

MODELOS DE PERCOLAÇÃO  
MULTI ESCALAR

Marina Vachkovskaia

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO GRAU  
DE  
DOUTOR EM ESTATÍSTICA

Área de concentração: probabilidade  
Orientadores: Prof. Dr. Mikhail Menchikov  
Prof. Dr. Vladimir Belitsky

Durante a realização deste trabalho a autora recebeu suporte financeiro do  
CNPq( processo 142996/98-0).

São Paulo, janeiro de 2001

MODELOS DE PERCOLAÇÃO  
MULTI ESCALAR

Marina Vachkovskaia

Este exemplar corresponde à redação final da tese apresentada por Marina Vachkovskaia, devidamente corrigida e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, janeiro de 2001

**Comissão julgadora:**

- Prof. Dr. Vladimir Belitsky – IME-USP
- Prof. Dr. Luiz Renato Gonçalves Fontes – IME-USP
- Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia – IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Hervé Jean Francois Guiol – IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. André Toom – UFPE

## Agradecimentos

Ao grupo de probabilidade do IME-USP,  
aos meus orientadores Mikhail Menchikov e Vladimir Belitsky,  
aos membros da comissão julgadora,  
e ao CNPq.

## Resumo

Estudamos as propriedades de conectividade de conjunto complementar no modelo de percolação de Poisson multi escalar e no modelo de percolação de Mandelbrot em dimensão arbitrária. Usando um resultado sobre a majoração de campos aleatórios dependentes por campos de Bernoulli, provamos que se o parâmetro de seleção é menor do que um certo valor crítico então escolhendo o parâmetro de escala suficientemente grande é possível garantir a ausência de percolação no conjunto complementar. Os resultados para o modelo de Mandelbrot são generalizados para o caso de um mosaico  $k$ -simétrico  $d$ -dimensional. O resultado obtido é aplicado ao modelo de percolação multi escalar por elo. Estudamos também o modelo Booleano de Poisson no caso de raio aleatório  $\rho$  não limitado.

Para uma classe de modelos de percolação de longo alcance tais que as probabilidades  $p_{\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle}$  de elo  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$  ser aberto satisfazem algumas condições de regularidade e  $\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} p_{\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle} = \infty$  provamos que a percolação ocorre mesmo se os elos maiores do que um certo número (que depende de da família de probabilidades  $\{p_{\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle}\}$ ) forem cortados. Apresentamos também um exemplo de um modelo dependente de longo alcance para o qual isto não vale.

**Palavras-chaves:** percolação fractal, majoração estocástica, percolação por elo, mosaico  $k$ -simétrico, modelo Booleano de Poisson, percolação de longo alcance.



## Abstract

We study the connectivity properties of the complementary set in Poisson multiscale percolation model and in Mandelbrot's percolation model in arbitrary dimension. By using a result about majorizing dependent random fields by Bernoulli fields, we prove that if the selection parameter is less than certain critical value, then, by choosing the scaling parameter large enough, we can assure that there is no percolation in the complementary set. The results for the Mandelbrot's model are generalized for the case of  $k$ -symmetric  $d$ -dimensional mosaic. The obtained result is applied to multiscale bond percolation model. We also study Poisson Boolean model in the case of unbounded radius.

We prove that for a class of a long-range percolation models for which connection probabilities  $p_{\langle x,z \rangle}$  satisfy some regularity properties, and such that  $\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} p_{\langle x,z \rangle} = \infty$ , percolation still will occur even if one truncates all edges length of which exceeds some certain constant (which in this case depends on the family of connectivity probabilities  $\{p_{\langle x,z \rangle}\}$ ). We also present an example of dependent long-range percolation model for which this is not true.

# Sumário

Introdução .....	5
<b>1 Propriedades de conectividade de conjunto complementar nos modelos de percolação fractal: modelo de Mandelbrot e modelo de Poisson multi escalar</b>	<b>8</b>
1.1 Modelo de Poisson multi escalar .....	9
1.2 Modelo de percolação de Mandelbrot .....	10
1.3 Demonstrações .....	12
1.3.1 Majoração de campos dependentes .....	12
1.3.2 Demonstração do Teorema 1.2 .....	16
1.3.3 Demonstração de Teorema 1.1 .....	23
<b>2 Percolação multi escalar num mosaico <math>k</math>-simétrico</b>	<b>28</b>
2.1 Definições e resultado principal .....	28
2.2 Exemplo: percolação multi escalar por elo .....	33
2.3 O esquema da demonstração .....	34
<b>3 Modelos Booleanos de Poisson não limitados</b>	<b>38</b>
3.1 Definições e resultados .....	38
3.2 Demonstrações .....	42
3.2.1 Demonstração de Teorema 3.1 .....	42
3.2.2 Demonstração de Teorema 3.2 .....	51
<b>4 Percolação bidimensional truncada de longo alcance</b>	<b>60</b>

4.1	Definições básicas e o resultado principal . . . . .	62
4.2	Demonstração de Teorema 4.1 . . . . .	66
4.3	Generalizações e exemplos . . . . .	81
4.3.1	Modelo de percolação de longo alcance espalhada . . . . .	81
4.3.2	Remarcas sobre a percolação dependente . . . . .	85
4.3.3	Demonstrações . . . . .	88
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>95</b>

## Introdução

O primeiro exemplo do processo de percolação (modelo de propagação de líquido ou gas em meio aleatório) foi introduzido por Broadbent e Hammersley em [1, 2]. O líquido se propaga por canais, mas pode passar por um canal somente se o canal é suficientemente largo. O movimento do líquido é determinado, enquanto o meio, que é o sistema de canais, é aleatório. Broadbent e Hammersley sugeriram o seguinte modelo para este processo. Os canais são identificados com elos de  $\mathbb{Z}^2$ . Cada elo é aberto (ou fechado) com probabilidade  $p$  (respectivamente  $q = 1 - p$ ) e os estados de elos diferentes são independentes. Seja  $\mathbf{P}_p$  a medida de probabilidade respectiva nas configurações de todos elos. As propriedades probabilísticas da configuração dos elos abertos são de interesse, especialmente a dependência destas propriedades do parâmetro  $p$ . Broadbent e Hammersley começaram a estudar se o líquido que está fora de uma grande região, por exemplo, fora de região  $|x| > N$ , pode chegar até a origem. Este evento é equivalente à existência de um caminho aberto da origem até a região  $|x| \geq N$ . Denotamos  $W(v)$  o conjunto dos elos de todos os caminhos abertos que começam em  $v$ ,  $v \in \mathbb{Z}^2$ . Este é o conjunto de todos os pontos que o líquido pode atingir saindo do ponto  $v$  e é chamado de aglomerado do ponto  $v$ . O conjunto  $W(v)$  é vazio se e somente se os 4 elos que saem de  $v$  são fechados.

A questão acima trata do comportamento da probabilidade

$$\mathbf{P}_p\{W \cap \{|x| \geq N\} \neq \emptyset\}, \quad (1)$$

quando  $N$  é grande, onde  $W = W(0)$ . O limite de probabilidade (1) quando

$N \rightarrow \infty$  é igual a

$$\theta(p) = \mathbf{P}_p\{|W| = \infty\}, \quad (2)$$

onde  $|W|$  significa o número de elos em  $W$ . É fácil ver que  $\theta(0) = 0$ ,  $\theta(1) = 1$  e  $\theta(p)$  é não decrescente. O valor

$$p_H = \sup\{p : \theta(p) = 0\} \quad (3)$$

é chamado de probabilidade crítica. Para uma discussão mais detalhada veja [16, 10].

Outro objeto da teoria de percolação é a *percolação de longo alcance* que foi introduzida em [17]. O problema pode ser descrito da seguinte maneira. Consideremos um grafo infinito, por exemplo,  $\mathbb{Z}^d$ . Adicionamos um elo entre cada par dos pontos  $x$  e  $y$  do grafo. Este elo está aberto com probabilidade  $p_{xy}$ ; suponhamos que  $p_{xy} \rightarrow 0$  quando  $\|x - y\| \rightarrow \infty$  e que o modelo é homogêneo no espaço (isto é,  $p_{xy} \equiv p_{x-y}$ ). Como antes, nós vamos estudar a existência de um aglomerado infinito. A diferença entre a percolação comum e a de longo alcance é que na última os elos arbitrariamente longos fazem com que efeitos não localizados possam ocorrer.

O modelo de percolação contínua (de Poisson) apareceu pela primeira vez em [9]. O objetivo era puramente aplicado. Antes de dar os detalhes vamos descrever brevemente o que é um modelo de percolação de Poisson em  $\mathbb{R}^d$ . Começamos com um processo pontual de Poisson  $X$ . Cada ponto de  $X$  é o centro de uma bola com raio  $R$ . Deste jeito, o espaço todo é dividido em duas regiões, a região ocupada, que é a região coberta por pelo menos uma bola, e a região desocupada, que é o complemento da região ocupada.

Denotamos a região ocupada por  $C$ . Ambas as regiões, ocupada e desocupada são compostas por componentes conexos. Os componentes conexos da região ocupada são chamadas de *componentes ocupados* e as da região desocupada de *componentes desocupados*. Estamos interessados em saber se  $C$  contém um componente conexo infinito. Para  $A \subset \mathbb{R}^d$  denotamos  $W(A)$  a união de todos os componentes conexos que têm uma interseção não vazia com  $A$ . Quando  $A = \{0\}$  escrevemos  $W := W(\{0\})$ . Chamamos  $W$  de componente ocupado de origem ou aglomerado. Se dois pontos  $x$  e  $y$  estão no mesmo componente ocupado, dizemos que eles estão conexos na região ocupada.

Na teoria de percolação algum interesse foi atraído por problemas que surgem quando o modelo é construído usando o seguinte procedimento. Um conjunto aleatório é reescalado (possivelmente, mais de uma vez), e o resultado é de alguma maneira superposto sobre uma cópia independente do conjunto original. O primeiro destes modelos foi introduzido por B. Mandelbrot [19] e estudado extensivamente depois, cf. [4, 5, 6, 7, 8, 24, 29, 30]. Os modelos contínuos deste tipo também atraíram atenção, cf. [20, 21, 32]. Todos artigos citados acima tratam dos modelos onde o raio aleatório é limitado; aqui consideramos a situação onde o modelo de cada nível contém bolas arbitrariamente grandes.

Os resultados desta tese formaram os seguintes artigos: Seção 1 — [25], Seção 2 — [26], Seção 4 — [27].

# 1 Propriedades de conectividade de conjunto complementar nos modelos de percolação fractal: modelo de Mandelbrot e modelo de Poisson multi escalar

Nesta parte estudamos dois modelos de percolação fractal: modelo de percolação de Poisson multi escalar e o modelo de Mandelbrot. O último, que é uma generalização do conceito de conjunto de Cantor, foi introduzido por B. Mandelbrot [19] e depois estudado por J.T. Chayes, L. Chayes, R. Durrett, G. Grimmett e outros, veja e.g. [4, 5, 6, 7, 8, 24, 29, 30]. Em particular, Chayes *et al* em [6] introduziram o conceito de “sheet percolation” no conjunto aleatório de Cantor, que de fato é equivalente à ausência de um caminho conexo no conjunto complementar. Os resultados deles foram generalizados para o caso de dimensão arbitrária por M.E. Orzechowsky em [29]. Nós apresentamos uma prova alternativa (e mais curta) do resultado dele. De fato, a diferença entre a nossa prova e a de [29] é que, graças ao resultado sobre a majoração de campos dependentes, podemos usar uma construção geométrica muito mais simples.

O problema de percolação no conjunto complementar também foi estudado por M.V. Menshikov, S.A. Molchanov e A.F. Sidorenko no Capítulo 10 de [24]. Usando um argumento combinatório eles provaram a ausência de percolação para parâmetro pequeno.

Trataremos também do problema de Poisson análogo. Aqui o conjunto

selecionado é construído por uma composição dos campos de Poisson com taxas diferentes de bolas de raios diferentes. Vale notar que o método de [29] não se aplica a este modelo. Uma versão bidimensional deste modelo foi considerado por R. Meester e R. Roy na Seção 8.1 de [20]. Generalizamos o resultado deles para dimensão arbitrária e também tiramos a restrição que o parâmetro de escala tem de ir a infinito de acordo com uma sequência fixada.

O ponto-chave do nosso enfoque é o resultado (Teorema 1.3) sobre a majoração dos campos aleatórios dependentes por campos de Bernoulli. Esperamos que este teorema possa ser útil para estudar outros modelos multi-escalares. De fato, os resultados sobre a majoração por campos de Bernoulli são importantes em percolação e foram usados por muitos autores, veja p.e.x. [11]. Um resultado parecido com o nosso foi provado por T.M. Liggett, R.H. Schonmann e A.M. Stacey in [18]. Discutimos isso em mais detalhes na Seção 1.3.1.

## 1.1 Modelo de Poisson multi-escalar

O modelo de percolação de Poisson multi-escalar em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$  é construído da seguinte maneira. Fixamos  $R > 1$ . As bolas do nível  $i$  são bolas em  $\mathbb{R}^d$  com raio  $R^{-i}$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . Os centros das bolas de nível  $i$  formam um campo de Poisson em  $\mathbb{R}^d$  com taxa  $\lambda_i = cR^{id}$  independentemente dos outros. Denotamos por  $U^{(i)}$  a união das bolas de nível  $i$ . O objeto de interesse é o conjunto  $U = \cup_{i=0}^{\infty} U^{(i)}$ . Dizemos que neste modelo ocorre a percolação se quase certamente existe um caminho contínuo  $\gamma : \mathbb{R} \mapsto U$ , tal que  $\gamma$



não é contido em nenhuma caixa finita. É conhecido que existe  $c_{cr} = c_{cr}(d)$ ,  $0 < c_{cr} < \infty$  (cf. [20, 24, 28]) tal que se  $c < c_{cr}$ , então  $U^{(i)}$  é quase certamente uma união dos componentes finitos disjuntos e se  $c > c_{cr}$ , então  $U^{(i)}$  percola para todos  $i = 0, 1, \dots$  (o argumento de reescalonamento implica que  $c_{cr}$  não depende de  $i$ , isto é,  $c_{cr}$  é a intensidade crítica para o modelo de Poisson com bolas de raio 1).

Trivialmente, se  $c > c_{cr}$ , então o conjunto  $U$  percola para qualquer  $R$ ; também não é difícil mostrar isso para  $c = c_{cr}$ . De fato, quando  $c = c_{cr}$ , as bolas de níveis 0 e 1 são suficientes para percolação. Obviamente, o conjunto  $U^{(0)}$  domina o campo de bolas de nível 1 de intensidade  $c_{cr}$ . Junto com  $U^{(1)}$ , ele forma o campo de bolas de nível 1 de intensidade  $c_{cr}R^d(1+R^{-d})$ . O último está na fase supercrítica por argumento de reescalonamento. Então, o nosso resultado principal é o seguinte

**Teorema 1.1** *Para qualquer  $c < c_{cr}$  existe um  $R_0 = R_0(c)$  tal que para todos  $R \geq R_0$  não há percolação no conjunto aleatório  $U$ .*

## 1.2 Modelo de percolação de Mandelbrot

Construímos o conjunto aleatório  $D \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , pelo seguinte processo de iteração. Fixamos  $N \in \mathbb{N}$  e  $p \in (0, 1)$ . Dividimos o espaço em (hiper)cubos fechados com lado igual a 1, que são chamados de cubos do nível 0. Cada um deles é selecionado com probabilidade  $p$  independentemente dos outros; denotamos por  $D_0$  a união de todos os cubos de nível 0 selecionados. Depois, dividimos cada cubo de nível 0 não selecionado em  $N^d$  iguais subcubos com

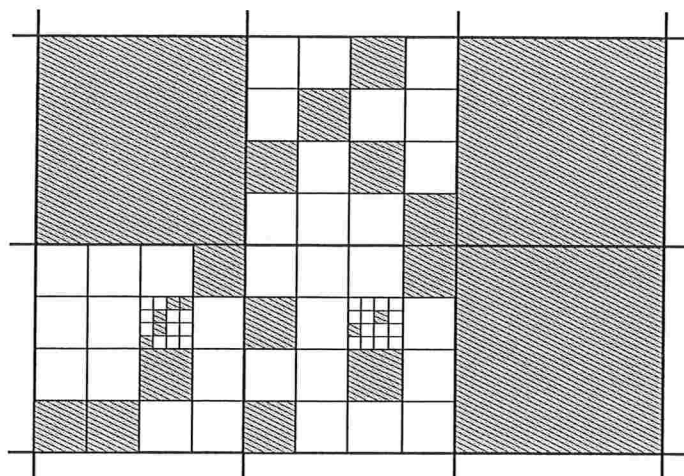


Figura 1: O processo de construção do conjunto  $D$ ,  $N = 4$ , os quadrados sombreados são selecionados

elo  $N^{-1}$ , que são chamados de cubos de nível 1. De novo, cada cubo de nível 1 é selecionado com probabilidade  $p$  independentemente dos outros; junto com os selecionados cubos de nível 0 eles formam o conjunto  $D_1$ . Iterando esta construção obtemos uma sequência dos conjuntos  $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots$ , onde  $D_i = D_{i-1} \cup \{\text{cubos de nível } i \text{ selecionados}\}$ . Figura 1 mostra o fragmento do conjunto  $D_3$ .

O elo de um cubo de nível  $i$  é igual a  $N^{-i}$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . Finalmente, definimos o conjunto aleatório

$$D = D(d, N, p) := \bigcup_{i=0}^{\infty} D_i.$$

Dizemos que neste modelo a percolação ocorre se quase certamente existe um caminho contínuo  $\gamma : \mathbb{R} \mapsto D$ , tal que  $\gamma$  não é contido em nenhuma caixa finita.

Note que  $\overline{(\mathbb{R}^d \setminus D)} \cap [0, 1]^d$  é o modelo fractal de Mandelbrot tradicional. De fato, considerar este modelo em todo espaço em vez de  $[0, 1]^d$  não traz novos resultados; fazemos isto deste jeito apenas para acentuar a semelhança entre este modelo (e o método de estudo dele) e o modelo de Poisson multi-escalar.

Para formular o resultado, definimos um reticulado  $d$ -dimensional  $M^d$  como um reticulado cujo conjunto dos vértices é  $\mathbb{Z}^d$  e o conjunto dos elos é dado pela seguinte relação de adjacência. Dois vértices  $x = (x_1, \dots, x_d)$  e  $y = (y_1, \dots, y_d)$  de  $M^d$  são adjacentes se e somente se  $|x_i - y_i| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Note que dois cubos são adjacentes se eles tem pelo menos um ponto em comum, então a percolação por cubos selecionados do nível 0 é equivalente a percolação por sítio em  $M^d$ . Seja  $p_c$  a probabilidade crítica para a percolação por sítio em  $M^d$ . O resultado principal desta seção é o seguinte

**Teorema 1.2 (Orzechowski [29])** *Para qualquer  $p < p_{cr}$  existe  $N_0 = N_0(p)$  tal que para todo  $N \geq N_0$  não há percolação no conjunto aleatório  $D$ .*

## 1.3 Demonstrações

### 1.3.1 Majoração de campos dependentes

**Definição 1.1** *Dizemos que um conjunto aleatório  $G_1$  é estocasticamente menor do que outro conjunto aleatório  $G_2$  se e somente se for possível acoplá-los de tal maneira que  $G_1 \subset G_2$ .*

Precisamos de seguinte resultado:

**Teorema 1.3** *Seja  $\{\eta(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ ,  $\eta(x) \in \{0, 1\}$  um campo aleatório invariante por translação. Denotamos por  $M_a = \{-a, \dots, a\}^d \subset \mathbb{Z}^d$  o cubo com elo  $2a + 1$  centrado em 0. Seja*

$$\delta = \sup \mathbf{P}\{\eta(0) = 1 \mid \eta(x_1) = 0, \dots, \eta(x_l) = 0, \eta(y_1) = b_1, \dots, \eta(y_m) = b_m\}, \quad (4)$$

onde o supremom é sobre todos (inclusive o vazio) subconjuntos finitos

$$\{x_1, \dots, x_l\} \subset M_a, \quad \{y_1, \dots, y_m\} \subset \mathbb{Z}^d \setminus M_a,$$

e  $b_1, \dots, b_m \in \{0, 1\}$ . Então o conjunto aleatório  $G = \{x : \eta(x) = 1\}$  é estocasticamente menor do que o conjunto aleatório de Bernoulli com parâmetro  $p = 1 - (1 - \delta^{(2a+1)^{-d}})^{(2a+1)^d}$ .

*Demonstração.* Provamos este teorema em duas etapas.

*Etapa 1.* (Note que uma construção similar foi usada no Lema 8 de [15].)

Considere o campo de variáveis aleatórias de Bernoulli (isto é, independentes)

$\{\eta'(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$  com  $\mathbf{P}\{\eta'(x) = 1\} = \delta$ . Seja

$$G' = \{x \in \mathbb{Z}^d : \text{existe } y \in M_a(x) \text{ tal que } \eta'(y) = 1\},$$

onde  $M_a(x) = M_a + x$ . Construímos um acoplamento tal que  $G \subset G'$ .

Enumeramos  $\mathbb{Z}^d = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Sejam  $\xi_{x_1}, \xi_{x_2}, \dots$  variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas uniformes em  $[0, 1]$ . Seja

$$\eta'(x_i) = \mathbf{1}_{\{\xi_{x_i} \leq \delta\}},$$

para  $i = 1, 2, \dots$  e

$$\eta(x_1) = \mathbf{1}_{\{\xi_{x_1} \leq \mathbf{P}\{\eta(x_1)=1\}\}}.$$

Então  $\eta(x_1) \leq \eta'(x_1)$  visto que  $\mathbf{P}\{\eta(x_1) = 1\} \leq \delta$ . Se  $\eta'(x_1) = 0$ , passamos para  $x_2$ . Usando (4), temos

$$\eta(x_2) = \mathbf{1}_{\{\xi_{x_2} \leq \mathbf{P}\{\eta(x_2)=1|\eta(x_1)=0\}\}} \leq \mathbf{1}_{\{\xi_{x_2} \leq \delta\}} = \eta'(x_2).$$

Se  $\eta'(x_1) = 1$  então todos os sítios de  $M_a(x_1)$  já pertencem a  $G'$ , e podemos simplesmente excluí-los da “cauda”  $\{x_2, x_3, \dots\}$  e reenumerar esta cauda do modo natural. Continuamos a construir o campo  $\{\eta(x)\}$  desta maneira. No passo  $m$  temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta(x_m) = 1 \mid \eta(x_1), \dots, \eta(x_{m-1})\} \\ &= \mathbf{P}\{\eta(x_m) = 1 \mid \eta(x_{i_1}) = 0, \dots, \eta(x_{i_l}) = 0, \eta(x_{i_{l+1}}), \dots, \eta(x_{i_{m-1}})\} \leq \delta, \end{aligned}$$

onde  $x_{i_1}, \dots, x_{i_l} \in M_a(x_m)$  e  $x_{i_{l+1}}, \dots, x_{i_{m-1}} \notin M_a(x_m)$ . Então

$$G \cap \{x_1, \dots, x_m\} \subset G' \cap \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Consequentemente, por indução, temos  $G \subset G'$ .

*Etapa 2.* Agora vamos construir um acoplamento tal que o conjunto aleatório de Bernoulli  $B(p)$  com parâmetro  $p$  contenha  $G'$ . Para  $z \in M_a$  denotamos

$$G'_z = \{y \in M_a(x) : x = (2a+1)k + z, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \text{ e } \eta'(x) = 1\}.$$

Existem  $(2a+1)^d$  tais conjuntos  $G'_z$  e  $G' = \cup_{z \in M_a} G'_z$ . Sejam  $\zeta_{x,y}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas uniformes em  $[0, 1]$  e  $\eta''(x, y) = \mathbf{1}_{\{\zeta_{x,y} \leq \delta^{(2a+1)^{-d}}\}}$ . Definimos  $B_z(\delta^{(2a+1)^{-d}}) = \{x \in \mathbb{Z}^d : \eta''(x, z) = 1\}$ . Já que

$$\mathbf{P}\{\zeta_{y,z} \leq \delta^{(2a+1)^{-d}} \text{ para todo } y \in M_a(x)\} = \delta,$$

podemos escrever

$$G'_z = \{y \in M_a(x) : x = (2a + 1)k + z, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \text{ e } \eta'_z(x) = 1\}$$

onde

$$\eta'_z(x) = \mathbf{1}_{\{\eta''(y,z)=1 \text{ para todo } y \in M_a(x)\}}.$$

Deste jeito,  $G'_z \subset B_z(\delta^{(2a+1)^{-d}})$ . Isto implica que

$$G \subset \bigcup_{z \in M_a} B_z(\delta^{(2a+1)^{-d}}) = B(p)$$

para  $p = 1 - (1 - \delta^{(2a+1)^{-d}})^{(2a+1)^d}$ . ■

Comparado com o nosso Teorema 1.3, Teorema 0.0 (i) de [18] relaxa a condição sobre o supremom em (4), mas dá a demonstração apenas para o caso de  $\delta$  suficientemente pequeno. Então, o Teorema 1.3 é de interesse independente, embora o resultado de [18] também possa ser usado em nosso caso. Note também que logo antes do Teorema 0.0 em [18] afirma-se que para campos unidimensionais 1-dependentes positivamente correlados a majoração pode ser obtida *sempre*; o nosso resultado junto com argumento análogo ao Lema 1.2 abaixo mostra que isto é verdade para campos aleatórios multidimensionais surgidos de argumentos de blocos (reescalonamento) típicos em percolação (pelo menos quando o evento “o bloco é bom” é crescente, como é o caso na maioria das vezes).

A outra razão que nós motivou incluir este teorema é a seguinte. Aplicando o Teorema 1.3 ao conjunto  $\tilde{G} = \{x : \eta(x) = 0\}$  e fazendo ajustes apropriados em (4), é possível obter que o campo  $\eta$  também é *minorado*

por algum campo de Bernoulli, então o Teorema 1.3 de fato permite fazer estimativas por dois lados. Para ilustrar isso, considere o seguinte

*Exemplo.* Seja  $F(\cdot, \dots, \cdot)$  uma função Booleana crescente de  $(2a + 1)^d$  argumentos tal que  $F(\mathbf{0}) = 0$  e  $F(\mathbf{1}) = 1$ . Seja  $\eta_1$  um campo de Bernoulli com parâmetro  $q_1 < p_{cr}$  e  $\eta_2$  um campo dependente construído da seguinte maneira: se  $\eta_3$  for um campo de Bernoulli com parâmetro  $q_2$ , seja  $\eta_2(x) = F(\eta_3(y), y \in M_a(x))$ . Denotamos  $G_i = \{x : \eta_i(x) = 1\}$ ,  $i = 1, 2$ . Suponha que estamos interessados em provar o seguinte:

- (i) para fixo  $q_1 < p_{cr}$  e  $q_2$  pequeno não há percolação no conjunto  $G_1 \cup G_2$ ;
- (ii) para fixo  $q_2$  e  $q_1$  suficientemente próximo a  $p_{cr}$  há percolação no conjunto  $G_1 \cup G_2$ .

O Teorema 0.0 (i) de [18] permite provar (i), mas é aplicável a (ii) apenas se  $q_2$  for próximo a 1. Por outro lado, o Teorema 1.3 junto com um argumento análogo a Lema 1.2 prova ambos (i) e (ii).

### 1.3.2 Demonstração do Teorema 1.2

Preferimos provar este teorema primeiro porque a demonstração dele é mais ilustrativa e a demonstração de Teorema 1.1 contem algumas construções artificiais.

Seguindo [8, 29], é suficiente mostrar que o conjunto  $D_n$  está na fase subcrítica uniformemente em  $n$  (isto é, que a probabilidade de existência de caminho da origem até a borda de uma caixa grande é pequena uniforme-

mente em  $n$ ). De fato, note que a ausência de percolação no conjunto complementar é “full-sheet percolation” de [29], então podemos usar o Lema 1 de [29].

Para continuar, vamos precisar de algumas definições e lemas. Um cubo  $K$  de nível  $k$  é etiquetado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} K &= (k, i_1, \dots, i_d) \\ &= \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_j \in [i_j N^{-k}, (i_j + 1)N^{-k}], j = 1, \dots, d\}, \end{aligned}$$

$i_l \in \mathbb{Z}, l = 1, \dots, d$ , onde  $i_1, \dots, i_d$  são as “coordenadas” do cubo. Suponha que temos uma família de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas  $Z(k, i_1, \dots, i_d)$ , cada uma assume o valor 1 com probabilidade  $p$  e 0 com probabilidade  $1 - p$ . Definimos o conjunto aleatório  $D^{(i)}$  como a união de todos os cubos  $K$  do nível  $i$  tais que  $Z(K) = 1$ . Obviamente,  $D_n = \cup_{i=0}^n D^{(i)}$  (os conjuntos aleatórios  $D_n$  foram definidas na Seção 1.2).

A distância entre dois cubos  $K_1 = (k, i_1, \dots, i_d)$  e  $K_2 = (k, j_1, \dots, j_d)$  é dada por  $\text{dist}(K_1, K_2) := \max\{|i_l - j_l|, l = 1, \dots, d\}$ . Note que a distância é definida apenas para os cubos do mesmo nível.

Definimos cubos passáveis e bons por indução.

**Definição 1.2** *Um cubo  $K$  do nível  $n$  é bom se e somente se  $Z(K) = 1$ . Para  $k < n$  um cubo  $K'$  do nível  $k$  é passável se e somente se ele tiver uma interseção com uma sequência de pelo menos  $N$  cubos bons adjacentes de nível  $k + 1$ . O cubo  $K'$  é bom se ele é passável ou  $Z(K') = 1$ .*

Na Figura 2 os cubos  $B$  e  $F$  são passáveis e os  $A, B, C, E$  e  $F$  são bons.



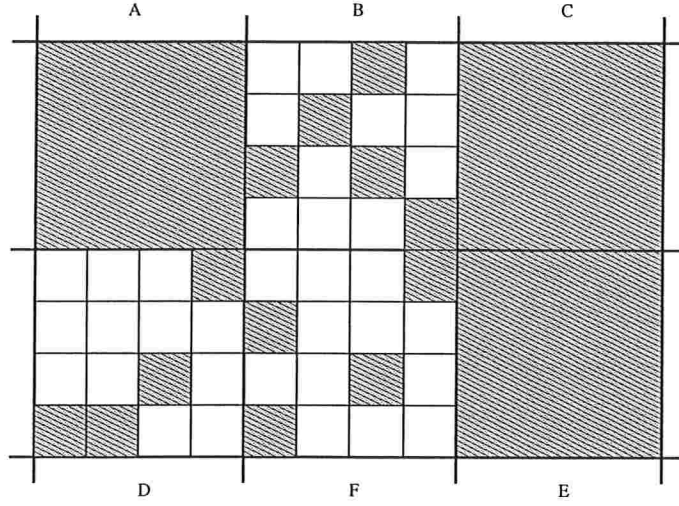


Figura 2: Cubos bons e passáveis,  $N = 4$

**Lema 1.1** *Se existir um caminho infinito em  $D_n$ , então existe uma sequência infinita dos cubos bons adjacentes de nível 0.*

*Demonstração.* Considere um caminho infinito  $\gamma$  em  $D_n$ . Sem perder a generalidade podemos supor que este caminho não passa duas ou mais vezes pelo mesmo cubo selecionado. Considere um subcaminho máximo conexo  $\gamma'$  de  $\gamma$  que passa somente por cubos de  $D^{(n)}$ . Já que  $\gamma$  não passa mais que uma vez pelo mesmo cubo selecionado, dois casos são possíveis: ou o número dos cubos pelos quais  $\gamma'$  passa é pelo menos  $N$ , ou  $\gamma'$  conecta dois cubos selecionados  $K_1, K_2$  de níveis  $i_1, i_2 < n$  tais que  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ . No segundo caso  $\gamma$  pode ser modificado de tal maneira que não vai conter  $\gamma'$ . No primeiro caso todos os cubos do nível  $n-1$  pelos quais  $\gamma'$  passa são passáveis e por isso bons. Deste jeito obtemos de  $\gamma$  uma sequência  $\gamma_1$  de cubos bons adjacentes dos níveis  $0, \dots, n-1$  (note que os cubos de nível no máximo  $n-2$  são de fato

selecionados). Iterando esta construção obtemos uma sequência infinita  $\gamma_n$  de adjacentes cubos bons de nível 0. ■

Vamos introduzir algumas notações. Para  $k$  fixado identificamos os cubos de nível  $k$  com os vértices de  $\mathbb{Z}^d$ , isto é, cubo  $(k, i_1, \dots, i_d)$  é identificado com o vértice  $(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ . Note que o grafo obtido por esta identificação e por conectividade por um ponto em comum é  $\mathbb{M}^d$ . Associamos dois campos aleatórios  $\eta_k^s = \{\eta_k^s(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$  e  $\eta_k^g = \{\eta_k^g(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$  ao conjunto de cubos de nível  $k$ , onde

$$\eta_k^s(x) = \begin{cases} 1, & \text{se o cubo } (k, x) \text{ é passável,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\eta_k^g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se o cubo } (k, x) \text{ é bom,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotamos também por

$$\xi_{q,k} = \{\xi_{q,k}(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}, \quad \xi_{q,k}(x) \in \{0, 1\}$$

o campo aleatório de Bernoulli com parâmetro  $q \in [0, 1]$  de cubos do nível  $k$ . Sejam  $\mathbf{P}_{\eta_k^g}$  e  $\mathbf{P}_{q,k} := \mathbf{P}_{\xi_{q,k}}$  as medidas de probabilidade induzidas pelos campos aleatórios respectivos.

**Lema 1.2** *Suponha que para algum  $0 \leq k < n$  o campo aleatório  $\eta_{k+1}^g$  de cubos bons de nível  $k+1$  é estocasticamente menor do que o campo aleatório de Bernoulli  $\xi_{p',k+1}$ . Então o campo aleatório  $\eta_k^s$  de cubos passáveis do nível  $k$  é estocasticamente menor do que o campo aleatório de Bernoulli  $\xi_{p_1,k+1}$  com  $p_1 = 1 - (1 - \delta^{5^{-d}})^{5^d}$ , onde  $\delta = \mathbf{P}_{p',k+1}\{\eta_k^s(0) = 1\}$ , isto é,  $\delta$  é a probabilidade*

de que um dado cubo seja passável calculada na hipótese de que o campo de cubos bons de próximo nível é de Bernoulli com parâmetro  $p'$ .

*Demonstração de Lema 1.2.* Por hipótese, podemos dominar o campo  $\eta_{k+1}^g$  por um campo aleatório de Bernoulli  $\xi_{p',k+1}$ . Denotamos por  $\tilde{\eta}_k^s$  o campo de cubos passáveis do nível  $k$  construído sobre  $\xi_{p',k+1}$  (isto é, supondo que os cubos de nível  $k+1$  são declarados bons independentemente com probabilidade  $p'$  e construindo os cubos passáveis do nível  $k$  a partir deles). Evidentemente,  $\eta_k^s$  é dominado por  $\tilde{\eta}_k^s$ , então basta provar o lema para  $\tilde{\eta}_k^s$ . Fixamos quaisquer  $l \geq 0$ ,  $m \geq 0$ ,  $x_1, \dots, x_l \in M_2$ ,  $y_1, \dots, y_m \notin M_2$ ,  $b_1, \dots, b_m \in \{0, 1\}$  (veja Teorema 1.3 para a definição de  $M_2$ ). Introduzimos os seguintes eventos

$$\begin{aligned} A &= \{\tilde{\eta}_k^s(0) = 1\}, \\ B &= \{\tilde{\eta}_k^s(x_1) = 0, \dots, \tilde{\eta}_k^s(x_l) = 0\}, \\ C &= \{\tilde{\eta}_k^s(y_1) = b_1, \dots, \tilde{\eta}_k^s(y_m) = b_m\}. \end{aligned}$$

Note que  $\mathbf{P}\{A\} = \delta$ . Pelo Teorema 1.3 precisamos provar apenas que  $\mathbf{P}\{A \mid B \cap C\} \leq \mathbf{P}\{A\}$ . Denotamos  $\Delta(C) = \{y \in \mathbb{Z}^d : \text{dist}(y, y_j) \leq 1 \text{ para algum } j = 1, \dots, m\}$ , onde  $\text{dist}(y, y_j)$  é a distância entre cubos correspondentes a  $y$  e  $y_j$ . Podemos escrever  $C = \cup_i C_i$ , onde  $C_i$  são todas as configurações possíveis dos bons cubos de nível  $k+1$  contidos em  $\Delta(C)$  tais que ocorre o evento  $C$ . Obviamente,  $C_i \cap C_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , então, denotando  $\mathbf{P}^{C_i}\{\cdot\} = \mathbf{P}\{\cdot \mid C_i\}$ , temos

$$\mathbf{P}\{A \cap B \cap C\} = \sum_i \mathbf{P}^{C_i}\{A \cap B\} \mathbf{P}\{C_i\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_i \mathbf{P}^{C_i}\{A\} \mathbf{P}^{C_i}\{B\} \mathbf{P}\{C_i\} \\
&= \mathbf{P}\{A\} \sum_i \mathbf{P}^{C_i}\{B\} \mathbf{P}\{C_i\} \\
&= \mathbf{P}\{A\} \mathbf{P}\{B \cap C\}.
\end{aligned}$$

Acima nós usamos o fato que  $A$  é um evento crescente,  $B$  é decrescente, e a medida condicional  $\mathbf{P}^{C_i}$  é FKG, então  $\mathbf{P}^{C_i}\{A \cap B\} \leq \mathbf{P}^{C_i}\{A\} \mathbf{P}^{C_i}\{B\}$ . O evento  $A$  depende somente de cubos do nível  $k+1$  em  $M_1$ , então se  $y_1, \dots, y_m$  estão fora de  $M_2$ , temos  $M_1 \cap \Delta(C) = \emptyset$  e  $\mathbf{P}^{C_i}\{A\} = \mathbf{P}\{A\}$ . Agora só resta aplicar Teorema 1.3 com  $a = 2$  e  $\delta$  definido acima. ■

O ponto-chave da demonstração de Teorema 1.2 é o seguinte

**Lema 1.3** *Se  $p < p' < p_{cr}$ , então existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que para qualquer  $N \geq N_0$  e qualquer  $n > 1$  o campo aleatório de cubos bons do nível 0 pode ser dominado por um campo aleatório de Bernoulli com parâmetro  $p'$ .*

*Demonstração.* Vamos provar este lema por indução. Fixamos  $\varepsilon < p' - p$ .

Obviamente, para os cubos de nível  $n$ ,  $\eta_n^g = \xi_{p,n}$  é estocasticamente menor do que  $\xi_{p',n}$ , então a afirmação do lema vale.

Suponha que para os cubos do nível  $k+1$ ,  $\eta_{k+1}^g$  é estocasticamente menor do que  $\xi_{p',k+1}$ .

Precisamos da seguinte definição

**Definição 1.3** *Para o campo aleatório  $\{\zeta(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ ,  $\zeta(x) \in \{0, 1\}$  definimos o aglomerado de sítio  $x \in \mathbb{Z}^d$  por*

$$W_\zeta(x) = \{y \in \mathbb{Z}^d : \text{existe } m \text{ e a sequência}$$

$y_0 = x, y_1, \dots, y_m = y$  tal que  $\zeta(y_i) = 1$   
e  $y_{i-1}$  é adjacente a  $y_i$  em  $\mathbf{M}^d$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Como foi provado em [22],  $p' < p_{cr}$  implica que existe  $\beta(p') > 0$  tal que para qualquer  $\nu > 0$  e qualquer  $x \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathbf{P}\{|W_{\xi_{p'}}(x)| \geq \nu\} \leq \exp(-\beta(p')\nu). \quad (5)$$

Fixamos um cubo  $K$  do nível  $k$  com coordenadas  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Usando (5) e a hipótese de indução (isto é, que o campo  $\eta_{k+1}^g$  é dominado por campo de Bernoulli  $\xi_{p',k+1}$ ), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{K \text{ é passável}\} &= \mathbf{P}\{\text{existe um caminho por cubos bons do nível } k+1 \\ &\quad \text{de comprimento pelo menos } N \text{ que intercepta } K\} \\ &\leq N^d \mathbf{P}_{\eta_{k+1}^g} \{W_{\eta_{k+1}^g}(0) \geq N\} \\ &\leq N^d \mathbf{P}_{p',k+1} \{W_{\xi_{p',k+1}}(0) \geq N\} \\ &\leq N^d \exp(-\beta(p')N) =: \varepsilon_1(N). \end{aligned} \quad (6)$$

Pelo Lema 1.2, o campo aleatório de cubos passáveis do nível  $k+1$  é dominado por campo aleatório de Bernoulli com parâmetro

$$\varepsilon_2(N) = 1 - (1 - (\varepsilon_1(N))^{5^{-d}})^{5^d}$$

(que pode ser feito arbitrariamente pequeno escolhendo  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(N)$  suficientemente pequeno).

Escolha  $N$  tal que  $\varepsilon_2(N) < \varepsilon$ , isto é,  $p + \varepsilon_2(N) < p'$ . Visto que o campo aleatório de cubos bons do nível  $k$  é o campo aleatório de cubos passáveis

do nível  $k$  junto com  $D^{(k)}$ , obtemos que  $\eta_k^g$  é estocasticamente menor do que  $\xi_{p',k}$ .

Note que a escolha de  $N$  depende somente de  $p'$ , portanto, podemos escolher o mesmo  $N$  para todos os níveis de cubos. Isto prova o Lema 1.3. ■

Agora podemos finalizar a demonstração do Teorema 1.2. Pelo Lema 1.3, é possível escolher  $N$  tal que o campo aleatório de bons cubos do nível 0 é dominado por campo aleatório de Bernoulli com parâmetro  $p'$ ,  $p < p' < p_{cr}$ . Pelo Lema 1.1, isto implica que o conjunto  $D_n$  está na fase subcrítica uniformemente em  $n$ . ■

### 1.3.3 Demonstração de Teorema 1.1

Denotamos  $U_n = \cup_{i=0}^n U^{(i)}$ . Analogamente ao modelo anterior, precisamos provar que o conjunto  $U_n$  está na fase subcrítica uniformemente em  $n$ . De fato, seja  $\gamma : [0, 1] \mapsto U$  um caminho finito. Note que graças ao fato de que as bolas nunca “se tocam” podemos supor que elas são abertas. Então,  $\gamma$  é coberto por conjuntos abertos e, escolhendo uma subcobertura finita, temos que  $\gamma$  é contido em  $U_i$  para algum  $i$  finito.

Escolhemos  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1/2\sqrt{d}$ , e  $c'$ ,  $c < c' < c_{cr}$ , tais que

$$c'(1 + \alpha)^d < c_{cr}. \quad (7)$$

Denotamos  $\lambda'_i = c'R^{id}$ . Considere também as bolas com raio  $R^{-i}(1 + \alpha)$  em  $\mathbb{R}^d$ , cujos centros formam um campo de Poisson com taxa  $\lambda'_i$ ; denotamos a união delas por  $W^{(i)}$ . Note que (7) implica que não há percolação no conjunto  $W^{(i)}$  para  $i = 1, \dots, n$ .

Para  $i = 1, \dots, n - 1$  considere a partição do espaço em cubos com elo  $R^{-i}/\sqrt{d}$ , os quais são chamados de cubos do nível  $i$ . Note que o elo de cubo do nível  $i$  é escolhido de tal maneira que se o centro da bola de nível  $i$  está dentro do cubo, então o cubo é completamente coberto pela bola. Denotamos também por  $V^{(i)}$  a união das bolas com os centros nos centros das bolas de nível  $i$  e raio  $R^{-i}(1 + \alpha)$ , então o conjunto  $V^{(i)}$  é de fato o conjunto  $U^{(i)}$  “expandido”.

Definimos agora os *conjuntos passáveis*  $P_0, \dots, P_{n-1}$ , e *conjuntos bons*  $G_0, \dots, G_n$ .

**Definição 1.4** *Primeiro, definimos o conjunto bom  $G_n$  de nível  $n$  por  $G_n := U^{(n)}$ . Para  $i < n$ , um cubo de nível  $i$  é passável se ele tem uma interseção com um componente conexo de diâmetro maior do que  $2\alpha R^{-i}$  de  $G_{i+1}$ . O conjunto passável de nível  $i$   $P_i$  é a união de todos os cubos passáveis de nível  $i$ . O conjunto bom  $G_i$  de nível  $i$  é definido por  $G_i := P_i \cup V^{(i)}$ .*

Figura 3 mostra uma configuração de bolas para  $n = 1$ : as menores são de  $U^{(1)}$ , as médias de  $U^{(0)}$  e as maiores de  $V^{(0)}$ . Os cubos sombreados pertencem a conjunto  $P_0$ .

**Lema 1.4** *Percolação em  $U_n$  implica na percolação em  $G_0$ .*

*Demonstração.* Para provar o Lema 1.4, é suficiente provar que

$$\left( \text{percolação em } \bigcup_{j=0}^n U^{(j)} \right) \Rightarrow \left( \text{percolação em } G_k \cup \bigcup_{j=0}^{k-1} V^{(j)} \right) \quad (8)$$

para  $k = n, n - 1, \dots, 0$  (de fato, pega  $k = 0$  em (8) para obter a hipótese de Lema 1.4).

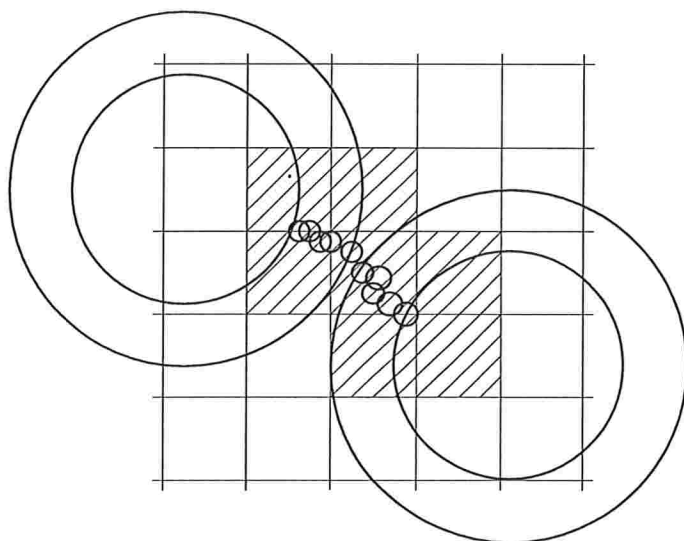


Figura 3: Os conjuntos bons e passáveis,  $n = 1$

Provamos (8) por indução. Primeiro, para  $k = n$  temos que  $G_n = U^{(n)}$ , portanto (8) vale. Agora, suponhamos que (8) vale para  $k+1$  e vamos prová-lo para  $k$ , isto é, vamos provar que

$$\left( \text{percolação em } G_{k+1} \cup \bigcup_{j=0}^k V^{(j)} \right) \Rightarrow \left( \text{percolação em } G_k \cup \bigcup_{j=0}^{k-1} V^{(j)} \right). \quad (9)$$

Pega um caminho  $\gamma$  em  $G_{k+1} \cup V^{(k)} \cup \dots \cup V^{(0)}$ . Considere

$$(G_{k+1} \setminus (U^{(0)} \cup \dots \cup U^{(k)})) \cap \gamma;$$

ele pode ser decomposto em um número finito ou enumeravel de segmentos conexos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ . Pega um  $\gamma'$  desta coleção e suponha que os dois pontos extremos dele pertencem a  $U^{(i_1)}$  e  $U^{(i_2)}$ , onde  $i_1, i_2 \leq k$ . Há duas possibilidades:

- diâmetro de  $\gamma'$  é menor ou igual a  $2\alpha R^{-k}$ ; neste caso  $\gamma' \subset V^{(i_1)} \cup V^{(i_2)}$ ;



- diâmetro de  $\gamma'$  é maior do que  $2\alpha R^{-k}$ ; neste caso  $\gamma'$  é coberto pelos cubos passáveis do nível  $k$ , portanto  $\gamma' \subset P_k$ .

Em ambos os casos temos

$$\gamma' \subset P_k \cup V^{(k)} \cup \dots \cup V^{(0)} = G_k \cup V^{(k-1)} \cup \dots \cup V^{(0)},$$

o que prova (9) e, por consequência, (8) e Lema 1.4. ■

O ingrediente principal da demonstração de Teorema 1.1 é a seguinte

**Proposição 1.1** *Se para fixado  $c < c' < c_{cr}$  o parâmetro da escala  $R$  for suficientemente grande, então  $G_i$  é estocasticamente menor do que  $W^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, n$ .*

*Demonstração.* Provamos esta proposição por indução. Evidentemente,  $G_n = U^{(n)}$  é estocasticamente menor do que  $W^{(n)}$ . Suponha que a hipótese da proposição vale para nível  $k + 1$ ; vamos prová-la para o nível  $k$ .

Já que o campo de Poisson das bolas  $W^{(k+1)}$  seja subcrítico, o resultado de [28] implica que para qualquer  $\alpha > 0$ ,  $i \in \mathbb{N}$  existe  $\beta(\alpha, c') > 0$  tal que para qualquer cubo  $K$  de nível  $k$  (compare com (6))

$$\mathbf{P}\{K \text{ é passável}\} \leq R^d e^{-\beta(\alpha, c')R}. \quad (10)$$

Para prosseguir com a demonstração de Proposição 1.1, precisamos de mais dois lemas.

**Lema 1.5** *O campo aleatório de cubos passáveis de nível  $k$  é estocasticamente menor do que um campo aleatório de Bernoulli com parâmetro  $\varepsilon(R)$*

que pode ser feito arbitrariamente próximo a 0 escolhendo  $R$  suficientemente grande. A escolha de  $R$  depende somente de  $d, c, c'$ , mas não de  $n$ .

*Demonstração de Lema 1.5.* Dois cubos são passáveis ou não independentemente se há pelo menos dois cubos entre eles, já que estamos interessados em componentes conexos de  $G_{k+1}$  com diâmetro pelo menos  $2\alpha R^{-k}$ , e  $\alpha < 1/2\sqrt{d}$ . Analogamente a Lema 1.2, substituindo a soma por integral, pode-se provar que o campo aleatório de passáveis cubos de nível  $k$  satisfaz às condições de Teorema 1.3 com  $a = 2$  e, por (10),  $\delta = R^d e^{-\beta(\alpha, c')R}$ . Então ele é estocasticamente menor qo que um campo aleatório de Bernoulli com parâmetro  $\varepsilon(R) = 1 - (1 - (R^d e^{-\beta(\alpha, c')R})^{5^{-d}})^{5^d}$ . ■

**Lema 1.6** *O campo aleatório de Bernoulli com parâmetro  $\varepsilon(R)$  pode ser dominado por bolas de raio  $R^{-k}(1 + \alpha)$ , cujos centros formam o campo de Poisson em  $\mathbb{R}^d$  com taxa  $\varepsilon'R^{kd}$ , e  $\varepsilon'R^{kd}$  pode ser feito arbitrariamente próximo a 0 escolhendo  $R$  suficientemente grande.*

*Demonstração de Lema 1.6.* Considere o seguinte acoplamento. Um cubo é selecionado se nele há um ponto do campo de Poisson. Os cubos são selecionados ou não independentemente e

$$\mathbf{P}\{\text{o cubo é selecionado}\} = \varepsilon(R) = 1 - \exp(\varepsilon'((1 + \alpha)/\sqrt{d})^d).$$

Se no cubo há o centro de uma bola, o cubo é completamente coberto por esta bola. Por Lema 1.5, escolhendo  $R$  suficientemente grande,  $\varepsilon(R)$  pode ser feito arbitrariamente próximo a 0 e por isso  $\varepsilon'$  também será arbitrariamente próximo a 0 (e, em particular,  $\varepsilon' < c' - c$ ). ■

Continuamos a provar Proposição 1.1. Por Lemas 1.5 e 1.6, um conjunto bom  $G_k$  do nível  $k$  é dominado pela união de  $V^{(k)}$  com o campo de bolas de raio  $R^{-k}(1 + \alpha)$  cujos centros formam o campo de Poisson em  $\mathbb{R}^d$  com taxa  $\varepsilon'R^{kd}$ . Já que  $c + \varepsilon' < c'$ , Proposição 1.1 é provada. ■

Enfim, pelo Lema 1.4,

$$\{\text{não há percolação em } G_0\} \Rightarrow \{\text{não há percolação em } U_n\}.$$

Por (7) e Proposição 1.1, o conjunto  $G_0$  (e por isso  $U_n$ ) está na fase subcrítica uniformemente em  $n$ . Teorema 1.1 é provado. ■

## 2 Percolação multi escalar num mosaico $k$ -simétrico

### 2.1 Definições e resultado principal

Nesta parte consideramos percolação multi escalar (fractal) num mosaico  $k$ -simétrico em dimensão  $d$ . Este modelo é uma generalização natural do modelo de Mandelbrot. Ao contrario do modelo de Mandelbrot, aqui as células de forma arbitrária em vez de cubos são permitidas e a relação de adjacência pode ser mais complicada. Vamos descrever uma das possíveis aplicações deste modelo. Considere o modelo de percolação de Poisson em  $\mathbb{R}^d$  da Seção 1.1. Um enfoque natural seria provar a ausência de percolação neste modelo usando o método de discretização (cf. [28]). Em poucas palavras, isto significa que um mosaico cúbico é colocado em  $\mathbb{R}^d$  e uma célula é selecionada se ela

contém um ponto de processo pontual de Poisson. As células adjacentes a uma célula selecionada são as que são cobertas pela bola colocada nesta célula selecionada. Então, uma conexão entre células não vizinhas aparece aqui de uma maneira natural. Embora a versão final de trabalho use outro enfoque, o método descrito aqui pode ser útil em outros problemas de percolação contínua. Outra aplicação interessante, que será descrita em seguida, é a percolação multi-escalar por elo.

Vamos agora fazer as definições necessárias.

**Definição 2.1** *Seja  $\mathcal{G}$  uma coleção enumerável dos subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^d$  com as seguintes propriedades:*

- *a união de todos os elementos (“células”) de  $\mathcal{G}$  é  $\mathbb{R}^d$ ;*
- *cada elemento de  $\mathcal{G}$  é homeomórfico a uma bola unitária em  $\mathbb{R}^d$ ;*
- *se  $G_1$  e  $G_2$  são dois elementos distintos de  $\mathcal{G}$ , então*

$$(G_1 \setminus \partial G_1) \cap (G_2 \setminus \partial G_2) = \emptyset,$$

*isto é, as células diferentes podem apenas se “tocar”.*

- *existe uma partição  $\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_k$ , tal que para cada par  $G_1, G_2 \in \mathcal{A}_i$  existe  $a \in \mathbb{R}^d$  e um operador unitário  $U$  tal que a transformação  $x \mapsto Ux + a$  é um automorfismo de  $\mathcal{G}$  que transforma  $G_1$  em  $G_2$  e preserva a coleção  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  para qualquer  $i = 1, \dots, k$ . Neste caso dizemos que  $\mathcal{G}$  tem  $k$  tipos de células, e se  $G \in \mathcal{A}_i$ , então dizemos que  $G$  é do tipo  $i$ . Note que duas células do mesmo tipo são congruentes.*

Tal  $\mathcal{G}$  é chamado *mosaico*.

Fixa algum  $R > 1$  e considere reescalonamentos de  $\mathcal{G}$ :  $\mathcal{G}_m = R^{-m}\mathcal{G}$ ,  $m = 0, 1, \dots$ . Em outras palavras,  $\mathcal{G}_m$  é obtido de  $\mathcal{G}$  aplicando uma transformação  $x \mapsto R^{-m}x$ . Chamamos  $\mathcal{G}_m$  *mosaico do nível  $m$* .

Considere uma relação de adjacência entre as células de  $\mathcal{G}$  que satisfaz a seguinte condição:

*Condition A:*

- a relação de adjacência é invariante por translação, isto é, é preservada por qualquer automorfismo do mosaico;
- existe  $L < \infty$  tal que quaisquer  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$  com  $\text{dist}(G_1, G_2) > L$  não são adjacentes, onde  $\text{dist}(G_1, G_2)$  denota uma distância usual entre dois subconjuntos de  $\mathbb{R}^d$ ;
- se  $\text{dist}(G_1, G_2) = 0$  (isto é,  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ ), então  $G_1$  e  $G_2$  são adjacentes.

Aqui é importante que não apenas vizinhos mais próximos são permitidos ser adjacentes.

A relação de adjacência entre células dos níveis arbitrários é definida de uma maneira natural. Duas células  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_m$  são adjacentes se e somente se  $R^m G_1$  e  $R^m G_2$  são adjacentes em  $\mathcal{G}$ . Duas células dos níveis diferentes  $G_1 \in \mathcal{G}_m$ ,  $G_2 \in \mathcal{G}_l$ ,  $m > l$  são adjacentes se e somente se  $G_1$  é adjacente a uma célula  $G \subset G_2$ ,  $G \in \mathcal{G}_m$ .

Definimos agora o conjunto aleatório de interesse. Suponha que temos uma coleção de probabilidades  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_k) \in [0, 1]^k$ . Cada célula do tipo  $i$

do mosaico do nível  $m$  é selecionada com probabilidade  $p_i$  independentemente de todas as outras células de todos os níveis,  $m = 0, 1, 2, \dots$

Os objetos principais do nosso estudo são os seguintes conjuntos aleatórios:

$$D_n = \{\text{a união de todas as células selecionadas dos níveis } 0, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^d$$

e

$$\begin{aligned} D &= D(\mathcal{G}, R, \vec{p}) = \cup_{n=0}^{\infty} D_n \\ &= \{\text{a união de todas as células selecionadas de todos os níveis}\}. \end{aligned}$$

Dizemos que a percolação ocorre em  $D_n$  se existe uma sequência infinita de células distintas

$$\left\{ G_i \in \bigcup_{j=1}^n \mathcal{G}_j, G_i \text{ é selecionada, } G_i \text{ e } G_{i+1} \text{ são adjacentes} \right\}_{i=0}^{\infty}.$$

Definimos agora a percolação em  $D$ . Seja  $\omega$  uma configuração das células selecionadas (de todos os níveis). Para  $x \in \mathbb{R}^d$  definimos uma variável aleatória  $m_x$  por

$$m_x = \min\{m : \text{existe } G \in \mathcal{G}_m \text{ tal que } G \text{ é selecionada e } x \in G\}$$

e denotamos por  $G(x)$  uma célula selecionada de  $\mathcal{G}_{m_x}$  que contém  $x$  (se duas ou mais células selecionadas de  $\mathcal{G}_{m_x}$  contém  $x$ , denotamos por  $G(x)$  qualquer uma delas). Note que  $m_x < \infty$  para Lebesgue-quase todos  $x$  quase certamente. Suponha que  $m_x < \infty$ , e, conseqüentemente,  $G(x)$  existe. O conjunto dos pontos conexos diretamente com  $x$  é

$$A_x(\omega) = G(x) \cup \{y \in \mathbb{R}^d : G(y) \text{ existe e } G(y) \text{ é adjacente a } G(x)\}.$$

É fácil ver que  $y \in A_x(\omega)$  se e somente se  $x \in A_y(\omega)$ .

**Definição 2.2** Para dado  $\omega$  dizemos que a percolação ocorre em  $D$  se existe uma sequência

$$\{x_i : G(x_i) \text{ existe e } x_{i+1} \in A_{x_i}(\omega)\}_{i=0}^{\infty}$$

que não é contida em nenhuma caixa finita.

O modelo de Mandelbrot é um caso particular deste modelo.

Para formular o teorema principal definimos o grafo  $\Gamma(\mathcal{G}) = (V(\mathcal{G}), E(\mathcal{G}))$  correspondente a  $\mathcal{G}$ , onde  $V(\mathcal{G})$  e  $E(\mathcal{G})$  denotam os conjuntos de vértices e elos de  $\Gamma(\mathcal{G})$  respectivamente. Isto é feito de uma maneira natural: os vértices de  $\Gamma(\mathcal{G})$  correspondem às células de  $\mathcal{G}$ , dois vértices são conexos por um elo se e somente se as células correspondentes são adjacentes. Note que se  $\mathcal{G}$  tem  $k$  tipos de células, então  $\Gamma(\mathcal{G})$  tem  $k$  tipos de vértices, isto é, existe uma partição  $V(\mathcal{G}) = V_1 \cup \dots \cup V_k$  tal que para cada par  $v, v' \in V_i$  existe um automorfismo de  $V(\mathcal{G})$  que leva  $v$  a  $v'$  e preserve os conjuntos  $V_1, \dots, V_k$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Cada vértice do tipo  $i$  é declarado aberto (respectivamente fechado) com probabilidade  $p_i$  (respectivamente  $1 - p_i$ ) e consideramos a percolação por vértices abertos (percolação por sítio) em  $\Gamma(\mathcal{G})$ . Para fixo  $\vec{p}$  seja  $\theta(\vec{p})$  a probabilidade de que um vértice fixo de  $V(\mathcal{G})$  pertence a um aglomerado infinito e  $H = \{\vec{p} : \theta(\vec{p}) = 0\}$ . Seja  $\overset{\circ}{H} = H \setminus \partial H$  o interior de  $H$ . Denotamos ainda  $\vec{p}_\varepsilon = (p_1 + \varepsilon, \dots, p_k + \varepsilon)$ . O nosso resultado principal é o seguinte

**Teorema 2.1** *Suponha que  $\vec{p}$  é tal que  $\vec{p}_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}$  para algum  $\varepsilon > 0$ . Então existe  $R_0 = R_0(\vec{p})$  tal que para qualquer  $R \geq R_0$  não há percolação no conjunto  $D$ .*

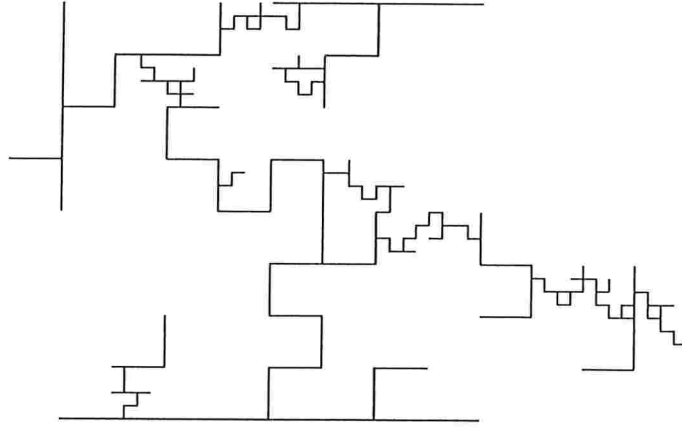


Figura 4: Um componente conexo no modelo de percolação multi escalar por elo,  $R = 4$

Note que embora o conjunto  $\mathbb{R}^d \setminus D$  tenha a medida de Lebesgue 0, não há percolação no conjunto  $D$ . Como o modelo de Mandelbrot é coberto pelo formalismo presente, Teorema 2.1 é de fato uma generalização do Teorema 2 de Orzechowski [29].

## 2.2 Exemplo: percolação multi escalar por elo

Percolação multi escalar por elo é definida da seguinte maneira. Fixado  $R \in \mathbb{N}$ , consideramos reescalamentos de reticulado  $\mathbb{Z}^d$ :  $\mathcal{Z}_m = R^{-m}\mathbb{Z}^d$ ,  $m = 0, 1, \dots$ . Chamamos  $\mathcal{Z}_m$  reticulado do nível  $m$ . Cada elo de  $\mathcal{Z}_m$  é aberto com probabilidade  $p > 0$ , independente de todos os outros elos de todos os níveis. Denotamos o elo entre vizinhos mais próximos  $x$  e  $y$  por  $\langle x, y \rangle$  (identificamos ele com o segmento fechado em  $\mathbb{R}^d$ ). Seja

$$D^{(m)} = \cup\{\langle x, y \rangle \in \mathcal{Z}_m : \langle x, y \rangle \text{ é aberto}\} \subset \mathbb{R}^d \text{ e}$$



$$D = \bigcup_{m=0}^{\infty} D^{(m)} \subset \mathbb{R}^d.$$

Dizemos que no modelo de percolação fractal por elo a percolação ocorre se quase certamente  $D$  contém um componente conexo infinito (veja Fig. 4). Seja  $p_{elo}$  a probabilidade crítica para o modelo de percolação por elo comum em  $\mathbb{Z}^d$  (isto é, em  $\mathcal{Z}_0$ ).

Podemos associar a percolação por elo comum em  $\mathbb{Z}^d$  à percolação no seguinte mosaico  $\mathcal{G}$  (veja Fig. 5). As células brancas (hexagonais) são selecionadas com probabilidade  $p_1 := p$ , e as células sombreadas são selecionadas com probabilidade  $p_2 := 0$ . Os reescalamentos de  $\mathbb{Z}^d$  correspondem aos reescalamentos de  $\mathcal{G}$ . É fácil ver que a percolação multi-escalar em reescalamentos de  $\mathcal{G}$  domina a percolação multi-escalar por elo. Portanto temos

**Corolário 2.1** *Para qualquer  $p < p_{elo}$  existe  $R_0 = R_0(p) \in \mathbb{N}$  tal que para qualquer  $R > R_0$  não há percolação no modelo de percolação multi-escalar por elo.*

Note que o fato  $(p + \varepsilon, \varepsilon) \in \mathring{H}$  para  $p < p_{elo}$  é uma consequência de resultados de Menshikov [22, 23].

### 2.3 O esquema da demonstração

A demonstração do Teorema 2.1 é similar à do Teorema 1.2, portanto, vamos dar apenas o esquema.

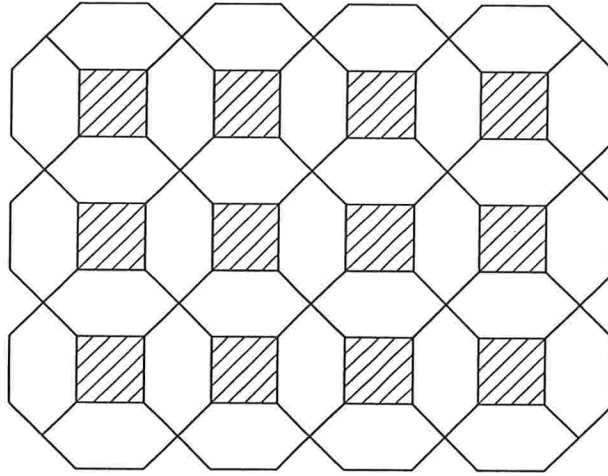


Figura 5: O mosaico correspondente a percolação por elo em  $\mathbb{Z}^2$

Para provar a ausência de percolação em  $D$ , basta provar que os conjuntos  $D_n$  estão na fase subcrítica uniformemente em  $n$ . Então, fixamos  $n$  e consideramos a percolação em  $D_n$ .

Denotamos por  $N_G$  o número mínimo de células num caminho de células do nível 1 que conecta duas células do nível 0 não adjacentes.

*Remarca.* Seja  $\rho = \inf\{\text{dist}(G_1, G_2) : G_1, G_2 \in \mathcal{G}, G_1 \cap G_2 = \emptyset\}$ . Note que  $\rho > 0$ . Então é fácil ver que  $N_G \geq \rho R/L$  (onde  $L$  é da Condição A). Isto é, escolhendo  $R$  grande, podemos fazer com que  $N_G$  também seja grande.

A próxima definição é uma adaptação da Definição 1.2.

**Definição 2.3** *Uma célula  $G$  do nível  $n$  é boa, se ela é selecionada. Para  $l < n$  uma célula  $G'$  do nível  $l$  é passável, se ela tem uma interseção com um caminho de comprimento (número de células nele) maior ou igual a  $N_G$  composto de boas células de nível  $l+1$ . Finalmente,  $G'$  é boa se ela é passável*

ou selecionada.

Analogamente a Lema 1.1 podemos provar

**Lema 2.1** *Se a percolação ocorre em  $D_n$ , então existe uma sequência infinita de células boas adjacentes do nível 0.*

Associamos três campos aleatórios

$$\eta_m^s = \{\eta_m^s(v)\}_{v \in V(\mathcal{G}_m)}, \quad \eta_m^g = \{\eta_m^g(v)\}_{v \in V(\mathcal{G}_m)} \text{ e } \xi_{\vec{r},m} = \{\xi_{\vec{r},m}(v)\}_{v \in V(\mathcal{G})}$$

ao conjunto de células do nível  $m$ , onde

$$\eta_m^s(v) = \mathbf{1}\{\text{célula correspondente a } v \text{ é passável}\},$$

$$\eta_m^g(v) = \mathbf{1}\{\text{célula correspondente a } v \text{ é boa}\},$$

e  $\xi_{\vec{r},m} \in \{0,1\}^{V(\mathcal{G}_m)}$  é o campo aleatório de Bernoulli de células do nível  $m$  com parâmetro  $\vec{r} \in [0,1]^k$ .

Fixamos  $\varepsilon > 0$  tal que  $\vec{p}_\varepsilon \in \mathring{H}$ . A demonstração do lema seguinte é similar á do Lema 1.3, mas aqui vamos usar o resultado de [18] em vez do Teorema 1.3.

**Lema 2.2** *Existe  $R_0 > 1$  tal que para qualquer  $R > R_0$  e para qualquer  $n > 1$  o campo aleatório de células boas do nível 0 pode ser dominado por campo aleatório de Bernoulli com parâmetro  $\vec{p}_\varepsilon$ .*

*Demonstração.* O campo aleatório  $\eta_n^g = \xi_{\vec{p}_\varepsilon,n}$  é dominado por  $\xi_{\vec{p}_\varepsilon,n}$ , portanto, o lema vale para nível  $n$ .

Suponha que  $\eta_{k+1}^g$  é dominado por campo de Bernoulli  $\xi_{\vec{p}_\varepsilon,k+1}$ .

O resultado de [22] implica que se  $\vec{p}_\varepsilon \in \overset{\circ}{H}$ , então existe  $\beta(\vec{p}_\varepsilon) > 0$  tal que para qualquer  $\nu$  e todos os  $x \in V(\mathcal{G})$

$$\mathbf{P}\{|W_{\xi_{\vec{p}_\varepsilon}}(x)| \geq \nu\} \leq \exp(-\beta(\vec{p}_\varepsilon)\nu), \quad (11)$$

onde  $W_{\xi_{\vec{p}_\varepsilon}}(x)$  é aglomerado de  $x$  (veja Definição 1.3). Fixamos  $G \in \mathcal{G}_k$ . Usando (11) e a suposição de indução (isto é, que o campo  $\eta_{k+1}^g$  é dominado por campo de Bernoulli  $\xi_{\vec{p}_\varepsilon, k+1}$ ), similarmente a (6), obtemos

$$\mathbf{P}\{G \text{ é passável}\} \leq N_{\mathcal{G}}^d \exp(-\beta(\vec{p}_\varepsilon)N_{\mathcal{G}}) =: \varepsilon_1(N_{\mathcal{G}}). \quad (12)$$

Note que o evento  $\{G \text{ é passável}\}$  depende somente do que acontece com um número finito de células do mesmo nível. Então existe um conjunto limitado  $\Lambda(G) \subset \mathbb{R}^d$ ,  $G \subset \Lambda(G)$ , tal que o estado de  $G$  não depende do que acontece fora de  $\Lambda(G)$ . Já que  $\varepsilon_1(N_{\mathcal{G}})$  é pequeno para  $N_{\mathcal{G}}$  grande (isto é, para  $R$  grande), o resultado de [18] implica que o campo aleatório de células passáveis do nível  $k$  pode ser dominado por campo de Bernoulli com parâmetro  $\varepsilon_2(R)$  que pode ser feito arbitrariamente pequeno escolhendo  $\varepsilon_1(N_{\mathcal{G}})$  pequeno (isto é, escolhendo  $R$  grande). Note que o Teorema 1.3 também poderia ser usado aqui.

Pega  $R$  tal que  $\varepsilon_2(R) < \varepsilon$ . Temos que  $\eta_k^s$  é dominado por campo aleatório de Bernoulli com parâmetro  $\varepsilon_2(R)$ , o campo de células selecionados do nível  $k$  é Bernoulli com parâmetro  $\vec{p}$ , então o campo  $\eta_k^g$  é dominado por  $\xi_{\vec{p}_\varepsilon, k}$ . Como a escolha de  $R$  depende somente de  $\vec{p}_\varepsilon$ , o  $R$  pode ser escolhido o mesmo para todos os níveis de células. Isto prova o Lema 2.2. ■

Combinando Lemas 2.1 e 2.2, completamos a demonstração de Teorema 2.1.

■

## 3 Modelos Booleanos de Poisson não limitados

### 3.1 Definições e resultados

Modelo Booleano de Poisson é um dos mais famosos exemplos de percolação contínua. Este modelo pode ser descrito da seguinte maneira. Primeiro, pega-se uma realização do processo pontual de Poisson com taxa  $\lambda > 0$  em  $\mathbb{R}^d$ . Depois, em cada ponto desta realização coloca-se uma bola com raio aleatório  $\rho$  independentemente de tudo. O objeto de interesse é a união de todas estas bolas. Modelos onde bolas são substituídas por objetos da forma arbitrária foram estudadas em [14, 28]. A revisão completa do tema pode ser encontrada em [20]; veja também em [3, 12, 31, 32] alguns resultados recentes.

O caso mais conhecido é quando  $\rho < \text{const}$  q.c. Quando  $\rho$  é não limitado, algumas situações “estranhas”, que contradizem a intuição de percolação discreta, se tornam possíveis. Por exemplo (cf. [14]), se  $\mathbf{E}\rho^{2d-1} < \infty$  e  $\mathbf{E}\rho^{2d} = \infty$ , então para  $\lambda$  suficientemente pequeno quase certamente não há aglomerados infinitos, enquanto o valor esperado do tamanho de aglomerado é infinito. Mesmo se  $\rho$  tem a cauda exponencial, os resultados clássicos da percolação, como, por exemplo, a coincidência dos pontos críticos, decaimento exponencial de tamanho de aglomerado na fase subcrítica etc. não são conhecidos. Em particular, a quantidade  $\lambda_\rho$  (que será definida mais tarde) pode ser diferente dos pontos críticos “clássicos”, como a taxa crítica  $\lambda_{cr}$  que separa a percolação da ausência da percolação. Portanto, Teorema 3.2 em-

baixo, que é uma generalização de um dos resultados de [14], é de interesse independente.

Agora vamos descrever o modelo sob consideração em detalhes. Consideramos o modelo Booleano de Poisson  $\mathcal{M}_0 = \llbracket \lambda, \rho \rrbracket$  (veja em [20] definições e alguns resultados gerais), onde  $\lambda > 0$  é a taxa do processo de Poisson e  $\rho > 0$  é o raio aleatório. Aqui e em seguida os parênteses duplas  $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket$  denotam o modelo Booleano de Poisson. Seja  $\mathcal{U} \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket \subset \mathbb{R}^d$  a união de todas as bolas com raio positivo neste modelo e  $\mathcal{X} \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket \subset \mathbb{R}^d$  o campo de centros destas bolas.

Construímos o modelo Booleano de Poisson multi escalar da seguinte maneira. Fixamos  $R > 1$ . O modelo do nível  $i$  é  $\mathcal{M}_i = \llbracket \lambda R^{id}, \rho R^{-i} \rrbracket$ , onde o processo pontual de Poisson e raios das bolas são independentes dos outros níveis. As bolas de  $\mathcal{M}_i$  são chamadas *bolas do nível  $i$* . Denotamos  $U^{(i)} = \mathcal{U}(\mathcal{M}_i)$ . O objeto de estudo é o conjunto aleatório  $U = \cup_{i=0}^{\infty} U^{(i)}$ . Dizemos que a percolação ocorre se quase certamente existe um caminho contínuo  $\gamma : \mathbb{R} \mapsto U$ , tal que  $\gamma$  não é contido em nenhuma caixa finita.

Denotamos

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \mathbf{P}\{\|U^{(0)}(0)\| > n\}, \text{ e} \\ \Theta(\rho) &= \{\lambda > 0 : \varphi(n) = o(n^{-d}), n \rightarrow \infty\} \subset \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

onde  $U^{(0)}(0)$  denota um componente conexo de  $U^{(0)}$  que contém 0 e  $\|U^{(0)}(0)\|$  denota o diâmetro dele.

Suponhamos que a seguinte condição é satisfeita:

*Condição B:* O conjunto  $\Theta(\rho)$  não é vazio.

Seja

$$\lambda_\rho = \{\sup \lambda : \lambda \in \Theta(\rho)\}.$$

Obviamente, a Condição B assegura que  $\lambda_\rho > 0$ .

Para  $L \geq 0$  denotamos

$$\rho^{\geq L} := \begin{cases} \rho, & \text{se } \rho \geq L, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\text{e } \rho^{<L} = \rho - \rho^{\geq L}.$$

Precisamos impor ainda a seguinte condição sobre  $\rho$ :

*Condição C:* O raio aleatório  $\rho$  satisfaz

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 1/2} \frac{R^d \hat{F}_\rho(xR)}{\hat{F}_\rho(x)} = 0, \quad (13)$$

com a convenção  $0/0 = 0$ , onde  $\hat{F}_\rho(x) = \mathbf{P}\{\rho \geq x\}$ .

Além de supor que  $\rho$  tem uma cauda que decresce suficientemente rápido, a Condição C requer também alguma regularidade de distribuição de  $\rho$ . Mas este requerimento não é muito restritivo, por exemplo, se

- existem  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  tais que

$$\exp(-\gamma_1 x) \leq \hat{F}_\rho(x) \leq \exp(-\gamma_2 x), \text{ ou}$$

- existem  $C_1, C_2 > 0, \gamma > d$  tais que

$$C_1 x^{-\gamma} \leq \hat{F}_\rho(x) \leq C_2 x^{-\gamma}, \text{ ou}$$

- $\rho$  tem a distribuição de Poisson,

então a Condição C é satisfeita. Obviamente, qualquer variável aleatória limitada também satisfaz Condição C.

O nosso resultado principal é

**Teorema 3.1** *Se as Condições B e C são satisfeitas, então para qualquer  $\lambda < \lambda_\rho$  existe  $R_0 = R_0(\lambda)$  tal que para qualquer  $R \geq R_0$  não há percolação no conjunto  $U$ .*

*Observação.* Suponha que  $\rho = 1$  q.c. Neste caso, temos o resultado sobre a coincidência de pontos críticos e decaimento exponencial de tamanho de aglomerado (cf. [28]). Portanto, a Condição B vale e  $\lambda_\rho = \lambda_{cr}$ . Como foi mencionado acima, a Condição C também vale, então, o Teorema 3.1 de fato generaliza o Teorema 1.1.

A verificação de Condição B pode ser muito complicada, já que ela envolve as propriedades do aglomerado inteiro, e não apenas da distribuição de  $\rho$ . Note que se  $\mathbf{E}\|U^{(0)}(0)\|^{d+1} < \infty$ , a desigualdade de Chebyshev implica que

$$\mathbf{P}\{\|U^{(0)}(0)\| > n\} = O(n^{-(d+1)}),$$

e portanto Condição B vale. Então, provamos o seguinte resultado.

**Teorema 3.2** *Se  $\mathbf{E}\rho^{2\alpha d} < \infty$  para algum  $\alpha \in \mathbb{N}$ , então existe  $\lambda_0 > 0$  tal que  $\mathbf{E}\|U^{(0)}(0)\|^\alpha < \infty$  para todo  $\lambda < \lambda_0$ .*

Por isso, para Condição B valer é suficiente ter  $\mathbf{E}\rho^{2d(d+1)} < \infty$ .



## 3.2 Demonstrações

### 3.2.1 Demonstração de Teorema 3.1

Denotamos  $U_n = \cup_{i=0}^n U^{(i)}$ . Seja  $S_m \subset \mathbb{R}^d$  uma esfera com raio  $m$  e centro em 0. Seguindo a Seção 1, para provar a ausência da percolação em  $U$  é suficiente provar que os conjuntos  $U_n$  estão na fase subcrítica uniformemente em  $n$ , isto é,

$$\mathbf{P}\{\text{existe um caminho de 0 até } S_m \text{ em } U_n\} < \varepsilon_{m,n}, \quad (14)$$

onde  $\varepsilon_{m,n} \rightarrow 0$  uniformemente em  $n$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Fixamos  $n$  e consideramos a percolação em  $U_n$ .

**Definição 3.1** *Dizemos que um modelo Booleano de Poisson  $[[\lambda_1, \rho_1]]$  é dominado por outro modelo Booleano de Poisson  $[[\lambda_2, \rho_2]]$  se é possível acoplá-los de tal maneira que  $\mathcal{U}[[\lambda_1, \rho_1]] \subset \mathcal{U}[[\lambda_2, \rho_2]]$ .*

Precisamos do seguinte

**Lema 3.1** *Sejam  $[[\lambda_1, \rho_1]]$  e  $[[\lambda_2, \rho_2]]$  dois modelos Booleanos de Poisson. Se  $\rho_1, \rho_2$  são tais que*

$$\lambda_1 \hat{F}_{\rho_1}(x) \leq \lambda_2 \hat{F}_{\rho_2}(x) \quad (15)$$

*para todos  $x > 0$ , então  $[[\lambda_1, \rho_1]]$  é dominado por  $[[\lambda_2, \rho_2]]$ .*

*Prova.* Note que é possível fazer  $\lambda_1 = \lambda_2$  aumentando o menor dos lambdas e adicionando uma massa positiva em 0 ao respectivo  $\rho$ . É fácil ver que isso não afeta a validade de (15) (se  $\lambda$  é aumentado até  $\lambda^*$ , então para  $x > 0$   $\hat{F}(x)$

é substituído por  $\hat{F}^*(x) = \frac{\lambda^*}{\lambda} \hat{F}(x)$ , portanto  $\lambda \hat{F}(x) = \lambda^* \hat{F}^*(x)$ . Então, sem perder a generalidade, podemos supor que  $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda^*$  e

$$\hat{F}_{\rho_1}(x) \leq \hat{F}_{\rho_2}(x) \quad (16)$$

para todo  $x > 0$ . Tendo uma configuração  $x_1, x_2, \dots$  do processo pontual de Poisson com taxa  $\lambda^*$ , consideramos uma sequência de variáveis aleatórias independentes  $\zeta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , uniformemente distribuídas em  $[0, 1]$ . Seja  $F_{\rho_j} = 1 - \hat{F}_{\rho_j}$  a função de distribuição de  $\rho_j$ ,  $j = 1, 2$ . Definimos o acoplamento de dois modelos por  $\rho_j(i) = F_{\rho_j}^{-1}(\zeta_i)$ , onde  $\rho_j(i)$  é a realização de variável aleatória  $\rho_j$  no ponto  $x_i$ ,  $j = 1, 2$ . Agora, se  $\rho_1(i) > \rho_2(i)$ , então existe  $y > 0$  tal que  $F_{\rho_1}^{-1}(\zeta_i) > y > F_{\rho_2}^{-1}(\zeta_i)$ , isto é,  $F_{\rho_1}(y) < \zeta_i < F_{\rho_2}(y)$ , o que contradiz (16). Portanto, o Lema 3.1 é provado. ■

Note que sem perder a generalidade podemos supor que existe  $a > 0$  tal que  $\rho \in \{0\} \cup [a, +\infty)$  q.c. Para mostrar isto, primeiro vamos provar que  $[[\lambda, \rho]]$  é dominado por

$$\left[ \lambda \left( 1 + \frac{\mathbf{P}\{\rho < a\}}{\mathbf{P}\{\rho \geq a\}} \right), \rho^{\geq a} \right].$$

De fato, pelo Lema 3.1 é suficiente provar que

$$\lambda \hat{F}_{\rho}(x) \leq \lambda \left( 1 + \frac{\mathbf{P}\{\rho < a\}}{\mathbf{P}\{\rho \geq a\}} \right) \hat{F}_{\rho^{\geq a}}(x) \quad (17)$$

para todo  $x > 0$ . Como

$$\hat{F}_{\rho^{\geq a}}(x) = \begin{cases} \hat{F}_{\rho}(x), & \text{se } x \geq a, \\ \hat{F}_{\rho}(a), & \text{se } 0 < x < a, \end{cases} \quad (18)$$

a desigualdade (17) trivialmente vale para  $x \geq a$ . Para  $0 < x < a$  temos  $\mathbf{P}\{\rho \geq a\} \hat{F}_\rho(x) \leq \hat{F}_\rho(a)$ , o que é equivalente a

$$\lambda \hat{F}_\rho(x) \leq \lambda \left(1 + \frac{\mathbf{P}\{\rho < a\}}{\mathbf{P}\{\rho \geq a\}}\right) \hat{F}_\rho(a),$$

e isto prova (17). Agora, escolhendo  $a$  pequeno, podemos fazer com que  $\mathbf{P}\{\rho < a\}$  seja suficientemente pequeno para assegurar

$$\lambda \left(1 + \frac{\mathbf{P}\{\rho < a\}}{\mathbf{P}\{\rho \geq a\}}\right) \in \Theta(\rho) \subset \Theta(\rho^{\geq a}).$$

Portanto, podemos considerar  $\rho^{\geq a}$  em vez de  $\rho$ ; isto quer dizer que os raios de todas as bolas não triviais em  $[[\lambda, \rho]]$  são maiores ou iguais do que  $a$ .

Escolhemos  $\varepsilon > 0, 0 < \alpha < 1$  tal que  $\lambda + \varepsilon \in \Theta((1 + \alpha)\rho)$  (por um argumento de reescalonamento isto é equivalente a  $(\lambda + \varepsilon)(1 + \alpha)^d \in \Theta(\rho)$ ) e fixamos  $\alpha_0 < \alpha, \varepsilon_0 < \varepsilon$ .

**Lema 3.2** *Se a Condição C é satisfeita, então existe  $R_{\varepsilon_0, \alpha_0}$  tal que para qualquer  $R > R_{\varepsilon_0, \alpha_0}$  a união de dois modelos Booleanos de Poisson independentes  $\mathcal{M}_i = [[\lambda R^{id}, \rho R^{-i}]]$  e  $[[(\lambda + \varepsilon_0)R^{(i+1)d}, ((1 + \alpha_0)\rho)^{\geq R} R^{-(i+1)}]]$  é dominada por  $[[(\lambda + \varepsilon_0)R^{id}, (1 + \alpha_0)\rho R^{-i}]]$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ .*

*Demonstração.* A Condição C implica que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x > 0} \frac{R^d \hat{F}_{\rho^{\geq R/2}}(xR)}{\hat{F}_\rho(x)} = 0. \quad (19)$$

De fato, já que

$$\hat{F}_{\rho^{\geq R/2}}(xR) = \begin{cases} \hat{F}_\rho(xR), & \text{se } x \geq 1/2, \\ \hat{F}_\rho(R/2), & \text{se } 0 < x < 1/2, \end{cases} \quad (20)$$

temos

$$\sup_{x>0} \frac{R^d \hat{F}_{\rho \geq R/2}(xR)}{\hat{F}_\rho(x)} = \sup_{x \geq 1/2} \frac{R^d \hat{F}_\rho(xR)}{\hat{F}_\rho(x)}.$$

Fixado  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , denotamos

$$\eta_0 := ((1 + \alpha_0)\rho)^{\geq R} \text{ e } \eta_1 := (1 + \alpha_0)\rho.$$

Note que o modelo

$$\llbracket (\lambda + \varepsilon_0)R^{id}, (1 + \alpha_0)\rho R^{-i} \rrbracket$$

pode ser representado como união de dois modelos Booleanos de Poisson:

$$\llbracket \lambda R^{id}, (1 + \alpha_0)\rho R^{-i} \rrbracket \text{ e } \llbracket \varepsilon_0 R^{id}, (1 + \alpha_0)\rho R^{-i} \rrbracket.$$

Obviamente,  $\mathcal{M}_i$  é dominado pelo primeiro, então só resta provar que

$$\llbracket (\lambda + \varepsilon_0)R^{(i+1)d}, ((1 + \alpha_0)\rho)^{\geq R} R^{-(i+1)} \rrbracket$$

é dominado por

$$\llbracket \varepsilon_0 R^{id}, (1 + \alpha_0)\rho R^{-i} \rrbracket.$$

Pelo Lema 3.1 basta provar que para todo  $R$  suficientemente grande

$$(\lambda + \varepsilon_0)R^{(i+1)d} \hat{F}_{\eta_0 R^{-(i+1)}}(x) \leq \varepsilon_0 R^{id} \hat{F}_{\eta_1 R^{-i}}(x),$$

para todos  $x > 0$ . Para isto, é suficiente provar que

$$\frac{R^d \hat{F}_{\eta_0 R^{-(i+1)}}(x)}{\hat{F}_{\eta_1 R^{-i}}(x)} \rightarrow 0$$

uniformemente em  $x$ , quando  $R \rightarrow \infty$ . Devido a (19), temos

$$\frac{R^d \hat{F}_{\eta_0 R^{-(i+1)}}(x)}{\hat{F}_{\eta_1 R^{-i}}(x)} = \frac{R^d \hat{F}_{\eta_0}(R^{i+1}x)}{\hat{F}_{\eta_1}(R^i x)} \rightarrow 0$$

uniformemente em  $x$ , quando  $R \rightarrow \infty$ . Aqui usamos o fato que

$$\hat{F}_{\rho \geq R/2} \geq \hat{F}_{\rho \geq R/(1+\alpha_0)} = \hat{F}_{((1+\alpha_0)\rho) \geq R}$$

se  $\alpha_0 < 1$ . O Lema 3.2 está provado. ■

Seja  $R > R_{\varepsilon_0, \alpha_0}$ . Primeiro, dividimos  $[[\lambda R^{nd}, \rho R^{-n}]]$  em dois modelos independentes  $[[\lambda R^{nd}, \rho^{<R} R^{-n}]]$  e  $[[\lambda R^{nd}, \rho^{\geq R} R^{-n}]]$ . Aplicamos o Lema 3.2 a

$$[[\lambda R^{(n-1)d}, \rho R^{-(n-1)}]] \cup [[\lambda R^{nd}, \rho^{\geq R} R^{-n}]]$$

e obtemos que esta união é dominada por

$$[[(\lambda + \varepsilon_0) R^{(n-1)d}, (1 + \alpha_0) \rho R^{-(n-1)}]].$$

Portanto, o modelo

$$[[\lambda R^{(n-1)d}, \rho R^{-(n-1)}]] \cup [[\lambda R^{nd}, \rho R^{-n}]]$$

é dominado por

$$[[(\lambda + \varepsilon_0) R^{(n-1)d}, (1 + \alpha_0) \rho R^{-(n-1)}]] \cup [[\lambda R^{nd}, \rho^{<R} R^{-n}]].$$

Obviamente,  $[[\lambda R^{nd}, \rho^{<R} R^{-n}]]$  é dominado por

$$[[(\lambda + \varepsilon_0) R^{nd}, ((1 + \alpha_0)\rho)^{<R} R^{-n}]].$$

Da mesma maneira, obtemos que

$$[[\lambda R^{(n-2)d}, \rho R^{-(n-2)}]] \cup [[(\lambda + \varepsilon_0) R^{(n-1)d}, (1 + \alpha_0) \rho R^{-(n-1)}]]$$

é dominado por

$$[[(\lambda + \varepsilon_0) R^{(n-2)d}, (1 + \alpha_0) \rho R^{-(n-2)}]] \cup [[(\lambda + \varepsilon_0) R^{(n-1)d}, ((1 + \alpha_0)\rho)^{<R} R^{-(n-1)}]],$$

e assim por diante. No final obtemos que a união de modelos Booleanos de Poisson independentes

$$\bigcup_{i=0}^n \mathcal{M}_i = \bigcup_{i=0}^n \llbracket \lambda R^{id}, \rho R^{-i} \rrbracket$$

é dominada por

$$\llbracket (\lambda + \varepsilon_0), (1 + \alpha_0)\rho \rrbracket \cup \left( \bigcup_{i=1}^n \llbracket (\lambda + \varepsilon_0)R^{id}, ((1 + \alpha_0)\rho)^{<R} R^{-i} \rrbracket \right),$$

onde todos os  $n+1$  modelos Booleanos de Poisson também são independentes.

Abreviamos

$$\begin{aligned} D^{(i)} &:= \mathcal{U} \llbracket (\lambda + \varepsilon_0)R^{id}, ((1 + \alpha_0)\rho)^{<R} R^{-i} \rrbracket, \\ \mathcal{X}_i &:= \mathcal{X} \llbracket (\lambda + \varepsilon_0)R^{id}, ((1 + \alpha_0)\rho)^{<R} R^{-i} \rrbracket, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n$ , e

$$\begin{aligned} D^{(0)} &:= \mathcal{U} \llbracket (\lambda + \varepsilon_0), (1 + \alpha_0)\rho \rrbracket, \\ \mathcal{X}_0 &:= \mathcal{X} \llbracket (\lambda + \varepsilon_0), (1 + \alpha_0)\rho \rrbracket. \end{aligned}$$

Lembre que  $\mathcal{X}[\cdot, \cdot]$  denota o conjunto dos pontos do processo pontual de Poisson que carregam uma bola com raio positivo no respectivo modelo.

Tomemos  $\beta > 0$  tal que  $(1 + \alpha_0)(1 + \beta) < 1 + \alpha$ . Portanto

$$\lambda + \varepsilon \in \Theta((1 + \alpha_0)(1 + \beta)\rho). \quad (21)$$

Denotamos

$$W^{(i)} := \mathcal{U} \llbracket (\lambda + \varepsilon)R^{id}, (1 + \beta)((1 + \alpha_0)\rho)^{<R} R^{-i} \rrbracket,$$

$i = 1, \dots, n$  e

$$W^{(0)} := \mathcal{U}[(\lambda + \varepsilon), (1 + \beta)(1 + \alpha_0)\rho].$$

Sejam ainda

$$V^{(i)} := \mathcal{U}[(\lambda + \varepsilon_0)R^{id}, (1 + \beta)((1 + \alpha_0)\rho)^{<R} R^{-i}],$$

$i = 1, \dots, n$  e

$$V^{(0)} := \mathcal{U}[(\lambda + \varepsilon_0), (1 + \beta)(1 + \alpha_0)\rho],$$

onde  $V^{(j)}$  usa a mesma realização do processo pontual de Poisson  $\mathcal{X}_j$  que  $D^{(j)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Note que  $V_j$  é de fato  $D_j$  expandido por um fator  $(1 + \beta)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , e os  $V_j$ -s são independentes.

Para  $i = 0, \dots, n - 1$  consideramos a partição do espaço em cubos com lado  $aR^{-i}/\sqrt{d}$ , que são chamados cubos do nível  $i$ . O tamanho dos cubos é escolhido de tal maneira que se há um centro de uma bola de  $D^{(i)}$  dentro de cubo, então ele é completamente coberto pela bola.

Definimos os conjuntos passáveis e bons analogamente à Definição 1.4.

**Definição 3.2** *O conjunto bom do nível  $n$  é definido por  $G_n := D^{(n)}$ . Para  $i < n$ , dizemos que um cubo do nível  $i$  é passável, se ele tem uma interseção com algum componente conexo de diâmetro pelo menos  $2a\beta R^{-i}$  de conjunto bom do nível  $(i + 1)$ . O conjunto passável  $P_i$  é definido como união de todos os cubos passáveis do nível  $i$ . O conjunto bom  $G_i$  do nível  $i$  é  $G_i := P_i \cup V^{(i)}$ .*

**Lema 3.3** *Se há percolação em  $U_n$ , então há percolação também em  $G_0$ .*

*Demonstração.* Note que  $U_n$  é dominado por  $D^{(n)} \cup \dots \cup D^{(0)}$ . Substituindo  $U^{(\cdot)}$  por  $D^{(\cdot)}$  e o valor  $2\alpha R^{-k}$  por  $2a\beta R^{-k}$  na demonstração do Lema 1.4, provamos o Lema 3.3. ■

**Proposição 3.1** *Se para fixados  $\varepsilon_0, \alpha_0, \beta$  o parâmetro de escala  $R$  for suficientemente grande, então  $G_i$  pode ser dominado por  $W^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, n$ .*

*Demonstração.* A demonstração é por indução. Pela Definição 3.2 o conjunto  $G_n = D^{(n)}$  pode ser dominado por  $W^{(n)}$ . Suponha que a proposição vale para o nível  $k + 1$ . Vamos verificar para o nível  $k$ .

Fixamos um cubo  $K$  do nível  $k$ . Denotamos  $\delta = aR^{-(k+1)}/\sqrt{d}$ . Seja

$$K_\delta = \{x \in R^d : \text{dist}(x, K) \leq \delta\}.$$

Escolhemos uma  $\delta$ -rede  $N^{(\delta)}(K_\delta)$  em  $K_\delta$ . Note que é possível escolher esta  $\delta$ -rede de tal maneira que  $\text{card}(N^{(\delta)}(K_\delta))$  é proporcional a  $R^d$ , onde  $\text{card}(A)$  denota a cardinalidade de conjunto  $A$ . Temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{K \text{ é passável}\} \\ & \leq \mathbf{P}\{\text{existe } x \in N^{(\delta)}(K_\delta) \text{ que pertence a um componente conexo} \\ & \quad \text{com diâmetro pelo menos } 2a\beta R^{-k} \text{ de } G_{k+1}\} \quad (22) \\ & \leq \text{card}(N^{(\delta)}(K_\delta)) \mathbf{P}\{\|U^{(k+1)}(0)\| > 2a\beta R^{-k}\} \\ & = \text{card}(N^{(\delta)}(K_\delta)) \mathbf{P}\{\|U^{(0)}(0)\| > 2a\beta R\} \\ & \leq cR^d \varphi(R) =: \psi(R) = R^d o(R^{-d}) = o(1), \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Já que



- estamos interessados (pela definição dos cubos passáveis) em um componente conexo de  $G_{k+1}$  com diâmetro pelo menos  $2a\beta R^{-k}$  e
- as bolas de  $V^{(k+1)}$  tem raio menor do que  $(1 + \beta)R^{-k}$ ,

denotando  $b := 2 \max\{\lceil 2\beta\sqrt{d} \rceil, \lceil 2a^{-1}(1 + \beta)\sqrt{d} \rceil\}$  (lembre que o elo de cubo do nível  $k$  é igual a  $aR^{-k}/\sqrt{d}$ ), onde  $\lceil x \rceil$  denota o menor número inteiro maior ou igual a  $x$ , temos que se dois cubos do nível  $k$  tem pelo menos  $b$  cubos entre eles, então estes dois cubos são passáveis ou não independentemente. Portanto, quando  $\psi(R)$  é suficientemente pequeno, usando o resultado de [18] obtemos que o campo aleatório de cubos passáveis do nível  $k$  pode ser dominado por um campo aleatório de Bernoulli com parâmetro  $\sigma(R)$ , e este parâmetro pode ser feito arbitrariamente próximo a 0 escolhendo  $R$  suficientemente grande. A escolha de  $R$  depende somente de  $d, \lambda, \varepsilon_0, \alpha_0$ , mas não depende de  $n$ .

Agora, por sua vez, o campo aleatório de Bernoulli com parâmetro  $\sigma(R)$  de cubos do nível  $k$  pode ser dominado por campo de bolas com raio  $aR^{-k}$ , centros das quais formam o campo de Poisson em  $\mathbb{R}^d$  com taxa  $\varepsilon'R^{kd}$ , e  $\varepsilon'$  pode ser feito arbitrariamente próximo a 0 escolhendo  $R$  suficientemente grande (veja a demonstração do Lema 1.6 para mais detalhes). Tome  $R$  tal que  $\varepsilon' < \varepsilon - \varepsilon_0$ .

O conjunto bom  $G_k$  do nível  $k$  é dominado por

$$V^{(k)} \cup \llbracket \varepsilon'R^{kd}, aR^{-k} \rrbracket.$$

Já que  $\varepsilon' < \varepsilon - \varepsilon_0$ , temos que

$$V^{(k)} \cup \llbracket \varepsilon' R^{kd}, aR^{-k} \rrbracket$$

é dominado por  $W^{(k)}$ . Isto completa a demonstração da Proposição 3.1. ■

Pelo Lema 3.3, a ausência de percolação em  $G_0$  implica na ausência de percolação em  $U_n$ . Pela escolha de  $\varepsilon, \alpha, \alpha_0$  e Proposição 1.1,  $G_0$  está na fase subcrítica e, portanto,  $U_n$  também está na fase subcrítica uniformemente em  $n$ . Isto prova o Teorema 3.1. ■

### 3.2.2 Demonstração de Teorema 3.2

Primeiro notamos que é suficiente provar este teorema apenas para o caso quando  $\rho$  assume somente valores inteiros positivos. De fato, se  $\rho$  assume não apenas estes valores, considere o modelo em que  $\rho$  é substituído por  $\rho_{int} := \lceil \rho \rceil$ . Como  $\rho_{int} \leq \rho + 1$ , temos que se  $\mathbf{E}\rho^{2\alpha d} < \infty$ , então  $\mathbf{E}\rho_{int}^{2\alpha d} < \infty$ . Já que  $\rho \leq \rho_{int}$ , um simples argumento de acoplamento pode ser usado.

Para  $j = 1, 2, \dots$  denotamos  $p_j = \mathbf{P}\{\rho = j\}$ . Para uma bola fixada com raio  $i$ , o número de bolas com raio  $j$  que interceptam ela (denotamos este número por  $\eta^{(i,j)}$ ) tem a distribuição de Poisson com média

$$\psi^{(i,j)} := \lambda \pi_d (i + j)^d p_j$$

(cf. [14]), onde  $\pi_d$  é o volume de uma bola unitária em dimensão  $d$ . Agora, seguindo [14], vamos construir o processo de ramificação com vários tipos de partículas  $\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots$ , que domina o processo de percolação. Aqui

$$\mathcal{Z}_n = (Z_n^1, Z_n^2, Z_n^3, \dots),$$

onde  $Z_n^j$  é o número de partículas do tipo  $j$  (isto é, bolas com raio  $j$ ) na  $n$ -ésima geração, e  $Z_0 = e_i$ , onde  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots)$ , com 1 na  $i$ -ésimo lugar. A dinâmica do processo é descrita da seguinte maneira: cada partícula do tipo  $i$  é substituída por  $\eta^{(i,j)}$  partículas do tipo  $j$  independentemente de todas as outras partículas, e as variáveis aleatórias  $\eta^{(i,j)}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  são *independentes* e têm a distribuição de Poisson com média  $\psi^{(i,j)}$ .

Como em [14], temos

$$\mu_{i,j} := \mathbf{E}\eta^{(i,j)} = \psi^{(i,j)} \leq \tilde{C} \lambda i^d j^d p_j \quad (23)$$

para  $\tilde{C} = 2^d \pi_d$ . Precisamos do seguinte fato (veja [13], Seção 1.3): se  $\eta$  têm a distribuição de Poisson com média  $\psi$ , então

$$\mathbf{E}\eta^k = \sum_{j=1}^k B_{j,k} \psi^j \quad (24)$$

onde  $B_{j,k}$  são constantes positivas,  $j = 1, \dots, k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Se  $\lambda \leq 1$ , usando (23) e (24) obtemos que

$$\mathbf{E}(\eta^{(i,j)})^k \leq C \lambda i^{kd} j^{kd} p_j \quad (25)$$

para uma constante positiva  $C = C(\alpha)$  para todos  $k \leq \alpha$ .

Vamos introduzir algumas notações. Durante a demonstração deste teorema, frequentemente precisaremos lidar com coleções de números inteiros positivos, onde estes números não necessariamente são distintos. É natural então agrupar os números iguais juntos, assim representando a coleção como

$$(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h) = (t_1, w_1; \dots; t_h, w_h; h) \in \mathbb{N}^{2h+1},$$

onde todos  $t_i$ -s são distintos,  $w_i$  pode ser visto como o número de repetições de  $t_i$  na coleção inicial, e  $h$  é o número de elementos distintos na coleção. Agora, dada a coleção  $(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h)$ , denotamos

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h) &= t_1^{w_1 d} \cdots t_h^{w_h d}, \\ \Phi(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h) &= t_1^{w_1 d} \cdots t_h^{w_h d} p_{t_1} \cdots p_{t_h}, \\ Z_i(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h) &= (Z_i^{t_1})^{w_1} \cdots (Z_i^{t_h})^{w_h}, \\ \mu_{i,(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h)}^{(n)} &= \mathbf{E}(Z_n(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h) \mid \mathcal{Z}_0 = e_i).\end{aligned}$$

Vamos escrever  $(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \beta)$  quando é preciso manter a lembrança do número total de elementos  $\beta = \sum_{i=1}^h w_i$ .

Seja  $\mathcal{F}_m$  uma  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_m$ .

**Lema 3.4** *Para  $\lambda$  suficientemente pequeno temos*

$$\mu_{i,(\mathbf{l}, \mathbf{k}, \gamma; \alpha)}^{(n)} \leq K^{n-1} (C\lambda)^{n_i \alpha d} \Phi(\mathbf{l}, \mathbf{k}, \gamma; \alpha), \quad (26)$$

onde  $C > 0$  e  $K > 0$  dependem somente de  $\alpha$ .

*Demonstração.* Provamos este lema por indução. Para  $n = 1$ , usando (25) e a independência de  $\eta^{(i,j)}$  para  $j$  diferentes, é fácil ver que

$$\mu_{i,(\mathbf{l}, \mathbf{k}, \gamma; \alpha)}^{(1)} \leq C \lambda i^{\alpha d} \Phi(\mathbf{l}, \mathbf{k}, \gamma; \alpha) \quad (27)$$

se  $C\lambda \leq 1$ .

Suponha que o lema vale para  $n - 1$ . Temos

$$\mu_{i,(\mathbf{l}, \mathbf{k}, \gamma; \alpha)}^{(n)} = \mathbf{E} \left( \mathbf{E}((Z_n^{l_1})^{k_1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \cdots \mathbf{E}((Z_n^{l_\gamma})^{k_\gamma} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \right) \quad (28)$$

$$= \mathbf{E}(A_1 \cdots A_\gamma),$$

onde  $A_m = \mathbf{E}((Z_n^{l_m})^{k_m} \mid \mathcal{F}_{n-1})$ ,  $m = 1, \dots, \gamma$ .

Vamos estimar  $A_m$ .

$$\begin{aligned} A_m &= \mathbf{E}(Z_n^{l_m})^{k_m} \mid \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbf{E}(\eta_1^{(1,l_m)} + \cdots + \eta_{Z_{n-1}^1}^{(1,l_m)} + \eta_1^{(2,l_m)} + \cdots + \eta_{Z_{n-1}^2}^{(2,l_m)} + \cdots)^{k_m} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{s_m=1}^{k_m} \sum_{(\mathbf{t}_m, \mathbf{u}_m, s_m; k_m)} \sum_{\substack{\mathbf{j}_1=(j_{1,\beta}; \beta=1, \dots, u_{m,1}), \dots \\ \mathbf{j}_{s_m}=(j_{s_m,\beta}; \beta=1, \dots, u_{m,s_m})}} \mathbf{E} \prod_{i=1}^{s_m} \prod_{\beta=1}^{u_{m,i}} \eta_{j_{i,\beta}}^{(t_{m,i}, l_m)} \\ &= \sum_{s_m=1}^{k_m} \sum_{(\mathbf{t}_m, \mathbf{u}_m, s_m; k_m)} \sum_{\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_{s_m}} \prod_{i=1}^{s_m} \mathbf{E} \prod_{\beta=1}^{u_{m,i}} \eta_{j_{i,\beta}}^{(t_{m,i}, l_m)} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\leq C \lambda l_m^{k_m d} p_{l_m} \sum_{s_m=1}^{k_m} \sum_{(\mathbf{t}_m, \mathbf{u}_m, s_m; k_m)} \varphi(\mathbf{t}, \mathbf{u}, s_m; k_m) Z_{n-1}(\mathbf{t}, \mathbf{u}, s_m; k_m).$$

A última desigualdade vale porque

$$\mathbf{E}(\eta_{j_{i,1}}^{(t_{i,1}, l_m)} \cdots \eta_{j_{i,u_{m,i}}}^{(t_{i,u_{m,i}}, l_m)}) \leq C \lambda t_i^{u_{m,i} d} l_m^{u_{m,i} d} p_{l_m}$$

(já que  $\eta_{j_{i,\beta}}^{(t_{i,\beta}, l_m)}$  são as variáveis aleatórias de Poisson com média

$$\lambda \pi_d (t_{m,i} + l_m)^d \leq 2^d \pi_d \lambda t_{m,i}^d l_m^d$$

e possíveis repetições), e o número de termos na terceira soma em (30) é  $Z_{n-1}(\mathbf{t}, \mathbf{u}, s_m; k_m)$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(A_1 \cdots A_\gamma) &\leq (C \lambda)^\gamma \Phi(\mathbf{l}, \mathbf{k}, \gamma) \\ &\quad \times \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, \gamma\} \\ 1 \leq s_j \leq k_j}} \sum_{\substack{(\mathbf{t}_m, \mathbf{u}_m, s_m) \\ 1 \leq m \leq \gamma}} \varphi(\mathbf{t}_1, \mathbf{u}_1, s_1) \cdots \varphi(\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{u}_\gamma, s_\gamma) \end{aligned}$$

$$\times \mathbf{E}(Z_{n-1}(\mathbf{t}_1, \mathbf{u}_1, s_1) \cdots Z_{n-1}(\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{u}_\gamma, s_\gamma)) \quad (31)$$

$$\leq C\lambda\Phi(\mathbf{l}, \mathbf{k}, \gamma)M(\alpha) \sum_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha)} \mu_{i, (\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha)}^{(n-1)} \varphi(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha) \quad (32)$$

$$\leq C\lambda\Phi(\mathbf{l}, \mathbf{k}, \gamma)M(\alpha) \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha)} \varphi(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha) K^{n-2} (C\lambda)^{n-1} i^{\alpha d} \Phi(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha) \\ & = (C\lambda)^n i^{\alpha d} \Phi(\mathbf{l}, \mathbf{k}, \gamma) M(\alpha) K^{n-2} \sum_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha)} \Phi(\mathbf{t}, 2\mathbf{w}, h; \alpha). \end{aligned}$$

Para passar de (31) a (32) os termos com os mesmos  $t$ -s e  $Z_{n-1}$ -s foram agrupados, e na passagem de (32) a (33) foi usada a hipótese da indução. A constante  $M(\alpha)$  é definida da seguinte maneira. Seja  $M(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha)$  o número de maneiras de decompor

$$(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha) = (t_1, w_1; \dots; t_h, w_h; h; \alpha)$$

em  $(\mathbf{t}_1, \mathbf{u}_1, s_1), \dots, (\mathbf{t}_\gamma, \mathbf{u}_\gamma, s_\gamma)$ , onde

$$(\mathbf{t}_\theta, \mathbf{u}_\theta, s_\theta) = (t_{\theta,1}, u_{\theta,1}; \dots; t_{\theta,s_\theta}, u_{\theta,s_\theta}; s_\theta)$$

tais que para qualquer  $\beta = 1, \dots, h$  temos

$$\sum_{\theta, X: t_\beta = t_{\theta, X}} u_{\theta, X} = w_\beta.$$

Seja então

$$M(\alpha) = \max_{(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha)} M(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha).$$

Como  $M(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h; \alpha)$  depende somente de  $(w_1, \dots, w_h)$  e o número de coleções distintas  $(w_1, \dots, w_h; \alpha)$  é finito para  $\alpha$  fixo,  $M(\alpha)$  também é finito.

Agora, temos

$$\begin{aligned} \sum_{(t, \mathbf{w}, h; \alpha)} \Phi(t, 2\mathbf{w}, h; \alpha) &= \sum_{h=1}^{\alpha} \sum_{\mathbf{w}: \sum_{i=1}^h w_i = \alpha} \sum_t t_1^{2w_1 d} \dots t_h^{2w_h d} p_{t_1} \dots p_{t_h} \quad (34) \\ &= \sum_{h=1}^{\alpha} \sum_{\mathbf{w}: \sum_{i=1}^h w_i = \alpha} \mathbf{E} \rho^{2w_1 d} \dots \mathbf{E} \rho^{2w_h d} =: L(\alpha) < \infty, \end{aligned}$$

já que  $\mathbf{E} \rho^{2\alpha d} < \infty$  (para ver isto, basta pegar o termo correspondente a  $h = 1$  em (34)). Portanto, denotando  $K = M(\alpha)L(\alpha)$ , completamos a prova do Lema 3.4. ■

Agora queremos achar o jeito de estimar quantidades de forma

$$\mathbf{E}(Z_{n_1}^{j_1} \dots Z_{n_\alpha}^{j_\alpha}). \quad (35)$$

Agrupando os valores iguais de  $n$ , reescrevemos a coleção  $(n_i; i = 1, \dots, \alpha)$  como  $(m_1, \gamma_1; \dots; m_s, \gamma_s; s)$ ,  $m_1 < m_2 < \dots < m_s$ . Aqui  $\gamma_i$  é o número de  $n_j = m_i$  em  $(n_1, \dots, n_\alpha)$ , portanto  $\sum_{i=1}^s \gamma_i = \alpha$ . Seja

$$(j_1, \dots, j_\alpha) = ((\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1; \gamma_1), \dots, (\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s; \gamma_s)),$$

onde

$$(\mathbf{j}_i, \mathbf{u}_i, v_i; \gamma_i) = (j_{i,1}, u_{i,1}; \dots; j_{i,v_i}, u_{i,v_i}; v_i; \gamma_i).$$

Aqui  $u_{\theta, \chi}$  é o número de termos  $Z_{m_\theta}^{j_\theta, \chi}$  em (35). Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z_{n_1}^{j_1} \dots Z_{n_\alpha}^{j_\alpha}) &= \prod_{\theta=1}^s \prod_{\chi=1}^{v_\theta} \mathbf{E}((Z_{m_\theta}^{j_\theta, \chi})^{u_{\theta, \chi}}) \\ &= \mathbf{E}(Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \dots Z_{m_s}(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s)). \end{aligned}$$

**Lema 3.5** Para  $\lambda$  suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots Z_{m_s}(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s)) \\ & \leq (C\lambda)^{m_s} K^{m_s-1; \alpha d} \Phi(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s). \end{aligned} \quad (36)$$

*Demonstração.* Provamos o lema por indução em  $s$ . Note que o caso  $s = 1$  foi estudado em Lema 3.4. Temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots Z_{m_s}(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s)) \\ & = \mathbf{E}[(Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots Z_{m_{s-1}}(\mathbf{j}_{s-1}, \mathbf{u}_{s-1}, v_{s-1})) \\ & \quad \times \mathbf{E}(Z_{m_s}(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) \mid \mathcal{F}_{m_{s-1}})] \end{aligned} \quad (37)$$

$$\leq C\lambda \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) M(\alpha) \mathbf{E}[Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots Z_{m_{s-1}}(\mathbf{j}_{s-1}, \mathbf{u}_{s-1}, v_{s-1})] \quad (38)$$

$$\times \sum_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s)} \varphi(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s) Z_{m_{s-1}}(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s)]$$

$$= C\lambda M(\alpha) \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) \mathbf{E}[\mathbf{E}(Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots Z_{m_{s-1}}(\mathbf{j}_{s-1}, \mathbf{u}_{s-1}, v_{s-1})) \quad (39)$$

$$\times \sum_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s)} \varphi(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s) Z_{m_{s-1}}(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s) \mid \mathcal{F}_{m_{s-2}})]$$

$$= C\lambda M(\alpha) \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) \mathbf{E}[Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots Z_{m_{s-1}}(\mathbf{j}_{s-1}, \mathbf{u}_{s-1}, v_{s-1})] \quad (40)$$

$$\times \sum_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s)} \varphi(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s) \mathbf{E}(Z_{m_{s-1}}(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s) \mid \mathcal{F}_{m_{s-2}})]$$

$$\leq C\lambda M(\alpha) \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) \mathbf{E}[Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots Z_{m_{s-1}}(\mathbf{j}_{s-1}, \mathbf{u}_{s-1}, v_{s-1})] \quad (41)$$

$$\times \sum_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s)} \varphi(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s) \Phi(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s)$$

$$\times C\lambda M(\alpha) \sum_{(\mathbf{t}_2, \mathbf{w}_2, h_2; \gamma_s)} \varphi(\mathbf{t}_2, \mathbf{w}_2, h_2; \gamma_s) Z_{m_{s-2}}(\mathbf{t}_2, \mathbf{w}_2, h_2; \gamma_s)]$$

$$\leq (C\lambda)^2 (M(\alpha))^2 \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) \mathbf{E}[Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots Z_{m_{s-1}}(\mathbf{j}_{s-1}, \mathbf{u}_{s-1}, v_{s-1})]$$

$$\times \sum_{(\mathbf{t}_2, \mathbf{w}_2, h_2; \gamma_s)} \varphi(\mathbf{t}_2, \mathbf{w}_2, h_2; \gamma_s) Z_{m_{s-2}}(\mathbf{t}_2, \mathbf{w}_2, h_2; \gamma_s)]$$



$$\times \sum_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s)} \Phi(\mathbf{t}_1, 2\mathbf{w}_1, h_1).$$

A passagem de (37) a (38) é justificado por (32) junto com a remarca que

$$\mathbf{E}(Z_{n-1}(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h) \mid \mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1}(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h)$$

(lembre que  $\mu_{i, (\mathbf{t}, \mathbf{w}, h)}^{(n-1)} = \mathbf{E}Z_{n-1}(\mathbf{t}, \mathbf{w}, h)$ ). Como  $\gamma_s \leq \alpha$ , temos (cf. (34) na demonstração de Lema 3.4)

$$\sum_{(\mathbf{t}_1, \mathbf{w}_1, h_1; \gamma_s)} \Phi(\mathbf{t}_1, 2\mathbf{w}_1, h_1) \leq L(\alpha) < \infty.$$

Continuando desta maneira, obtemos que (para economizar o espaço, abreviamos  $N_s := m_s - m_{s-1}$ )

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots Z_{m_s}(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s)) \\ & \leq (C\lambda)^{N_s} (M(\alpha))^{N_s} (L(\alpha))^{N_s-1} \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) \mathbf{E} \left[ \prod_{\beta=1}^{s-1} Z_{m_\beta}(\mathbf{j}_\beta, \mathbf{u}_\beta, v_\beta) \right. \\ & \quad \times \left. \sum_{(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s)} \varphi(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) Z_{m_{s-1}}(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \right] \\ & \leq \sum_{(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s)} (C\lambda)^{N_s} (M(\alpha))^{N_s} (L(\alpha))^{N_s-1} \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) \\ & \quad \times \mathbf{E} \left[ \left( \prod_{\beta=1}^{s-1} Z_{m_\beta}(\mathbf{j}_\beta, \mathbf{u}_\beta, v_\beta) \right) Z_{m_{s-1}} \left( (\mathbf{j}_{s-1}, \mathbf{u}_{s-1}, v_{s-1}) + (\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \right) \right] \\ & \quad \times \varphi(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \\ & \leq \sum_{(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s)} (C\lambda)^{N_s} (M(\alpha))^{N_s} (L(\alpha))^{N_s-1} \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) \\ & \quad \times (C\lambda)^{m_{s-1}} K^{m_{s-1}-1} i^{\alpha d} \Phi(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots \Phi(\mathbf{j}_{s-2}, \mathbf{u}_{s-2}, v_{s-2}) \\ & \quad \times \Phi \left( (\mathbf{j}_{s-1}, \mathbf{u}_{s-1}, v_{s-1}) + (\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \right) \varphi(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \\ & = \sum_{(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s)} (C\lambda)^{N_s} (M(\alpha))^{N_s} (L(\alpha))^{N_s-1} \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (C\lambda)^{m_s-1} K^{m_s-1} i^{\alpha d} \Phi(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots \Phi(\mathbf{j}_{s-2}, \mathbf{u}_{s-2}, v_{s-2}) \\
& \times \Phi(\mathbf{j}_{s-1}, \mathbf{u}_{s-1}, v_{s-1}) \Phi(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \varphi(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \\
\leq & (C\lambda)^{m_s} (M(\alpha))^{N_s} (L(\alpha))^{N_s-1} K^{m_s-1} i^{\alpha d} \\
& \times \Phi(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) \\
& \times \sum_{(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s)} \varphi(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \Phi(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \\
\leq & (C\lambda)^{m_s} K^{m_s-1} i^{\alpha d} \Phi(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s).
\end{aligned}$$

Aqui usamos a hipotese de induçãõ, a multiplicatividade de  $Z_k(\cdot, \cdot, \cdot)$  e  $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ , o fato que, se  $\gamma_s \leq \alpha$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s)} \varphi(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \Phi(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s) \\
& = \sum_{(\mathbf{t}_{N_s}, \mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}; \gamma_s)} \Phi(\mathbf{t}_{N_s}, 2\mathbf{w}_{N_s}, h_{N_s}) \leq L(\alpha).
\end{aligned}$$

Como antes,  $K := M(\alpha)L(\alpha)$ . O Lema 3.5 é provado.  $\blacksquare$

Visto que  $\|U^{(0)}(0)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} 2j Z_n^j$ , só resta a estimar, com a ajuda do Lema 3.5,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} j Z_n^j \right)^\alpha & \leq \alpha! \sum_{\substack{n_1 \leq \dots \leq n_\alpha \\ j_1, \dots, j_\alpha}} j_1 \cdots j_\alpha \mathbf{E}(Z_{n_1}^{j_1} \cdots Z_{n_\alpha}^{j_\alpha}) \quad (42) \\
& \leq C' \sum_{\substack{m_1 \leq \dots \leq m_s \\ 1 \leq s \leq \alpha}} \sum_{\substack{(\mathbf{j}_l, \mathbf{u}_l, v_l) \\ l=1, \dots, s}} j_{l,1}^{u_l,1} \cdots j_{l,v_l}^{u_l,v_l} \\
& \quad \times \mathbf{E}(Z_{m_1}(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots Z_{m_s}(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s)) \\
& \leq C' i^{\alpha d} \sum_{\substack{m_1 \leq \dots \leq m_s \\ 1 \leq s \leq \alpha}} (C\lambda)^{m_s} K^{m_s-1} \\
& \quad \times \sum_{\substack{(\mathbf{j}_l, \mathbf{u}_l, v_l) \\ l=1, \dots, s}} j_{l,1}^{u_l,1} \cdots j_{l,v_l}^{u_l,v_l} \Phi(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C''}{K} \sum_{\substack{m_1 \leq \dots \leq m_s \\ 1 \leq s \leq \alpha}} (CK\lambda)^{m_s} \\
&\leq \frac{C''}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha m^\alpha (CK\lambda)^m < \infty
\end{aligned}$$

para  $\lambda < (CK)^{-1}$ , onde  $C'$  são  $C''$  dois números positivos que dependem somente de  $\alpha$ . Aqui usamos o fato que

$$\sum_{\substack{(j_l, \mathbf{u}_l, v_l) \\ l=1, \dots, s}} j_{l,1}^{u_{l,1}} \cdots j_{l,v_l}^{u_{l,v_l}} \Phi(\mathbf{j}_1, \mathbf{u}_1, v_1) \cdots \Phi(\mathbf{j}_s, \mathbf{u}_s, v_s) < \infty,$$

que pode ser provado similarmente a (34). O Teorema 3.2 é provado.  $\blacksquare$

*Remarca.* Seja  $N(U^{(0)}(0))$  o número de pontos no aglomerado  $U^{(0)}(0)$  e  $|U^{(0)}(0)|$  o volume coberto pelo aglomerado. Então, da mesma maneira pode ser provado que se  $\mathbf{E}\rho^{2\alpha d} < \infty$ , então para  $\lambda$  suficientemente pequeno temos  $\mathbf{E}(N(U^{(0)}(0)))^\alpha < \infty$  e  $\mathbf{E}(|U^{(0)}(0)|)^\alpha < \infty$  (substitua  $jZ_n^j$  em (42) por  $Z_n^j$  no primeiro e por  $j^d Z_n^j$  no segundo caso).

## 4 Percolação bidimensional truncada de longo alcance

Nesta parte o objeto do nosso estudo são as propriedades de conectividade nos modelos de percolação de longo alcance em  $\mathbb{Z}^2$ , onde para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$  as probabilidades  $p_{\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle}$  da aresta  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$  que vai de  $\mathbf{x}$  até  $\mathbf{z}$  ser aberta satisfazem a seguinte condição:

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^2} p_{\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle} = \infty. \tag{43}$$

Todas as arestas são declaradas abertas ou fechadas independentemente. A condição (43) junto com a independência das arestas implica que qualquer vértice  $x$  quase certamente pertence a um aglomerado infinito. Isto é uma consequência trivial do fato que se (43) vale, então para qualquer  $x \in \mathbb{Z}^2$  e qualquer  $N > 0$  com probabilidade 1 existe uma aresta aberta que começa em  $x$  de comprimento pelo menos  $N$ . No entanto, é longe de ser óbvio como o comportamento do sistema muda se o comprimento das arestas for restrito a um intervalo finito. Uma das questões levantados por E. Andjel foi se a condição (43) implica que sempre existe uma constante  $L > 0$ , que depende da coleção de probabilidades  $\{p_{(x,z)}\}$ , tal que a probabilidade do aglomerado da origem ser infinito permanece positiva mesmo se apenas as arestas de comprimento menor do que  $L$  forem usadas.

Este problema foi investigado em [33] no caso de um modelo anisotrópico de percolação de longo alcance onde as arestas de longo alcance ocorrem em apenas uma direção (digamos, horizontal) e na direção vertical foram usadas somente arestas entre vizinhos mais próximos, isto é, a aresta  $\langle x, y \rangle$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  é declarada aberta com probabilidade  $p_i$  ou  $\varepsilon$ , dependendo se  $y_1 = x_1 + i$ ,  $y_2 = x_2$ , ou  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_2 + 1$  respectivamente. A resposta afirmativa foi dada caso  $p_i$ 's satisfaçam a seguinte condição de regularidade:

$$p_i \geq \frac{1}{i \log i}. \quad (44)$$

Nós generalizamos este resultado relaxando a condição (44). A demonstração combina a renormalização espacial com a “construção dinâmica” do

aglomerado e a maior novidade aqui é o uso de um “processo de ramificação”, que permite a construção de conexões mais “eficientes” entre os blocos renormalizados do que em [33].

Apresentamos também dois exemplos: o primeiro deles é um modelo bidimensional de longo alcance, onde as arestas são distribuídas em um cone, mas de tal maneira que o método desenvolvido para o modelo anisotrópico funciona. O segundo exemplo é um modelo de longo alcance com dependência parcial, para o qual a condição (43) vale, mas o truncamento de arestas de longo alcance faz com que o aglomerado da origem seja finito quase certamente. Este exemplo é construído usando o modelo de percolação multi-escalar de Poisson da Seção 1.1.

## 4.1 Definições básicas e o resultado principal

Antes de mais nada, tornamos

$$\mathbb{Z}^2 = \{z = (z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$$

um grafo orientado apropriado para nosso processo adicionando uma aresta direcionada entre todos os pares de vértices de  $\mathbb{Z}^2$ . Denotamos este grafo por  $\mathbb{G} = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{E})$ , onde  $\mathbb{Z}^2$  e  $\mathcal{E}$  são os conjuntos de vértices e arestas respectivamente.

Às vezes será conveniente supor que as arestas direcionadas  $\langle z, z' \rangle$  e  $\langle z', z \rangle$  são construídas sobre um elo genérico (não direcionado), que será denotado por  $e_{z, z'}$ .

A aresta  $\langle z, z' \rangle$  é declarada aberta com probabilidade  $p_{\langle z, z' \rangle} \geq 0$ , independente do estado de todas as outras arestas (inclusive a aresta  $\langle z', z \rangle$ ). Caso contrário a aresta é declarada fechada.

Formalmente, o espaço de estados é

$$\Omega = \prod_{\langle z, z' \rangle} \{0, 1\}$$

onde o produto é sobre todos os pares ordenados de vértices, e os pontos deste espaço são representados como

$$\omega = \{\omega(\langle z, z' \rangle) : z, z' \in \mathbb{Z}^2\}$$

e são chamados configurações; o valor  $\omega(\langle z, z' \rangle) = 1$  (respectivamente 0) corresponde a  $\langle z, z' \rangle$  ser aberta (respectivamente fechada). Finalmente, definimos a medida produto

$$\mathbf{P} = \prod_{\langle z, z' \rangle} \mu_{\langle z, z' \rangle},$$

onde  $\mu_{\langle z, z' \rangle}$  é Bernoulli em  $\{0, 1\}$  com parâmetro  $p_{\langle z, z' \rangle} \geq 0$ , isto é,

$$\mu_{\langle z, z' \rangle}(\{1\}) = p_{\langle z, z' \rangle}.$$

Além disso, suponhamos  $p_{\langle z+z'', z'+z'' \rangle} = p_{\langle z, z' \rangle}$  para todos  $z''$ . Portanto, o modelo obtido é um modelo de percolação (orientada) de longo alcance invariante por translação em  $\mathbb{G}$ . Suponhamos

$$\sum_{z \neq 0} p_{\langle 0, z \rangle} = \infty. \tag{45}$$

A definição de  $\mathbf{P}$  e (45) implicam que

$$\mathbf{P}\{|C_0| = \infty\} = 1,$$

onde  $C_0$  denota o aglomerado aberto de origem  $\mathbf{0}$ , isto é,

$$C_0 = \{z' \in \mathbb{Z}^2 : \text{existe uma sequência } z_0 = \mathbf{0}, z_1, \dots, z_k = z' \\ \text{tal que } \langle z_i, z_{i+1} \rangle \text{ é aberto para todos } i = 0, \dots, k-1\}, \quad (46)$$

e  $|C_0|$  denota a cardinalidade de  $C_0$ .

Dado  $\mathbf{P}$  e fixado  $L > 0$ , definimos a nova medida de probabilidade  $\mathbf{P}_L$  em  $\Omega$ , que corresponde ao *processo  $L$ -truncado* por

$$p_{\langle z, z' \rangle}^L = \begin{cases} p_{\langle z, z' \rangle}, & \text{se } |z - z'| \leq L, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (47)$$

e o nosso principal objetivo é estabelecer condições sobre  $\{p_{\langle z, z' \rangle}\}_{\langle z, z' \rangle \in \mathcal{E}}$ , sob as quais existe  $L \equiv L(\{p_{\langle z, z' \rangle}\}_{\langle z, z' \rangle \in \mathcal{E}})$  tal que

$$\mathbf{P}_L\{|C_0| = \infty\} > 0.$$

Este trabalho trata de uma versão orientada do modelo estudado em [33], para o qual supõe-se que

a) existe uma reta  $\ell$  que contém origem  $\mathbf{0}$ , tal que

$$\sum_{z \in \ell} p_{\langle \mathbf{0}, z \rangle} = \infty,$$

b) existe uma vértice  $y \notin \ell$  tal que  $p_{\mathbf{0}, y} > 0$ .

Sem perder a generalidade podemos supor que  $\ell$  é o eixo das abscissas e  $y = (0, 1)$ . Mais precisamente, seja  $z = (z_1, z_2)$ ,  $z' = (z'_1, z'_2) \in \mathbb{Z}^2$ . Definimos

$$p_{\langle z, z' \rangle} = \begin{cases} p_k, & \text{se } z'_1 = z_1 + k, z'_2 = z_2, \\ \varepsilon, & \text{se } z'_1 = z_1, z'_2 = z_2 + 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (48)$$

onde  $p_k \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

O nosso resultado principal é

**Teorema 4.1** *Suponha que as probabilidades  $p_k$  satisfazem as seguintes condições:*

1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty, \quad (49)$$

2.

$$p_k \text{ são não crescentes em } k, \quad (50)$$

3.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \min \left\{ \left( \sum_{k=\lfloor 3n/2 \rfloor}^{2n} p_k \right) \lfloor \log^2 n \rfloor, \sum_{k=\lfloor \log^2 n \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} p_k \right\} = \infty. \quad (51)$$

Então existe  $L \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbf{P}_L\{|C_0| = \infty\} > 0$ .

*Observação.* Devido a dominação estocástica, é imediato que se existe uma sequência  $\{\tilde{p}_i\}_{i \geq 1}$  com  $0 < \tilde{p}_i < 1$ ,  $i \geq 1$ , que satisfaz as condições 1–3 do Teorema 4.1 acima, então para quaisquer  $p_i \geq \tilde{p}_i$ ,  $i \geq 1$  o Teorema 4.1 vale.

*Exemplo.* Denotamos  $\log_{(1)} x := \log x$ ,  $\log_{(m+1)} x = \log \log_{(m)} x$ . É fácil ver que a coleção  $\{p_k\}$  tal que

$$p_k \geq \frac{C}{k \log_{(1)} k \log_{(2)} k \dots \log_{(m)} k}$$

para  $k$  suficientemente grande satisfaz as condições 1–3 do Teorema 4.1 para quaisquer  $m > 1$  e  $C > 0$ .

*Demonstração.* É suficiente provar a declaração para

$$p_k = \frac{C}{k \log k \log_{(2)} k \dots \log_{(m)} k},$$



onde  $k \geq k_0$  para algum  $k_0$  tal que a expressão acima tem sentido. Para  $M$  bastante grande temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^M p_k &\simeq \int_{k_0}^M \frac{C dx}{x \log x \log_{(2)} x \dots \log_{(m)} x} \\ &= C(\log_{(m+1)} M - \log_{(m+1)} k_0) \simeq C \log_{m+1} M, \end{aligned}$$

onde “ $\simeq$ ” denota a equivalência assintótica. Portanto,

$$\sum_{k=\lfloor \log^2 n \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} p_k \simeq C(\log_{(m+1)} n/2 - \log_{(m+1)} \log^2 n) \rightarrow \infty$$

quando  $n \rightarrow \infty$  e

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{k=\lfloor 3n/2 \rfloor}^{2n} p_k \right) \log^2 n \\ &\simeq C(\log_{(m+1)} 2n - \log_{(m+1)} 3n/2) \log^2 n \\ &= C(\log_{(m)}(\log n + \log 2) - \log_{(m)}(\log n + \log 3/2)) \log^2 n \\ &\simeq C(\log_{(m)} \log n + \log 2 \frac{1}{\log n \log_{(2)} n \dots \log_{(m)} n} \\ &\quad - \log_{(m)} \log n - \log 3/2 \frac{1}{\log n \log_{(2)} n \dots \log_{(m)} n}) \log^2 n \\ &= C \frac{\log 2 - \log 3/2}{\log n \log_{(2)} n \dots \log_{(m)} n} \log^2 n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Aqui usamos o fato que  $f(x_0 + \alpha) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\alpha$  para  $f(x) = \log_{(m)} x$ ,  $x_0 = \log n$ ,  $\alpha_1 = \log 2$  e  $\alpha_2 = \log 3/2$ . ■

## 4.2 Demonstração de Teorema 4.1

Primeiro a gente prova o seguinte Lema elementar que será útil em seguida.

**Lema 4.1** *Suponha que temos uma seqüência de eventos independentes  $B_1, B_2, \dots, B_m$  e suponha que  $\sum_{i=1}^m \mathbf{P}\{B_i\} \geq L$ . Então*

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^m \bar{B}_i\right\} \leq \exp(-L), \quad (52)$$

onde  $\bar{B}_i$  denota o evento complementar a  $B_i$ .

*Demonstração.* Já que  $\log(1 - x) \leq -x$  para todos  $x < 1$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\bigcap_{i=1}^m \bar{B}_i\right\} &= \prod_{i=1}^m (1 - \mathbf{P}\{B_i\}) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^m \log(1 - \mathbf{P}\{B_i\})\right) \\ &\leq \exp\left(-\sum_{i=1}^m \mathbf{P}\{B_i\}\right) \\ &= \exp(-L). \end{aligned}$$

■

Agora construímos o *processo renormalizado*.

Definimos primeiro o *reticulado renormalizado*  $\mathcal{L}_n(\mathbb{Z}^2)$ . Fixamos  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$  consideramos o seguinte bloco horizontal unidimensional

$$S_{\mathbf{z}}^n = S_{(z_1, z_2)}^n = \{y = (y_1, y_2) : y_1 \in [nz_1, n(z_1 + 1)), y_2 = z_2\},$$

que é chamado o *vértice renormalizado*. Dois vértices renormalizados  $S_{\mathbf{z}}^n$  e  $S_{\mathbf{z}'}^n$  são adjacentes se  $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}'\| = 1$ . Obviamente,  $\mathcal{L}_n(\mathbb{Z}^2)$  é isomórfico a  $\mathbb{Z}^2$ .

**Definição 4.1** *Seja  $\mathbb{G}$  o grafo definido acima. Um caminho sem auto-interseções  $\pi$  em  $\mathbb{G}$  (com  $n$  passos) é uma sequência*

$$\pi = \{\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \rangle, \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle, \dots, \langle \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n \rangle\}$$

*de arestas  $\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1} \rangle$ , onde todos os vértices  $x_0, \dots, x_n$  são distintos. O caminho é aberto, se todas as arestas  $\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1} \rangle$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , são abertas.*

**Definição 4.2** *Dado  $L > 0$ , o caminho  $\pi = \{\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \rangle, \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle, \dots, \langle \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n \rangle\}$  é chamado  $L$ -admissível, se  $\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\| \leq L$  para todos  $j = 0, \dots, n-1$ ,*

Dividimos a demonstração em três passos, e antes de começar vamos dar uma descrição informal do esquema todo.

O Passo 1 descreve o algoritmo que permite construir conexões horizontais de um vértice renormalizado a seu vizinho, isto é, dado o vértice  $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{z}}^n$  construímos o conjunto aleatório  $X_{\tau}^{\mathbf{x}}$  tal que todos os vértices de  $X_{\tau}^{\mathbf{x}}$  são conexos a  $\mathbf{x}$  por um caminho aberto  $n/2$ -admissível de tal maneira que é “provável” que  $X_{\tau}^{\mathbf{x}} \cap S_{\mathbf{z}+\vec{e}_1}^n \neq \emptyset$  ou  $X_{\tau}^{\mathbf{x}} \cap S_{\mathbf{z}+\vec{e}_2}^n = \emptyset$  mas  $|X_{\tau}^{\mathbf{x}}| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor$  (aqui  $\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)$ ). Para obter isso, para  $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{z}}^n$  fixado construímos passo a passo as gerações sucessivas de vértices, denotadas por  $\tilde{X}_t^{\mathbf{x}}$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , que são os conjuntos aleatórios com certas propriedades e que são conexos a  $\mathbf{x}$ . A cada passo verificamos e paramos o processo se não há arestas “permitidas” abertas que começam num dos pontos já construídos.

No Passo 2 obtemos a estimativa principal (Lema 4.2) que mostra que é possível escolher  $n$  (o tamanho do bloco) suficientemente grande de tal maneira que para cada vértice renormalizado  $S_{\mathbf{z}}^n$  e um sítio fixado  $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{z}}^n$

a probabilidade que existe um caminho  $2n$ -admissível aberto de  $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{z}}^n$  para algum sítio em  $S_{\mathbf{z}+\vec{e}_1}^n$  fica arbitrariamente próxima a 1. Basicamente, mostramos que escolhendo  $n$  grande a probabilidade do evento

$$\left\{ [X_{\tau}^{\mathbf{x}} \cap S_{\mathbf{z}+\vec{e}_1}^n = \emptyset] \cap [ |X_{\tau}^{\mathbf{x}}| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor ] \cap \left[ \begin{array}{l} \text{existe uma aresta aberta de compri-} \\ \text{mento no máximo } 2n \text{ de } X_{\tau}^{\mathbf{x}} \text{ a } S_{\mathbf{z}+\vec{e}_1}^n \end{array} \right] \right\} \\ \cup [X_{\tau}^{\mathbf{x}} \cap S_{\mathbf{z}+\vec{e}_1}^n \neq \emptyset]$$

fica próxima a 1.

O Passo 3 descreve o algoritmo para construir o aglomerado renormalizado. Para isso, definimos a ordem em  $\mathbb{Z}_+^2$  e depois, de acordo com esta ordem, para cada vértice verificamos se ele pertence ao aglomerado.

Lembre que a aresta de  $\mathbf{x}$  a  $S_{\mathbf{z}+\vec{e}_2}^n$  é aberta com probabilidade  $\varepsilon$ .

*Passo 1. Construção das gerações.* É conveniente fazer a construção para uma realização fixada  $\omega \in \Omega$ . Fixamos  $S_{\mathbf{z}}^n \in \mathcal{L}_n(\mathbb{Z}^2)$  e  $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{z}}^n$ .

Definimos a geração zero como  $X_0^{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\}$ .

Consideramos todas as arestas horizontais abertas  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ , onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ,  $0 < y_1 - x_1 \leq n/2$ ,  $x_2 = y_2$ , e todos os vértices conexos a  $\mathbf{x}$  por uma destas arestas abertas são chamados “vértices da primeira geração” e denotados por  $\tilde{X}_1^{\mathbf{x}}$ . Seja  $X_1^{\mathbf{x}} = X_0^{\mathbf{x}} \cup \tilde{X}_1^{\mathbf{x}}$ . Enumeramos os pontos de  $X_1^{\mathbf{x}}$  na ordem crescente da primeira coordenada, isto é,  $X_1^{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y}_{1,1} = \mathbf{x}, \mathbf{y}_{1,2}, \dots, \mathbf{y}_{1,l_1}\}$ . Definimos também o conjunto  $Y_1 = \{\mathbf{y}_{1,2}, \dots, \mathbf{y}_{1,l_1}\}$ . É importante notar que graças a nossa escolha de orientação somente as arestas da esquerda para a direita são consideradas.

Se  $Y_1 = \emptyset$ , isto é,  $l_1 = 1$ , o procedimento é interrompido. Caso contrário, continuamos: pegamos o vértice  $\mathbf{y}_{1,2}$  e consideramos todas as arestas abertas

horizontais  $\langle y_{1,2}, y \rangle$  de comprimento no máximo  $n/2$ , que não acabam em nenhum vértice de  $X_1^x$ . Denotamos este conjunto de novos vértices conexos a  $y_{1,2}$  por uma aresta aberta por  $\tilde{X}_2^x$  e chamamos ele de “segunda geração”. Denotamos  $X_2^x = X_1^x \cup \tilde{X}_2^x$  e enumeramos este conjunto na ordem crescente da primeira coordenada. Então,  $X_2^x = \{y_{2,1} = x, y_{2,2} = y_{1,2}, y_{2,3}, \dots, y_{2,l_2}\}$  e definimos também  $Y_2 = \{y_{2,3}, \dots, y_{2,l_2}\}$ .

Se  $Y_2 = \emptyset$ , o procedimento é interrompido. Caso contrário, pegamos o ponto  $y_{2,3}$  e continuamos.

Por indução descrevemos a construção de geração  $m + 1$ . Se depois de  $m$  passos  $Y_m \neq \emptyset$ , enumeramos pontos de  $X_m^x$  na ordem crescente da primeira coordenada, pegamos o vértice  $y_{m,m+1}$  e consideramos todas as arestas abertas horizontais  $\langle y_{m,m+1}, y \rangle$  de comprimento no máximo  $n/2$  e que não acabam num dos pontos do conjunto  $X_m^x$ . Denotamos o conjunto de novos vértices conexos a  $y_{m,m+1}$  por  $\tilde{X}_{m+1}^x$  e chamamos ele de “geração  $m + 1$ ”, e definimos  $X_{m+1}^x = X_m^x \cup \tilde{X}_{m+1}^x$ . Enumeramos  $X_{m+1}^x$  na ordem crescente da primeira coordenada,  $X_{m+1}^x = \{y_{m+1,1} = x, \dots, y_{m+1,l_{m+1}}\}$  e definimos  $Y_{m+1} = \{y_{m+1,m+2}, \dots, y_{m+1,l_{m+1}}\}$ .

Se  $Y_{m+1} = \emptyset$  o procedimento é interrompido, caso contrário, pegamos o ponto  $y_{m+1,m+2}$  e continuamos.

Informalmente, podemos dizer que, devido às regras de construção, no  $m$ -ésimo passo sabemos que todos os vértices do conjunto  $X_m^x$  são conexos a  $x$  por um caminho aberto  $n/2$ -admissível, e, por outro lado, que as arestas que saem de vértices do conjunto  $Y_m = \{y_{m,m+1}, y_{m,m+2}, \dots, y_{m,l_m}\}$  ainda não foram verificadas.

Definimos os seguintes tempos de parada:

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \inf\{m : Y_m = \emptyset\} \\ \tau_1 &= \inf\{m : |X_m^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\} \\ \tau_2 &= \inf\{m : X_m^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n \neq \emptyset\} \\ \tau &= \min\{\tau_0, \tau_1, \tau_2\},\end{aligned}$$

e vamos estudar o conjunto  $X_\tau^x$ . Observamos que pela definição de  $\tau$  e nossa construção  $\tau \leq \log^2 n$ .

Para prosseguir com a construção dinâmica, que será descrita em detalhes no Passo 3, precisamos de mais notações. Primeiro definimos de que maneira vamos tentar ir de um vértice renormalizado a outro. Os casos são poucos:

- a conexão horizontal de  $S_z^n$  a  $S_{z+\vec{e}_1}^n$ . Permitimos apenas duas possibilidades de construir esta conexão : ou  $X_\tau^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n \neq \emptyset$ , e neste caso a conexão já é estabelecida, ou  $X_\tau^x \subset S_z^n$  mas  $|X_\tau^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor$  e neste caso verificamos se existe pelo menos uma aresta aberta de um vértice de  $X_\tau^x$  a  $S_{z+\vec{e}_1}^n$ .
- a conexão vertical de  $S_z^n$  a  $S_{z+\vec{e}_2}^n$ . Já que nesta situação apenas as arestas entre vizinhos mais próximos são de interesse, verificamos se existe pelo menos uma aresta aberta de um vértice de  $X_\tau^x$  a  $S_{z+\vec{e}_2}^n$ .

As conexões descritas acima são chamadas permitidas.

**Definição 4.3** *Se o vértice renormalizado  $S_z^n$  é alcançado por uma conexão permitida aberta de pelo menos um dos vértices  $S_{z-\vec{e}_1}^n$  e  $S_{z-\vec{e}_2}^n$ , então o vértice*

mais à direita em  $S_z^n$  alcançado por tal conexão permitida é chamado “semente” em  $S_z^n$  e denotado por  $s_z$ . Suponhamos  $s_0 = 0$ .

Denotamos o vértice renormalizado  $S_z^n$  com semente  $s_z$  por  $S_z^n(s_z)$ .

*Passo 2.* Começamos com um lema técnico.

**Lema 4.2** *Consideramos um processo estocástico em tempo discreto  $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , definido no espaço  $(\widehat{\Omega}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mathbf{P}})$  que assume valores inteiros não negativos, tal que  $\xi_1 = 1$  quase certamente e existe  $S > 0$  tal que os conjuntos  $\{0\}$  e  $[S, +\infty)$  são absorventes. Seja  $\tau' = \inf\{t : \xi_t \in \{0\} \cup [S, +\infty)\}$ .*

*Suponha que*

$$i) \xi_{t+1} - \xi_t \geq -1 \quad \widehat{\mathbf{P}}\text{-q.c.}$$

$$ii) \widehat{\mathbf{P}}\{\xi_{t+1} - \xi_t \geq 1 \mid \xi_1, \dots, \xi_t\} \geq (1 - \delta) \mathbf{1}_{\{0 < \xi_t < S\}} \text{ para algum } 0 < \delta < 1/2.$$

*Então  $\tau' < \infty$  q.c. e*

$$\pi_0 = \widehat{\mathbf{P}}\{\xi_{\tau'} = 0\} \leq \frac{\delta}{1 - \delta}. \quad (53)$$

*(a desigualdade (53) é uniforme em  $S$ ).*

*Demonstração.* Denotamos

$$A_k = \{0 < \xi_{kS} < S\}.$$

A condição *ii)* implica que

$$\widehat{\mathbf{P}}\{\tau' > kS\} = \widehat{\mathbf{P}}\{A_k\} \leq \prod_{j=1}^k \widehat{\mathbf{P}}\{\xi_{jS} \in (0, S) \mid \xi_{(j-1)S} \in (0, S)\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \prod_{j=1}^k (1 - \widehat{\mathbf{P}}\{\xi_{t+1} - \xi_t \geq 1, t = (j-1)S, \dots, jS-1 \mid \xi_{(j-1)S} \in (0, S)\}) \\
&\leq [1 - (1 - \delta)^S]^k \leq (1 - \frac{1}{2S})^k,
\end{aligned}$$

portanto,  $\widehat{\mathbf{P}}\{\tau' = \infty\} = 0$ , e  $\mathbf{E}_{\widehat{\mathbf{P}}}\tau' < \infty$ .

Dado  $\delta$ , consideramos a função  $f(x) = (\frac{\delta}{1-\delta})^x$  e vamos mostrar que  $f(\xi_t)$  é um super martingal.

Já que  $\delta < 1/2$ ,  $f$  é limitada em  $\mathbb{R}_+$  e  $\mathbf{E}_{\widehat{\mathbf{P}}}f(\xi_t)$  existe para todos  $t$ . Portanto, no conjunto  $\{0 < \xi_t < S\}$  temos

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{\widehat{\mathbf{P}}}(f(\xi_{t+1}) - f(\xi_t) \mid \xi_1, \dots, \xi_t) \\
&= \sum_{j=-1}^{+\infty} \widehat{\mathbf{P}}\{\xi_{t+1} - \xi_t = j \mid \xi_1, \dots, \xi_t\} \left( \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\xi_t+j} - \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\xi_t} \right) \\
&\leq \delta \left( \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\xi_t-1} - \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\xi_t} \right) + (1-\delta) \left( \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\xi_t+1} - \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\xi_t} \right) \\
&= 0 \quad \widehat{\mathbf{P}} - \text{q.c.}
\end{aligned}$$

e no conjunto  $\{\xi_t = 0\} \cup \{\xi_t \in [S, +\infty)\}$

$$\mathbf{E}_{\widehat{\mathbf{P}}}(f(\xi_{t+1}) - f(\xi_t) \mid \xi_1, \dots, \xi_t) = 0 \quad \widehat{\mathbf{P}} - \text{q.c.}$$

O fato de  $f$  ser limitada em  $\mathbb{R}_+$ ,  $f(\xi_t)$  ser super martingal e  $\mathbf{E}_{\widehat{\mathbf{P}}}\tau' < \infty$  implica que

$$\mathbf{E}_{\widehat{\mathbf{P}}}f(\xi_{\tau'}) \leq f(\xi_1),$$

e, notando que

$$f(\xi_{\tau'}) = \mathbf{1}_{\{\xi_{\tau'}=0\}} \cdot 1 + \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{\xi_{\tau'}=S+j\}} \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{S+j}$$



e  $\widehat{\mathbf{P}}\{\xi_{\tau'} = 0\} \leq \mathbf{E}_{\widehat{\mathbf{P}}} f(\xi_{\tau'})$ , obtemos

$$\widehat{\mathbf{P}}\{\xi_{\tau'} = 0\} \leq f(\xi_1) \leq \frac{\delta}{1 - \delta}.$$

■

O próximo Lema é a nossa estimativa principal.

**Lema 4.3** *Escolhendo  $n$  suficientemente grande, a probabilidade da existência de um caminho aberto  $2n$ -admissível que começa em  $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{z}}^n$  e vai até  $S_{\mathbf{z} + \vec{e}_1}^n$  pode ser feita arbitrariamente próxima a 1 uniformemente em  $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{z}}^n$ .*

*Demonstração.* Primeiro vamos provar que para  $n$  suficientemente grande e qualquer  $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{z}}^n$  a probabilidade

$$\mathbf{P}(\{X_{\tau}^{\mathbf{x}} \cap S_{\mathbf{z} + \vec{e}_1}^n \neq \emptyset\} \cup \{X_{\tau}^{\mathbf{x}} \cap S_{\mathbf{z} + \vec{e}_1}^n = \emptyset, |X_{\tau}^{\mathbf{x}}| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\})$$

é próxima a 1.

Seja  $\tau' = \inf\{t : |Y_t| = 0 \text{ ou } |Y_t| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\}$  e  $\eta_t = |Y_{t \wedge \tau'}|$ . Suponha que  $t < \tau'$ . Para construir a geração  $t + 1$  do nosso processo consideramos as arestas que saem do vértice  $\mathbf{y}_{t,t+1} \in Y_t$ . Seja  $A_t = \{\mathbf{y}_{t,t+1} + \vec{e}_1, \dots, \mathbf{y}_{t,t+1} + \lfloor n/2 \rfloor \vec{e}_1\} \setminus Y_t$ . Visto que  $|Y_t| < \lfloor \log^2 n \rfloor$ , usando o fato que  $p_k$  são não crescentes e Lema 4.1, temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\text{não há arestas abertas de } \mathbf{y}_{t,t+1} \text{ a qualquer vértice de } A_t\} \\ & \leq \prod_{k \in N_{\mathbf{y}_{t,t+1}}} (1 - p_k) \leq \prod_{k = \lfloor \log^2 n \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} (1 - p_k) \leq \exp(-M(n)), \end{aligned}$$

onde

$$N_{\mathbf{y}_{t,t+1}} = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n/2 \text{ e } \mathbf{y}_{t,t+1} + k\vec{e}_1 \notin Y_t\}, \quad M(n) = \sum_{k = \lfloor \log^2 n \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} p_k.$$

Dividimos  $A_t$  em dois conjuntos disjuntos  $A_t^{(1)}$  e  $A_t^{(2)}$  de tal maneira que

$$\sum_{u \in A_t^{(i)}} p_{u-y_{t,t+1}} \geq \frac{M(n)}{2} - 1, \quad i = 1, 2$$

portanto,

$$\mathbf{P}\{\text{n\~{a}o h\~{a} arestas abertas de } y_{t,t+1} \text{ a } A_t^{(i)}\} \leq \exp(-M(n)/2 + 1).$$

Temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_{t+1} - \eta_t \geq 1 \mid \eta_1, \dots, \eta_t\} \\ &= \mathbf{P}\{\text{h\~{a} pelo menos duas arestas abertas de } y_{t,t+1} \text{ a } A_t\} \mathbf{1}_{\{0 < \eta_t < \lfloor \log^2 n \rfloor\}} \\ &\geq (1 - \mathbf{P}\{\text{n\~{a}o h\~{a} arestas abertas de } y_{t,t+1} \text{ a } A_t^{(1)}\}) \\ &\quad - \mathbf{P}\{\text{n\~{a}o h\~{a} arestas abertas de } y_{t,t+1} \text{ a } A_t^{(2)}\} \mathbf{1}_{\{0 < \eta_t < \lfloor \log^2 n \rfloor\}} \\ &\geq (1 - 2 \exp(-M(n)/2 + 1)) \mathbf{1}_{\{0 < \eta_t < \lfloor \log^2 n \rfloor\}}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 4.2

$$\mathbf{P}\{\eta_{\tau'} = 0\} \leq \gamma = \frac{\delta}{1 - \delta}, \quad (54)$$

onde  $\delta = 2 \exp(-M(n)/2 + 1)$ .

Note que

$$\mathbf{P}\{X_\tau^x \cap S_{z+\tilde{e}_1}^n = \emptyset, |X_\tau^x| < \lfloor \log^2 n \rfloor\} \leq \mathbf{P}\{\eta_{\tau'} = 0\},$$

j\~{a} que

$$\{X_\tau^x \cap S_{z+\tilde{e}_1}^n = \emptyset\} \cap \{|X_\tau^x| < \lfloor \log^2 n \rfloor\} \subseteq \{\eta_{\tau'} = 0\},$$

e assim obtemos

$$\mathbf{P}(\{X_\tau^x \cap S_{z+\tilde{e}_1}^n \neq \emptyset\} \cup \{X_\tau^x \cap S_{z+\tilde{e}_1}^n = \emptyset, |X_\tau^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\}) \geq 1 - \gamma. \quad (55)$$

Suponha agora que  $X_\tau^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n = \emptyset$ . Como consideravamos apenas as arestas de comprimento no máximo  $n/2$ ,  $X_\tau^x \subset S_z^n$ . Para estabelecer uma conexão entre  $X_\tau^x$  e  $S_{z+\vec{e}_1}^n$  vamos usar somente as arestas de comprimento entre  $n/2$  e  $2n$ . Neste caso temos

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\{\text{existe uma aresta aberta de comprimento entre } n/2 \text{ e } 2n \\
& \text{de } X_\tau^x \text{ a } S_{z+\vec{e}_1}^n \mid X_\tau^x \subset S_z^n, |X_\tau^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\} \\
&= 1 - \prod_{y \in X_\tau^x} \left( \prod_{k \in K_y} (1 - p_k) \right) \\
&\geq 1 - \left( \prod_{k=\lfloor 3n/2 \rfloor}^{2n} (1 - p_k) \right)^{\lfloor \log^2 n \rfloor} \\
&\geq 1 - \exp\left(-\lfloor \log^2 n \rfloor \sum_{k=\lfloor 3n/2 \rfloor}^{2n} p_k\right) \\
&= 1 - \exp(-C_n),
\end{aligned} \tag{56}$$

onde  $K_y = \{k \in \mathbb{N} : k > \lfloor n/2 \rfloor \text{ e } y + k\vec{e}_1 \in S_{z+\vec{e}_1}^n\}$ . Graças a (50) e (51) o parâmetro  $C_n$  pode ser feito arbitrariamente grande escolhendo  $n$  grande.

Para concluir, denotamos

$$\mathcal{B} = \{\text{existe um caminho aberto } 2n\text{-admissível de } x \text{ a } S_{z+\vec{e}_1}^n\}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\mathcal{B}\} &= \mathbf{P}\{\mathcal{B} \mid X_\tau^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n \neq \emptyset\} \mathbf{P}\{X_\tau^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n \neq \emptyset\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\mathcal{B} \mid X_\tau^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n = \emptyset, |X_\tau^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\} \\
&\quad \times \mathbf{P}\{X_\tau^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n = \emptyset, |X_\tau^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\mathcal{B} \mid X_\tau^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n = \emptyset, |X_\tau^x| < \lfloor \log^2 n \rfloor\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{P}\{X_\tau^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n = \emptyset, |X_\tau^x| < \lfloor \log^2 n \rfloor\} \\
& \geq 1 \cdot \mathbf{P}\{X_\tau^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n \neq \emptyset\} \\
& \quad + (1 - \exp(-C_n))\mathbf{P}\{X_\tau^x \cap S_{z+\vec{e}_1}^n = \emptyset, |X_\tau^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\} \\
& \geq (1 - \exp(-C_n))(1 - \gamma)
\end{aligned}$$

e portanto, escolhendo  $n$  suficientemente grande (veja (55) e (56)),  $\mathbf{P}(\mathcal{B})$  pode ser feito arbitrariamente próximo a 1.  $\blacksquare$

Concluimos o Passo 2 com o seguinte

**Lema 4.4** *Considere o modelo de percolação orientada de Bernoulli em  $\mathbb{Z}_+^2$  onde a aresta vertical de  $(x, y)$  a  $(x, y + 1)$  é aberta com probabilidade  $p$  e a aresta horizontal de  $(x, y)$  a  $(x + 1, y)$  é aberta com probabilidade  $q$ . Então para qualquer  $0 < p < 1$  existe  $q = q(p) < 1$  tal que neste modelo a percolação ocorre.*

*Demonstração.* Consideramos um reticulado renormalizado  $\mathcal{M}_m(\mathbb{Z}_+^2)$ , onde  $m$  será escolhido mais tarde. Os vértices de  $\mathcal{M}_m(\mathbb{Z}_+^2)$  são

$$\begin{aligned}
S_z^m &= S_{(z_1, z_2)}^m = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \\
& \quad y_1 \in [mz_1 + mz_2/2, m(z_1 + 1) + mz_2/2), y_2 = z_2\}.
\end{aligned}$$

Definimos a percolação mista (por sítio e aresta) em  $\mathcal{M}_m(\mathbb{Z}_+^2)$  da seguinte maneira. O sítio  $S_z^m = S_{(z_1, z_2)}^m$  é aberto, se e somente se todas as arestas de  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{y} + \vec{e}_1$ , onde  $y_1 \in [mz_1 + mz_2/2, m(z_1 + 1) + mz_2/2 - 1)$ ,  $y_2 = z_2$ , são abertas. A aresta de  $S_z^m$  to  $S_{z+\vec{e}_1}^m$  é aberta se a aresta de  $(m(z_1 + 1) + mz_2/2 - 1, z_2)$  a  $(m(z_1 + 1) + mz_2/2, z_2)$  é aberta. A aresta de  $S_z^m$  a  $S_{z+\vec{e}_2}^m$  é aberta se pelo menos

uma das arestas de  $y$  a  $y + \vec{e}_2$ ,  $y_1 \in [mz_1 + m(z_2 + 1)/2, m(z_1 + 1) + mz_2/2)$ ,  $y_2 = z_2$  é aberta. Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\text{o sítio } S_z^m \text{ é aberto}\} &= q^m, \\ \mathbf{P}\{\text{a aresta de } S_z^m \text{ a } S_{z+\vec{e}_1}^m \text{ é aberta}\} &= q, \\ \mathbf{P}\{\text{a aresta de } S_z^m \text{ a } S_{z+\vec{e}_2}^m \text{ é aberta}\} &= 1 - (1 - p)^{m/2}. \end{aligned}$$

Note que a percolação neste modelo implica na percolação no modelo original. O “modelo renormalizado misto de percolação” domina modelo de percolação orientada dependente em  $\mathbb{Z}_+^2$  onde as arestas de  $(x, y)$  a  $(x, y + 1)$  e  $(x + 1, y)$  são abertas simultaneamente com probabilidade  $p'_{p,q} = q^{m+1}(1 - (1 - p)^{m/2})$  e fechadas simultaneamente com probabilidade  $1 - p'_{p,q}$ . O último modelo, por sua vez, domina a percolação orientada de Bernoulli em  $\mathbb{Z}_+^2$  com parâmetro  $\hat{p}$ ,  $(1 - \hat{p})^2 = 1 - p'_{p,q}$  da seguinte maneira. Se no modelo de Bernoulli pelo menos uma das arestas de  $(x, y)$  a  $(x, y + 1)$  ou  $(x + 1, y)$  é aberta, no modelo dependente ambas as arestas serão abertas. Isso acontece com probabilidade  $1 - (1 - \hat{p})^2 = p'_{p,q}$ . Portanto, podemos escolher primeiro  $m$  e depois  $q$  tais que  $p'_{p,q}$  será arbitrariamente próximo a 1, e, conseqüentemente, também o será  $\hat{p}$ , e no modelo de Bernoulli haverá percolação, o que implica na percolação no modelo original. ■

*Passo 3. Construção dinâmica.* Agora estamos prontos para definir como o aglomerado renormalizado é construído. Primeiro definimos uma ordem completa “ $\prec$ ” em  $\mathbb{Z}_+^2$  definindo os vértices de nível  $k$  como  $\{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : z_1 + z_2 = k\}$  e assumindo que os vértices são ordenados de acordo com

o nível crescente e os vértices do mesmo nível de acordo com o crescimento da segunda coordenada.

A construção do aglomerado é feita da seguinte maneira. O processo começa no  $S_0^n(\mathbf{0})$ . Adicionamos os vértices renormalizados nível depois do nível (a ordem nos vértices renormalizados é induzido por “ $\prec$ ”). Suponha que o processo foi construído até o nível  $k$  e  $S_{z_1}^n(s_{z_1}), \dots, S_{z_l}^n(s_{z_l})$  são os vértices renormalizados com sementes  $s_{z_1}, \dots, s_{z_l}$  (veja Definição 4.3). Os vértices  $z_1, \dots, z_l$  são ordenados de acordo com o crescimento da segunda coordenada. Vamos estudar todos os vértices renormalizados  $S_{z_1}^n(s_{z_1}), \dots, S_{z_l}^n(s_{z_l})$  de acordo com a ordem, verificando se há uma conexão permitida horizontal e depois vertical de cada um deles. Mais precisamente:

Se existe um caminho horizontal permitido de  $S_{z_i}^n(s_{z_i})$  (isto é, de vértice-semente  $s_{z_i} \in S_{z_i}^n$ ) a  $S_{z_i+\vec{e}_1}^n$  declaramos “a conexão renormalizada” de  $S_{z_i}^n(s_{z_i})$  a  $S_{z_i+\vec{e}_1}^n$  aberta.

“A conexão renormalizada” de  $S_{z_i}^n(s_{z_i})$  a  $S_{z_i+\vec{e}_2}^n$  é declarada aberta se a aresta  $\langle s_{z_i}, s_{z_i} + \vec{e}_2 \rangle$  é aberta.

Em ambos os casos se um novo vértice renormalizado é alcançado por uma conexão aberta destas, então o novo vértice-semente neste vértice renormalizado é definido de acordo com a Definição 4.3.

Se em algum momento deste procedimento chegamos a um vértice renormalizado  $S_z^n$  com semente  $s_z$ , denotamos por  $\mathcal{G}_{(S_z^n, s_z)}$  toda a história do processo até este momento, isto é,  $\mathcal{G}_{(S_z^n, s_z)}$  é uma  $\sigma$ -álgebra que contém toda a informação sobre as conexões renormalizadas verificadas, bem como sobre as arestas do grafo original verificadas.

É importante notar que

a) se durante a construção dinâmica foi estabelecida uma conexão renormalizada até um vértice renormalizado  $S_z^n$ , isto implica que existe um caminho aberto  $2n$ -admissível de  $\mathbf{0}$  até um vértice em  $S_z^n$ .

b) se o algoritmo chega a uma conexão  $\langle S_z^n, S_{z+\vec{e}_i}^n \rangle$ ,  $i = 1, 2$ , então

$$\mathbf{P}\{\langle S_z^n, S_{z+\vec{e}_1}^n \rangle \text{ é aberta} \mid \mathcal{G}_{\langle S_z^n, s_z \rangle}\} \geq (1 - \exp(-C_n))(1 - \gamma) \quad \text{q.c.}$$

$$\mathbf{P}\{\langle S_z^n, S_{z+\vec{e}_2}^n \rangle \text{ é aberta} \mid \mathcal{G}_{\langle S_z^n, s_z \rangle}\} \geq \varepsilon \quad \text{q.c.}$$

A afirmação a) é uma consequência direta da nossa construção. A afirmação b) é uma consequência da construção e Lema 4.3. De fato, para verificar se existe a conexão  $\langle S_z, S_{z+\vec{e}_1} \rangle$ , precisamos verificar o conjunto  $X_\tau^{s_z}$  e talvez as arestas que saem dos vértices deste conjunto. Mas o evento  $\{s_z = x\}$  pertence a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}_{\langle S_z^n, s_z \rangle}$ , que, pela construção, não envolve verificação de arestas de  $s_z$  para direita e que realmente determine o estado de  $X_\tau^{s_z}$  e da conexão  $\langle S_z, S_{z+\vec{e}_1} \rangle$ . Portanto, usando o Lema 4.3, obtemos a primeira estimativa. O argumento para a segunda é similar.

Para completar a demonstração observamos que se  $p = \varepsilon$  e  $q \leq (1 - \gamma)(1 - \exp(-C_n))$ , escolhendo  $n$  suficientemente grande com  $(p, q)$  do Lema 4.4 podemos concluir que este “processo renormalizado” domina estocasticamente o modelo de percolação orientada anisotrópica de Bernoulli com parâmetros  $(p, q)$  e portanto percola. Para detalhes referimos a [33]. Finalmente, a propriedade a) nós garante a existência de um caminho infinito  $2n$ -admissível no modelo original. O Teorema 4.1 está provado. ■

### 4.3 Generalizações e exemplos

Nesta parte discutimos outro modelo em que é possível truncar as arestas mais longas e a percolação ocorre assim mesmo. Apresentamos também um exemplo de percolação de longo alcance *parcialmente dependente* em que a condição (43) é satisfeita mas o truncamento das arestas de alcance acima de qualquer número faz com que o aglomerado de origem seja finito quase certamente. Este exemplo é relacionado com o modelo de percolação de Poisson multi escalar da Seção 1.1.

#### 4.3.1 Modelo de percolação de longo alcance espalhada

Consideramos a versão não orientada do grafo  $\mathbb{G} = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{E})$ . Para quaisquer  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$  o elo (não direcionado)  $e_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$  é aberto com probabilidade  $p_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = p_{0, \mathbf{x}-\mathbf{y}} =: p_{\mathbf{x}-\mathbf{y}}$  independentemente de todos os outros elos. Suponha que

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} p_{\mathbf{x}} = \infty \quad (57)$$

mas para qualquer reta  $\ell$  que contém 0

$$\sum_{\mathbf{x} \in \ell} p_{\mathbf{x}} < \infty.$$

Para  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$  denotamos por

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{x}) &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2 : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq n\} \text{ e} \\ \bar{H}_n(\mathbf{x}) &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2 : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > n\}. \end{aligned}$$

Sejam  $\ell_1$  e  $\ell_2$  dois raios que começam em  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Denotamos por  $\vec{e}_i$  o vetor unitário codirecionado com  $\ell_i$ ,  $i = 1, 2$ . Quando não há risco de confundir,



vamos identificar o ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{Z}^2$ ) com o seu raio-vetor. Para qualquer ângulo  $\alpha$  e  $i = 1, 2$  denotamos (veja Fig. 6)

$$S_{\alpha, \ell_i}^+(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2 : \text{os vetores } \mathbf{y} - \mathbf{x} \text{ e } \vec{e}_{\ell_i} \text{ são orientados no sentido horário e o ângulo entre eles é menor ou igual a } \alpha \},$$

$$S_{\alpha, \ell_i}^-(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2 : \text{os vetores } \vec{e}_{\ell_i} \text{ e } \mathbf{y} - \mathbf{x} \text{ são orientados no sentido horário e o ângulo entre eles é menor ou igual a } \alpha \},$$

$$S_{\alpha, \ell_i}(\mathbf{x}) = S_{\alpha, \ell_i}^+(\mathbf{x}) \cup S_{\alpha, \ell_i}^-(\mathbf{x}).$$

Sejam  $S_{\alpha, \ell_i}^+ := S_{\alpha, \ell_i}^+(\mathbf{0})$ ,  $S_{\alpha, \ell_i}^- := S_{\alpha, \ell_i}^-(\mathbf{0})$  e  $S_{\alpha, \ell_i} := S_{\alpha, \ell_i}(\mathbf{0})$ .

Definimos o operador de translação nos subconjuntos de  $\mathbb{Z}^2$

$$\tau_{r,s}(B) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{x} - r\vec{e}_{\ell_1} - s\vec{e}_{\ell_2} \in B\},$$

para quaisquer  $B \subset \mathbb{Z}^2$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ .

Denotamos

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{x} = r\vec{e}_{\ell_1} + s\vec{e}_{\ell_2}, r, s \in [0, n]\},$$

$$A^{(1)} = \tau_{n,0}(A), \quad A^{(2)} = \tau_{0,n}(A)$$

para algum  $n \in \mathbb{N}$  (veja Fig. 7). O conjunto  $A$  é um rombo com elos  $n\vec{e}_{\ell_1}$  e  $n\vec{e}_{\ell_2}$ ,  $A^{(1)}$  e  $A^{(2)}$  são congruentes a  $A$  e translados em direções  $\vec{e}_{\ell_1}$  e  $\vec{e}_{\ell_2}$  respectivamente pela distância  $n$ .

Considerando  $A_{\mathbf{z}} = \tau_{nz_1, nz_2}(A)$  para todos  $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}$  obtemos uma partição de  $\mathbb{Z}^2$  em rombos  $A_{\mathbf{z}}$ .

Seja  $\gamma$  o ângulo entre  $\ell_1$  e  $\ell_2$ . Escolhemos  $\alpha_n$  como o ângulo máximo tal que  $S_{\alpha_n, \ell_i}(n\vec{e}_{\ell_{3-i}}/2)$  não tem pontos em comum com os segmentos de  $0$  a

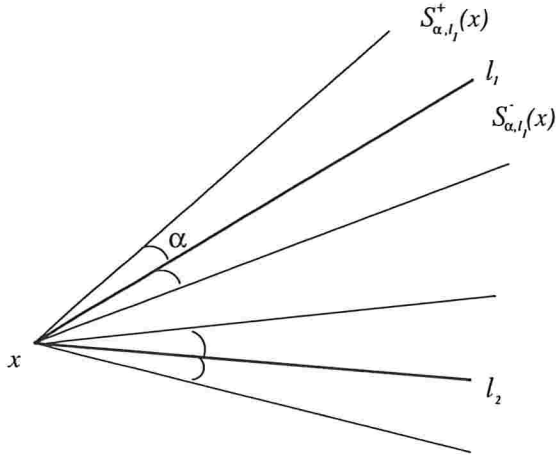


Figura 6: As regiões  $S_{\alpha, l_1}^+(\mathbf{x})$  e  $S_{\alpha, l_1}^-(\mathbf{x})$ .

$2n\vec{e}_{\ell_i}$  e de  $n\vec{e}_{\ell_{3-i}}$  a  $n\vec{e}_{\ell_{3-i}} + 2n\vec{e}_{\ell_i}$ ,  $i = 1, 2$  (veja Fig. 7). Portanto,

$$\alpha_n = \min \left\{ \arctan \frac{n \sin \gamma}{4n - n \cos \gamma}, \arctan \frac{n \sin \gamma}{4n + n \cos \gamma} \right\}.$$

Seja  $F(C)$  o número médio de elos abertos de 0 a um conjunto  $C \subset \mathbb{Z}^2$ , deste modo,

$$F(C) = \sum_{\mathbf{x} \in C} p_{\mathbf{x}}.$$

Denotamos

$$F_{n,i}^+ = F(H_{n/2}(\mathbf{0}) \cap S_{\alpha_n, \ell_i}^+) - \sup_{\substack{C: C \subset \mathbb{Z}^2, \\ |C| = \lfloor \log^2 n \rfloor}} F(C \cap H_{n/2}(\mathbf{0}) \cap S_{\alpha_n, \ell_i}^+), \quad (58)$$

$$\hat{F}_{n,i}^+ = F(\overline{H}_{n/2}(\mathbf{0}) \cap S_{\alpha_n, \ell_i}^+ \cap A^{(i)}) \lfloor \log^2 n \rfloor, \quad i = 1, 2. \quad (59)$$

Analogamente podemos definir  $F_{n,i}^-$  e  $\hat{F}_{n,i}^-$  substituindo  $S_{\alpha_n, \ell_i}^+$  por  $S_{\alpha_n, \ell_i}^-$ .

Formulamos agora duas condições sobre as probabilidades  $p_{\mathbf{x}}$  que são análogas às do Teorema 4.1.

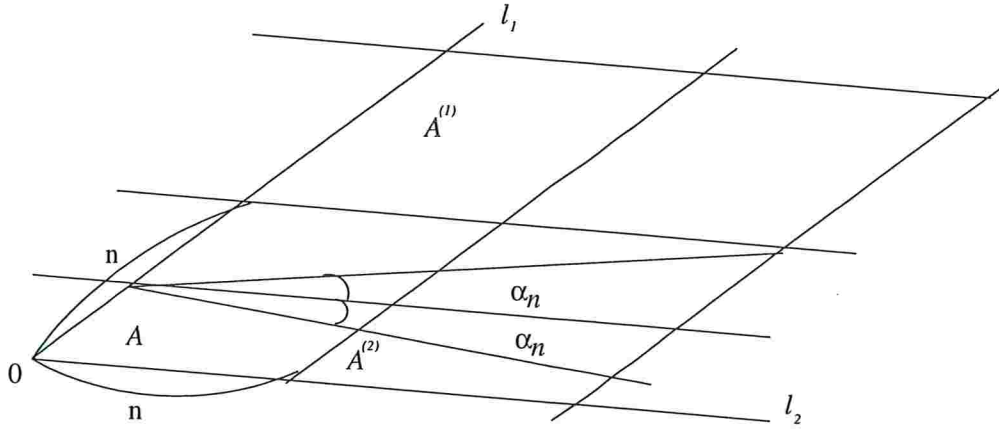


Figura 7: A partição de  $\mathbb{Z}^2$  em rombos e a definição de ângulo  $\alpha_n$

*Condição D:*

Existem dois raios  $l_1$  and  $l_2$  que começam em 0,  $l_1 \neq -l_2$ , tais que para qualquer  $\alpha$

$$\sum_{\mathbf{x} \in S_{\alpha, \ell_i}} p_{\mathbf{x}} = \infty, \quad (60)$$

$i = 1, 2$ .

*Condição E:*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \min \left\{ F_{n,1}^+, \hat{F}_{n,1}^+, F_{n,2}^+, \hat{F}_{n,2}^+, F_{n,1}^-, \hat{F}_{n,1}^-, F_{n,2}^-, \hat{F}_{n,2}^- \right\} = \infty. \quad (61)$$

**Teorema 4.2** *Se as probabilidades  $p_{\mathbf{x}}$  satisfazem as Condições D e E, então existe  $L \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbf{P}_L\{|C_0| = \infty\} > 0$ .*

Lembre que  $C_0$  é o aglomerado aberto de origem e  $\mathbf{P}_L$  é a medida de probabilidade do processo  $L$ -truncado, dada por

$$p_{\mathbf{x}}^L = \begin{cases} p_{\mathbf{x}}, & \text{se } \|\mathbf{x}\| \leq L, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (62)$$

*Remarca.* Embora a Condição E pareça muito complicada, de fato é a Condição  $\beta$  do Teorema 4.1 reescrita para o modelo de percolação espalhada.

Em particular, quando  $p_x$  depende somente da norma euclideana de  $x$ , as Condições D e E ficam muito mais simples e similares às do Teorema 4.1.

*Condição D':*

$\sum_{x \in \mathbb{Z}^2} p_x = \infty$  e  $p_x$  são não crescentes em  $\|x\|$ .

*Condição E':*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \min\left\{ \sum_{x: \log n \leq \|x\| \leq n/2} p_x, p_n n^2 \log^2 n \right\} = \infty. \quad (63)$$

O próximo teorema é um corolário do Teorema 4.2.

**Teorema 4.3** *Se as probabilidades  $p_x = p_{\|x\|}$  satisfazem às Condições D' e E', então existe  $L \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathbf{P}_L\{|C_0| = \infty\} > 0$ .*

### 4.3.2 Remarcas sobre a percolação dependente

Nesta parte construímos um modelo de percolação bidimensional de longo alcance não orientada *parcialmente dependente* com as seguintes propriedades. As arestas direcionadas  $\langle x, y \rangle$  e  $\langle z, u \rangle$  são abertas ou não independentemente se  $x \neq z$ . Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{Z}^2$  a aresta  $\langle x, y \rangle$  é aberta com probabilidade  $p_{x,y} = p_{0,y-x}$ . O elo não direcionado  $e_{x,y}$  é aberto se pelo menos uma das arestas  $\langle x, y \rangle$  e  $\langle y, x \rangle$  é aberta. No modelo que a gente vai construir

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{P}\{e_{0,x} \text{ é aberto}\} = \infty$$

e, portanto, a percolação ocorre. No entanto, para qualquer  $K > 0$  temos  $\mathbf{P}_K\{|C_0| = \infty\} = 0$ , isto é, no modelo truncado não há percolação.

Descrevemos agora o modelo em mais detalhes. Primeiro, consideramos o modelo de percolação de Poisson multi escalar em  $\mathbb{R}^2$ . Depois construímos a aproximação discreta deste modelo, que será o modelo que queremos. Vamos mostrar que o modelo de Poisson domina a sua aproximação discreta, isto é, se no modelo de Poisson não há percolação, então na aproximação também não há percolação.

*Modelo de percolação de Poisson multi escalar.* Aqui é mais conveniente usar um modelo um pouco diferente daquele considerado em Seção 1.1. Os discos do tipo  $i$  são discos no plano com raio  $r_i$ ,  $r_i < r_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , onde  $r_i$  será escolhido mais tarde. Suponhamos que

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \text{const} > 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (64)$$

Centros dos discos do tipo  $i$  formam um campo de Poisson em  $\mathbb{R}^2$  com taxa  $\lambda_i = c/r_i^2$  independentemente dos outros.

O processo  $K$ -truncado é dado pelas taxas

$$\lambda_i^K = \begin{cases} \lambda_i, & \text{se } r_i \leq K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (65)$$

O próximo passo é definir a *aproximação discreta do modelo de Poisson*. Esta aproximação primeiro foi considerada em [34]. Denotamos por  $V(\mathbf{x})$  o quadrado centrado em  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$  com elo 1, isto é,

$$V(\mathbf{x}) = (x_1 - 1/2, x_1 + 1/2) \times (x_2 - 1/2, x_2 + 1/2).$$

A aresta direcionada  $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \rangle$  é pintada de cor  $i$  se

$$\sup_{\mathbf{x} \in V(\mathbf{x}_0), \mathbf{y} \in V(\mathbf{y}_0)} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq r_i$$

e existe um centro de disco do tipo  $i$  em  $V(\mathbf{x}_0)$  (note que a aresta pode ser pintada de várias cores). A aresta  $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \rangle$  é aberta se ela é pintada de cor  $i$  para algum  $i = 1, 2, \dots$ . O elo não direcionado  $e_{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0}$  é aberto se pelo menos uma das arestas  $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \rangle$  e  $\langle \mathbf{y}_0, \mathbf{x}_0 \rangle$  é aberta.

Observe que o modelo obtido é um modelo de percolação não orientada *dependente*. Temos

$$\mathbf{P}\{\text{existe um centro de disco do tipo } i \text{ em } V(\mathbf{x}_0)\} = 1 - \exp(-c/r_i^2).$$

Seja

$$l(\mathbf{x}) = \inf \left\{ i \in \mathbb{N} : \sup_{\mathbf{y} \in V(\mathbf{0}), \mathbf{x}' \in V(\mathbf{x})} \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}\| \leq r_i \right\}.$$

Denotamos

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{x}} &= \mathbf{P}\{\text{o elo } e_{\mathbf{0}, \mathbf{x}} \text{ é aberto}\} \\ &= 1 - [\mathbf{P}\{\text{a aresta } \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle \text{ é fechada}\}]^2 \\ &= 1 - \left( \prod_{i=l(\mathbf{x})}^{\infty} \exp\left(-\frac{c}{r_i^2}\right) \right)^2 = 1 - \exp\left(-2c \sum_{i=l(\mathbf{x})}^{\infty} \frac{1}{r_i^2}\right) \end{aligned} \quad (66)$$

É fácil ver que  $\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} p_{\mathbf{x}} = \infty$ . De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} p_{\mathbf{x}} &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{x}: r_j \leq l(\mathbf{x}) < r_{j+1}} p_{\mathbf{x}} \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \beta r_{j+1}^2 \left( 1 - \exp\left(-2c \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{r_i^2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\beta} r_{j+1}^2 2c \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1}{r_i^2} \\
&\geq \sum_{j=1}^{\infty} 2c \tilde{\beta} r_{j+1}^2 \frac{1}{r_{j+1}^2} = \sum_{j=1}^{\infty} 2c \tilde{\beta} = \infty
\end{aligned}$$

para constantes positivas  $\beta$  e  $\tilde{\beta}$ . Aqui usamos (64).

Como sempre,  $C_0$  denota o aglomerado aberto de origem e  $\mathbf{P}_K$  é a medida correspondente ao processo  $K$ -truncado (isto é, à aproximação  $K$ -truncada do modelo de Poisson).

**Teorema 4.4** *Existem  $r_1, r_2, \dots$  que satisfazem (64) e  $c$  tais que*

1.  $\mathbf{P}\{|C_0| = \infty\} = 1$ ,
2. para qualquer  $K > 0$  temos  $\mathbf{P}_K\{|C_0| = \infty\} = 0$ .

### 4.3.3 Demonstrações

**Demonstração de Teorema 4.2** Seja

$$L = \max\{\|\mathbf{x}\|, x \in A^{(1)} \cup A^{(2)}\}.$$

Note que  $L = L(n)$ . Vamos provar que existe  $n$  tal que para qualquer  $\mathbf{x}$  que pertence a algum rombo  $A_{\mathbf{z}}$  da partição existe um caminho aberto  $L$ -admissível de  $\mathbf{x}$  a  $A_{\mathbf{z}+\tilde{\mathbf{e}}_1}$  com probabilidade arbitrariamente próxima a 1 e a rombo  $A_{\mathbf{z}+\tilde{\mathbf{e}}_2}$  também com probabilidade arbitrariamente próxima a 1 *independentemente*. É suficiente provar a existência deste caminho para, por exemplo,  $A_{\mathbf{z}+\tilde{\mathbf{e}}_1}$ . A demonstração será similar à do Teorema 4.1.

*Passo 1.* Fixamos  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ . Na partição do plano em rombos existe um rombo  $A_{\mathbf{z}}$  que contém  $\mathbf{x}$ . Sem perder a generalidade podemos supor que  $\mathbf{x} \in A$ . Definimos a “geração zero” por  $X_0^{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}\}$ . A construção do processo de ramificação é bastante próxima à da demonstração do Teorema 4.1.

A diferença é que primeiro escolhemos entre as regiões  $S_{\alpha_n, \ell_1}^+(\mathbf{x})$  e  $S_{\alpha_n, \ell_1}^-(\mathbf{x})$  aquele, interseção de que com  $H_{n/2}(\mathbf{x})$  fica totalmente dentro de  $A \cup A^{(1)}$  (é possível fazer isso por definição de  $\alpha_n$ ). Para ser mais claro, digamos que a região  $S_{\alpha_n, \ell_1}^+(\mathbf{x})$  foi escolhida. Denotamos então  $R(\mathbf{x}) = S_{\alpha_n, \ell_1}^+(\mathbf{x}) \cap H_{n/2}(\mathbf{x})$ . Depois consideramos todos os elos abertos de  $\mathbf{x}$  de comprimento no máximo  $n/2$  que estão dentro da região escolhida. Todos os vértices conexos a  $\mathbf{x}$  por tal elo são chamados de “primeira geração” e denotados por  $\tilde{X}_1^{\mathbf{x}}$ . Seja  $X_1^{\mathbf{x}} = X_0^{\mathbf{x}} \cup \tilde{X}_1^{\mathbf{x}}$ . Enumeramos os pontos de  $X_1^{\mathbf{x}}$  de acordo com o crescimento da distância de  $\mathbf{x}$ ,  $X_1^{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y}_{1,1} = \mathbf{x}, \mathbf{y}_{1,2}, \dots, \mathbf{y}_{1, l_1}\}$ . O conjunto dos vértices não verificados é  $Y_1 = \{\mathbf{y}_{1,2}, \dots, \mathbf{y}_{1, l_1}\}$ . Se  $Y_1 = \emptyset$ , isto é,  $l_1 = 1$ , o procedimento é interrompido. Se não, continuamos.

A construção da geração  $(m+1)$  é definida da seguinte maneira. Se depois de  $m$  passos temos  $Y_m \neq \emptyset$ , enumeramos os pontos de  $X_m^{\mathbf{x}}$  de acordo com o crescimento da distância de  $\mathbf{x}$ , pegamos o vértice  $\mathbf{y}_{m, m+1}$  e consideramos todos os elos abertos  $e_{\mathbf{y}_{m, m+1}, \mathbf{y}}$  tais que  $\mathbf{y} \in R(\mathbf{y}_{m, m+1})$  e  $\mathbf{y} \notin X_m^{\mathbf{x}}$ . Note que se  $R(\mathbf{x}) = S_{\alpha_n, \ell_1}^+(\mathbf{x}) \cap H_{n/2}(\mathbf{x})$ , para  $\mathbf{y}_{m, m+1}$  a mesma região ( $S^+$ ) pode ser escolhida, portanto,  $R(\mathbf{y}_{m, m+1}) = S_{\alpha_n, \ell_1}^+(\mathbf{y}_{m, m+1}) \cap H_{n/2}(\mathbf{y}_{m, m+1})$ . Denotamos o conjunto de vértices novos conexos a  $\mathbf{y}_{m, m+1}$  por  $\tilde{X}_{m+1}^{\mathbf{x}}$ , chamando ele de “geração  $m+1$ ”. Seja  $X_{m+1}^{\mathbf{x}} = X_m^{\mathbf{x}} \cup \tilde{X}_{m+1}^{\mathbf{x}}$ . Enumeramos  $X_{m+1}^{\mathbf{x}}$  de acordo com o crescimento da distância de  $\mathbf{x}$ . É importante notar que a construção é feita



de tal maneira que os vértices “novos”  $\tilde{X}_{m+1}^x$  são mais distantes de  $x$  do que os vértices “já verificados”  $X_{m+1}^x \setminus Y_m$ , portanto, a ordem é preservada. Então,  $X_{m+1}^x = \{y_{m+1,1} = x, \dots, y_{m+1,l_{m+1}}\}$  e  $Y_{m+1} = \{y_{m+1,m+2}, \dots, y_{m+1,l_{m+1}}\}$ . Se  $Y_{m+1} = \emptyset$  o procedimento é interrompido, senão pegamos o ponto  $y_{m+1,m+2}$  e continuamos.

Como antes, definimos os tempos de parada:

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \inf\{m : Y_m = \emptyset\} \\ \tau_1 &= \inf\{m : |X_m^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\} \\ \tau_2 &= \inf\{m : X_m^x \cap A^{(1)} \neq \emptyset\} \\ \tau &= \min\{\tau_0, \tau_1, \tau_2\} \leq \log^2 n.\end{aligned}$$

Ir de um bloco ao outro é possível de duas maneiras.

- 1) Conexão de  $A_z$  a  $A_{z+\vec{e}_1}$ . Dizemos que a conexão já é estabelecida, se  $X_\tau^x \cap A_{z+\vec{e}_1} \neq \emptyset$ . Se  $X_\tau^x \subset A_z$  mas  $|X_\tau^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor$ , verificamos se há pelo menos um elo aberto de  $X_\tau^x$  a  $A_{z+\vec{e}_1}$ .
- 2) Conexão de  $A_z$  a  $A_{z+\vec{e}_2}$  é definida da mesma maneira. Se  $X_\tau^x \cap A_{z+\vec{e}_2} \neq \emptyset$ , e então a conexão é estabelecida. Se  $X_\tau^x \subset A_z$  mas  $|X_\tau^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor$ , verificamos se existe pelo menos um elo aberto de  $X_\tau^x$  a  $A_{z+\vec{e}_2}$ .

As conexões acima (e só elas) são permitidas.

**Definição 4.4** *Se o bloco  $A_z$  for alcançado por uma destas conexões permitidas de pelo menos um dos blocos  $A_{z-\vec{e}_1}$ ,  $A_{z-\vec{e}_2}$ , então o vértice mais distante de  $x$  em  $A_z$  alcançado por tal conexão permitida é chamado “semente” em*

$A_{\mathbf{z}}$  e denotado  $a_{\mathbf{z}}$ . Assumimos  $a_0 = \mathbf{0}$ . Denotamos o bloco  $A_{\mathbf{z}}$  com semente  $a_{\mathbf{z}}$  por  $A_{\mathbf{z}}(a_{\mathbf{z}})$ .

Lembre que

$$L = \max\{\|\mathbf{x}\|, x \in A^{(1)} \cup A^{(2)}\}.$$

*Passo 2.* Analogamente ao Lema 3.5 podemos provar o seguinte

**Lema 4.5** *Escolhendo  $n$  suficientemente grande a probabilidade da existência de um caminho aberto  $L$ -admissível de  $\mathbf{x} \in A$  até  $A^{(1)}$  pode ser feita arbitrariamente próxima a 1 uniformemente em  $\mathbf{x} \in A$ .*

*Demonstração.* Denotamos  $\tau' = \inf\{t : |Y_t| = 0 \text{ ou } |Y_t| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\}$  e  $\eta_t = |Y_{t \wedge \tau'}|$ .

Seja  $t < \tau'$ . Para construir a geração  $(t + 1)$  consideramos os elos de  $\mathbf{y}_{t,t+1} \in Y_t$ .

Seja  $B_t = R(\mathbf{y}_{t,t+1}) \setminus Y_t$ . Visto que  $|Y_t| < \lfloor \log^2 n \rfloor$ , usando Lema 4.1, temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\text{não há elos abertos de } \mathbf{y}_{t,t+1} \text{ a qualquer vértice de } B_t\} \\ &= \prod_{\mathbf{y} \in B_t} \mathbf{P}\{\text{não há elo aberto de } \mathbf{y}_{t,t+1} \text{ a } \mathbf{y}\} \\ &\leq \exp\left(-\sum_{\mathbf{y} \in B_t} \mathbf{P}\{\text{não há elo aberto de } \mathbf{y}_{t,t+1} \text{ a } \mathbf{y}\}\right) \\ &\leq \exp\left(-\left(\sum_{\mathbf{y} \in R(\mathbf{y}_{t,t+1})} p_{\mathbf{y}_{t,t+1}-\mathbf{y}} - \sup_{\substack{C: C \subset \mathbb{Z}^2, \\ |C| = \lfloor \log^2 n \rfloor}} \sum_{\mathbf{y} \in C \cap R(\mathbf{y}_{t,t+1})} p_{\mathbf{y}_{t,t+1}-\mathbf{y}}\right)\right) \\ &= \exp(-M_n), \end{aligned}$$

onde  $M_n$  pode ser feito arbitrariamente grande escolhendo  $n$  grande pelo (61).

Dividimos  $B_t$  em dois conjuntos disjuntos  $B_t^1$  e  $B_t^2$  tais que

$$\mathbf{P}\{\text{não há elos abertos de } \mathbf{y}_{t,t+1} \text{ a } B_t^i\} \leq \exp(-M/2 + 1), \quad i = 1, 2.$$

Temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\eta_{t+1} - \eta_t \geq 1 \mid \eta_1, \dots, \eta_t\} \\ &= \mathbf{P}\{\text{existem pelo menos dois elos abertos de } \mathbf{y}_{t,t+1} \text{ a } B_t\} \mathbf{1}_{\{0 < \eta_t < S\}} \\ &\geq (1 - \mathbf{P}\{\text{não há elos abertos de } \mathbf{y}_{t,t+1} \text{ a } B_t^1\} \\ &\quad - \mathbf{P}\{\text{não há elos abertos de } \mathbf{y}_{t,t+1} \text{ a } B_t^2\}) \mathbf{1}_{\{0 < \eta_t < S\}} \\ &\geq (1 - 2 \exp(-M/2 + 1)) \mathbf{1}_{\{0 < \eta_t < S\}}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 4.2

$$\mathbf{P}\{\eta_{r'} = 0\} \leq \gamma = \frac{\delta}{1 - \delta}, \quad (67)$$

onde  $\delta = 2 \exp(-M_n/2 + 1)$ . Então

$$\mathbf{P}\{\{X_\tau^x \cap A^{(1)} \neq \emptyset\} \cup \{X_\tau^x \cap A^{(1)} = \emptyset, |X_\tau^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\}\} \geq 1 - \gamma. \quad (68)$$

Suponha que  $X_\tau^x \cap A^{(1)} = \emptyset$ . Já que consideramos somente elos de comprimento no máximo  $n/2$  na região apropriada, temos  $X_\tau^x \subset A$ .

Nas próximas estimativas somente os elos de comprimento entre  $n/2$  e  $L$  são usados. Temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\text{existe pelo menos um elo aberto} \\ & \quad \text{de } X_\tau^x \text{ a } A^{(1)} \mid X_\tau^x \subset A, |X_\tau^x| \geq \lfloor \log^2 n \rfloor\} \\ &= 1 - \prod_{y \in X_\tau^x} \mathbf{P}\{\text{não há elos abertos de } y \text{ a } A^{(1)}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq (1 - \exp(-[\log^2 n] \min \left\{ \sum_{\substack{y: \|y\| > n/2, \\ y \in S_{\alpha_n, \epsilon_1}^+ \cap A^{(1)}}} p_y, \sum_{\substack{y: \|y\| > n/2, \\ y \in S_{\alpha_n, \epsilon_1}^- \cap A^{(1)}}} p_y \right\})) \\
&= 1 - \exp(-C_n), \tag{69}
\end{aligned}$$

pelo (61), onde  $C_n$  pode ser feito arbitrariamente grande escolhendo  $n$  grande.

Como na demonstração do Lema 3.5, denotamos

$$\mathcal{B} = \{\text{existe um caminho } L\text{-admissível de } x \text{ a } A^{(1)}\}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{\mathcal{B}\} &= \mathbf{P}\{\mathcal{B} \mid X_\tau^x \cap A^{(1)} \neq \emptyset\} \mathbf{P}\{X_\tau^x \cap A^{(1)} \neq \emptyset\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\mathcal{B} \mid X_\tau^x \cap A^{(1)} = \emptyset, |X_\tau^x| \geq [\log^2 n]\} \\
&\quad \times \mathbf{P}\{X_\tau^x \cap A^{(1)} = \emptyset, |X_\tau^x| \geq [\log^2 n]\} \\
&\quad + \mathbf{P}\{\mathcal{B} \mid X_\tau^x \cap A^{(1)} = \emptyset, |X_\tau^x| < [\log^2 n]\} \\
&\quad \times \mathbf{P}\{X_\tau^x \cap A^{(1)} = \emptyset, |X_\tau^x| < [\log^2 n]\} \\
&\geq 1 \cdot \mathbf{P}\{X_\tau^x \cap A^{(1)} \neq \emptyset\} \\
&\quad + (1 - \exp(-C_n)) \mathbf{P}\{X_\tau^x \cap A^{(1)} = \emptyset, |X_\tau^x| \geq [\log^2 n]\} \\
&\geq (1 - \exp(-C_n))(1 - \gamma)
\end{aligned}$$

por (68) e (69), e portanto  $\mathbf{P}\{\mathcal{B}\}$  pode ser feita arbitrariamente próxima a 1 escolhendo  $n$  grande. ■

Da mesma maneira é possível provar que para  $n$  bastante grande existe um caminho aberto  $L$ -admissível de  $x$  a  $A^{(2)}$  com probabilidade próxima a 1. Observe que na construção de um caminho aberto  $L$ -admissível de  $x$  a  $A^{(1)}$  e de  $x$  a  $A^{(2)}$  usamos os elos *diferentes*, portanto, estes eventos (que existe

um caminho aberto  $L$ -admissível de  $\mathbf{x}$  a  $A^{(1)}$  e que existe um caminho aberto  $L$ -admissível de  $\mathbf{x}$  a  $A^{(2)}$  são independentes.

*Passo 3. Construção dinâmica.* Usamos a mesma ordem “ $\prec$ ” em  $\mathbb{Z}_+^2$  que em 4.2. O bloco  $A_{\mathbf{z}}$  corresponde ao vértice  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^2$ . O processo começa em  $A_0(\mathbf{0})$ . Suponha que a construção foi feita até o nível  $k$ . Sejam  $A_{\mathbf{z}_1}(a_{\mathbf{z}_1}), \dots, A_{\mathbf{z}_l}(a_{\mathbf{z}_l})$  blocos do nível  $k$  com sementes  $a_{\mathbf{z}_1}, \dots, a_{\mathbf{z}_l}$  ordenados de acordo com o crescimento da segunda coordenada. Verificamos os blocos  $A_{\mathbf{z}_1}(a_{\mathbf{z}_1}), \dots, A_{\mathbf{z}_l}(a_{\mathbf{z}_l})$  na ordem induzida por “ $\prec$ ”. Se existe uma conexão permitida de  $A_{\mathbf{z}_i}(a_{\mathbf{z}_i})$  a  $A_{\mathbf{z}_i+\vec{e}_j}$ ,  $j = 1, 2$ , então declaramos o elo  $e_{A_{\mathbf{z}_i}, A_{\mathbf{z}_i+\vec{e}_j}}$  aberto e o semente em  $A_{\mathbf{z}_i+\vec{e}_j}$  é definido de acordo com Definição 4.4.

Denotamos por  $\mathcal{G}_{\langle A_{\mathbf{z}}, a_{\mathbf{z}} \rangle}$  toda a história do processo até chegar ao  $A_{\mathbf{z}}(a_{\mathbf{z}})$ . Note que se em algum passo da construção dinâmica foi estabelecida uma conexão permitida até o bloco  $A_{\mathbf{z}}(a_{\mathbf{z}})$ , então existe um caminho aberto  $L$ -admissível de  $\mathbf{0}$  até  $a_{\mathbf{z}}$ . É fácil ver que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{e_{A_{\mathbf{z}}, A_{\mathbf{z}+\vec{e}_1}} \text{ é aberto} \mid \mathcal{G}_{\langle A_{\mathbf{z}}, a_{\mathbf{z}} \rangle}\} &\geq (1 - \exp(-C_n))(1 - \gamma) \quad \text{q.c.}, \\ \mathbf{P}\{e_{A_{\mathbf{z}}, A_{\mathbf{z}+\vec{e}_2}} \text{ é aberto} \mid \mathcal{G}_{\langle A_{\mathbf{z}}, a_{\mathbf{z}} \rangle}\} &\geq (1 - \exp(-C_n))(1 - \gamma) \quad \text{q.c.} \end{aligned}$$

Portanto, este processo renormalizado domina estocásticamente a percolação orientada de Bernoulli com parâmetro  $p = (1 - \exp(-C_n))(1 - \gamma)$  e então percola se  $n$  for suficientemente grande. Por isso, existe um caminho infinito aberto  $L$ -admissível no modelo original. Provamos o Teorema 4.2.  $\blacksquare$

**Demonstração de Teorema 4.4** É fácil ver que se no modelo de Poisson não há percolação, então na sua aproximação discreta também não há

percolação. De fato, pega dois pontos  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{Z}^2$ . Suponha que eles são conexos por um elo aberto de comprimento  $l$ . Quer dizer, existem  $i$  tal que  $r_{i-1} \leq l < r_i$  e  $j \geq i$  tal que o centro do disco  $D_j$  está em  $V(\mathbf{x}_0) \cup V(\mathbf{y}_0)$ , e

$$\sup_{\mathbf{x} \in V(\mathbf{x}_0), \mathbf{y} \in V(\mathbf{y}_0)} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq r_j,$$

pela construção da aproximação. Isto implica imediatamente que  $\mathbf{x}_0 \in D_j$  e  $\mathbf{y}_0 \in D_j$ . Suponha agora que existe um caminho aberto entre dois vértices em  $\mathbb{Z}^2$ . Enumeramos os vértices deste caminho  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . Então  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{x}_{i+1}$  pertencem a mesmo disco  $D^i, i = 1, \dots, n-1$ . Portanto  $\mathbf{x}_1 \in D^1, \mathbf{x}_n \in D^{n-1}$  e  $\mathbf{x}_{i+1} \in D^i \cap D^{i+1}, i = 1, \dots, n-1$ . Deste modo, o modelo de Poisson domina o modelo discreto. O mesmo vale para modelos truncados. O Teorema 1.1 implica que para  $c < c_{cr}$  existe um  $r$  tal que para  $r_i = r^i, i = 1, 2, \dots$  no modelo de Poisson com discos de tipos  $1, 2, \dots, n$  não há percolação. Note que embora no Teorema 1.1 os raios sejam decrescentes, e aqui crescentes, para o número finito dos tipos isso não tem importância. Portanto, no modelo de Poisson truncado, e, conseqüentemente, na sua aproximação discreta não há percolação. ■

## Referências Bibliográficas

- [1] S.R. Broadbent (1954) In discussion of Symposium on Monte-Carlo methods. *J. Roy. Statist. Soc. B*, 16–68.
- [2] S.R. Broadbent, J.M. Hammersley (1957) Percolation processes, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **53**, 629–641, 642–645.

- [3] I. Benjamini, O. Schramm (1998) Exceptional planes of percolation. *Probab. Theory Related Fields* **111** (4), 551–564.
- [4] J.T. Chayes, L. Chayes (1989) The large- $N$  limit of the threshold values in Mandelbrot’s fractal percolation process. *J. Phys. A* **22**, L501–L506.
- [5] J.T. Chayes, L. Chayes, R. Durrett (1988) Connectivity properties of Mandelbrot’s percolation process. *Probab. Theory Relat. Fields* **77**, 307–324.
- [6] J.T. Chayes, L. Chayes, E. Grannan, S. Swindle (1991) Phase transitions in Mandelbrot’s percolation process in three dimensions. *Probab. Theory Relat. Fields* **90**, 291–300.
- [7] L. Chayes, R. Pemantle, Y. Peres (1997) No directed fractal percolation in zero area. *J. Statist. Phys.* **88**, 1353–1362.
- [8] K.J. Falconer, G.R. Grimmett (1992) On the geometry of random Cantor sets and fractal percolation. *J. Theoret. Probab.* **5**, 465–485.
- [9] E.N. Gilbert (1961) Random plane networks, *J. Soc. Indust. Appl.* **9**, 533–543.
- [10] G. Grimmett (1989) *Percolation*. Springer-Verlag, New York-Berlin.
- [11] G.R. Grimmett and J.M. Marstrand (1990) The supercritical phase of percolation is well behaved. *Proc. Royal Soc. (London) A* **430**, 439–457.

- [12] J.C. Gupta, B.V. Rao (1999) Van den Berg-Kesten inequality for the Poisson Boolean model for continuum percolation. *Sankhyā Ser. A* **61** (3), 337–346.
- [13] F.A. Haight (1967) *Handbook of the Poisson distribution*. Publications in Operations Research (11), John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney.
- [14] P. Hall (1985) On continuum percolation. *Ann. Probab.* **13** (4), 1250–1266.
- [15] F. den Hollander, M.V. Menshikov, S.Yu. Popov (1999) A note on transience vs. recurrence for branching random walk in random environment. *J. Statist. Phys.* **95**, 587–614.
- [16] H. Kesten (1982) *Percolation theory for mathematicians*. Progress in Prob. and Stat., **2**, Birkhausen, Boston, Mass.
- [17] J. Lamperti (1970) Maximal branching processes and “long-range percolation”, *J. Appl. Prob.* **7**, 89–98.
- [18] T.M. Liggett, R.H. Schonmann, A.M. Stacey (1997) Domination by product measures. *Ann. Probab.* **25** (1), 71–95.
- [19] B. Mandelbrot (1974) Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.* **62**, 331–358.



- [20] R. Meester, R. Roy (1996) *Continuum Percolation*. Cambridge Tracts in Mathematics, **119**. Cambridge University Press, Cambridge.
- [21] R. Meester, R. Roy, A. Sarkar (1994) Non-universality and continuity of the critical covered volume fraction. *J. Statist. Phys.* **75**, 123–134.
- [22] M.V. Menshikov (1986) Coincidence of critical points in percolation problems. *Sov. Math. Doklady* **33**, 856–859.
- [23] Menshikov, M.V., 1987. Qualitative estimates and rigorous inequalities for critical points of a graph and its subgraphs. *Probab. Theory Appl.* **32**, 544–547.
- [24] M.V. Menshikov, S.A. Molchanov, A.F. Sidorenko (1986) Percolation theory and some applications. *Itogi Nauki i Techniki (Series of Probability Theory, Mathematical Statistics, Theoretical Cybernetics)* **24**, 53–110. Tradução para inglês em: *J. Soviet Math.* **42**, 1766–1810 (1988).
- [25] M.V. Menshikov, S.Yu. Popov, M. Vachkovskaia (2000). On the connectivity properties of the complementary set in fractal percolation models. Aceito pelo *Prob. Theory Relat. Fields*.
- [26] M.V. Menshikov, S.Yu. Popov, M. Vachkovskaia (2000). Multiscale percolation on  $k$ -symmetric mosaic. Aceito pelo *Statistics and Probability letters*
- [27] M.V. Menshikov, V. Sidoravicius, M. Vachkovskaia (2000). A note on two dimensional truncated long-range percolation. Submetido.

- [28] M.V. Menshikov, A.F. Sidorenko (1987) Coincidence of critical points for Poisson percolation models. *Theory Probab. Appl.* **32**, 603–606.
- [29] M.E. Orzechowski (1996) On the phase transition to sheet percolation in random Cantor sets. *J. Statist. Phys.* **82**, 1081–1098.
- [30] M.E. Orzechowski (1998) A lower bound on the box-counting dimension of crossings in fractal percolation. *Stochastic Process. Appl.* **74**, 53–65.
- [31] A. Sarkar (1997) Co-existence of the occupied and vacant phase in Boolean models in three or more dimensions. *Adv. Appl. Probab.* **29** (4), 878–889.
- [32] A. Sarkar (1998) Finite clusters in high density Boolean models with balls of varying sizes. *Adv. Appl. Probab.* **30** (4), 929–947.
- [33] V. Sidoravicius, D. Surgailis, M.E. Vares (1999) On the truncated anisotropic long-range percolation on  $\mathbb{Z}^2$ . *Stoch. Processes Appl.* **81**, 337–349.
- [34] S.A. Zuev, A.F. Sidorenko (1985) Continuous models of percolation theory I, II, *Th. Math. Phys.* **62**, 51–58, 171–177.