Klassische Elektrodynamik

Literatur:

1. T. Fließbach. Elektrodynamik
2. J.D. Jackson. Klassishe Elektrodynamik
3. L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Band 2: Klassische Feldtheorie

0. Einleitung

Punktmechanik: Bahnkurven $\vec{r}(t)$ von Teilchen und ihre Bewegungsgleichungen stehen im Mittelpunkt

Dagegen ist die Elektrodynamik eine Feldtheorie. Im Mittelpunkt hier stehen elektromagnetische Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$, die durch die Kraft $\vec{F}$ definiert, die sie auf eine Ladung ausüben

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right)$$

(SI Maßsystem – siehe Diskussion unten)

Bewegungsgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind Feldgleichungen – partielle Differentialgleichungen die raumzeitliches Verhalten von $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ bestimmen — Maxwellgleichungen:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

für äußere Quellen
$\rho(r,t)$ – Ladungsdichte
$\vec{j}(r,t)$ – Stromdichte
im Vakuum

(SI Einheitensystem)

Notationen:

$\vec{\nabla}$ – "Nabla-Operator" $= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ (in 3D)

- $\phi(\vec{r})$ – Skalarfunktion $\rightarrow$ $\vec{\nabla}\phi_{(\vec{r})} \equiv \text{grad}\,\phi(\vec{r})$

in Komponenten: $\vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{Gradient}}$ (Vektor)

- $\vec{V}(\vec{r})$ – Vektor $\rightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{r}) \equiv \text{div}\,\vec{V}(\vec{r})$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z$ $\boxed{\text{Divergenz}}$ (Skalar)

- $\vec{\nabla}\times\vec{V} \equiv \text{rot}\,\vec{V}$ $\boxed{\text{Rotation}}$ (Vektor)

$(\vec{\nabla}\times\vec{V})_z = \partial V_y/\partial x - \partial V_x/\partial y$; andere Komponenten: zykl. Permutationen

- $\vec{\nabla}^2\phi \equiv \Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$

$\boxed{\text{Laplace-Operator}}$

Statische Phänomene: $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} = 0$

$\rightarrow$ Maxwell-Gl zerfallen in zwei unabhängigen Gleichungspaaren: Elektrostatik und Magnetostatik.

I. Elektrostatik

Statische (nicht bewegende Ladungen und elekt. Felder)

(1) Coulomb-Gesetz:

$$\vec{F} = k\, q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Kraft auf Ladung q_1 im Punkt $\vec{r}_1$ erzeugt von Ladung q_2 im Punkt $\vec{r}_2$

Elektrisches Feld: $\vec{F} = q\vec{E}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

elektrisches Feld im Punkt $\vec{r}$ erzeugt von Ladung q_i am Punkt $\vec{r}_i$

Bemerkung:

$1/r^2$ - Abhängigkeit der Coulombkraft

$\Longleftrightarrow$ Null Masse des Photons, $m_\gamma = 0$

experimentell überprüft im Bereich von atomaren Skalen bis zu $10^8\,m$

---

(2) Einheitensysteme:

Um die Konstante k im Coulomb-Gesetz festzulegen, muß man die Ladung q als Messgröße definieren, also die Ladungseinheit wählen.

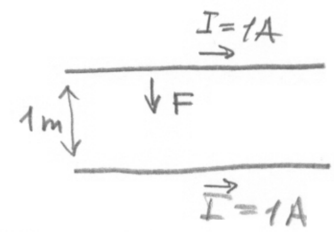
Es gibt verschiedene Definitionen $\rightarrow$ verschiedene Einheitensystemen $\rightarrow$ verschiedene Werte von k in Coulomb-Gesetz

(im allgemeinen: verschiedene Koeffiz. in Maxwell-Gleichungen)

Zwei meistbenutzten Einheitensystemen:
SI und Gauß-System:

- SI (m, kg, s)

Stromstärke 1 A = 1 Ampere
ist definiert so daß die Kraft pro Länge zwischen zwei parallelen Drähten im Abstand 1 m mit dem Strom 1A gleich $2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$ ist.



Damit ist auch die Ladungseinheit definiert

$$1 \text{ Ampere} = 1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{Sekunde}} \qquad 1\,A = 1 \frac{C}{s}$$

Der entsprechende Wert von k in Coulomb-Gesetz

$$k \stackrel{def}{=} 10^{-7} \frac{Nc^2}{A^2} \quad (SI) \qquad c - \text{Lichtgeschwindigkeit} \approx 3 \cdot 10^8 \, m/s$$

$$\approx 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 - \text{„Dielektrizitätskonstante des Vakuums"}$$

$$\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

Ladungsquant in SI-Einheiten (Coulomb):

$$e \simeq 1.602 \cdot 10^{-19}\, C$$

Andere Name für SI : MKSA (m, kg, s, A)

- Gauß – System (CGS) (cm, g, s)

$$k \overset{\text{def}}{=} 1$$

Damit ist die Einheit der Ladung festgelegt

1 ESE = Elektrostatische Einheit der Ladung

mehrere andere Namen:

1 Fr (Franklin)
1 statC = 1 stat Coulomb
1 esu (electrostatic unit)

CGS Kraft-Einheit $1 \text{ dyn} = \frac{g \cdot cm}{s^2}$

$$1 \text{ dyn} = \frac{(1 \text{ ESE})^2}{cm^2}$$

$$\rightarrow \quad \text{ESE} = \frac{cm^{3/2}\, g^{1/2}}{s}$$

Im Gegensatz zu SI, ist im Gauss-System die Ladungseinheit <u>nicht</u> von cm, g, s unabhängig!

Elementarladung

$$e \simeq 4.803 \cdot 10^{-10} \text{ ESE}$$

Umrechnung SI ↔ Gauss:

$1 \text{ ESE} \longleftrightarrow 3.34 \cdot 10^{-10} \text{ C}$

$1 \text{ C} \longleftrightarrow 3.00 \cdot 10^{9} \text{ ESE}$

Bemerkungen:

1. SI und Gauss-System Einheiten der Ladung haben verschiedene Dimensionen; Gleichungen haben verschiedene Form in beiden Systemen → SI und Gauss sollen nie gleichzeitig (in einer Gleichung) benutzt werden

2. es gibt noch weitere auf CGS basierende Systemen (elektrostatische, elektromagnetische, Heaviside – Lorentz)
Die werden aber seltener benutzt

SI oder Gauß-System?

- SI
  - gesetzlich festgelegt
  - experimentelle Größen werden üblicherweise in diesem System angegeben
  - alle technische Anwendungen beziehen sich auf das SI
  - einführende Physikbücher benutzen üblicherweise das SI

- Gauß-System
  - eignet sich besonders gut zur Darstellung der relativistischen Struktur der Elektrodynamik
  - E und B haben gleiche Einheiten, in el/mag Wellen $|E| = |B|$
    → macht die Tatsache explizit, dass die magnetische Kraft um den Faktor v/c schwächer ist und ist damit ein relativistisches Phänomen
  - in fast allen Theorie-Büchern und Artikeln benutzt

① – Fortsetzung (Coulomb-Gesetz)

Viele Ladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \qquad (*)$$

$$d^3r' = dx'dy'dz'$$

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Delta-Funktion

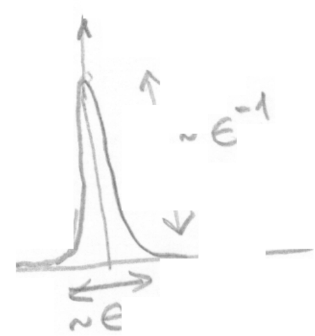
Dirac'sche

Delta-Funktion

$\delta(x)$ – verallgemeinerte Funktion ("Distribution")

$\delta(x-x_0) = 0 \quad$ für $x \neq x_0$

$$\int_a^b dx\, \delta(x-x_0) = \begin{cases} 1, & a < x_0 < b \\ 0 & \text{für } x_0 \notin [a,b] \end{cases}$$



$$\int dx\, f(x)\, \delta(x-x_0) = f(x_0)$$

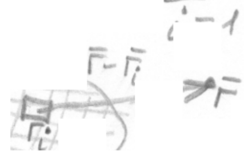
für beliebige (kontinuierliche) Funktion $f(x)$

$$\delta(x) \simeq \text{(z.B.)} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\epsilon} e^{-x^2/2\epsilon^2}$$

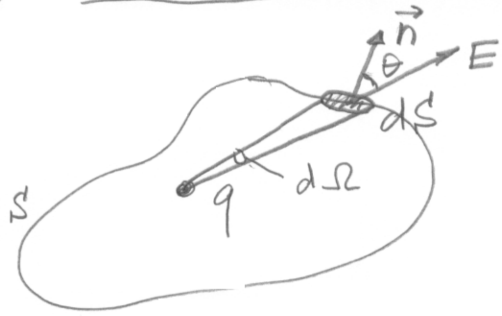
nach Integration

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

Die Formel $(*)$ gilt auch für eine stetige Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$, die man als ein Limes $n \to \infty$, $q_i \to 0$ der Summe $\sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$ darstellen kann



③ Gauß'sches Gesetz



Punktladung q
Geschlossene Fläche S
$\vec{n}$ – außen gerichtete Flächennormale

$$\vec{E}\cdot\vec{n}\cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\cos\theta}{r^2}\,dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,d\Omega$$

$d\Omega$ – räumlicher Winkel

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot dS = \begin{cases} q/\epsilon_0, & \text{wenn } q \text{ innerhalb von } S \text{ liegt} \\ 0, & \text{— " — ausserhalb — " —} \end{cases}$$

das Gauß'sche Gesetz für 1 Punktladung

Für mehrere Ladungen

$$\oint_S dS\,\vec{E}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i q_i$$

i ← innerhalb S

Für eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$:

Gauß'sches Gesetz
$$\boxed{\oint_S dS\,\vec{E}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V d^3r\,\rho(\vec{r})}$$

Differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes

Gauß'scher Integralsatz

$$\oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d^3r$$

$\vec{A}(\vec{r})$ – beliebiges, stetig differenzierbares Vektorfeld

Damit können wir das Gauß'sche Gesetz auf die folgende Form bringen

$$\int_V d^3r\,\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})\right) = 0$$

V – beliebig $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho}$$

differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes; eine der Maxwell-Gl.

④ Skalarpotential und Wirbelfreiheit des elektrost. Feldes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,d^3r'$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= -\vec{\nabla}\Phi$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \text{Skalarpotential}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0}$$

noch eine Maxwell-Gl. im stat. Limes

Für Punktladungen $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$

Physikalische Bedeutung:

Probeladung q; wird transportiert $A \to B$

Kraft $\vec{F} = q\vec{E}$ $\Rightarrow$ Arbeit, die man leisten muß:

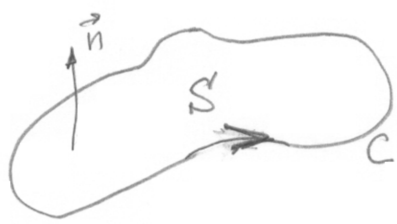
$$W = -\int_A^B \vec{F}\,d\vec{l} = -q\int_A^B \vec{E}\,d\vec{l} = q\int_A^B \vec{\nabla}\Phi\,d\vec{l}$$

$$= q\int_A^B d\Phi = q(\Phi_B - \Phi_A)$$

unabhängig vom Weg $A \to B$

$\Rightarrow$ potenzielle Energie $\boxed{U(\vec{r}) = q\,\varphi(\vec{r})}$

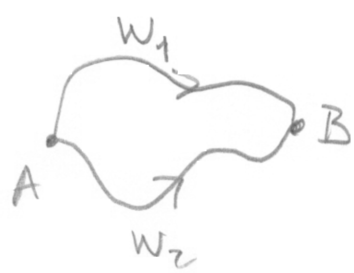
Die Unabhängigkeit der Arbeit von dem Weg $A \to B$ folgt auch aus den Stokes'schen Satz:



$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{A} = \int_S dS\, \vec{n} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$$

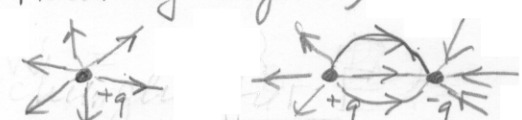
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

$\vec{E}$ - konservatives Feld



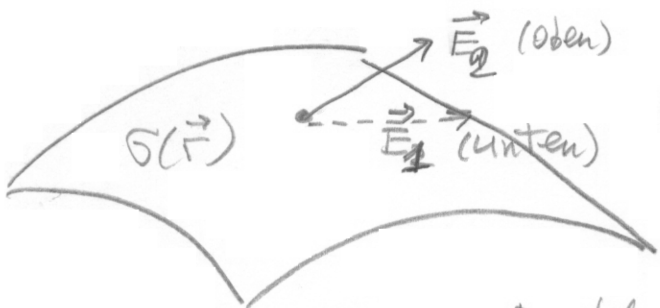
$W_1 \ W_2 = 0$

$\Rightarrow$ keine geschlossenen Feldlinien in der Elektrostatik
(Feldlinie = Linie, für die $\vec{E}$ an jedem Punkt die Tangentenrichtung angibt)



⑤ Anwendung:

Randbedingungen für Flächenladungsverteilung



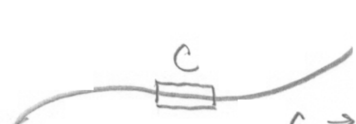
$\sigma(\vec{r})$ – Flächenladungsdichte (Coulomb/m²)

Eines der wichtigen Problemen der Elektrostatik:
Bestimmen von Φ und $\vec{E}$ einer gegebenen Flächenladungsverteilung. Ein Teil der Lösung: Randbedingungen:

Gauß'sches Gesetz

$$\rightarrow \boxed{\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{2\perp} - E_{1\perp} = \sigma/\epsilon_0}$$



$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{2\parallel} = \vec{E}_{1\parallel}}$$

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Phi_b - \Phi_a$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Phi_2 = \Phi_1} \quad \text{kontinuierlich}$$

⑥ Poisson-Gleichung und Laplace-Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho \end{aligned}\right| \Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho} \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\vec{\nabla}^2 \equiv \Delta$$

$$\rho = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}^2 \Phi = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

Für gegebene ρ die Lösung der Poisson-Gleichung lautet

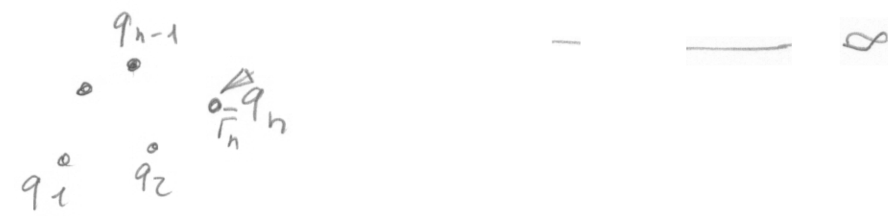
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \vec{\nabla}_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')}$$

(7) Elektrostatische Energie

- n Punktladungen



Arbeit, die notwendig ist, um q_n von unendlich nach $\vec{r}_n$ zu bringen

$$W_n = q_n \, \Phi_n(\vec{r}_n) \qquad \Phi_n(\vec{r}_n) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{|\vec{r}_n - \vec{r}_i|}$$

[benutzt: $\Phi_n(\infty) = 0$]

Bringen alle Ladungen $q_1 \cdots q_n$ sukzessive an die Positionen $\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_n$:

$$\rightarrow \boxed{W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}$$

gesamte potentielle Energie

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \, \Phi(\vec{r}_i) \; ; \qquad \Phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Potential erzeugt von allen anderen Ladungen

• kontinuierlich verteilte Ladung

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int d^3r\, d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{2}\int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \Phi(\vec{r})$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\, \varphi\, \vec{\nabla}^2\varphi = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\, \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\varphi$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\, |\vec{E}|^2$$

endliche Ladungsverteilung $\Rightarrow$ φ verschwindet für $r\to\infty$ hinreichend schnell, keine Randterme

$$\boxed{w(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}^2(r)|}$$ Energiedichte

• scheinbarer Widerspruch:

$W^{kont} = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\, |\vec{E}|^2 \geqslant 0$ immer positiv

$W^{Punkt} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i,j\,(i\neq j)} \frac{q_i q_j}{|r_i - r_j|}$ kann auch negativ sein

Erklärung

$$W^{kont}\ \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\int d^3r\, d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \xrightarrow{\text{Punktlad.}} \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i,j}\frac{q_i q_j}{|r_i - r_j|}$$

enthält auch unendliche Selbstenergie $(i=j)$

(8) Randwertprobleme

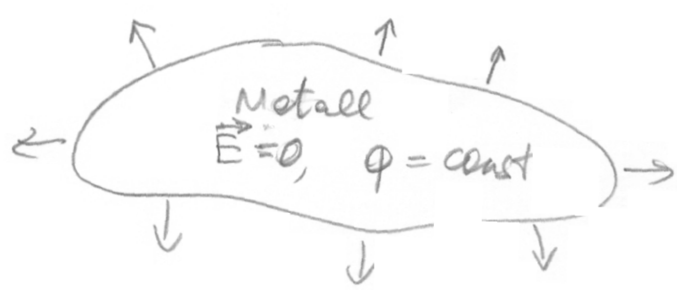
$\rho(r)$ gegeben $\rightarrow$ $\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d^3r' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$; $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$

Aber:

Elektrische Leiter (Metalle) $\rightarrow$ Ladungen beweglich

$\rightarrow$ im Metall $\vec{E} = 0$, $\Phi(r) = \text{const}$

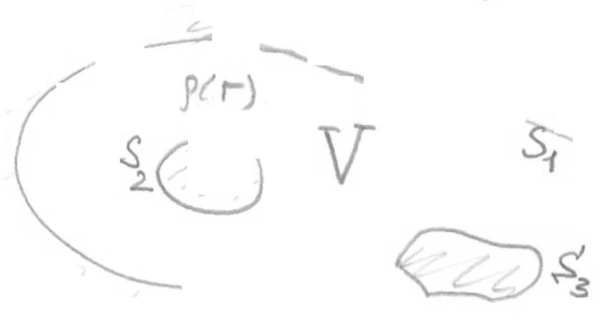
An der Oberfläche: induzierte Ladungen



$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r})$

Ladungsdichte auf der Oberfläche (nicht bekannt, muss bestimmt werden)

Randwertproblem: allgemeine Formulierung:



Volumen V mit Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$

Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \qquad \text{in } V$$

mit Randbedingungen auf Oberflächen S_i

$\Phi(\vec{r})$ für $\vec{r} \in S_i$ gegeben — Dirichlet-Randbedingung

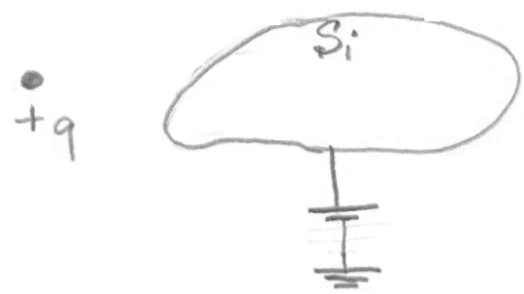
$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\vec{r})$ für $\vec{r} \in S_i$ gegeben — Neumann Randbedingung

$\equiv \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{n}$

am Metall-Oberfläche $\Phi = \text{const} \rightarrow$ Dirichlet-Randbedingung

Zwei Fälle:

i)



$\Phi(r)\big|_{S_i} = \Phi_i$ gegeben

(e.g. geerdeter Leiter $\rightarrow \Phi_i = 0$)

ii)

isoliert

$\Phi(r)\big|_{S_i} = \Phi_i$ nicht bekannt

$Q_i = \int_{S_i} \sigma(\vec{r})\, dS$ gegeben

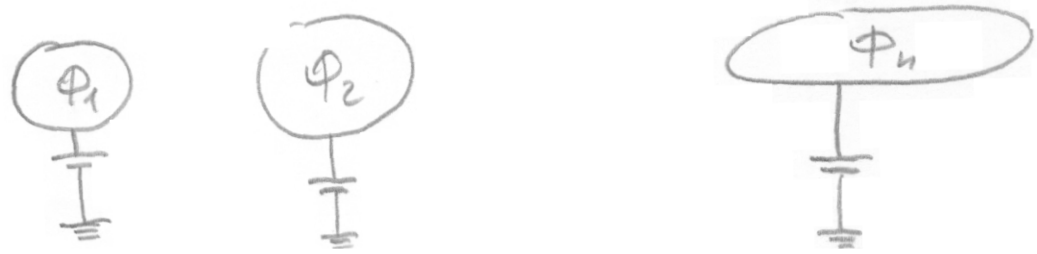
Algorithmus: a) löse mit beliebigem Φ_i

b) finde $\sigma[\Phi_i]$

c) löse $Q = \int_S \sigma[\Phi_i]\, dS \rightarrow \Phi_i$

Matrix der Kapazitäten:

n Leiter im sonst leeren Raum



$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \varphi_j \qquad C_{ij} \text{ – Kapazitätskoeffizienten (Matrix der Kapazitäten)}$$

C_{ij} werden durch Lösung des entsprechenden Randwertproblems bestimmt

Um $\{\varphi_i\}$ durch $\{Q_j\}$ auszudrücken, invertiert man die Matrix C

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} (C^{-1})_{ij} Q_j$$

Elektrostatische Energie:

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \, \rho(r) \varphi(r) = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} (C^{-1})_{ij} Q_i Q_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \varphi_i \varphi_j$$

(9) Formale Lösung des Randwertproblems mithilfe der Green'schen Funktion

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, d^3x = \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\, dS$$

(Gauß'scher Integralsatz)

Wir wählen

$$\vec{A} = \varphi\vec{\nabla}\psi \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi + \varphi\vec{\nabla}^2\psi$$

$$\rightarrow \quad \oint_S dS\, \varphi\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{n} = \int_V d^3r\left(\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi + \varphi\nabla^2\psi\right)$$

$$\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{n} \equiv \frac{\partial\psi}{\partial n}$$ Ableitung in Richtung der äußeren Normalen von S

$$\boxed{\oint_S dS\, \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} = \int_V d^3r\left(\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{\nabla}\psi + \varphi\nabla^2\psi\right)}$$ 1-ste Green'sche Identität (1-ster Green'scher Satz)

$\varphi \leftrightarrow \psi$ + Subtraktion $\rightarrow$

$$\boxed{\oint_S dS\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) = \int d^3r\left(\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi\right)}$$ 2-te(r) G. Identität (Satz)

Wir benutzen jetzt die Greensche Identität zu zeigen, dass die Lösung des Randwertproblems eindeutig ist

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

mit einer Dirichlet'schen (oder Neumann'schen) Randbedingung auf S

Nehmen wir an es gebe zwei Lösungen Φ_1, Φ_2

$$\rightarrow \quad U = \Phi_2 - \Phi_1$$

Dann $\nabla^2 U = 0$ und $U|_S = 0$ (Dirichlet) oder $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_S = 0$ (Neumann)

1ste Greensche Identität mit $\varphi = \psi = U$ $\Longrightarrow$

$$\int_V d^3r \left(\vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} U + U \underbrace{\nabla^2 U}_{=0} \right) = \oint_S ds \; U \underbrace{\frac{\partial U}{\partial n}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \int_V d^3r \, |\vec{\nabla} U|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad U = \text{const} \overset{\text{Dirichlet}}{\Longrightarrow} U = 0$$

$\Rightarrow$ die Lösung ist eindeutig

(für Neumann-Randbedingungen: abgesehen von einer willkürlichen additiven Konstanten)

Diese Lösung kann man mithilfe der Green'schen Funktion einmal ermitteln:

$$\nabla_r^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \qquad G \text{ – Greensche Funktion}$$

auch $\nabla_{r'}^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,') = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$

z.B. $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ ist eine G.F

Im Allgemeinen

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + F(\vec{r}, \vec{r}\,') , \qquad \nabla_r^2 F(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$$

Die Funktion F wird durch Randbedingungen bestimmt.

Für Dirichlet Randbedingungen wir fordern

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,')\Big|_{r' \in S} = 0$$

Bemerkung: man kann zeigen, das $G(\vec{r},\vec{r}\,') = G(\vec{r}\,',\vec{r})$
Damit kann man äquivalent $G(\vec{r},\vec{r}\,')\big|_{\vec{r}\in S} = 0$ anfordern

2-te Greensche Identität

$$\oint_S dS \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = \int_V d^3r \left(\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi \right)$$

Wir wählen:

$$\varphi(\vec{r}\,') = \Phi(\vec{r}\,') \qquad \psi(\vec{r}\,') = G(\vec{r},\vec{r}\,')$$

$$\oint_S dS' \left[\Phi(r') \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} - G(\vec{r},\vec{r}\,') \frac{\partial \Phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} \right] =$$

$$= \int_V d^3r' \left[\Phi(\vec{r}\,') \left(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \right) - G(\vec{r},\vec{r}\,') \left(-\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}\,') \right) \right]$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dr' G(\vec{r},\vec{r}\,') \rho(\vec{r}\,') + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \left[G(\vec{r},\vec{r}\,') \frac{\partial \Phi(r')}{\partial n'} - \Phi(r') \cdot \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} \right]}$$

Das war allgemein

Dirichlet-Randbed. $\rightarrow G(r,r')\big|_{r'\in S} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' G(\vec{r},\vec{r}\,') \rho(r') - \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \Phi(\vec{r}\,') \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}}$$

Lösung des Randwertproblems mit Dirichlet-R.b.

Spezieller Fall:

$\rho(\vec{r})$ ← Ladungsdichte in freiem Raum (keine metallische Leiter)

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(r') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\Rightarrow \quad G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$G(\vec{r},\vec{r}\,')\Big|_{\vec{r}\,'\to\infty} = 0$$

Dirichlet-Randbedingung auf der "unendlich weiten Oberfläche":

$R \to \infty$

Wir haben eine formale Lösung gefunden

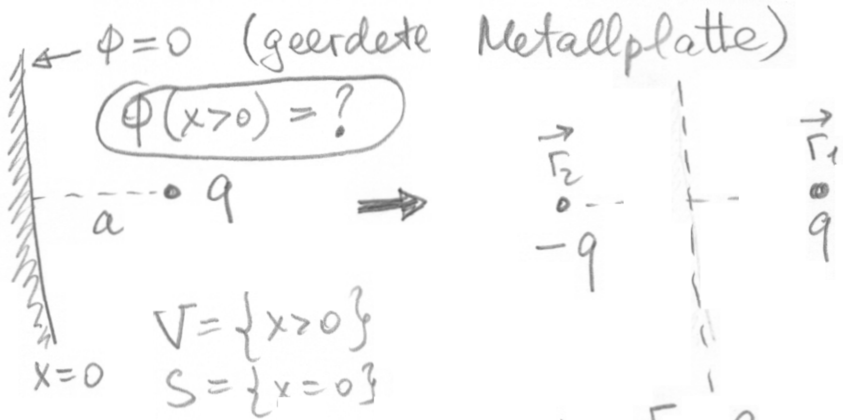
$$\left.\begin{array}{l}\rho|_V \\ \Phi|_S\end{array}\right| \longrightarrow \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V G\rho - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial G}{\partial n}\Phi}$$

Potential einer Flächen-Ladungsdichte, die an den Leitern durch Anwesenheit vom Punktladung am r' induziert wird

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Vorteil:}\\ G \text{ (für gegebene } V, S\text{) bekannt}\\ \to \Phi \text{ für beliebige}\\ \quad \rho|_V,\ \Phi|_S\end{array}}$$

Man braucht aber erst die G.F $G(r,r')$ zu berechnen... In der Praxis, gibt es eine Reihe von Methoden, die die G.F. nicht direkt benutzen.

(10) Methode der Bildladungen (≡ Spiegelladungen)



$$\Phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec r-\vec r_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec r-\vec r_1|} + \frac{-q}{|\vec r-\vec r_2|}\right] \qquad (*)$$

$$\vec r_1 = (a,0,0) \qquad \vec r_2 = (-a,0,0)$$

$$\left.\nabla^2\Phi(\vec r)\right|_{x>0} = -\frac{q}{\epsilon_0}\left[\delta(\vec r-\vec r_1) - \cancel{\delta(\vec r-\vec r_2)}\right] = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\left.\Phi\right|_{x=0} = 0$$

→ das Problem wurde gelöst

Die Lösung dieses Problems ⟺ Ermittlung der G.F (bis zum Faktor $q/4\pi\epsilon_0$)

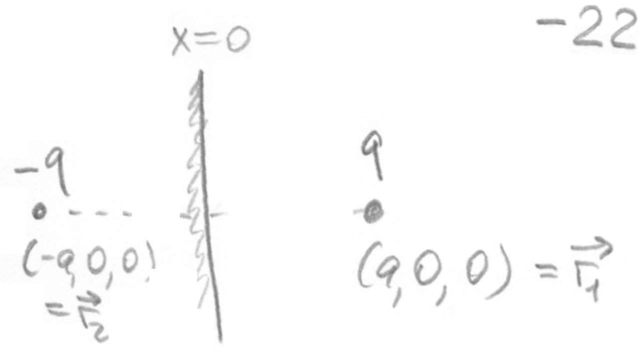
Der zweite Term in (*) entspricht der Funktion $F(\vec r,\vec r_1)$ in

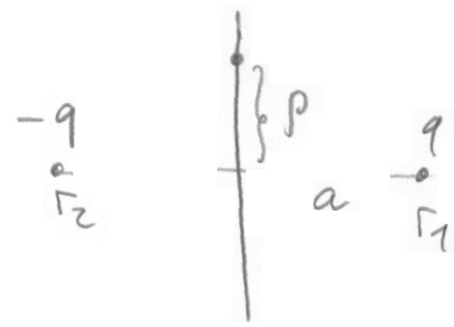
$$G(\vec r,\vec r_1) = \frac{1}{|\vec r-\vec r_1|} + F(\vec r,\vec r_1) \quad ; \quad \left.\nabla^2 F\right|_V = 0$$

Es wurde so gewählt, dass $\left.\Phi\right|_{S\equiv\{x=0\}} = 0$

$$G(\vec r,\vec r_1) = \frac{1}{|\vec r-\vec r_1|} - \frac{1}{|\vec r-\vec r_2|} \qquad x, x_1 > 0$$

$$\vec r_1 = (x_1, y_1, z_1) \rightarrow \vec r_2 = (-x_1, y_1, z_1)$$





Elektrisches Feld

$$\vec E = -\vec\nabla\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\vec r-\vec r_1}{|\vec r-\vec r_1|^3} - \frac{\vec r-\vec r_2}{|\vec r-\vec r_2|^3}\right]$$

Oberflächenladungsdichte $(x=0)$

$$\sigma_{(y,z)} = \epsilon_0 E_x(y,z)\Big|_{x=+0} = \frac{-qa}{2\pi(a^2+y^2+z^2)^{3/2}} \equiv \frac{-qa}{2\pi(a^2+\rho^2)^{3/2}}$$

$$\rho^2 = y^2+z^2$$

Gesamtladung auf der Metallplatte

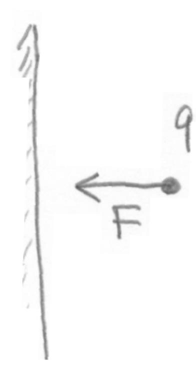
$$q_{infl} = 2\pi\int_0^\infty d\rho\,\rho\,\sigma(\rho) = -q \qquad \text{(Influenzladung)}$$

Kraft auf die Punktladung q:

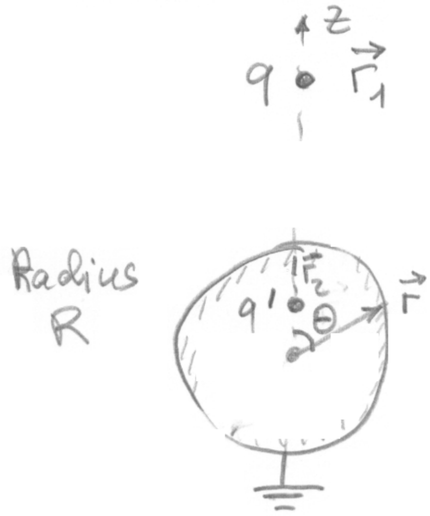
$$\vec F = q\vec E' \qquad \vec E' = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec r-\vec r_2}{|\vec r-\vec r_2|^3}\Bigg|_{\vec r=\vec r_1}$$

$$\vec F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4a^2}(-\vec e_x)$$

<u>Anziehung</u>



Punktladung und geerdete ($\Phi = 0$) metallische Kugel



$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right]$$

$\vec{r}_1 = (0, 0, a)$ $\quad$ a, q – gegeben

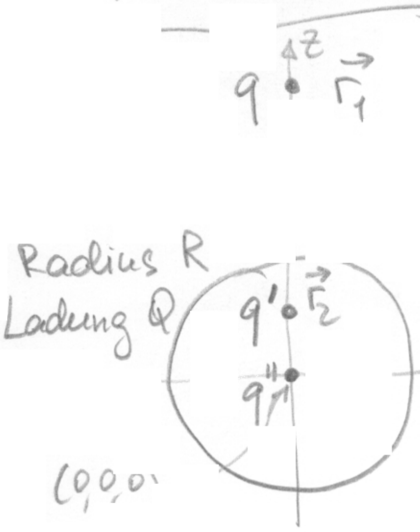
$\vec{r}_2 = (0, 0, b)$ $\quad$ b, q' – ?

$$\Phi(|\vec{r}| = R) = \frac{q/4\pi\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}} + \frac{q'/4\pi\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}} \overset{!}{=} 0$$

erfüllt wenn

$$q' = -\frac{Rq}{a}, \quad b = \frac{R^2}{a}$$

Punktladung und isolierte metallische Kugel mit Ladung Q



$\vec{r}_1 = (0, 0, a)$

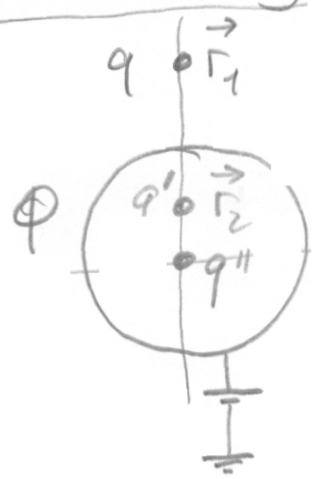
$\vec{r}_2 = (0, 0, b)$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} + \frac{q''}{|\vec{r}|}\right]$$

$$q' = -\frac{Rq}{a}, \quad b \cdot \frac{R^2}{a}, \quad q'' = Q - q'$$

$$\Phi(|\vec{r}| - R) = \frac{q''}{R}$$

Punktladung und metallische Kugel mit $\Phi \neq 0$



identisch zum letzten Beispiel mit $q'' = R\Phi$

$Q = q' + R\Phi$

(11) Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

$\nabla^2 \Phi = 0$ Laplace-Gl. — Modellbeispiel einer partiellen Differentialgleichung

Leistungsfähige Methode: Entwicklung nach orthogon Funktion (die Wahl der Funktionen hängt von der Symmetrie des Problems ab

Wir betrachten erst $\underbrace{}_{\text{(im Allgemeinen, komplexen)}}$ Funktionen $g(x)$, $x \in [a, b]$ (b kann auch $(-\infty, \infty)$ sein)

Skalarprodukt $(g, h) = \int_a^b dx\, g(x) h^*(x) = (h, g)^*$

für reelle Funktionen: der Stern ist natürlich nicht nötig

$(g, h) = 0$ orthogonal

$(g, g) = 1$ normiert

$\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\boxed{(f_m, f_n) = \delta_{mn}}$ (a) orthonormiert

Vollständigkeit: für beliebige quadratintegrable $g(x)$ gilt

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x) \qquad a_n = (g, f_n)$$

$$\left[\text{d.h.} \int \Big| g - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \Big|^2 dx \xrightarrow{N \to \infty} 0 \right]$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int dx'\, g(x') f_n^*(x')}_{a_n} f_n(x) = \int dx'\, g(x') \sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x') f_n(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n^*(x') f_n(x) = \delta(x'-x)} \quad (2) \text{ Vollständigkeits-relation}$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $\{f_n\}$ – vollständiger Satz orthonormierter Funktionen

Das bekannteste Beispiel:

$(a,b) = \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$, $\{f_n\} = \sqrt{\frac{2}{L}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \sin\frac{4\pi x}{L}, \cos\frac{4\pi x}{L}, \dots \right\}$

[oder $(0,L)$]

$\to$ Fourier – Reihen

Alternativ, kann man exponentielle Funktionen benutzen:

$$\{f_n\} = \sqrt{\frac{1}{L}}\, e^{2\pi i m x/L}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2\pi i m x/L}, \quad a_m = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, g(x) e^{-2\pi i m x/L}$$

(Bemerkung:

Im Limes $L \to \infty$ Fourier-Reihe $\to$ Fourier-Integral:

$$\frac{2\pi m}{L} \to k, \quad \sum_m \to \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk, \quad a_m \to \sqrt{\frac{2\pi}{L}}\, a(k),$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{ikx} dk, \quad a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x) e^{-ikx}$$

Orthonormierung: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = \delta(k-k')$

Vollständigkeit $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \delta(x-x')$)

(12) Kartesiche Koordinaten: Trennung der Variablen (≡ Separation)

Laplace-Gl. $\nabla^2 \Phi = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$

Ansatz: $\Phi(x,y,z) = A(x)\,B(y)\,C(z)$

Einsetzen in $\nabla^2\Phi = 0$, dividieren durch $\Phi = ABC \rightarrow$

$$\frac{1}{A(x)} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \frac{1}{B(y)} \frac{d^2 B(y)}{dy^2} + \frac{1}{C(z)} \frac{d^2 C(z)}{dz^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{1}{A}\frac{d^2 A}{dx^2} = \text{const} \equiv \alpha^2 \\ \frac{1}{B}\frac{d^2 B}{dy^2} = \text{const} \equiv \beta^2 \\ \frac{1}{C}\frac{d^2 C}{dz^2} = \text{const} \; - \gamma^2 \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

$\boxed{!}$ $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ müssen nicht positiv sein, können auch negativ sein (oder komplex)

$A(x) = e^{\pm\alpha x}$ (beliebige lineare Kombination von $e^{+\alpha x}$ und $e^{-\alpha x}$)

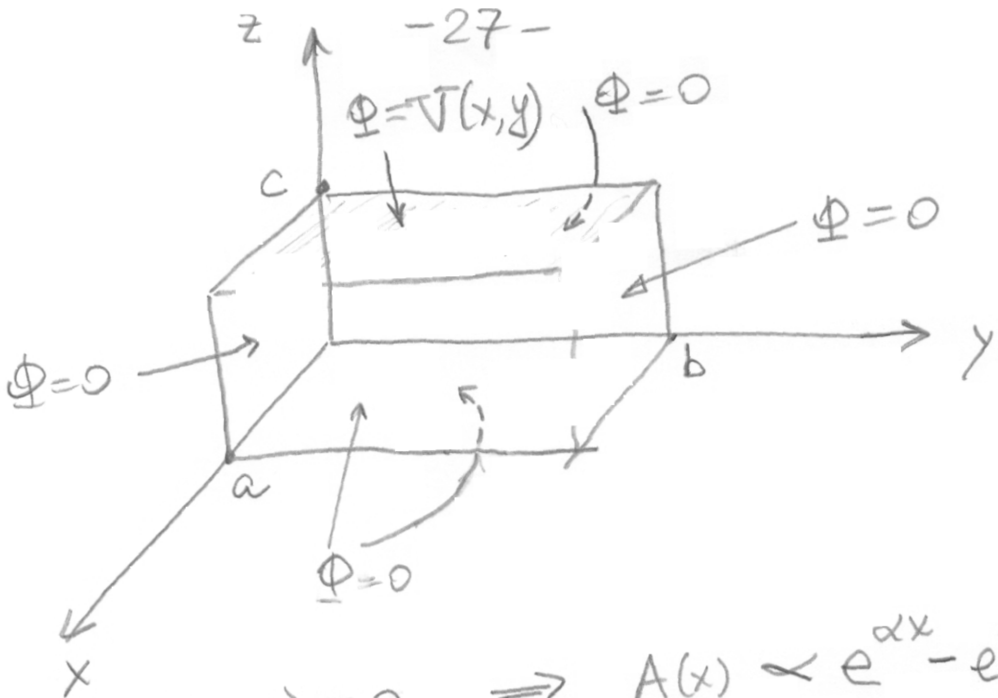
$B(y) = e^{\pm\beta y}$

$C(z) = e^{\pm\gamma z}$

Sehr viel Lösungen von $\nabla^2\Phi = 0$: beliebige lineare Superposition von solchen $\Phi = ABC$ ist auch eine Lösung.

Um α, β, γ, die zu so eine Superposition beitragen, und entsprechende Koeffiziente zu bestimmen muß man erst Randbedingungen festlegen.

Wir betrachten das folgende Beispiel



$$A(x=0)=0 \;\Rightarrow\; A(x) \propto e^{\alpha x} - e^{-\alpha x} \propto \sinh \alpha x$$

$$B(y=0)=0 \;\Rightarrow\; B(y) \propto e^{\beta y} - e^{-\beta y} \propto \sinh \beta y$$

$$C(z=0)=0 \;\Rightarrow\; C(z) \propto e^{\gamma z} - e^{-\gamma z} \propto \sinh \gamma z$$

$$A(x=a)=0 \;\Rightarrow\; \alpha_n = \frac{in\pi}{a}\,,\quad A(x) \propto \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$B(y=b)=0 \;\Rightarrow\; \beta_n = \frac{im\pi}{b}\,,\quad B(y) \propto \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$\gamma^2 = -\alpha^2 - \beta^2 \longrightarrow \gamma_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} D_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\,\pi z\right)$$

Letzte Randbedingung

$$\Phi(z=c) = \sum_{n,m=1}^{\infty} D_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\,\pi c\right) \overset{!}{=} V(x,y)$$

Das ist nichts anderes als eine doppelte Fourier-Reihe für die Funktion $V(x,y)$ $\Rightarrow$

$$D_{nm} = \frac{4}{ab \sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\,\pi c\right)} \int_0^a dx \int_0^b dy\, V(x,y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$\{f_{nm}(x,y)\} = \left\{\sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right),\; \begin{matrix} n=1,2,3,\dots \\ m=1,2,3,\dots \end{matrix}\right\}$$ – vollständiger orthonormierter Satz (VONS)

Einsetzen des Resultats für D_{nm} in die Formel für $\Phi(x,y,z)$ $\longrightarrow$

$$\Phi(x,y,z) = \int_0^a dx' \int_0^b dy' \, V(x',y') \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\,\pi z\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{4}{ab \sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\,\pi c\right)} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y'\right)$$

Vergleichen mit allgemeiner Formel

$$\Phi_{(\bar r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d\bar r' \, G(\bar r, \bar r') \rho(\bar r') - \frac{1}{4\pi} \oint_S ds' \frac{\partial G(\bar r, \bar r')}{\partial n'} \Phi(\bar r')$$

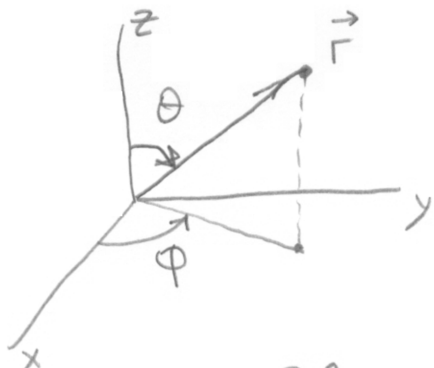
Wir hatten hier $\rho = 0$; haben nur den Term bekommen
(Oberflächen-Beitrag)

Mit Hilfe der Entwicklung nach VONS von Eigenfunktionen kann man auch die G.F. $G(\bar r, \bar r')$ (und damit den Volumen-Beitrag) finden,

siehe e.g. Jackson, 3.12

(13) Kugelkoordinaten

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$



$\Phi(x,y,z) \rightarrow \Phi(r,\theta,\varphi)$; Laplace-Gl. $\rightarrow$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

Ansatz (Separation der Variablen):

$$\Phi = \frac{U(r)}{r}P(\theta)Q(\varphi)$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{d^2U}{dr^2}PQ + \frac{U}{r}Q\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{U}{r}P\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = 0$$

Multiplizieren mit $r^3\sin^2\theta / UPQ \longrightarrow$

$$\underbrace{r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{P}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right]}_{\varphi\text{-unabhängig}} + \underbrace{\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2}}_{\text{nur }\varphi\text{-abhängig} \Rightarrow \text{const}} = 0$$

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 \Rightarrow Q = e^{\pm im\varphi}$$

Eindeutigkeit $\rightarrow m \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2}}_{\text{nur }r\text{-abhängig}} + \underbrace{\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}}_{\text{nur }\theta\text{-abhängig}} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{r^2}{U}\dfrac{d^2U}{dr^2} = \ell(\ell+1) \\ \dfrac{1}{P\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{dP}{d\theta}\right) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta} = -\ell(\ell+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{dr^2} - \dfrac{l(l+1)}{r^2}U = 0 & (1) \\[2ex] \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{dP}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\rightarrow$ allgemeine Lösung: $U(r) = A r^{l+1} + B r^{-l}$

(2) : $\cos\theta \equiv x \qquad \dfrac{d}{dx} = \dfrac{1}{dx/d\theta}\dfrac{d}{d\theta} = \dfrac{-1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0$$

Erst $\underline{m=0}$ [d.h. $Q(\varphi)=1$, Φ ist φ - unabhängig]

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + l(l+1)P = 0$$

sonst ist die Lösung singulär bei $x=\pm 1$

$\rightarrow$ Legendre-Polynome $P_l(x)$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \qquad \boxed{l = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$,

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \ldots \qquad P_l(1) = 1$

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}$$

$\left\{ f_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}\, P_l(x) \,,\ l = 0,1,2,\ldots \right\}$ – vollständiger orthonormierter Satz auf $(-1, 1)$

jetzt

m beliebig (auch $\neq 0$)

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0$$ (see p.29)

$\rightarrow$ zugeordnete Legendre-Polynome

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x) \quad , \quad m \geq 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots \ell)$$

$$\left[P_\ell^0(x) \equiv P_\ell(x)\right]$$

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x)$$

$\boxed{!}$ für ungerade m die zugeordnete L.-P. sind eigentlich keine Polynome wegen des Faktors $(1-x^2)^{m/2}$

Äquivalente Definition, die sowohl für $m \geq 0$ als auch für $m < 0$ gültig ist:

$$P_\ell^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell!}(1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell$$

$$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots \quad , \quad m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$$

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}$$

- Bei festem m bilden $P_\ell^m(x)$ einen vollständigen Satz orthogonaler Funktionen auf dem Intervall $x \in (-1, 1)$
- $Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2$ — vollständiger orthogonaler Satz auf $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\Rightarrow \left\{ P_\ell^m Q_m \equiv P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi} \, , \quad \begin{matrix} \ell = 0, 1, 2, \dots \\ m = -\ell, \dots, \ell \end{matrix} \right\} -$$

vollständiger Satz orthogonaler Funktionen auf der Oberfläche der Einheitskugel

Normierung $\rightarrow$

$$\boxed{Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}}$$

Kugelflächenfunktionen

Eigenschaften:

- Orthonormierung!

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{\int d\Omega} \; Y^*_{\ell' m'}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell'\ell}\,\delta_{m'm}$$

- Vollständigkeit:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \delta(\varphi-\varphi')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')$$

- $Y_{\ell,-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m\, Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)$
- $Y_{\ell,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, P_\ell(\cos\theta)$
- $\ell=0$ $\quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$\ell=1$: $\quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$

$\ell=2$: $\quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1)$

$$Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\,\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\varphi}$$

Allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung

$\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi)$

$U(r) = A r^{l+1} + B r^{-l}$

$PQ \to P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \to Y_{lm}$

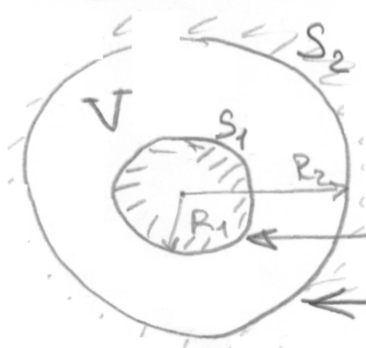
$\sum_{lm}$

$\to$

$$\boxed{\Phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{lm} \cdot r^{l} + B_{lm} r^{-l-1} \right) Y_{lm}(\theta,\varphi)} \quad (*)$$

Koeffizienten A_{lm}, B_{lm} werden durch Randbedingungen bestimmt

Randwertproblem: Beispiel



Randbedingungen

$\Phi(R_1, \theta, \varphi) = V_1(\theta, \varphi)$ (R1)

$\Phi(R_2, \theta, \varphi) = V_2(\theta, \varphi)$ (R2)

Koeffizienten A_{lm}, B_{lm} können mit Hilfe von Einsetzen von $(*)$ in (R1), (R2), Multiplizieren mit $Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)$ und Integration $\int d\Omega$ bestimmt werden

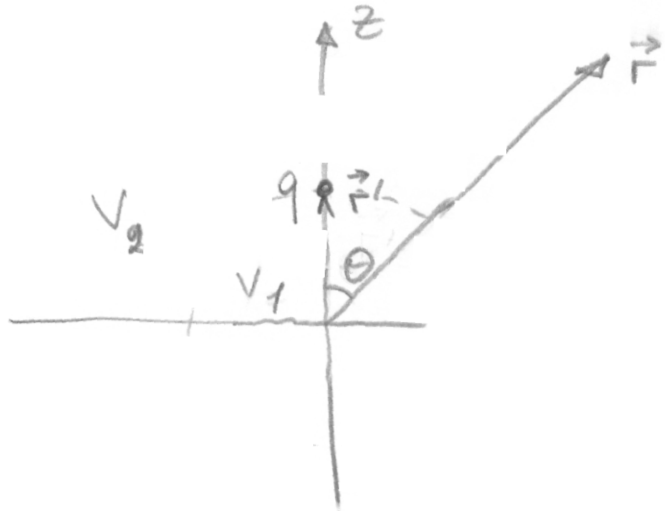
---

Bemerkung:

i)  $\nabla^2 \varphi|_V = 0$; $\vec{r} = 0 \in V$ $\longrightarrow$ alle $B_{lm} = 0$

ii)  V $\infty \in V$, $\Phi(\infty) = \text{const}$ $\longrightarrow$ alle $A_{lm} = 0$ für $l \geq 1$

Potential einer Punktladung: Entwicklung nach Kugelfunktionen



$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Erst wählen $\vec{r}'$ in der (positiven) z-Richtung ($\theta' = 0$)

$\vec{r} \Leftrightarrow (r, \theta, \varphi)$

$\Phi(r, \theta, \varphi) = \Phi(r, \theta)$ $\quad\varphi$ - unabhängig

Beispiel eines zylindersymmetrischen Problems

In beiden Bereichen

$V_1 : \{\vec{r} : r < r_1\}$

$V_2 : \{\vec{r} : r > r_1\}$

$\nabla_r^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 0 \quad \rightarrow$ Entwicklung in Y_{lm}

Zylindersymmetrie $\rightarrow$ nur $m = 0$ beiträgt

$Y_{l0}^{(\theta,\varphi)} \propto P_l(\cos\theta)$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}}\right) P_l(\cos\theta)$$

$\vec{r} \in$ z-Achse, $\quad \theta = 0 \rightarrow P_l(1) = 1$

$$\to \left.\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right|_{\theta=0} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l + \frac{b_l}{r^{l+1}} \qquad (*)$$

Anderseits

$$\left.\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right|_{\theta=0} = \begin{cases} \dfrac{1}{r'-r} = \dfrac{1}{r'}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \dfrac{r^l}{(r')^l}, & r<r' \\ \dfrac{1}{r-r'} = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{l=0} \dfrac{(r')^l}{r^l}, & r>r' \end{cases} \qquad (**)$$

Vergleichen $(*)$ und $(**)$ $\to$

$$a_l = \frac{1}{(r')^{l+1}}, \quad b_l = 0 \qquad (r<r_1)$$

$$a_l = 0, \quad b_l = (r')^l \qquad (r>r_1)$$

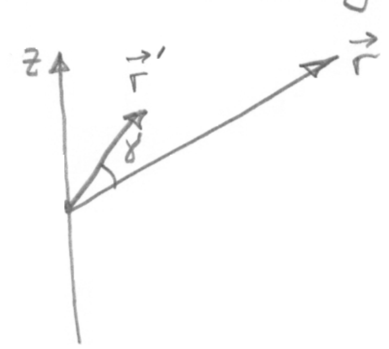
$$\to \boxed{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \times \begin{cases} \dfrac{r^l}{(r')^{l+1}}, & r<r' \\ \dfrac{(r')^l}{r^{l+1}}, & r>r' \end{cases} \equiv$$

$$\boxed{\equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta)}$$

$r_< = \min(r, r')$
$r_> = \max(r, r')$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}}$$ – erzeugende Funktion der Legendre-Polynome

Jetzt $\vec{r}'$ beliebig



$\vec{r}' \leftrightarrow (r', \theta', \varphi')$
$\vec{r} \leftrightarrow (r, \theta, \varphi)$
γ – Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}'$

$$\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\gamma)$$

Wir können aber $\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}$ auch in Winkelfunktionen $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ entwickeln. Das Ergebnis (siehe z.B Fließbach, Kap. 11 oder Jackson, 3.6)

$$\boxed{\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

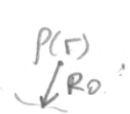
$$\Rightarrow\ \boxed{P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

(14) Multipolentwicklung

Wir betrachten eine lokalisierte Ladungsverteilung

$$\rho(\vec r)=\rho(r,\theta,\varphi)=0 \quad \text{für } r>R_0$$



Das elektrost. Potential $\Phi(\vec r)$ kann in Bereich $r>R_0$ nach Potenzen von R_0/r entwickelt werden – Multipolentwicklung

$$\Phi(\vec r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\vec r')\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\cdot$$

$$\cdot\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r'^l}{r^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$q_{lm} = \int d^3r' \rho(\vec{r}')(r')^l Y^*_{lm}(\theta',\varphi')$$

(sphärische) Multipolmomente

(Fließbach: q_{lm} mit zusätzlichem Faktor $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}$ definiert)

Explizit:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left[\frac{q_{00}}{r} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{q_{10}}{r^2}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{q_{1,1}}{r^2}\sin\theta e^{i\varphi} + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{q_{1,-1}}{r^2}\sin\theta e^{-i\varphi}}_{l=1\ (\text{Dipol})\ \sim 1/r^2} + \ldots\right]$$

$l=0$ (Monopol) $\sim 1/r$

$l=1$ (Dipol) $\sim 1/r^2$

$l=2$ (Quadrupol) $\sim 1/r^3$, ...

Kartesische Darstellung:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \rho(\vec{r}')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

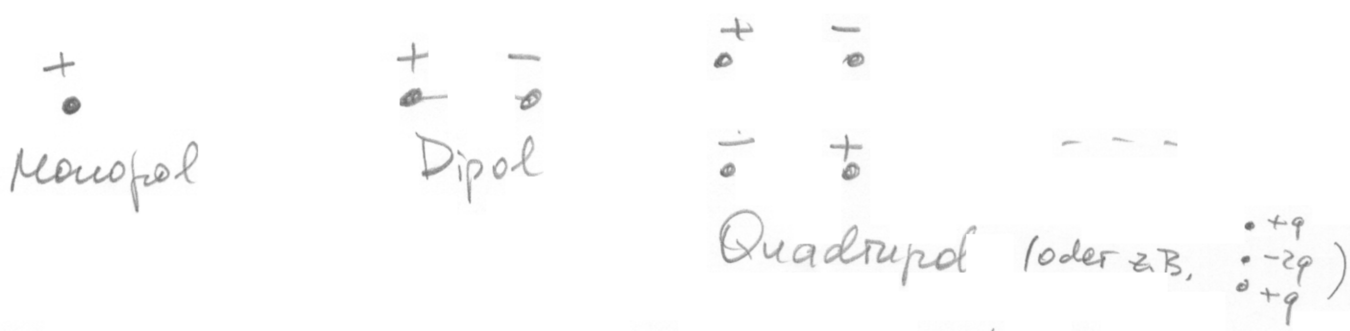
$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \sum_i r_i' \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\sum_{ij} r_i' r_j' \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_j}\frac{1}{r} + \ldots$$

$$= \frac{1}{r} + \sum_i \frac{r_i}{r^3} r_i' + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{3r_i r_j - r^2\delta_{ij}}{r^5} r_i' r_j' + \ldots$$

$$= \frac{1}{r} + \sum_i \frac{r_i}{r^3} r_i' + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{r_i r_j}{r^5}\left(3r_i' r_j' - r'^2\delta_{ij}\right) + \ldots$$

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}Q^{(0)} + \sum_i \frac{r_i}{r^3}Q_i^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{r_i r_j}{r^5}Q_{ij}^{(2)} + \ldots\right]$$

$$\left.\begin{aligned} Q^{(0)} &= \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,') \equiv q \quad \text{Monopol} \\ Q_i^{(1)} &= \int d^3r'\, r_i'\,\rho(\vec{r}\,') \equiv p_i \quad \text{Dipol} \\ Q_{ij}^{(2)} &= \int d^3r' \left(3r_i' r_j' - r'^2 \delta_{ij}\right)\rho(\vec{r}\,') \quad \text{Quadrupol} \\ &\equiv Q_{ij} \end{aligned}\right\} \text{kartesische Multipol-momente}$$



Zusammenhang zwischen Kugel- und kartesischen Multipolmomenten:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, q$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r'\, z'\,\rho(\vec{r}\,') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, p_z$$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3r' (x' - iy')\,\rho(\vec{r}\,') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,(p_x - i p_y)$$

$$q_{20} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int d^3r' \left(3z'^2 - r'^2\right)\rho(\vec{r}\,') = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\, Q_{zz}$$

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int d^3r'\, z'(x' - iy')\,\rho(\vec{r}\,') = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\left(Q_{xz} - i Q_{yz}\right)$$

$$q_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int d^3r' (x' - iy')^2\,\rho(\vec{r}\,') = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\left(Q_{xx} - 2i Q_{xy} - Q_{yy}\right)$$

$$q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*$$

Bemerkung

Die Multipolmomente hängen im Allgemeinen von der Wahl des Koordinatenursprungs ab.

Aber: das niedrigste nichtverschwindende Multipolmoment ist von dieser Wahl unabhängig

Energie im äußeren Feld

$\rho(\vec r) = 0$ für $|\vec r - \vec r_0| > R$

$$\vec r - \vec r_0 \equiv \vec r\,'$$

$$\Rightarrow \rho(\vec r) = \rho(\vec r_0 + \vec r\,') \equiv \tilde\rho(\vec r\,')$$

Äußeres elektr. Feld $\vec E_{ext} = -\vec\nabla \varphi_{ext}$

Annahme: $\vec E_{ext}$ ändert sich nur wenig im Bereich der Ladungsverteilung $\rightarrow$ Taylor-Entwicklung

$$\varphi_{ext}(\vec r) = \varphi_{ext}(\vec r_0 + \vec r\,') = \varphi_{ext}(\vec r_0) + \sum_i \left.\frac{\partial \varphi_{ext}}{\partial r_i}\right|_{\vec r_0} r_i' + \frac{1}{2}\sum_{ij} \left.\frac{\partial^2 \varphi_{ext}}{\partial r_i \partial r_j}\right|_{\vec r_0} r_i' r_j' + \dots$$

$$= \varphi_{ext}(\vec r_0) + \sum_i \left.\frac{\partial \varphi_{ext}}{\partial r_i}\right|_{\vec r_0} \cdot r_i' + \frac{1}{6}\sum_{ij} \left.\frac{\partial^2 \varphi_{ext}}{\partial r_i \partial r_j}\right|_{\vec r_0} \left(3 r_i' r_j' - r'^2 \delta_{ij}\right) + \dots$$

$\nabla^2 \varphi_{ext} = 0$

$\rightarrow$ der Term kann hinzugefügt werden

$\Rightarrow$ Potenzielle Energie der Ladungsverteilung $\rho(\vec r) \equiv \tilde\rho(\vec r\,')$ im äußeren Feld:

$$W = \int d^3r\, \rho(\vec r)\,\Phi_{ext}(\vec r) = \int d^3r'\, \tilde\rho(\vec r\,')\,\Phi_{ext}(\vec r_0 + \vec r\,')$$

$$= q\,\Phi_{ext}(\vec r_0) - \vec p\cdot\vec E_{ext}(\vec r_0) - \frac{1}{6}\sum_{ij} Q_{ij}\,\frac{\partial E_{ext,j}}{\partial r_i}(\vec r_0) + \dots$$

Kopplung:

Ladung —— Potential

Dipol —— El. Feld

Quadrupol —— Gradient des el. Feldes

Kraft des äußeren Feldes an die gegebene Ladungsverteilung:

Monopol: $\vec F(\vec r_0) = -\vec\nabla W(\vec r_0) = q\,\vec E_{ext}(\vec r_0) + \dots$

↳ Beiträge von höheren Multipolen

Dipol [angenommen Monopolmoment (Ladung) $q=0$]:

$$\vec F(\vec r_0) = -\vec\nabla W(\vec r_0) = \vec\nabla\left(\vec p\cdot\vec E_{ext}(\vec r_0)\right) + \dots; \qquad F_i = \frac{\partial}{\partial r_i}\sum_j p_j E_{ext,j}$$

$$\vec p = \text{const} \rightarrow F_i = \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial r_i} E_{ext,j} \underset{\uparrow\ \vec\nabla\times\vec E = 0}{=} \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial r_j} E_{ext,i}$$

$$\vec F(\vec r_0) = (\vec p\cdot\vec\nabla)\,\vec E_{ext}(\vec r_0)$$

Drehmoment:

$$d\vec N = \vec r\times d\vec F; \qquad \vec N = -\int d^3r'\,\tilde\rho(\vec r\,')\,\vec r\,'\times\vec\nabla\Phi_{ext}(\vec r_0) = \vec p\times\vec E_{ext}$$