J}$, como $\mathcal{J}$ é Hausdorff sem pontos isolados, temos que $U = \phi$ ou $|U| \geq \omega$. Suponhamos s.p.g. que $|U| \geq \omega$. Seja V aberto em $\mathbb{R}$ então:
Se $0, 1 \notin V$ temos que $f^{-1}(V) = \phi$, portanto $U \cap f^{-1}(V) = \phi$.
Se $0, 1 \in V$ temos que $f^{-1}(V) = X$, portanto $|U \cap f^{-1}(V)| \geq \omega$.
Se $0 \in V$ e $1 \notin V$ temos que $f^{-1}(V) = D$. Suponhamos que $0 < |U \cap f^{-1}(V)| < \omega$. Como $|U| \geq \omega$ e $\mathcal{J}$ é Hausdorff temos que

$$(\ \exists\, u \in U \backslash f^{-1}(V)\ )\ (\ \exists W \in \mathcal{J})\ (\ u \in W \subseteq U \ \text{ e } \ W \cap f^{-1}(V) = \phi\ )$$

assim W é aberto não vazio em $(X, \mathcal{J})$ e $W \cap D = \phi$ o que é contraditório.
Para $0 \notin V$ e $1 \in V$ é análogo.

∎

Comentários

Em geral os espaços familiarmente conhecidos são resolúveis, daí a importância desta seção.
O Teorema 1.33 é devido a Hewitt [HE.43] e a demonstração apresentada está em [C.G.96].

Capítulo 2

Resolubilidade em Espaços Topológicos

2.1 Espaços Maximalmente Resolúveis

Nesta seção introduzimos o conceito de espaços maximalmente resolúveis. No início desta seção, definiremos um π-network, que será usado como ferramenta para mostrar que espaços de peso finito são maximalmente resolúveis, como também para mostrar lemas técnicos, os quais são usados para demostrar que espaços metrizáveis ou localmente compactos Hausdorff são maximalmente resolúveis.

Continuamos demonstrando que todo grupo totalmente limitado é maximalmente resolúvel. Tal demonstração está dividida em 3 teoremas. Terminamos a seção mostrando uma generalização do resultado anterior a qual também está dividida em 3 teoremas.

Definição 2.1 O caráter de dispersão de um espaço $(X, \mathcal{J})$ é

$$\Delta(X, \mathcal{J}) = min\{|U| \ : \ \phi \neq U \in \mathcal{J}\}.$$

Quando não existir perigo de confusão, denotaremos o caráter de dispersão de um espaço $(X,\mathcal{J})$ por $\Delta(X)$ ou por $\Delta(\mathcal{J})$.

Definição 2.2 Um espaço $(X,\mathcal{J})$ é dito maximalmente resolúvel se $(X,\mathcal{J})$ é $\Delta(X)$-resolúvel.

O termo maximalmente é merecido, pois um espaço topológico pode ser particionado em no máximo $\Delta(X)$ densos dois a dois disjuntos. Se X possui ponto isolados temos que $\Delta(X)=1$, assim todo espaço com ponto isolados é maximalmente resolúvel.

Definição 2.3 Uma família $\mathcal{N}$ de subconjuntos de um espaço $(X,\mathcal{J})$ é dita um π-network de $(X,\mathcal{J})$ se:

(i) todo elemento de $\mathcal{N}$ é não vazio.

(ii) $(\forall U \in \mathcal{J}\backslash\{\phi\})$ $(\exists N \in \mathcal{N})$ $(N \subseteq U)$

Definição 2.4 O peso de um espaço $(X,\mathcal{J})$ é

$$w(X,\mathcal{J}) = min\{|\mathcal{B}| \ : \ \mathcal{B} \text{ é base de } (X,\mathcal{J})\}.$$

Quando não existir perigo de confusão denotaremos o peso de $(X,\mathcal{J})$ por $w(X)$ ou por $w(\mathcal{J})$.

Teorema 2.5 Todo espaço de peso finito é maximalmente resolúvel.

Demonstração

Sejam $(X,\mathcal{J})$ um espaço de peso n , $\mathcal{B}=\{U_i \ : \ i=1,2,\cdots,n\}$ uma base finita de $(X,\mathcal{J})$ e $\mathcal{N}=\{U\in\mathcal{J}\ \backslash\{\phi\} \ : \ (\nexists V\in\mathcal{J}\backslash\{\phi\})\ (V\subsetneq U)\}$.

Vamos demonstrar que $\mathcal{N}$ é um π-network.

Seja $V\in\mathcal{J}\backslash\{\phi\}$, basta mostrar que existe $U\in\mathcal{N}$ tal que $U\subseteq V$. Se $V\in\mathcal{N}$ pronto, senão existe $i_1\in\{1,\cdots,n\}$ tal que $U_{i_1}\subsetneq V$. Se $U_{i_1}\in\mathcal{N}$ pronto, senão existe $i_2 \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $U_{i_2} \subsetneq U_{i_1}$. Repetindo o processo, ele tem que parar após no máximo n passos, pois $|\mathcal{B}| = n$ e $U_{k_n} \subsetneq U_{k_{n-1}} \subsetneq \cdots \subsetneq U_{k_1}$. Portanto $\mathcal{J}$ é π-network.

(*obs.*) Pela Definição de $\mathcal{N}$, temos que se $U, V \in \mathcal{N}$ então $U = V$ ou $U \cap V = \phi$

.

Para cada $U \in \mathcal{N}$, escolhemos $f_U : \Delta(X) \to U$ injetora, e para cada $\alpha < \Delta(X)$ definiremos $D_\alpha = \{f_U(\alpha) \ : \ U \in \mathcal{N}\}$.

Pela *obs.* e como cada f_U é injetora, temos que $\{D_\alpha \ : \ \alpha < \Delta(X)\}$ são dois a dois disjuntos. Como $\mathcal{N}$ é network, temos que os D_α são densos, assim $(X, \mathcal{J})$ é $\Delta(X)$-resolúvel, e portanto $(X, \mathcal{J})$ é maximalmente resolúvel.

■

Os próximos lemas são técnicos e destinados a colaborar na demonstração que todo espaço metrizável ou localmente compacto Hausdorff é maximalmente resolúvel. O primeiro deles é conhecido como 'disjoint refinement' e sua demonstração está no apêndice A.

Lema 2.6 Seja κ um cardinal infinito e seja $\mathcal{C} = \{C_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}$ tal que para cada $\alpha < \kappa$ temos que $|C_\alpha| = \kappa$. Então existe $\{B_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}$ tal que

(i) $(\forall\ \alpha < \kappa)\ (B_\alpha \subseteq C_\alpha$ e $|B_\alpha| = \kappa$).

(ii) $(\forall\ \alpha, \beta < \kappa)\ (\alpha \neq \beta \Rightarrow B_\alpha \cap B_\beta = \phi$).

Lema 2.7 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço Hausdorff sem pontos isolados e suponhamos que existe um π-network $\mathcal{N}$ em $(X, \mathcal{J})$ tal que:

(i) $|\mathcal{N}| \leq \Delta(X)$

(ii) $(\forall N \in \mathcal{N})$ ($|N| \geq \Delta(X)$)

Então $(X, \mathcal{J})$ é maximalmente resolúvel.

Demonstração

Como $(X, \mathcal{J})$ é Hausdorff sem pontos isolados temos que $\Delta(X) \geq \omega$. Seja $\kappa = |\mathcal{N}|$, assim aplicando o Lema 2.6 a $\mathcal{N} = \{N_\alpha : \alpha < \kappa\}$ temos que existe $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tal que

(i) $(\forall \alpha < \kappa)$ $(M_\alpha \subseteq N_\alpha$ e $|M_\alpha| = \Delta(X))$

(ii) $(\forall \alpha, \beta < \kappa)$ $(\alpha \neq \beta \Rightarrow M_\alpha \cap M_\beta = \phi)$

Como $\mathcal{N}$ é π-network, por (i) e (ii) temos que $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos que tambem é um π-network, assim em forma análoga à demonstração do Teorema 2.5 temos que $(X, \mathcal{J})$ é maximalmente resolúvel.

■

Definição 2.8 Um espaço $(X, \mathcal{J})$ é dito Car-Homogêneo se $\Delta(X) = |X|$.

O próximo corolário é importante, pois é a forma em que participam os lemas anteriores na demonstração do Teorema 2.11.

Corolario 2.9 Seja X um espaço Hausdorff Car-Homogêneo sem pontos isolados tal que $w(X) \leq |X|$ então X é maximalmente resolúvel. O recíproco?

Demonstração

Seja $\mathcal{N}$ uma base de $(X, \mathcal{J})$ de cardinalidade $w(X)$. Assim temos que $\mathcal{N}$ é um π-network em $(X, \mathcal{J})$ tal que

(i) $|\mathcal{N}| = w(X) \leq |X| = \Delta(X)$.

(ii) $(\forall U \in \mathcal{N})$ $(|U| \geq \Delta(X))$

logo pelo Lema 2.7 temos que $(X, \mathcal{J})$ é maximalmente resolúvel.

■

O próximo teorema é aplicado na demonstração de Teorema 2.11, e sua demonstração está no apêndice A.

Teorema 2.10 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço Hausdorff compacto então $w(X) \leq |X|$.

Teorema 2.11 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço Hausdorff sem pontos isolados. Se $(X, \mathcal{J})$ é localmente compacto ou se $(X, \mathcal{J})$ é metrizável então $(X, \mathcal{J})$ é maximalmente resolúvel.

Demonstração

caso 1: Se $(X, \mathcal{J})$ é localmente compacto.

Seja $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{J} \ : \ P(U) \ , \ Q(U) \text{ e } R(U)\}$ onde

$P(U)$ é " $(U, \mathcal{J})$ é Car-Homogêneo " , $Q(U)$ é " $|U| = |cl_X(U)|$ "

e $R(U)$ é " $cl_X(U)$ é compacto ".

(i) Vamos demonstrar que $\cup\mathcal{U}$ é denso em X.

Senão, existe um aberto $V \subseteq X \backslash cl_X(\cup\mathcal{U})$ não vazio tal que $|V| = min\{|U| \ : \ U \in \mathcal{J}\backslash\{\phi\} \text{ e } U \subseteq X\backslash cl_X(\cup\mathcal{U}) \ \}$, assim temos que $(V, \mathcal{J})$ é Car-Homogêneo. Como $(X, \mathcal{J})$ é Hausdorff e localmente compacto temos que X é regular, logo existe W aberto não vazio tal que $cl_X(W)$ é compacto e $W \subseteq cl_X(W) \subseteq V$. Como $(V, \mathcal{J})$ é Car-Homogêneo temos que $(W, \mathcal{J})$ é Car-Homogêneo, assim $W \in \mathcal{U}$ mas $W \cap \cup\mathcal{U} = \phi$ o que é contraditório.

(ii) Vamos demonstrar que todo elemento de $\mathcal{U}$ é maximalmente resolúvel.

Seja $U \in \mathcal{U}$, como $(cl_X(U), \mathcal{J})$ é Hausdorff e compacto, pelo Teorema 2.10 temos que $w(cl_X(U)) \leq |cl_X(U)|$ logo

$$w(U) \leq w(cl_X(U)) \leq |cl_X(U)| = |U|.$$

Assim $(U, \mathcal{J})$ satisfaz as hipótese do Corolário 2.9, logo $(U, \mathcal{J})$ é maximalmente resolúvel.

(iii) Vamos demonstrar que $(X, \mathcal{J})$ é maximalmente resolúvel.

Para cada aberto U em $(X, \mathcal{J})$ temos que $\Delta(X) \leq \Delta(U)$, assim todo $U \in \mathcal{U}$ é $\Delta(X)$-resolúvel. Agora pelo Teorema 1.19 temos que $(\cup\mathcal{U}, \mathcal{J})$ é $\Delta(X)$-resolúvel.

Como $\cup\mathcal{U}$ é denso em $(X, \mathcal{J})$, pela Proposição 1.18 temos que $(X, \mathcal{J})$ é $\Delta(X)$-resolúvel, logo $(X, \mathcal{J})$ é maximalmente resolúvel.

caso 2: Se $(X, \mathcal{J})$ é metrizável.

Seja $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{J} \ : \ (U, \mathcal{J})$ é Car-Homogêneo $\}$.

(i) Vamos demonstrar que $\cup\mathcal{U}$ é denso em X.

Senão, existe um aberto $V \subseteq X \backslash cl_X(\cup\mathcal{U})$ não vazio tal que $|V| = min\{|U| \ : \ U \in \mathcal{J}\backslash\{\phi\}$ e $U \subseteq X\backslash cl_X(\cup\mathcal{U})\ \}$, assim temos que V é Car-Homogêneo. Assim $V \in \mathcal{U}$ mas $V \cap \ \cup\mathcal{U} = \phi$ o que é contraditório.

(ii) Vamos demonstrar que todo elemento de $\mathcal{U}$ é maximalmente resolúvel.

Como $(X, \mathcal{J})$ é metrizável, temos que $w(X) \leq |X|$. Em particular para cada $U \in \mathcal{U}$, temos que $w(U) \leq |U|$. Assim $(U, \mathcal{J})$ satisfaz as hipóteses do Corolário 2.9 logo $(U, \mathcal{J})$ é maximalmente resolúvel.

Assim pelo caso 1 (iii) temos que $(X, \mathcal{J})$ é maximalmente resolúvel.

■

Definição 2.12 Um grupo topológico $((G, \cdot), \mathcal{T})$ é dito totalmente limitado se para todo aberto U não vazio existe $F \subseteq G$ finito tal que $U \cdot F = G$.

A demonstração que todo grupo topológico totalmente limitado é maximalmente resolúvel está dividida nos próximos 3 teoremas.

Teorema 2.13 Para cada grupo infinito $(G, \cdot)$, existe uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de G, dois a dois disjuntos tais que

$$|\mathcal{A}| = |G| \text{ e } (\forall A \in \mathcal{A})\ (\forall F \in [G]^{<\omega})\ (\ A \cdot F \neq G \neq (G\backslash A) \cdot F\ )$$

Demonstração

Seja $\kappa = |G|$ e seja $[G]^{<w} \setminus \{\phi\} = \{F_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}$. Vamos definir $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ onde $A_\alpha = \cup\{a_\alpha^\beta F_\beta : \beta < \kappa\}$ para algum $a_\alpha^\beta \in G$, onde a_α^β é definido por indução transfinita.

Sejam $a_0^0 = 1$ e $A_0^0 = a_0^0 F_0$. Seja $\theta < \kappa$ e suponhamos que para cada $\alpha \leq \beta < \theta$ existe $A_\alpha^\beta = \cup\{a_\alpha^{\beta'} F_{\beta'} : \beta' \leq \beta\}$ tal que se $A_\alpha^* = \cup\{A_\alpha^\beta \ : \alpha \leq \beta < \theta\}$ então $\{A_\alpha^* \ : \ \alpha < \theta\}$ são dois a dois disjuntos.

Vamos a definir a_θ^β e A_θ^θ.

Como $\theta < \kappa$, para cada $\alpha \leq \beta < \theta$ temos que $|A_\alpha^\beta| \leq |\beta| \cdot \omega \leq |\theta| < \kappa$, assim $|A_\alpha^*| \leq |\theta| < \kappa$. Seja $B = \cup\{A_\alpha^* : \alpha < \theta\}$, assim $|B| \leq |\theta| < \kappa$ e portanto para cada $\beta \leq \theta$ temos que $|B \cdot (F_\beta)^{-1}| \leq |\theta| < \kappa$. Para cada $\beta < \theta$ seja $a_\theta^\beta \notin B \cdot (F_\beta)^{-1}$, assim $a_\theta^\beta F_\beta \cap B = \phi$. Seja $A_\theta^\theta = \cup\{a_\theta^\beta F_\beta \ : \ \beta < \theta\}$, assim $A_\theta^\theta \cap B = \phi$.

Para cada $\gamma < \theta$, vamos a definir a_γ^θ e A_γ^θ.

Como $|A_\theta^\theta \cup B| \leq |\theta| < \kappa$ então existe $a_0^\theta \notin (B \cup A_\theta^\theta) \cdot (F_\theta)^{-1}$, assim $a_0^\theta F_\theta \cap (B \cup A_\theta^\theta) = \phi$. Seja $A_0^\theta = A_0^* \cup (a_0^\theta \cdot F_\theta)$, assim $A_0^\theta = \cup\{a_0^\beta F_\beta : \beta \leq \theta\}$, $|A_0^\theta| = |A_0^*| \leq |\theta| < \kappa$ e $A_0^\theta \cap A_\theta^\theta = \phi$.

Agora suponhamos que $\gamma > 0$ e que para cada $\alpha < \gamma$ existe A_α^θ tal que:

(i) $A_\alpha^\theta = \cup\{a_\alpha^\beta F_\beta \ : \ \beta \leq \theta\}$ e $|A_\alpha^\theta| \leq |\theta| < \kappa$.

(ii) $A_\alpha^\theta \cap A_\theta^\theta = \phi$ e $(\forall \alpha' < \alpha)$ ($A_{\alpha'}^\theta \cap A_\alpha^\theta = \phi$).

Assim $|B \cup A_\theta^\theta \cup (\cup\{A_\alpha^\theta : \alpha < \gamma\})| \leq \theta < \kappa$. Então existe $a_\gamma^\theta \notin (B \cup A_\theta^\theta \cup \ (\cup\{A_\alpha^\theta : \alpha < \gamma\}) \ ) \cdot (F_\theta)^{-1}$, assim $a_\gamma^\theta F_\theta \cap (B \cup A_\theta^\theta \cup \ (\cup\{A_\alpha^\theta \ : \ \alpha < \gamma\}) \ ) = \phi$.

Seja $A_\gamma^\theta = A_\gamma^* \cup a_\gamma^\theta F_\theta$, assim

(i) $A_\gamma^\theta = \cup\{a_\gamma^\beta F_\beta : \beta \leq \theta\}$ e $|A_\gamma^\theta| \leq \theta < \kappa$

(ii) $A_\gamma^\theta \cap A_\theta^\theta = \phi$ e $(\forall \alpha < \gamma)$ ($A_\gamma^\theta \cap A_\alpha^\theta = \phi$).

Agora seja $A_\alpha = \cup\{a_\alpha^\beta F_\beta : \beta < \kappa\}$ e seja $\mathcal{A} = \{A_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}$.

Pela construção dos A_α temos que $\mathcal{A}$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos de cardinalidade κ.

Vamos demonstrar que $(\forall A \in \mathcal{A})(\forall F \in [G]^{<\omega})$ ($A \cdot F \neq G \neq (G\backslash A) \cdot F$).

Seja F um subconjunto finito de G não vazio, logo existe $\theta < \kappa$ tal que $F_\theta = F^{-1}$.

Dado $\alpha < \kappa$ temos que $a_\alpha^\theta F_\theta \subseteq A_\alpha$ assim $a_\alpha^\theta F_\theta \cap G\backslash A_\alpha = \phi$ logo $a_\alpha^\theta \notin (G\backslash A_\alpha) \cdot F_\theta^{-1}$ e portanto $(G\backslash A_\alpha) \cdot F \neq G$.

Dado $\alpha < \kappa$ seja $\gamma < \theta$ tal que $\gamma \neq \alpha$. Como $a_\gamma^\theta F_\theta \subseteq A_\gamma$ temos que $a_\gamma^\theta F_\theta \cap A_\alpha = \phi$ logo $a_\gamma^\theta \notin A_\alpha \cdot F_\theta^{-1}$ e portanto $A_\alpha \cdot F \neq G$

■

Teorema 2.14 Seja $(G, \cdot)$ um grupo infinito, então existe uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de G, dois a dois disjuntos, de cardinalidade $|G|$ tal que para cada $\mathcal{T}$ topologia de grupo totalmente limitada em G e cada $A \in \mathcal{A}$ temos que A é denso em $(G, \mathcal{T})$.

Demonstração

Seja $\mathcal{A}$ a família dada pelo Teorema 2.13 e seja $\mathcal{T}$ uma topologia de grupo totalmente limitada em G.

Vamos demonstrar que $(\forall A \in \mathcal{A})$ (A é denso em $(G, \mathcal{T})$). Senão existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $int_\mathcal{T}(G\backslash A) \neq \phi$. Como $(G, \mathcal{T})$ é totalmente limitado temos que existe $F \subseteq G$ finito tal que $int_\mathcal{T}(G\backslash A) \cdot F = G$ logo $(G\backslash A) \cdot F = G$. Como $A \in \mathcal{A}$ e F é finito pelo Teorema 2.13 temos que $(G\backslash A) \cdot F \neq G$ o que é contraditório.

■

Teorema 2.15 Todo grupo topológico totalmente limitado é maximalmente resolúvel.

Demonstração

Seja $((G,\cdot),\mathcal{T})$ um grupo topológico totalmente limitado. Como para cada U aberto não vazio, existe F conjunto finito tal que $U \cdot F = G$ temos que $|U| = |G|$, logo $\Delta(G,\mathcal{T}) = |G|$.

Agora pelo Teorema 2.14 temos que $(G,\mathcal{T})$ é $|G|$-resolúvel, logo $(G,\mathcal{T})$ é maximalmente resolúvel.

■

Corolario 2.16 Todo grupo topológico compacto é maximalmente resolúvel.

Demonstração

Como todo grupo topológico compacto é totalmente limitado, pelo Teorema 2.15 temos que ele é maximalmente resolúvel.

■

A seguir mostramos uma generalização dos 3 teoremas anteriores.

Definição 2.17 Um grupo topológico $((G,\cdot),\mathcal{T})$ é dito κ-limitado se para todo aberto U não vazio existe $T \subseteq G$ de cardinalidade menor que κ tal que $U \cdot T = G$.

Quando $\kappa = \omega$, temos que $(G,\mathcal{T})$ é totalmente limitado.

Teorema 2.18 Seja κ um cardinal regular infinito e seja $(G,\cdot)$ um grupo de cardinalidade κ. Então existe $\mathcal{A}$ família de subconjuntos de G dois a dois disjuntos tal que

$$|\mathcal{A}| = \kappa \quad \text{e} \quad (\forall A \in \mathcal{A})\ (\forall T \in [G]^{<\kappa})\ (\ A \cdot T \neq (G \backslash A) \cdot T\ ).$$

Demonstração

Seja $G = \{g_\alpha : \alpha < \kappa\}$ e para cada $\beta < \kappa$ seja $T_\beta = \{g_\alpha : \alpha \leq \beta\}$.

Vamos definir $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ onde $A_\alpha = \cup\{a_\alpha^\beta T_\beta : \beta < \kappa\}$ para algum $a_\alpha^\beta \in G$, onde a_α^β é definido por indução transfinita.

Sejam $a_0^0 = 1$ e $A_0^0 = a_0^0 T_0$. Seja $\theta < \kappa$ e suponhamos que para cada $\alpha \leq \beta < \theta$ existe $A_\alpha^\beta = \cup\{a_\alpha^{\beta'} T_{\beta'} : \beta' \leq \beta\}$ tal que se $A_\alpha^* = \cup\{A_\alpha^\beta : \alpha \leq \beta < \theta\}$ então $\{A_\alpha^* : \alpha < \theta\}$ são dois a dois disjuntos.

Definiremos a_θ^β e A_θ^θ.

Como $\theta < \kappa$, para cada $\alpha \leq \beta < \theta$ temos que $|A_\alpha^\beta| = |\beta| \cdot sup\{|T_{\beta'}| \ : \ \beta' \leq \beta\} \ \leq |\beta| \ < \ \kappa$, assim $|A_\alpha^*| \leq |\beta| \cdot |\theta| < \kappa$. Seja $B = \cup\{A_\alpha^* : \alpha < \theta\}$, assim $|B| \leq |\theta| < \kappa$ e portanto para cada $\beta < \theta$ temos que $|B \cdot (T_\beta)^{-1}| \leq \theta < \kappa$. Para cada $\beta \leq \theta$ seja $a_\theta^\beta \notin B \cdot (T_\beta)^{-1})$, assim $a_\theta^\beta T_\beta \cap B = \phi$. Seja $A_\theta^\theta = \cup\{a_\theta^\beta T_\beta \ : \ \beta < \theta\}$, assim $A_\theta^\theta \cap B = \phi$.

Para cada $\gamma < \theta$, definiremos a_γ^θ e A_γ^θ.

Como $|A_\theta^\theta \cup B| \leq |\theta| < \kappa$ então existe $a_0^\theta \notin (B \cup A_\theta^\theta) \cdot (T_\theta)^{-1}$, assim $a_0^\theta T_\theta \cap (B \cup A_\theta^\theta) = \phi$. Seja $A_0^\theta = A_0^* \cup (a_0^\theta T_\theta)$, assim

$A_0^\theta = \cup\{a_0^\beta T_\beta : \beta \leq \theta\}$, $|A| \leq |\theta| < \kappa$ e $A_0^\theta \cap A_\theta^\theta = \phi$.

Agora suponhamos que $\gamma > 0$ e que para cada $\alpha < \gamma$ existe A_α^θ tal que:

(i) $A_\alpha^\theta = \cup\{a_\alpha^\beta T_\beta : \beta \leq \theta\}$ e $|A_\alpha^\theta| \leq |\theta| < \kappa$.

(ii) $A_\alpha^\theta \cap A_\theta^\theta = \phi$ e $(\forall \alpha' < \alpha)$ ($A_{\alpha'}^\theta \cap A_\alpha^\theta = \phi$).

Assim $|B \cup A_\theta^\theta \cup \ (\cup\{A_\alpha^\theta : \alpha < \gamma\})| \leq |\theta| < \kappa$. Então existe $a_\gamma^\theta \notin (B \cup A_\theta^\theta \cup \ (\cup\{A_\alpha^\theta : \alpha < \gamma\})\ ) \cdot (T_\theta)^{-1}$, assim $a_\gamma^\theta T_\theta \cap (B \cup A_\theta^\theta \cup \ (\cup\{A_\alpha^\theta \ : \ \alpha < \gamma\})\ ) = \phi$.

Seja $A_\gamma^\theta = A_\gamma^* \cup a_\gamma^\theta T_\theta$, assim

(i) $A_\gamma^\theta = \cup\{a_\gamma^\beta T_\beta : \beta \leq \theta\}$ e $|A_\gamma^\theta| \leq |\theta| < \kappa$.

(ii) $A_\gamma^\theta \cap A_\theta^\theta = \phi$ e $(\forall \alpha < \gamma)$ ($A_\gamma^\theta \cap A_\alpha^\theta = \phi$).

Agora seja $A_\alpha = \cup\{a_\alpha^\beta T_\beta : \beta < \kappa\}$ e seja $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Pela construção dos A_α temos que $\mathcal{A}$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos, de cardinalidade κ.

Vamos demonstrar que $(\forall A \in \mathcal{A})$ $(\forall T \in [G]^{<\kappa})$ ($A \cdot T \neq G \neq (G \backslash A) \cdot T$).

Seja $T \subseteq G$ de cardinalidade menor que κ, como κ é regular existe $\theta < \kappa$ tal que $T^{-1} \subseteq T_\theta$.

Dado $\alpha < \kappa$ temos que $a^\theta_\alpha T_\theta \subseteq A_\alpha$ assim $a^\theta_\alpha T_\theta \cap G \backslash A_\alpha = \phi$ logo $a^\theta_\alpha \notin (G\backslash A_\alpha)\cdot (T_\theta)^{-1}$ e portanto $(G\backslash A_\alpha)\cdot T \neq G$.

Dado $\alpha < \kappa$ seja $\gamma < \theta$ tal que $\gamma \neq \alpha$. Como $a^\theta_\gamma T_\theta \subseteq A_\gamma$, temos que $a^\theta_\gamma T_\theta \cap A_\alpha = \phi$. Logo $a^\theta_\gamma \notin A_\alpha \cdot (T_\theta)^{-1}$ e portanto $A_\alpha \cdot T \neq G$.

■

A demonstração da próxima proposição está no apêndice A.

Proposição 2.19 Seja $((G,\cdot),\mathcal{T})$ um grupo topológico κ-limitado e seja H um subgrupo de G, então $(H,\mathcal{T})$ é κ-limitado

Teorema 2.20 Sejam λ e κ cardinais tais que λ é regular e $\lambda \leq \kappa$. Seja $(G,\cdot)$ um grupo de cardinalidade κ, então existe uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de G dois a dois disjuntos, de cardinalidade κ tal que para cada $\mathcal{T}$ topologia de grupo λ-limitada em G e cada $A \in \mathcal{A}$ temos que A é denso em $(G,\mathcal{T})$.

Demonstração

Se κ é regular, seja $\mathcal{A}$ a família do Teorema 2.18. De forma análoga à demonstração do Teorema 2.14 para cada $\mathcal{T}$ topologia de grupo λ-limitada em G e cada $A \in \mathcal{A}$ temos que A é denso em $(G,\mathcal{T})$.

Suponhamos que κ é singular, assim $\lambda < \kappa$.

Seja $\nu = cof(\kappa)$, então existe $\{\kappa_\alpha : \alpha < \nu\}$ família de cardinais regulares tais que

$$sup\{\kappa_\alpha \ : \ \alpha < \nu\} = \kappa \quad \text{e} \quad (\forall \alpha < \nu)\ (\ \lambda < \kappa_\alpha \ \text{e} \ \sum_{\beta<\alpha} \kappa_\beta < \kappa_\alpha\ )$$

Seja $G = \{g_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}$ e para cada $\beta < \nu$ seja G_β o subgrupo gerado por $\{g_\alpha \ : \ \alpha < \kappa_\beta\}$. Assim $\{G_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}$ é família crescente de subgrupos de G tais que $|G_\alpha| = \kappa_\alpha$ e $G = \cup\{G_\alpha \ : \ \alpha < \nu\}$.

Para cada $\alpha < \overset{\nu}{\kappa}$ temos que κ_α é regular, $|G_\alpha| = \kappa_\alpha$ e $\lambda < \theta_\alpha$ assim existe $\mathcal{A}_\alpha$ família de subconjuntos de G_α dois a dois disjuntos, de cardinalidade κ_α tal que para cada $\mathcal{T}$ topologia de grupo λ-limitada em G_α e cada $A \in \mathcal{A}$ temos que A é denso em $(G_\alpha, \mathcal{T})$.

Para cada $\alpha < \nu$ seja $\mathcal{B}_\alpha = \{A \in \mathcal{A}_\alpha \; : \; A \cap (\bigcup\limits_{\beta<\alpha} G_\beta) = \phi\}$.

Como $\mathcal{A}_\alpha$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos com $|\mathcal{A}_\alpha| = \kappa_\alpha$ e $|\bigcup\limits_{\beta<\alpha} G_\beta| \leq \sum\limits_{\beta<\alpha} \kappa_\beta < \kappa_\alpha$ temos que $|\mathcal{B}_\alpha| = \kappa_\alpha$.

Como $\mathcal{A}_\alpha$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos temos que $\mathcal{B}_\alpha$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Pela definição de $\mathcal{B}_\alpha$ temos que $\cup\mathcal{B}_\alpha \subseteq G_\alpha \backslash (\bigcup\limits_{\beta<\alpha} G_\beta)$, assim $\{\cup\mathcal{B}_\alpha \; : \; \alpha < \nu\}$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Para cada $\alpha < \nu$ seja $\mathcal{B}^0_\alpha = \mathcal{B}_\alpha$. Como $|\mathcal{B}^0_\alpha| = |\mathcal{B}_\alpha| = \kappa_\alpha$ temos que existe $P_{0,\alpha} : \mathcal{B}^0_0 \to \mathcal{B}^0_\alpha$ injetora.

Agora seja $\beta < \nu$ e suponhamos que para cada $\gamma, \theta < \nu$ tais que $\theta < \beta$ e $\theta < \gamma$ existem $\mathcal{B}^\theta_\gamma$ e existem $P_{\theta,\gamma} : \mathcal{B}^\theta_\theta \to \mathcal{B}^\theta_\gamma$ injetoras tais que:

$$\mathcal{B}^\theta_\gamma = \mathcal{B}_\gamma \backslash \cup \{im(P_{\theta',\gamma}) \; : \; \theta' < \theta\} \quad \text{e} \quad |\mathcal{B}^\theta_\gamma| = \kappa_\gamma.$$

Para cada $\alpha \geq \beta$ tal que $\alpha < \nu$ seja $\mathcal{B}^\beta_\alpha = \mathcal{B}_\alpha \backslash \cup \{im(P_{\theta,\alpha}) \; : \; \theta < \beta\}$

Como $|im(P_{\theta,\alpha})| = |\mathcal{B}^\theta_\theta| = \kappa_\theta$, temos que $|\cup \{im(P_{\theta,\alpha}) \; : \; \theta < \beta\}| \leq \sum\limits_{\theta<\beta} \kappa_\theta < \kappa_\beta$ assim $|\mathcal{B}^\beta_\alpha| = \kappa_\alpha$. Logo existem $P_{\beta,\alpha} : \mathcal{B}^\beta_\beta \to \mathcal{B}^\beta_\alpha$ injetora

$$\text{Seja} \quad \mathcal{A} = \{T_\beta(A) \; : \; \beta < \nu \quad \text{e} \quad A \in \mathcal{B}^\beta_\beta\}$$

$$\text{onde} \quad T_\beta(A) = \cup\{P_{\beta,\alpha}(A) \; : \; \beta \leq \alpha < \nu\}$$

Mostraremos que $\mathcal{A}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Sejam $T_{\beta_1}(A_1), T_{\beta_2}(A_2) \in \mathcal{A}$ tais que $T_{\beta_1}(A_1) \cap T_{\beta_2}(A_2) \neq \phi$. Pela definição de $T_\beta(A)$ temos que existem $\alpha_1 \geq \beta_1$ e $\alpha_2 \geq \beta_2$ tais que $P_{\beta_1,\alpha_1}(A_1) \cap P_{\beta_2,\alpha_2}(A_2) \neq \phi$.

caso 1) Se $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Como $P_{\beta_i,\alpha_i}(A_i) \in \mathcal{B}_{\alpha_i}^{\beta_i} \subseteq \mathcal{B}_{\alpha_i}$ temos que $P_{\beta_i,\alpha_i}(A_i) \subseteq \cup\mathcal{B}_{\alpha_i}$ e como $\{\cup\mathcal{B}_\alpha \ : \ \alpha < \nu\}$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos temos que $P_{\beta_1,\alpha_1}(A_1) \cap P_{\beta_2,\alpha_2}(A_2) = \phi$ o que é contraditório.

caso 2) Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha'$.

Como $P_{\beta_i,\alpha_i}(A_i) \in \mathcal{B}_{\alpha_i}^{\beta_i} \subseteq \mathcal{B}_{\alpha_i}$ e $\mathcal{B}_{\alpha_i}$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos temos que $P_{\beta_1,\alpha'}(A_1) = P_{\beta_2,\alpha'}(A_2)$. Como $\mathcal{B}_\alpha^\beta = \mathcal{B}_\alpha \backslash \cup \{im(P_{\theta,\alpha}) \ : \ \theta < \beta\}$ temos que $\beta_1 = \beta_2 = \beta'$ e como $P_{\beta',\alpha'}$ é injetora temos que $A_1 = A_2$.

Como $\mathcal{A}$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos temos que

$$|\mathcal{A}| = \sum_{\beta<\nu} |\{T_\beta(A) \ : \ A \in \mathcal{B}_\beta^\beta\}| = \sum_{\beta<\nu} \kappa_\beta = \kappa.$$

Seja $\mathcal{T}$ topologia de grupo λ-limitada em G e seja $B \in \mathcal{A}$. Vamos demonstrar que B é denso em $(G, \mathcal{T})$. Seja $V \in \mathcal{T}\backslash\{\phi\}$, como $(G, \mathcal{T})$ é λ-limitado existe $T \in [G]^{<\lambda}$ tal que $V \cdot T = G$, assim $|V| = \kappa$. Como $|G_\alpha| = \kappa_\alpha < \kappa$, $|V| = \kappa$ e $G = \bigcup_{\alpha<\nu} G_\alpha$ então existe $\{\alpha_\gamma \ : \ \gamma < \nu\} \subseteq \nu$ crescente tal que $sup\{\alpha_\gamma \ : \ \gamma < \nu\} = \nu$ e $(\forall \gamma < \nu)\ (G_{\alpha_\gamma} \cap V \neq \phi)$. Como $B \in \mathcal{A}$, então existe $\beta < \nu$ e existe $A \in \mathcal{B}_\beta^\beta$ tal que $B = T_\beta(A) = \cup\{P_{\beta\alpha}(A) \ : \ \beta \leq \alpha < \nu\}$. Como $sup\{\alpha_\gamma \ : \ \gamma < \nu\} = \nu$ temos que existe $\gamma < \nu$ tal que $\beta < \alpha_\gamma$, assim $T_\beta(A) \cap G_{\alpha_\gamma} \supseteq P_{\beta\alpha_\gamma}(A)$.

Agora pela Proposição 2.19 temos que $(G_{\alpha_\gamma}, \mathcal{T})$ é λ-limitada, e como $\lambda < \kappa_{\alpha_\gamma}$, κ_{α_γ} é regular e $|G_{\alpha_\gamma}| = \kappa_{\alpha_\gamma}$ temos que todo elemento de $\mathcal{A}_{\alpha_\gamma}$ é denso em $(G_{\alpha_\gamma}, \mathcal{T})$, em particular $P_{\beta,\alpha_\gamma}(A) \in \mathcal{B}_{\alpha_\gamma} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_\gamma}$ é denso em $(G_{\alpha_\gamma}, \mathcal{T})$.

Como $B \cap G_{\alpha_\gamma} = T_\beta(A) \cap G_{\alpha_\gamma} \supseteq P_{\beta,\alpha_\gamma}(A)$ temos que $B \cap G_{\alpha_\gamma}$ é denso em $(G_{\alpha_\gamma}, \mathcal{T})$. Como $V \cap G_{\alpha_\gamma} \neq \phi$ temos que $(B \cap G_{\alpha_\gamma}) \cap (V \cap G_{\alpha_\gamma}) \neq \phi$, logo $B \cap V \neq \phi$. Isto prova que B é denso em $(G, \mathcal{T})$ e assim temos o teorema.

■

Teorema 2.21 Sejam λ e κ tais que λ é regular e $w \leq \lambda \leq \kappa$ então todo grupo topológico de cardinalidade κ, λ-limitado é maximalmente resolúvel.

Demonstração

Seja $(G, \mathcal{T})$ um grupo topológico λ-limitado tal que $|G| = \kappa$. Seja $U \in \mathcal{T}\backslash\{\phi\}$ logo existe $T \in [G]^{<\lambda}$ tal que $U \cdot T = G$, assim $|U| = |G| = \kappa$ portanto $\Delta(G) = \kappa$. Pelo Teorema 2.20 temos que $(G, \mathcal{T})$ é κ-resolúvel, assim $(G, \mathcal{T})$ é maximalmente resolúvel.

■

Comentários

O caráter de dispersão ($\Delta(X)$) foi introduzido ao estudo de espaços resolúveis por Hewitt [HE.43] mas foi Ceder[1] em 1964 quem definiu espaços maximalmente resolúveis. Hewitt em [HE.43] mostrou que todo espaço sem pontos isolados que seja metrizável ou localmente compacto Hausdorff é resolúvel. A demonstração apresentadas no Teorema 2.11 está em [C.G.96] e do lema 2.6 está no livro de Comfort e Negrepontis [C.N.74].

Em grupos topológicos a propriedade de ser totalmente limitado é uma propriedade que generaliza a pseudocompacidade[2]. Em 1994 Comfort, Gladdines e Van Mill [3] mostraram que todo grupo topológico abeliano Hausdoff totalmente limitado é ω-resolúvel. Também no mesmo ano, Protasov[4] prova a existência de um subespaço discreto enumerável não fechado em cada grupo topológico Hausdoff totalmente limitado e com isto prova a ω-resolubilidade de tal grupo topológico.

[1] J.G. Ceder, On maximally resolvable spaces, Fund. Math. 55 (1964) 87-93.

[2] W.W. Comfort and K.A. Ross, Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups, Pacific J. Math. 16 (1966) 483-496.

[3] W.W. Comfort, H.Gladdines and J. Van Mill, Proper pseudocompacto subgroups of pseudocompact abelian groups, Ann. New York Acad. Sci. 728 (1994) 237-247.

[4] I.V. Protasov, Discrete subsets of topological groups, Mat. Zametki 55 (1994) 150-151 (in russian).

No ano seguinte Protasov novamente confirma a resolubilidade de cada grupo topológico totalmente limitado mas por outro método original sem analogias com as demonstrações anteriores. Usando este método, Malykhin mostra que todo grupo topológico totalmente limitado é maximalmente resolúvel. Assim o metódo é devido a Protasov e os resultados são devidos a Malykhin [M.P.96].

A noção de λ-limitado é devida a Guran[5], que no ano 1981 prova que cada grupo topológico Lindelof é ω_1-limitado. Guran caracteriza a classe dos grupos topológicos ω_1-limitados como a classe de todos os subgrupos topológicos de produtos de grupos topológicos com base enumerável. Em 1979 Belnov[6] anuncia que um grupo topológico gerado algebricamente por um subespaço Lindelof é isomorfo a um subgrupo topológico de produtos de grupos topológicos com base enumerável, assim ele é ω_1-limitado.

Assim temos como corolário do teorema 2.21 que todo grupo topológico não enumeravel é maximalmente resolúvel se

(i) é ω_1-limitado.

(ii) é um subgrupo topológico de um produto de grupos topológicos com base enumerável.

(iii) é gerado algebricamente por um subespaço Lindelof.

as demonstrações dos teoremas 2.15 e 2.21 estão em [M.P.96].

[5] I.I. Guran, On topological groups close to finally compact, Dokl. Akad Nauk SSSR 256 (1981) 1305-1307 (in russian); english translation: Soviet Math. Dokl.

[6] V.K. Belnov, On dimension of free topological groups, In IV tiraspol symposium on general topology (Stiinza, Kishinev, 1979).

2.2 Espaços Fortemente Irresolúveis

O estudo da resolubilidade está intimamente ligada ao caráter de dispersão, é por isso que nesta seção queremos mostrar que para cada cardinal infinito κ existem espaços resolúveis e espaços irresolúveis, com caráter de dispersão igual a κ.

Iniciamos com o enunciado do teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery para aplicá-lo na demonstração da existência de um grupo topológico maximalmente resolúvel com caráter de dispersão igual a κ.
Continuamos introduzindo o conceito de espaços fortemente irresolúveis os quais também são irresolúveis. Também definimos P_κ-espaços e mostramos alguns lemas técnicos para logo demonstrar a existência de espaços Tychonoff fortemente irresolúveis com carater de dispersão igual a κ, para todo κ cardinal regular. Para tratar o caso em que κ é um cardinal singular introduzimos famílias independentes, e com elas construimos um espaço topológico zero dimensional. Impondo uma condição ao cardinal κ obtemos a existência de um espaço Tychonoff fortemente irresolúvel com caráter de dispersão igual a κ.

Definição 2.22 A densidade de um espaço $(X, \mathcal{J})$ é

$$d(X) = min\{|D| \ : \ D \text{ é denso em } (X, \mathcal{J})\}.$$

A demonstração do próximo Teorema está no apêndice A.

Teorema 2.23 Hewitt-Marczewski-Pondiczery
Seja κ um cardinal infinito e para cada $\alpha < 2^\kappa$ seja X_α um espaço tal que $d(X_\alpha) \leq \kappa$. Então $d(\prod_{\alpha < 2^\kappa} X_\alpha) \leq \kappa$.

A próxima proposição mostra que para cada cardinal infinito κ existe um espaço Car-Homogêneo, maximalmente resolúvel de cardinalidade κ.

Proposição 2.24 Seja κ um cardinal infinito, então existe um grupo topológico $((G,\cdot),\mathcal{T})$ e existe um subgrupo G_0 denso em $(G,\mathcal{T})$ tal que $|G| = |G/G_0| = \kappa$ (assim $(G,\mathcal{T})$ é Car-Homogêneo e maximalmente resolúvel).

Demonstração

Seja $(\{0,1\}^{2^\kappa},\mathcal{J})$ com a topologia produto e a soma usual, onde $\{0,1\}$ é considerado com a topologia discreta. Pelo Teorema 2.23 existe D subconjunto denso de $(\{0,1\}^{2^\kappa},\mathcal{J})$ tal que $|D| = \kappa$. Agora definimos G_0 como o subgrupo de $\{0,1\}^{2^\kappa}$ gerado por D então $|G_0| = |\kappa^{<w}| = \kappa$, assim G_0 é subgrupo próprio denso em $(\{0,1\}^{2^\kappa},\mathcal{J})$.

Agora por recursão transfinita para cada $\alpha < \kappa$, escolha $x_\alpha \in \{0,1\}^{2^\kappa} \setminus \cup\{G_\beta : \beta < \alpha\}$ e definamos G_α como o subgrupo de $\{0,1\}^{2^\kappa}$ gerado por $\{x_\alpha\} \cup (\cup\{G_\beta : \beta < \alpha\})$. Assim $|G_\alpha| = |[\bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta]^{<w}| = |[\kappa\cdot\alpha]^{<w}| = \kappa$, portanto G_α é subgrupo próprio denso em $(\{0,1\}^{2^\kappa},\mathcal{J})$.

Seja $G = \bigcup_{\alpha<\kappa} G_\alpha$, como $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ são crescentes temos que G é subgrupo de $\{0,1\}^{2^\kappa}$, e $|G| = \kappa \cdot \sup_{\alpha<\kappa} |G_\alpha| = \kappa$.

Vamos demonstrar que $|G/G_0| = \kappa$. Para cada $\alpha < \beta < \kappa$, temos que $x_\beta \notin G_\alpha$ e $x_\alpha + G_0 \subseteq G_\alpha$ assim $-x_\alpha + x_\beta \notin G_0$ logo $[x_\alpha] \neq [x_\beta]$ em G/G_0 e portanto $|G| = |G/G_0| = \kappa$.

Como G_0 é denso em G, então $(\forall\, \alpha < \kappa)$ ($x_\alpha + G_0$) é denso em G e $(\forall \alpha, \beta < \kappa)$ ($\alpha \neq \beta \Rightarrow (x_\alpha + G_0) \cap (x_\beta + G_0) = \phi$), portanto G é κ-resolúvel. Assim $\kappa \leq \Delta(G)$ mas $|G| = \kappa$ logo $\Delta(G) = \kappa$ e portanto G é Car-Homogêneo e maximalmente resolúvel.

■

Definição 2.25 Um espaço $(X,\mathcal{J})$ é dito κ-fortemente irresolúvel se cada subespaço não vazio de $(X,\mathcal{J})$ é κ-irresolúvel.

Quando $\kappa = 2$, $(X, \mathcal{J})$ é dito fortemente irresolúvel.

Definição 2.26 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço, então a envoltória κ-resolúvel de $(X, \mathcal{J})$ é o subespaço $Z = \cup\{Y \subseteq X \ : \ Y \text{ é } \kappa\text{-resolúvel}\}$.

Proposição 2.27 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço e seja Z a envoltória κ-resolúvel de $(X, \mathcal{J})$. então

(i) $(Z, \mathcal{J})$ é subespaço fechado κ-resolúvel de $(X, \mathcal{J})$

(ii) $(X \backslash Z, \mathcal{J})$ é subespaço aberto κ-fortemente irresolúvel de $(X, \mathcal{J})$.

Demonstração

(i) Pela Definição 2.26 e pelo Teorema 1.19 temos que Z é κ-resolúvel e pela Proposição 1.18 temos que Z é fechado.

(ii) Senão existe Y subespaço não vazio de $X \backslash Z$ tal que Y é κ-resolúvel, logo $Y \subseteq Z$ e portanto $Y = \phi$, o que é contraditório.

■

Definição 2.28 Seja κ um cardinal então $(X, \mathcal{J})$ é dito um P_κ-espaço se

$$(\forall \mathcal{A} \in [\mathcal{J}]^{<\kappa}) \ (\cap \mathcal{A} \in \mathcal{J} \ ).$$

Lema 2.29 Seja $(X, \mathcal{J})$ um P_κ-espaço T_1 e seja $(X, \mathcal{J}')$ sem pontos isolados tal que $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$ então $\Delta(\mathcal{J}') \geq \kappa$.

Demonstração

Senão existe $U \in \mathcal{J}'$ tal que $1 < |U| < \kappa$. Seja $a \in V$, como $(X, \mathcal{J})$ é P_κ-espaço temos que $\cap\{X \backslash \{b\} \ : \ b \in U \backslash \{a\}\} \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$ assim $\{a\} = U \cap \bigcap\{X \backslash \{b\} \ : \ b \in U \backslash \{a\}\} \in \mathcal{J}'$ o que é contraditório

■

Definição 2.30 Dizemos que um espaço topológico T_1 é zero dimensional se possui uma base de abertos-fechados.

A demonstração do próximo lema está no apêndice A.

Lema 2.31 Para cada κ cardinal regular infinito temos que existe um grupo topológico zero dimensional de cardinalidade κ que é P_κ-espaço sem pontos isolados.

Teorema 2.32 Para cada κ cardinal regular infinito existe um espaço $(X, \mathcal{J})$ Tychonoff, Car-Homogêneo, fortemente irresolúvel, de cardinalidade κ.

Demonstração

Dado $\kappa \geq \omega$ regular pelo lema 2.31 existe $(G, \mathcal{J})$ grupo topológico zero dimensional de cardinalidade κ que é P_κ-espaço sem pontos isolados.
Como $(G, \mathcal{J})$ é zero dimensional temos que $(G, \mathcal{J})$ é Tychonoff então pelo teorema 1.33 existe $\mathcal{J}'$ irresolúvel e maximal com respeito ás topologias Tychonoff sem pontos isolados e $\mathcal{J}' \supseteq \mathcal{J}$ (*obs.* $(G, \mathcal{J}')$ não é necessariamente um grupo topológico).
Como $(G, \mathcal{J}')$ não tem pontos isolados, $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$ e como $(G, \mathcal{J})$ é P_κ-espaço T_1, pelo lema 2.29 temos que $\Delta(\mathcal{J}') \geq \kappa$. Assim $\Delta(\mathcal{J}') = \kappa$ (pois $|G| = \kappa$), assim $(G, \mathcal{J}')$ é Car-Homogêneo.

Vamos demonstrar que $(G, \mathcal{J}')$ é um espaço fortemente irresolúvel.
Senão existe $X \subseteq G$ tal que $(X, \mathcal{J}'_X)$ é resolúvel. (i.e. $(X, \mathcal{J}'_X)$ não possui pontos isolados) e pela proposição 1.18 podemos assumir que X é $\mathcal{J}'$-fechado. Suponhamos que $\mathcal{J}'_X$ é com maximal respeito as topologias Tychonoff sem pontos isolados, em X. Então pelo teorema 1.33 temos que $(X, \mathcal{J}'_X)$ é irresolúvel, o que é contraditório.

Assim basta demonstrar que $\mathcal{J}'_X$ é maximal com respeito às topologias Tychonoff sem pontos isolados em X.

Senão existe $\mathcal{O} \supsetneq \mathcal{J}'_X$ topologia Tychonoff sem pontos isolados em X (*Obs.* $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$), seja $\mathcal{B}'' = \mathcal{O} \cup \mathcal{J}'$ (pensando que $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{P}(G)$ e $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(G)$) e seja $\mathcal{J}''$ a topologia gerada por $\mathcal{B}''$ em G, assim $\mathcal{J}'' \supsetneq \mathcal{J}'$.

Suponhamos que existe $x \in G$ tal que $\{x\} \in \mathcal{J}''$ então $\{x\} \in \mathcal{J}'$ ou $\{x\} \in \mathcal{O}$ o que é contraditorio. Assim $(G, \mathcal{J}'')$ não possui pontos isolados.

Agora mostraremos que $(G, \mathcal{J}'')$ é Tychonoff. Seja $x \in G$ e seja $U \in \mathcal{B}''$ tal que $x \in U$.

caso 1 Se $U \in \mathcal{J}'$. Como $(G, \mathcal{J}')$ é Tychonoff temos que $\exists\ f : G \to [0,1]$ $\mathcal{J}'$-contínua tal que $f(x) = 0$ e $f/(G \backslash U) = 1$. Como $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J}''$ temos que F é $\mathcal{J}''$-contínua assim $(G, \mathcal{J}'')$ é Tychonoff.

caso 2 Se $U \in \mathcal{O}$. Então $U \subseteq X$ e como $(X, \mathcal{O})$ é Tychonoff temos que existe $h : X \to [0,1]$ $\mathcal{O}$-contínua tal que $h(x) = 0$ e $h/(X \backslash U) = 1$. Agora definamos $f : G \to [0,1]$ dada por

$$f(p) = \begin{cases} h(p) & \text{se } p \in X \\ 1 & \text{se } p \in G \backslash X \end{cases}$$

Seja W aberto de $\mathbb{R}$. assim temos que

$$f^{-1}(W) = \begin{cases} G \backslash X \cup h^{-1}(W) & \text{se } 1 \in W \\ h^{-1}(W) & \text{se } 1 \notin W \end{cases}$$

Como X é $\mathcal{J}'$-fechado e pela definição de $\mathcal{J}''$ temos que f é $\mathcal{J}''$-contínua e portanto $(G, \mathcal{J}'')$ é Tychonoff.

Então $(G, \mathcal{J}'')$ é Tychonoff sem pontos isolados e $\mathcal{J}'' \supsetneq \mathcal{J}'$ mas $\mathcal{J}'$ é maximal, o que é contraditório. Isto mostra que $\mathcal{J}'_X$ é maximal respeito às topologias Tychonoff sem pontos isolados em X.

■

Definição 2.33 Uma (λ,κ)-família independente num conjunto S é uma família infinita $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ tal que para cada $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in [\mathcal{F}]^{<\lambda}$ se $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \phi$ temos que $|\cap \mathcal{A} \setminus \cup \mathcal{B}| \geq \kappa$ onde $\cap\phi = \cup\mathcal{F}$
Abreviamos (λ,κ)-família independente por $(\lambda,\kappa) - i.f.$ e no caso de ser uma (λ,κ)-família independente maximal abreviamos por $(\lambda,\kappa) - m.i.f.$.
Seja $\mathcal{F}$ uma $(\lambda,\kappa) - i.f.$ em S. Então $\mathcal{F}$ é dita μ-separada se para cada $\{a,b\} \in [S]^2$ temos que $|\{F \in \mathcal{F} : |\{a,b\} \cap F| = 1\}| \geq \mu$.

As demonstrações das próximas três proposições estão no apêndice A.

Proposição 2.34 Seja κ um cardinal infinito, então existe um conjunto S e existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ tais que
(i) $|S| = \kappa$ e $|\mathcal{F}| = 2^\kappa$.
(ii) $\mathcal{F}$ é uma $(\omega,\kappa) - i.f.$ em S 2^κ-separada.

Proposição 2.35 Seja $\mathcal{F}$ uma $(\omega,\kappa) - i.f.$ em S então existe $\mathcal{F}'$ $(\omega,\kappa) - m.i.f.$ em S tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

Proposição 2.36 Seja $\mathcal{F}$ uma $(\omega,\omega) - i.f.$ em S ω-separada e seja $\mathcal{C} = \{\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B} : \mathcal{A},\mathcal{B} \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ e $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \phi\}$. Então $\mathcal{C}$ gera uma topologia $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}$ sobre S tal que $(S, \mathcal{J}_{\mathcal{F}})$ é zero dimensional.

Definição 2.37 O logaritmo de um cardinal κ é

$$log(\kappa) = min\{\lambda : \kappa \leq 2^\lambda\}.$$

Teorema 2.38 Para cada cardinal κ seja

$$i_\kappa = min\{|\mathcal{F}| \ : \ \mathcal{F} \text{ é } (\omega,\kappa) - m.i.f. \text{ em } \kappa\}.$$

Suponhamos que existe um cardinal infinito κ tal que $\kappa = log(i_\kappa)$ então:

(i) Cada $(\omega,\kappa) - m.i.f.$ em κ é $(\omega,\omega) - m.i.f.$ em κ.

(ii) Existe um espaço $(X,\mathcal{J})$ Tychonoff, Car-Homogêneo, fortemente irresolúvel, de cardinalidade κ.

Demonstração

(i) Senão existe $\mathcal{F}$ uma $(\omega,\kappa) - m.i.f.$ em κ tal que $\mathcal{F}$ é $(\omega,\omega) - i.f.$ em κ mas não é maximal. Logo existe $C \in \mathcal{P}(\kappa)\backslash\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{C} = \mathcal{F} \cup \{C\}$ é $(\omega,\omega) - i.f.$ em κ.

Como $\mathcal{F}$ é $(\omega,\kappa) - m.i.f.$ em κ e $\mathcal{C} \supsetneq \mathcal{F}$ temos que existem $\mathcal{A},\mathcal{B} \in [\mathcal{C}]^{<\omega}$ tais que $|\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B}| < \kappa$. Como $\kappa = log(i_\kappa)$ temos que $2^{|\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B}|} < i_\kappa$. Como $\mathcal{F}$ é $(\omega,\kappa) - m.i.f.$ em κ, pela definição de i_κ temos que $|\mathcal{P}(\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B})| < i_\kappa \leq |\mathcal{F}|$. Como $\mathcal{A},\mathcal{B}$ são finitos temos que $|\mathcal{P}(\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B})| < |\mathcal{F}\backslash(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})|$ assim temos que existem $A_0, B_0 \in \mathcal{F}\backslash(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})$ distintos tais que $A_0 \cap (\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B}) = B_0 \cap (\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B})$. Sejam $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{A_0\}$ e $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\mathcal{B}_0\}$, assim $\mathcal{A}',\mathcal{B}' \in [\mathcal{C}]^{<\omega}$ e $\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}' = \phi$. Como $\cap\mathcal{A}' \setminus \cup\mathcal{B}' = (A_0 \cap (\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B}))\setminus B_0 = (B_0 \cap (\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B}))\setminus B_0 = \phi$ temos que $\mathcal{C}$ não é $(\omega,\omega) - i.f.$, o que é contraditório.

(ii) Pela proposição 2.34 temos que existe $\mathcal{F}_1$ uma $(\omega,\kappa) - i.f.$ em κ, ω-separada e pela proposição 2.35 temos que existe $\mathcal{F}$ uma $(\omega,\kappa) - m.i.f.$ em κ tal que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$. Assim $\mathcal{F}$ é $(\omega,\omega) - m.i.f.$ pela parte (i). Como $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ temos que $\mathcal{F}$ é ω-separada, assim pela proposição 2.36 temos que $(X,\mathcal{J}_\mathcal{F})$ é zero-dimensional, onde $|X| = \kappa$.

Vamos demonstrar que $(X,\mathcal{J}_\mathcal{F})$ é irresolúvel.

Senão existem $D_1, D_2 \subseteq X$ densos disjuntos em $(X, \mathcal{J}_{\mathcal{F}})$ tais que $D_1 \cup D_2 = X$. Como D_1 não é aberto temos que $D_1 \notin \mathcal{F}$ e como $\mathcal{F}$ é $(\omega,\omega) - m.i.f.$ temos que $\mathcal{C} = \mathcal{F} \cup \{D_1\}$ não é $(\omega,\omega) - i.f.$, assim existem $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ tal que

$$|D_1 \cap (\ \cap\mathcal{A} \setminus \ \cup\mathcal{B}\ )| < \omega \quad \text{ou} \quad |D_2 \cap (\ \cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B}\ )| < \omega$$

mas $(\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B})$ é aberto infinito, $(X, \mathcal{J}_{\mathcal{F}})$ é Hausdorff e D_1, D_2 são densos, o que é contraditório.

Como $(X, \mathcal{J}_{\mathcal{F}})$ é irresolúvel, pela proposição 2.27 temos que existe U aberto não vazio tal que $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}})$ é fortemente irresolúvel.
Como $\mathcal{F}$ é $(\omega,\kappa) - m.i.f.$ temos que $\Delta(U) = \kappa$ e como $|X| = \kappa$ temos que $|U| = \kappa = \Delta(U)$, assim $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}})$ é Car-Homogêneo, de cardinalidade κ.

■

Comentários

Se κ é um cardinal singular temos que um P_κ-espaço T_1, possui pontos isolados ou tem caráter de dispersão maior ou igual a κ^+. Por este fato o P_κ-espaço não pode ser usado diretamente para conseguir um espaço fortemente irresolúvel com caráter de dispersão igual a κ (ver Teorema 2.32). Não se conhece a situação em geral para um cardinal singular mas o teorema 2.38 mostra a existência de um espaço fortemente irresolúvel com carater de dispersão igual a κ no caso em que $\kappa = log(\kappa^+)$ (i.e. para todo κ se é assumida a Hipótese Generalizada do Contínuo). Observe que pelas Proposições 2.34 e 2.35 i_κ está bem definida e assim $log(i_\kappa) \leq \kappa$. Agora se $\mathcal{F}$ é uma $(\omega,\kappa) - m.i.f.$ então $|\mathcal{F}| > \kappa$ logo $i_\kappa \geq \kappa^+$ e portanto $log(i_\kappa) = \kappa$.

Observamos que na demonstraçao do Teorema 2.38 (ii) se mostra que se $\mathcal{F}$ é uma $(\omega,\omega) - m.i.f.$ então o espaço $(X, \mathcal{J}_{\mathcal{F}})$ dado pela Proposição 2.36 é um espaço Tychonoff irresolúvel sem pontos isolados. Assim temos outro método para construir espaços irresolúveis diferente do metódo apresentado na seção 1.3.

Os teoremas apresentados nesta seção são devidos a Eckertson [EC.97].

2.3 Espaços Hereditariamente Irresolúveis

Nesta seção iniciamos o caminho para encontrar espaços resolúveis não maximalmente resolúveis a serem vistos na seção 2.4. Para isto introduzimos o conceito de espaços hereditariamente irresolúveis, e damos um exemplo de um espaço hereditariamente irresolúvel mas não fortemente irresolúvel.

Usando o conceito de espaços hereditariamente irresolúveis, demonstraremos dois lemas que serão utilizados na procura de espaços n-resolúveis mas não $(n+1)$-resolúveis. Continuamos tentando generalizar os lemas anteriores para usá-los na procura de espaços infinitamente resolúveis mas não maximalmente resolúveis.

Definição 2.39 Um espaço $(X, \mathcal{J})$ é dito κ-hereditariamente irresolúvel se todo subespaço aberto não vazio de $(X, \mathcal{J})$ é κ-irressolúvel.
Quando $\kappa = 2$, $(X, \mathcal{J})$ é dito hereditariamente irresolúvel.

Proposição 2.40 Duplo círculo de Alexandroff
Sejam $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \| x \| = 1\}$ e $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \| x \| = 2\}$ e seja $P : S_1 \to S_2$ dada por $P(x) = 2x$.
Para cada $x \in S_2$ seja $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ e para cada $x \in S_1$ seja $\mathcal{B}_x = \{U_{x,n} : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ onde $U_{x,n} = V_n \cup P(V_n \setminus \{x\})$, $V_n = S_1 \cap B(x,n)$ e $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \| x - y \| < r\}$.
Então $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_x : x \in S_1 \cup S_2\}$ gera uma topologia $\mathcal{J}_A$ em $A = S_1 \cup S_2$ tal que S_2 é subespaço denso e discreto em $(A, \mathcal{J}_A)$ e $(S_1, \mathcal{J}_A)$ é resolúvel.

Demonstração

Claramente $\mathcal{B}$ satisfaz as condições (BP1), (BP2), (BP3) da proposição 1.3, assim $\mathcal{J}_A$ é a topologia gerada pelo sistema de vizinhanças $\mathcal{B}$. Pela definição dos $\mathcal{B}_x$ temos a proposição.

■

Proposição 2.41 Existe um espaço hereditariamente irresolúvel mas não fortemente irresolúvel.

Demonstração

Seja $(S, \mathcal{J}_S)$ um espaço hereditariamente irresolúvel e seja $(A, \mathcal{J}_A)$ um espaço com um subespaço $(B, \mathcal{J}_A)$ denso e discreto tal que $(A \backslash B, \mathcal{J}_A)$ é resolúvel.

Definimos $X = A\backslash B \ \cup \ B \times S$, e para cada $x \in A\backslash B$ seja

$\mathcal{B}_x = \{(V \ \cap \ A\backslash B) \ \cup \ (V \cap B) \times S \ : \ x \in V \in \mathcal{J}_A\}$ e para cada $x = (b, s) \in B \times S$ seja $\mathcal{B}_x = \{\{b\} \times V \ : \ s \in V \in \mathcal{J}_S\}$.

Vamos demonstrar que $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ satisfaz as condições:

(BP1) Cada $\mathcal{B}_x$ é não vazio e para cada $U \in \mathcal{B}_x$ temos que $x \in U$.

(BP2) Se $x \in U \in \mathcal{B}_y$ então existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subseteq U$.

(BP3) Para cada U_1, $U_2 \in \mathcal{B}_x$ existe $U \in \mathcal{B}_x$ tal que $U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Claramente temos (BP1), para mostrar (BP2), se $y \in B \times S$ seja $V = U$, assim s.p.g. suponhamos que $y \in A\backslash B$, então $x \in U = (V_y \cap A\backslash B) \ \cup \ (V_y \cap B) \times S$ onde $y \in V_y \in \mathcal{J}_A$.

Se $x \in V_y \cap A\backslash B$ seja $V = U$.

Se $x = (b, s) \in (V_y \cap B) \times S$ seja $V = \{b\} \times S$.

Assim $V \in \mathcal{B}_x$ e $V \subseteq U$.

Para mostrar (BP3)

Se $x \in A\backslash B$ então $(\exists V_i \in \mathcal{J}_A)$ ($U_i = (V_i \cap A\backslash B) \ \cup \ (V_i \cap B) \times S$). Seja $U = (V_1 \cap V_2 \cap A\backslash B) \cup (V_1 \cap V_2 \cap B) \times S$.

Se $x = (b, s) \in B \times S$ então $(\exists V_i \in \mathcal{J}_s)$ ($U_i = \{b\} \times V_i$). Seja $U = \{b\} \times (V_1 \cap V_2)$.

Portanto pela proposição 1.3 temos que $\mathcal{B}$ gera uma topologia $\mathcal{J}$ em X.

Vamos demonstrar que $(X, \mathcal{J})$ é hereditariamente irresolúvel.

Senão existe um aberto $U \in \mathcal{J}$ não vazio, que é resolúvel. Seja $x \in U$.

Se $x \in A \backslash B$ então $(\exists V \in \mathcal{J}_A)$ ($x \in (V \cap A \backslash B) \cup (V \cap B) \times S \subseteq U$). Como B é $\mathcal{J}_A$-denso em A e $V \in \mathcal{J}_A \backslash \{\phi\}$ temos que existe $b \in V \cap B$, assim $\{b\} \times S \subseteq U$. Como $\{b\} \times S \in \mathcal{J}$ e U é resolúvel pela proposição 1.17 temos que $(\{b\} \times S, \mathcal{J})$ é resolúvel. Como $(\{b\} \times S, \mathcal{J})$ é homeomorfo a $(S, \mathcal{J}_S)$ temos que $(S, \mathcal{J}_S)$ não é hereditariamente irresolúvel, o que é contraditório.

Se $x = (b, s) \in B \times S$ então $(\exists V \in \mathcal{J}_S)$ ($s \in V$ e $\{b\} \times V \subseteq U$). Como U é resolúvel e $\{b\} \times V \in \mathcal{J}$ pela proposição 1.17 temos que $(\{b\} \times V, \mathcal{J})$ é resolúvel. Como $(\{b\} \times V, \mathcal{J})$ é homeomorfo a $(V, \mathcal{J}_S)$ temos que $(V, \mathcal{J}_S)$ é resolúvel logo $(S, \mathcal{J}_S)$ não é hereditariamente irresolúvel, o que é contraditório.

Agora como $A \backslash B \subseteq X$ e $(A \backslash B, \mathcal{J})$ é homeomorfo a $(A \backslash B, \mathcal{J}_A)$ temos que $(A \backslash B, \mathcal{J})$ é resolúvel, portanto $(X, \mathcal{J})$ não é fortemente irresolúvel.

Para concluir como cada espaço fortemente irresolúvel é hereditariamente irresolúvel, temos a existência de $(S, \mathcal{J}_S)$ e pela proposição 2.40 temos a existência de $(A, \mathcal{J}_A)$

■

O próximo lema é basicamente usado para demonstrar a primeira parte do lema 2.43.

Lema 2.42 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço $(n+1)$-resolúvel com $n \in \mathbb{N}^+$, e seja $(D, \mathcal{J})$ um subespaço de $(X, \mathcal{J})$ hereditariamente irresolúvel. Então $(X \backslash D, \mathcal{J})$ é um subespaço denso de $(X, \mathcal{J})$, n-resolúvel.

Demonstração

Como $(X, \mathcal{J})$ é $(n+1)$-resolúvel temos que existe $\{A_i : i \leq n\}$ partição de conjuntos densos em $(X, \mathcal{J})$. Para cada $i \leq n$ seja $U_i = X \backslash cl_X(A_i \backslash D)$.

Vamos demonstrar que $U_i \cap A_i \subseteq D$.

Como $(A_i \cup X\backslash A_i)\backslash D = X\backslash D$ temos que $A_i\backslash D \cup X\backslash A_i \supseteq X\backslash D$ logo $X\backslash(A_i\backslash D) \cap A_i \subseteq D$ e assim

$$U_i \cap A_i = X\backslash cl_X(A_i\backslash D) \cap A_i \subseteq X\backslash(A_i\backslash D) \cap A_i \subseteq D.$$

Como cada A_i é denso em X e U_i é aberto temos que $U_i \cap A_i$ é denso em U_i e como $U_i \cap A_i \subseteq D$ temos que $U_i \cap A_i$ é subconjunto denso de $U_i \cap D$.

Sejam $i,\ j \leq n$ distintos, então vamos demonstrar que $U_i \cap U_j = \phi$.

Senão $U_i \cap U_j \neq \phi$, como $U_i \cap A_i$ é subconjunto denso de $U_i \cap D$ e U_j é aberto temos que $U_j \cap U_i \cap A_i$ é subconjunto denso de $U_j \cap U_i \cap D$. Analogamente temos que $U_i \cap U_j \cap A_j$ é subconjunto denso de $U_i \cap U_j \cap D$ e como $A_i \cap A_j = \phi$ temos que $U_i \cap U_j \cap D$ é resolúvel. Como A_j é denso em $(X, \mathcal{J})$ e $U_i \cap U_j$ é aberto não vazio temos que $U_i \cap U_j \cap A_j$ é não vazio, logo $U_i \cap U_j \cap D$ é subconjunto aberto não vazio de D. Portanto D não é hereditariamente irresolúvel, o que é contraditório.

Para cada $i < n$ seja $D_i = (A_i \cup (U_i \cap A_n))\backslash D$. Como $\{A_i : i \leq n\}$ e $\{U_i : i \leq n\}$ são famílias de conjuntos disjuntos, temos que $\{D_i : i < n\}$ é uma família de conjuntos disjuntos.

Por demonstrar que cada D_i é denso em $(X, \mathcal{J})$.

Seja U aberto não vazio então temos que

$$U \cap D_i = (U \cap A_i\backslash D) \cup (U \cap (U_i \cap A_n)\backslash D)$$

s.p.g. suponhamos que $U \cap (A_i\backslash D) = \phi$. Como U é aberto temos que $U \cap cl_X(A_i\backslash D) = \phi$ e pela definição de U_i temos que $U \subseteq U_i$ logo $U \cap D_i = \phi \cup (U \cap U_i \cap A_n\backslash D) = U \cap A_n\backslash D$.

Suponhamos que $U \cap D_i = \phi$, logo $U \cap A_n\backslash D = \phi$. Como U é aberto temos que $U \cap cl_X(A_n\backslash D) = \phi$ e pela definição de U_n temos que $U \subseteq U_n$, logo

$U \subseteq U_i \cap U_n = \phi$ o que é contraditório. Portanto temos que $U \cap D_i \neq \phi$, assim D_i é denso em $(X, \mathcal{J})$.

Como $D_i \subseteq X \backslash D$ temos que $X \backslash D$ é denso em X e como $\{D_i : i < n\}$ e família de densos disjuntos em $X \backslash D$ temos que $X \backslash D$ é n-resolúvel.

■

Lema 2.43

(i) Todo espaço que é união de n-subespaços hereditariamente irresolúveis é $(n+1)$-irresolúvel.

(ii) Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço n-resolúvel mas não $(n+1)$-resolúvel, então existe U aberto não vazio e existe $\{A_i \subseteq U : i < n\}$ família de conjuntos densos em U, dois a dois disjuntos tal que $U = \bigcup_{i<n} A_i$ e cada $(A_i, \mathcal{J})$ é fortemente irresolúvel.

Demonstração

(i) Senão seja n o menor natural positivo tal que existe $(X, \mathcal{J})$ espaço $(n+1)$-resolúvel e existe $\{I_i \subseteq X : i < n\}$ família de subespaços hereditariamente irresolúveis tais que $X = \bigcup_{i<n} I_i$. Pelo Lema 2.42 temos que $X \backslash I_{n-1}$ é subespaço denso de $(X, \mathcal{J})$, n-resolúvel.
Como $X = \bigcup_{i<n} I_i$ temos que $X \backslash I_{n-1} \subseteq \bigcup_{i<n-1} I_i$ e assim $X \backslash I_{n-1}$ é subespaço denso de $\bigcup_{i<n-1} I_i$. Logo, pela Proposição 1.18 temos que $(\bigcup_{i<n-1} I_i)$ é n-resolúvel.
Como $(\bigcup_{i<n-1} I_i)$ é união de $(n-1)$ subespaços hereditariamente irresolúveis, pela definição de n temos que $n = 1$, portanto $X = I_0$ onde I_0 é hereditariamente irresolúvel. Logo X é irresolúvel, mas X é $(1+1)$-resolúvel, o que é contraditório.

(ii) Como $(X, \mathcal{J})$ é n-resolúvel temos que existe $\{A_i : i < n\}$ partição de subconjuntos densos de $(X, \mathcal{J})$. Para cada A_i seja M_i a envoltória resolúvel de A_i (ver Definição 2.26) e sejam D_i, E_i subconjuntos densos disjuntos de M_i. Vamos demonstrar que $A_i \backslash E_i$ é denso em $(X, \mathcal{J})$.

Senão existe U aberto não vazio tal que $U \cap A_i \backslash E_i = \phi$. Assim temos que $U \cap A_i \subseteq E_i \subseteq M_i \subseteq A_i$ e portanto $U \cap A_i = U \cap M_i$, é aberto não vazio de M_i.
Como D_i é denso em M_i temos que $\phi \neq (U \cap A_i) \cap D_i \subseteq (U \cap A_i) \backslash E_i$ portanto $U \cap A_i \backslash E_i \neq \phi$ o que é contraditório.
Como $\{A_i : i < n\}$ e família disjunta e cada $E_i \subseteq A_i$ temos que $A_i \backslash E_i \cap \bigcup_{j<n} E_j = \phi$. Seja $E = \bigcup_{j<n} E_j$, assim temos que $\{A_i \backslash E_i : i < n\} \cup \{E\}$ é família de conjuntos disjuntos (*obs.* $E \neq \phi$, senão $\{A_i : i < n\}$ é a família procurada).
Como cada $(A_i \backslash E_i)$ é denso em $(X, \mathcal{J})$ e $(X, \mathcal{J})$ é $(n+1)$-irresolúvel temos que E não é denso em $(X, \mathcal{J})$.
Definimos $U = X \backslash cl_X(E)$, assim U é aberto não vazio de $(X, \mathcal{J})$. Como E_i é denso em M_i temos que $M_i \subseteq cl_X(E)$ assim $X \backslash M_i \supseteq U$ portanto $U \cap A_i \subseteq A_i \backslash M_i$.
Como $A_i \backslash M_i$ é fortemente irresolúvel (ver Proposição 2.27) temos que $U \cap A_i$ é fortemente irresolúvel.
Como A_i é denso temos que $\{U \cap A_i : i < n\}$ são subespaços densos de U, dois adois disjuntos tais que $U = \bigcup_{i<n} (A_i \cap U)$.

■

A próxima proposição é uma generalização parcial do lema 2.42

Proposição 2.44 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço κ-resolúvel onde κ é um cardinal infinito, e seja $(D, \mathcal{J})$ um subespaço de $(X, \mathcal{J})$, κ-hereditariamente irresolúvel. Então $(X \backslash D, \mathcal{J})$ é um subespaço denso de $(X, \mathcal{J})$, κ-resolúvel.

Demonstração

Seja $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma partição de subconjuntos densos de X.
Suponhamos s.p.g. que cada A_α é κ-resolúvel.
Vamos demonstrar que $A_\alpha \backslash D$ é denso em $(X, \mathcal{J})$.

Senão temos que $U = X \backslash cl_X(A_\alpha \backslash D) \neq \phi$. Como A_α é denso temos que $U \cap A_\alpha \neq \phi$ e como A_α é κ-resolúvel temos que $U \cap A_\alpha$ é κ-resolúvel. Agora como $X \backslash D = (A_\alpha \cap X \backslash D) \cup (X \backslash A_\alpha \cap X \backslash D) \subseteq cl_X(A_\alpha \backslash D) \cup X \backslash A_\alpha$ temos que $X \backslash D \cup cl_X(A_\alpha \backslash D) \subseteq cl_X(A_\alpha \backslash D) \cup X \backslash A_\alpha$ e tomando complementos temos que $D \cap U \supseteq U \cap A_\alpha$.

Como $U \cap A_\alpha$ é subconjunto denso de U temos que $U \cap A_\alpha$ é denso em $U \cap D$, logo como $U \cap A_\alpha$ é κ-resolúvel, pela Proposição 1.18 temos que $U \cap D$ é κ-resolúvel.

Como D é hereditariamente irresolúvel temos que $U \cap D = \phi$, e como $U \cap A_\alpha \subseteq U \cap D$ temos que $U \cap A_\alpha = \phi$. Como A_α é denso temos que $U = \phi$ o que é contraditório.

Portanto $A_\alpha \backslash D$ é denso em $(X, \mathcal{J})$, assim $X \backslash D$ é denso em $(X, \mathcal{J})$ e $A_\alpha \backslash D$ é subconjunto denso em $(X \backslash D, \mathcal{J})$, portanto $(X \backslash D, \mathcal{J})$ é κ-resolúvel.

■

Nos não conhecemos uma generalização do lema 2.43 (i) mas a próxima proposição generaliza o lema 2.43 (ii).

Proposição 2.45 Seja κ um cardinal infinito e seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço κ-resolúvel mas não κ^+-resolúvel. Então existe um aberto não vazio que é união disjunta de κ-subespaços densos κ^+-fortemente irresolúveis de U.

Demonstração

Como $(X, \mathcal{J})$ é κ-resolúvel temos que existe uma partição $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de conjuntos densos de $(X, \mathcal{J})$. Para cada A_α seja M_α a envoltória κ^+-resolúvel de A_α (ver Definição 2.26) assim pelo Teorema 1.19 temos que $E = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ é κ^+-resolúvel, e como $(X, \mathcal{J})$ é κ^+-irresolúvel, temos que E não é denso em $(X, \mathcal{J})$.

Seja $U = X \backslash cl_X(E)$, assim U é aberto não vazio e como cada $M_\alpha \subseteq cl_X(E)$ temos que $U \subseteq X \backslash M_\alpha$. Assim $U \cap A_\alpha \subseteq (X \backslash M_\alpha) \cap A_\alpha = A_\alpha \backslash M_\alpha$. Como $A_\alpha \backslash M_\alpha$ é κ^+-fortemente irresolúvel (ver Proposição 2.27) temos que $U \cap A_\alpha$ é κ^+-fortemente irresolúvel.

Assim temos que $U = \bigcup_{\alpha<\kappa} (U \cap A_\alpha)$ onde cada $U \cap A_\alpha$ é um subespaço denso de $(U, \mathcal{J})$, κ^+-fortemente irresolúvel.

■

Comentários

Nós não conhecemos uma generalização do lema 2.43 (i) para cardinais infinitos. Dada tal generalização obteríamos um espaço infinitamente resolúvel mas não maximalmente resolúvel em ZFC (ver teoremas 2.50 e 2.51). Observamos que o lema 2.43 (i) também é usado na demonstração que todo espaço que é n-resolúvel para todo $n < \omega$ é ω-resolúvel (ver Teorema 2.58).

A Proposição 2.45, que generaliza o lema 2.43 (ii), mostra onde procurar espaços infinitamente resolúveis, mas não maximalmente resolúveis.

A existência de um espaço hereditariamente irresolúvel, mas não fortemente irresolúvel está em [D.93]. Os lemas 2.42 e 2.43 com suas respectivas generalizações são devidos a Eckertson [EC.97].

2.4 Espaços Resolúveis não Maximalmente Resolúveis

Nesta seção começamos demonstrando que existe um espaço Tychonoff que é 2^n-resoluvel mas não $(2^n + 1)$-resoluvel, para cada $n < \omega$ Daí obtemos como corolário que existe um espaço Tychonoff que é n-resoluvel mas não $(n + 1)$-resoluvel, para cada $n < \omega$ Observamos que nestas demostrações não são usados os lemas da seção 2.3.

Continuamos com preliminares para demonstrar o Teorema 2.50 que mostra a existência de um espaço Tychonoff que é união de $(2^\kappa)^+$ subespaços densos fortemente irresolúveis dois a dois disjuntos. Aplicando os lemas da seção 2.3 damos outra demonstração sobre a existência de espaços n-resolúvel mas não $(n+1)$-resolúvel.

Na parte final da seção introduzimos o conceito de fortemente P_κ-espaço e demonstramos um lema junto a um corolário. Assumindo a existência de um fortemente P_κ-espaço Hausdorff, λ^+-fortemente irresolúvel sem pontos isolados demonstramos a existência de um espaço Z que é λ-resolúvel, λ^+-fortemente irresolúvel tal que $\Delta(Z) \geq \kappa$ onde $\lambda^+ < \kappa$.

Teorema 2.46 Para cada $n > 0$, existe um espaço enumerável Tychonoff 2^n-resolúvel mas não (2^n+1)-resolúvel.

Demonstração

Pelas proposições 2.34 e 2.35 temos que existe $\mathcal{F}$ uma $(\omega,\omega)-m.i.f.$ em ω que é ω-separada e pela proposição 2.36 temos que $(X, \mathcal{J}_\mathcal{F})$ é Tychonoff, onde $|X| = \omega$ e $\mathcal{J}_\mathcal{F}$ é a topologia gerada por $\mathcal{C} = \{\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B} \;:\; \mathcal{A},\, \mathcal{B} \in [\mathcal{F}]^{<\omega},\, \mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \phi\}$. Pela demonstração do teorema 2.38 parte (ii) temos que $(X, \mathcal{J}_\mathcal{F})$ é irresolúvel e pela proposição 2.27 temos que existe $U = \cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ não vazio, tal que $(U, \mathcal{J}_\mathcal{F})$ é fortemente irresolúvel.

Seja $\mathcal{F}' = \{F \cap U \;:\; F \in \mathcal{F}\backslash(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})\}$. Como $U = \cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B}$ onde $\mathcal{A},\, \mathcal{B} \in [\mathcal{F}]^{<\omega}$ temos que $\mathcal{F}'$ é (ω,ω)-i.f. em U, ω-separada. Seja $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}'})$ dada pela proposição 2.36.

Vamos demonstrar que $(U, \mathcal{J}_\mathcal{F}) = (U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}'})$.

Seja $\cap\mathcal{A}'\setminus\cup\mathcal{B}' \in \mathcal{C}$, como

$$U \cap (\cap\mathcal{A}' \setminus \cup\mathcal{B}') = (\cap\mathcal{A}' \cap \cap\mathcal{A}') \setminus (\cup\mathcal{A}' \cup \cup\mathcal{B}) = (\cap\mathcal{A}''\setminus\cup\mathcal{B}'')\cap U$$

onde $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}' \backslash \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}' \backslash \mathcal{B}$, temos que $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}}) = (U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}'})$.

Assim $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}'})$ é um espaço enumerável, Tychonoff, fortemente irresolúvel.

Seja $n_o > 0$ e seja $\mathcal{C}_o \in [\mathcal{F}']^{n_o}$. (*obs.* pela definição de $\mathcal{F}'$ temos que $\cup \mathcal{C}_o \subsetneq U$)

Como $\mathcal{F}'$ é (ω, ω)-i.f. em U, ω-separada temos que $\mathcal{F}' \backslash \mathcal{C}_o$ é $(\omega, \omega) - i.f.$ em U, ω-separada, assim seja $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}' \backslash \mathcal{C}_o})$ dada pela proposição 2.36, logo $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}' \backslash \mathcal{C}_o})$ é espaço enumerável Tychonoff.

Seja $\mathcal{D} = \{\cap \mathcal{A} \setminus \cup (\mathcal{C}_o \backslash \mathcal{A}) \ : \ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}_o\}$ onde $\cap \phi = \cup \mathcal{F}' = U$.

Vamos demonstrar que $\mathcal{D}$ é família de densos disjuntos em $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}' \backslash \mathcal{C}_o})$.

Seja $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ distintos, então s.p.g. suponhamos que existe $A \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$, assim temos que $\cap \mathcal{A} \setminus \cup (\mathcal{C}_o \backslash \mathcal{A}) \subseteq A$ e $\cap \mathcal{B} \setminus \cup (\mathcal{C}_o \backslash \mathcal{B}) \subseteq U \backslash A$. Portanto $(\ \cap \mathcal{A} \setminus \cup (\mathcal{C}_o \backslash \mathcal{A})\ ) \cap (\ \cap \mathcal{B} \setminus \cup (\mathcal{C}_o \backslash \mathcal{B})\ ) = \phi$ logo $\mathcal{D}$ é uma família disjunta.

Agora sejam $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}' \in [\mathcal{F}' \backslash \mathcal{C}_o]^{<\omega}$ disjuntos e seja $\cap \mathcal{A} \setminus \cup (\mathcal{C}_o \backslash \mathcal{A}) \in \mathcal{D}$. Como $\mathcal{F}'$ é (ω, ω)-i.f. em U temos que $(\cap \mathcal{A}' \setminus \cup \mathcal{B}') \cap (\ \cap \mathcal{A} \setminus (\mathcal{C}_o \backslash \mathcal{A})\ ) = \cap \mathcal{A}'' \setminus \cup \mathcal{B}'' \neq \phi$ onde $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}' \cup \mathcal{A} \in [\mathcal{F}']^{<\omega}$ e $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}' \cup (\mathcal{C}_o \backslash \mathcal{A}) \in [\mathcal{F}']^{<\omega}$. Portanto $\cap \mathcal{A} \setminus \cup (\mathcal{C}_o \backslash \mathcal{A})$ é denso em $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}' \backslash \mathcal{C}_o})$ e como $|\mathcal{C}_o| = n_o$ temos que $(U,\ \mathcal{J}_{\mathcal{F}' \backslash \mathcal{C}_o})$ é 2^{n_o}-resolúvel.

Seja $\mathcal{E}$ família de $2^{n_o} + 1$ subconjuntos de U dois a dois disjuntos. Mostraremos que existe $E \in \mathcal{E}$ tal que E não é denso em $(U,\ \mathcal{J}_{\mathcal{F}' \backslash \mathcal{C}_o})$.

Seja $x \in U$ e seja $\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{C} \ : \ x \in A\}$ assim temos que $x \in \cap \mathcal{A}_x \setminus \cup (\mathcal{C}_o \backslash \mathcal{A}_x)$ e portanto temos que $U = \cup \mathcal{D}$.

Agora seja $V \in \mathcal{J}_{\mathcal{F}'}$ não vazio, como $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}'})$ é fortemente irresolúvel temos que $(V, \mathcal{J}_{\mathcal{F}'})$ é fortemente irresolúvel. Assim

$|\{E \in \mathcal{E} \ : \ E \cap V$ é denso em $(V, \mathcal{J}_{\mathcal{F}'})\}| \leq 1$, portanto existe $W \subseteq V$ $\mathcal{J}_{\mathcal{F}'}$-aberto não vazio tal que $\{E \in \mathcal{E} \ : \ E \cap W \neq \phi\}| \leq 1$.

Como $|\mathcal{D}| = 2^n$ escrevemos $\mathcal{D} = \{D_i \ : \ i < 2^n\}$. Seja $V_0 = D_0 \in \mathcal{J}_{\mathcal{F}'}$. Assim, existe $W_0 \subseteq V_0$ tal que $|\{E \in \mathcal{E} \ : \ E \cap W_0 \neq \phi\}| \leq 1$, onde

$W_0 = D_0 \cap (\cap \mathcal{A}_0 \setminus \cup \mathcal{B}_0)$ com $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0 \in [\mathcal{F}' \backslash \mathcal{C}_o]^{<\omega}$ e $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{B}_0 = \phi$.

Agora seja $V_1 = D_1 \cap (\cap \mathcal{A}_0 \setminus \cup \mathcal{B}_0) \in \mathcal{J}_{\mathcal{F}'}$, como D_1 é denso em $(U,\ \mathcal{J}_{\mathcal{F}'\setminus\mathcal{C}_o})$ temos que V_1 é não vazio. Então existe $W_1 \subseteq V_1$ $\mathcal{J}_{\mathcal{F}'}$-aberto não vazio tal que $|\{E \in \mathcal{E} : E \cap W_1 \neq \phi\}| \leq 1$ onde $W_1 = V_1 \cap (\cap \mathcal{A}_1 \setminus \cup \mathcal{B}_1)$ com $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{B}_1 \in [\mathcal{F}'\setminus(\mathcal{C}_o \cup \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{B}_0)]^{<\omega}$ e $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1 = \phi$.

Agora por indução para cada $i < 2^n$ temos que $V_i = D_i \cap (\cap \bigcup_{j<i} \mathcal{A}_j) \setminus (\cup \bigcup_{j<i} \mathcal{B}_j))$ é $\mathcal{J}_{\mathcal{F}'}$-aberto não vazio portanto existe $W_i \subseteq V_i$ $\mathcal{J}_{\mathcal{F}'}$-aberto não vazio tal que $|\{E \in \mathcal{E} : E \cap W_i \neq \phi\}| \leq 1$ onde $W_i = V_i \cap (\cap \mathcal{A}_i \setminus \cup \mathcal{B}_i)$ com $\mathcal{A}_i,\ \mathcal{B}_i \in [\mathcal{F}'\setminus(\mathcal{C}_o \setminus \bigcup_{j<i} (\mathcal{A}_j \cup \mathcal{B}_j))]^{<\omega}$ e $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_i = \phi$.

Seja $\mathcal{L} = \cup\{\mathcal{A}_i : i < 2^n\}$ e $\mathcal{M} = \cup\{\mathcal{B}_i : i < 2^n\}$, assim para cada $D \in \mathcal{D}$ temos que $|\{E \in \mathcal{E} : E \cap D \cap (\cap \mathcal{L} \setminus \cup \mathcal{M}) \neq \phi\}| \leq 1$ e como $U = \dot{\cup} \mathcal{D}$ temos que $|\{E \in \mathcal{E} : E \cap (\cap \mathcal{L} \setminus \cup \mathcal{M}) \neq \phi\}| \leq |\mathcal{D}| = 2^n$.

Como $|\mathcal{E}| = 2^n + 1$ temos que existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $E \cap (\cap \mathcal{L} \setminus \cup \mathcal{M}) = \phi$ mas $\mathcal{L},\ \mathcal{M} \in [\mathcal{F}'\setminus\mathcal{C}_o]^{<\omega}$ com $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \phi$ assim E não é denso em $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}'\setminus\mathcal{C}_o})$.

Portanto $(U,\ \mathcal{J}_{\mathcal{F}'\setminus\mathcal{C}_o})$ não é (2^n+1)-resolúvel, e assim $(U, \mathcal{J}_{\mathcal{F}'\setminus\mathcal{C}_o})$ satisfaz o teorema.

■

Corolario 2.47 Para $n < \omega$, existe um espaço enumerável Tychonoff n-resolúvel mas não $(n+1)$-resolúvel.

Demonstração

Seja $n > 0$, então pelo Teorema 2.46 existe um espaço Y enumerável Tychonoff, 2^n-resolúvel mas não (2^n+1)-resolúvel.

Assim existe $\{D_i : i < 2^m\}$ partição de conjuntos densos de Y, agora seja $X = \bigcup_{i<n} D_i$ com a topologia induzida, assim X é espaço enumerável, Tychonoff n-resolúvel.

Como X é denso em Y temos que se A é denso em X, então A é denso em Y logo se $\{E_i \subseteq X : i < n+1\}$ é partição de conjuntos densos em X temos que $\{E_i : i < n+1\} \cup \{D_i : n \leq i < 2^n\}$ é partição de conjuntos densos em Y. Assim Y é (2^n+1)-resolúvel, o que é contraditório. Portanto X não é $(n+1)$-resolúvel.

■

Lema 2.48 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço Tychonoff λ-resolúvel e seja $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ uma partição em subconjuntos densos de $(X, \mathcal{J})$ tal que cada $(A_\alpha, \mathcal{J})$ e $(A_\beta, \mathcal{J})$ são homeomorfos. Então existe uma topologia Tychonoff $\mathcal{J}'$ em X mais fina que $\mathcal{J}$ tal que cada A_α é $\mathcal{J}'$-irresolúvel e denso em $(X, \mathcal{J}')$.

Demonstração

Para cada $\alpha < \lambda$ seja $h_\alpha : A_0 \to A_\alpha$ um homeomorfismo e seja $\mathcal{A}$ o conjunto das topologias $\mathcal{O}$ mais finas que $\mathcal{J}$ tal que:

(i) $(X, \mathcal{O})$ é Tychonoff.

(ii) Cada A_α é denso em $(X, \mathcal{O})$.

(iii) Cada $h_\alpha : (A_0, \mathcal{O}) \to (A_\alpha, \mathcal{O})$ é um homeomorfismo.

Seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ cadeia crescente e seja $\mathcal{J}'$ a topologia gerada pela base $\cup\mathcal{C}$.

Vamos demonstrar que $(X, \mathcal{J}')$ é Tychonoff.

Como $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$ temos que $(X, \mathcal{J}')$ é Hausdorff.

Seja $x \in U \in \mathcal{J}'$, então existe $V \in \cup\mathcal{C}$ tal que $x \in V \subseteq U$. Como $V \in \cup\mathcal{C}$ temos que existe $\mathcal{O} \in \mathcal{C}$ tal que $V \in \mathcal{O}$, assim existe $f : (X, \mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) = 0$ e $f(X \backslash V) = \{1\}$. Como f é $\mathcal{J}'$-contínua temos que $(X, \mathcal{J}')$ é Tychonoff.

Vamos demonstrar que cada A_α é denso em $(X, \mathcal{J}')$.

Seja $U \in (\cup\mathcal{C}) \backslash \{\phi\}$, então existe $\mathcal{O} \in \mathcal{C}$ tal que $U \in \mathcal{O} \backslash \{\phi\}$, assim $A_\alpha \cap U \neq \phi$, e portanto A_α é denso em $(X, \mathcal{J}')$.

Vamos demonstrar que cada $h_\alpha : (A_0, \mathcal{J}') \to (A_\alpha, \mathcal{J}')$ é homeomorfismo.

Seja $U \in \cup\mathcal{C}$, assim existe $\mathcal{O} \in \mathcal{C}$ tal que $U \in \mathcal{O}$ e como h_α é $\mathcal{O}$-homeomorfismo temos que $h_\alpha^{-1}(A_\alpha \cap U)$ e $h_\alpha(A_0 \cap U)$ são $\mathcal{O}$-abertos. Portanto $\mathcal{J}'$-abertos, assim h_α é $\mathcal{J}'$-homeomorfismo.

Agora como cada cadeia crescente em $\mathcal{A}$ é limitada superiormente e $\mathcal{J} \in \mathcal{A}$, pelo lema de Zorn temos que existe $\mathcal{J}' \in \mathcal{A}$ elemento maximal.

Monstraremos que A_0 é $\mathcal{J}'$-irresolúvel.

Senão existe $D \subseteq A_0$ tal que D e $A_\alpha \setminus D$ são densos em $(A_0, \mathcal{J}')$. Seja $\vec{D} = \bigcup_{\alpha<\lambda} (h_\alpha(D))$ e seja $\mathcal{J}''$ a topologia gerada pela base $\mathcal{B} = \mathcal{J}' \cup \{U \cap \vec{D} \ : \ U \in \mathcal{J}'\} \ \cup \ \{U \cap (X \setminus \vec{D}) \ : \ U \in \mathcal{J}'\}$.

Afirmação: $\mathcal{J}'' \in \mathcal{A}$.

Como $\mathcal{J}' \subsetneq \mathcal{J}''$ e $\mathcal{J}'' \in \mathcal{A}$ temos que $\mathcal{J}'$ não é maximal em $\mathcal{A}$, o que é contraditório.

Como cada $h_\alpha : A_0 \to A_\alpha$ é $\mathcal{J}'$-homeomorfismo temos que cada A_α é irresolúvel e por (ii) temos que cada A_α é denso em $(X, \mathcal{J}')$.

Demonstração da afirmação.

Vamos demonstrar que $(X, \mathcal{J}'')$ é Tychonoff.

Como $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}''$ temos que $(X, \mathcal{J}'')$ é Hausdorff.

Sejam $x \in U \in \mathcal{J}''$, então existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$.

Se $V \in \mathcal{J}'$ como $(X, \mathcal{J}')$ é Tychonoff temos que existe $f : (X, \mathcal{J}') \to [0,1]$ contínua (i.e. $\mathcal{J}''$-contínua) tal que $f(x) = 0$ e $f/(X \setminus U) \equiv 1$.

Se $V = W \cap \vec{D}$ para algum $W \in \mathcal{J}'$, como $(X, \mathcal{J}')$ é Tychonoff temos que existe $h : (X, \mathcal{J}') \to [0,1]$ contínua (i.e. $\mathcal{J}''$-contínua) tal que $h(x) = 0$ e $h/(X \setminus W) \equiv 1$. Agora seja $g : X \to [0,1]$ tal que $g/\vec{D} \equiv 0$ e $g/(X \setminus \vec{D}) \equiv 1$. Assim temos que g é $\mathcal{J}''$-contínua. Seja $f' = h + g$, assim temos que $f' : (X, \mathcal{J}'') \to [0,2]$ é contínua e $f'(x) = 0$ e $f'(X \setminus V) \subseteq [1,2]$, assim f' induze uma função contínua de $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f(X \setminus U) = 1$, e portanto $(X, \mathcal{J}'')$ é Tychonoff.

Vamos demonstrar que A_α é denso em $(X, \mathcal{J}'')$.

Seja $U \in \mathcal{J}'$ não vazio então $A_\alpha \cap (U \cap \vec{D}) \supseteq (A_\alpha \cap U) \cap h_\alpha(D) \neq \phi$ pois $h_\alpha(D)$ denso em A_α, assim A_α é denso em $(X, \mathcal{J}'')$.

Vamos demonstrar que cada $h_\alpha : (A_0, \mathcal{J}'') \to (A_\alpha, \mathcal{J}'')$ é homeomorfismo.

Seja $U \in \mathcal{J}'$, como h_α é bijetora e $\{A_\alpha \ : \ \alpha < \lambda\}$ é uma família disjunta temos que:

(i) $h_\alpha(U \cap \vec{D} \cap A_0) = h_\alpha(U \cap D) = h_\alpha(U \cap A_0) \cap h(D) = h_\alpha(U \cap A_0) \cap \vec{D}$ analogamente $h_\alpha(U \cap X \backslash \vec{D} \cap A_0) = h_\alpha(U \cap A_0) \cap X \backslash \vec{D}$ e assim h_α é função aberta.

(ii) $h_\alpha^{-1}(U \cap \vec{D} \cap A_\alpha) = h_\alpha^{-1}(U \cap h_\alpha(D)) = h_\alpha^{-1}(U \cap A_\alpha) \cap D = h_\alpha^{-1}(U \cap A_\alpha) \cap \vec{D}$ analogamente $h_\alpha^{-1}(U \cap X \backslash \vec{D} \cap A_\alpha) = h_\alpha^{-1}(U \cap A_\alpha) \cap X \backslash \vec{D}$ e assim h_α é função contínua.

■

Corolario 2.49 Para cada cardinal infinito κ existe um espaço Tychonoff que é união de 2^{2^κ} densos disjuntos irresolúveis cada um de cardinalidade κ.

Demonstração

Seja $(\{0,1\}^{2^\kappa}, \mathcal{J})$ com a topologia produto e a soma usual, onde $\{0,1\}$ é considerado com a topologia discreta. Pelo Teorema 2.23 existe D subconjunto denso de $(\{0,1\}^{2^\kappa}, \mathcal{J})$ tal que $|D| = \kappa$. Agora definamos G_0 como o subgrupo de $\{0,1\}^{2^\kappa}$ gerado por D então $|G_0| = |\kappa^{<w}| = \kappa$, assim G_0 é subgrupo próprio denso em $(\{0,1\}^{2^\kappa}, \mathcal{J})$.

Seja $\{A_\alpha \ : \ \alpha < 2^{2^\kappa}\}$ as classes laterais de G_0 em $(\{0,1\}^{2^\kappa}, \mathcal{J})$, assim $(\{0,1\}^{2^\kappa}, \mathcal{J})$ é espaço Tychonoff, onde cada A_α é denso em $(\{0,1\}^{2^\kappa}, \mathcal{J})$ e A_α e A_β são homeomorfos, logo pelo lema 2.48 temos o corolário.

■

Teorema 2.50 Para cada cardinal infinito κ existe um espaço Tychonoff que é a união de $(2^\kappa)^+$ subespaços densos fortemente irresolúveis dois a dois disjuntos.

Demonstração

Seja $\lambda = 2^{2^\kappa}$, pelo Corolário 2.49 temos que existe um espaço Tychonoff $(X, \mathcal{J})$ tal que $X = \dot{\bigcup}_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ onde $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ é uma família de conjuntos disjuntos, onde cada A_α é um subespaço denso e irresolúvel de $(X, \mathcal{J})$.

Afirmação: Existe W aberto não vazio de $(X, \mathcal{J})$ tal que para cada V aberto não vazio contido em W e para cada $\alpha < \lambda$ existe $\beta > \alpha$ tal que $A_\beta \cap V$ é irresolúvel.

Vamos demonstrar que existe $\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha < cf(\lambda)\}$ sequência de famílias de pares $\langle V, \gamma\rangle$ tais que

(i) $\gamma < \lambda$, V é aberto em $(X, \mathcal{J})$ e $\phi \neq V \subseteq W$

(ii) $A_\gamma \cap V$ é fortemente irresolúvel.

(iii) Sejam $\langle V, \gamma\rangle$, $\langle V', \gamma'\rangle \in \mathcal{P}_\alpha$, se $\gamma \neq \gamma'$ então $V \cap V' = \phi$, e se $\gamma = \gamma'$ então $V = V'$

(iv) Se $\beta < \alpha$ então $\sup\{\gamma : \langle V, \gamma\rangle \in \mathcal{P}_\beta\} < \min\{\gamma : \langle V, \gamma\rangle \in \mathcal{P}_\alpha\}$

(v) $\mathcal{P}_\alpha$ é maximal com respeito a (i), (ii), (iii).

Dado $W_0 = W$ pela afirmação existe $\beta_0 < \lambda$ tal que $A_{\beta_0} \cap W_0$ é irresolúvel e pela Proposição 2.27 temos que existe $V_0 \subseteq W_0$ tal que $V_0 \cap A_{\beta_O}$ é fortemente irresolúvel. Assim pelo Lema de Zorn temos que existe $\mathcal{P}_0$ família de pares $\langle V_\gamma, \gamma\rangle$ maximal com respeito a (i), (ii), (iii).

Agora suponhamos que dado $\alpha < cf(\lambda)$, para cada $\beta < \alpha$ existe $\mathcal{P}_\beta$ tal que (i), (ii), (iii), (iv), (v). Seja $W_0 = W$ para cada $\beta < \alpha$ por (iii) temos que $|\mathcal{P}_\beta| \leq d(W)$ e como W é aberto temos que $|\mathcal{P}_\beta| \leq d(W) \leq d(X) < \kappa < cf(\lambda)$. Como $\alpha < cf(\lambda)$ temos que $\sup\{\gamma < \lambda : (\exists\beta < \alpha)\ (\langle V, \gamma\rangle \in \mathcal{P}_\beta\} < \lambda$ assim existe $\alpha' < \lambda$ tal que $\alpha' > \sup\{\gamma < \lambda : (\exists\beta < \alpha)\ (\langle V, \gamma\rangle \in \mathcal{P}_\beta)\}$ logo pela afirmação existe $\beta_0 > \alpha'$ tal que $W_0 \cap A_{\beta_0}$ é irresolúvel.

Pela Proposição 2.27 existe $V_0 \subseteq W_0$ aberto não vazio tal que $V_0 \cap A_{\beta_0}$ é fortemente irresolúvel. Assim pelo Lema de Zorn temos que existe $\mathcal{P}_\alpha$ família de pares $\langle V_\gamma, \gamma \rangle$ maximal respeito a (i), (ii), (iii), (iv') onde

(iv') $(\forall \langle V_\gamma, \gamma \rangle \in \mathcal{P}_\alpha)$ $(\ \gamma \geq \beta_0\ )$.

Assim (iv') garante a condição (iv) e a afirmação garante (v), portanto existe $\{\mathcal{P}_\alpha\ :\ cf(\lambda)\}$ tal que (i), (ii), (iii), (iv), (v).

Para cada $\alpha < cf(\lambda)$ seja $D_\alpha = \cup\{A_\gamma \cap V\ :\ \langle V, \gamma \rangle \in \mathcal{P}_\alpha\}$, a condição (v) garante que D_α é denso em W.

Como $cf(\lambda) > 2^\kappa$ temos que $cf(\lambda) \geq (2^\kappa)^+$, assim definimos $Y = \cup\{D_\alpha\ :\ \alpha < (2^\kappa)^+\}$.

Se $\alpha \neq \beta < cf(\lambda)$ como $\{A_\alpha\ :\ \alpha < \lambda\}$ é família disjunta e por (iv) temos que $D_\alpha \cap D_\beta = \phi$ e como cada D_α é união disjunta de subespaços abertos fortemente irresolúveis temos que D_α é fortemente irresolúvel, assim temos que $(Y, \mathcal{J})$ satisfaz as condições do teorema.

Demonstração da afirmação.

Senão existe V aberto não vazio e existe $\alpha_V < \lambda$ tal que $(\forall\ \beta > \alpha_V)$ $(\ A_\beta \cap V$ é resolúvel$)$. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto das famílias $\mathcal{F}$ de abertos não vazios dois a dois disjuntos tal que para cada $U \in \mathcal{F}$ existe $\alpha_U < \lambda$ tal que $(\forall \beta > \alpha_U)$ $(\ A_\beta \cap U$ é resolúvel $)$.

Como $\{V\} \in \mathcal{A}$ temos que $\mathcal{A} \neq \phi$. Agora seja $\mathcal{C}$ cadeia crescente de $\mathcal{A}$ assim temos que $\cup\mathcal{C}$ é família de abertos não vazio dois a dois disjuntos. Seja $U \in \cup\mathcal{C}$ então existe $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ tal que $U \in \mathcal{F}$ portanto existe $\alpha_U < \lambda$ tal que $(\forall \beta > \alpha_U)(A_\beta \cap U$ é resolúvel $)$, assim $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{A}$. Portanto temos que toda cadeia crescente em $\mathcal{A}$ é limitada superiormente, assim pelo lema de Zorn existe $\mathcal{U}$ elemento maximal de $\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{U}$ é família de conjuntos abertos disjuntos temos que

$|\mathcal{U}| \leq d(X) \leq \kappa < cf(\lambda)$, assim $\mu = \sup\{\alpha_U \ : \ U \in \mathcal{U}\} < \lambda$. Portanto para cada $\beta \geq \mu$ e cada $U \in \mathcal{U}$ temos que $A_\beta \cap U$ é resolúvel, assim pelo Teorema 1.19 para cada $\beta \geq \mu$ temos que $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} (A_\beta \cap U) = A_\beta \cap \cup\mathcal{U}$ é resolúvel e pela Proposição 1.18 temos que $cl_{A_\beta}(A_\beta \cap \cup\mathcal{U}) = A_\beta \cap cl_X(A_\beta \cap \cup\mathcal{U})$ é resolúvel. Seja $H = cl_X(\cup\mathcal{U})$. Como $\cup\mathcal{U}$ é aberto e A_β é denso em X temos que $cl_X(A_\beta \cap \cup\mathcal{U}) = cl_X(\cup\mathcal{U}) = H$, assim $A_\beta \cap H = A_\beta \cap cl_X(A_\beta \cap \cup\mathcal{U})$ é resolúvel, e como A_β é irresolúvel temos que $H \neq X$.

Agora seja $W = X \backslash H$, assim W é aberto não vazio de X e pelo fato que $\mathcal{U}$ é maximal em $\mathcal{A}$ e $W \cap (\cup\mathcal{U}) = \phi$ temos que para cada V' aberto não vazio contido em W, $\mathcal{U} \cup \{V'\} \notin \mathcal{A}$, assim $(\forall\alpha < \lambda)\ (\exists\beta > \alpha)\ (\ A_\beta \cap V'$ é irresolúvel).

■

Teorema 2.51 Para cada $n < \omega$ existe um espaço Tychonoff que é n-resolúvel mas não é $(n+1)$-resolúvel.

Demonstração

Sejam D_α definidas no Teorema 2.50 e seja $X = \bigcup\limits_{\alpha < n} D_\alpha$, assim $(X, \mathcal{J})$ é um espaço Tychonoff, n-resolúvel. Como X é união de n-subespaços fortemente irresolúveis, pelo Lema 2.43 temos que $(X, \mathcal{J})$ não é $(n+1)$-resolúvel.

■

Definição 2.52 Seja κ um cardinal então $(X, \mathcal{J})$ é dito um fortemente P_κ-espaço se existe uma base $\mathcal{B}$ de $(X, \mathcal{J})$ tal que para cada $\{U_\alpha \in \mathcal{B} \ : \ \alpha < \lambda\}$ sequência decrescente com $\lambda < \kappa$ temos que $\bigcap\limits_{\alpha < \lambda} U_\alpha$ é um aberto não vazio de $(X, \mathcal{J})$.

Lema 2.53 Sejam $\lambda < \kappa$ e seja $(X, \mathcal{J})$ um fortemente P_κ-espaço λ-hereditariamente irresolúvel então para cada familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X

dois a dois disjuntos tal que $|\mathcal{F}| = \lambda$ existe um aberto não vazio $U \subseteq X$ tal que $|\{F \in \mathcal{F} \ : \ F \cap U \neq \phi\}| < \lambda$.

Demonstração

Como $(X, \mathcal{J})$ é fortemente P_κ-espaço então existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{J}$ que satisfaz a condição da Definição 2.52. Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X dois a dois disjuntos tal que $|\mathcal{F}| = \lambda$, como $(X, \mathcal{J})$ é λ-irresolúvel temos que $(\exists F' \in \mathcal{F})\ (\exists U_0 \in \mathcal{B})\ (\ F' \cap U_0 = \phi\ )$.

Agora escrevemos $\mathcal{F} = \{F_\alpha \ : \ \alpha < \lambda\}$ tal que $F_0 = F'$ e suponhamos que dado $\alpha < \lambda$ existe $\{U_\beta \in \mathcal{B} \ : \ \beta < \alpha\}$ sequência decrescente tal que para cada $\beta < \alpha$ temos que $U_\beta \cap F_\beta = \phi$ ou F_β é denso em $\bigcap\limits_{\gamma<\beta} U_\gamma$.

Vamos definir U_α.

Se F_α é denso em $(\bigcap\limits_{\gamma<\alpha} U_\gamma)$ escolhemos $U_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $U_\alpha \subseteq (\bigcap\limits_{\alpha<\gamma} U_\gamma)$.

Se F_α não é denso em $(\bigcap\limits_{\alpha<\gamma} U_\gamma)$ então existe $U_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $U_\alpha \subseteq \bigcap\limits_{\alpha<\gamma} U_\gamma$ e $(F_\alpha \cap U_\alpha = \phi$.

($Obs.$ como $(X, \mathcal{J})$ é fortemente P_κ-espaço temos que $\exists U_\alpha \subseteq \bigcap\limits_{\alpha<\gamma} U_\gamma$).

Assim existe $\{U_\alpha \in \mathcal{B} \ : \ \alpha < \lambda\}$ sequência decrescente tal que $(\forall \alpha < \lambda)\ (U_\alpha \cap F_\alpha = \phi$ ou F_α é denso em $(\bigcap\limits_{\alpha<\gamma} U_\gamma))$.

Seja $U = \bigcap\limits_{\alpha<\gamma} U_\gamma$. Observe que dado $F_\alpha \in \mathcal{F}$, se $F_\alpha \cap U \neq \phi$ temos que $F_\alpha \cap U_\alpha \neq \phi$, logo F_α é denso em U, assim temos que $\{F \in \mathcal{F} \ : \ F \cap U \neq \phi\} \subseteq \{F \in \mathcal{F} \ : \ F$ é denso em $U\}$.

Agora como $(X, \mathcal{J})$ é λ-hereditariamente irresolúvel temos que $|\{F \in \mathcal{F} \ : \ F$ é denso em $U\}| < \lambda$ portanto $|\{F \in \mathcal{F} \ : \ F \cap U \neq \phi\}| < \lambda$.

∎

Corolario 2.54 Seja $\lambda < \kappa$ e seja $(X, \mathcal{J})$ um fortemente P_κ-espaço λ-hereditariamente irresolúvel e seja $(Y, \mathcal{J}')$ um espaço tal que $\Delta(Y) < cf(\lambda)$. Então $X \times Y$ é λ-irresolúvel.

Demonstração

Como $(X, \mathcal{J})$ é fortemente P_κ-espaço então existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{J}$ que satisfaz a condição da Definição 2.52. Seja $\mu = \Delta(Y)$ e seja W um aberto de Y tal que $|W| = \mu$ assim $W = \{y_\alpha \ : \ \alpha < \mu\}$.

Agora seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de $X \times Y$ dois a dois disjuntos tal que $|\mathcal{F}| = \lambda$.

Vamos demonstrar que existe $\{U_\alpha \in \mathcal{B} \ : \ \alpha < \mu\}$ sequência decrescente tal que $(\forall \alpha < \mu)$ $(\ |\mathcal{F}| < \lambda \ )$ onde $\mathcal{F}_\alpha = \{F \in \mathcal{F} \ : \ (U_\alpha \times \{y_\alpha\}) \cap F \neq \phi\}$.

Para cada $\alpha < \mu$ seja $\mathcal{J}_\alpha = \{U \times \{y_\alpha\} \ : \ U \in \mathcal{J}\}$, assim $(X, \mathcal{J})$ é homeomorfo a $(X \times \{y_\alpha\}, \mathcal{J}_\alpha)$, então pelo Lema 2.53, tomando $\alpha = 0$ temos que existe $U_0 \in \mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{F}_0| < \lambda$.

Agora dado $\alpha < \mu$ suponhamos que existe $\{U_\gamma \in \mathcal{B} \ : \ \gamma < \alpha\}$ sequência decrescente tal que para cada $\beta < \alpha$ temos que $|\mathcal{F}_\beta| < \lambda$.

Seja $V = \bigcap_{\gamma < \alpha} U_\gamma$. Como $(X, \mathcal{J})$ é fortemente P_κ-espaço temos que V é aberto não vazio e portanto $(V, \mathcal{J})$ é fortemente P_κ-espaço λ-hereditariamente irresolúvel. Como $(V, \mathcal{J})$ é homeomorfo a $(V \times \{y_\alpha\}, \ \mathcal{J}_\alpha)$ pelo Lema 2.53 temos que existe $U_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $U_\alpha \subseteq V$ e $|\mathcal{F}_\alpha| < \lambda$. Assim $\{U_\alpha \in \beta \ : \ \alpha < \mu\}$ é uma sequência decrescente tal que $(\forall \alpha < \mu)$ $(\ |\mathcal{F}_\alpha| < \lambda \ )$.

Definamos $U = \bigcap_{\alpha < \mu} U_\alpha$. Assim para cada $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \cap (U \times W) \neq \phi$ temos que $F \in \bigcup_{\alpha < \mu} \mathcal{F}_\alpha$. Como $|\mathcal{F}_\alpha| < \lambda$ e $\mu < cof(\lambda)$ temos que $| \bigcup_{\alpha < \mu} \mathcal{F}_\alpha| < \lambda$, assim $|\{F \in \mathcal{F} \ : \ (U \times W) \cap F \neq \phi\}| < \lambda$.

Portanto não existe família $\mathcal{F}$, de densos disjuntos em $X \times Y$, de cardinalidade λ.

■

Teorema 2.55 Sejam λ, κ cardinais infinitos tais que $\lambda^+ < \kappa$ e suponhamos que existe $(X, \mathcal{J})$ um fortemente P_κ-espaço, Hausdorff, λ^+-fortemente irresolúvel, sem pontos isolados. Então existe $(Z, \mathcal{J}'')$ um espaço λ-resolúvel λ^+-fortemente irresolúvel tal que $\Delta(Z) \geq \kappa$.

Demonstração

Pela Proposição 2.24 existe um espaço $(Y, \mathcal{J}')$ Car-Homogêneo, maximalmente resolúvel de cardinalidade λ. Como $\lambda < cof(\lambda^+) = \lambda^+$ pelo Corolário 2.54 temos que $X \times Y$ é λ^+-irresolúvel. Assim pela Proposição 2.27 existe um aberto básico não vazio $U \times V$ de $X \times Y$ tal que $U \times V$ é λ^+-fortemente irresolúvel.
Seja $Z = U \times V$, vamos demonstrar que Z é λ-resolúvel.
Como V é aberto de Y e $(Y, \mathcal{J}')$ é λ-resolúvel temos que $(V, \mathcal{J}')$ é λ-resolúvel.
Assim existe $\{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ partição densa de $(V, \mathcal{J}')$, então $\{U \times D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ é partição densa de $U \times V$.
Como $(X, \mathcal{J})$ é fortemente P_κ-espaço, Haudorff, sem pontos isolados temos que $\Delta(X) \geq \kappa$, assim $\Delta(Z) \geq \Delta(U) \geq \Delta(X) \geq \kappa$.

■

Comentários

A existência de espaços resolúveis não maximalmente resolúveis foi mostrada por Ceder e Pearson[7] no ano 1967 e também por El'kin[8] no ano 1969 mas o primeiro exemplo Tychonoff foi dado por Van Douwen [D.93] a quem é devido o Teorema 2.46. Observamos que todo espaço Tychonoff resolúvel possui caráter de dispersão infinito, assim o Teorema 2.46 mostra a existência de espaços resolúveis não maximalmente resolúveis.

Nós não conhecemos a existência de espaços infinitamente resolúveis não maximalmente resolúveis em ZFC, mas o Teorema 2.50 mostra razoáveis candidatos a ser infinitamente mas não maximalmente resolúveis. Observamos que no caso de

[7]J. Ceder and T. Pearson, On products of maximally resolvable spaces, Pacific J. Math. 22 (1967) 31-45.

[8]A.G. El'kin, Resolvable spaces which are not maximally resolvable, Moscow Univ. Math. Bull. 24 (1969) 116-118.

existir uma generalizaçõ do lema 2.43 (i) teriamos de forma analoga ao Teorema 2.51, que os espaços dados pelo Teorema 2.50 são infinitamente mas não maximalmente resolúveis.

Eckertson [EC.97] usando um trabalho de Kunen[9] do ano 1983 mostra que a existência de um cardinal mensurável é equivalente à existência de um fortemente P_κ-espaço, Haudorff, fortemente irresolúvel. Portanto assumindo a existência de um cardinal mensurável pelo Teorema 2.55 temos a existência de um espaço infinitamente mas não maximalmente resolúveis.

Os Teorema 2.50 e 2.55 são devidos a Eckertson [EC.97].

2.5 Espaços ω-Resolúveis

Na seção anterior foi demonstrado que para cada $n < \omega$ existem espaços que são n-resolúveis mas não são $(n+1)$-resolúveis. Nesta seção começamos com lemas preliminares para demonstrar o teorema 2.58 o qual mostra que se um espaço é n-resolúvel para todo $n < \omega$ então ele é ω-resolúvel.

Continuamos preparando o caminho para demonstrar que todo espaço regular enumeravelmente compacto sem pontos isolados é ω-resolúvel. Assim introduzimos o conceito de espaço S_ω-like e demonstramos duas proposições, a primeira técnica e a segunda mostra que todo espaço S_ω-like é ω-resolúvel. Prosseguimos demonstrando dois lemas técnicos que são usados para demonstrar o teorema 2.68 o qual mostra que todo espaço regular enumeravelmente compacto sem pontos isolados é resolúvel. Logo a seguir demonstramos mais um lema técnico, com ele e usando os teoremas 2.58 e 2.68 demonstramos que todo espaço regular enumeravelmente compacto sem pontos isolados é ω-resolúvel.

[9] K. Kunen, Maximal σ-independent families, Fund. Math. 117 (1983) 75-80.

Lema 2.56 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço irresolúvel então $(X, \mathcal{J})$ possui um subespaço aberto não vazio hereditariamente irresolúvel.

Demonstração

Seja $V = \cup\{U \in \mathcal{J} \ : \ (U, \mathcal{J})$ é resolúvel $\}$ então pelo Teorema 1.19 temos que V é resolúvel e pela Proposição 1.18 temos $cl_X(V)$ é resolúvel, assim $cl_X(V) \neq X$. Seja $W = X \backslash cl_X(V)$, assim W é aberto não vazio e pela definição de V temos que W é hereditariamente irresolúvel.

■

Lema 2.57 Para cada espaço $(X, \mathcal{J})$ existe um aberto W e existe um subconjunto D de W tais que $X \backslash cl_X(W)$ é ω-resolúvel e D é hereditariamente irresolúvel e denso em W.

Demonstração

Dado $(X, \mathcal{J})$ seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos abertos U não vazios de $(X, \mathcal{J})$ tal que $(U, \mathcal{J})$ possui um subespaço denso $(D, \mathcal{J})$ que é hereditariamente irresolúvel.
Se $\mathcal{U} \neq \phi$ pelo lema de Zorn temos que existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ família maximal de conjuntos dois a dois disjuntos. Para cada $U \in \mathcal{A}$ seja D_U um subespaço denso em U hereditariamente irresolúvel. Definimos $D_0 = \cup\{D_U \ : \ U \in \mathcal{A}\}$ e $W = \cup\mathcal{A}$ (no caso em que $\mathcal{U} = \phi$ seja $W = D_0 = \phi$), assim temos que D_0 é denso em W. Vamos demonstrar que D_0 é hereditariamente irresolúvel.
Senão existe $V \in \mathcal{J}$ tal que $D_0 \cap V$ é subespaço resolúvel não vazio, assim pela definição de D_0 temos que existe $U \in \mathcal{A}$ tal que $D_U \cap V \neq \phi$. Como $\mathcal{A}$ é família disjunta temos que $D_0 \cap U = D_U$ assim D_U é aberto em D_0 e portanto $D_U \cap V$ é aberto não vazio em $D_0 \cap V$. Como $D_0 \cap V$ é resolúvel pela Proposição 1.17 temos que $D_U \cap V$ é resolúvel não vazio. Portanto temos que D_U não é hereditariamente irresolúvel, o que é contraditório.

Seja D subconjunto denso de $X\backslash cl_X(W)$, Vamos demonstrar que D é resolúvel. Senão temos que D é irresolúvel e pelo Lema 2.56 temos que existe $U \in \mathcal{J}$ tal que $D \cap U$ é hereditariamente irresolúvel não vazio, s.p.g. suponhamos que $U \subseteq X\backslash cl_X(W)$. Como D é denso em $X\backslash cl_X(W)$ e U é aberto em $X\backslash cl_X(W)$ temos que $D \cap U$ é denso em U (i.e. $U \in \mathcal{U}$ e portanto $\mathcal{U} \neq \phi$ o que é contraditório no caso $\mathcal{U} = \phi$). Assim temos que $U \in \mathcal{U}$ e como $U \subseteq X\backslash cl_X(W)$ temos que $\mathcal{A} \cup \{U\}$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A} \cup \{U\}$ mas $\mathcal{A}$ é maximal, o que é contraditório.

Vamos demonstrar que $X\backslash cl_X(W)$ é ω-resolúvel.
Seja E_0 subconjunto denso de $X\backslash cl_X(W)$ assim temos que E_0 é resolúvel logo existem $D_1, E_1 \subseteq E_0$ densos disjuntos de E_0. como E_1 é denso em E_0 e E_0 é denso em $X\backslash cl_X(W)$ temos que E_1 é denso em $X\backslash cl_X(W)$, assim existem D_2, E_2 subconjuntos disjuntos e densos em E_1 .
Logo por indução existe $\{D_n : n = 1, 2, \cdots\}$ sequência de subconjuntos densos de $X\backslash cl_X(W)$ e existe $\{E_n : n = 0, 1, \cdots\}$ sequência decrescente de subconjuntos densos de $X\backslash cl_X(W)$ tais que D_{n+1}, E_{n+1} são subconjuntos densos disjuntos de E_n.
Assim temos que $\{D_n : n = 1, 2, \cdots\}$ é família de subconjuntos densos dois a dois disjuntos de $X\backslash cl_X(W)$.

■

Teorema 2.58 Se para cada $n < \omega$ temos que $(X, \mathcal{J})$ é espaço n-resolúvel então $(X, \mathcal{J})$ é ω-resolúvel.

Demonstração

Vamos demonstrar que existem $\{X_i : i < \omega\}$, $\{W_i : i = 1, 2, \cdots\}$ e $\{D_n : i = 1, 2, \cdots\}$ tais que:

(i) D_i é subconjunto denso e hereditariamente irresolúvel de W_i.

(ii) W_i é aberto em X_{i-1} e $X_{i-1}\backslash cl_{X_{i-1}}(W_i)$ é ω-resolúvel.

(iii) $X_i = W_i\backslash D_i$.

Seja $X_0 = X$, assim pelo Lema 2.57 temos que existe W_1 aberto e existe um subconjunto D_1 de W_1 tais que $X_0\backslash cl_{X_0}(W_1)$ é ω-resolúvel e D_1 é hereditariamente irresolúvel e denso em W_1.

Seja $n < \omega$ e suponhamos que existem $\{X_i : i < n\}$, $\{W_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$ e $\{D_n : i = 1, 2, \cdots, n\}$ tais que (i), (ii), (iii).

Vamos a definir X_n, W_{n+1}, D_{n+1}.

Seja $X_n = W_n\backslash D_n$ assim aplicando o Lema 2.57 temos que existe W_{n+1} aberto e existe $D_{n+1} \subseteq W_{n+1}$ tais que $X_n\backslash cl_{X_n}(W_{n+1})$ é ω-resolúvel e D_{n+1} é hereditariamente irresolúvel e denso em W_{n+1}.

Assim por indução temos que existe $\{X_n : n < \omega\}$, $\{W_n : n = 1, 2, \cdots\}$ e $\{D_n : n = 1, 2, \cdots\}$ tais que (i), (ii) e (iii) estão satisfeitos.

Agora por (ii) para cada $n_0 \in \{1, 2, \cdots\}$ temos que $X_{n_o-1}\backslash cl_{X_{n_o-1}}(W_{n_o})$ é ω-resolúvel, assim existe uma partição $\{E_i^{(n_o)} : i = n_o, n_o + 1, \cdots\}$ de subconjuntos densos de $X_{n_o-1}\backslash cl_{X_{n_o-1}}(W_{n_o})$.

Seja $F_1 = D_1 \cup E_1^{(1)}$ e para cada $n \geq 2$ seja $F_n = D_n \cup (\bigcup_{i=1}^{n} E_n^{(i)})$.

Afirmação 1. $\{F_n : n = 1, 2, \cdots\}$ é família de conjuntos disjuntos.

Afirmação 2. Para cada $n \in \{1, 2, \cdots\}$ temos que X_n é denso em W_n.

Seja $n \geq 1$, vamos demonstrar que F_n é denso em X.

Seja U aberto não vazio.

Se $W_1 \cap U = \phi$ então $U \subseteq X\backslash cl_X(W_1)$ e como $E_n^{(1)}$ é denso em $X\backslash cl_X(W_i)$ temos que $\phi \neq E_n^{(1)} \cap U \subseteq F_n \cap U$ assim $F_n \cap U = \phi$.

Se $W_1 \cap U \neq \phi$, pela Afirmação 2 temos que X_1 é denso em W_1 assim

$U \cap X_1 \neq \phi$. Agora se $W_2 \cap U = \phi$ então $U \cap X_1 \subseteq X_1 \backslash cl_{X_1}(W_2)$ e como $E_n^{(2)}$ é denso em $X_1 \backslash cl_X(W_2)$ temos que $U \cap X_1 \cap E_n^{(2)} \neq \phi$ e como $E_n^{(2)} \subseteq F_n$ temos que $U \cap F_n \neq \phi$. Assim s.p.g. suponhamos que $W_2 \cap U \neq \phi$, pela Afirmação 2 temos que X_2 é denso em W_2 assim $X_2 \cap U \neq \phi$.

Continuando o procedimento obtemos que existe $i \leq n$ tal que

$$(U \cap X_{i-1} \neq \phi \text{ e } U \cap W_i = \phi) \text{ ou } (U \cap X_n \neq \phi \text{ e } U \cap W_n \neq \phi).$$

No primeiro caso temos que $U \cap X_{i-1} \subseteq X_{i-1} \backslash cl_{X_{i-1}}(W_i)$ e como $E_n^{(i)}$ é denso em $cl_{X_{i-1}}(W_i)$ temos que $U \cap X_{i-1} \cap E_n^{(i)} \neq \phi$ assim $U \cap F_n \neq \phi$.

No segundo caso como D_n é denso em W_n temos que $U \cap W_n \cap D_n \neq \phi$ e como $D_n \subseteq F_n$ temos que $U \cap F_n \neq \phi$.

Assim temos que F_n é denso em X e pela Afirmação 1 temos que X é ω-resolúvel.

Demonstração da afirmação 1.

Vamos demonstrar que para cada $j \leq n$ temos que $E_n^{(j)} \cap D_m = \phi$.

Se $j \leq m$ temos que $D_m \subseteq W_m \subseteq W_j$ e como $E_n^{(j)} \subseteq X_{j-1} \backslash W_j$ temos que $E_n^{(j)} \cap D_m = \phi$.

Se $j > m$ temos que $E_n^{(j)} \subseteq X_{j-1} \subseteq X_m = W_m \backslash D_m$ assim temos que $E_n^{(j)} \cap D_m = \phi$.

Seja $n \neq m$, mostraremos que $D_n \cap D_m = \phi$

Se $n < m$ temos que $D_m \subseteq W_m \subseteq X_{m-1} \subseteq X_n = W_n \backslash D_n$ assim $D_n \cap D_m = \phi$.

Seja $n \neq m$, mostraremos que $E_n^{(i)} \cap E_m^{(j)} = \phi$.

Se $i = j$ como $m \neq n$ temos que $E_n^{(i)} \cap E_m^{(i)} = \phi$.

Se $i < j$ temos que $E_m^{(j)} \subseteq X_{j-1} \subseteq X_i \subseteq W_i$ e como $E_n^{(i)} \subseteq X_{i-1} \backslash W_i$ temos que $E_n^{(i)} \cap E_m^{(j)} = \phi$.

Logo pela definição de F_n temos que $\{F_n \ : \ n = 1, 2, \cdots\}$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Demonstração da afirmação 2.

Senão existe $U \in \mathcal{J}$ tal que $U \cap W_n \neq \phi$ e $X_n \cap U \cap W_n = \phi$. Como cada W_j é aberto em X_{j-1} temos que existe $Z_j \in \mathcal{J}$ tal que $W_j = Z_j \cap X_{j-1}$, seja $U_0 = U \cap (\bigcap_{j=1}^{n} Z_j)$.

Vamos demonstrar que $U_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Senão existe $x \in U_0 \backslash (\bigcup_{i=1}^{n} D_i)$, como $x \in U_0$ temos que $x \in Z_1$ e como $X_0 = X$ temos que $x \in Z_1 \cap X_0 = W_1$ e como $x \notin D_1$ temos que $x \in W_1 \backslash D_1 = X_1$. Assim $x \in U_0 \cap X_1$ logo $x \in Z_2 \cap X_1 = W_2$ e como $x \notin D_2$ temos que $x \in W_2 \backslash D_2 = X_2$, assim $x \in U_0 \cap X_2$.

Agora por indução temos que $x \in U_0 \cap X_{n-1}$ logo $x \in Z_n \cap X_{n-1} = W_n$ e como $x \in U$ temos que $x \in U \cap W_n$. Como $X_n \cap W_n \cap U = \phi$ temos que $x \in U \cap W_n \subseteq W_n \backslash X_n = D_n$ assim temos que $x \notin U_0 \backslash (\bigcup_{i=1}^{n} D_i)$ o que é contraditório, portanto $U_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ e assim $U_0 = \bigcup_{i=1}^{n} (U_0 \cap D_i)$.

Vamos demonstrar que U_0 é $(n+1)$-irresolúvel.

Como $U_0 = U \cap (\bigcap_{i=1}^{n} Z_i)$ temos que $U_0 \cap W_n = U \cap (\bigcap_{i=1}^{n} Z_i) \cap W_n$. Como $W_k \subseteq Z_k$ e $\{W_i : i = 1, 2, \cdots\}$ é decrescente temos que $(\bigcap_{i=1}^{n} Z_i) \cap W_n = W_n$ assim $U_0 \cap W_n = U \cap W_n \neq \phi$. Assim para cada $j = 1, 2, \cdots, n$ temos que $U \cap W_n \subseteq U_0 \cap W_j$ e assim $U_0 \cap W_j$ é aberto não vazio de W_j. Como D_j é denso em W_j temos que $U_0 \cap D_j$ é não vazio e como D_j é hereditariamente irresolúvel e U_0 é aberto temos que $D_j \cap U_0$ é hereditariamente irresolúvel. Como $U_0 = \bigcup_{i=1}^{n} (U_0 \cap D_i)$ pelo Lema 2.43 temos que U_0 é $(n+1)$-irresolúvel.

Assim pela proposição 1.17 temos que X é $(n+1)$-irresolúvel mas por hipótese X é $(n+1)$-resolúvel o que é contraditorio. Isto mostra que é contraditório supor que X_n não é denso em W_n.

■

Introduzimos a seguinte notação a ser usada na definição 2.61 de espaço S_ω-like.

Notação 2.59 Dado um conjunto A e um ordinal α nos escrevemos como ${}^{\alpha}A$ o conjunto das sequências em A de comprimento α, assim ${}^{<\omega}A = \bigcup_{n<\omega} {}^{n}A$ e dada $f \in {}^{\alpha}A$, $l(f)$ denota o comprimento de f (i.e. $l(f) = \alpha$). Agora dadas $f \in {}^{\alpha}A$ e $g \in {}^{\beta}A$ definimos $f^\frown g \in {}^{\alpha+\beta}A$ como $f^\frown g/\alpha \equiv f$ e para cada $\gamma < \beta$ como $f^\frown g(\alpha + \gamma) = g(\gamma)$.

Definição 2.60 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço e seja $Y \subseteq X$. Então um ponto $x \in X$ é dito ponto de acumulação de Y se para cada $U \in \mathcal{J}$ tal que $x \in U$ temos que $|U \cap Y| \geq \omega$.

O conjunto dos pontos de acumulação de Y é denotado por $acc_{(X,\mathcal{J})}(Y)$ e quando não haver perigo de confusão simplesmente por $acc(Y)$, $acc_X(Y)$ ou $acc_{\mathcal{J}}(Y)$.

Definição 2.61 Um espaço $(X, \mathcal{J})$ é chamado S_ω-like com raiz $x \in X$ se X pode ser enumerado por ${}^{<\omega}\omega$ de modo que:

(i) $x = x_{\langle\phi\rangle}$ onde $\langle\phi\rangle$ denota a sequência vazia.

(ii) Para cada $f \in {}^{<\omega}\omega$ temos que $\{x_{f^\frown m} : m < \omega\}$ é um subespaço discreto de $(X, \mathcal{J})$.

(iii) Para cada $f \in {}^{<\omega}\omega$ temos que $x_f \in acc\{x_{f^\frown m} : m < \omega\}$.

A demonstração da próxima proposição está no apêndice A.

Proposição 2.62 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço regular e suponhamos que existe S subconjuntos enumerável de X tal que para cada $x \in S$ existe $A \subseteq S$ subespaço discreto com $x \in acc(A)$. Então para cada $x \in S$ existe um subespaço Y de $(X, \mathcal{J})$ que é S_ω-like, com raiz x.

Proposição 2.63 Cada espaço S_ω-like é ω-resolúvel.

Demonstração

Seja $(X,\mathcal{J})$ um espaço S_ω-like assim temos que $X=\{x_f : f\in {}^{<\omega}\omega\}$ onde $\{x_f : f\in {}^{<\omega}\omega\}$ satisfaz as condições da Definição 2.61.

Seja $x_f\in U\in\mathcal{J}$, vamos demonstrar que para cada $j>l(f)$ existe $g\in {}^{j}\omega$ tal que $x_g\in U$.

Seja $n=l(f)$ e seja $j=n+1$, como $x_f\in acc\{x_{f^\frown m} : m<\omega\}$ e $x_f\in U\in\mathcal{J}$ temos que existe $m<\omega$ tal que $x_{f^\frown m}\in U$. Definimos $g=f^\frown m$ assim temos que $l(g)=n+1$ e $g\in U$.

Agora dado $j>n$ suponhamos que existe $g'\in {}^{j-1}\omega$ tal que $x_{g'}\in U$. Como $x_{g'}\in acc\{x_{g'^\frown m} : m<\omega\}$ e $x_{g'}\in U\in\mathcal{J}$ temos que existe $m<\omega$ tal que $x_{g'^\frown m}\in U$. Definimos $g=g'^\frown m$ assim $g\in {}^{j}\omega$ e $x_g\in U$.

Assim por indução temos que para cada $j<\omega$ existe $g\in {}^{j}\omega$ tal que $x_g\in U$.

Seja $\{A_n\subseteq\omega : n<\omega\}$ partição em conjuntos infinitos de ω e para cada $n<\omega$ seja $D_n=\{x_f : l(f)\in A_n\}$. Assim temos que $\{D_n\subseteq X : n<\omega\}$ é família de conjuntos disjuntos de X.

Vamos demonstrar que cada D_m é denso em X. Seja $m<\omega$ e U aberto não vazio, assim existe $x_f\in U$, seja $n<\omega$ tal que $n=l(f)$. Como A_m é infinito temos que existe $j\in A_m$ tal que $n<j$, logo existe $g\in {}^{j}\omega$ tal que $x_g\in U$, e portanto $D_m\cap U\neq\phi$. Assim D_m é denso em X e portanto X é ω-resolúvel.

■

Definição 2.64 Um espaço $(X,\mathcal{J})$ é dito enumeravelmente compacto se para cada $Y\subseteq X$ infinito temos que $acc_X(Y)\neq\phi$.

A seguir introduzimos a seguinte notação, que sera usada até o final desta seção.

Notação 2.65 Para cada $(X, \mathcal{J})$ e cada $Y \subseteq X$ nos escrevemos

$$\tilde{Y} = \cup\{acc_X(D) \; : \; D \in [Y]^\omega \text{ e } D \text{ é discreto}\}$$

$$A(X) = \tilde{X} \quad , \quad V(X) = int_X(A(X)) \quad \text{e} \quad I(X) = X \backslash A(X).$$

A demonstração do próximo lema está no apêndice A.

Lema 2.66 Seja $(X, \mathcal{J})$ espaço regular enumeravelmente compacto e seja $A \subseteq X$ então $A \cup \tilde{A}$ é enumeravelmente compacto.

Lema 2.67 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço regular enumeravelmente compacto sem pontos isolados então:

(i) $A(X)$ é denso.

(ii) $V(X)$ é ω-resolúvel.

Demonstração

(i) Senão temos que existe $x \in X \backslash cl_X(A(X))$ e como $(X, \mathcal{J})$ é regular temos que existe $U, V \in \mathcal{J}$ tais que $x \in U$, $cl_X(A(X)) \subseteq V$ e $U \cap V = \phi$. Agora pelo Lema 2.66 temos que $U \cup \tilde{U}$ é enumeravelmente compacto e como $U \cap V = \phi$ temos que $(U \cup \tilde{U}) \cap V = \phi$. Como $(X, \mathcal{J})$ não possui pontos isolados temos que $|U| \geq \omega$, logo existe $y \in \tilde{U}$ e portanto $y \in A(X)$. Como $y \in \tilde{U} \cap V$ temos que $(U \cup \tilde{U}) \cap V \neq \phi$, o que é contraditório.

(ii) Seja $x \in V(X)$, como $V(X) \subseteq \tilde{X}$ temos que existe um subespaço D discreto e enumerável tal que $x \in acc_X(D)$. Como $V(X)$ é aberto, D é discreto e $(X, \mathcal{J})$ não possui pontos isolados temos que $V(X) \cap D$ é infinito, logo $x \in acc_X(V(X) \cap D)$, assim s.p.g. suponhamos que $D \subseteq V(X)$.
Agora novamente para cada $x' \in D \subseteq V(X)$ vai existir $D' \subseteq V(X)$ tal que D' é subespaço discreto enumeravel e $x' \in acc_X(D')$, assim para cada $x'' \in D'$ repetimos

o processo e assim por diante, logo obtemos uma família $\{D_\alpha \subseteq V(X) \ : \ \alpha \in I\}$. Seja $S_x = \cup\{D_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$, portanto S_x é um subespaço enumerável e para cada $y \in S_x$ existe um subespaço $D \subseteq S_x$ discreto tal que $y \in acc_X(D)$.
Logo pela Proposição 2.62 como $x \in S_x$ temos que existe um subespaço Y_x que é S_ω-like, com raiz x tal que $Y_x \subseteq V(X)$ e pela Proposição 2.63 temos que Y_x é ω-resolúvel. Assim $V(X) = \cup\{Y_x \ : \ x \in V(X)\}$ onde cada Y_x é ω-resolúvel, logo pelo Teorema 1.19 temos que $V(X)$ é ω-resolúvel.

■

Teorema 2.68 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço regular, enumeravelmente compacto sem pontos isolados então $(X, \mathcal{J})$ é resolúvel.

Demonstração

Vamos demonstrar que $I(X) \cap X \backslash cl_X(V(X))$ é denso em $X \backslash cl_X(V(X))$.
Senão existe U aberto não vazio contido em $X \backslash cl_X(V(X))$ tal que $U \cap I(X) \cap X \backslash cl_X(V(X)) = \phi$. Como $I(X) = X \backslash (A(X))$ e $U \subseteq X \backslash cl_X(V(X))$ temos que $U \subseteq A(X)$. Como $U \in \mathcal{J}$ temos que $U \subseteq int_X(A(X)) = V(X) \subseteq cl_X(V(X))$, logo $U \cap (X \backslash cl_X(V(X))) = \phi$. Portanto $U = \phi$, o que é contraditório.

Agora pelo Lema 2.67 temos que $A(X)$ é denso em $(X, \mathcal{J})$ e como $X \backslash cl_X(V(X))$ é aberto temos que $A(X) \cap (X \backslash cl_X(V(X)))$ é denso em $X \backslash cl_X(V(X))$. Como $A(X) \cap I(X) = \phi$ e $I(X) \cap X \backslash cl_X(V(X))$ é denso em $X \backslash cl_X(V(X))$ temos que $X \backslash cl_X(V(X))$ é resolúvel.
Agora pelo Lema 2.67 temos que $V(X)$ é resolúvel e pela Proposição 1.18 temos que $cl_X(V(X))$ é resolúvel, assim pelo Teorema 1.19 temos que X é resolúvel.

■

Lema 2.69 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço regular, enumeravelmente compacto sem pontos isolados e sejam V_0, V_1 subconjuntos densos disjuntos de $V(X)$. Sejam

$$F = A(X) \backslash cl_X(V(X)) \ \cup \ [\ A(X) \backslash cl_X(V(X))\ ]^{\sim},$$

$$D = V_0 \cup I(X) \quad \text{e} \quad E = V_1 \cup F.$$

Então

(i) D e E são densos de $(X, \mathcal{J})$.

(ii) $D \cap E = \phi$.

(iii) F é enumeravelmente compacto sem pontos isolados.

Demonstração

(i) Seja U aberto não vazio.

Vamos demonstrar que $D \cap U \neq \phi$.

Senão temos que $(V_0 \cap U) \cup (I(X) \cap U) = \phi$, como V_0 é denso em $V(X)$ e $V_0 \cap U = \phi$ temos que $V(X) \cap U = \phi$. Como $I(X) \cap U = \phi$ temos que $U \subseteq X \backslash I(X) = A(X)$ e como U é aberto temos que $U \subseteq int_X(A(X)) = V(X)$, portanto temos que $U = \phi$ o que é contraditório.

Vamos demonstrar que $E \cap U \neq \phi$.

Senão temos que $(V_1 \cap U) \cup (F \cap U) = \phi$, como $V_1 \cap U = \phi$ e V_1 é denso em $V(X)$ temos que $V(X) \cap U = \phi$, logo $cl_X(V(X)) \cap U = \phi$ e portanto $U \subseteq X \backslash cl_X(V(X))$. Agora pela definição de F temos que $(\ A(X) \backslash cl_X(V(X))\ ) \cap U = \phi$ e como $U \subseteq X \backslash cl_X(V(X))$ temos que $A(X) \cap U = \phi$. Pelo Lema 2.67 temos que $A(X)$ é denso em X portanto temos que $U = \phi$ o que é contraditório.

(ii) Temos que $D \cap E = (V_0 \cap V_1) \cup (I(X) \cap V_1) \cup (V_0 \cap F) \cup (I(X) \cap F)$.

Como V_0, V_1 são densos disjuntos de $V(X)$ temos que $V_0 \cap V_1 = \phi$.

Como $V_1 \subseteq V(X) \subseteq A(X)$ e $I(X) = X \backslash A(X)$ temos que $I(X) \cap V_1 = \phi$.

Como $V_0 \subseteq V(X)$ temos que $V_0 \cap (X \backslash V(X)) = \phi$ e portanto temos que $V_0 \cap X \backslash cl_X(V(X)) = \phi$ assim temos que $V_0 \cap A(X) \backslash cl_X(V(X)) = \phi$. Agora como $V(X)$ é aberto temos que $[\ A(X) \backslash cl_X(V(X))\ ]^{\sim} \subseteq cl_X(X \backslash V(X)) = X \backslash V(X)$ e como $V_0 \cap (X \backslash V(X)) = \phi$ temos que $V_0 \cap [\ A(X) \backslash cl_X(V(X))\ ]^{\sim} = \phi$ portanto $V_0 \cap F = \phi$.

Como $I(X) = X \backslash A(X)$ temos que $I(X) \cap A(X) \backslash cl_X(V(X)) = \phi$. Como $[\ A(X) \backslash cl_X(V(X))\ ]^{\sim} \subseteq \tilde{X} = A(X)$ temos que $I(X) \cap (A(X) \backslash cl_X(V(X)))^{\sim} \subseteq I(X) \cap A(X) = \phi$. Assim temos que $I(X) \cap F = \phi$.

(iii) Pelo Lema 2.66 temos que F é enumeravelmente compacto, vamos demonstrar que F não possui pontos isolados.

Seja $x \in F$ e seja U aberto tal que $x \in U$.

Se $x \in (A(X) \backslash cl_X(V(X)))^{\sim}$ temos que $|U \cap A(X) \backslash cl_X(V(X))| \geq \omega$, logo $|U \cap F| \geq \omega$.

Se $x \in A(X) \backslash cl_X(V(X))$ temos que $U \cap X \backslash cl_X(V(X))$ é aberto não vazio de X e como $A(X)$ é denso em X com $(X, \mathcal{J})$ Hausdorff sem pontos isolados temos que

$$|\ U \cap A(X) \backslash cl_X(V(X))\ | = |\ U \cap X \backslash cl_X(V(X)) \cap A(X)\ | \ \geq \ \omega$$

assim temos que $|U \cap F| \geq \omega$.

■

Teorema 2.70 Todo espaço regular, enumeravelmente compacto sem pontos isolados é ω-resolúvel.

Demonstração

Suponhamos que para cada $n < \omega$ temos que $(X, \mathcal{J})$ é n-resolúvel então pelo Teorema 2.58 temos que $(X, \mathcal{J})$ é ω-resolúvel.

Vamos demonstrar que para cada $n < \omega$ e para cada $(X, \mathcal{J})$ espaço regular, enumeravelmente compacto sem pontos isolados temos que $(X, \mathcal{J})$ é n-resolúvel.

Pelo Teorema 2.68 temos que para $n = 2$ é verdadeiro, agora seja $n < \omega$ e suponhamos que para cada espaço $(X, \mathcal{J})$ regular, enumeravelmente compacto sem pontos isolados temos que $(X, \mathcal{J})$ é n-resolúvel.

Vamos demonstrar que $(X, \mathcal{J})$ é $(n+1)$-resolúvel.

Fixo $(X, \mathcal{J})$, seja $F \subseteq X$ como no Lema 2.69. Assim temos que $(F, \mathcal{J})$ é um espaço regular, enumeravelmente compacto sem pontos isolados logo pela hipótese de indução temos que $(F, \mathcal{J})$ é n-resolúvel, assim existe $\{F_i : 0 < i \leq n\}$ partição em densos disjuntos de $(F, \mathcal{J})$. Agora pelo Lema 2.67 temos que $V(X)$ é ω-resolúvel, assim existe $\{V_i : i < n+1\}$ partição em densos disjuntos de $(V(X), \mathcal{J})$. Agora definamos $D_0 = V_0 \cup I(X)$ e para cada $0 < i \leq n$ definamos $D_i = V_i \cup F_i$.

Vamos demonstrar que $\{D_i : i < n+1\}$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Sejam $1 \leq i,\ j < (n+1)$ assim

$$D_i \cap D_j = (V_i \cap V_j) \cup (V_i \cap F_j) \cup (F_i \cap V_j) \cup (F_i \cap F_j).$$

Como $\{V_i : i \leq n\}$ e $\{F_i : 0 \leq i \leq n\}$ são famílias disjuntas temos que $V_i \cap V_j = \phi = F_i \cap F_j$, e como no Lema 2.69 parte (ii) já foi mostrado que $V_i \cap F = \phi = V_j \cap F$ e como $F_i,\ F_j \subseteq F$ temos que $V_i \cap F_j = F_i \cap V_j = \phi$.

Agora no caso em que $i = 0$ e $i \leq j < (n+1)$ temos que

$$D_0 \cap D_j = (V_0 \cap V_j) \cup (V_0 \cap F_j) \cup (I(X) \cap V_j) \cup (I(X) \cap F_j).$$

Novamente temos que $V_0 \cap V_j = \phi$ e como no Lema 2.69 parte (ii) já foi mostrado que $V_0 \cap F = I(X) \cap V_j = I(X) \cap F = \phi$ temos que $D_0 \cap D_j = \phi$.

Vamos demonstrar que cada D_i é denso em $(X, \mathcal{J})$.

Pelo lema 2.69 temos que D_0 é denso em $(X, \mathcal{J})$ e que para cada $0 < i < n+1$ temos que $V_i \cup F$ é denso em $(X, \mathcal{J})$. Como cada D_i é denso em $V_i \cup F$ temos que D_i é denso em $(X, \mathcal{J})$.

Assim temos que $(X, \mathcal{J})$ é $(n+1)$-resolúvel.

$\blacksquare$

Comentários

O teorema 2.58 é devido a Illanes [I.96] e o teorema 2.70 é devido a Comfort e García-Ferreira [C.G.96].

Capítulo 3

Resolubilidade em Grupos Topológicos

3.1 Grupos Fortemente Resolúveis

Nesta seção introduzimos o conceito de grupo fortemente resolúvel. Inicialmente apresentamos alguns resultados básicos para o estudo de grupos fortemente resolúveis.

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar que todo grupo abeliano com 2-posto finito é um grupo fortemente resolúvel. O teorema 3.6 mostra que se G é um grupo que é soma direta de uma família de grupos abelianos fortemente resolúveis e G tem 2-posto finito então G é um grupo fortemente resolúvel. A seguir demonstramos que os grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(p^{\infty})$, $\bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}(p^{\infty})$, $\mathbb{Q}$ são grupos fortemente resolúveis. Prosseguimos usando a estrutura de um grupo divisível para demonstrar que todo grupo divisível com 2-posto finito é fortemente resolúvel. Para encerrar a seção usamos a existência de um grupo divisível minimal contendo um grupo abeliano dado para demonstrar que todo grupo abeliano com 2-posto finito é um grupo fortemente resolúvel.

Definição 3.1 Um grupo $(G,\cdot)$ é dito fortemente resolúvel se para cada topologia de grupo não discreta $\mathcal{T}$ em G temos que $((G,\cdot),\mathcal{T})$ é resolúvel.

Lema 3.2 Sejam $(G,\cdot)$ um grupo abeliano, H um subgrupo de G e $\mathcal{J}$ uma topologia de grupo em $(H,\cdot)$. Definimos

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq G \ : \ (\forall g \in G)((g^{-1}U) \cap H \in \mathcal{J})\}.$$

Então $((G,\cdot),\mathcal{T})$ é grupo topológico, H é aberto em $(G,\mathcal{T})$ e $(H,\mathcal{J}) = (H,\mathcal{T}_H)$.

Demonstração

Sejam $U, V \in \mathcal{T}$. Então $(g^{-1}V) \cap H \in \mathcal{J}$ para cada $g \in G$. Portanto $(g^{-1}(U \cap V)) \cap H = (g^{-1}U) \cap (g^{-1}V) \cap H \in \mathcal{J}$. Logo $U \cap V \in \mathcal{T}$. Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ assim para cada $U \in \mathcal{T}$ e cada $g \in G$ temos que $(g^{-1}U) \cap H \in \mathcal{J}$. Portanto $(g^{-1}(\cup\mathcal{A})) \cap H = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} (g^{-1}U) \cap H \in \mathcal{J}$, logo $\cup\mathcal{A} \in \mathcal{T}$. Além disso, $\phi, G \in \mathcal{T}$ portanto $(G,\mathcal{T})$ é espaço topológico.

Seja $m : G \times G \to G$ dada por $m(x,y) = xy$. Vamos demonstrar que m é contínua. Sejam $U \in \mathcal{T}$ e $x,\ y \in G$ tais que $xy \in U$. Mostraremos que existem $V,\ W \in \mathcal{T}$ tais que $(x,y) \in V \times W$ e $V \cdot W \subseteq U$. Como $U \in \mathcal{T}$, temos que $((xy)^{-1}U) \cap H \in \mathcal{J}$. Como $(H,\mathcal{J})$ é grupo topológico e $1 \cdot 1 \in ((xy)^{-1}U) \cap H$ temos que existem $A,\ B \in \mathcal{J}$ tais que $(1,1) \in A \times B$ e $A \cdot B \subseteq ((xy)^{-1}U) \cap H$. Sejam $V = xA$ e $W = yB$. Como $ab \in y^{-1}x^{-1}U$ para cada $(a,b) \in A \times B$, temos que $(xa)(yb) \in U$ (pois G é abeliano). Portanto $V \cdot W \subseteq U$ e como $(1,1) \in A \times B$ temos que $(x,y) \in V \times W$. Veremos agora que $V,\ W \in \mathcal{T}$. Seja $g \in G$, então $g^{-1}V = (g^{-1}x)A$. Se $g^{-1}x \notin H$, como $A \subseteq H$ e H é subgrupo, temos que, $((g^{-1}x)A) \cap H = \phi \in \mathcal{J}$. Agora, se $g^{-1}x \in H$, como $A \in \mathcal{J}$ e $(H,\mathcal{J})$ é grupo topológico, então $(g^{-1}x)A \in \mathcal{J}$ e $(g^{-1}xA) \cap H = (g^{-1}x)A \in \mathcal{J}$. Logo, $V \in \mathcal{T}$. Analogamente temos que $W \in \mathcal{T}$. Portanto $m : G \times G \to G$ é contínua.

Seja $i : G \to G$ dada por $i(x) = x^{-1}$, vamos demonstrar que i é contínua. Seja $U \in \mathcal{T}$ e $x \in G$ tal que $x^{-1} \in U$. Mostraremos que existe $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V$ e $V^{-1} \subseteq U$. Como $U \in \mathcal{T}$, temos que $(xU) \cap H \in \mathcal{J}$. Além disso $(H, \mathcal{J})$ é grupo topológico e $1 \in (xU) \cap H$, logo existe $A \in \mathcal{J}$ tal que $1 \in A$ e $A^{-1} \subseteq (xU) \cap H$. Seja $V = xA$. Como para cada $a \in A$ temos que $a^{-1} \in x \cdot U$ então $a^{-1}x^{-1} \in U$ (pois G é abeliano) e portanto $V^{-1} \subseteq U$. Como $1 \in A$ temos que $x \in V$. Mostraremos que $V \in \mathcal{T}$.
Seja $g \in G$, então $g^{-1}V = (g^{-1}x)A$. Se $g^{-1}x \notin H$, como $A \subseteq H$ e H é subgrupo temos que $((g^{-1}x)A) \cap H = \phi \in \mathcal{J}$. Agora, se $g^{-1}x \in H$, como $A \in \mathcal{J}$ e $(H, \mathcal{J})$ é grupo topológico, então $(g^{-1}x)A \in \mathcal{J}$. Assim $((g^{-1}x)A) \cap H = (g^{-1}x)A \in \mathcal{J}$ para cada $g \in G$ e $V \in \mathcal{T}$. Portanto $i : G \to G$ é contínua.

Mostramos acima que $(G, \mathcal{T})$ é grupo topológico, agora vamos demonstrar que $(H, \mathcal{J}) = (H, \mathcal{T}_H)$. Seja $U \in \mathcal{T}$, assim temos que $U \cap H = (1^{-1}U) \cap H \in \mathcal{J}$ portanto temos que $\mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{J}$. Agora, sejam $U \in \mathcal{J}$ e $g \in G \backslash H$. Como $U \subseteq H$ e H é subgrupo de G temos que $(g^{-1}U) \cap H = \phi \in \mathcal{J}$, agora se $g \in H$ como $U \in \mathcal{J}$ e $(H, \mathcal{J})$ é grupo topológico temos que $g^{-1}U \in \mathcal{J}$ assim $(g^{-1}U) \cap H = g^{-1}U \in \mathcal{J}$. Portanto $U \in \mathcal{T}$, e concluímos que $H \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{T}_H$. Portanto $(H, \mathcal{T}_H) = (H, \mathcal{J})$.

■

Proposição 3.3 Seja $(G, \cdot)$ um grupo abeliano e suponhamos que existe H subgrupo de $(G, \cdot)$ tal que $(H, \cdot)$ não é um grupo fortemente resolúvel. Então $(G, \cdot)$ não é um grupo fortemente resolúvel.

Demonstração

Como H não é fortemente resolúvel temos que existe $\mathcal{J}$ topologia de grupo não discreta tal que $(H, \mathcal{J})$ é irresolúvel. Seja

$\mathcal{T} = \{U \subseteq G : (\forall g \in G)((g^{-1}U) \cap H \in \mathcal{J})\}$ assim pelo Lema 3.2 temos que $(G, \mathcal{T})$ é grupo topológico tal que $(H, \mathcal{J}) = (H, \mathcal{T}_H)$. Como $H \in \mathcal{T}$ e $(H, \mathcal{T}_H)$ não é discreto temos que $(G, \mathcal{T})$ não é discreto e como H é $\mathcal{T}$-aberto irresolúvel, pela Proposição 1.17, temos que $(G, \mathcal{T})$ é irresolúvel. Assim G não é fortemente resolúvel.

■

Teorema 3.4 Seja G um grupo abeliano e seja H um subgrupo de G tais que H e G/H são fortemente resolúveis. Então G é fortemente resolúvel.

Demonstração

Seja $\mathcal{T}$ uma topologia de grupo não discreta em G. Vamos demonstrar que $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel. Pelo Corolário 1.24, podemos supor que H é subgrupo fechado de $(G, \mathcal{T})$. Se $(H, \mathcal{T}_H)$ não é discreto, como H é fortemente resolúvel, então $(H, \mathcal{T}_H)$ é resolúvel. Pelo Corolário 1.22, temos que $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel assim s.p.g. suponhamos que $(H, \mathcal{T}_H)$ é discreto.

Mostraremos que G/H, com a topologia quociente, não é discreto. Senão temos que $\{1\}$ é aberto em G/H e assim temos que H é aberto em $(G, \mathcal{T})$ mas $(H, \mathcal{T}_H)$ é discreto assim temos que $(G, \mathcal{T})$ é discreto o que é contraditório.

Agora, como G/H com a topologia quociente não é discreto e G/H é fortemente resolúvel, temos que G/H é resolúvel. Além disso H é subgrupo fechado de $(G, \mathcal{T})$, logo, $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel pela Proposição 1.25.

■

Corolario 3.5 Sejam E e F grupos abelianos fortemente resolúveis e seja $G = E \times F$ então G é fortemente resolúvel.

Demonstração

Seja $H = \{1\} \times F$, assim temos que H é isomorfo a F e G/H é isomorfo a E. Assim, H é subgrupo de G com H e G/H fortemente resolúveis. Então G é fortemente resolúvel pelo Teorema 3.4.

■

Teorema 3.6 Seja $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de grupos abelianos fortemente resolúveis e seja $G = \bigoplus_{\alpha<\kappa} G_\alpha$. Suponhamos que o 2-posto de G é finito então G é um grupo fortemente resolúvel.

Demonstração

Por indução sobre a classes dos cardinais. Seja

$$\kappa = min\{\lambda \ : \ G = \bigoplus_{\alpha<\lambda} G_\alpha \text{ não é grupo fortemente resolúvel}\}$$

então, pelo Corolário 3.5, temos que $\kappa \geq \omega$. Suponhamos s.p.g. que $|G_\alpha| > 1$ para cada $\alpha < \kappa$ e seja $\mathcal{T}$ uma topologia de grupo não discreta em G.

Caso 1. Existem $V \in \mathcal{T}$ e $\gamma < \kappa$ tais que $0 \in V \subseteq \bigoplus_{\alpha<\gamma} G_\alpha$.
Como V é aberto não vazio contido no subgrupo $\bigoplus_{\alpha<\gamma} G_\alpha$, temos que $\bigoplus_{\alpha<\gamma} G_\alpha$ é aberto em G. Logo, $(\bigoplus_{\alpha<\gamma} G_\alpha, \mathcal{T})$ é grupo topológico não discreto. Assim pela hipótese de indução temos que $(\bigoplus_{\alpha<\gamma} G_\alpha, \mathcal{T})$ é subgrupo resolúvel. Portanto pelo Corolário 1.22 temos que $(\bigoplus_{\alpha<\kappa} G_\alpha, \mathcal{T})$ é resolúvel.

Caso 2. Caso 1 é falso.
Para cada $\alpha < \kappa$ definimos $Z(G_\alpha) = \{x \in G_\alpha : 2x = 0\}$. Pelo Lema de Zorn, existe $D_\alpha \subseteq G_\alpha \backslash Z(G_\alpha)$ maximal relativo a $(D_\alpha) \cap (-D_\alpha) = \phi$ (no caso em que $Z(G_\alpha) = G_\alpha$ definimos $D_\alpha = \phi$). Pela maximalidade de D_α, temos que $G_\alpha = D_\alpha \cup (-D_\alpha) \cup Z(G_\alpha)$. Para cada $x \in G = \bigoplus_{\alpha<\kappa} G_\alpha$, seja

$$m(x) = max(sup(x)) \quad \text{onde} \quad sup(x) = \{\alpha < \kappa \ : \ x(\alpha) \neq 0\}$$
$$\text{e} \qquad D = \{x \in G \ : \ x \neq 0 \ , \ x_{m(x)} \in D_{m(x)}\}$$

Vamos demonstrar que D, $G \backslash D$ são densos em $(G, \mathcal{T})$. Seja U aberto não vazio. Como $(G, \mathcal{T})$ não é discreto, existe $x \in U$ tal que $x \neq 0$. Assim $0 \in -x + U$ e como $(G, \mathcal{T})$ é grupo topológico, temos que existe V aberto tal que $V = -V$ e $V \subseteq -x + U$. Como κ é cardinal infinito e $r_2(G)$ é finito temos que $max\{\alpha < \kappa \ : \ |Z(G_\alpha)| > 1\} \leq \gamma < \kappa$. Além disso, caso 1 é falso, logo existe $y \in V$ tal que $m(y) > max\{\gamma, m(x)\}$. Agora, como $m(y) > \gamma$, temos que $y(m(y)) \notin Z(G_{m(y)})$, s.p.g. suponhamos que $y(m(y)) \in D_{m(y)}$. Então $(-y)(m(y)) \in -D_{m(y)}$, e como $m(y) > m(x)$ temos que

$$(x + y)(m(x + y)) = y(m(y)) \in D_{m(y)} = D_{m(x+y)} \quad \text{e}$$
$$(x - y)(m(x - y)) = (-y)(m(y)) \in -D_{m(y)} = -D_{m(x-y)}$$

assim, $x + y \in D$ e $x - y \in G \backslash D$. Além disso, $x + y \in x + V \subseteq U$ e $x - y \in x - V \subseteq U$, logo $U \cap D \neq \phi \neq U \cap G \backslash D$. Portanto $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel.

Como $\mathcal{T}$ era uma topologia não discreta arbitrária, concluímos que G é fortemente resolúvel.

■

Teorema 3.7 O grupo $\mathbb{Z}$ é fortemente resolúvel.

Demonstração

Seja $D = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x > 0\}$ e seja $\mathcal{T}$ uma topologia de grupo não discreta em $\mathbb{Z}$. Vamos demonstrar que D é denso em $\mathbb{Z}$. Senão, existe U aberto não vazio tal que $U \cap D = \phi$, assim $U \subseteq \mathbb{Z} \backslash D$. Seja $m = max(U)$ então $2m - U \in \mathcal{T}$ mas $U \cap (2m - U) = \{m\}$. Assim, $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ é discreto, o que é contraditório.

Vamos demonstrar que $\mathbb{Z} \backslash D$ é denso em $\mathbb{Z}$. Senão, existe U aberto não vazio tal que $U \cap \mathbb{Z} \backslash D = \phi$, ou seja $U \subseteq D$. Seja $m = min(U)$ então $2m - U \in \mathcal{T}$ mas $U \cap (2m - U) = \{m\}$. Assim $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ é discreto, o que é contraditório.

Portanto D e $\mathbb{Z} \backslash D$ são densos em $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ e $\mathbb{Z}$ é fortemente resolúvel.

∎

Teorema 3.8 Para cada número primo p maior que 1 o grupo Prüfer $\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{n<\omega} \{x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ : \ p^n x = 0\}$ é fortemente resolúvel.

Demonstração

Para cada $x \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ seja $o(x) = min\{n < \omega \ : \ nx = 0\}$ assim dado $x \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ temos que existe $n < \omega$ tal que $o(x) = p^n$, logo $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i}$ com $0 \leq a_i < p$ e $a_n \neq 0$.

Agora se $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p^i}$ com $0 \leq a_i < p$ e $a_n \neq 0$. Definimos $sup(x) = \{i \ : \ a_i \neq 0\}$ e $m(x) = max(sup(x))$ (i.e. $m(x) = n$) assim temos que $o(x) = p^{m(x)}$. Seja

$$D = \{x \in \mathbb{Z}(p^\infty) \ : \ x \neq 0 \ , \ m(x) \text{ é par}\}$$

e seja $\mathcal{T}$ uma topologia de grupo não discreta em $\mathbb{Z}(p^\infty)$ Suponhamos s.p.g. que $(\mathbb{Z}(p^\infty), \ \mathcal{T})$ é Hausdorff.

Vamos demonstrar que D e $\mathbb{Z}(p^\infty)\backslash D$ são densos em $(\mathbb{Z}(p^\infty), \ \mathcal{T})$. Seja U aberto não vazio e seja $x \in U$ então $-x + U$ é aberto e $0 \in -x + U$. Como $(\mathbb{Z}(p^\infty), \ \mathcal{T})$ é grupo topológico, existe $V \in \mathcal{T}$ tal que $0 \in (pV) \subseteq -x + U$, onde $pV = V + V + \cdots + V$ p-vezes. Assim $x + pV \subseteq U$. Mostraremos que existe $y \in V$ tal que $m(y) > m(x) + 2$. Senão temos que $V \subseteq \{z \in \mathbb{Z}(p^\infty) \ : \ m(z) \leq m(x) + 2\}$. Então V é finito, mas como $(\mathbb{Z}(p^\infty), \mathcal{T})$ é Hausdorff, temos que $(\mathbb{Z}(p^\infty), \mathcal{T})$ é discreto, o que é contraditório. Assim, existe $y \in V$ tal que $m(y) > m(x) + 2$ e $m(x + y) = m(y)$ e $m(x + py) = m(py) = m(y) - 1$. Portanto

$$(x + y \in D \ \text{ e } \ x + py \notin D) \ \text{ ou } \ (x + y \notin D \ \text{ e } \ x + py \in D)$$

$$\text{e como} \quad x + y \in x + pV \subseteq U \ \text{ e } \ x + py \in x + pV \subseteq U$$

temos que $D \cap U \neq \phi \neq (\mathbb{Z}(p^{\infty}) \setminus D) \cap U$ portanto D e $\mathbb{Z}(p^{\infty}) \setminus D$ são densos em $\mathbb{Z}(p^{\infty})$, assim $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ é fortemente resolúvel.

■

Corolario 3.9 O grupo $\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}(p^{\infty})$ é fortemente resolúvel.

Demonstração

Pelo Teorema 3.8, temos que cada $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ é fortemente resolúvel e como

$$r_2(\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}(p^{\infty})) = r_2(\mathbb{Z}(2^{\infty})) = 1 < \omega$$

pelo Teorema 3.6, temos que $\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}(p^{\infty})$ é fortemente resolúvel.

■

Teorema 3.10 O grupo dos racionais $\mathbb{Q}$ é fortemente resolúvel.

Demonstração

Pelo Teorema 3.7 e Corolário 3.9, temos que $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \approx \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}(p^{\infty})$ são fortemente resolúveis, logo $\mathbb{Q}$ é fortemente resolúvel pelo Teorema 3.4.

■

Teorema 3.11 Todo grupo abeliano divisível com 2-posto finito é um grupo fortemente resolúvel.

Demonstração

Seja G grupo abeliano divisível com 2-posto finito então

$$G \approx \bigoplus_{r_0(G)} \mathbb{Q} \bigoplus (\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} (\bigoplus_{r_p(G)} \mathbb{Z}(p^{\infty})))$$

Agora pelos teoremas 3.8 e 3.10, temos que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ são fortemente resolúveis e como $r_2(G) < \omega$, G é fortemente resolúvel pelo Teorema 3.6.

■

Teorema 3.12 Todo grupo abeliano com 2-posto finito é fortemente resolúvel.

Demonstração

Seja G grupo abeliano com 2-posto finito e seja $\tilde{G}$ grupo divisível minimal contendo G, então $r_2(\tilde{G}) = r_2(G) < \omega$, logo pelo Teorema 3.11 temos que $\tilde{G}$ é fortemente resolúvel e como G é subgrupo de $\tilde{G}$, G é fortemente resolúvel pela Proposição 3.3.

■

Comentários

Na demonstração do teorema 3.12 foi usado o seguinte método: Sejam G um grupo abeliano e $\tilde{G}$ seu respectivo grupo minimal e seja P uma propriedade. Para mostrar que G satisfaz a propriedade P, primeiro mostramos que $\tilde{G}$ satizfaz P, e então mostramos que $\tilde{G}$ induze a propriedade em G.

Toda esta seção é devida a Comfort e Van Mill [C.M.94].

3.2 Existência de Grupos Irresolúveis é Consistente

O objetivo desta seção é demonstrar a existência de um grupo que não é fortemente resolúvel.

Começamos definindo o grupo em que vamos trabalhar, que é um grupo abeliano, enumerável, onde cada elemento é de orden 2. Também vamos precisar de um princípio combinatório denotado por R_1. Continuamos dando as definições de filtro, base de um filtro e de grupo linear.

A demonstração da existência do grupo que não é fortemente resolúvel está dividida em três lemas, um teorema e expressada no Corolario 3.23. Neles é assumido R_1 e no último dos lemas, o Lema 3.21, além de assumir R_1 também é usado um teorema de Hindman. Encerramos a seção demonstrando a recíproca do Teorema 3.12 sobre R_1.

Seja H um conjunto infinito enumerável e seja $\Omega = [H]^{<\omega}$, em Ω definimos um grupo abeliano dado por $a + b = (a \backslash b) \cup (b \backslash a)$. Assim temos que $(\Omega, +)$ é grupo abeliano enumerável, onde o elemento neutro é o conjunto vazio e cada elemento de Ω é de ordem 2.

A seguinte definição é usada para enunciar R_1.

Definição 3.13 Um conjunto $\mathcal{C}$ é dito um sistema centrado se para cada subfamília finita $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ existe $A \in \mathcal{C}$ tal que $A \subseteq \cap \mathcal{F}$.

Seja R_1 a seguinte afirmação:
Se $\mathcal{C}$ é um sistema centrado de subconjuntos infinitos de Y tal que $|\mathcal{C}| < 2^{\omega}$ então existe um subconjunto infinito $D \subseteq Y$ tal que para cada $A \in \mathcal{C}$ temos que $D \backslash A$ é finito.

Definição 3.14 Seja $\mathcal{R}$ uma família de conjuntos tal que para cada $A,\ B \in \mathcal{R}$ temos que $A \cap B \in \mathcal{R}$, então uma subfamília $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$ é chamada filtro em $\mathcal{R}$ se
(i) $\mathcal{F} \neq \phi$ e $\phi \notin \mathcal{F}$
(ii) se $A_1,\ A_2 \in \mathcal{F}$ então $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$
(iii) se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq A_1 \in \mathcal{R}$ então $A_1 \in \mathcal{F}$.
Agora um filtro $\mathcal{F}$ em $\mathcal{R}$ é chamado ultrafiltro se $\mathcal{F}$ é filtro maximal em $\mathcal{R}$. Dado um conjunto Y nós dizemos que $\mathcal{F}$ é um filtro em Y se $\mathcal{F}$ é um filtro em $\mathcal{P}(Y)$.

Definição 3.15 Seja $\mathcal{R}$ uma família de conjuntos tal que para cada A, $B \in \mathcal{R}$ temos que $A \cap B \in \mathcal{R}$, então uma subfamília $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}$ é chamada de base de um filtro em $\mathcal{R}$ se

(i) $\mathcal{C} \neq \phi$, $\phi \notin \mathcal{C}$

(ii) se A, $B \in \mathcal{C}$ então existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Assim temos que se $\mathcal{C}$ é base de um filtro em $\mathcal{R}$ então

$\mathcal{F}_\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{R} \ : \ (\exists B \in \mathcal{C})(B \subseteq A)\}$ é um filtro em $\mathcal{R}$. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma base de um filtro $\mathcal{F}$ em $\mathcal{R}$ se $\mathcal{C}$ é uma base de um filtro em $\mathcal{R}$ e $\mathcal{F}_\mathcal{C} = \mathcal{F}$.

Definição 3.16 Seja $((G,+),\mathcal{T})$ um grupo topológico. Sejam $\mathcal{C}$ uma base de um filtro em $\mathcal{T}$ e $\mathcal{F}$ um filtro em $\mathcal{T}$ então dizemos que:

(i) $\mathcal{C}$ é uma base linear de um filtro em $\mathcal{T}$ se para cada $A \in \mathcal{C}$ temos que A é um subgrupo de G.

(ii) $\mathcal{F}$ é um filtro linear em $\mathcal{T}$ se existe $\mathcal{C}'$ base linear de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{T}$.

(iii) $((G,+),\mathcal{T})$ é um grupo linear se o filtro $\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{T} \ : \ 0 \in U\}$ é um filtro linear em $\mathcal{T}$.

Lema 3.17 Assuma R_1. Seja $(\Omega,\mathcal{T})$ um grupo topológico linear Hausdorff não discreto e seja $\mathcal{C}$ uma base linear do filtro $\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{T} \ : \ 0 \in U\}$ em $\mathcal{T}$ tal que $|\mathcal{C}| < 2^\omega$. Então existe $\mathcal{J}$ topologia de grupo linear Hausdorff não discreta em Ω com $\mathcal{C}'$ base linear enumerável decrescente do filtro $\mathcal{E} = \{U \in \mathcal{J} \ : \ 0 \in U\}$ em $\mathcal{J}$ tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}$ e para cada $V \in \mathcal{C}$ existe $G \in \mathcal{C}'$, tal que $G \subseteq V$.

Demonstração

Pela Definição 3.15, temos que $\mathcal{C}$ é um sistema centrado e como $(\Omega,\mathcal{T})$ é Hausdorff não discreto temos que cada elemento de $\mathcal{C}$ é subconjunto infinito de Ω. Como $|\mathcal{C}| < 2^\omega$ por R_1, existe $D \subseteq \Omega$ infinito tal que $D \backslash U$ é finito para cada $U \in \mathcal{C}$.

Seja $\{x_i : i < \omega\}$ uma enumeração de D e para cada $n < \omega$ definimos G_n como o subgrupo de Ω gerado por $\{x_i : n \leq i < \omega\}$. Seja $\mathcal{J}$ a topologia gerada pelo sistema de vizinhanças $\{\mathcal{B}_x : x \in \Omega\}$ onde $\mathcal{B}_x = \{x + G_n : n < \omega\}$. Vamos demonstrar que $(\Omega, \mathcal{J})$ é grupo topológico.

Para mostrar que $\mathcal{J}$ é uma topologia temos que verificar as condições (BP1), (BP2) e (BP3) da proposição 1.3. As condições (BP1) e (BP3) são claras. Agora seja $x \in y + G_n$, então $0 \in (-x + y) + G_n$. Como G_n é subgrupo, temos que $-x + y \in G_n$, assim $0 \in G_n = (-x + y) + G_n$. Logo $x \in x + G_n = x + (-x + y) + G_n = y + G_n$ isto mostra (BP2). Agora para cada $x \in \Omega$ como G_n é subgrupo de Ω temos que $-(x + G_n) = -x - G_n = -x + G_n$. Assim a função $i : \Omega \to \Omega$ dada por $i(x) = -x$ é $\mathcal{J}$-contínua e claramente temos que $m : \Omega \times \Omega \to \Omega$ dada por $m(x, y) = x + y$ é contínua. Portanto $(\Omega, \mathcal{J})$ é grupo topológico.

Vamos demonstrar que para cada $V \in \mathcal{C}$ existe $n < \omega$ tal que $G_n \subseteq V$. Como $D \backslash V$ é finito para cada $V \in \mathcal{C}$, existe $n < \omega$ tal que $\{x_i : n \leq i < \omega\} \subseteq V$ e como V é subgrupo de Ω temos que $G_n \subseteq V$.

Seja $U \in \mathcal{T}$ não vazio vamos demonstrar que $U \in \mathcal{J}$. Seja $x \in U$ como $(\Omega, \mathcal{T})$ é grupo topológico temos que $0 \in -x + U \in \mathcal{T}$ e como $\mathcal{C}$ é base de um filtro temos que existe $V \in \mathcal{C}$ tal que $0 \in V \subseteq -x + U$. Assim existe $n < \omega$ tal que $0 \in G_n \subseteq V \subseteq -x + U$ logo $x \in x + G_n \subseteq U$ e portanto $U \in \mathcal{J}$. Assim temos que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}$ portanto, como cada G_n é infinito e $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}$, temos que $(\Omega, \mathcal{J})$ é grupo topológico Hausdorff não discreto e como $\{G_n : n < \omega\}$ é base linear decrescente do filtro $\mathcal{E}$ em $\mathcal{J}$, temos o lema.

$\blacksquare$

Lema 3.18 Seja $(\Omega, \mathcal{T})$ um grupo topológico linear Hausdorff não discreto e seja $\mathcal{C} = \{A_i : i < \omega\}$ uma base linear decrescente do filtro $\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{T} : 0 \in U\}$

em $\mathcal{T}$. Então existe uma sequência $\{x_i \in \Omega \ : \ i < \omega\}$ tal que para cada $n, \ m < \omega$ distintos temos que $x_n \in A_n$ e $x_n \cap x_m = \phi$.

Demonstração

Seja $n < \omega$ e seja $a \in \Omega$, vamos demonstrar que existe $b \in A_n \backslash \{0\}$ tal que $a \cap b = \phi$. Senão para cada $b \in A_n \backslash \{0\}$ temos que $a \cap b \neq \phi$. Como $(\Omega, \mathcal{T})$ é Hausdorff não discreto temos que A_n é infinito e como a é finito temos que existem $b, \ c \in A_n$ distintos tais que $a \cap b = a \cap c$. Como A_n é subgrupo de Ω temos que $b + c \in A_n$ e como $b \neq c$ temos que $b + c \in A_n \backslash \{0\}$. Portanto temos que

$$\begin{aligned} a \cap (b + c) &= a \cap (b \backslash c \cup c \backslash b) \\ &= ((a \cap b) \backslash c) \cup ((a \cap c) \backslash b) \\ &= ((a \cap c) \backslash c) \cup ((a \cap b) \backslash b) \\ &= \phi \end{aligned}$$

o que é contraditório.

Vamos definir $\{x_n \ : \ n < \omega\}$. Para $n = 0$ escolhemos qualquer $x_0 \in A_0 \backslash \{0\}$. Agora, fixemos $n < \omega$ e suponhamos que existe $\{x_i : \ i < n\}$ tal que para cada $i, \ j < n$ distintos temos que $x_i \in A_i$ e $x_i \cap x_j = \phi$. Seja $a = \sum_{j<n} x_j$ então existe $x_n \in A_n \backslash \{0\}$ tal que $a \cap x_n = \phi$, como $\{x_j \ : \ j < n\}$ é família de conjuntos dois a dois disjuntos temos que $a = \bigcup_{j<n} x_j$ e assim para cada $j < n$ temos que $x_j \cap x_n = \phi$, assim temos o lema.

■

A seguinte definição é usada para enunciar o teorema de Hindman, cuja demonstração está no apêndice B.

Definição 3.19 Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma coleção disjunta em $\mathbb{N}$ se $\mathcal{D}$ é uma família infinita de subconjuntos finitos não vazios de $\mathbb{N}$, que são dois a dois disjuntos.

Teorema 3.20 Se $[\mathbb{N}]^{<\omega} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n$ então existe $\mathcal{C}_i$ e existe $\mathcal{D}$ coleção disjunta em $\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C}_i \supseteq FU(\mathcal{D})$, onde $FU(\mathcal{D})$ é a família de todas as uniões finitas não vazias de elementos de $\mathcal{D}$.

Lema 3.21 Assuma R_1. Seja $(\Omega, \mathcal{T})$ um grupo topológico linear Hausdorff não discreto e seja $\mathcal{C} = \{A_i : i < \omega\}$ uma base linear decrescente do filtro $\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{T} : 0 \in U\}$ em $\mathcal{T}$. Se $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ é uma partição de Ω. Então existe $\mathcal{J}$ topologia de grupo linear Hausdorff não discreta em Ω com $\mathcal{C}'$ base linear enumerável decrescente de $\mathcal{E} = \{U \in \mathcal{J} : 0 \in U\}$ em $\mathcal{J}$ tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}$ e para cada $A_i \in \mathcal{C}$ existe $Y \in \mathcal{C}'$ tal que $Y \subseteq A_i$, e somente um dos conjuntos Ω_1, Ω_2 admite zero como ponto de acumulação em $(G, \mathcal{J})$.

Demonstração

Pelo Lema 3.18 existe uma sequência $\{x_i \in \Omega : i < \omega\}$ tal que $x_n \in A_n$ e $x_n \cap x_m = \phi$ para cada n, $m < \omega$ distintos.

Seja X o subgrupo gerado por $\{x_i : i < \omega\}$. Como cada elemento de Ω tem ordem 2 temos que $X = \{\sum_{i \in I} x_i : I \in [\mathbb{N}]^{<\omega}\}$ onde $\sum_{i \in \phi} x_i = 0$. Seja $f : [\mathbb{N}]^{<\omega} \to X$ dada por $f(I) = \sum_{i \in I} x_i$, assim f é sobrejetora.

Vamos demonstrar que f é injetora. Como $\{x_i : i < \omega\}$ são dois a dois disjuntos temos que $\sum_{i \in I} x_i = \bigcup_{i \in I} x_i$ assim se I, $J \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ são distintos temos que $\bigcup_{i \in I} x_i \neq \bigcup_{i \in J} x_i$ e portanto f é injetora.

Como f é bijetora temos que

$$[\mathbb{N}]^{<\omega} = f^{-1}(X \cap \Omega_1) \bigcup f^{-1}(X \cap \Omega_2)$$

e pelo Teorema 3.20 temos que existe $\mathcal{D} = \{F_n \in [\mathbb{N}]^{<\omega} : n < \omega\}$ família de conjuntos dois a dois disjuntos tal que

$$FU(\mathcal{D}) \subseteq f^{-1}(X \cap \Omega_1) \text{ ou } FU(\mathcal{D}) \subseteq f^{-1}(X \cap \Omega_2)$$

Suponhamos s.p.g. que $FU(\mathcal{D}) \subseteq f^{-1}(X \cap \Omega_1)$, e definimos $y_n = \sum_{i \in F_n} x_i$ e seja Y_n subgrupo gerado por $\{y_i \, : \, n \leq i < \omega\}$. Como cada elemento de Ω tem ordem 2 temos que

$$Y_n = \{\sum_{i \in I} y_i \, : \, I \in [\{n, \, n+1, \cdots\}]^{<\omega}\}$$

mostraremos que para cada $n < \omega$ temos que $Y_n \backslash \{0\} \subseteq \Omega_1$. Seja $y_{n_1} + y_{n_2} + \cdots + y_{n_j} \in Y_n \backslash \{0\}$ como

$$\begin{aligned} y_{n_1} + \cdots + y_{n_j} &= \sum_{i \in F_{n_1}} x_i + \cdots + \sum_{i \in F_{n_j}} x_i \\ &= \sum \{x_i \, : \, i \in F_{n_1} \cup \cdots \cup F_{n_j}\} \end{aligned}$$

temos que $f^{-1}(y_{n_1} + \cdots + y_{n_j}) = F_{n_1} \cup \cdots \cup F_{n_j} \in FU(\mathcal{D})$ e como $FU(\mathcal{D}) \subseteq f^{-1}(X \cap \Omega_1)$ temos que $y_{n_1} + \cdots + y_{n_j} \in \Omega_1$ e assim $Y_n \backslash \{0\} \subseteq \Omega_1$.

Seja $\mathcal{J}$ a topologia gerada pelo sistema de vizinhanças $\{\mathcal{B}_x \, : \, x \in \Omega\}$ onde $\mathcal{B}_x = \{x + Y_n \, : \, n < \omega\}$. Pela Demonstração do Lema 3.17 temos que $(\Omega, \mathcal{J})$ é grupo topológico.

Seja $A_j \in \mathcal{C}$ mostraremos que existe Y_n tal que $Y_n \subseteq A_j$. Seja $I_j = \{n < \omega \, : \, (\exists i < j)(i \in F_n)\}$. Como $\mathcal{D} = \{F_n \, : \, n < \omega\}$ são dois a dois disjuntos temos que I_j é finito assim seja $N_j = max(I_j)$ (no caso de $I_j = \phi$ seja $max(I_j) = 0$) portanto para cada $n \geq N_j + 1$ temos que $F_n \subseteq \{j, j+1, \cdots\}$ e como cada $x_i \in A_i$ e $\mathcal{C} = \{A_i \, : \, i < \omega\}$ são subgrupos decrescentes temos que $y_n = \sum_{i \in F_n} x_i \in A_j$ logo $Y_{N_j+1} \subseteq A_j$ logo seja $n = N_{j+1}$ assim temos que $Y_n \subseteq A_j$.

Vamos demonstrar que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}$. Seja $U \in \mathcal{T}$ não vazio e seja $x \in U$, como $(\Omega, \mathcal{T})$ é grupo topológico temos que $0 \in -x + U \in \mathcal{T}$ e como $\mathcal{C}$ é base de um filtro, temos que existe $A_j \in \mathcal{C}$ tal que $0 \in A_j \subseteq -x + U$. Portanto existe $n < \omega$ tal que $0 \in Y_n \subseteq A_j \subseteq -x + U$. Logo $x \in x + Y_n \subseteq U$, portanto $U \in \mathcal{J}$ e $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}$.

Como $\{Y_n \, : \, n < \omega\}$ é base linear do filtro $\mathcal{E} = \{U \in \mathcal{J} \, : \, 0 \in U\}$ em $\mathcal{J}$ e

como para cada $n < \omega$ temos que $Y_n \backslash \{0\} \subseteq \Omega_1$, temos que zero é ponto de acumulação de Ω_1, mas não de Ω_2 em $(\Omega, \mathcal{J})$.
Como $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}$ temos que $(\Omega, \mathcal{J})$ é grupo topológico Hausdorff e como cada Y_n é infinito temos que $(\Omega, \mathcal{J})$ não é discreto, assim temos o lema.

■

No próximo teorema, mostramos a existência de uma topologia de grupo Hausdorff maximal (ver definição 1.27).

Teorema 3.22 Assuma R_1. Seja $(\Omega, \mathcal{T})$ um grupo topológico linear Hausdorff não discreto e seja $\mathcal{C}$ uma base linear do filtro $\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{T} : 0 \in U\}$ em $\mathcal{T}$ tal que $|\mathcal{C}| < 2^\omega$. Então existe $\mathcal{T}'$ topologia de grupo linear Hausdorff maximal em Ω tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Demonstração

Seja $\{\Omega_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ enumeração de $\mathcal{P}(\Omega)$. Vamos definir por indução transfinita $\mathcal{J}_\alpha$ tal que dado $\alpha < 2^\omega$, para cada $\beta < \alpha$ existe $\mathcal{J}_\beta$ tal que:

(i) $\mathcal{J}_\beta$ é topologia de grupo linear Hausdorff não discreta em Ω com base linear enumerável $\mathcal{C}_\beta$ do filtro $\mathcal{F}_\beta = \{U \in \mathcal{J}_\beta : 0 \in U\}$ em $\mathcal{J}_\beta$ tal que para cada $U \in \mathcal{C}_\gamma$, com $\gamma < \beta$ existe $V \in \mathcal{C}_\beta$ tal que $V \subseteq U$.

(ii) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{J}_\beta$.

(iii) só um dos conjuntos Ω_β , $\Omega \backslash \Omega_\beta$ admite zero como ponto de acumulação em $(\Omega, \mathcal{J}_\beta)$.

Dado $\alpha < 2^\omega$.

Se $\alpha = 0$ aplicando Lema 3.17 e Lema 3.21 a $(\Omega, \mathcal{T})$ e $\{\Omega_0,\ \Omega \backslash \Omega_0\}$ então existe $\mathcal{J}_0$ tal que (i), (ii) e (iii) estão satisfeitas.

Se α é ordinal sucessor, aplicamos Lema 3.17 e Lema 3.21 a $(\Omega, \mathcal{J}_{\alpha-1})$ e $\{\Omega_\alpha,\ \Omega \backslash \Omega_\alpha\}$, então existe $\mathcal{J}_\alpha$ tal que (i), (ii) e (iii) estão satisfeitas.

Se α é ordinal limite, seja $\mathcal{J}'_\alpha$ a topologia gerada por $(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta)$ (como $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}_1 \subseteq \cdots$ temos que $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta$ gera uma topologia).

Afirmação 1. $(\Omega, \mathcal{J}'_\alpha)$ é grupo topológico.

Como $(\Omega, \mathcal{T})$ é Hausdorff e $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}'_\alpha$ temos que $(\Omega, \mathcal{J}'_\alpha)$ é Hausdorff e como todo $U \in (\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta)$ é infinito temos que $(\Omega, \mathcal{J}'_\beta)$ é não discreto.

Afirmação 2. $(\Omega, \mathcal{J}'_\alpha)$ é grupo topológico linear onde $\mathcal{C}'_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{C}_\beta$ é base linear do filtro $\mathcal{F}'_\alpha = \{U \in \mathcal{J}'_\alpha \,:\, 0 \in U\}$ em $\mathcal{J}'_\alpha$.

Agora como $|\alpha| < 2^\omega$ temos que $|\mathcal{C}'_\alpha| < 2^\omega$ e assim podemos aplicar o Lema 3.17 e o Lema 3.21 a $(\Omega, \mathcal{J}'_\alpha)$ e $\{\Omega_\alpha,\ \Omega\backslash\Omega_\alpha\}$, assim existe $\mathcal{J}_\alpha$ tal que (i), (ii) e (iii) estão satisfeitas.

Como 2^ω é ordinal limite pela afirmação 2 temos que a topologia $\mathcal{J}'_{2^\omega}$ gerada por $\bigcup_{\alpha<2^\omega} \mathcal{J}_\alpha$ é grupo topológico linear Hausdorff não discreto tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{J}'_{2^\omega}$. Seja $\mathcal{J} = \mathcal{J}'_{2^\omega}$, vamos demonstrar que $(\Omega, \mathcal{J})$ é espaço maximal (ver Definição 1.27). Senão, existe $\mathcal{T}'$ topologia em Ω sem pontos isolados, tal que $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{T}'$. Assim, existe $A \subseteq \Omega$ tal que A é fechado em $(\Omega, \mathcal{T}')$ mas não em $(\Omega, \mathcal{J})$. Seja $p \in cl_{\mathcal{J}}(A)\backslash A$. Como $(\Omega, \mathcal{J})$ é grupo topológico, s.p.g. suponhamos que p é zero. Assim $0 \in cl_{\mathcal{J}}(A)\backslash A$, e como $(\Omega, \mathcal{J})$ é Hausdorff, temos que zero é ponto de acumulação de A em $(\Omega, \mathcal{J})$. Como existe $\alpha < 2^\omega$ tal que $\Omega_\alpha = A$, temos que zero é ponto de acumulação de A em $(\Omega, \mathcal{J}_\alpha)$ (senão existe $V \in \mathcal{F}_\alpha$ tal que $V \cap A$ é finito e como $\mathcal{J}_\alpha \subseteq \mathcal{J}$, temos que zero não é ponto de acumulação de A em $(\Omega, \mathcal{J})$). Como zero não é ponto de acumulação de $\Omega\backslash A$ em $(\Omega, \mathcal{J}_\alpha)$ e como $\mathcal{J}_\alpha \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{T}'$, temos que zero não é ponto de acumulação de $\Omega\backslash A$ em $(\Omega, \mathcal{T}')$. Como $0 \notin A = cl_{\mathcal{T}'}(A)$, temos que zero não é ponto de acumulação de A em $(\Omega, \mathcal{T}')$. Como $(\Omega, \mathcal{T}')$ é Hausdorff (pois $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{T}'$ e $(\Omega, \mathcal{J})$ é Hausdorff), temos que zero é ponto isolado em $(\Omega, \mathcal{T}')$, o que é contraditório. Portanto temos que $(\Omega, \mathcal{J})$ é maximal.

Demonstração da afirmação 1. Vamos demonstrar que $(\Omega, \mathcal{J}'_\alpha)$ é grupo topológico.

Seja $m : \Omega \times \Omega \to \Omega$ dada por $m(x,y) = x + y$ e sejam $x + y \in U' \in \mathcal{J}'_\alpha$.
O conjunto $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta$ é base de $(\Omega, \mathcal{J}'_\alpha)$, logo existe $U \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta$ tal que $x + y \in U \subseteq U'$. Seja $\gamma < \alpha$ tal que $U \in \mathcal{J}_\gamma$ e como $(\Omega, \mathcal{J}_\gamma)$ é grupo topológico, existe V, $W \in \mathcal{J}_\gamma \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta$ tais que $(x,y) \in V \times W$ e $V \cdot W \subseteq U \subseteq U'$.
Portanto m é continua.

Seja $i : \Omega \to \Omega$ dada por $i(x) = x^{-1}$ e sejam $x^{-1} \in U' \in \mathcal{J}'_\alpha$. O conjunto $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta$ é base de $(\Omega, \mathcal{J}'_\alpha)$ logo existe $U \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta$ tal que $x^{-1} \in U \subseteq U'$. Como $U \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta$, existe $\gamma < \alpha$ tal que $U \in \mathcal{J}_\gamma$ e como $(\Omega, \mathcal{J}_\gamma)$ é grupo topológico, temos que $U^{-1} \in \mathcal{J}_\gamma \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta$. Assim, $x \in U^{-1} \subseteq (U')^{-1}$. Portanto, i é contínua e $(\Omega, \mathcal{J}'_\alpha)$ é grupo topológico.

Demonstração da afirmação 2. Vamos demonstrar que $(\Omega, \mathcal{J}'_\alpha)$ é grupo topológico linear.
Seja $\mathcal{C}'_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{C}_\beta$. Vamos demonstrar que $\mathcal{C}'_\alpha$ é base de um filtro em $\mathcal{J}'_\alpha$. Temos que $\mathcal{C}'_\alpha \neq \phi$ e $\phi \notin \mathcal{C}'_\alpha$ agora sejam A_1, $A_2 \in \mathcal{C}'_\alpha$ então existe $\beta_i < \alpha$ tal que $A_i \in \mathcal{C}_{\beta_i}$, seja $\beta' = max\{\beta_1, \beta_2\}$. Como $\beta' < \alpha$ temos que para cada A_i existe $B_i \in \mathcal{C}_{\beta'}$ tal que $B_i \subseteq A_i$. Logo existe $B \in \mathcal{C}_{\beta'}$ tal que $B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$ assim $\mathcal{C}'_\alpha$ é base de um filtro em $\mathcal{J}'_\alpha$. Mostraremos que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}'_\alpha} = \mathcal{F}'_\alpha$. Claramente, temos que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}'_\alpha} \subseteq \mathcal{F}'_\alpha$. Agora seja $U \in \mathcal{F}'_\alpha$, como $U \in \mathcal{J}'_\alpha$ temos que existe $V \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{J}_\beta$ tal que $0 \in V \subseteq U$. Assim, existe $\gamma < \alpha$ tal que $V \in \mathcal{J}_\gamma$ e portanto existe $A \in \mathcal{C}_\gamma \subseteq \mathcal{C}'_\alpha$ tal que $0 \in A \subseteq V \subseteq U$. Logo $V \in \mathcal{F}_{\mathcal{C}'_\alpha}$ e assim, $\mathcal{F}_{\mathcal{C}'_\alpha} \supseteq \mathcal{F}'_\alpha$.
Portanto, $\mathcal{C}'_\alpha$ é base linear de $\mathcal{F}'_\alpha$ em $\mathcal{J}'_\alpha$.

∎

Corolario 3.23 Assuma R_1, então o grupo $\bigoplus_\omega \{0, 1\}$ não é fortemente resolúvel.

Demonstração

Primeiro, o grupo $\bigoplus_\omega \{0, 1\}$ é isomorfo a $(\Omega, +)$, observemos que

$\psi : \bigoplus_{\omega}\{0,1\} \to (\Omega, +)$ dada por $\psi(f) = sup(f)$ é isomorfismo de grupos, onde $\Omega = [\mathbb{N}]^{<\omega}$ e $a + b = (a \backslash b) \cup (b \backslash a)$.

Vamos demonstrar que existe $\mathcal{T}$ topologia de grupo linear Hausdorff, não discreta em Ω com uma base de filtro enumerável.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $x_n = \{n\} \in \Omega$, G_n o subgrupo de Ω gerado por $\{x_i : n \leq i < \omega\}$ e $\mathcal{T}$ a topologia gerada pelo sistema de vizinhanças $\{\mathcal{B}_x : x \in \Omega\}$, onde $\mathcal{B}_x = \{x + G_n : n < \omega\}$. Na demonstração do Lema 3.17 foi mostrado que $(\Omega, \mathcal{T})$ é grupo topológico e como cada G_n é infinito temos que $(\Omega, \mathcal{T})$ não é discreto.

Vamos demonstrar que $(\Omega, \mathcal{T})$ é T_0. Seja $a \in \Omega \backslash \{0\}$ como $a \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ temos que existe $n < \omega$ tal que $a \subseteq \{0, 1, \cdots, n-1\}$ assim temos que $a \notin G_n$. Como $(\Omega, \mathcal{T})$ é grupo topológico, temos que $(\Omega, \mathcal{T})$ é T_0. Assim, $(\Omega, \mathcal{T})$ é Hausdorff e como $\mathcal{C} = \{G_n : n < \omega\}$ é base do filtro $\mathcal{F} = \{U \in \mathcal{T} : 0 \in U\}$ em $\mathcal{T}$, temos que $(\Omega, \mathcal{T})$ é grupo topológico linear, Hausdorff, não discreto com base de filtro linear enumerável.

Agora apliquemos o Teorema 3.22 a $(\Omega, \mathcal{T})$ e obtemos $\mathcal{T}'$ topologia de grupo Hausdorff maximal em Ω. Pela Proposição 1.28 temos que $(\Omega, \mathcal{T}')$ é irresolúvel e portanto, $\bigoplus_{\omega}\{0,1\}$ não é fortemente resolúvel.

■

Teorema 3.24 Assuma R_1. Seja G um grupo abeliano. Então, G é fortemente resolúvel se e somente se $r_2(G) < \omega$.

Demonstração

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que $r_2(G) \geq \omega$. Então, pela Proposição 1.1, existe G' subgrupo de G isomorfo a $\bigoplus_{\omega}\{0,1\}$ e pelo Corolário 3.23 temos que G' não é fortemente resolúvel e, pela Proposição 3.3, temos que G não é fortemente resolúvel.

$(\Leftarrow)$ Se $r_2(G) < \omega$, pelo Teorema 3.12, temos que G é fortemente resolúvel.

■

Comentários

Esta seção é devida basicamente a Malykhin [M.75]. Originalmente Malykhin com o Teorema 3.22 responde uma pergunta feita por Arkhangel'skiĭ[1] no ano 1967: se existe um grupo topológico extremamente desconexo não discreto. Usando CH, MA e R_1 respectivamente Sirota[2] no ano 1969, Louveau[3] no ano 1972 e Malykhin [M.75] provam que o grupo $\bigoplus_{\omega}\{0,1\}$ admite uma topologia de grupo extremamente desconexa não discreta. Mas Malykhin prova mais, que tal topologia pode ser escolhida Hausdoff maximal (ver definição 1.27), daí pela seção 1.3 temos que esta topologia é irresolúvel. Observamos que R_1 é uma consequência do axioma de Martin (MA) (ver [K.80]).

A demonstração apresentada no apêndice B do teorema de Hindman está no livro de Graham, Rothschild e Spenger [G.R.S.90].

[1] A.V. Arkhangel'skiĭ, Every extremally disconnected bicompactum of weight c is inhomogeneous, Dokl. Akad. Nauk SSSR 175 (1967) 751-754; english transl., Soviet Math. Dokl. 8 (1967) 897-900.

[2] S.M. Sirota, The product of topological groups and extremal disconnectedness, Mat. Sb. 79 (1969) 179-192; english transl., Math. USSR-Sb. 8 (1969), 169-180.

[3] Alain Louveau, sur un article de S. Sirota, Bull. Sci. Math. (2) 96 (1972) 3-7.

Capítulo 4

Irresolubilidade em Grupos Topológicos

4.1 Estrutura de um Grupo Irresolúvel

Na seção anterior, assumindo um princípio combinatório, foi demonstrada a existência de um grupo topológico abeliano irresolúvel não discreto. Nesta seção demonstramos algunas características de um tal grupo. Por exemplo, se $((G,\cdot),\mathcal{T})$ é um grupo topológico abeliano irresolúvel não discreto então:

(i) O centro de G é um grupo aberto-fechado irresolúvel não vazio de $((G,\cdot),\mathcal{T})$.

(ii) Existe um subgrupo H aberto-fechado, enumerável, irresolúvel de ordem 2 em $((G,\cdot),\mathcal{T})$.

(iii) $(G,\mathcal{T})$ é de primeira categoria.

Começamos dando a definição de conjunto raro e usando o método descrito nos comentários da seção 3.1, demonstramos que todo grupo topológico abeliano não discreto com centro raro é resolúvel. Como corolário obtemos (i).
Continuamos preparando o caminho para demonstrar (ii). Introduzimos uma espécie de norma no grupo $(G,\cdot)$ e demonstramos dois lemas técnicos. Com eles

demonstramos o Teorema 4.7, que todo grupo topológico de ordem dois com caráter de dispersão não enumeravel é resolúvel. Usando (i) e o Teorema 4.7 mostramos (ii).

Encerramos a seção dando a definição de conjunto de primeira categoria, provando um lema e demonstrando (iii).

Definição 4.1 Um subespaço Y de $(X, \mathcal{J})$ chama-se raro se $X \backslash cl_X(Y)$ é denso em $(X, \mathcal{J})$.

Teorema 4.2 Seja $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma família de grupos abelianos fortemente resolúveis e seja $G = \bigoplus_{\alpha<\kappa} G_\alpha$. Então para cada grupo topológico $(G, \mathcal{T})$ não discreto tal que $Z(G) = \{g \in G : o(g) = 2\}$ é raro em $(G, \mathcal{T})$ temos que $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel.

Demonstração

Por indução sobre a classe dos ordinais, se $\kappa < \omega$ pelo Corolário 3.5, temos que $G = \bigoplus_{\alpha<\kappa} G_\alpha$ é fortemente resolúvel. Assim todo grupo topológico não discreto em G é resolúvel. Agora suponhamos que $\kappa \geq \omega$ e para cada $g \in G$ sejam

$$sup(g) = \{\alpha < \kappa : g(\alpha) \neq 0\}$$
$$t(g) = \{\alpha < \kappa : g(\alpha) \notin Z(G_\alpha)\}$$
$$m(g) = max(sup(g)) \text{ onde } g \neq 0$$
$$n(g) = max(t(g)) \text{ onde } t(g) \neq \phi$$

e seja $\mathcal{T}$ topologia de grupo não discreta em $G = \bigoplus_{\alpha<\kappa} G_\alpha$.

Caso 1. Existem $\beta_0 < \kappa$ e $V_0 \in \mathcal{T}$ com $0 \in V_0$ tais que $n(g) < \beta_0$ para cada $g \in V_0$.

Sejam $H_0 = \bigoplus_{\alpha<\beta_0} G_\alpha$, $H_1 = \bigoplus\{G_\alpha : \beta_0 \leq \alpha < \kappa\}$.

Se H_1 não é fechado em $(G, \mathcal{T})$ pelo Corolário 1.24 temos que $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel. Logo suponhamos s.p.g. que H_1 é fechado.

Vamos demonstrar que $H_1 \notin \mathcal{T}$. Senão temos que $0 \in V_0 \cap H_1 \in \mathcal{T}$ e como $Z(G)$ é raro em $(G, \mathcal{T})$ temos que

$$(V_0 \cap H_1) \cap (G \backslash cl_G(Z(G))) \neq \phi$$

Logo, existe $v \in V_0 \cap (H_1 \backslash Z(G))$, como $v \in V_0$ temos que $n(v) < \beta_0$ e como $v \in H_1 \backslash Z(G)$ temos que $n(v) \geq \beta_0$, o que é contraditório.

Vamos demonstrar que $(G/H_1,\ \mathcal{T}_q)$ é resolúvel, onde $(G/H_1, \mathcal{T}_q)$ é a topologia quociente. Se $Z(G/H_1)$ não é fechado em $(G/H_1,\ \mathcal{T}_q)$ pelo Corolário 1.24 temos que $(G/H_1,\ \mathcal{T}_q)$ é resolúvel logo s.p.g. suponhamos que $Z(G/H_1)$ é fechado, por demonstrar que $Z(G/H_1)$ é conjunto raro em $(G/H_1,\ \mathcal{T}_q)$. Senão $\mathrm{int}_{G/H_1}(Z(G/H_1))$ é não vazio e como $Z(G/H_1)$ é subgrupo de $(G/H_1,\ \mathcal{T}_q)$ temos que $Z(G/H_1)$ é aberto em $(G/H_1,\ \mathcal{T}_q)$, logo $0 \in q^{-1}(Z(G/H_1)) \cap V_0 \in \mathcal{T}$. Agora seja $v \in q^{-1}(Z(G/H_1)) \cap V_0$ assim $[v] \in Z(G/H_1)$ logo $[v] + [v] = [0]$ e portanto temos que $v + v \in H_1$ e pela definição de H_1 para cada $\alpha < \beta_0$ temos que $(v + v)(\alpha) = 0$. Para cada $\alpha \geq \beta_0$, como $v \in V_0$, temos que $(v + v)(\alpha) = 0$ e assim temos que $v \in Z(G)$. Portanto

$$q^{-1}(Z(G/H_1)) \cap V_0 \subseteq Z(G)$$

o que é contraditório pois $Z(G)$ é conjunto raro em $(G, \mathcal{T})$. Logo $Z(G/H_1)$ é conjunto raro em $(G/H_1,\ \mathcal{T}_q)$ e como $G/H_1 \approx H_0 = \bigoplus_{\alpha < \beta_0} G_\alpha$ e $(G/H_1,\ \mathcal{T}_q)$ é grupo topológico não discreto (pois $H_1 \notin \mathcal{T}$), pela hipótese de indução temos que $(G/H_1,\ \mathcal{T}_q)$ é resolúvel.

Agora como H_1 é subgrupo fechado tal que $(G/H_1,\ \mathcal{T}_q)$ é resolúvel pela Proposição 1.25 temos que $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel.

Caso 2. Para cada $V \in \mathcal{T}$ tal que $0 \in V$ temos que $\sup\{n(g)\ :\ g \in V\} = \kappa$. Dado G_α para cada $g \in G_\alpha \backslash Z(G_\alpha)$ escolher um ponto do conjunto $\{g, -g\}$ e formar o conjunto D_α, assim temos que $D_\alpha \cap (-D_\alpha) = \phi$ e seja

$$D = \{g \in G\ :\ t(g) \neq \phi\ ,\ g(n(g)) \in D_{n(g)}\}$$

assim temos que $D \cap (-D) = \phi$.

Vamos demonstrar que D e $-D$ são densos em $(G, \mathcal{T})$. Seja U um aberto não vazio de G então existem $g_0 \in U$ e V_0 aberto simétrico tais que $g_0 + V_0 \subseteq U$, logo existe $v \in V_0$ tal que $m(g_0) < n(v)$ e assim $n(g_0 + v) = n(v)$ e $n(g_0 - v) = n(-v)$, s.p.g. suponhamos que $v(n(v)) \in D_{n(v)}$. Então $v \in D$ e $-v \in (-D)$ logo $g_0 + v \in D$ e $g_0 - v \in (-D)$. Portanto $g_0 + v \in g_0 + V \subseteq U$, $g_0 - v \in g_0 - V \subseteq U$ temos que $D \cap U \neq \phi$ e $(-D) \cap U \neq \phi$ assim D e $(-D)$ são densos em $(G, \mathcal{T})$ e como são disjuntos temos que $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel.

■

Teorema 4.3 Seja $(G, \mathcal{T})$ um grupo topológico abeliano não discreto tal que $Z(G) = \{g \in G \ : \ o(g) = 2\}$ é raro em $(G, \mathcal{T})$ então $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel.

Demonstração

Seja $\tilde{G}$ um grupo divisível minimal contendo G (ver [F.70]), então $\tilde{G} \approx G_0 \bigoplus G_1$ onde

$$G_0 \approx \bigoplus_{r_0(G)} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}} \left(\bigoplus_{r_p(G)} \mathbb{Z}(p^{\infty}) \right)$$
$$G_1 \approx \bigoplus_{r_2(G)} \mathbb{Z}(2^{\infty})$$

e seja $\mathcal{J} = \{U \subseteq \tilde{G} \ : \ (\forall g \in \tilde{G}) \ (\ (-g + U) \cap G \in \mathcal{T} \ )\}$ então pelo Lema 3.2 temos que $(\tilde{G}, \mathcal{J})$ é grupo topológico tal que $G \in \mathcal{J}$ e $(G, \mathcal{J}_G) = (G, \mathcal{T})$. Suponhamos que $(\tilde{G}, \mathcal{J})$ é resolúvel, como $G \in \mathcal{J}$ pela Proposição 1.17 temos que $(G, \mathcal{J}_G)$ é resolúvel logo $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel.

Vamos demonstrar que $(\tilde{G}, \mathcal{J})$ é resolúvel.

Pelo Corolário 1.24 suponhamos que G_0, G_1, $Z(G_1)$ são fechados em $(\tilde{G}, \mathcal{J})$.

Caso 1. $G_1 \in \mathcal{J}$

Vamos demonstrar que $Z(G_1)$ é raro em $(G_1, \mathcal{J})$.

Senão como $Z(G_1)$ é fechado em $(G_1, \mathcal{J})$ temos que $int_{(G_1,\mathcal{J})}(Z(G_1)) \neq \phi$ logo $Z(G_1)$ é aberto em $(G_1, \mathcal{J})$ e como $G_1 \in \mathcal{J}$ temos que $Z(G_1) \in \mathcal{J}$ e como $Z(G_1) = Z(G)$ temos que $Z(G) \in \mathcal{J}$ e como $(G, \mathcal{J}_G) = (G, \mathcal{T})$ temos que $Z(G) \in \mathcal{T}$ o que é contraditório pois $Z(G)$ é raro em $(G, \mathcal{T})$.

Portanto $Z(G_1)$ é raro em $(G_1, \mathcal{J})$ e como $G_1 \in \mathcal{J}$ temos que $(G_1, \mathcal{J})$ é grupo topológico não discreto assim pelo Teorema 4.2 temos que $(G_1, \mathcal{J})$ é resolúvel e pelo Corolário 1.22 temos que $(\tilde{G}, \mathcal{J})$ é resolúvel.

Caso 2. $G_1 \notin \mathcal{J}$

Consideremos $(\tilde{G}/G_1,\ \mathcal{J}_q)$ com a topologia quociente então $(\tilde{G}/G_1,\ \mathcal{J}_q)$ é um grupo topológico abeliano. Como $G_1 \notin \mathcal{J}$, temos que não é discreto e como $r_2(\tilde{G}/G_1) = 0$ pelo Teorema 3.12 temos que $(\tilde{G}/G_1,\ \mathcal{J}_q)$ é resolúvel e como G_1 é fechado em $(\tilde{G},\ \mathcal{J})$ pela Proposição 1.25 temos que $(\tilde{G},\ \mathcal{J})$ é resolúvel.

■

Corolario 4.4 Seja $(G, \mathcal{T})$ um grupo topológico abeliano irresolúvel então $Z(G) = \{g \in G\ :\ o(g) = 2\}$ é subgrupo aberto fechado irresolúvel não vazio de $(G, \mathcal{T})$.

Demonstração

Pelo Corolário 1.24 temos que $Z(G)$ é fechado e se $int_G(Z(G)) = \phi$ temos que $Z(G)$ é raro em $(G, \mathcal{T})$ e pelo Teorema 4.3 temos que $(G, \mathcal{T})$ é resolúvel o que é contraditório. Assim $int_G(Z(G)) \neq \phi$, logo $Z(G)$ é aberto em $(G, \mathcal{T})$ e pelo Corolário 1.22 temos que $(Z(G), \mathcal{T})$ é irresolúvel.

■

Seja $(G, +)$ um grupo abeliano e seja $\|\ \|: G \to \mathbb{N}$ tal que para cada $g,\ h \in G$ temos que

$$\| g + h \| \leq \| g \| + \| h \| \quad \text{e} \quad \| -g \| = \| g \|$$

assim temos que $\| -g + (g+h) \| \leq \| -g \| + \| g+h \|$, logo $\| h \| - \| g \| \leq \| g+h \|$, agora para cada $g \in G$ tal que $\| g \| \neq 0$ seja $n(g) \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{n(g)} \leq \| g \| < 2^{n(g)+1}$$

assim definimos $A_1 = \{g \in G \ : \ n(g) \text{ é ímpar}\}$ e $A_2 = G \backslash A_1$, assim temos o seguinte lema.

Lema 4.5 Seja $\mathcal{T}$ topologia de grupo em $(G,+)$ tal que para cada $U \in \mathcal{F} = \{V \in \mathcal{T} \ : \ 0 \in V\}$ e cada $n \in \mathbb{N}$ existem $g_1, \ g_2 \in U$ (não necessariamente distintos) tais que:

(i) $\quad n(g_1) > n$

(ii) $\quad \| g_1 + g_2 \| = 2 \| g_1 \|$

(iii) $\quad 2^{n(g_1)} + 2^n \leq \| g_1 \| \leq 2^{n(g_1)+1} - 2^n$

Então A_1 e A_2 são densos em $(G, \mathcal{T})$.

Demonstração

Sejam $g \in G$ e $V \in \mathcal{F}$, vamos demonstrar que

$$A_1 \cap (g+V) \neq \phi \neq A_2 \cap (g+V).$$

Como $(G, \mathcal{T})$ é um grupo topológico temos que existe $U \in \mathcal{F}$ tal que $U + U \subseteq V$, agora seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\| g \| < 2^n$, por hipótese temos que existem $g_1, \ g_2 \in U$ satisfazendo (i), (ii) e (iii). Pela condição (iii) e como $\| g \| < 2^n$ temos que:

$$\| g + g_1 \| \leq \| g \| + \| g_1 \| < 2^n + (2^{n(g_1)+1} - 2^n) = 2^{n(g_1)+1}$$
$$\| g + g_1 \| \geq \| g_1 \| - \| g \| > (2^{n(g_1)} + 2^n) - 2^n = 2^{n(g_1)}$$

portanto temos que $n(g+g_1) = n(g_1)$. Agora pelas condições (ii) e (iii) e como

$\| g \| < 2^n$ temos que:

$$\| g + g_1 + g_2 \| \leq \| g_1 + g_2 \| + \| g \| =$$
$$2 \cdot \| g_1 \| + \| g \| < 2 \cdot (2^{n(g_1)+1} - 2^n) + 2^n =$$
$$2^{n(g_1)+2} - 2^n < 2^{n(g_1)+2}$$
$$\| g + g_1 + g_2 \| \geq \| g_1 + g_2 \| - \| g \| =$$
$$2 \cdot \| g_1 \| - \| g \| > 2 \cdot (2^{n(g_1)} + 2^n) - 2^n =$$
$$2^{n(g_1)+1} + 2^n > 2^{n(g_1)+1}$$

portanto temos que $n(g + g_1 + g_2) = n(g_1) + 1$. Como $U + U \subseteq V$ temos que $g + g_1 \in g + V$ e $g + g_1 + g_2 \in g + V$. Seja $i \in \{1, 2\}$ tal que $g_1 \in A_i$ como $n(g + g_1) = n(g_1)$ e $n(g + g_1 + g_2) = n(g_1) + 1$ temos que $g + g_1 \in A_i$ e $g + g_1 + g_2 \in G \backslash A_i$ e assim temos que

$$(g + V) \cap A_1 \neq \phi \neq (g + V) \cap A_2$$

portanto temos que A_1 e A_2 são densos em $(G, \mathcal{T})$.

■

Lema 4.6 Seja S un conjunto infinito e seja $(G, +) = ([S]^{<\omega}, +)$ onde $a + b = (a \backslash b) \cup (b \backslash a)$. Em G definimos $\| a \|$ como o número de elementos de a. Seja $N \in \mathbb{N}$ e seja $I \subseteq G$ infinito tal que para cada $a \in I$ temos que $\| a \| = N$ então existe $\{a_i : i < \omega\}$ sequência de elementos distintos de I tal que para cada $n, m < \omega$ distintos temos que

$$a_n \cap a_m = \cap \{a_i : i < \omega\}$$

Demonstração

Por indução sobre N, se $N = 1$ então para cada $I \subseteq G$ infinito escolher uma sequência $\{a_i : i < \omega\}$ de elementos distintos de $\mathbb{N}$, como cada a_i é unitário temos que, para cada $n, m < \omega$ distintos, $a_n \cap a_m = \phi = \cap \{a_i : i < \omega\}$.

Agora seja $N < \omega$ e suponhamos que para cada $n_0 < N$ e cada $I \subseteq G$ infinito tal que $(\forall\ a \in I)$ ($\| a \| = n_0$), existe $\{a_i\ :\ i < \omega\}$ sequência tal que $a_n \cap a_m = \cap\{a_i\ :\ i < \omega\}$.

Para cada $g \in G$ seja $[g] = \{a \in I\ :\ a \cap g \neq \phi\}$ e suponhamos que para cada $g \in G$ temos que $[g]$ é finito, então seja $a_0 \in I$ e para cada $i < \omega$ seja $a_i \in I \setminus \bigcup_{j<i} [a_j]$, assim para cada $j < i$ temos que $a_j \cap a_i = \phi$ logo $\{a_i\ :\ i < \omega\}$ é a sequência procurada.

Suponhamos que existe $g \in G$ tal que $[g]$ é infinito, como g é subconjunto finito de S temos que existe $x \in g$ tal que $[\{x\}]$ é infinito, seja $I' = \{a \setminus \{x\}\ :\ a \in [\{x\}]\}$ assim temos que $I' \subseteq G$ é infinito e para cada $a \in I'$ temos que $\| a \| = N - 1$ assim por hipótese de indução existe $\{b_i\ :\ i < \omega\}$ sequência de I' tal que $b_n \cap b_m = \cap\{b_i\ :\ i < \omega\}$, seja $a_n = b_n \cup \{x\}$, assim temos que $a_n \in I$ e $a_n \cap a_m = (b_n \cap b_m) \cup \{x\} = \cap\{a_i\ :\ i < \omega\}$ e assim temos o lema.

■

Teorema 4.7 Seja $(G, +)$ um grupo não enumerável de ordem 2, então existem $A,\ B \subseteq G$ disjuntos tal que para cada $\mathcal{T}$ topologia de grupo com caráter de dispersão não enumerável em G, temos que A e B são densos em $(G, \mathcal{T})$.

Demonstração

Como todo elemento de G é de ordem 2 temos que existe S conjunto tal que $(G, +)$ é isomorfo a $([S]^{<\omega}, +)$, assim para cada $a \in G$ seja $\| a \|$ o número de elementos de a.

Seja $\mathcal{T}$ uma topologia de grupo em G tal que $\Delta(\mathcal{T}) > \omega$ (ver Definição 2.1) suponhamos que para cada $U \in \mathcal{F} = \{V \in \mathcal{T}\ :\ 0 \in V\}$ e cada $n \in \mathbb{N}$ existem $g_1,\ g_2 \in U$ satisfazendo as condições do Lema 4.5 então os conjuntos A_1 e A_2 são densos em $(G, \mathcal{T})$ e assim satisfazem o teorema.

Seja $U \in \mathcal{F}$ e $n < \omega$, por demonstrar que existem g_1, $g_2 \in U$ tais que (i), (ii) e (iii) do Lema 4.5.

1º) Seja $V \in \mathcal{F}$, vamos demonstrar que existe $\{a_i \ : \ i < \omega\}$ uma sequência de elementos dois a dois disjuntos tal que $\| a_i \| = k$ para algun k constante. Para cada $n < \omega$ seja $I_n = \{a \in W \ : \| a \| = n\}$ onde $W \in \mathcal{F}$ e $W + W \subseteq V$. Como $W = \bigcup\limits_{n<\omega} I_n$ e $|W| \geq \Delta(\mathcal{T}) > \omega$ temos que existe $N < \omega$ tal que I_N é infinito. Pelo Lema 4.5 temos que existe $\{b_i \ : \ i < \omega\}$ sequência de I_N tal que $b_n \cap b_m = \cap\{b_i \ : \ i < \omega\}$, se $b_n \cap b_m \neq \phi$. Seja $a_n = b_{2n} + b_{2n+1} \in V$, assim temos que $\{a_i \ : \ i < \omega\}$ é sequência de elementos dois a dois disjuntos de V, com $\| a_i \| =$ cte..

2º) Seja $V \in \mathcal{F}$, vamos demonstrar que existe $\{a_i \ : \ i < \omega\}$ sequência de elementos dois a dois disjuntos em V tal que para cada $i < \omega$ temos que $\| a_i \| =$ cte., $n(a_i) > 0$ e $2^{n(a_i)} < \| a_i \|$.
Seja $W \in \mathcal{F}$ tal que $W + W + W \subseteq V$, por (1º) temos que existe $\{b_i \ : \ i < \omega\}$ uma sequência de elementos dois a dois disjuntos em W tal que $\| b_i \| =$ cte.. Seja $a_n = b_{3n} + b_{3n+1} + b_{3n+2} \in V$ assim temos que $\{a_i \ : \ i < \omega\}$ é sequência de elementos dois a dois disjuntos de V, seja $N = \| b_i \|$ (i.e. N é constante) assim temos que $\| a_i \| = 3 \cdot N$, pois $\{b_i \ : \ i < \omega\}$ são disjuntos, assim $2^1 \leq \| a_i \|$ (i.e. $n(a_i) > 0$) e como $3 \cdot N$ não é potência de 2 temos que $2^{n(a_i)} < \| a_i \|$.

3º) Seja $U \in \mathcal{F}$ e $n < \omega$. Seja $m = 2^n$ e seja $V \in \mathcal{F}$ tal que $m \cdot V \subseteq U$, por (2º) existe $\{a_i \ : \ i < \omega\}$ uma sequência de elementos dois a dois disjuntos em V tal que para cada $i < \omega$ temos que

$$\| a_i \| = N \ , \ n(a_i) > 0 \ \text{ e } \ 2^{n(a_i)} < \| a_i \|$$

como $n(a_i) > 0$ temos que $\| a_i \| = N \geq 2$, sejam

$$g_1 = \sum_{i<m} a_i \in U \ , \ g_2 = \sum_{i<m} a_{i+m} \in U$$

como $\{a_i \,:\, i < \omega\}$ são disjuntos temos que

$$\| g_1 + g_2 \| = \| g_1 \| \;+\; \| g_2 \| = 2\cdot \| g_1 \| \quad \text{e}$$
$$\| g_1 \| = m\cdot \| a_i \| = 2^n \cdot N \geq 2^{n+1}$$

assim temos que $n(g_1) \geq n+1 > n$ e portanto temos satisfeitas (i) e (ii) do Lema 4.5. Seja $c = n(a_i)$ (i.e. c é constante), como $2^c < \| a_i \| < 2^{c+1}$ temos que $m \cdot 2^c < \| g_1 \| < m \cdot 2^{c+1}$ e como $m = 2^n$ temos que $2^{n+c} < \| g_1 \| < 2^{n+c+1}$ assim temos que $n(g_1) = n + c$.

Vamos demonstrar (iii).

Como $2^c < \| a_i \|$ temos que $1 \leq \| a_i \| - 2^c$ logo $\sum\limits_{i<m} 1 \leq \sum\limits_{i<m} (\| a_i \| - 2^c)$ e assim temos que $m \leq \| g_1 \| - m \cdot 2^c$ e como $m = 2^n$ temos que $2^{n+c} + 2^n \;\leq \| g_1 \|$ e como $n(g_1) = n + c$ temos que $2^{n(g_1)} + 2^n \;\leq \| g_1 \|$. Agora como $\| a_i \| < 2^{c+1}$ temos que $1 \leq 2^{c+1} - \;\| a_i \|$ logo $\sum\limits_{i<m} 1 \leq \sum\limits_{i<m} (2^{c+1} - \;\| a_i \|)$ e assim temos que $m \leq m \cdot 2^{c+1} - \;\| g_1 \|$ e como $m = 2^n$ temos que $\| g_1 \| \leq 2^{n+c+1} - 2^n$, e como $n(g_1) = n + c$ temos que $\| g_1 \| \leq 2^{n(g_1)+1} - 2^n$ e assim temos (iii).

■

Teorema 4.8 Seja $(G, \mathcal{T})$ um grupo topológico abeliano irresolúvel então existe H um subgrupo aberto-fechado enumerável irresolúvel de ordem 2 em $(G, \mathcal{T})$.

Demonstração

Pelo Corolário 4.4 temos que $Z(G)$ é subgrupo aberto-fechado irresolúvel de $(G, \mathcal{T})$ e como $Z(G)$ é de ordem 2 pelo Teorema 4.7 temos que $\Delta(Z(G), \mathcal{T}) \leq \omega$ assim existe um aberto enumerável U de $Z(G)$. Seja H o subgrupo gerado por U, assim temos que H é subgrupo aberto enumerável de $(G, \mathcal{T})$ de ordem 2 e como $(G, \mathcal{T})$ é irresolúvel pelos Corolário 1.24 e Corolário 1.22 temos que H é fechado e irresolúvel e assim temos o teorema.

■

Definição 4.9 Um espaço $(X, \mathcal{J})$ é chamado de primeira categoria se X é união enumerável de subconjuntos raros em $(X, \mathcal{J})$.

Lema 4.10 Seja $G = \bigoplus_{\alpha<\kappa} \mathbb{Z}(2)$ e seja $\mathcal{T}$ uma topologia de grupo irresolúvel não discreta em G então $(G, \mathcal{T})$ é de primeira categoria.

Demonstração

Para cada $g \in G$ sejam

$$sup(g) = \{\alpha < \kappa \ : \ g(\alpha) \neq 0\} \ \text{ e } \ c(g) = |sup(g)|$$
$$L_g = \bigoplus\{\mathbb{Z}(2) \ : \ \alpha \in sup(g)\} \ \text{ e}$$
$$R_g = \bigoplus\{\mathbb{Z}(2) \ : \ \alpha \notin sup(g)\}$$

dado $g \in G$, como R_g é subgrupo pelo Corolário 1.24, temos que R_g é fechado em $(G, \mathcal{T})$ e como as coclasses de R_g são finitas em $(G, \mathcal{T})$ temos que R_g é aberto em $(G, \mathcal{T})$. Para cada $n < \omega$ seja $D_n = \{g \in G \ : \ c(g) \geq n\}$ assim temos que $\bigcap_{n<\omega} D_n = \phi$.

Vamos demonstrar que D_n é aberto em $(G, \mathcal{T})$. Seja $g \in D_n$ como para cada $h \in R_g$ temos que $\sup(g) \cap \sup(h) = \phi$ temos que $c(g+h) \geq c(g) \geq n$ logo $g + h \in D_n$ e assim temos que $g + R_g \subseteq D_n$ e como R_g é aberto temos que $g + R_g$ é aberto assim $g \in g + R_g \subseteq D_n$ portanto D_n é aberto em $(G, \mathcal{T})$.

Vamos demonstrar que D_n é denso em $(G, \mathcal{T})$. Por indução sobre n, se $n = 0$ temos que $D_0 = G$ assim D_0 é denso em $(G, \mathcal{T})$. Agora suponhamos que D_n é denso, vamos demonstrar que D_{n+1} é denso. Seja U aberto não vazio como D_n é denso temos que existe $g \in U \cap D_n$ logo $g \in U \cap (g + R_g) \in \mathcal{T}$ e como $(G, \mathcal{T})$ não é discreto temos que existe $h \in R_g \backslash \{0\}$ tal que $g + h \in U$ e como $h \in R_g$ temos que $S(g) \cap S(h) = \phi$ e assim temos que $c(g+h) = c(g) + c(h) > c(g) \geq n$ logo $g + h \in D_{n+1}$ assim $D_{n+1} \cap U \neq \phi$ e portanto D_{n+1} é denso em $(G, \mathcal{T})$.

Agora para cada $n < \omega$ seja $A_n = G \backslash D_n$, assim temos que $\bigcup_{n<\omega} A_n = G$ e como D_n é aberto denso temos que A_n é conjunto raro em $(G, \mathcal{T})$ portanto temos que

G é de primeira categoria.

■

Teorema 4.11 Todo grupo topológico abeliano irresolúvel não discreto é de primeira categoria.

Demonstração

Seja $(G, \mathcal{T})$ um grupo topológico abeliano irresolúvel, não discreto, pelo Corolário 4.4 temos que $Z(G) = \{g \in G : o(g) = 2\}$ é um subgrupo aberto fechado irresolúvel e pelo Lema 4.10 é de primeira categoria, assim existem $A_n \subseteq Z(G)$ conjuntos raros em $(Z(G), \mathcal{T})$ tais que $\bigcup\limits_{n<\omega} A_n = Z(G)$.
Agora para cada coclasse de $Z(G)$ em G escolher um representante g_α, e para cada $n < \omega$ seja $B_n = \bigcup\limits_{\alpha}(g_\alpha + A_n)$, assim temos que $\bigcup\limits_{n<\omega} B_n = G$.
Vamos demonstrar que $cl_G(B_n) = \bigcup\limits_{\alpha}(g_\alpha + cl_{Z(G)}(A_n))$.
Seja $g \in cl_G(B_n)$, como existe β tal que $g \in (g_\beta + Z(G)) \in \mathcal{T}$ temos que $(g_\beta + Z(G)) \cap B_n = (g_\beta + Z(G)) \cap (g_\beta + A_n)$ assim $g \in cl_G(g_\beta + A_n) = g_\beta + cl_G(A_n)$. Como $Z(G)$ é fechado temos que $cl_G(A_n) = cl_{Z(G)}(A_n)$ logo $g \in g_\beta + cl_{Z(G)}(A_n)$ e portanto $cl_G(B_n) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha}(g_\alpha + cl_{Z(G)}(A_n))$. Como $\bigcup\limits_{\alpha}(g_\alpha + cl_{Z(G)}(A_n)) \subseteq cl_G(B_n)$ temos que $cl_G(B_n) = \bigcup\limits_{\alpha}(g_\alpha + cl_{Z(G)}(A_n))$, assim $G \backslash cl_G(B_n) = \bigcup\limits_{\alpha}(g_\alpha + Z(G) \backslash cl_{Z(G)}(A_n))$.
Vamos demonstrar que cada B_n é raro em $(G, \mathcal{T})$.
Seja U aberto não vazio. Então existe α tal que $(g_\alpha + Z(G)) \cap U \neq \phi$ e como $Z(G) \backslash cl_{Z(G)}(A_n)$ é denso em $Z(G)$ temos que

$$(g_\alpha + Z(G) \backslash cl_{Z(G)}(A_n)) \cap U \neq \phi$$

logo $(G \backslash cl_{Z(G)}(B_n)) \cap U \neq \phi$ e assim temos que B_n é raro em $(G, \mathcal{T})$ e portanto G é de primeira categoria.

■

Comentários

Comfort e Van Mill [C.M.94] fazem a pergunta se cada grupo topológico irresolúvel não discreto possui um subgrupo aberto-fechado de ordem dois. O Teorema 4.8 da uma resposta afirmativa a tal pergunta no caso em que G é abeliano.

Os teoremas 4.3 e 4.11 e o Corolario 4.4 são devidos a Comfort, Masaveu e Hao Zhou [C.M.Z.93] e o Teorema 4.8 é devido a Protasov [P.96].

4.2 Produto de Grupos

Nesta seção demonstramos o Teorema 4.16 o qual mostra que o autoproduto de um grupo topológico não discreto é resolúvel e que o produto de dois grupos topológicos abelianos não discretos é resolúvel.

Começamos demonstrando um teorema sobre o produto de espaços topológicos e com ele mostramos uma série de corolários para encerrar a seção demonstrando o Teorema 4.16.

Teorema 4.12 Sejam X e Y espaços topológicos com famílias crescentes de conjuntos $\mathcal{F}_0 = \{X_\alpha \subseteq X \ : \ \alpha < \kappa\}$, $\mathcal{F}_1 = \{Y_\alpha \subseteq Y \ : \ \alpha < \kappa\}$ com $\kappa \geq \omega$ tais que

(i) $X = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, $Y = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$.

(ii) Para cada $\alpha < \kappa$ temos que $int_X(X_\alpha) = int_Y(Y_\alpha) = \phi$.

Então $X \times Y$ é resolúvel.

Demonstração

Para cada $x \in X$ e cada $y \in Y$ sejam

$$l_0(x) = \min\{\alpha < \kappa \ : \ x \in X_\alpha\}$$
$$l_1(y) = \min\{\alpha < \kappa \ : \ y \in Y_\alpha\}$$
$$l(x, y) = \max\{l_0(x), \ l_1(y)\}$$
$$D_0 = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ l_0(x) < l_1(y)\}$$
$$D_1 = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ l_0(x) > l_1(y)\}$$

assim temos que D_0 e D_1 são disjuntos.

Vamos demonstrar que D_0 e D_1 são densos em $X \times Y$.

Seja U um aberto não vazio em $X \times Y$ assim existem $(x_0, y_0) \in U$ e $V_0 \times V_1$ aberto básico tais que $(x_0, y_0) \in V_0 \times V_1 \subseteq U$, seja $\alpha_0 = l(x_0, y_0)$, como $int_X(X_{\alpha_0}) = \phi$ e V_0 é aberto não vazio temos que existe $x_1 \in V_0 \backslash X_{\alpha_0}$ e como $\mathcal{F}_0$ é familia crescente de conjuntos tal que $X = \cup \mathcal{F}_0$ temos que $l_0(x_1) > \alpha_0$, assim temos que $(x_1, y_0) \in D_1$ e como $(x_1, y_0) \in V_0 \times V_1 \subseteq U$ temos que $U \cap D_1 \neq \phi$ portanto D_1 é denso em $X \times Y$. Agora analogamente existe $y_1 \in V_1 \backslash Y_{\alpha_0}$ logo $l_1(y_1) > \alpha_0$ e assim temos que $(x_0, y_1) \in D_0$ e como $(x_1, y_0) \in V_0 \times V_1 \subseteq U$ temos que $U \cap D_0 \neq \phi$ portanto D_0 é denso em $X \times Y$. Isto mostra que $X \times Y$ é resolúvel.

■

Corolario 4.13 Sejam X e Y espaços enumeráveis sem abertos finitos, então $X \times Y$ é resolúvel.

Demonstração

Como X e Y são enumeráveis temos que

$$X = \{x_n \ : \ n < \omega\} \text{ e } Y = \{y_n \ : \ n < \omega\}$$

sejam $X_n = \{x_i \ : \ i < n\}$ e $Y_n = \{y_i \ : \ i < n\}$ logo $\mathcal{F}_0 = \{X_n \ : \ n < \omega\}$ e $\mathcal{F}_1 = \{Y_n \ : \ n < \omega\}$ satisfazem as condições do Teorema 4.12 logo $X \times Y$ é resolúvel.

∎

Corolario 4.14 Seja X um espaço sem abertos finitos então $X \times X$ possui um subespaço não vazio resolúvel.

Demonstração

Seja U aberto tal que $|U| = \kappa = \Delta(X) \geq \omega$ assim temos que $U = \{u_\alpha : \alpha < \kappa\}$, sejam $X_\alpha = Y_\alpha = \{u_\gamma : \gamma < \alpha\}$. Logo, o subespaço U e $\mathcal{F}_0 = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$, $\mathcal{F}_1 = \{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ satisfazem as condições do Teorema 4.12. Portanto $U \times U$ é resolúvel.

∎

Corolario 4.15 Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço Homogêneo não discreto (ver Definição 1.20) então $X \times X$ é resolúvel.

Demonstração

Caso 1. Se $\Delta(X) \geq \omega$.

Pelo Corolário 4.14 temos que existe um subespaço não vazio resolúvel em $X \times X$ e como o produto de espaços homogeneos é homogeneo pelo Corolário 1.21 temos que $X \times X$ é resolúvel.

Caso 2. Se $\Delta(X) < \omega$.

Seja U aberto finito tal que $|U| = \Delta(X)$, como X é não discreto temos que $|U| > 1$, assim temos que U é resolúvel e como X é homogeneo pelo Corolário 1.21 temos que X é resolúvel logo $X \times X$ é resolúvel.

∎

Teorema 4.16 Sejam G, G_1, G_2 grupos topológicos não discretos com G_1 e G_2 abelianos então $G \times G$ e $G_1 \times G_2$ são resolúveis.

Demonstração

Como todo grupo topológico é homogêneo pelo Corolário 4.15 temos que $G \times G$ é resolúvel. Agora suponhamos que G_1 é resolúvel então $G_1 \times G_2$ é resolúvel. Assim suponhamos que G_1 e G_2 são irresolúveis, logo pelo Teorema 4.11 temos que G_1 e G_2 são de primeira categoria. Portanto existem $A_i \subseteq G_1$ e $B_i \subseteq G_2$ conjuntos raros tais que

$$G_1 = \bigcup_{i<\omega} A_i \quad \text{e} \quad G_2 = \bigcup_{i<\omega} B_i$$

sejam

$$X_n = \bigcup_{i<n} A_i \quad \text{e} \quad Y_n = \bigcup_{i<n} B_i$$

e como a união finita de conjuntos raros é conjunto raro temos que X_n e Y_n são conjuntos raros assim $int_{G_1}(X_n) = \phi = int_{G_2}(Y_n)$, logo $\mathcal{F}_0 = \{X_n \ : \ n < \omega\}$ e $\mathcal{F}_1 = \{Y_n \ : \ n < \omega\}$ satisfazem as condições do Teorema 4.12 logo $G_1 \times G_2$ é resolúvel.

■

Comentários

Esta seção é devida a Comfort, Masaveu e Zhou [C.M.Z.63].

4.3 Não Existência de Grupos Irresolúveis é consistente

Na seção 3.2 assumindo um princípio combinatorial que é consequência do axioma de Martin demonstramos a existência de um grupo topológico irresolúvel não discreto. Nesta seção demonstramos que a existência de um grupo topológico abeliano irresolúvel não discreto implica a existência de um P-ponto.

Para demonstrar este resultado utilizamos a extensão de Wallman de um grupo G com a topologia discreta, esta extensão é denotada por βG e é equivalente à compactificação de Stone-Čech do grupo G (ver [EN.77]). Também extendemos a opereção do grupo $(G,\cdot)$ a βG e obtemos um semigrupo. As propriedades básicas deste semigrupo estão enunciadas no Teorema 4.19.

A partir do lema 4.20 e até a Proposição 4.37 são dadas uma série de lemas, proposições, corolários, definições e notações as quais serão utilizadas nas demonstrações dos lemas 4.38 e 4.39.

O resultado principal é demonstrado a partir do Teorema 4.8 e Lema 4.39.

Definição 4.17 Seja βG o conjunto dos ultrafiltros em G, então um ultrafiltro $\mathcal{U}$ é dito principal se $\cap\mathcal{U} \neq \phi$ e é dito livre se $\cap\mathcal{U} = \phi$ e denotamos por G^o o conjunto dos ultrafiltros principais de βG e por G^* o conjunto dos ultrafiltros livres de βG.

Definição 4.18 Um semigrupo é um conjunto G não vazio com uma operação

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \to & g \cdot h \end{array}$$

associativa. Seja $(G,\cdot)$ um semigrupo com uma topologia $\mathcal{T}$ em G. Então:

(i) $((G,\cdot),\mathcal{T})$ é um semigrupo topológico se a função

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \to & g \cdot h \end{array}$$

é contínua, onde $G \times G$ é considerado com a topologia produto.

(ii) $(G,\cdot,\mathcal{T})$ é um semigrupo topológico à direita (à esquerda) se para cada $h \in G$ temos que a função

$$\begin{array}{ccc} \rho_h : G & \to & G \\ g & & g \cdot h \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc} \lambda_h : G & \to & G \\ g & & h \cdot g \end{array} \right)$$

é contínua.

A demonstração do próximo teorema está no apêndice C

Teorema 4.19 Seja G um grupo infinito discreto e seja $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\{\overline{A} : A \subseteq G\}$ onde $\overline{A} = \{\mathcal{U} \in \beta G : A \in \mathcal{U}\}$. Para cada $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta G$ seja

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} = \{A \subseteq G : \Omega_{\mathcal{V}}(A) \in \mathcal{U}\} \text{ onde } \Omega_{\mathcal{V}}(A) = \{g \in G : g^{-1}A \in \mathcal{V}\}.$$

Então:

(i) $((\beta G, \cdot), \mathcal{T})$ é semigrupo topológico à direita, compacto Hausdorff e extremamente desconexo.

(ii) $(G^*, \cdot)$ é subsemigrupo fechado de $((\beta G, \cdot), \mathcal{T})$.

(iii) $(G^o, \cdot)$ é subespaço aberto discreto e denso em $((\beta G, \cdot), \mathcal{T})$ e $(G^o, \cdot)$ é isomorfo a $(G, \cdot)$.

O lema a seguir é conhecido como lema de Frolik

Lema 4.20 Seja G um grupo infinito discreto e seja $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\{\overline{A} : A \subseteq G\}$ onde $\overline{A} = \{\mathcal{U} \in \beta G : A \in \mathcal{U}\}$. Para cada $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta G$ seja

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} = \{A \subseteq G : \Omega_{\mathcal{V}}(A) \in \mathcal{U}\} \text{ onde } \Omega_{\mathcal{V}}(A) = \{g \in G : g^{-1}A \in \mathcal{V}\}.$$

Sejam X, Y subconjuntos enumeráveis de βG tais que $cl_{\mathcal{T}}(X) \cap cl_{\mathcal{T}}(Y) \neq \phi$. Então

$$X \cap cl_{\mathcal{T}}(Y) \neq \phi \text{ ou } cl_{\mathcal{T}}(X) \cap Y \neq \phi$$

Demonstração

Suponhamos que $cl_{\mathcal{T}}(X) \cap Y = \phi = X \cap cl_{\mathcal{T}}(Y)$ como $X = \{x_n : n < \omega\}$ e $Y = \{y_n : n < \omega\}$, para cada $n < \omega$, temos que

$$(\exists\, A_n \subseteq G)\ (x_n \in \overline{A_n} \text{ e } \overline{A_n} \cap Y = \phi) \quad \text{e} \quad (\exists\, B_n \subseteq G)\ (y_n \in \overline{B_n} \text{ e } X \cap \overline{B_n} = \phi).$$

Para cada $n < \omega$ sejam $U_n = \overline{A_n} \setminus \bigcup_{i=0}^{n} \overline{B_i} = \overline{A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n} B_i}$ e

$V_n = \overline{B_n} \setminus \bigcup_{i=0}^{n} \overline{A_i} = \overline{B_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n} A_i}$. Assim U_n, V_n são abertos fechados, agora sejam

$$U = \cup\{U_n \ : \ n < \omega\} \ , \ V = \cup\{V_n \ : \ n < \omega\}$$

assim $X \subseteq U$, $Y \subseteq V$, $U \cap V = \phi$ e como V é aberto temos que $cl_{\mathcal{T}}(U) \cap V = \phi$ e como $(\beta G, \mathcal{T})$ é extremamente desconexo temos que $cl_{\mathcal{T}}(U)$ é aberto, assim $cl_{\mathcal{T}}(U) \cap cl_{\mathcal{T}}(V) = \phi$ logo $cl_{\mathcal{T}}(X) \cap cl_{\mathcal{T}}(Y) = \phi$.

■

Lema 4.21 Seja G um semigrupo topológico à direita, compacto Hausdorff. Então existe um idempotente em G.

Demonstração

Seja $\mathcal{A} = \{F \subseteq G \ : \ F \cdot F \subseteq F$ e F fechado não vazio$\}$, como $G \in \mathcal{A}$ temos que $\mathcal{A} \neq \phi$. Como $(\mathcal{A}, \subseteq)$ é um ordem parcial, pelo Lema de Zorn, existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{C}$ é cadeia maximal, assim seja $H = \cap\mathcal{C}$ pela compacidade $H \neq \phi$ e como $H = \cap\mathcal{C}$ temos que $H \cdot H \subseteq H$, assim $H \in \mathcal{A}$ e como $\mathcal{C}$ é maximal temos que H é minimal em $\mathcal{A}$. Seja $h \in H$ então $\rho_h : G \to G$ é contínua e como G é compacto Hausdorff temos que ρ_h é fechada, assim $H \cdot h = \rho_h(H)$ é fechado não vazio e como $(H \cdot h) \cdot (H \cdot h) \subseteq H \cdot H \cdot H \cdot h \subseteq H \cdot h$ temos que $H \cdot h \in \mathcal{A}$. Como $H \cdot h \subseteq H \cdot H \subseteq H$ e H é minimal temos que $H \cdot h = H$, assim existe $g \in H$ tal que $g \cdot h = h$. Definimos $F = \rho_h^{-1}(\{h\}) \cap H$, assim $g \in F$, logo F é subconjunto fechado não vazio de H. Como $\rho_h^{-1}(\{h\}) \cdot \rho_h^{-1}(\{h\}) \subseteq \rho_h^{-1}(\{h\})$ e $H \cdot H \subseteq H$ temos que $F \cdot F \subseteq F$, assim $F \in \mathcal{A}$ e $F \subseteq H$ e como H é minimal temos que $F = H$, assim $h \in H = F$ logo $h \in \rho_h^{-1}(\{h\})$ portanto $h \cdot h = h$.

■

Definição 4.22 Seja $\mathcal{U} \in \beta G$, então $\mathcal{U}$ é cancelável pela direita se

$$(\forall\ \mathcal{V} \in \beta G)\ (\mathcal{V} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{V} = 1)$$

Proposição 4.23 Seja G um grupo enumerável, então são equivalentes:

(i) $\mathcal{U} \in \beta G$ é cancelável pela direita.

(ii) Para cada $g \in G$, existe $U_g \in \mathcal{U}$ tal que se $g \neq h$ então $gU_g \cap hU_h = \phi$.

Demonstração

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $\mathcal{V} \in \beta G$ tal que $\mathcal{V} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U}$, como $U_1 \in \mathcal{U} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ temos que $\Omega_{\mathcal{U}}(U_1) \in \mathcal{V}$. Seja $g \neq 1$, então $U \cap gU_g = \phi$ logo $g^{-1}U_1 \cap U_g = \phi$ e assim $g \notin \Omega_{\mathcal{U}}(U_1)$. Portanto $\{1\} = \Omega_{\mathcal{U}}(U_1) \in \mathcal{V}$ assim temos que $\mathcal{V} = 1$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Vamos demonstrar que $(\exists\ A \in \mathcal{U})(|\Omega_{\mathcal{U}}(A)| < \omega)$.

Senão temos que $(\forall A \in \mathcal{U})\ (\ |\Omega_{\mathcal{U}}(A)| = \omega\ )$. Como $\Omega_{\mathcal{U}}(A) \cap \Omega_{\mathcal{U}}(B) = \Omega_{\mathcal{U}}(A \cap B)$ temos que $\{\Omega_{\mathcal{U}}(A) \backslash F\ :\ A \in \mathcal{U}$ e $F \in [G]^{<\omega}\}$ satisfaz a propriedade da interseção finita, assim existe $\mathcal{V} \in \cap\{\overline{\Omega_{\mathcal{U}}(A) \backslash F} : A \in \mathcal{U}$ e $F \in [G]^{<\omega}\}$ e como $\cap\{\Omega_{\mathcal{U}}(A) \backslash F\ :\ A \in \mathcal{U}$ e $F \in [G]^{<\omega}\} = \phi$ temos que $\mathcal{V} \in G^*$ e como $(\forall A \in \mathcal{U})(\ \Omega_{\mathcal{U}}(A) \in \mathcal{V}\ )$ temos que $(\forall A \in \mathcal{U})(\ A \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}\ )$ assim $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ logo $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ com $\mathcal{V} \neq 1$ o que é contraditorio.

Vamos demonstrar que $(\exists A \in \mathcal{U})\ (\ |\Omega_{\mathcal{U}}(A)| = 1\ )$.

Seja $A \in \mathcal{U}$ tal que $|\Omega_{\mathcal{U}}(A)| = n$, com $n > 1$. Seja $g \in \Omega_{\mathcal{U}}(A)$ tal que $g \neq 1$, por hipótese $\mathcal{U}_{g^{-1}} \cdot \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$ onde $\mathcal{U}_{g^{-1}}$ é o ultrafiltro gerado por $\{g^{-1}\}$, assim $(\exists\ B \in \mathcal{U})\ (\ g^{-1}B \notin \mathcal{U}\ )$ portanto $g^{-1}(B \cap A) \notin \mathcal{U}$, assim $g \notin \Omega_{\mathcal{U}}(A \cap B)$ e como $\Omega_{\mathcal{U}}(A \cap B) \subseteq \Omega_{\mathcal{U}}(A)$ temos que $\Omega_{\mathcal{U}}(A \cap B) < n$, assim temos que $(\exists\ A \in \mathcal{U})\ (\ |\Omega_{\mathcal{U}}(A)| = 1\ )$.

Como $(\forall\ A \in \mathcal{U})\ (1 \in \Omega_{\mathcal{U}}(A))$ temos que existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $\Omega_{\mathcal{U}}(A) = \{1\}$, como $|G| = \omega$ suponhamos que $G = \{g_n\ :\ n < \omega\}$ com $g_0 = 1$, assim $(\forall\ n > 0)(g_n^{-1}A \notin \mathcal{U})$, e como $\mathcal{U}$ é ultrafiltro temos que $(\forall\ n > 0)\ (\exists A^0_{g_n} \in \mathcal{U})\ (\ A \cap g_n \cdot A^0_{g_n} = \phi\ )$, s.p.g. suponhamos que

$(\forall n > 0)(A^0_{g_n} \subseteq A)$, seja $U_0 = A$, assim temos que $U_0 \in \mathcal{U}$ e $(\forall\ n > 0)\ (\ g_0 U_0 \cap g_n A^0_{g_n} = \phi\ )$.

Seja $j < \omega$ e suponhamos que para cada $i < j$ e cada $n > i$ existem $A^i_{g_n} \in \mathcal{U}$ tais que

(a) $A^i_{g_n} \subseteq A^{i-1}_{g_n} \subseteq \cdots \subseteq A^0_{g_n} \subseteq A$

(b) $g_i U_i \cap g_n A^i_{g_n} = \phi$ onde $U_i = A^{i-1}_{g_i}$

então para j definimos $U_j = A^{j-1}_{g_j}$ .Seja $n > j$:

Se $g_j^{-1} g_n \notin \{g_m\ : m \leq j\}$ então por (a) temos que $A^{j-1}_{g_j^{-1} g_n} \subseteq A^0_{g_j^{-1} g_n} \subseteq A$ e como $A \cap g_j^{-1} g_n A^0_{g_j^{-1} g_n} = \phi$ temos que $g_j A \cap g_n A^{j-1}_{g_j^{-1} g_n} = \phi$.

Se $g_j^{-1} g_n \in \{g_m\ :\ m \leq j\}$ então existe $m \leq j$ tal que $g_j^{-1} g_n = g_m$, seja $A^{j-1}_{g_j^{-1} g_n} = U_m$, como $A \cap g_m U_m \subseteq A \cap g_m A^0_{g_m} = \phi$ temos que $g_j A \cap g_n A^{j-1}_{g_j^{-1} g_n} = \phi$.

Para cada $n > j$ seja $A^j_{g_n} = A^{j-1}_{g_n} \cap A^{j-1}_{g_j^{-1} g_n} \in \mathcal{U}$ assim temos que $A^j_{g_n} \subseteq A^{j-1}_{g_n}$ e $g_j U_j \cap g_n A^j_{g_n} \subseteq g_j A \cap g_n A^{j-1}_{g_j^{-1} g_n} = \phi$.

Agora para cada $j < \omega$ e cada $i < j$ temos que $g_i U_i \cap g_j U_j = g_i U_i \cap g_j A^{j-1}_{g_j}$ e por (a) $g_i U_i \cap g_j U_j \subseteq g_i U_i \cap g_j A^i_{g_j}$ e por (b) $g_i U_i \cap g_j U_j = \phi$, assim temos (ii).

■

Proposição 4.24 Para cada $\mathcal{U} \in \beta G$ e cada $\mathcal{U}_h \in G^o \backslash \{1\}$ temos que

$$\mathcal{U}_h \cdot \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$$

Demonstração

Dado $h \in G \backslash \{1\}$ seja $\mathcal{A} = \{F \subseteq G : F \cap hF = \phi\}$ como $\{1\} \in \mathcal{A}$ temos que $\mathcal{A}$ é não vazio, seja $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ cadeia crescente em $(\mathcal{A}, \subseteq)$, vamos demonstrar que $\cup\mathcal{C} \in \mathcal{A}$. Senão, existe $g \in (\cup\mathcal{C}) \cap h(\cup\mathcal{C})$ assim existem $F_0, F_1 \in \mathcal{C}$ tais que $g \in hF_0$ e $g \in F_1$ e como $\mathcal{C}$ é crecente temos que $F_0 \subseteq F_1$ ou $F_1 \subseteq F_0$ logo $g \in hF_0 \cap F_1 \subseteq hF_1 \cap F_1$ ou $g \in hF_0 \cap F_1 \subseteq hF_0 \cap F_0$ portanto $F_1 \notin \mathcal{A}$ ou $F_0 \notin \mathcal{A}$ o que é contraditório.

Pelo lema de Zorn existe F elemento maximal de $\mathcal{A}$. Vamos demonstrar que $G^o = F \cup hF \cup h^{-1}F$.

Seja $g \in G^o \backslash (F \cup hF)$ pela maximalidade de F temos que $\{g\} \cup F \notin \mathcal{A}$ assim $(\{g\} \cup F) \cap h(\{g\} \cup F) \neq \phi$. Como $h \neq 1$ temos que $g \neq hg$. Como $g \notin hF \cup F$ temos que $(\forall f \in F)(g \neq hf)$. Como $F \in \mathcal{A}$ temos que $(\forall f_1, f_2 \in F)(f_1 \neq hf_2)$. Assim, existe $f \in F$ tal que $hg = f$. Logo $g \in h^{-1}F$ e portanto $G^o = F \cup hF \cup h^{-1}F$.

Seja $\mathcal{U} \in \beta G$, vamos demonstrar que $\mathcal{U}_h \cdot \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$. Senão , temos que $\mathcal{U} = h\mathcal{U}$ e como $\mathcal{U}$ é ultrafiltro temos que $F \in \mathcal{U}$ ou $hF \in \mathcal{U}$ ou $h^{-1}F \in \mathcal{U}$ e como $hF \in \mathcal{U} = h\mathcal{U} \Leftrightarrow F \in \mathcal{U} = h\mathcal{U} \Leftrightarrow h^1 F \in \mathcal{U} = h\mathcal{U}$ temos que $F, hF \in \mathcal{U}$ logo $F \cap hF \neq \phi$ portanto $F \notin \mathcal{A}$ o que é contraditório.

■

Proposição 4.25 Seja $\mathcal{U} \in \beta G$, então $\mathcal{U}$ é não cancelável pela direita se e somente se existe $\mathcal{V} \in G^*$ idempotente tal que $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$.

Demonstração

$(\Rightarrow)$ Seja $H = \{\mathcal{V} \in G^* \ : \ \mathcal{V} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U}\} = G^* \cap \rho_{\mathcal{U}}^{-1}(\{\mathcal{U}\})$, pela proposição 4.24 temos que H é não vazio e pelo teorema 4.19 e pela definição de H temos que H é semigrupo topológico à direita compacto Hausdorff. Assim pelo lema 4.21 temos que existe em idempotente $\mathcal{V} \in H$, portanto $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$.

$(\Leftarrow)$ Claro.

■

Definição 4.26 Seja $\mathcal{U} \in \beta G$, então $\mathcal{U}$ é dito ultrafiltro primo se $(\forall\ \mathcal{V},\ \mathcal{W} \in \beta G)\ (\mathcal{U} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{W} \ \Rightarrow\ \mathcal{V} \in G^o$ ou $\mathcal{W} \in G^o)$.

Corolario 4.27 Todo ultrafiltro primo é cancelável pela direita.

Demonstração

Seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro primo. Se $\mathcal{U}$ não é cancelável pela direita, pela Proposição 4.25 existe $\mathcal{V} \in G^*$ idempotente tal que $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ assim temos que $\mathcal{U} \in G^o$ portanto $\mathcal{U}$ é cancelável pela direita o que é contraditório.

■

Proposição 4.28 Seja G um grupo e seja $\mathcal{C}$ uma base de um filtro $\mathcal{F}$ em G tal que $(\forall\ A \in \mathcal{C})(\forall\ g \in A)\ (\ g^{-1}A \in \mathcal{F}\ )$ e $(\forall\ A \in \mathcal{C})\ (\ 1 \in A\ )$. Então $\{gA\ :\ g \in G\ ,\ A \in \mathcal{C}\}$ é base de um grupo topológico à esquerda em G.

Demonstração

Vamos demonstrar que $\{gA\ :\ g \in G\ ,\ A \in \mathcal{C}\}$ é uma base.

Seja $x \in gA \cap hB$ onde $g,\ h \in G$ e $A,\ B \in \mathcal{C}$ por demonstrar que existe $f \in G$ e $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in fC \subseteq gA \cap hB$. Como $x \in gA \cap hB$ temos que $g^{-1}x \in A$ e $h^{-1}x \in B$, então por hipotesis $x^{-1}g\ A = (g^{-1}x)^{-1}A \in \mathcal{F}$ e $x^{-1}h\ B = (h^{-1}x)^{-1}B \in \mathcal{F}$. Assim $(\exists\ C \in \mathcal{C})\ (C \subseteq x^{-1}gA \cap x^{-1}hB \in \mathcal{F})$ e como $1 \in C$ temos que $x \in xC \subseteq gA \cap hB$.

Assim $\{gA\ :\ g \in G,\ A \in \mathcal{C}\}$ gera uma topologia em G na qual

$$\begin{aligned} \lambda_g : G &\to G \\ h &\quad gh \end{aligned}$$

é contínua pois G é grupo.

■

Daqui em diante, se G é um grupo topológico à esquerda e $\mathcal{F}$ é o filtro das vizinhanças de 1, então $(G, \mathcal{F})$ denota G como grupo topológico à esquerda. Também se $\mathcal{F}$ é um filtro em G então $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ denota uma base do filtro $\mathcal{F}$ e

$$\overline{\mathcal{F}} = \cap\{\overline{A}\ :\ A \in \mathcal{F}\}\ \text{ onde }\ \overline{A} = \{\mathcal{U} \in \beta G\ :\ A \in \mathcal{U}\}.$$

Proposição 4.29 Seja $(G,\mathcal{F})$ um grupo topológico à esquerda, então $\overline{\mathcal{F}}$ é um subsemigrupo fechado de $((\beta G,\cdot),\mathcal{T})$.

Demonstração

Como $\overline{\mathcal{F}} = \cap\{\overline{A} : A \in \mathcal{F}\}$ e $\overline{A}$ é $\mathcal{T}$-fechado então $\overline{\mathcal{F}}$ é $\mathcal{T}$-fechado. Como $(G,\mathcal{F})$ é grupo topológico à esquerda então dado $A \in \mathcal{F}$ e $a \in A$, temos que $a^{-1}A$ é aberto e como $1 \in a^{-1}A$ temos que $a^{-1}A \in \mathcal{F}$, assim temos que dados $\mathcal{U},\ \mathcal{V} \in \overline{\mathcal{F}}$ então $A \subseteq \Omega_{\mathcal{V}}(A)$ e como $A \in \mathcal{U}$ então $\Omega_{\mathcal{V}}(A) \in \mathcal{U}$ logo $A \in \mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$, assim $\mathcal{U}\cdot\mathcal{V} \in \overline{\mathcal{F}}$ e portanto $(\overline{\mathcal{F}},\cdot)$ é subsemigrupo fechado em $((\beta G,\cdot),\mathcal{T})$.

■

Lema 4.30 Seja $(G,\mathcal{F})$ um grupo topológico à esquerda enumerável, e suponhamos que existe $\mathcal{U} \in \overline{\mathcal{F}} \cap G^*$ cancelável pela direita. Então $(G,\mathcal{F})$ é ω-resolúvel.

Demonstração

Pela Proposição 4.23 para cada $g \in G$, existe $U_g \in \mathcal{U}$ tal que se $g \neq h$ então $gU_g \cap hU_h = \phi$. Para cada $g \in G\backslash\{1\}$ como $\mathcal{U} \in G^*$ temos que $\mathcal{U}_g\mathcal{U} \in G^*$ assim existe $A,\ B \in \mathcal{U}$ tal que $1 \notin A$ e $1 \notin gB$. Agora definamos $U'_g = U_g \cap A \cap B$, assim temos que $\{1\} \cap (U'_g \cup gU'_g) = \phi$ e para $g = 1$ definir $U'_1 = U_1 \cap A$. Assim s.p.g. suponhamos que $(\forall g \in G)$ ($1 \notin U_g \cup gU_g$). Sejam

$$A_0 = \{1\}\ ,\quad A_1 = U_1 \ \text{ e em geral }\ A_n = \cup\{gU_g\ :\ g \in A_{n-1}\}.$$

Vamos demonstrar que $(\forall n \in \mathbb{N})$ ($A_{n+1} \cap (A_0 \cup \cdots \cup A_n) = \phi$).
Por indução, como $A_0 \cap A_1 = \phi$, seja $n > 1$ e suponhamos que $(\forall\ i \leq n)$ ($A_i \cap (A_0 \cup \cdots \cup A_{i-1}) = \phi$. Mostraremos que $A_{n+1} \cap (A_0 \cup \cdots \cup A_n) = \phi$. Senão, existe $g \in A_{n+1} \cap (A_0 \cup \cdots \cup A_n)$, como $g \in A_{n+1}$ temos que existe $h \in A_n$ tal que $g \in hU_h$, e como existe $i \leq n$ tal que $g \in A_i$ temos dois casos.

Se $i = 0$ temos que $g = 1$ portanto $1 \in hU_h$ o que é contraditório.

Se $0 < i \leq n$ temos que existe $f \in A_{i-1}$ tal que $g \in fU_f$ então $g \in hU_h \cap fU_f$ assim $h = f$ portanto $h \in A_n \cap A_{i-1}$ o que é contraditório.

Vamos demostrar que $(\forall g \in G)$ ($1 \in cl(U_g)$).

Senão existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap U_g = \phi$ então $A \notin \mathcal{U}$ logo $\mathcal{U} \notin \overline{A}$.

Vamos demostrar que $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $(A_n \subseteq cl(A_{n+1}))$.

Como $(G, \mathcal{F})$ é grupo topológico à esquerda temos que $cl(gU_g) = g\ cl(U_g)$ (pois λ_g é contínua-fechada). Assim se $g \in A_n$ então $g \in g\ cl(U_g) = cl(gU_g)$ e como $gU_g \subseteq A_{n+1}$ temos $g \in cl(A_{n+1})$ assim $A_n \subseteq cl(A_{n+1})$.

Agora seja $X = \cup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ e seja $\{N_n : n \in \mathbb{N}\}$ partição de $\mathbb{N}$, tal que $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ ($|N_n| = \omega$) e para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $D_n = \cup\{A_i : i \in N_n\}$. Assim $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma partição de X e como $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ ($A_n \subseteq cl(A_{n+1})$) e $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ ($|N_n| = \omega$) temos que D_n é denso em X. Portanto X é ω-resolúvel. Como $X \subseteq G$ e G é homogêneo, segue pelo Corolário 1.21 que G é ω-resolúvel.

■

Definição 4.31 Seja $\{(G_n, \cdot) : n < \omega\}$ uma família de grupos abelianos e seja $(G, \cdot) = \bigoplus_{n<\omega} G_n$. Para cada $g \in G \backslash \{1\}$ sejam:

$$sup(g) = \{n < \omega \ : \ g(n) \neq 1\}$$
$$max(g) = max(sup(g))$$
$$min(g) = min(sup(g))$$

Se $A \subseteq G$ e $\mathcal{U} \in G^*$ sejam:

$$max(A) = \{max(a) \ : \ a \in A\}$$
$$\mathcal{C}_{MAX(\mathcal{U})} = \{max(A) \ : \ A \in \mathcal{U}\}$$

e $MAX(\mathcal{U})$ é o filtro gerado por $\mathcal{C}_{MAX(\mathcal{U})}$ em $\mathbb{N}$.

Se $X \subseteq G^*$ seja $MAX(X) = \{MAX(\mathcal{U}) \ : \ \mathcal{U} \in X\}$

Proposição 4.32 Seja $\{(G_n, \cdot) : n < \omega\}$ uma família de grupos abelianos e sejam $(G, \cdot) = \bigoplus_{n<\omega} G_n$ e $\mathcal{U} \in G^*$. Então $\mathcal{C}_{MAX(\mathcal{U})}$ é ultrafiltro em $\mathbb{N}$.

$$\text{(em particular, } \quad MAX(\mathcal{U}) = \mathcal{C}_{MAX(\mathcal{U})})$$

Demonstração

Para cada $A \subseteq G$, seja $sup(A) = \{sup(a) : a \in A\}$ e para cada $\mathcal{U} \in G^*$ seja $SUP(\mathcal{U}) = \{sup(A) : A \in \mathcal{U}\}$.

Vamos demonstrar que $SUP(\mathcal{U})$ é um ultrafiltro de $[\mathbb{N}]^{<\omega} \backslash \{\phi\}$.

Mostraremos que $(\forall A, B \in \mathcal{U})$ ($sup(A) \cap sup(B) \in SUP(\mathcal{U})$). Para cada $h \in G$ seja $\tilde{h} = \{g \in G : sup(g) = sup(h)\}$ e para cada $A \subseteq G$ seja $\tilde{A} = \cup\{\tilde{a} : a \in A\}$. Assim para cada $A, B \subseteq G$ temos que

$$A \subseteq \tilde{A} \ , \ sup(A) = sup(\tilde{A}) \ , \ sup(\tilde{A}) \cap sup(\tilde{B}) = sup(\tilde{A} \cap \tilde{B}).$$

Sejam A, $B \in \mathcal{U}$, então $sup(A) \cap sup(B) = sup(\tilde{A} \cap \tilde{B})$ e como $A \cap B \subseteq \tilde{A} \cap \tilde{B}$ temos que $\tilde{A} \cap \tilde{B} \in \mathcal{U}$, assim $sup(A) \cap sup(B) \in SUP(\mathcal{U})$.

Sejam $N \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega} \backslash \{1\}$ e definimos $A_N = \{g \in G : sup(g) \in N\}$. Assim $sup(A_N) \subseteq N$ e como para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g \in G$ tal que $sup(g) = n$ temos que $sup(A_N) = N$.

Vamos demonstrar que

$$(\forall B \in \mathcal{U}) \ (\forall N \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}) \ (\ sup(B) \subseteq N \ \Rightarrow \ N \in SUP(\mathcal{U}) \ ).$$

Sejam $B \in \mathcal{U}$ e $N \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ tais que $sup(B) \subseteq N$. Então $B \subseteq A_N$ e $A_N \in \mathcal{U}$. Portanto $N = sup(A_N) \in SUP(\mathcal{U}$.

Seja $\mathcal{F}$ um filtro em $[\mathbb{N}]^{<\omega} \backslash \{\phi\}$ tal que $SUP(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{F}$. Mostraremos que $\mathcal{F} = SUP(\mathcal{U})$. Senão existe $N \in \mathcal{F} \backslash SUP(\mathcal{U})$, como $SUP(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{F}$ temos que $(\forall \ A \in \mathcal{U})$ ($N \cap sup(A) \neq \phi$). Assim $(\forall \ A \in \mathcal{U})$ ($A \cap A_N \neq \phi$) então $A_N \in \mathcal{U}$ e como $sup(A_N) = N$ temos que $N \in SUP(\mathcal{U})$ o que é contradiório.

Portanto $SUP(\mathcal{U})$ é um ultrafiltro de $[\mathbb{N}]^{<\omega}\backslash\{\phi\}$.

Vamos demonstrar que $\mathcal{C}_{MAX(\mathcal{U})}$ é ultrafiltro de $\mathbb{N}$.

Para cada $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}\backslash\{\phi\}$ seja $max(A) = \{max(a) \ : \ a \in A\}$ e para cada $\mathcal{U}$ ultrafiltro de $[\mathbb{N}]^{<\omega}\backslash\{\phi\}$ seja $MAX(\mathcal{U}) = \{max(A) \ : \ A \in \mathcal{U}\}$. Mostraremos que $MAX(\mathcal{U})$ é ultrafiltro de $\mathbb{N}$. Para cada $a \in [\mathbb{N}]^{<\omega}\backslash\{\phi\}$ seja $\tilde{a} = \{b \in [\mathbb{N}]^{<\omega} \ : \ max(a) = max(b)\}$ e para cada $A \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}\backslash\{\phi\}$ seja $\tilde{A} = \cup\{\tilde{a} \ : \ a \in A\}$. Então

$$A \subseteq \tilde{A}\ ,\ max(A) = max(\tilde{A})\ ,\ max(\tilde{A}) \cap max(\tilde{B}) = max(\tilde{A} \cap \tilde{B})$$

para cada $A, B \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}\backslash\{\phi\}$.

Portanto, a demonstração de que $MAX(\mathcal{U})$ é um ultrafiltro de $\mathbb{N}$ é analoga à de que $SUP(\mathcal{U})$ é um ultrafiltro de $[\mathbb{N}]^{<\omega}\backslash\{\phi\}$. Assim, dado $\mathcal{U} \in G^*$ temos que $SUP(\mathcal{U})$ é ultrafiltro de $[\mathbb{N}]^{<\omega}\backslash\{\phi\}$ e então $MAX(SUP(\mathcal{U}))$ é um ultrafiltro de $\mathbb{N}$, e como para cada $g \in G, max(g) = max(sup(g))$ temos que $\mathcal{C}_{MAX(\mathcal{U})} = MAX(SUP(\mathcal{U}))$ portanto $\mathcal{C}_{MAX(\mathcal{U})}$ é ultrafiltro de $\mathbb{N}$.

■

Proposição 4.33 Seja $\{(G_n, \cdot) : n < \omega\}$ uma família de grupos abelianos finitos e seja $G = \bigoplus_{n<\omega} G_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $F_n = \{g \in G \ : \ min(g) > n\} \cup \{1\}$ e seja $\mathcal{F}_0$ o filtro gerado por $\mathcal{C} = \{F_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Então $(G, \mathcal{F}_0)$ é um grupo topológico e todo idempotente de βG está contido em $\overline{\mathcal{F}_0}$ (onde $\overline{\mathcal{F}_0} = \cap\{\overline{A} \ : \ A \in \mathcal{F}\}$).

Demonstração

Seja $g \in F_n$, então $g^{-1}F_n = F_n \in \mathcal{C}$ assim pela Proposição 4.28 temos que $\{gF_n \ : \ g \in G \ e \ n \in \mathbb{N}\}$ é uma topologia em G. Para mostrar que a multiplicação é continua, basta observar que se $gh \in U$, com U aberto então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $ghF_n = gF_nhF_n \subseteq U$ e como $(g\ F_n)^{-1} = g^{-1}F_n$ temos que a função inversa é continua, assim $(G, \mathcal{F}_0)$ é grupo topológico.

Seja $\mathcal{U} \in \beta G$ idempotente, vamos demonstrar que $\mathcal{U} \in \overline{\mathcal{F}_0}$.

Senão $(\exists\, n \in \mathbb{N})$ ($F_n \notin \mathcal{U}$), assim $G \backslash F_n \in \mathcal{U}$. Como G_n é finito temos que existem $x_1, x_2, \cdots, x_m \in G \backslash F_n$ tais que $G \backslash F_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} x_i F_n$ e como $\mathcal{U}$ é ultrafiltro temos que existe $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ tal que $x_i F_n \in \mathcal{U} = \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}$ assim $\Omega_{\mathcal{U}}(x_i F_n) \in \mathcal{U}$, então $\Omega_{\mathcal{U}}(x_i F_n) \cap x_i F_n \neq \phi$. Portanto existe $f \in F_n$ tal que $x_i f \in \Omega_{\mathcal{U}}(x_i F_n)$ assim $(x_i f)^{-1} x_i F_n \in \mathcal{U}$ e como $F_n = f F_n = (x_i f)^{-1} x_i F_n$ temos que $F_n \in \mathcal{U}$ o que é contraditório. Portanto

$$(\forall\, \mathcal{U} \in \beta G)(\mathcal{U} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \overline{\mathcal{F}_0}).$$

■

Proposição 4.34 Seja $\{G_n : n < \omega\}$ uma família de grupos abelianos finitos e seja $G = \bigoplus_{n<\omega} G_n$. Sejam $\mathcal{U} \in G^*$ e $\mathcal{V} \in \beta G$ então

$$MAX(\mathcal{V} \cdot \mathcal{U}) = MAX(\mathcal{U}).$$

Demonstração

Seja $A \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{U} \in G^*$ então A é infinito.Como os G_n são finitos temos que $max(A)$ é infinito em $\mathbb{N}$. Seja $A \in \mathcal{U}$ e seja $B \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$.

Vamos demonstrar que $max(A) \cap max(B) \neq \phi$.

Como $B \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$ então $\Omega_{\mathcal{U}}(B) \in \mathcal{V}$, assim existe $g \in G$ tal que $g^{-1}B \in \mathcal{U}$. Logo $A \cap g^{-1}B \in \mathcal{U}$ e como $max(A \cap g^{-1}B)$ é infinito temos que existe $a \in A \cap g^{-1}B$ tal que $max(g^{-1}) < max(a)$. Como $a \in g^{-1}B$ temos que existe $b \in B$ tal que $a = g^{-1}b$.

Por demonstrar que $max(g^{-1}) < max(b)$. Senão $max(b) \leq max(g^{-1})$ logo $max(a) = max(g^{-1}b) \leq max(g^{-1}) < max(a)$ assim $max(a) < max(a)$ o que é contraditorio. Então temos que $max(g^{-1}) < max(b)$ portanto $max(b) = max(g^{-1}b) = max(a)$ e assim $max(A) \cap max(B) \neq \phi$.

Agora pela proposição 4.32 temos que $MAX(\mathcal{V}\cdot\mathcal{U}) = MAX(\mathcal{U})$.

■

Lema 4.35 Seja $\{(G_n,\cdot) : n<\omega\}$ uma família de grupos abelianos finitos e seja $G = \bigoplus_{n<\omega} G_n$. Seja $\mathcal{F}$ um filtro de G tal que para cada $g \in G\backslash\{1\}$ temos que $(\mathcal{U}_g \cdot \overline{\mathcal{F}}) \cap \overline{\mathcal{F}} = \phi$ e seja $\mathcal{F}^* = \overline{\mathcal{F}} \cap G^*$ e suponhamos que $MAX(\mathcal{F}^*)$ é infinito então existe um ultrafiltro primo $\mathcal{U} \in \mathcal{F}^*$.

Demonstração

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolher $\mathcal{U}_n \in \mathcal{F}^*$ tal que para cada $n \neq m$ temos que $MAX(\mathcal{U}_n) \neq MAX(\mathcal{U}_m)$, como $(\beta G, \mathcal{T})$ é compacto e G^* é fechado temos que existe $\mathcal{U} \in G^*$ ponto de acumulação de $X = \{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ em $(\beta G, \mathcal{T})$, como $MAX(\mathcal{U}_n) \neq MAX(\mathcal{U}_m)$ s.p.g. suponhamos que
$(\forall\, n \in \mathbb{N})$ ($MAX(\mathcal{U}_n) \neq MAX(\mathcal{U})$).
Vamos demonstrar que $\mathcal{U}$ é ultrafiltro primo. Senão existem $\mathcal{V}$, $\mathcal{W} \in G^*$ tais que $\mathcal{U} = \mathcal{V}\cdot\mathcal{W}$, seja $Y = (G^o\backslash\{1\})\cdot\mathcal{W}$, como $\rho_{\mathcal{W}}$ é contínua fechada temos $cl_{\mathcal{T}}(Y) = cl_{\mathcal{T}}(G\backslash\{1\})\cdot\mathcal{W} = (\beta G\backslash\{1\})\cdot\mathcal{W} \ni \mathcal{V}\cdot\mathcal{W} = \mathcal{U}$ assim $\mathcal{U} \in cl_{\mathcal{T}}(X) \cap cl_{\mathcal{T}}(Y)$. Então pelo Lema 4.20 temos que

$$X \cap cl_{\mathcal{T}}(Y) \neq \phi \quad \text{ou} \quad cl_{\mathcal{T}}(X) \cap Y \neq \phi$$

(i) $X \cap cl_{\mathcal{T}}(Y) \neq \phi$.

Então existem $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{V}' \in \beta G$ tais que $\mathcal{U}_n = \mathcal{V}'\cdot\mathcal{W}$ assim pela Proposição 4.34 temos que $MAX(\mathcal{U}_n) = MAX(\mathcal{V}'\cdot\mathcal{W}) = MAX(\mathcal{W}) = MAX(\mathcal{V}\cdot\mathcal{W}) = MAX(\mathcal{U})$ o que é contraditório.

(ii) $cl_{\mathcal{T}}(X) \cap Y \neq \phi$.

Se $cl_{\mathcal{T}}(X) \cap Y = \{\mathcal{U}_g \cdot \mathcal{W}\}$ seja $Y' = G\backslash\{1, \mathcal{U}_g\}$, assim temos que $\mathcal{U} \in cl_{\mathcal{T}}(X) \cap cl_{\mathcal{T}}(Y')$ e como $cl_{\mathcal{T}}(X) \cap Y' = \phi$ temos que $X \cap cl_{\mathcal{T}}(Y') \neq \phi$ e por (i) contradição. Assim s.p.g. suponhamos que $|cl_{\mathcal{T}}(X) \cap Y| > 1$. Sejam

$g,\ h \in G\backslash\{1\}$ tais que $g \neq h$, $\mathcal{U}_g \cdot \mathcal{W}$, $\mathcal{U}_h \cdot \mathcal{W}$ $\in cl_{\mathcal{T}}(X)$. Como $\overline{\mathcal{F}}$ é fechado temos que $\mathcal{U}_g \cdot \mathcal{W}$, $\mathcal{U}_h \cdot \mathcal{W}$ $\in \overline{\mathcal{F}}$. Assim $\mathcal{W} \in \mathcal{U}_g^{-1} \cdot \overline{\mathcal{F}}$ o que implica que $\mathcal{U}_h \cdot \mathcal{W} \in \mathcal{U}_h \cdot \mathcal{U}_g^{-1} \cdot \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{U}_{hg^{-1}} \cdot \overline{\mathcal{F}}$

Portanto $\mathcal{U}_h \cdot \mathcal{W} \in \overline{\mathcal{F}} \cap \mathcal{U}_{hg^{-1}} \cdot \overline{\mathcal{F}}$ e como $h \neq g$ temos que $hg^{-1} \neq 1$, o que contradiz a hipótese. Portanto $\mathcal{U}$ é ultrafiltro primo.

■

A seguir damos a definição de P-ponto e logo uma equivalência cuja demonstração está no apêndice C.

Definição 4.36 Seja $\mathcal{U}$ ultrafiltro livre de $\mathbb{N}$ então $\mathcal{U}$ é um P-ponto se para cada $\{A_i\ :\ i \in \mathbb{N}\}$ partição de $\mathbb{N}$ com $A_i \notin \mathcal{U}$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $(\forall i \in \mathbb{N})(|A \cap A_i| < \omega)$.

Proposição 4.37 Seja $\mathcal{U}$ ultrafiltro livre de $\mathbb{N}$ então $\mathcal{U}$ é um P-ponto se e somente se para cada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. existe $A \in \mathcal{U}$ tal que

$$f/A \equiv cte. \ \text{ou}\ \ (\forall\ n \in \mathbb{N})\ (\ |(f/A)^{-1}(n)| < \omega\ )$$

Lema 4.38 Seja $\{(G_n, \cdot)\ :\ n < \omega\}$ uma família de grupos abelianos finitos tal que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $g^{n_0} = 1$, para cada $g \in G = \bigoplus_{n<\omega} G_n$.
Seja $\mathcal{F}$ filtro de G tal que $(G, \mathcal{F})$ é grupo topológico Hausdorff não discreto.
Sejam $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_0} = \{F_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ dados pela Proposição 4.33. Suponhamos que

$$(\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}^*)\ (\exists\ \mathcal{V} \in \mathcal{F}_0^*)\ (\exists\ \mathcal{W} \in \mathcal{F}^*)\ (\ \mathcal{U} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{W}\ )$$

onde $\mathcal{F}^* = \overline{\mathcal{F}} \cap G^*$ e $\mathcal{F}_0^* = \overline{\mathcal{F}_0} \cap G^*$ então

$$(\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}^*)\ (\ MAX(\mathcal{U})\ \text{é}\ P\text{-ponto}\ ).$$

Demonstração

Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{F}^*$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $A \in \mathcal{U}$ sejam

$$X(n, A) = F_n \cap (\{g \in G \ : \ max(g) \in max(A)\} \cup \{1\})$$

$$\text{e} \quad \mathcal{C}_{\mathcal{D}} = \{X(n, A) \ : \ n \in \mathbb{N} \ , \ A \in \mathcal{U}\}$$

Para cada n, $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq m$ e cada A, $B \in \mathcal{U}$ temos que $X(n, A) \cap X(m, B) \supseteq X(n, A \cap B)$, assim $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ gera um filtro $\mathcal{D}$ em G.

Afirmação 1) $(G, \mathcal{D})$ é grupo topológico à esquerda.

Seja

$$\mathcal{C}_{\mathcal{E}} = \{A \cap X(n, B) \ : \ A \in \mathcal{F} \ , \ X(n, B) \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}\}$$

então $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ gera um filtro $\mathcal{E}$ em G.

Afirmação 2) $(G, \mathcal{E})$ é grupo topológico à esquerda.

Seja

$$S = \{\mathcal{V} \in \mathcal{F}^* \ : \ MAX(\mathcal{V}) = MAX(\mathcal{U})\}.$$

Afirmação 3) $\mathcal{E}^*$ é semigrupo não vazio contido em S.

Vamos demonstrar que $MAX(\mathcal{U})$ é P-ponto.

Pelas Proposições 4.37 e 4.32, isto é equivalente a mostrar que dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que

$$f/max(A) \equiv cte \quad \text{ou} \quad (\forall \ n \in \mathbb{N}) \ (\ (|f/max(A))^{-1}(n)| < \omega \ )$$

seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(i) Suponhamos que existem $\mathcal{U}' \in \mathcal{E}^*$ e $A \in \mathcal{U}'$ tais que $(\forall \ g \in A)(f(max(g)) \leq min(g))$.

Como $\mathcal{U}' \in \mathcal{E}^* \subseteq S \subseteq \mathcal{F}^*$, por hipótese $(\exists \ \mathcal{V}' \in \mathcal{F}_0^*)$ $(\exists \ \mathcal{W}' \in \mathcal{F}^*)$ $(\ \mathcal{U}' = \mathcal{V}' \cdot \mathcal{W}' \ )$. Como $\mathcal{E}^* \subseteq \mathcal{D}^* \subseteq \mathcal{F}_0^*$ temos que $\mathcal{U}'$, $\mathcal{V} \in \mathcal{F}_0^*$. Vamos demonstrar que $\mathcal{W}' \in \mathcal{F}_0^*$.

Seja $n \in \mathbb{N}$, como $F_n \in \mathcal{U}' = \mathcal{V}' \cdot \mathcal{W}'$ temos que $\Omega_{\mathcal{W}'}(F_n) \in \mathcal{V}'$. Como $(\forall\ g,\ h \in F_n)(g^{-1}F_n = F_n = h^{-1}F_n)$ então $F_n \subseteq \Omega_{\mathcal{W}'}(F_n)$ ou $F_n \cap \Omega_{\mathcal{W}'}(F_n) = \phi$, mas $F_n \in \mathcal{V}'$, assim $F_n \cap \Omega_{\mathcal{W}}(F_n) \neq \phi$ e portanto temos que $F_n \subseteq \Omega_{\mathcal{W}'}(F_n)$ e como $1 \in F_n$ temos que $F_n \in \mathcal{W}'$ portanto $\mathcal{W}' \in \mathcal{F}_0^*$.
Como $A \in \mathcal{U}' = \mathcal{V}' \cdot \mathcal{W}'$ temos que $\Omega_{\mathcal{W}'}(A) \in \mathcal{V}'$ seja $g_0 \in \Omega_{\mathcal{W}'}(A) \backslash \{1\}$, então $g_0^{-1}A \in \mathcal{W}'$, seja $m > max(g_0)$ como $\mathcal{W}' \in \mathcal{F}_0^*$ temos que $C = g_0^{-1}A \cap F_m \in \mathcal{W}'$. Como $g_0 C \subseteq A$ e $(\forall\ g \in C)\ (\ max(g_0) < min(g)\ )$ temos que

$$(\forall\ g \in C)\ (\ f(max(g)) = f(max(g_0 g)) \leq min(g_0 g) = min(g_0)\ )$$

portanto

$$C = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_{min(g_0)} \quad \text{onde} \quad C_i = \{g \in T\ :\ f(max(g)) = i\}$$

como $C \in \mathcal{W}'$ e $\mathcal{W}'$ é ultrafiltro temos que existe $j \leq min(g_0)$ tal que $C_j \in \mathcal{W}'$. Como $\mathcal{U}' \in \mathcal{E}^* \subseteq S$ e $\mathcal{U}' = \mathcal{V}' \cdot \mathcal{W}'$ temos que

$$MAX(\mathcal{U}) = MAX(\mathcal{U}') = MAX(\mathcal{V}' \cdot \mathcal{W}') = MAX(\mathcal{W}')$$

assim $max(C_j) \in MAX(\mathcal{W}') = MAX(\mathcal{U})$ e $f/max(C_j) \equiv j$ portanto $MAX(\mathcal{U})$ é P-ponto.

(ii) Suponhamos que

$$(\forall\ \mathcal{U}' \in \mathcal{E}^*)\ (\forall\ A \in \mathcal{U}')\ (\exists\ g \in A)\ (\ f(max(g)) > min(g)\ ).$$

Seja $E = \{g \in G\ :\ f(max(g)) > min(g)\} \cup \{1\}$ então $(\forall\ \mathcal{U}' \in \mathcal{E}^*)\ (\forall\ A \in \mathcal{U}')\ (E \cap A \neq \phi)$ assim $(\forall\ \mathcal{U}' \in \mathcal{E}^*)\ (E \in \mathcal{U}')$.
Vamos demonstrar que $E \in \mathcal{E}$. Senão temos que $(\forall\ A \in \mathcal{E})\ (A \backslash E \neq \phi)$, como $\{A \backslash E\ :\ A \in \mathcal{E}\}$ satisfaz a propriedade da interseção finita temos que $(\exists\ \mathcal{V} \in \beta G)\ (\{A \backslash E\ :\ A \in \mathcal{E}\} \subseteq \mathcal{V})$. Como $(G, \mathcal{F})$ é Hausdorff temos que $(G, \mathcal{E})$ é Hausdorff assim $\cap \{A \backslash E\ :\ A \in \mathcal{E}\} = \phi$ (pois $1 \in E$) e portanto temos que

$\mathcal{V} \in G^*$. Como $(\forall\ A \in \mathcal{E})\ (A \backslash E \in \mathcal{V})$ temos que $\mathcal{V} \in \overline{\mathcal{E}}$, assim $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^*$, portanto $E \in \mathcal{V}$ mas $G \backslash E \in \mathcal{V}$ o que é contraditório.

Sejam $A_1 \in \mathcal{F}$ e $X(n_1, B_1) \in \mathcal{C}_\mathcal{D}$ tais que $A_1 \cap X(n_1, B_1) \subseteq E$. Como $(G, \mathcal{F})$ é grupo topológico temos que $(\exists\ A' \in \mathcal{F})((A')^{n_0} \subseteq A_1)$ onde n_0 é da hipótese do teorema. Seja $C = A' \cap X(n_1, B_1)$, assim $C \subseteq E$.

Vamos demonstrar que $(\forall\ i \in \mathbb{N})(\ |(f/max(C))^{-1}(i)| < \omega\ )$.
Senão existe $m_0 \in \mathbb{N}$ e existe $\{g_i\ :\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq C$ tais que

$$(\forall\ i \in \mathbb{N})\ (\ f(max(g_i)) = m_0\ )\quad (\forall i < j)\ (\ max(g_i) < max(g_j)\ ).$$

Como as coclasses de F_{m_0} são finitas (pois G_n são finitos) temos que existem $i_1, i_2, \cdots, i_{n_0} \in \mathbb{N}$ tais que

$$i_1 < i_1 < \cdots < i_{n_0} \quad \text{e} \quad (\forall\ j \leq m_0)\ (\ g_{i_1}(j) = g_{i_2}(j) = \cdots = g_{i_{n_0}}(j)\ )$$

Seja $h = g_{i_1} g_{i_2} \cdot \cdots \cdot g_{i_{n_0}}$, como $(\forall\ g \in G)\ (\ g^{n_0} = 1\ )$ temos que $min(h) > m_0$. Como $(\forall\ i < j)\ (\ max(g_i) < max(g_j)\ )$ temos que $max(h) = max(g_{i_{n_0}}) \in max(B_1)$ e como $(\forall\ n \leq n_0)\ (\ g_{i_n} \in X(n_1, B_1)\ )$ temos que $h \in F_{n_1}$ assim $h \in X(n_1, B_1)$. Como $(A')^{n_0} \subseteq A_1$ temos que $h \in A_1$ portanto $h \in A_1 \cap X(n_1, B_1) \subseteq E$. Como $h \in E \backslash \{1\}$ temos $f(max(h)) > min(h) > m_0$ e como $max(h) = max(g_{i_{n_0}})$ temos que $f(max(g_{i_{n_0}})) > m_0$ mas $f(max(g_{i_{n_0}})) = m_0$ o que é contraditório.

Agora como $C = A' \cap X(n_1, B_1) \in \mathcal{E}$ e $\mathcal{E}^*$ é não vazio contido em S temos que $max(C) \in MAX(\mathcal{U})$ portanto $MAX(\mathcal{U})$ é um P-ponto.

Demonstração da afirmação 1.
Pela Proposição 4.28 é suficiente mostrar que se $X(n, A) \in \mathcal{C}_\mathcal{D}$ e $g \in X(n, A)$ então $g^{-1}X(n, A) \in \mathcal{D}$. Seja $h \in X(max(g), A) \backslash \{1\}$ s.p.g. suponhamos que $g \neq 1$, como $h \in F_{max(g)}$ temos que $n < max(g) < max(h) = max(gh)$, assim $max(gh) \in max(A)$ logo $h = g^{-1}(gh) \in g^{-1}X(n, A)$ assim $X(max(g), A) \subseteq g^{-1}X(n, A) \in \mathcal{D}$, portanto $(G, \mathcal{D})$ é grupo topológico à esquerda.

Demonstração da afirmação 2.

Seja $A \cap X(n, B) \in \mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ e seja $g \in A \cap X(n, B)$, vamos demonstrar que $g^{-1}(A \cap X(n, B)) \in \mathcal{E}$. Como $g \in A$ temos $1 \in g^{-1}A$ e como $(G, \mathcal{F})$ é um grupo topológico e $A \in \mathcal{F}$ temos que $g^{-1}A \in \mathcal{F}$. Assim
$g^{-1}A \cap X(max(g), B) \subseteq g^{-1}(A \cap X(n, B))$, logo pela Proposição 4.28 temos que $(G, \mathcal{E})$ é grupo topológico à esquerda.

Demonstração da afirmação 3.

Pelas Proposição 4.34 e Proposição 4.29 e pelo Teorema 4.19, temos que S é um ideal esquerdo em $\mathcal{F}^*$. Como $\mathcal{F}^*$ é $\mathcal{T}$-fechado e $(\beta G, \mathcal{T})$ é compacto então $\mathcal{F}^*$ é compacto e como $\rho_{\mathcal{U}}$ é contínua temos que $\{\mathcal{U}\} \cup \rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}^*)$ é compacto e como $\{\mathcal{U}\} \cup \rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}^*) = \{\mathcal{U}\} \cup \mathcal{F}^* \cdot \mathcal{U}$ temos que $\{\mathcal{U}\} \cup \rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}^*)$ é ideal esquerdo em $\mathcal{F}^*$ contido em S, (i.e. $\{\mathcal{U}\} \cup \rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}^*)$ é semigrupo) assim temos que $\{\mathcal{U}\} \cup \rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}^*)$ é semigrupo topológico à direita compacto Hausdorff então pelo Lema 4.21 existe um idempotente $\mathcal{V} \in \{\mathcal{U}\} \cup \rho_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}^*) \subseteq S$.

Vamos demonstrar que $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^*$.
Como $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ é base do filtro $\mathcal{E}$ então basta mostrar que

$$\mathcal{V} \in G^* \text{ e } (\forall\ A \in \mathcal{F})\ (\forall\ X(n, B) \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}})\ (A \cap X(n, B) \in \mathcal{V}).$$

Como $\mathcal{V}$ é idempotente pela Proposição 4.33 temos que $\mathcal{V} \in \overline{\mathcal{F}_0}$, assim $(\forall\ n \in \mathbb{N})(F_n \in \mathcal{V})$. Como $\mathcal{V} \in S \subseteq \mathcal{F}^*$ temos que $\mathcal{V} \in G^*$ e $(\forall\ A \in \mathcal{F})$ ($A \in \mathcal{V}$). Mostraremos que $(\forall\ B \in \mathcal{U})$ ($\{g \in G\ :\ max(g) \in max(B)\} \in \mathcal{V}$). Seja $B \in \mathcal{U}$, como $\mathcal{V} \in S$ temos que $MAX(\mathcal{V}) = MAX(\mathcal{U})$ assim $max(B) \in MAX(\mathcal{V})$ e pela Proposição 4.32 temos que existe $A \in \mathcal{V}$ tal que $max(A) = max(B)$ assim $A \subseteq \{g \in G\ :\ max(g) \in max(B)\}$ e como $\mathcal{V}$ é ultrafiltro temos que $\{g \in G\ :\ max(g) \in max(B)\} \in \mathcal{V}$ portanto $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^*$.

Vamos demonstrar que $\mathcal{E}^* \subseteq S$.

Seja $\mathcal{W} \in \mathcal{E}^*$ então $(\forall B \in \mathcal{U})$ ($(\{g \in G : max(g) \in max(B)\} \cup \{1\}) \in \mathcal{W}$) assim $max(\{g \in G : max(g) \in max(B)\}) \in MAX(\mathcal{W})$ e como $max(\{g \in G : max(g) \in max(B)\}) \subseteq max(B)$ e $MAX(\mathcal{W})$ é ultrafiltro temos que $(\forall B \in \mathcal{U})$ $(max(B) \in MAX(\mathcal{W}))$ portanto $MAX(\mathcal{U}) = MAX(\mathcal{W})$.
Assim pela Proposição 4.29 e pelo Teorema 4.19 temos que $\mathcal{E}^*$ é semigrupo não vazio contido em S.

■

Lema 4.39 Seja $\{(G_n, \cdot) : n < \omega\}$ uma família de grupos abelianos finitos de ordem 2 e seja $G = \bigoplus_{n<\omega} G_n$. Seja $\mathcal{F}$ um filtro em G tal que $(G, \mathcal{F})$ é grupo topológico irresolúvel não discreto. Então $MAX(\mathcal{F}^*)$ é finito não vazio, e $(\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}^*)$ ($MAX(\mathcal{U})$ é P-ponto).

Demonstração

Como $(G, \mathcal{F})$ é grupo topológico irresolúvel temos que $(G, \mathcal{F})$ é Hausdorff e como $(G, \mathcal{F})$ é não discreto temos que $\mathcal{F}^*$ e não vazio. Vamos demonstrar que $MAX(\mathcal{F}^*)$ é finito.
Suponhamos que $MAX(\mathcal{F}^*)$ é infinito, como $(G, \mathcal{F})$ é grupo Hausdorff temos que para cada $g \neq 1$ existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $gA \cap A = \phi$ assim $(\mathcal{U}_g \cdot \overline{\mathcal{F}}) \cap \overline{\mathcal{F}} = \phi$, então pelo Lema 4.35 temos que existe $\mathcal{U} \in \mathcal{F}^*$ ultrafiltro primo e pelo Corolário 4.27 temos que $\mathcal{U}$ é cancelável pela direita e pelo Lema 4.30 temos que $(G, \mathcal{F})$ é resolúvel o que é contraditório.
Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{F}^*$, então pelo Lema 4.30 temos que $\mathcal{U}$ é não cancelavel pela direita, então pela Proposição 4.25 existe um idempotente $\mathcal{V}$ em G^* tal que $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$.
Como $\mathcal{V}$ é idempotente pela Proposição 4.33 temos que $\mathcal{V} \in \mathcal{F}_0^*$, assim $(\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}^*)(\exists\, \mathcal{V} \in \mathcal{F}_0^*)$ ($\mathcal{U} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}$) então pelo Lema 4.38 $(\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{F}^*)$ ($MAX(\mathcal{U})$ é $P-$ponto).

■

Teorema 4.40 Se existe $((G,\cdot),\mathcal{T})$ grupo topológico abeliano irresolúvel não discreto então existe um P-ponto.

Demonstração

Pelo teorema 4.8 existe H subgrupo aberto fechado enumeravel irresolúvel de ordem 2 em $(G,\mathcal{T})$, assim pelo lema 4.39 existe um P-ponto.

■

Comentários

Comfort e Van Mill [C.M.94] fazem a seguinte pergunta: pode-se demonstrar a existência de um grupo topológico abeliano irresolúvel não discreto em ZFC sem axiomas adicionais?

O Teorema 4.40 responde negativamente a esta pergunta. Por um resultado de Shelah[1] do ano 1982 existe um modelo de ZFC no qual não existe um P-ponto. Logo o Teorema 4.40 mostra que não existem grupos topológicos abeliano irresolúvel não discreto no modelo de Shelah. Como na seção 3.2 foi mostrada (assumindo o axioma de Martin) a existência destes grupos concluímos que a existência de tais grupos é independente de ZFC.

Esta seção é devida básicamente a Protasov [P.98]. Observamos que originalmente Protasov demonstra um resultado ainda mais forte, que a existência de um grupo topológico abeliano Hausdorff ω-irresolúvel não discreto implica a existência de um P-ponto. Este fato é consequência da seguinte afirmação: Cada grupo topológico abeliano Hausdorff ω-irresolúvel não discreto contém um subgrupo aberto enumerável de ordem dois. Assumindo esta afirmação, modificamos ligeramente o Lema 4.39 e o Teorema 4.40 e obtemos o resultado original de Protasov. Na demonstração do Teorema 4.40 nós usamos o Teorema 4.8 que é um resultado inferior em comparação à afirmação mencionada acima, daí que

[1]Shelah, Proper forcing, Lectures Notes in Math. (1982) V.940.

o resultado apresentado na tese é inferior ao original. Com respeito à afirmação o mesmo Protasov a demonstru mas não possuo a referência.

O Lema 4.20 (de Frolik) está em [S.92] e o Lema 4.21 está no livro de Ellis [EL.69].

Apêndice A

Lema 2.6 Seja κ um cardinal infinito e seja $\mathcal{C} = \{C_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}$ tal que para cada $\alpha < \kappa$ temos que $|C_\alpha| = \kappa$. Então existe $\{B_\alpha \ : \ \alpha < \kappa\}$ tal que

(i) $(\forall\ \alpha < \kappa)\ (B_\alpha \subseteq C_\alpha$ e $|B_\alpha| = \kappa$).

(ii) $(\forall\ \alpha, \beta < \kappa)\ (\alpha \neq \beta \ \Rightarrow\ B_\alpha \cap B_\beta = \phi$).

Demonstração

Para (0,0), escolher um $p_{(0,0)} \in C_0$. Seja $\theta < \kappa$ e suponhamos que para cada $\alpha \leq \beta < \theta$ temos definidos $p_{(\alpha,\beta)}$.

Para cada $\gamma \leq \theta$ vamos definir $p_{(\gamma,\theta)}$. Seja $\gamma = 0$, então escolhemos $p_{(0,\theta)} \in C_0 \backslash \{p_{(\alpha,\beta)} : \alpha \leq \beta < \theta\}$. Dado $\gamma \leq \theta$, suponhamos que para cada $\gamma' < \gamma$, temos definidos $p_{(\gamma',\theta)}$, então escolhemos

$$p_{(\gamma,\theta)} \in C_\gamma \backslash (\ \{p_{(\alpha,\beta)} \ : \ \alpha \leq \beta < \theta\} \cup \{p_{(\gamma',\theta)} \ : \ \gamma' < \gamma\} \ ).$$

Assim temos definidos $p_{(\alpha,\beta)}$ para cada $\alpha \leq \beta < \kappa$.

Dado $\alpha < \kappa$, seja $B_\alpha = \{p_{(\alpha,\beta)} \ : \ \alpha \leq \beta < \kappa\}$, assim temos (i).

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 < \kappa$, vamos demonstrar que se $\alpha_1 \neq \alpha_2$ então $B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2} = \phi$. Senão existe $p \in B_{\alpha_1} \cap B_{\alpha_2}$ logo existem $\beta_1, \beta_2 < \kappa$ tais que $p_{(\alpha_1,\beta_1)} = p = p_{(\alpha_2,\beta_2)}$. s.p.g. podemos supor que $\alpha_1 < \alpha_2$.

Se $\beta_1 = \beta_2$ temos que $p_{(\alpha_2,\beta_2)} \in C_{\alpha_2} \backslash \{p_{(\alpha,\beta_2)} \ : \ \alpha < \alpha_2\}$ logo $p \in C_{\alpha_2} \setminus \{p\}$, o que é contraditório.

Se $\beta_1 \neq \beta_2$, podemos s.p.g. suponhamos que $\beta_1 < \beta_2$, assim

$p_{(\alpha_2,\beta_2)} \in C_{\alpha_2} \setminus \{p_{(\alpha,\beta)} \ : \ \alpha \leq \beta < \beta_2\}$ logo $p \in C_{\alpha_2} \setminus \{p\}$, o que é contraditório. ∎

Definição A.1 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço Hausdorff e seja $p \in X$ então:

(i) $\mathcal{U}$ é dita uma pseudo base de p se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{J}$ e $\cap\mathcal{U} = \{p\}$.

(ii) O pseudo carater de p é

$$\psi(p, X) = min\{|\mathcal{U}| \ : \ \mathcal{U} \text{ é pseudo base de } p\}.$$

(iii) O pseudo carater de $(X, \mathcal{J})$ é $\psi(X) = sup\{\psi(p, X) \ : \ p \in X\}$.

Definição A.2 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço e seja $p \in X$ então:

(i) $\mathcal{B}$ é uma base de p se $(\forall V \in \mathcal{B})$ ($p \in V \in \mathcal{J}$) e $(\forall U \in \mathcal{J})$ ($p \in U \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{B})(V \subseteq U)$).

(ii) O carater de p é $\chi(p, X) = min\{|\mathcal{B}| \ : \ \mathcal{B} \text{ é base de } p \ \}$.

(iii) O carater de $(X, \mathcal{J})$ é $\chi(X) = sup\{\chi(p, X) \ : \ p \in X\}$.

Lema A.3 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço Hausdorff compacto então $\psi(X) = \chi(X)$.

Demonstração

Como $(X, \mathcal{J})$ é Hausdorff temos que cada base de p em X é uma pseudo base de p, assim $\psi(X) \leq \chi(X)$.

Dado $p \in X$, vamos demonstrar que $\chi(p, X) \leq \psi(p, X)$.

Seja $\mathcal{U}$ pseudo base de p tal que $|\mathcal{U}| = \psi(p, X)$. Como $(X, \mathcal{J})$ é Hausdorff compacto, temos que X é regular. assim

$$(\forall U \in \mathcal{U}) \ (\exists \ V_U \in \mathcal{J}) \ (\ p \in V_U \subseteq cl_X(V_U) \subseteq U \ ).$$

Seja $\mathcal{B} = \{\bigcap_{i=1}^{n} V_{U_i} \ : \ U_i \in \mathcal{U} \ \text{ e } \ n < \omega\}$, assim $|\mathcal{B}| = |\mathcal{U}|$. Vamos demostrar que $\mathcal{B}$ é base de p. Seja W aberto tal que $p \in W$, como $\{p\} = \cap\{cl_X(V_U) \ : \ U \in \mathcal{U}\}$ temos que $X\backslash W \subseteq X\backslash\{p\} = \cup\{X\backslash cl_X(V_U) \ : \ U \in \mathcal{U}\}$. Pela compacidade de $X\backslash W$, temos que existem $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ tais que $X\backslash W \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} X\backslash cl_X(V_{U_i})$ assim $p \in \bigcap_{i=1}^{n} V_{U_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} cl_X(V_{U_i}) \subseteq W$. Portanto $\mathcal{B}$ é base de p tal que $|\mathcal{B}| = |\mathcal{U}|$, assim $\chi(p, X) \leq \psi(p, X)$.

Logo $\chi(X) \leq \psi(X)$ e portanto $\chi(X) = \psi(X)$.

■

Teorema 2.10 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço Hasdorff compacto então $w(X) \leq |X|$.

Demonstração

Seja $p \in X$, como $(X, \mathcal{J})$ é Haudorff temos que $\{X\backslash\{q\} \ : \ q \neq p\}$ é pseudo base de p, logo $\psi(p, X) \leq |X|$ e portanto $\psi(X) \leq |X|$.

Agora pelo Lema A.3 temos que $\chi(X) \leq \psi(X) \leq |X|$. Como $w(X) \leq \chi(X) \cdot |X|$ temos que $w(X) \leq |X|$.

■

Proposição 2.19 Seja $((G, \cdot), \mathcal{T})$ um grupo topológico κ-limitado e seja H um subgrupo de G, então $(H, \mathcal{T})$ é κ-limitado

Demonstração

Seja $U \in \mathcal{T}$ tal que $1 \in U$, vamos demonstrar que existe $T \in [H]^{<\kappa}$ tal que $(U \cap H) \cdot T = H$. Como U é aberto e $1 \in U$, então existe V aberto tal que $1 \in V$, $V = V^{-1}$ e $V \cdot V \subseteq U$. Como G é κ-limitado temos que existe $T \in [G]^{<\kappa}$ tal que $V \cdot T = G$.

Seja $T' = \{t \in T \ : \ (\exists h_t \in H)\ (\exists v_t \in V)\ (\ v_t \cdot t = h_t\ )\}$. Assim temos que

$$\begin{aligned} H \subseteq V \cdot T' &= \cup\{\ Vt &&: t \in T'\} \\ &= \cup\{\ V(v_t^{-1}h_t) &&: t \in T'\} \\ &\subseteq \cup\{\ V \cdot V^{-1}h_t &&: t \in T'\} \\ &\subseteq \cup\{\ Uh_t &&: t \in T'\} \end{aligned}$$

logo $H \subseteq U \cdot \{h_t \ : \ t \in T'\}$ onde $\{h_t : t \in T'\} \in [H]^{<\kappa}$

Seja $U' \subseteq U$ tal que $H = U' \cdot \{h_t : t \in T\}$. Como H é subgrupo de G temos que $U' \subseteq U \cap H$, assim $H = (U \cap H) \cdot \{h_t \ : \ t \in T'\}$ com $\{h_t \ : \ t \in T'\} \in [H]^{<\kappa}$.

Por demonstrar que $(H, \mathcal{T})$ é κ-limitado.

Seja $U \in \mathcal{T}$ tal que $U \cap H \neq \phi$. Seja $u \in U \cap H$. Como $u^{-1}U \in \mathcal{T}$ e $1 \in u^{-1}U$ então existe $T \in [H]^{<\kappa}$ tal que $((u^{-1}U) \cap H) \cdot T = H$. Como $u \in H$ temos que $u^{-1}(U \cap H) \cdot T = H$, assim $(U \cap H) \cdot T = H$ e portanto $(H, \mathcal{T})$ é κ-limitado.

■

Proposição A.4 Seja κ um cardinal regular e seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço zero dimensional tal que para cada $x \in X$ temos que $\psi(x, X) \geq \kappa$ (ver Definição A.1). Seja $\mathcal{J}_\kappa$ a topologia gerada pela base $\{\cap\mathcal{A} \ : \ \mathcal{A} \in [\mathcal{J}]^{<\kappa}\}$ então $(X, \mathcal{J}_\kappa)$ é um P_κ-espaço, zero dimensional sem pontos isolados.

Demonstração

Seja $\mathcal{A} \in [\mathcal{J}_\kappa]^{<\kappa}$, vamos demonstrar que $\cap\mathcal{A} \in \mathcal{J}_\kappa$.

s.p.g. Suponhamos que $\cap\mathcal{A} \neq \phi$, e seja $x \in \cap\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \in [\mathcal{J}_\kappa]^{<\kappa}$ temos que $\mathcal{A} = \{A_\alpha \in \mathcal{J}_\kappa \ : \ \alpha < \lambda\}$ com $\lambda < \kappa$, assim para cada $\alpha < \lambda$ temos que $x \in A_\alpha \in \mathcal{J}_\kappa$. Logo para cada $\alpha < \lambda$ existe $\mathcal{A}_\alpha = \{U_\beta \in \mathcal{J} \ : \ \beta \in I_\alpha\}$ com $|I_\alpha| < \kappa$ tal que $x \in \cap\mathcal{A}_\alpha \subseteq A_\alpha$. Portanto temos que

$$x \in \bigcap_{\alpha<\lambda}(\cap\mathcal{A}_\alpha) = \cap\{U_\beta \in \mathcal{J} \ : \ \beta \in \bigcup_{\alpha<\lambda} I_\alpha\} \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha = \cap\mathcal{A}$$

e como κ é regular temos que $|\bigcup_{\alpha<\lambda} I_\alpha| < \kappa$. Assim temos que $\cap\mathcal{A} \in \mathcal{J}_\kappa$.

Seja $\mathcal{B}$ uma base de abertos fechados de $(X, \mathcal{J})$ então $\mathcal{B}' = \{\cap\mathcal{A} : \mathcal{A} \in [\mathcal{B}]^{<\kappa}\}$ é uma base de $(X, \mathcal{J}_\kappa)$. Como cada $\cap\mathcal{A} \in \mathcal{B}'$ é $\mathcal{J}$-fechado e $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_\kappa$ temos que $\mathcal{B}'$ é uma base de abertos-fechados de $(X, \mathcal{J}_\kappa)$. Como $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_\kappa$ temos que $(X, \mathcal{J}_\kappa)$ é T_1, assim $(X, \mathcal{J}_\kappa)$ é zero dimensional.

Vamos demostrar que $(X, \mathcal{J}_\kappa)$ não possui pontos isolados.

Senão existe $x \in X$ tal que $\{x\} \in \mathcal{J}_\kappa$, assim $(\exists \mathcal{A} \in [\mathcal{J}]^{<\kappa})(\{x\} = \cap\mathcal{A})$ e portanto $\psi(x, X) < \kappa$, o que é contraditório.

■

Definição 2.22 A densidade de um espaço $(X, \mathcal{J})$ é

$$d(X) = min\{|D| \ : \ D \text{ é denso em } (X, \mathcal{J})\}.$$

Teorema 2.23 Hewitt-Marczewski-Pondiczery

Seja κ um cardinal infinito e para cada $\alpha < 2^\kappa$ seja X_α um espaço tal que $d(X_\alpha) \leq \kappa$, então $d(\prod_{\alpha<2^\kappa} X_\alpha) \leq \kappa$.

Demonstração

Para cada $\alpha < 2^\kappa$ seja D_α subconjunto denso de X_α tal que $|D_\alpha| \leq \kappa$, e suponhamos que $d(\prod_{\alpha<2^\kappa} D_\alpha) \leq \kappa$. Como $\prod_{\alpha<2^\kappa} D_\alpha$ é denso em $\prod_{\alpha<2^\kappa} X_\alpha$ temos que $d(\prod_{\alpha<2^\kappa} X_\alpha) \leq \kappa$

Vamos demonstrar que $d(\prod_{\alpha<2^\kappa} D_\alpha) \leq \kappa$.

Seja $D(\kappa)$ o espaço discreto de κ-elementos e para cada $\alpha < 2^\kappa$ seja $f_\alpha : D(\kappa) \to D_\alpha$ sobrejetora. Assim cada f_α é contínua e $f = \prod_{\alpha<2^\kappa} f_\alpha : D(\kappa)^{2^\kappa} \to \prod_{\alpha<2^\kappa} D_\alpha$ é contínua e sobrejetora, logo se $d(D(\kappa)^{2^\kappa}) \leq \kappa$ temos que $d(\prod_{\alpha<2^\kappa} D_\alpha) \leq \kappa$.

Assim basta demonstrar que $d(D(\kappa)^{2^\kappa}) \leq \kappa$.

Seja $T = D(2)^\kappa$ onde $D(2)$ é o espaço discreto de 2-elementos, então $|T| = 2^\kappa$ e $w(T) = \kappa$.

Seja $\mathcal{B}$ base de abertos básicos de T, logo $|\mathcal{B}| = \kappa$. Seja

$\mathcal{U} = \{A \in [\mathcal{B}]^{<\omega} : (\forall U', V' \in A) (U' \neq V' \Rightarrow U' \cap V' = \phi)\}$,

logo $|\mathcal{U}| = \kappa$. Seja $X = \{f : T \to D(\kappa)\}$ e seja

$\mathcal{D} = \{f \in X : (\exists A \in \mathcal{U}) (f/(T\setminus \cup A)$ é *cte.* e $(\forall U' \in A)(f/U'$ é *cte.* $))\}$,

logo $|\mathcal{D}| = \kappa$.

Vamos demostrar que $\mathcal{D}$ é denso em X.

Seja U aberto não vazio de X então existem $y_0, y_1, \cdots, y_{n_o} \in D(\kappa)$ e existem $t_0, t_1, \cdots, t_{n_o} \in T$ distintos tais que $\{f \in X : (\forall i \leq n_o) (f(t_i) = y_i)\} \subseteq U$.

Agora seja $A = \{U_i' : i \leq n_o\} \in \mathcal{U}$ tal que $(\forall i \leq n_o) (t_i \in U_i')$ e definamos $g : T \to \{0, 1\}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} y_i & \text{se } t \in U_i' \\ 0 & \text{se } t \notin U_i' \end{cases}$$

Assim temos que $g \in U \cap \mathcal{D}$, portanto $\mathcal{D}$ é denso em X e como $|\mathcal{D}| \leq \kappa$ temos que $d(X) \leq \kappa$.

∎

Lema 2.31 Para cada κ cardinal regular infinito temos que existe um grupo topológico zero dimensional de cardinalidade κ que é P_κ-espaço sem pontos isolados.

Demonstração

Seja $(\{0, 1\}^\kappa, \mathcal{J})$ com a topologia produto e a soma usual, onde $\{0, 1\}$ é considerado com a topologia discreta. Pelo Teorema 2.23 existe D subconjunto denso de $(\{0, 1\}^\kappa, \mathcal{J})$ tal que $|D| = \kappa$. Agora definamos G_0 como o subgrupo de

$\{0,1\}^\kappa$ gerado por D então $|G_0| = |\kappa^{<w}| = \kappa$, assim G_0 é subgrupo próprio denso em $(\{0,1\}^\kappa, \mathcal{J})$.

Para cada $n < \omega$ seja G_{n+1} o subgrupo gerado por $G_n \cup S_n$ onde S_n é obtido escolhendo κ-pontos de cada elemento de $\{\{f/\alpha\} \times \{0,1\}^{\kappa \setminus \alpha} : f \in G_n \text{ e } \alpha < \kappa\}$.
Assim $|G_{n+1}| = |\kappa^{<\omega}| = \kappa$, pois $|G_n \cup S_n| = \kappa + \kappa \cdot \kappa = \kappa$.
Agora seja $G = \bigcup_{n<w} G_n$, como $\{G_n : n < w\}$ são crescentes temos que G é um grupo de cardinalidade κ.

Vamos demonstrar que para cada $g \in G$ temos que $\psi(g, G) = \kappa$.
Seja $g \in G$ e sejam $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\} \in [\mathcal{J}]^{<\kappa}$ tal que $g \in \bigcap_{\alpha<\lambda} U_\alpha$
s.p.g. suponhamos que para cada $\alpha < \lambda$, U_α é aberto básico, assim para cada $\alpha < \lambda$, como κ é regular infinito e U_α é aberto básico temos que existe $\beta_\alpha < \kappa$ tal que $(\forall \gamma > \beta_\alpha)\ (Pr_\gamma(U) = \{0,1\})$ onde Pr_γ é a projeção na γ-esima coordenada.
Seja $\beta = \sup\{\beta_\alpha : \alpha < \lambda\}$, como κ é regular, $\lambda < \kappa$ e $\beta_\alpha < \kappa$ temos que $\beta < \kappa$. Como $g \in G$ temos que existe $n < \omega$ tal que $g \in G_n$), logo existem κ-elementos de S_{n+1} em $\{g/\beta\} \times \{0,1\}^{\kappa \setminus \beta} \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} U_\alpha$, portanto
$\kappa \leq |S_{n+1} \cap \bigcap_{\alpha<\lambda} U_\alpha| \leq |G \cap \bigcap_{\alpha<\lambda} U_\alpha|$ assim $\psi(g, G) \geq \kappa$.

Agora seja $\mathcal{J}_\kappa$ a topologia gerada por $\{\cap \mathcal{A} : \mathcal{A} \in [\mathcal{J}]^{<\kappa}\}$. Como $(\{0,1\}^\kappa, \mathcal{J})$ é zero dimensional temos que $(G, \mathcal{J})$ é zero dimensional assim pela proposição A.4 temos que $(G, \mathcal{J}_\kappa)$ é um P_κ-espaço zero dimensional sem pontos isolados

Vamos demonstrar que $(G, \mathcal{J}_\kappa)$ é grupo topológico.
Como $g = -g$ temos que $i : G \to G$ dada por $i(g) = -g$ é $\mathcal{J}_\kappa$-contínua.
Seja $m : G \times G \to G$ dada por $m(g, h) = g + h$. Seja $\mathcal{A} \in [\mathcal{J}]^{<\kappa}$ e seja $g \cdot h \in \cap \mathcal{A}$, como $m^{-1}(\cap \mathcal{A}) = \bigcap_{U \in \mathcal{A}} m^{-1}(U)$ e m é $\mathcal{J}$-contínua temos que para cada $U \in \mathcal{A}$, existem V_U, $W_U \in \mathcal{J}$ tais que $(g, h) \in V_U \times W_U \subseteq m^{-1}(U)$. Assim $(g, h) \in \bigcap_{U \in \mathcal{A}} (V_U \times W_U) = (\bigcap_{U \in \mathcal{A}} V_U) \times (\bigcap_{U \in \mathcal{A}} W_U) \subseteq m^{-1}(\cap \mathcal{A})$ portanto
$m : G \times G \to G$ é $\mathcal{J}_\kappa$-contínua.

■

Proposição 2.34 Seja κ um cardinal infinito, então existe um conjunto S e existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ tais que

(i) $|S| = \kappa$ e $|\mathcal{F}| = 2^\kappa$.

(ii) $\mathcal{F}$ é uma $(\omega, \kappa) - i.f.$ em S 2^κ-separada.

Demonstração

Sejam $\{0,1\}$ o espaço discreto de 2 elementos, $T = \Pi_{\alpha<\kappa}\{0,1\}$, $X = \{f : T \to \{0,1\}\ \}$ e sejam $(T, \mathcal{O})$ e $(X, \mathcal{J})$ os respectivos espaços com a topologia produto.

Seja $\mathcal{B}$ base de abertos básicos de $(T, \mathcal{O})$, logo $|\mathcal{B}| = \kappa$. Seja

$\mathcal{U} = \{A \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\ :\ (\forall U', V' \in A)\ (\ U' \neq V'\ \Rightarrow\ U' \cap V' = \phi\ )\}$,

logo $|\mathcal{U}| = \kappa$. Seja

$S = \{f \in X\ :\ (\exists A \in \mathcal{U})\ (\ f/(T \setminus \cup A)$ é $cte.$ e $(\forall U' \in A)(\ f/U'$ é $cte.\ )\ )\}$,

logo $|S| = \kappa$.

Vamos demonstrar que $(\forall U \in \mathcal{J} \setminus \{\phi\})\ (\ |S \cap U| = \kappa\ )$.

Seja U aberto não vazio de $(X, \mathcal{J})$ então existem $y_0, y_1, \cdots, y_{n_o} \in D(2)$ e existem $t_0, t_1, \cdots, t_{n_o} \in T$ distintos tais que $\{f \in X\ :\ (\forall i \leq n_o)\ (\ f(t_i) = y_i\ )\} \subseteq U$.

Como $(T, \mathcal{O})$ é Hausdorff, $\mathcal{B}$ é base de $(T, \mathcal{O})$ e $\Delta(T, \mathcal{O}) = \kappa$ temos que $|\{A = \{U'_i\ :\ i \leq n_o\} \in \mathcal{U}\ :\ (\forall j \leq n_o)\ (\ t_j \in U'_j\ )\}| = \kappa$. Agora para cada $A \in \mathcal{U}$ tal que $(\forall i \leq n_o)\ (\ t_i \in U'_i\ )$ definimos $g_A : T \to \{0,1\}$ dada por

$$g_A(t) = \begin{cases} y_i & \text{se } t \in U'_i \\ 0 & \text{se } t \notin U'_i \end{cases}$$

Assim temos que $g_A \in U \cap S$ e portanto $|U \cap S| = \kappa$.

Para cada $t \in T$ seja $D_t = \{g \in S\ :\ g(t) = 0\}$ e seja $\mathcal{F} = \{D_t\ :\ t \in T\}$.

Vamos demonstrar que $|\mathcal{F}| = 2^\kappa$.

Sejam $b, c \in T$ tais que $b \neq c$ e seja $U = \{f \in X : f(b) = 0 \text{ e } f(c) = 1\}$. Assim U é aberto não vazio de $(X, \mathcal{J})$ e portanto existe $g \in U \cap S$. Logo $g(b) = 0$ e $g(c) = 1$, e como $g \in S$ temos que $g \in D_b \setminus D_c$, assim $D_b \neq D_c$ e portanto $|\mathcal{F}| = 2^\kappa$.

Vamos demonstrar que $\mathcal{F}$ é $(\omega, \kappa) - i.f.$ em S.
Sejam $\mathcal{A} = \{D_t : t \in I\}$ e $\mathcal{B} = \{D_t : t \in J\}$ tais que $I, J \in [T]^{<\omega}$ são disjuntos. Seja $U = \{f \in X : f/I \equiv 0 \text{ e } f/J \equiv 1\}$.
Assim temos que U é aberto não vazio portanto $|U \cap S| = \kappa$ e como $U \cap S \subseteq \cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B}$ temos que $|\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B}| \geq \kappa$, assim $\mathcal{F}$ é $(\omega, \kappa) - i.f.$ em S.

Vamos demonstrar que $\mathcal{F}$ é 2^κ-separada.
Sejam $\{f, g\} \in [S]^2$, como $f \neq g$ temos que existe $t \in T$ tal que $f(t) \neq g(t)$ s.p.g. suponhamos que $f(t) = 1$ e $g(t) = 0$. Como $f, g \in S$ e $\mathcal{B}$ é base de abertos fechados temos que existem $U', V' \in \mathcal{B}$ tais que $t \in U' \cap V'$ e $f/U' \equiv 1$ e $g/V' \equiv 0$. Seja $W = U' \cap V'$, portanto W' é aberto não vazio em $(T, \mathcal{O})$, assim $|W'| = 2^\kappa$. Como $f/W' \equiv 1$ e $g/W' \equiv 0$ e $g \in S$ temos que $(\forall t \in W')(g \in D_t \text{ e } f \notin D_t)$, assim para cada $t \in W'$ temos que $D_t \cap \{g, f\} = \{g\}$, logo $|\{D_t \in \mathcal{F} : |D_t \cap \{g, f\}| = 1\}| \geq 2^\kappa$ e portanto $\mathcal{F}$ é 2^κ-separada.

■

Proposição 2.35 Seja $\mathcal{F}$ uma $(\omega, \kappa) - i.f.$ em S então existe $\mathcal{F}'$ $(\omega, \kappa) - m.i.f.$ em S tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

Demonstração

Seja $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha < \mu\}$ cadeia crescente de $(\omega, \kappa) - i.f.$ em S tal que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, seja $\mathcal{F}_\mu = \bigcup_{\alpha<\mu} \mathcal{F}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(S)$.
Vamos demonstrar que $\mathcal{F}_\mu$ é $(\omega, \kappa) - i.f.$ em S.

Seja $\mathcal{A},\mathcal{B}\in[\mathcal{F}_\mu]^{<\omega}$, como $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ é finito e $\{\mathcal{F}_\alpha\ :\ \alpha<\mu\}$ é crescente temos que existe $\alpha<\mu$ tal que $\mathcal{A},\mathcal{B}\in[\mathcal{F}_\alpha]^{<\omega}$ e como $\mathcal{F}_\alpha$ é $(\omega,\kappa)-i.f.$ em S temos que $|\cap\mathcal{A}\setminus\cup\mathcal{B}|\geq\kappa$ e portanto $\mathcal{F}_\mu$ é $(\omega,\kappa)-i.f.$ em S.
Assim pelo lema de Zorn, existe $\mathcal{F}'(\omega,\kappa)-m.i.f.$ em S tal que $\mathcal{F}\in\mathcal{F}'$.

■

Proposição 2.36 Seja $\mathcal{F}$ uma $(\omega,\omega)-i.f.$ em S ω-separada e seja $\mathcal{C}=\{\cap\mathcal{A}\setminus\cup\mathcal{B}\ :\ \mathcal{A},\mathcal{B}\in[\mathcal{F}]^{<\omega}$ e $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\phi\}$. Então $\mathcal{C}$ gera uma topologia $\mathcal{J}_\mathcal{F}$ sobre S tal que $(S,\mathcal{J}_\mathcal{F})$ é zero dimensional.

Demonstração

Como $\mathcal{F}$ é ω-separada temos que $\cup\mathcal{F}=S$ ou que existe $x\in S$ tal que $S\setminus\cup\mathcal{F}=\{x\}$. Assim no segundo caso podemos considerar $S'=S\setminus\{x\}$ portanto $\mathcal{F}$ é $(\omega,\omega)-i.f.$ em S' ω-separada com $\cup\mathcal{F}=S'$, assim s.p.g. suponhamos que $\cup\mathcal{F}=S$.
Como $\cup\mathcal{F}=S$ temos que para cada $x\in S$ existe $U\in\mathcal{C}$ tal que $x\in U$ e como $(\cap\mathcal{A}_1\setminus\cup\mathcal{B}_1)\cap(\cap\mathcal{A}_2\setminus\cup\mathcal{B}_2)=\cap(\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2)\setminus\cup(\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2)$ temos que $\mathcal{C}$ genera uma topologia denotada por $\mathcal{J}_\mathcal{F}$.
Como $\mathcal{F}$ é ω-separada temos que para cada $x\neq y$ em S existe $A\in\mathcal{F}$ tal que $x\in A$ e $y\notin A$ ou $x\notin A$ e $y\in A$ e como $A\in\mathcal{C}$ temos que $(S,\mathcal{J}_\mathcal{F})$ é T_1.

Vamos demonstrar que $(X,\mathcal{J}_\mathcal{F})$ é zero dimensional.
Seja $\cap\mathcal{A}\setminus\cup\mathcal{B}\in\mathcal{C}$, basta demonstrar que $S\setminus(\cap\mathcal{A}\setminus\cup\mathcal{B})$ é aberto. Como $\cap\phi=\cup\mathcal{F}=S$ podemos supor que $\mathcal{A}\neq\phi$. Como $\cap\mathcal{A}\setminus\cup\mathcal{B}\in\mathcal{C}$ temos que $\mathcal{A}=\{A_i\ :\ i\in I\}$ e $\mathcal{B}=\{B_j\ :\ j\in J\}$ onde I e J são finitos. Assim

$$\begin{aligned}S\setminus(\cap\mathcal{A}\setminus\cup\mathcal{B}) &= \cup\mathcal{B}\cup(S\setminus\cap\mathcal{A})=[(S\setminus\cup\mathcal{B})\cap(S\setminus\cap\mathcal{A})]\cup\cup\mathcal{B}\\ &=[(S\setminus\cup\mathcal{B})\cap(S\setminus\cap\mathcal{A})]\cup[\cup\mathcal{B}\cap(S\setminus\cap\mathcal{A})]\cup[\cup\mathcal{B}\cap(\cap\mathcal{A})]\\ &=[(S\setminus(\cup\mathcal{B}\cup\cap\mathcal{A})]\cup[\cup\mathcal{B}\setminus\cap\mathcal{A}]\cup[\cup\mathcal{B}\cap\cap\mathcal{A}]\end{aligned}$$

Seja $x \in S \setminus (\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B})$ e sejam $\mathcal{A}_x = \{A_i \notin \mathcal{A} : x \in A_i\}$ e $\mathcal{B}_x = \{B_j \in \mathcal{B} : x \in B_j\}$. Então:

(i) Se $x \in S \setminus (\cup\mathcal{B} \cup \cap\mathcal{A})$.

Logo $\mathcal{A}_x \neq \phi$, assim temos que $x \in [\ S \setminus (\cup\mathcal{B} \cup \cup\mathcal{A}_x)\ ] \subseteq [\ S \setminus (\cup\mathcal{B} \cup \cap\mathcal{A})\ ]$ e como $\cap\phi = \cup\mathcal{F} = S$ temos que $S \setminus (\cup\mathcal{B} \cup \cup\mathcal{A}_x)$ é aberto.

(ii) Se $x \in [\ \cup\mathcal{B} \setminus \cap\mathcal{A}\ ]$.

Logo $\mathcal{B}_x \neq \phi \neq \mathcal{A}_x$, assim temos que $x \in [\ \cap\mathcal{B}_x \setminus \cup\mathcal{A}_x\ ] \subseteq [\ \cup\mathcal{B} \setminus \cap\mathcal{A}\ ]$ com $\cap\mathcal{B}_x \setminus \cup\mathcal{A}_x$ aberto.

(iii) Se $x \in [\ \cup\mathcal{B} \cap \cap\mathcal{A}]$.

Logo $\mathcal{B}_x \neq \phi$, assim temos que $x \in [\ \cap\mathcal{B}_x \cap \cap\mathcal{A}\ ] \subseteq [\ \cup\mathcal{B} \cap \cap\mathcal{A}\ ]$. Como $\cap\mathcal{B} \cap \cap\mathcal{A}$ é aberto temos que existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U \in S \setminus (\cap\mathcal{A} \setminus \cup\mathcal{B})$.

∎

Proposição 2.62 Seja $(X, \mathcal{J})$ um espaço regular e suponhamos que existe S subconjuntos enumerável de X tal que para cada $x \in S$ existe $A \subseteq S$ subespaço discreto com $x \in acc(A)$. Então para cada $x \in S$ existe um subespaço Y de $(X, \mathcal{J})$ que é S_ω-like, com raiz x.

Demonstração

Seja $x \in S$, e definimos $y_{\langle\phi\rangle} = x$, assim por hipótese existe $A_{\langle\phi\rangle} \subseteq S$ discreto enumerável tal que $y_{\langle\phi\rangle} \in acc(A_{\langle\phi\rangle})$, s.p.g. suponhamos que $y_{\langle\phi\rangle} \notin A_{\langle\phi\rangle}$. Como $(X, \mathcal{J})$ é regular e $A_{\langle\phi\rangle}$ é discreto temos que se $A_{\langle\phi\rangle} = \{d_0, d_1, d_2, \cdots\}$ então existe $\{U_n^{\langle\phi\rangle} : n < \omega\}$ uma família de abertos dois a dois disjuntos tal que para cada $n < \omega$ temos que $d_n \in U_n^{\langle\phi\rangle}$.

Para cada $n < \omega$ seja $y_n = a_n$, assim $y_{\langle\phi\rangle} \in acc\{y_{\langle\phi\rangle^\frown n} : n < \omega\}$.

Agora seja $n < \omega$ e suponhamos que para cada $f \in {}^{<n}\omega$ temos definidos $y_f \in S$, $A_f = \{a_i^f : i < \omega\} \subseteq S$ discreto e $\{U_i^f \in \mathcal{J} : i < \omega\}$ tais que:

(i) $y_f \in acc(A_f)$ e $\{y_{f/j} : j \leq l(f)\} \cap A_f = \phi$.

(ii) $\{U_i^f : i < \omega\}$ é família de abertos disjunta e $a_i^f \in U_i^f$.

(iii) Para cada $m < l(f)$ e para cada $i < \omega$ temos que $U_i^f \subseteq U_{f(m)}^{f/m}$.

Agora dado $h \in {}^n\omega$ seja $f \equiv h/(n-1)$ e $m = h(n-1)$ e definamos $y_h = a_m^f$. Assim temos que $y_h \in S \cap U_m^f$, e por hipótese existe $A_h \subseteq U_m^f \cap S$ subespaço discreto tal que $\{y_{h/j} : j \leq l(h)\} \cap A_h = \phi$ e $y_n \in acc(A_h)$, assim temos (i). Agora como $A_n = \{a_i^h : i < \omega\}$ é discreto e $(X, \mathcal{J})$ é regular temos que existe $\{U_i^h \subseteq U_m^f : i < \omega\}$ família de abertos dois a dois disjuntos tal que $a_i^h \in U_i^h$, assim temos (ii) e (iii).

Seja $Y = \{y_f : f \in {}^{<\omega}\omega\}$. Para mostrar que $(Y, \mathcal{J})$ é um S_ω-like só falta mostrar que se $f \neq g$ então $y_f \neq y_g$.

Sejam $f \neq g \in {}^{<\omega}\omega$. Suponhamos que existe $j < \omega$ tal que $f(j) \neq g(j)$. Definamos $m = min\{i < \omega : f(i) \neq g(i)\}$. Se $n + 1 = l(f)$ então $y_f = a_{f(n)}^{f/n} \in U_{f(n)}^{f/n} \subseteq U_{f(m)}^{f/m}$, e analogamente temos que $y_g \in U_{g(m)}^{g/m}$. Como $f/m \equiv g/m$ e $g(m) \neq f(m)$ por (ii) temos que $U_{g(m)}^{g/m} \cap U_{f(m)}^{f/m} = \phi$ assim $y_g \neq y_f$. Suponhamos que não existe $j < \omega$ tal que $f(j) \neq g(j)$ então $l(f) < l(g)$ ou $l(f) > l(g)$. Sejam $m = l(f)$ e $n = l(g)$, s.p.g. suponhamos que $m < n$ assim $g/m \equiv f$ e por (i) temos que $y_f \notin A_{g/(n-1)}$ mas $y_g = a_{g(n-1)}^{g/(n-1)} \in A_{g/(n-1)}$, portanto $y_f \neq y_g$.

■

Lema 2.66 Seja $(X, \mathcal{J})$ espaço regular enumeravelmente compacto e seja $A \subseteq X$ então $A \cup \tilde{A}$ é enumeravelmente compacto.

Demonstração

Seja $\{a_n : n < \omega\} \subseteq A \cup \tilde{A}$.

Afirmação: existe $\{x_n : n < \omega\}$ subsequência discreta de $\{a_n : n < \omega\}$.

Como X é enumeravelmente compacto temos que existe $x \in acc_X(\{x_n : n < \omega\})$, e como $\{x_n : n < \omega\} \subseteq A \cup \tilde{A}$ temos que

$$x \in acc_X(\{x_n : n < \omega\} \cap A) \quad \text{ou} \quad x \in acc_X(\{x_n : n < \omega\} \cap \tilde{A}).$$

No primeiro caso, como $\{x_n : n < \omega\} \cap A$ é subespaço discreto enumerável temos que $x \in acc_X(\{x_n : n < \omega\} \cap A) \subseteq \tilde{A}$ assim $x \in A \cup \tilde{A}$.
No segundo caso, como $\{x_n : n < \omega\} \cap \tilde{A}$ é infinito, temos que $\{x_n : n < \omega\} \cap \tilde{A} = \{x_{n_i} : i < \omega\}$. Como cada $x_{n_i} \in \tilde{A}$ temos que existe $D_{n_i} \subseteq A$ tal que D_{n_i} é subespaço discreto enumerável e $x_{n_i} \in acc_X(D_{n_i})$. Sejam $V_{n_i} \in \mathcal{J}$ tal que $x_{n_i} \in V_{n_i}$ e $\{V_{n_i} : i < \omega\}$ é família disjunta, assim temos que $x_{n_i} \in acc_X(V_{n_i} \cap D_{n_i})$. Como $x \in acc_X(\{x_{n_i} : i < \omega\})$ temos que $x \in acc_X(\bigcup_{i<\omega}(D_{n_i} \cap V_{n_i}))$, onde $\bigcup_{i<\omega}(D_{n_i} \cap U_{n_i})$ é subespaço discreto enumerável de A, assim temos que $x \in \tilde{A}$. Portanto $A \cup \tilde{A}$ é enumeravelmente compacto.

Demonstração da afirmação.
Como X é enumeravelmente compacto temos que existe $a \in acc_X(\{a_n : n < \omega\})$ e como X é Hausdorff temos que existem U_0, $V_0 \in \mathcal{J}$ tais que $a_0 \in V_0$, $a \in U_0$ e $U_0 \cap V_0 = \phi$. Como $a \in acc_X(\{a_n : n < \omega\})$ e $a \in U_0 \in \mathcal{J}$ temos que existe uma subsequência $\{a_{n_i} : i < \omega\}$ contida en U_0 tal que $a \in acc_X(\{a_{n_i} : i < \omega\})$.
Seja $x_0 = a_0$ como $cl_X(\{a_{n_i} : i < \omega\}) \subseteq X \backslash V_0$ temos que $x_0 \notin cl_X(\{a_{n_i} : i < \omega\})$.
Agora dado $m < \omega$ suponhamos que para cada $j < m$ estejam definidos x_j e que existam $\{V_j : j < m\} \cup \{U_{m-1}\}$ família de abertos dois a dois disjuntos tal que cada $x_j \in V_j$ e que exista $\{a_{n_i} : i < \omega\}$ subsequencia de $\{a_n : n < \omega\}$ tal que $\{a_{n_i} : i < \omega\} \subseteq U_{m-1}$.
Como X é enumeravelmente compacto temos que existe $a \in acc_X(\{a_{n_i} : i < \omega\})$, e como X é Hausdorff temos que existem U_m, $V_m \in \mathcal{J}$ tais que $a \in U_m \subseteq U_{m-1}$, $a_{n_0} \in V_m \subseteq U_{m-1}$ e $U_m \cap V_m = \phi$. Seja $x_m = a_{n_0}$, assim $x_m \in V_m$ e $\{V_j : j < m+1\} \cup \{U_m\}$ é família de aberto dois a dois disjuntos.

Como $a \in acc_X(\{a_{n_i} : i < \omega\})$ e $a \in U_m$ temos que existe subsequência de $\{a_n : n < \omega\}$ contida em U_m, assim por indução existe $\{x_n : n < \omega\}$ subsequência de $\{a_n : n < \omega\}$ que é discreta pois cada $x_n \in V_n$ e $\{V_n : n < \omega\}$ é família de abertos disjuntos.

■

Apêndice B

Definição 3.19 Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma coleção disjunta em $\mathbb{N}$ se $\mathcal{D}$ é uma familia infinita de subconjuntos finitos não vazios de $\mathbb{N}$, que são dois a dois disjuntos e denotamos por $FU(\mathcal{D})$ a família de todas as uniões finitas não vazias de elementos de $\mathcal{D}$.

Seja $\mathcal{A}$ a classe de todas as coleções disjuntas de $\mathbb{N}$ e em $\mathcal{A}$ definimos a seguinte relação de ordem: $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{D}_1 \subseteq FU(\mathcal{D})$.
Agora seja $\mathcal{C} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ e $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$ então dizemos que $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$ se e somente se para cada $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$ temos que $\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}_1) \neq \phi$.

Proposição B.1 Sejam $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1 \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{C} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ então:
(i) Se $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$ então $FU(\mathcal{D}_1) \subseteq FU(\mathcal{D})$.
(ii) Se $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$ então $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}_1$.
(iii) $FU(\mathcal{D})$ é maior que $\mathcal{D}$, em particular $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ é maior que $[\mathbb{N}]^1$.
(iv) $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$ se e somente se $\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D})$ é maior que $\mathcal{D}$.

Demonstração
(i) Seja $A \in FU(\mathcal{D}_1)$ então $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ com $A_i \in \mathcal{D}_1$ e como $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$ temos que $\mathcal{D}_1 \subseteq FU(\mathcal{D})$ logo $A_i \in FU(\mathcal{D})$ portanto $A \in FU(\mathcal{D})$ assim $FU(\mathcal{D}_1) \subseteq FU(\mathcal{D})$.

(ii) Seja $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}_1$, como $\leq$ é transitiva e $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$ temos que $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}$ e como $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$ temos que $\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}_2) \neq \phi$ assim $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}_1$.

(iii) Seja $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}$ por (i) temos que $FU(\mathcal{D}_2) \subseteq FU(\mathcal{D})$ assim $FU(\mathcal{D}) \cap FU(\mathcal{D}_2) = FU(\mathcal{D}_2) \neq \phi$. Em particular seja $\mathcal{D} = [\mathbb{N}]^1$ então $FU(\mathcal{D}) = [\mathbb{N}]^{<\omega}$ assim $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ é maior que $[\mathbb{N}]^1$.

(iv) $(\Rightarrow)$ Seja $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}$ por (i) temos que $FU(\mathcal{D}_2) \subseteq FU(\mathcal{D})$ assim temos que $\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}) \cap FU(\mathcal{D}_2) = \mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}_2)$. Como $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}$ temos que $\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}) \cap FU(\mathcal{D}_2) = \mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}_2) \neq \phi$ portanto $\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D})$ é maior que $\mathcal{D}$.

$(\Leftarrow)$ Como $\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D})$ é maior que $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D})$ temos que $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$.

■

Lema B.2 Seja $\mathcal{D}$ uma coleção disjunta em $\mathbb{N}$ e seja $\mathcal{C} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ tal que $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$. Se $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n$ então existe $\mathcal{C}_i$ e existe $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$ tais que $\mathcal{C}_i$ é maior que $\mathcal{D}_1$.

Demonstração

Por indução sobre n, para $n = 1$ é claro. Agora suponhamos que o lema é certo para n. Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n$. Se $\mathcal{C}_0$ não é maior que $\mathcal{D}$ temos que existe $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{C}_0 \cap FU(\mathcal{D}_1) = \phi$. Seja $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n$.

Se $\mathcal{C}'$ é maior que $\mathcal{D}_1$, pela hipotese de indução existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e existe $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}_1$ tais que $\mathcal{C}_i$ é maior que $\mathcal{D}_2$.

Se $\mathcal{C}'$ não é maior que $\mathcal{D}_1$, temos que existe $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}_1$ tal que $\mathcal{C}' \cap FU(\mathcal{D}_2) = \phi$. Como $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}_1$ pela Proposição B.1 temos que $FU(\mathcal{D}_2) \subseteq FU(\mathcal{D}_1)$ assim $\mathcal{C}_0 \cap FU(\mathcal{D}_2) \subseteq \mathcal{C}_0 \cap FU(\mathcal{D}_1) = \phi$ e portanto temos que $\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}_2) = (\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}') \cap FU(\mathcal{D}_2) = \phi$ e como $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}$ temos que $\mathcal{C}$ não é maior que $\mathcal{D}$ o que é contraditório com a hipótese do lema.

■

Para cada $\mathcal{C} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ e cada $S \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ sejam

$$\mathcal{C} - S = \{C \in \mathcal{C} \ : \ C \cap S = \phi\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} + S = \{C \in \mathcal{C} \ : \ C \cap S \neq \phi\}.$$

Lema B.3 Seja $\mathcal{D}$ uma coleção disjunta em $\mathbb{N}$ e seja $\mathcal{C} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ tal que $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$ então para cada $S \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ temos que $\mathcal{C} - S$ é maior que $\mathcal{D}$.

Demonstração

Senão existe $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$ tal que $(\mathcal{C} - S) \cap FU(\mathcal{D}_1) = \phi$, seja $\mathcal{D}_2 = \{D \in \mathcal{D}_1 \ : \ D \cap S = \phi\}$, como S é finito e $\mathcal{D}_1$ é coleção disjunta temos que $\mathcal{D}_2$ é infinito e assim $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}_1$. Como $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D}$ temos que $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}$ e como $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$ temos que $\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}_2) \neq \phi$.

Agora como $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{D}_1$ pela Proposição B.1 temos que $FU(\mathcal{D}_2) \subseteq FU(\mathcal{D}_1)$ assim $(\mathcal{C} - S) \cap FU(\mathcal{D}_2) \subseteq (\mathcal{C} - S) \cap FU(\mathcal{D}_1) = \phi$ e como $\mathcal{C} = (\mathcal{C} - S) \cup (\mathcal{C} + S)$ temos que $(\mathcal{C} + S) \cap FU(\mathcal{D}_2) = \mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}_2) \neq \phi$, logo existe $C \in (\mathcal{C} + S) \cap FU(\mathcal{D}_2)$.

Como $C \in FU(\mathcal{D}_2)$ existem $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{D}_2$ tais que $C = A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Como $C \in (\mathcal{C} + S)$ temos que existe $s \in C \cap S$, logo existe $A_i \in \mathcal{D}_2$ tal que $s \in A_i \cap S$ logo $A_i \cap S \neq \phi$ o que é contraditório com a definição de $\mathcal{D}_2$.

■

Lema B.4 Seja $\mathcal{D}$ uma coleção disjunta em $\mathbb{N}$ e seja $\mathcal{C} \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ tal que $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$, então existem $S \in FU(\mathcal{D})$ e $\mathcal{D}_1 \leq (\mathcal{D} - S)$ tais que $\mathcal{C}_1 = \{C \in \mathcal{C} \ : \ C \cap S = \phi \ , \ C \cup S \in \mathcal{C}\}$ é maior que $\mathcal{D}_1$.

Demonstração

Vamos demonstrar que existe $D_1, D_2, \cdots, D_n \in \mathcal{D}$ distintos tais que para cada $D_{n+1} \in FU(\mathcal{D} \backslash \{D_1, D_2, \cdots, D_n\})$ existe $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ não vazio tal que $D_{n+1} \cup D_I \in \mathcal{C}$ onde $D_I = \bigcup\limits_{i \in I} D_i$.

Senão vai existir $\{D_i \in \mathcal{D} \ : \ 0 < i < \omega\}$ sequência de elementos distintos tal que para cada D_m e cada $I \subseteq \{1, 2, \cdots, m-1\}$ não vazio, temos que $D_m \cup D_I \notin \mathcal{C}$.

Para cada $i > 0$ seja $D'_i = D_{2i-1} \cup D_{2i}$ e definamos $\mathcal{D}' = \{D'_i \in \mathcal{D} : 0 < i < \omega\}$, assim temos que $\mathcal{D}' \leq \mathcal{D}$ e $\mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}') = \phi$ o que é contraditório pois $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$.

Seja $D^* = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$ e para cada $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ não vazio seja

$$\mathcal{C}_I = \{C \in \mathcal{C} \ : \ C \cap D^* \neq \phi \, , \ C \cup D_I \in \mathcal{C}\} \quad \text{e}$$
$$\mathcal{C}_\phi = (\mathcal{C} - D^*) \setminus \cup \{\mathcal{C}_I \ : \ I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\} \text{ não vazio}\}$$

assim temos que $(\mathcal{C} - D^*) = \cup \{\mathcal{C}_I \ : \ I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}\}$.
Agora como $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$ e D^* é finito, pelo Lema B.3 temos que $(\mathcal{C} - D^*)$ é maior que $\mathcal{D}$ e como $\mathcal{D} - D^* \leq \mathcal{D}$ pela Proposição B.1 temos que $(\mathcal{C} - D^*)$ é maior que $(\mathcal{D} - D^*)$ e pelo Lema B.2 temos que existem $\mathcal{C}_I$ e $\mathcal{D}_1 \leq (\mathcal{D} - D^*)$ tais que $\mathcal{C}_I$ é maior que $\mathcal{D}_1$.

Vamos demonstrar que podemos escolher $I \neq \phi$. Senão pela demonstração do Lema B.2 podemos supor que $\mathcal{C}_\phi$ é maior que $(\mathcal{D} - D^*)$, assim temos que $\mathcal{C}_\phi \cap FU(\mathcal{D} - D^*) \neq \phi$. Seja $C \in \mathcal{C}_\phi \cap FU(\mathcal{D} - D^*)$ assim temos que existe $D_{n+1} \in FU(\mathcal{D} - D^*) = FU(\mathcal{D} \setminus \{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$ tal que $C = D_{n+1}$ e pela escolha de $D_1, D_2, \cdots, D_n$ existe $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ não vazio tal que $C \cup D_I = D_{n+1} \cup D_I \in \mathcal{C}$ assim $C \in \mathcal{C}_I$ e portanto $C \notin \mathcal{C}_\phi$ o que é contraditório.

Agora como $D_I \subseteq D^*$ temos que $\mathcal{D} - D^* \leq \mathcal{D} - D_I$ e como $\mathcal{D}_1 \leq (\mathcal{D} - D^*)$ temos que $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D} - D_I$. Seja $S = D_I$ e $\mathcal{C}_1 = \{C \in \mathcal{C} \ : \ C \cap S = \phi \, , \ C \cup S \in \mathcal{C}\}$. Como $S \subseteq D^*$, pelas definições de $\mathcal{C}_I$ e $\mathcal{C}_1$, temos que $\mathcal{C}_1 \supseteq \mathcal{C}_I$ e como $\mathcal{C}_I$ é maior que $\mathcal{D}_1$ temos que $\mathcal{C}_1$ é maior que $\mathcal{D}_1$ assim $S \in FU(\mathcal{D})$ e $\mathcal{D}_1 \leq \mathcal{D} - D_I = \mathcal{D} - S$ e assim temos o lema.

■

Lema B.5 Seja $\mathcal{D}$ uma coleção disjunta em $\mathbb{N}$ e seja $\mathcal{C} \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$ tal que $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$. Então existe $S' \in \mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D})$ e $\mathcal{D}' \leq \mathcal{D} - S'$ tais que $\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C} \ : \ C \cap S' = \phi \ , \ C \cup S' \in \mathcal{C}\}$ é maior que $\mathcal{D}'$.

Demonstração

Sejam $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ pelo Lema B.4 temos que existem $S_1 \in FU(\mathcal{D}_0)$, $\mathcal{D}_1 \leq (\mathcal{D}_0 - S_1) \leq \mathcal{D}_0$ tais que $\mathcal{C}_1 = \{C \in \mathcal{C}_0 \ : \ C \cap S_1 = \phi \ , \ C \cup S_1 \in \mathcal{C}_0\}$ é maior que $\mathcal{D}_1$ e por indução aplicando o Lema B.4 temos que para cada $i < \omega$ existem $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{D}_i$, S_i tais que:

(a) $S_{i+1} \in FU(\mathcal{D}_i)$.

(b) $D_{i+1} \leq (\mathcal{D}_i - S_{i+1}) \leq \mathcal{D}_i$.

(c) $\mathcal{C}_{i+1} = \{C \in \mathcal{C}_i \ : \ C \cap S_{i+1} = \phi \ , \ C \cup S_{i+1} \in \mathcal{C}_i\}$ é maior que $\mathcal{D}_{i+1}$.

Vamos demostrar que $\{S_i \ : \ 1 \leq i < \omega\} \leq \mathcal{D}_0$.

Seja $i < \omega$ então para cada $j \leq i$ temos que $\mathcal{D}_{i+1} \leq \mathcal{D}_{j+1} \leq \mathcal{D}_j - S_{j-1}$ e pela Proposição B.1 temos que $FU(\mathcal{D}_{i+1}) \subseteq FU(\mathcal{D}_j - S_{j+1})$. Como para cada $D \in FU(\mathcal{D}_j - S_{j+1})$ temos que $D \cap S_{j+1} = \phi$, temos que $S_{i+2} \cap S_{j+1} = \phi$ (pois $S_{i+2} \in FU(\mathcal{D}_{i+1}) \subseteq FU(\mathcal{D}_j - S_{j+1})$), assim $\{s_i \ : \ 1 \leq i < \omega\}$ são dois a dois disjuntos. Como cada $\mathcal{D}_i \leq \mathcal{D}_0$ temos que $FU(\mathcal{D}_i) \subseteq FU(\mathcal{D}_0)$ e assim cada $S_i \in FU(\mathcal{D}_0)$ e portanto temos que $\{S_i \ : \ 1 \leq i < \omega\} \leq \mathcal{D}_0$.

Como $\mathcal{C}_0$ é maior que $\mathcal{D}_0$ e $\{S_i \ : \ 1 \leq i < \omega\} \leq \mathcal{D}_0$ temos que $\mathcal{C}_0 \cap FU(\{S_i \ : \ 1 \leq i < \omega\}) \neq \phi$, logo existe $S' = S_{i_1} \cup \cdots \cup S_{i_n} \in \mathcal{C}$ com $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. Como $\{S_i \ : \ 1 \leq i < \omega\} \leq \mathcal{D}_0$ temos que $S' \in FU(\mathcal{D}_0)$, logo $S' \in \mathcal{C}_0 \cap FU(\mathcal{D}_0)$.

Vamos demonstrar que para cada $C \in \mathcal{C}_{i_n}$ temos que $C \cup S' \in \mathcal{C}_0$. Seja $C \in \mathcal{C}_{i_n}$ assim temos que $C \cup S_{i_n} \in \mathcal{C}_{i_n - 1} \subseteq \mathcal{C}_{i_{n-1}}$. Agora como $C \cup S_{i_n} \in \mathcal{C}_{i_{n-1}}$ temos que

$$C \cup S_{i_n} \cup S_{i_{n-1}} \in \mathcal{C}_{i_{(n-1)}-1} \subseteq \mathcal{C}_{i_{n-2}}$$

e por indução obtemos que $C \cup S' \in \mathcal{C}_0$.

Seja $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_{i_n}$ e seja $\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C}_0 \ : \ C \cap S' = \phi \, , \ C \cup S' \in \mathcal{C}_0\}$.
Se $C \in \mathcal{C}_{i_n}$ como $\mathcal{C}_{i_n} \subseteq \mathcal{C}_{i_n-1} - S_{i_n} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}_0 - S'$ temos que $C \cap S' = \phi$ e como $C \cup S' \in \mathcal{C}_0$ temos que $\mathcal{C}_{i_n} \subseteq \mathcal{C}'$. Como $\mathcal{C}_{i_n}$ é maior que $\mathcal{D}_{i_n}$ e $\mathcal{C}_{i_n} \subseteq \mathcal{C}'$ temos que $\mathcal{C}'$ é maior que $\mathcal{D}'$. Como

$$\mathcal{D}' = \mathcal{D}_{i_n} \leq \mathcal{D}_{i_n-1} - S_{i_n} \leq \mathcal{D}_{i_{n-1}} - S_{i_n} \leq \cdots \leq \mathcal{D}_0 - S'$$

temos que $\mathcal{D}' \leq \mathcal{D}_0 - S'$.

■

Teorema B.6 Seja $\mathcal{D}$ uma coleção disjunta em $\mathbb{N}$ e seja $\mathcal{C} \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ tal que $\mathcal{C}$ é maior que $\mathcal{D}$ então existe $\mathcal{D}_1^* \leq \mathcal{D}$ tal que $\mathcal{C} \supseteq FU(\mathcal{D}_1^*)$.

Demonstração

Sejam $\mathcal{C}^0 = \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}$ pelo Lema B.5 temos que existem $S^1 \in \mathcal{C} \cap FU(\mathcal{D}^0)$ e $\mathcal{D}^1 \leq \mathcal{D}$ tais que $\mathcal{C}^1 = \{C \in \mathcal{C}^0 \ : \ C \cap S_1 = \phi \, , \ C \cup S^1 \in \mathcal{C}^0\}$ e maior que $\mathcal{D}^1$ e por indução aplicando o Lema B.5 temos que para cada $i < \omega$ existem
$\mathcal{C}^i$, $\mathcal{D}^i$, S^i tais que
(a) $S^{i+1} \in \mathcal{C}^i \cap FU(\mathcal{D}^i)$.
(b) $\mathcal{D}^{i+1} \leq (\mathcal{D}^i - S^{i+1}) \leq \mathcal{D}^i$.
(c) $\mathcal{C}^{i+1} = \{C \in \mathcal{C}^i \ : \ C \cap S^{i+1} = \phi \, , \ C \cup S^{i+1} \in \mathcal{C}^i\}$ é maior que $\mathcal{D}^{i+1}$.

Seja $\mathcal{D}_1^* = \{S^i \ : \ 1 \leq i < \omega\}$, em forma análoga a Lema B.5 temos que $\mathcal{D}_1^* \leq \mathcal{D}^0$.
Seja $S^{i_1} \cup S^{i_2} \cup \cdots \cup S^{i_n} \in FU(\mathcal{D}_1^*)$ com $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. Como $S^{i_n} \in \mathcal{C}^{i_n-1} \subseteq \mathcal{C}^{i_{n-1}}$ por (c) temos que $S^{i_n} \cup S^{i_{n-1}} \in \mathcal{C}^{i_{n-1}-1}$ e agora por indução temos que $S^{i_n} \cup S^{i_{n-1}} \cup \cdots \cup S^{i_1} \in \mathcal{C}^0$ e assim $FU(\mathcal{D}_1^*) \subseteq \mathcal{C}^0$ e portanto temos o teorema. ■

Teorema 3.20 Hindman

Se $[\mathbb{N}]^{<\omega} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n$ então existe $\mathcal{C}_i$ e existe $\mathcal{D}$ uma coleção disjunta tal que $\mathcal{C}_i \supseteq FU(\mathcal{D})$.

Demonstração

Pela Proposição B.1 temos que $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ é maior que $[\mathbb{N}]^1$ e pelo lema B.2 temos que existe $\mathcal{D} \leq [\mathbb{N}]^1$ e existe $\mathcal{C}_i$ tais que $\mathcal{C}_i$ é maior que $\mathcal{D}$. Agora pelo Teorema B.6 temos que existe $\mathcal{D}^* \leq \mathcal{D}$ tal que $FU(\mathcal{D}^*) \subseteq \mathcal{C}_i$.

∎

Apêndice C

Lema C.1 Seja D subespaço denso de $(X, \mathcal{J})$. Seja $(Y, \mathcal{J}')$ compacto Hausdorff e seja $f : D \to Y$ função contínua. Então são equivalentes.

a) Existe $F : (X, \mathcal{J}) \to (X, \mathcal{J}')$ continua tal que $F/D \equiv f$.

b) Para cada B_1, B_2 fechados disjuntos de Y temos que $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(B_2)$ possuem fechos disjuntos.

Demonstração

$(a \Rightarrow b)$ Seja B_1, B_2 fechados disjuntos em Y como F é contínua, temos $F^{-1}(B_1)$, $F^{-1}(B_2)$ são fechados disjuntos em X, assim $cl_X(f^{-1}(B_1)) \cap cl_X(f^{-1}(B_2)) \subseteq F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2) = \phi$.

$(b \Rightarrow a)$ Para cada $x \in X$, seja $\mathcal{N}(x) = \{U \in \mathcal{J} \ : \ x \in U\}$ e seja $\mathcal{F}(x) = \{cl_Y(f(U \cap D)) \ : \ U \in \mathcal{N}(x)\}$, como D é denso temos que $\mathcal{F}(x)$ satisfaz a propriedade da interseção finita e como Y é compacto temos $\cap\mathcal{F}(x) \neq \phi$. Vamos demonstrar que $|\cap \mathcal{F}(x)| = 1$. Se não existem $y, z \in \cap\mathcal{F}(x)$ distintos, como Y é Hausdorff compacto temos que

$$(\exists V, W \in \mathcal{J}')\ (y \in V \ , \ z \in W \ , \ cl_Y(V) \cap cl_Y(W) = \phi)$$

Então por hipótese temos que $cl_X(f^{-1}(V)) \cap cl_X(f^{-1}(W)) = \phi$ s.p g. suponhamos que $x \in U := X \backslash cl_X(f^{-1}(V))$. Como $V \cap f(D \backslash cl_X(f^{-1}(V))) = \phi$ e $V \in \mathcal{J}'$ temos que $V \cap cl_Y(f(D \backslash cl_X f^{-1}(V))) = \phi$ portanto

$$y \notin cl_Y(f(D \backslash cl_X f^{-1}(V)) = cl_Y(f(D \cap U)) \in \mathcal{F}(x)$$

logo $y \notin \cap\mathcal{F}(x)$ o que é contraditório.

seja $F(x) \in Y$ tal que $\{F(x)\} = \cap\mathcal{F}(x)$, assim se $x \in D \Rightarrow F(x) = f(x)$.

Vamos demonstrar que $F : X \to Y$ é contínua.

Seja $V \in \mathcal{J}'$ e seja $x \in F^{-1}(V)$, como $\{F(x)\} = \cap\mathcal{F}(x) \subseteq V$ temos que $Y \backslash V \subseteq \cup\{Y \backslash A \ : \ A \in \mathcal{F}(x)\}$ pela compacidade de $Y \backslash V$, temos que existem $U_1, U_2, \ , U_n \in \mathcal{N}(x)$ tal que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} cl_Y f(D \cap U_i) \subseteq V$ seja $U := \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$, assim U é aberto e $x \in U$. Seja $z \in U$, então $cl_Y(f(D \cap U)) \in \mathcal{F}(z)$ portanto

$$F(z) \in cl_Y(f(D \cap U)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} cl_Y f(D \cap U_i) \subseteq V$$

logo $F(U) \subseteq V$ e como $x \in U$ temos que F é contínua.

■

Proposição C.2 Seja $\mathcal{U}$ ultrafiltro num conjunto Y então:

(i) seja $B \subseteq Y$ tal que para cada $A \in \mathcal{U}$ temos que $A \cap B \neq \phi$ então $B \in \mathcal{U}$.

(ii) se $A \cup B \in \mathcal{U}$ então $A \in \mathcal{U}$ ou $B \in \mathcal{U}$.

(iii) seja $\mathcal{V}$ ultrafiltro em Y tal que $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}$ então existem $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{V}$ tais que $A \cap B = \phi$.

Demonstração

(i) Dizemos que uma propriedade P de $\mathcal{P}(Y)$ é de caráter finito se para cada $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(Y)$ temos que: $\mathcal{F}$ satisfaz P se e somente se todo subconjuntos finito de $\mathcal{F}$ satisfaz P.

Se P é a propriedade da intersecção finita, como $\mathcal{U}$ é filtro temos que $\mathcal{U} \cup \{B\}$ satisfaz P e como P é de caráter finito pelo Lema Teichmüller-Tukey temos que existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{P}(Y)$ tal que $\mathcal{U} \cup \{B\} \subseteq \mathcal{U}'$ e $\mathcal{U}'$ satisfaz P e é maximal respeito as famílias que satisfazem P e ordenadas por $\subseteq$, assim temos que $\mathcal{U}'$ é filtro e $\mathcal{U} \cup \{B\} \subseteq \mathcal{U}'$ e como $\mathcal{U}$ é ultrafiltro temos que $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ logo $B \in \mathcal{U}$.

(ii) Se não temos que $A \notin \mathcal{U}$ e $B \notin \mathcal{U}$ e por (i) temos que existem A', $B' \in \mathcal{U}$ tais que $A \cap A' = \phi$ e $B \cap B' = \phi$ portanto temos $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \phi$ mas $(A \cup B)$, A', $B' \in \mathcal{U}$ logo $\phi \neq (A \cup B) \cap A' \cap B' \in \mathcal{U}$ o que é contraditório.

(iii) Como $\mathcal{V} \neq \mathcal{U}$ pela maximilidade de $\mathcal{U}$ temos que existe $A \in \mathcal{U} \backslash \mathcal{V}$ e por (i) como $A \notin \mathcal{V}$ temos que existe $B \in \mathcal{V}$ tal que $A \cap B = \phi$.

■

Proposição C.3 Seja G um grupo infinito discreto e seja $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\{\overline{A} \ : \ A \subseteq G\}$ onde $\overline{A} = \{\mathcal{U} \in \beta G \ : \ A \in \mathcal{U}\}$. Então:

(i) $(\beta G, \mathcal{T})$ é compacto Hausdorff

(ii) $(G^o, \mathcal{T})$ é aberto discreto e G^o é denso em $(\beta G, \mathcal{T})$

(iii) Seja $f : (G^o, \mathcal{T}) \to Y$ contínua com Y compacto Hausdorff. Então existe $F : (\beta G, \mathcal{T}) \to Y$ contínua tal que $F/G \equiv f$

(iv) $(\beta G, \mathcal{T})$ é extremamente desconexo.

Demonstração

Dados A, $B \subseteq G$ como $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ e para cada $\mathcal{U} \in \beta G$ existe $C \in \mathcal{U}$, assim $\mathcal{U} \in \overline{C}$, logo $\{\overline{A} \ : \ A \in G\}$ forma uma base de abertos.

(i) Seja $\mathcal{C}$ uma família de fechados em βG satisfazendo a propriedade da interseção finita. Como para cada $A \subseteq G$ temos $\overline{A} = \beta G \backslash \overline{G \backslash A}$, assim $\overline{A}$ é aberto-fechado, então para cada fechado $F \in \mathcal{C}$ existe $\{\overline{A}_i \ : \ i \in J\}$ tal que $F = \cap\{\overline{A}_i \ : \ i \in J\}$ assim s.p.g. suponhamos $\mathcal{C} = \{\overline{A}_i \ : \ i \in I\}$. Como $\mathcal{C}$ satisfaz a propriedade de interseção finita temos que $\{A_i \ : \ i \in I\}$ também a satisfaz. Assim $(\exists\, \mathcal{U} \in \beta G)$ $(\{A_i \ : \ i \in I\} \subseteq \mathcal{U})$ (i.e. $\mathcal{U} \in \cap \mathcal{C}$) portanto $(\beta G, \mathcal{T})$ é compacto. Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta G$ distintos, então $(\exists A \in \mathcal{U})$ $(\exists B \in \mathcal{V})$ $(A \cap B = \phi)$ assim $\mathcal{U} \in \overline{A}$, $\mathcal{V} \in \overline{B}$ e $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ portanto $(\beta G, \mathcal{T})$ é Hausdorff.

(ii) Para cada $g \in G$ seja $\mathcal{U}_g := \{A \subseteq G \ : \ g \in A\}$ assim $\mathcal{U}_g \in G^o$. Agora seja $\mathcal{U} \in G^o$ então existe $g \in \cap\mathcal{U}$ assim $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_g$ portanto $\mathcal{U} = \mathcal{U}_g$, assim temos que $G^o = \{\mathcal{U}_g \ : \ g \in G\}$ e como $\{\mathcal{U}_g\} = \overline{\{g\}}$ assim temos que $\{\mathcal{U}_g\}$ é aberto-fechado logo $(G^o, \mathcal{T})$ é aberto discreto, agora como para cada $U \in \mathcal{T}$ existe $A \subseteq G$ tal que $\overline{A} \subseteq U$ seja $a \in A$, então $\mathcal{U}_a \in \overline{A}$, assim $G^o \cap U \neq \phi$ portanto G é denso em $(\beta G, \mathcal{T})$

(iii) Sejam B_1, B_2 fechados disjuntos de Y, então $f^{-1}(B_1)$ e $f^{-1}(B_2)$ são disjuntos contidos em G^o assim existem $A_1, A_2 \subseteq G$ tais que $f^{-1}(B_i) = \{\mathcal{U}_g \ : \ g \in A_i\}$, $i = 1, 2$, como A_1, A_2 são disjuntos então $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \phi$ e $f^{-1}(B_i) \subseteq \overline{A_i}$, assim $cl_{\beta G}(f^{-1}(B_1) \cap cl_{\beta G}(f^{-1}(B_2)) = \phi$ então pelo Lema C.1 temos que exite $F : \beta G \to Y$ contínua tal que $F/G^o \equiv f$.

(iv) Seja $U \in \mathcal{T}$, como G^o é $\mathcal{T}$-denso temos que $cl_{\beta G}(U) = cl_{\beta G}(U \cap G^o)$, onde $U \cap G^o$ é aberto-fechado em G^o. Seja $f : G^o \to [0, 1]$ tal que $f/(U \cap G^o) \equiv 0$ e $f/(G \backslash U) \equiv 1$. Assim f é contínua, por (iii) temos que existe $F : \beta G \to [0, 1]$ contínua tal que $F/G^o \equiv f$. Como G^o é $\mathcal{T}$-denso temos $\beta G = cl_{\beta G}(U \cap G^o) \cup cl_{\beta G}(G^o \backslash U)$ e como $f/(U \cap G^o) \equiv 0$ então $F^{-1}(0) = cl_{\beta G}(U \cap G^o)$ análogo $F^{-1}(1) = cl_{\beta G}(G^o \backslash U)$, assim $\beta G = cl_{\beta G}(G^o \cap U) \dot{\cup} cl_{\beta G}(G^o \backslash U)$ portanto $cl_{\beta G}(U) = cl_{\beta G}(G^o \cap U)$ é aberto.

■

Proposição C.4 Seja G um grupo infinito discreto e seja $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\{\overline{A} \ : \ A \subseteq G\}$ onde $\overline{A} = \{\mathcal{U} \in \beta G \ : \ A \in \mathcal{U}\}$. Para cada $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta G$ seja

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} = \{A \subseteq G \ : \ \Omega_{\mathcal{V}}(A) \in \mathcal{U}\} \text{ onde } \Omega_{\mathcal{V}}(A) = \{g \in G \ : \ g^{-1}A \in \mathcal{V}\}.$$

Então $(\beta G, \cdot)$ é semigrupo, $(G^*, \cdot)$ é subsemigrupo fechado de $(\beta G, \cdot)$ e $(G^o, \cdot)$ é homomorfo a $(G, \cdot)$.

Demonstração

Vamos demonstrar que $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ é filtro. Como $G \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ temos que $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \neq \phi$. Como $\phi \notin \mathcal{U}$ e $\phi \notin \mathcal{V}$ temos que $\phi \notin \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$. Sejam A, $B \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ assim $\Omega_{\mathcal{V}}(A)$, $\Omega_{\mathcal{V}}(B) \in \mathcal{U}$ mostraremos que $\Omega_{\mathcal{V}}(A \cap B) \in \mathcal{U}$ (i.e. $A \cap B \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$) seja $g \in \Omega_{\mathcal{V}}(A) \cap \Omega_{\mathcal{V}}(B)$ então $g^{-1}A \in \mathcal{V}$ e $g^{-1}B \in \mathcal{V}$ portanto $g^{-1}(A \cap B) = g^{-1}A \cap g^{-1}B \in \mathcal{V}$ assim $g \in \Omega_{\mathcal{V}}(A \cap B)$ como $\Omega_{\mathcal{V}}(A)$, $\Omega_{\mathcal{V}}(B) \in \mathcal{U}$ e $\Omega_{\mathcal{V}}(A) \cap \Omega_{\mathcal{V}}(B) \subseteq \Omega_B(A \cap B)$ temos que $\Omega_{\mathcal{V}}(A \cap B) \in \mathcal{U}$.

Agora seja $A \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ e $B \supseteq A$. Vamos demonstrar que $\Omega_{\mathcal{V}}(A) \subseteq \Omega_{\mathcal{V}}(B)$ (i.e. $B \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$). Dado $g \in \Omega_{\mathcal{V}}(A)$ como $g^{-1}A \in \mathcal{V}$ e $g^{-1}B \supseteq g^{-1}A$ então $g^{-1}B \in \mathcal{V}$ portanto $g \in \Omega_{\mathcal{V}}(B)$.

Vamos demonstrar que $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$ é maximal.

Senão existe $\mathcal{W} \in \beta G$ tal que $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \subsetneq \mathcal{W}$ seja $C \in \mathcal{W} \backslash (\mathcal{U} \cdot \mathcal{V})$ então $\Omega_{\mathcal{V}}(C) \notin \mathcal{U}$, assim $G \backslash \Omega_{\mathcal{V}}(C) \in \mathcal{U}$ e como $G \backslash \Omega_{\mathcal{V}}(C) = \Omega_{\mathcal{V}}(G \backslash C)$ temos $G \backslash C \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ portanto C e $G \backslash C \in \mathcal{W}$ o que é contraditório, logo $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \in \beta G$.

Vamos demonstrar $(\forall \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W} \in \beta G)$ $((\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}) \cdot \mathcal{W} = \mathcal{U} \cdot (\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}))$. Como $(\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}) \cdot \mathcal{W} = \{A \ : \ \Omega_{\mathcal{W}}(A) \in \mathcal{U} \cdot \mathcal{V}\} = \{A \ : \ \Omega_{\mathcal{V}}(\Omega_{\mathcal{W}}(A)) \in \mathcal{U}\}$ e $\mathcal{U} \cdot (\mathcal{V} \cdot \mathcal{V}) = \{A \ : \ \Omega_{\mathcal{V}.\mathcal{W}}(A) \in \mathcal{U}\}$ mostraremos que $\Omega_{\mathcal{V}.\mathcal{W}}(A) = \Omega_{\mathcal{V}}(\Omega_{\mathcal{W}}(A))$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{\mathcal{V}}(\Omega_{\mathcal{W}}(A)) &= \{g \in G \ : \ g^{-1}\Omega_{\mathcal{W}}(A) \in \mathcal{V}\} \\
&= \{g \in G \ : \ g^{-1}\{h \in G \ : \ h^{-1}A \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \\
&= \{g \in G \ : \ \{g^{-1}h \in G \ : \ h^{-1}A \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \\
&= \{g \in G \ : \ \{t \in G \ : \ t^{-1}g^{-1}A \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \\
&= \{g \in G \ : \ \Omega_{\mathcal{W}}(g^{-1}A) \in \mathcal{V}\} \\
&= \{g \in G \ : \ g^{-1}A \in \mathcal{V} \cdot \mathcal{W}\} \\
&= \Omega_{\mathcal{V}.\mathcal{W}}(A)
\end{aligned}
$$

Assim $(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V})\cdot\mathcal{W}=\mathcal{U}\cdot(\mathcal{V}\cdot\mathcal{W})$ (i.e. $(\beta G,\cdot)$ é semigrupo).

Vamos demonstrar que G^* é um sub-semigrupo. Seja $\mathcal{U},\mathcal{V}\in G^*$, mostraremos que $\cap(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V})=\phi$. Se não existe $g\in\cap(\mathcal{U}\cdot\mathcal{V})$, então $\{g\}\in\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$ assim $\Omega_{\mathcal{V}}(\{g\})\in\mathcal{U}$ portanto $\Omega_{\mathcal{V}}(\{g\})\neq\phi$, assim $(\exists h\in G)(h^{-1}\{g\}\in\mathcal{V})$ então $\{h^{-1}g\}\in\mathcal{V}\ \Rightarrow\ \cap\mathcal{V}\neq\phi$ o que é contraditorio.

Vamos demonstrar que $(G^o,\cdot)$ é homomorfo a $(G,\cdot)$. Como $G=\{\mathcal{U}_g\ :\ g\in G\}$ mostraremos que $(\forall\, g,\ h\in G)\ (\mathcal{U}_g\cdot\mathcal{U}_h=\mathcal{U}_{gh})$, como $A\in\mathcal{U}_g\mathcal{U}_h\Leftrightarrow\Omega_{\mathcal{U}_h}(A)\in\mathcal{U}_g\Leftrightarrow$ $g\in\Omega_{\mathcal{U}_h}(A)\Leftrightarrow g^{-1}A\in\mathcal{U}_h\Leftrightarrow h\in g^{-1}A\Leftrightarrow gh\in A\Leftrightarrow A\in\mathcal{U}_{gh}$ assim $\mathcal{U}_g\cdot\mathcal{U}_h=\mathcal{U}_{gh}$ portanto $(G^o,\cdot)$ é homomorfo a $(G,\cdot)$.

■

Teorema 4.19 Seja G um grupo infinito discreto e seja $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\{\overline{A}\ :\ A\subseteq G\}$ onde $\overline{A}=\{\mathcal{U}\in\beta G\ :\ A\in\mathcal{U}\}$. Para cada $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\beta G$ seja

$$\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}=\{A\subseteq G\ :\ \Omega_{\mathcal{V}}(A)\in\mathcal{U}\}\ \text{ onde }\ \Omega_{\mathcal{V}}(A)=\{g\in G\ :\ g^{-1}A\in\mathcal{V}\}.$$

Então:

(i) $((\beta G,\cdot),\mathcal{T})$ é semigrupo topológico à direita, compacto Hausdorff e extremamente desconexo.

(ii) $(G^*,\cdot)$ é subsemigrupo fechado de $((\beta G,\cdot),\mathcal{T})$.

(iii) $(G^o,\cdot)$ é subespaço aberto discreto e denso em $((\beta G,\cdot),\mathcal{T})$ e $(G^o,\cdot)$ é isomorfo a $(G,\cdot)$.

Demonstração

Pela Proposição C.3 e pela Proposição C.4 só falta mostrar que $(\forall\mathcal{V}\in\beta G)$ ($\rho_{\mathcal{V}}:\beta G\to\beta G$ é continua) onde $\rho_{\mathcal{V}}(\mathcal{U})=\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$. Dado $\mathcal{V}\in\beta G$ e $A\subseteq G$ temos que

$$\mathcal{U}\in\rho_{\mathcal{V}}^{-1}(\overline{A})\Leftrightarrow\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}\in\overline{A}\cdot\Leftrightarrow A\in\mathcal{U}\cdot\mathcal{V}\Leftrightarrow\Omega_{\mathcal{V}}(A)\in\mathcal{U}\Leftrightarrow\mathcal{U}\in\overline{\Omega_{\mathcal{V}}(A)}.$$

Assim $\rho_{\mathcal{V}}^{-1}(\overline{A}) = \overline{\Omega_{\mathcal{V}}(A)} \in \mathcal{T}$ e portanto $\rho_{\mathcal{V}}$ é contínua.

■

Proposição 4.37 Seja $\mathcal{U}$ ultrafiltro livre de $\mathbb{N}$ então $\mathcal{U}$ é um P-ponto se e somente se para cada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que

$$f/A \equiv cte. \text{ ou } (\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\ |(f/A)^{-1}(n)| < \omega\ )$$

Demonstração

$(\Rightarrow)$ Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja $A_i := f^{-1}(\{i\})$, então $\{A_i\ :\ i \in \mathbb{N}\}$ é partição de $\mathbb{N}$. Suponhamos que $(\exists\, i \in \mathbb{N})\ (\ A_i \in \mathcal{U}\ )$ então seja $A = A_i$ (i.e. $f/A \equiv i$). Se $(\forall\, i \in \mathbb{N})\ (\ A_i \notin \mathcal{U}\ )$ então $(\exists\, A \in \mathcal{U})\ (\forall\, i \in \mathbb{N})\ (\ |A \cap A_i| < \omega\ )$ assim $(f/A)^{-1}(i) = A \cap A_i$ portanto $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\ |(f/A)^{-1}(n)| < \omega\ )$.

$(\Leftarrow)$ Seja $\{A_i\ :\ i \in \mathbb{N}\}$ partição de $\mathbb{N}$ tal que $(\forall\, i \in \mathbb{N})\ (\ A_i \notin \mathcal{U}\ )$. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $(f(a) = i\ \Leftrightarrow\ a \in A_i)$ então existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $f/A \equiv cte.$ ou $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\ |(f/A)^{-1}(n)| < \omega\ )$. Se $f/A \equiv cte.$ então $(\exists\, i \in \mathbb{N})\ (\ A \subseteq A_i\ )$ e como $A \in \mathcal{U}$ temos que $A_i \in \mathcal{U}$ o que é contraditório, portanto $(\forall\, i \in \mathbb{N})\ (\ |(f/A)^{-1}(i)| < \omega\ )$ logo $(\forall i \in \mathbb{N})\ (\ |A \cap A_i| < \omega\ )$ assim $\mathcal{U}$ é P-ponto.

■

Referências Bibliográficas

[C.G.96] W. W. Comfort and S. García-Ferreira, Resolvability: a selective surley and some new results, Top. Appl. 74 (1996), 149-167.

[C.M.Z.93] W. W. Comfort, O. Masaveu and H. Zhou, Resolvability in Topology and in Topological Groups, Proc. of the ninth summer topology conference, ann. New York Acad. Sci.

[C.M.94] W. W. Comfort and J. Van Mill, Groups with only Resolvable Group Topologies, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 687-696.

[C.N.74] W. W. Comfort and S. Negrepontis, The Theory of Ultrafilters (Springer, Berlin, 1974).

[D.93] E. K. Van Douwen, Applications of Maximal Topologies, Top. Appl. 51 (1993), 125-139.

[EC.97] F. W. Eckertson, Resolvable, not Maximally Resolvable Space, Top. Appl. 79 (1997), 1-11.

[EL.69] R. Ellis, Lectures on Topological Dynamics (Benjamin, New York 1969).

[EN.77] R. Engelkind, General Topology (Polish Scientific Publishers, Warsaw 1977).

[F.70] L. Fuchs, Infinite Abelian Groups (Academic Press New York and London 1970).

[G.R.S.90] Graham, Rothschild and Spenger, Ramsey Theory second edition (John Wiley & Sons, 1990).

[HE.43] E. Hewitt, A Problem of Set-Theoretic Topology, Duke Math. J. 10(1943) 309-333.

[HO.84] R. Hodel, Cardinal Functions I, Handbook of Set-Theoretic Topology. cap. 1.

[I.96] A. Illanes, Finite and ω-Resolvability, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 1243-1246.

[K.80] K. Kunen, Set-Theoretic an Introduction to Independence Proofs (North-Holland 1980)

[M.75] V. I. Malykhin, Extremally Disconnected and Similar Groups, Sov. Math. Doklady 16 (1975), 21-25.

[M.P.96] V. I. Malykhin and I. V. Protasov, Maximal Resolvability of Bounded Groups, Top. Appl. 73 (1996), 227-232.

[P.96] I. V. Protasov, Absolutely Decomposable Groups, Ukrainian Math. J., Vol. 48 N3 (1996).

[P.98] I. V. Protasov, Nonresolvable Topologies on Groups, preprint.

[S.92] D. Strauss, $\mathbb{N}^*$ does not contain an algebraic and topological copy de $\beta\mathbb{N}$, J. London Math. Soc. V. 46 N. 3(1992), 463-470.