



Materialien zu den  
Lehrveranstaltungen

# TRANSPORTPROZESSE I UND II

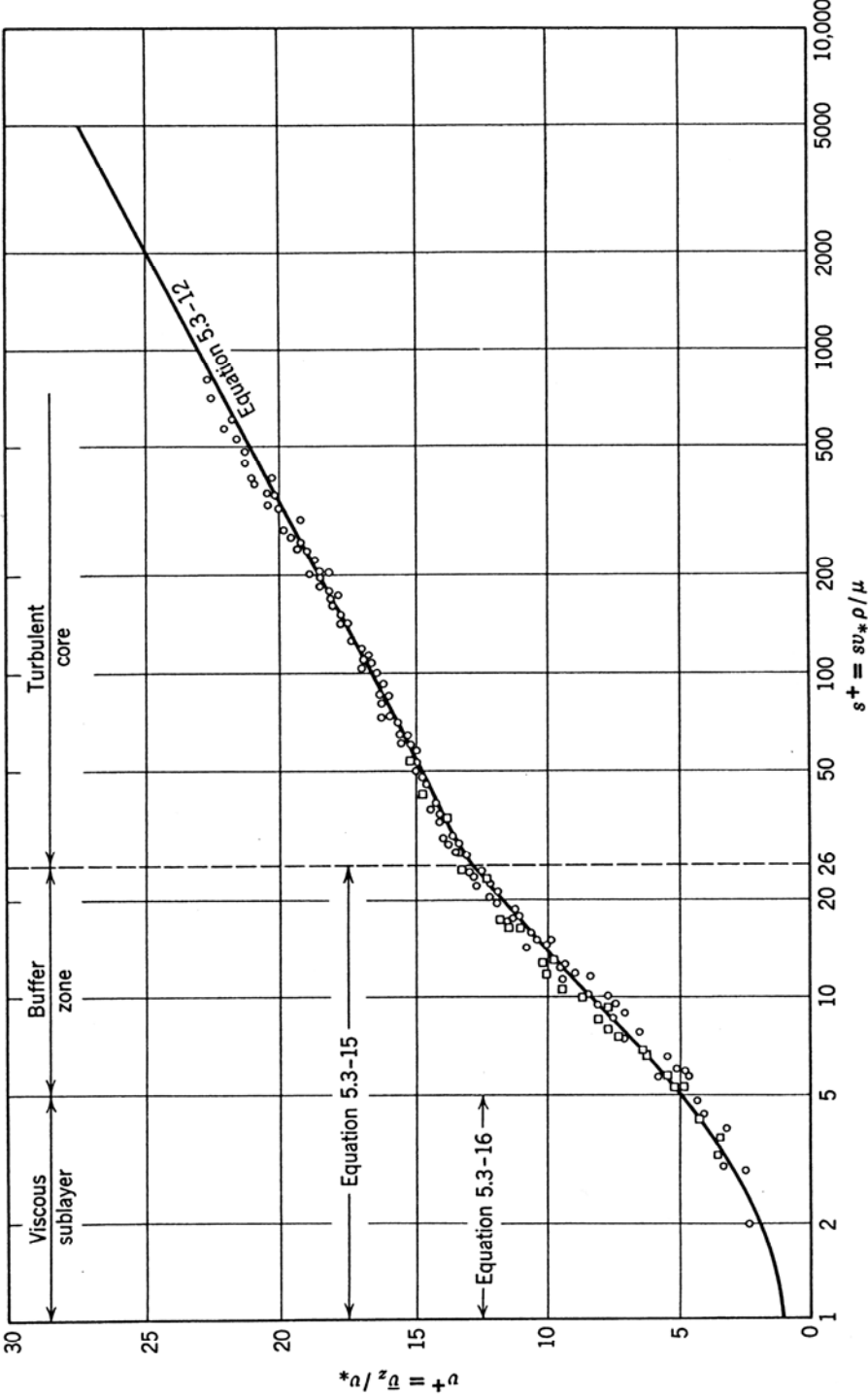
Sommersemester 2009

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Günter Brenn  
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Helfried Steiner

Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung  
Inffeldgasse 25/F  
8010 Graz

*Technische Universität Graz, Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung  
Inffeldgasse 25/F, 8010 Graz  
Tel. 0316 873-7341, Fax 0316 873-7356, Email [brenn@fluidmech.tu-graz.ac.at](mailto:brenn@fluidmech.tu-graz.ac.at)*

# Turbulente wandnahe Geschwindigkeitsverteilungen



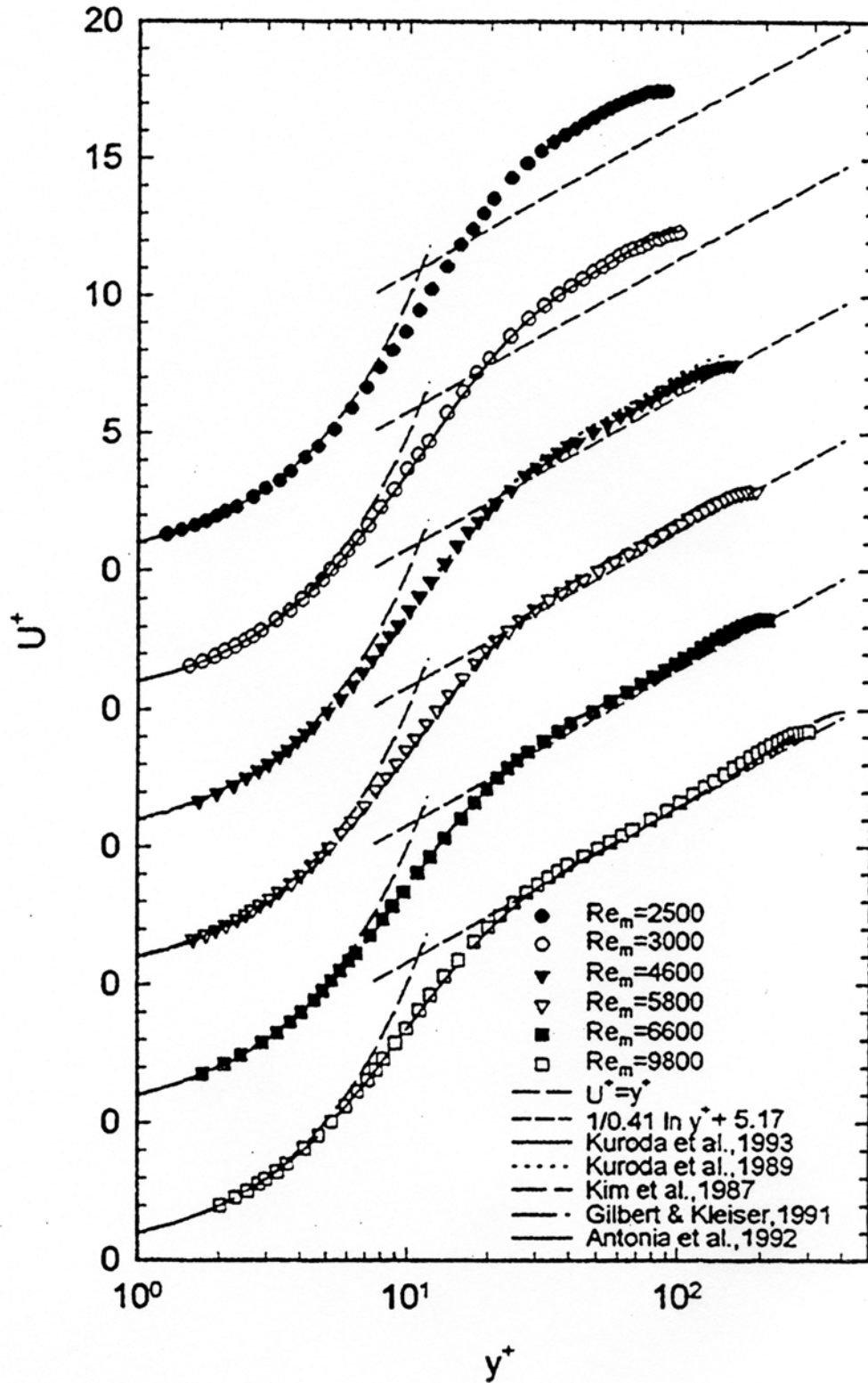
$$u^+ = y^+ \tag{5.3-16}$$

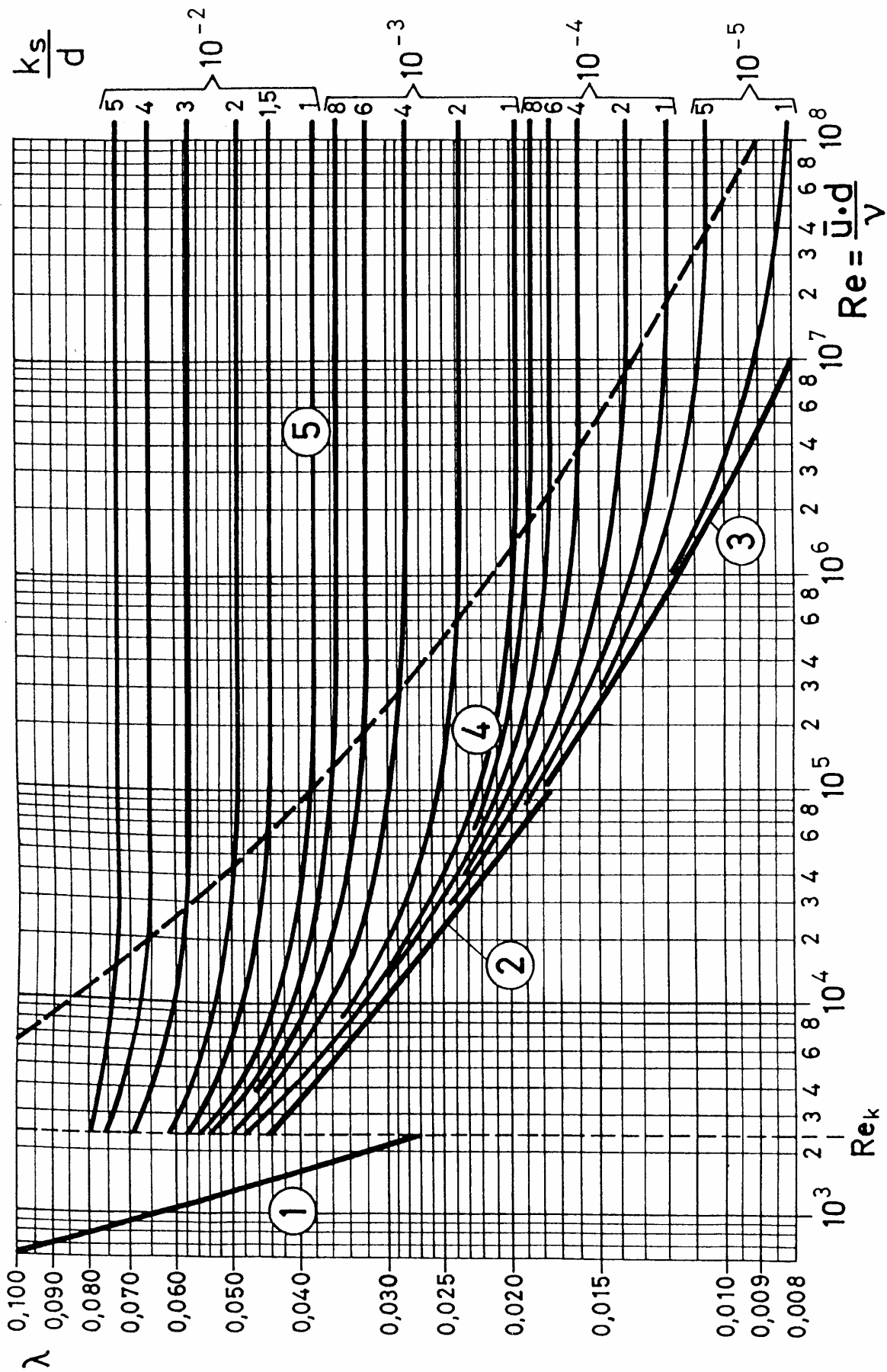
$$u^+ = \int_{y^+=0}^{y^+} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4l_m^{+2}}} dy^+, \quad l_m^+ = \kappa y^+ [1 - \exp(-y^+ / A^+)] \tag{5.3-15}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B \tag{5.3-12}$$

# Turbulente wandnahe Geschwindigkeitsverteilungen –

Messdaten aus Durst et al.: Methods to set up and investigate low Reynolds number, fully developed turbulent plane channel flows. J. Fluids Eng. 120, 496-503 (1998)





Moody-Diagramm der Rohrreibungszahl  $\lambda = \lambda(Re, k_s/d)$  für gerade Kreisrohre

## Tensoranalytische Operationen der Strömungsmechanik Strömungslehre und Wärmeübertragung I, LV 321.100

- Der Tensor der viskosen und/oder elastischen Spannungen  $\tau$  schreibt sich in Komponenten

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

- Die Divergenz des Spannungstensors (Zeilenvektor Nabla mal Tensor) ist ein Vektor

$$\vec{\nabla} \cdot \tau = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- Skalarprodukt des Spannungstensors mit dem Geschwindigkeitsvektor (Spaltenvektor)

$$\tau \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} \end{pmatrix}$$

- Das Skalarprodukt aus Geschwindigkeitsvektor und Divergenz des Spannungstensors ist natürlich ein Skalar

$$\vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \cdot \tau] = u \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

- Die Divergenz des Skalarprodukts aus Spannungstensor und Geschwindigkeitsvektors ist (natürlich) auch ein Skalar

$$\vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}] = \frac{\partial}{\partial x} (u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz})$$

- Die Differenz der beiden letzten Gleichungen wird mit dem Doppelpunkt-Produkt symbolisiert und stellt die Dissipationsfunktion dar

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [\tau \cdot \vec{v}] - \vec{v} \cdot [\vec{\nabla} \cdot \tau] &= (\tau : \vec{\nabla} \vec{v}) = \Phi_{\mu} = \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} \\ &\quad + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

## THE EQUATION OF CONTINUITY IN SEVERAL COORDINATE SYSTEMS

*Rectangular coordinates*  $(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

*Cylindrical coordinates*  $(r, \theta, z)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

*Spherical coordinates*  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho u_\phi) = 0$$

## THE EQUATION OF MOTION IN RECTANGULAR COORDINATES

$(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \text{x-component} \quad \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y-component} \quad \rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ &+ \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{z-component} \quad \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{aligned}$$

for a Newtonian fluid with constant  $\rho$  and  $\mu$ :

$$\begin{aligned} x\text{-component} \quad \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\text{-component} \quad \rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ &+ \mu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\text{-component} \quad \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{aligned}$$

## THE EQUATION OF MOTION IN CYLINDRICAL COORDINATES

$$(r, \theta, z); \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

$$\begin{aligned} r\text{-component} \quad \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) + \rho g_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta\text{-component} \quad \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ &+ \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) + \rho g_\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\text{-component} \quad \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \end{aligned}$$

for a Newtonian fluid with constant  $\rho$  and  $\mu$ :

$$\begin{aligned}
 r\text{-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} \\
 & + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta\text{-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
 & + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z\text{-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \\
 & + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z
 \end{aligned}$$

## THE EQUATION OF MOTION IN SPHERICAL COORDINATES

$$(r, \theta, \phi); \quad x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 r\text{-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) \\
 & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right) + \rho g_r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta\text{-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
 & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right) + \rho g_\theta
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\phi\text{-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} \cot \theta \right) \\
& = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right) + \rho g_\phi
\end{aligned}$$

for a Newtonian fluid with constant  $\rho$  and  $\mu$ :

$$\begin{aligned}
r\text{-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) \\
& = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 u_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} \right) + \rho g_r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta\text{-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
& = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \phi^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + \rho g_\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi\text{-component} \quad & \rho \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} \cot \theta \right) \\
& = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) + \rho g_\phi
\end{aligned}$$

**COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR FOR NEWTONIAN FLUIDS  
IN RECTANGULAR COORDINATES  $(x, y, z)$**

$$\tau_{xx} = \mu \left[ 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{yy} = \mu \left[ 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{zz} = \mu \left[ 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right]$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right]$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left[ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right]$$

**COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR FOR NEWTONIAN FLUIDS  
IN CYLINDRICAL COORDINATES  $(r, \theta, z)$**

$$\tau_{rr} = \mu \left[ 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{zz} = \mu \left[ 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left[ \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right]$$

**COMPONENTS OF THE STRESS TENSOR FOR NEWTONIAN FLUIDS  
IN SPHERICAL COORDINATES  $(r, \theta, \phi)$**

$$\tau_{rr} = \mu \left[ 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{\phi\phi} = \mu \left[ 2 \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right]$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = \mu \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right]$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = \mu \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right]$$

**THE FUNCTION  $(\tau : \nabla u) = \Phi_\mu$  FOR NEWTONIAN FLUIDS**

*Rectangular*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \Phi_\mu &= 2 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &+ \left[ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right]^2 \\ &- \frac{2}{3} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]^2 \end{aligned}$$

*Cylindrical*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \Phi_\mu &= 2 \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &+ \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]^2 \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{3} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]^2$$

*Spherical*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \Phi_\mu = & 2 \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right] \\ & + \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]^2 \\ & + \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right]^2 \\ & + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right]^2 \\ & - \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right]^2 \end{aligned}$$

## THE ENERGY EQUATION IN CARTESIAN COORDINATES

Total energy:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] + \left( \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \left( e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right) = \\ & = \rho (\vec{v} \cdot \vec{f}^B) - (\vec{\nabla} \cdot p \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) + \dot{q}_Q \end{aligned}$$

vic.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \right) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} u \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} w \left( \rho e + \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \right) \right] = \\ & + \rho \left( u f_x^B + v f_y^B + w f_z^B \right) - \left( \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial p w}{\partial z} \right) \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz}) \right] \\ & - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \dot{q}_Q \end{aligned}$$

Mechanical Energy:

$$\begin{aligned} & \rho \left[ \frac{\partial(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2)}{\partial t} + u \frac{\partial(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2)}{\partial x} + v \frac{\partial(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2)}{\partial y} + w \frac{\partial(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2)}{\partial z} \right] = \rho \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right] = \\ & - \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + u \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ & + v \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho \left( u f_x^B + v f_y^B + w f_z^B \right) \end{aligned}$$

Thermal Energy:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + w \frac{\partial e}{\partial z} \right) = -p (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} \\ & + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} \\ & + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} - \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + \dot{q}_Q \end{aligned}$$

where  $\tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \dots = \Phi_\mu$  (Dissipation function)

Heat conduction equation:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + \frac{\dot{q}_Q}{\rho c}$$

Laplace operator in Cartesian coordinates:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Laplace operator in cylindrical coordinates:

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Laplace operator in spherical coordinates:

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rT) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

**Energiegleichung in integraler Form:**

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] dV + \int_O \rho \left( e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO =$$

$$= \int_V (\rho \vec{v} \cdot \vec{f}^B) dV - \int_O (p \vec{v} \cdot \vec{n}) dO +$$

$$+ \int_O (\vec{v} \cdot \vec{\tau}_x) n_x dO + \int_O (\vec{v} \cdot \vec{\tau}_y) n_y dO + \int_O (\vec{v} \cdot \vec{\tau}_z) n_z dO +$$

$$- \int_O (\vec{q} \cdot \vec{n}) dO + \int_V \dot{q}_Q dV$$

Für Festkörper gilt:  $\vec{v} = 0$  ,  $\vec{\tau} = 0$

$$\Rightarrow \int_V \frac{\partial}{\partial t} [\rho e] dV = - \int_O (\vec{q} \cdot \vec{n}) dO + \int_V \dot{q}_Q dV$$

**Energiegleichung in differentieller Form:**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] + \left( \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \left( e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right) =$$

$$= \rho (\vec{v} \cdot \vec{f}^B) - (\vec{\nabla} \cdot p \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{q}) + \dot{q}_Q$$

# Konvektiver Wärmetransport: Durchströmung von Rohren und Kanälen

## (1) Allgemeine Bemerkungen

Der bedeutende Unterschied zur Umströmung von Körpern besteht darin, dass im Falle der Durchströmung die Grenzschichten nicht beliebig anwachsen können, ohne die Außenströmung zu beeinflussen, da hier begrenzende Wände deren Entwicklung behindern.

Bei Umströmungen müssen wir grundsätzlich nur unterscheiden zwischen laminaren bzw. turbulenten Strömungen. Bei Durchströmungen ist zusätzlich eine Unterscheidung notwendig hinsichtlich

- Anlaufbereich und
- entwickelter Strömung.

Wenn wir inkompressible Strömung voraussetzen, ist die „voll entwickelte Strömung“ wohl definiert – das Geschwindigkeitsprofil ändert sich nicht mehr in Strömungsrichtung, und dies auch bei Wärmezufuhr, wenn von Dichteänderungen durch sehr große Temperatur-unterschiede abgesehen wird, was wir im folgenden voraussetzen wollen.

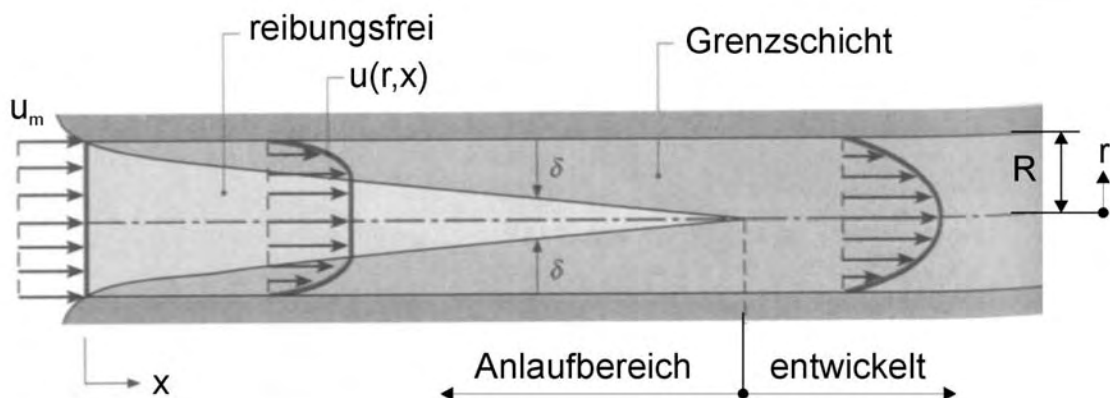
Daher ergibt sich die Frage, ob eine „thermisch entwickelte Strömung“ überhaupt existiert.

Im folgenden wollen wir uns auf die Strömung in Rohren mit kreisförmigem Querschnitt beschränken, wobei die Ergebnisse in vielen Fällen auch auf Kanäle mit nicht kreisförmigem Querschnitt übertragen werden können, wenn wir den Rohrdurchmesser  $D$  durch den hydraulischen Durchmesser  $D_h$  ersetzen:  $D \rightarrow D_h = 4 A/U$ , wobei  $A$  die durchströmte Querschnittsfläche bezeichnet und  $U$  den benetzten Umfang.

### a) Hydrodynamischer Anlauf

Zur Wiederholung sei hier kurz die hydrodynamische Anlaufströmung dargestellt, was bedeutet, dass ab  $x = x_E$  das Geschwindigkeitsprofil unverändert bleibt:  $\partial u / \partial x = 0$  bzw.  $v = 0$ .

Grundsätzlich kann dies wie folgt dargestellt werden:



Für laminare Strömung hatten wir erhalten:

$$\frac{u}{u_m} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \text{bzw.} \quad \frac{u_m}{u_{\max}} = \frac{1}{2}$$

$u_m$  ... volumenstromäquivalente mittlere Geschwindigkeit;  $u_{\max}$  ... Maximalgeschwindigkeit auf der Rohrachse.

Für die Länge des hydraulischen Anlaufes bei laminarer Strömung gilt (ohne Beweis):

$$\frac{x_E}{D} \approx 0,05 Re_D \quad \text{mit} \quad Re_D = \frac{u_m D}{\nu}$$



Für turbulente Strömung kennen wir:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

wobei  $y$  den Wandabstand bezeichnet, und für ausgebildete Strömung  $\delta=R$  gilt. Ebenfalls ohne Beweis sei für die Länge des Anlaufbereiches in turbulenter Strömung als grober Anhalt angeführt:

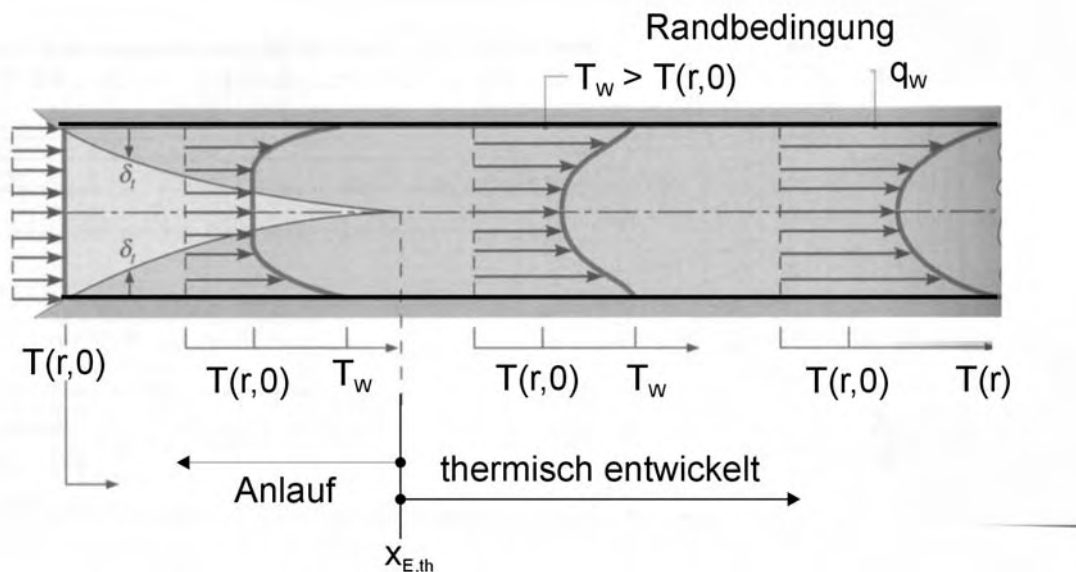
$$10 \leq \frac{x_E}{D} \leq 60.$$

## b) Thermischer Anlauf

Um dies genauer zu erarbeiten, wollen wir annehmen, dass das Fluid mit gleichförmiger Temperatur  $T(r,0) = \text{konstant} < T_w$  (Temperatur der Rohrwand) eintritt. Nun sollen gleich zwei mögliche Fälle unterschieden werden, die zwar idealisierte, aber dennoch realistische mögliche Randbedingungen darstellen:

- $T_w = \text{konstant} \Rightarrow q_w = q_w(x)$
- $q_w = \text{konstant} \Rightarrow T_w = T_w(x)$

In beiden Fällen entwickelt sich eine thermische Grenzschicht, und eventuell wird ein Zustand „thermisch entwickelter Strömung“ erreicht. Grundsätzlich kann dies wie folgt skizziert werden:



Das entstehende Temperaturprofil hängt nun von der speziellen Randbedingung ab. Allerdings wird in beiden Fällen die Temperatur-Überhöhung mit der Lauflänge  $x$  zunehmen  $\Rightarrow$  das bedeutet, dass die laufende Wärmezufuhr über die Wände notwendigerweise eine laufende Änderung der örtlichen Fluidtemperatur bedingt.

Für die thermische Anlauflänge im Fall laminarer Strömung gilt (ohne Beweis)

$$\frac{x_{E,th}}{D} \approx 0,05 Re_D Pr \quad \text{mit} \quad Re_D = \frac{u_m D}{\nu},$$

was die Abhängigkeit der thermischen Grenzschichtdicke von der Prandtl-Zahl in laminaren Strömungen zum Ausdruck bringt.

- $Pr = 1: x_{E,th} = x_E$        $Pr > 1: x_{E,th} > x_E$        $Pr < 1: x_{E,th} < x_E$

$Pr \sim 1$  gilt für die meisten Gase ( $\sim 0,7$  für Luft),  $Pr > 1$  gilt für sehr viele Flüssigkeiten,

$Pr \gg 1$  z. B. für hochviskose Öle,  $Pr \ll 1$  für flüssige Metalle mit großer Temperaturleitfähigkeit.

## (2) Definition von „mittleren Größen“

Bei Durchströmungsproblemen existiert keine definierte Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht, weshalb hier günstigerweise mit der volumenstromäquivalenten mittleren Geschwindigkeit gerechnet wird:

$$u_m = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \int_A u(r) dA$$

Noch viel wesentlicher ist die Einführung einer „mittleren Fluidtemperatur“  $T_m$ , die für den Energietransport durch eine Querschnittsfläche charakteristisch ist.

Der Enthalpiestrom durch einen Rohrquerschnitt  $A$  kann wie folgt angegeben werden:

$$\dot{H} = \int_A \rho u h(T) dA \quad \text{wobei} \quad T = T(x, r)$$

Die mittlere Temperatur  $T_m$  definiert man so, dass das Produkt aus dem Massenstrom und der spezifischen Enthalpie bei der Temperatur  $T_m$  dem Enthalpiestrom  $\dot{H}$  entspricht.

$$\text{Massenstrom:} \quad \dot{m} = \int_A \rho u dA, \quad \text{Enthalpiestrom:} \quad \dot{H} = \dot{m} h(T_m)$$

Mit  $h = c_p T$  für ideale Gase und  $c_p = \text{konstant}$  sowie für inkompressible Strömung erhalten wir:

$$T_m = \frac{1}{\dot{m}} \int_A \rho u T dA = \frac{\int_A \rho u T dA}{\int_A \rho u dA} = \frac{1}{u_m} \int_A u T dA$$

Diese Temperatur ist die „enthalpiestromäquivalente mittlere Fluidtemperatur“, und  $u_m$  die volumenstromäquivalente mittlere Strömungsgeschwindigkeit.

## (3) Bedingungen für thermisch entwickelte Strömung

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt, dass bei kontinuierlicher Wärmezufuhr oder Wärmeabfuhr das Temperaturprofil laufend veränderlich ist:

$$\Rightarrow \frac{\partial T(r, x)}{\partial x} \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{dT_m(x)}{dx} \neq 0$$

Eingehende Analysen dieser Problematik konnten aber zeigen, dass ein „thermisch entwickelter“ Zustand (im folgenden durch den Index „E“ gekennzeichnet) definiert werden kann, wenn geeignete dimensionslose Größen gewählt werden. Ohne Beweis kann dies geschrieben werden wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{T_w(x) - T(r, x)}{T_w(x) - T_m(x)} \right]_E = 0. \quad (\otimes)$$

In dieser Beziehung bedeuten  $T_w(x)$  die Wandtemperatur,  $T_m(x)$  die mittlere Fluidtemperatur und  $T(r, x)$  die lokale Fluidtemperatur.

Dieser Zustand, der die Unveränderlichkeit des dimensionslosen Temperaturprofils mit  $x$  bedeutet, kann mit beiden möglichen Formen des Wärmetransportes über die Wände erreicht werden, also bei  $T_w = \text{konstant}$  und mit  $q_w = \text{konstant}$ .

## (4) Allgemeine Schlussfolgerungen aus Gleichung $(\otimes)$

Wenn das dimensionslose Temperaturprofil wie oben angegeben keine Funktion von  $x$  ist, dann folgt daraus, dass auch die Ableitung nach der radialen Koordinate keine Funktion von  $x$  sein kann,

$\frac{\partial}{\partial r} [\dots] \neq f(x)$ , da für diese Ableitung  $T_w$  und  $T_m$  Konstante sind. Speziell bei  $r=R$  gilt:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right]_{r=R} = \frac{-\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R}}{T_w - T_m} \neq f(x)$$

Für die Wandwärmestromdichte gilt:

$$q_w = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

Andererseits können wir auch schreiben:

$$q_w = \alpha (T_w - T_m)$$

Ein Vergleich liefert dann:

$$\Rightarrow \frac{-\frac{q_w}{\lambda}}{(T_w - T_m)} = \frac{-\frac{\alpha}{\lambda} (T_w - T_m)}{(T_w - T_m)} \neq f(x)$$

Daraus folgt sofort eine für thermisch entwickelte Strömungen besonders wichtige Aussage:

Ist die Wärmeleitzahl konstant, d. h. keine Funktion von  $x$ , dann ist auch die Wärmeübergangszahl konstant:

$$\alpha = \text{konstant} \neq f(x) \text{ für thermisch entwickelte Strömung}$$

Dies gilt sowohl für  $T_w = \text{konstant}$ , als auch für  $q_w = \text{konstant}$ , allerdings nimmt die Konstante in beiden Fällen verschiedene Werte an.

Im Anlaufbereich gilt dies nicht, dort ist die Wärmeübergangszahl von  $x$  abhängig:  $\alpha = \alpha(x)$  ! In der Nähe von  $x=0$  ist die Dicke der thermischen Grenzschicht  $\delta_t$  gering und daher die Wärmeübergangszahl hoch. Mit zunehmender Lauflänge im Rohr wird  $\delta_t$  größer, und  $\alpha$  nimmt ab bis zum Erreichen des thermisch entwickelten Zustandes.

##### (5) Spezielle Schlussfolgerungen aus Gleichung (⊗) für thermisch entwickelte Strömung

a) Wandwärmestrom  $q_w = \text{konstant}$

Aus  $\frac{q_w}{\alpha} = T_w - T_m$  folgt mit  $\alpha = \text{konstant}$  sofort  $(T_w - T_m) \neq f(x)$  und damit weiter

$$\frac{dT_w}{dx} \Big|_E = \frac{dT_m}{dx} \Big|_E \quad \text{für } q_w = \text{konstant}$$

b) Wird Gleichung (⊗) partiell differenziert und umgeformt, so erhalten wir:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_E = \frac{dT_w}{dx} \Big|_E - \left( \frac{T_w - T}{T_w - T_m} \right) \left[ \frac{dT_w}{dx} - \frac{dT_m}{dx} \right] \Big|_E$$

Daraus können wir nun getrennt zwei Schlussfolgerungen ziehen.

1) Für  $q_w = \text{konstant}$  folgt unter Verwendung von a) sofort  $[\dots] = 0$ , und damit weiter, dass der axiale Temperaturgradient keine Funktion von  $r$  ist:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_E = \left( \frac{dT_w}{dx} \Big|_E \right) = \frac{dT_m}{dx} \Big|_E \neq g(r) \quad \text{für } q_w = \text{konstant}$$

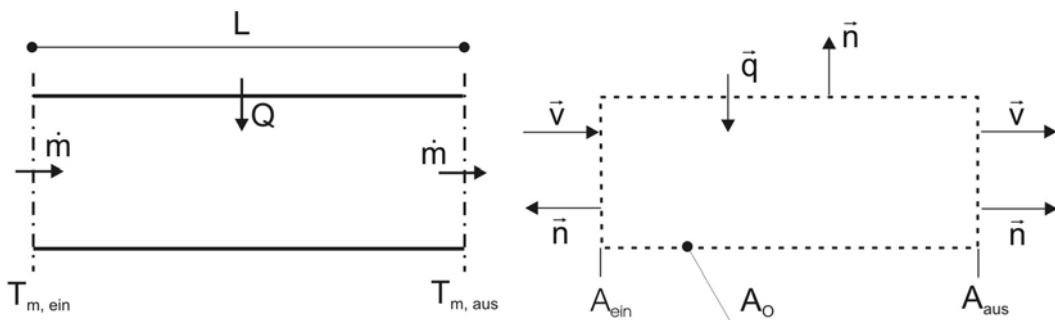
- 2) Für  $T_W = \text{konstant}$  gilt  $\frac{dT_W}{dx} = 0$ , und wir erhalten als Ergebnis, dass in diesem Fall der axiale Temperaturgradient mit der radialen Koordinate im Rohrquerschnitt veränderlich ist:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_E = \frac{T_W - T}{T_W - T_m} \left. \frac{dT_m}{dx} \right|_E = h(r, x)$$

Aus diesen Betrachtungen wird aber auch sofort ersichtlich, dass die enthalpiestrom-äquivalente mittlere Temperatur  $T_m$  zur Berechnung von Durchströmungsproblemen eine wichtige Größe darstellt.

### (6) Globale Betrachtung, Energiebilanz

Hierzu betrachten wir ein Rohr mit konstantem Querschnitt (Durchmesser  $D$ ) und der Länge  $L$ . Über die Rohrwand soll Wärme durch Konvektion zugeführt werden. Die kinetische Energie der Strömung soll sich dabei nicht ändern, und die Wärmeleitung in  $x$ -Richtung soll aufgrund ihres geringen Einflusses nicht berücksichtigt werden.



Die Energiegleichung für den skizzierten Kontrollraum lautet dann, wobei  $O$  die gesamte Oberfläche des Kontrollraumes bezeichnet:

$$\int_O \rho \left( e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO = - \int_O p (\vec{v} \cdot \vec{n}) dO - \int_O \vec{q} \cdot \vec{n} dO$$

Speziell ausgewertet erhalten wir daraus:

$$- \int_{A_{\text{ein}}} \rho \left( e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) v dO + \int_{A_{\text{aus}}} \rho \left( e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) v dO = \int_{A_{\text{ein}}} p v dO - \int_{A_{\text{aus}}} p v dO - \int_{A_o} (-q) dO$$

Da die kinetische Energie voraussetzungsgemäß am Eintritt und am Austritt gleich sein soll, können wir zusammenfassen und erhalten mit  $Q$  als dem insgesamt über die Mantelfläche zugeführten Wärmestrom:

$$\int_{A_{\text{aus}}} \rho v \left( e + \frac{p}{\rho} \right) dO - \int_{A_{\text{ein}}} \rho v \left( e + \frac{p}{\rho} \right) dO = Q$$

Unter Einführung der Enthalpie  $h = e + \frac{p}{\rho}$  erhalten wir:

$$\dot{H}_{\text{aus}} - \dot{H}_{\text{ein}} = Q,$$

und mit der bereits früher erfolgten Festlegung  $\dot{H} = \dot{m} h(T_m) = \dot{m} c_p T_m$  eine äußerst wichtige Beziehung, aus der die Änderung der mittleren Fluidtemperatur zwischen Eintritt und Austritt berechnet werden kann, wenn der konvektiv zugeführte Wärmestrom bekannt ist:

$$\boxed{Q = \dot{m} c_p (T_{m,\text{aus}} - T_{m,\text{ein}})}$$

Diese Beziehung ist bis auf die vereinbarten Spezialisierungen (ideales Gas usw.) allgemein und damit unabhängig von der speziellen Randbedingung, die entweder  $q_w = \text{konstant}$  oder  $T_w = \text{konstant}$  sein kann. Auch haben wir keinerlei Einschränkungen gemacht, dass die Strömung entwickelt sein soll.

Bei der vorangegangenen Berechnung wurde auch keine Festlegung über die Länge des Rohres getroffen – die oben genannte Beziehung gilt also zwischen beliebigen Querschnitten im Rohr. Daraus können wir daher auch eine Bilanz für ein Rohrelement der differentiellen Länge  $dx$  ableiten, womit die Formulierung noch allgemeiner wird:

$$dQ = \dot{m} c_p \left( \frac{dT_m}{dx} dx \right)$$

Andererseits gilt auch  $dQ = q_w U dx$ , wobei  $U = \pi D$  den Umfang des Rohres bezeichnet. Für die Wärmestromdichte können wir  $q_w = \alpha (T_w - T_m)$  einsetzen und erhalten

$$dQ = \alpha (T_w - T_m) U dx$$

Werden nun die beiden Ausdrücke für  $dQ$  gleichgesetzt, so folgt:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{\alpha D \pi}{\dot{m} c_p} (T_w - T_m) \quad (\otimes \otimes)$$

Diese Beziehung ist ganz wesentlich zur Berechnung des Verlaufes der mittleren Fluidtemperatur. Ihre Lösung hängt allerdings von der speziellen Randbedingung ab. Der Durchmesser  $D$  kann im allgemeinsten Fall auch eine Funktion von  $x$  sein.

Daraus können wir folgendes Verhalten ablesen:

$$T_w > T_m \Rightarrow \frac{dT_m}{dx} > 0: \text{Wärmezufuhr}$$

$$T_w < T_m \Rightarrow \frac{dT_m}{dx} < 0: \text{Wärmeabfuhr}$$

$$D = \text{konstant} \Rightarrow \frac{D \pi}{\dot{m} c_p} = \text{konstant}$$

Wir halten außerdem fest:

Im Anlaufbereich ist  $\alpha = \alpha(x)$ , für entwickelte Strömung ist  $\alpha = \text{konstant}$ . Unabhängig von der speziellen Randbedingung gilt immer  $T_m = T_m(x)$  !

### (7) Folgerungen für $q_w = \text{konstant}$

Dafür gilt  $Q = q_w U L$ , womit aus der globalen Energiebilanz sofort die Differenz der mittleren Fluidtemperaturen zwischen Ein- und Austritt berechnet werden kann.

Aus  $q_w = \alpha (T_w - T_m) = \text{konstant}$  folgt mit  $\dot{m} c_p = \text{konstant}$  aus Gleichung  $(\otimes \otimes)$  weiter

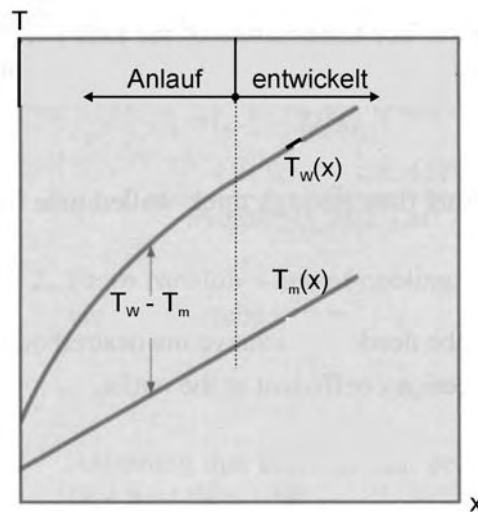
$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{q_w D \pi}{\dot{m} c_p} \neq f(x).$$

Nach Integration von  $x = 0$  bis zu einer Stelle  $x$  im Rohr erhalten wir unter Verwendung der Randbedingung  $T_m(x=0) = T_{m,\text{ein}}$  :

$$T_m(x) = T_{m,\text{ein}} + \frac{q_w D \pi}{\dot{m} c_p} x$$

Das bedeutet, dass die mittlere Fluidtemperatur einen linearen Verlauf längs der Koordinate  $x$  aufweist, und zwar gleichermaßen im Anlaufbereich wie auch im thermisch entwickelten Bereich. Für

den Anlaufbereich folgt zusätzlich aus  $q_w = \alpha(x)(T_w - T_m)$ , dass  $(T_w - T_m)$  zunehmen muss, da  $\alpha(x)$  abnimmt. Den Temperaturverlauf bei  $q_w = \text{konstant}$  können wir also wie folgt skizzieren:



Hinweis: Auch im allgemeineren Fall, wenn  $q_w = q_w(x)$  als bekannt vorausgesetzt werden kann, und  $D = D(x)$  variabel ist, kann Gleichung (⊗⊗) integriert werden.

Mit  $Q = \int_0^x q_w(x) U(x) dx$  kann auch die Differenz  $(T_{m,aus} - T_{m,ein})$  berechnet werden.

### (8) Folgerungen für $T_w = \text{konstant}$

Ausgangspunkt ist ebenfalls Gleichung (⊗⊗), die hier nochmals angeführt werden soll:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{\alpha D \pi}{\dot{m} c_p} (T_w - T_m)$$

Mit  $T_w = \text{konstant}$  können wir günstigerweise eine Temperaturdifferenz  $\Delta T(x) = T_w - T_m(x)$  zur leichteren Rechnung einführen. Damit geht Gleichung (⊗⊗) über in:

$$-\frac{d(\Delta T)}{dx} = \frac{U \alpha}{\dot{m} c_p} \Delta T$$

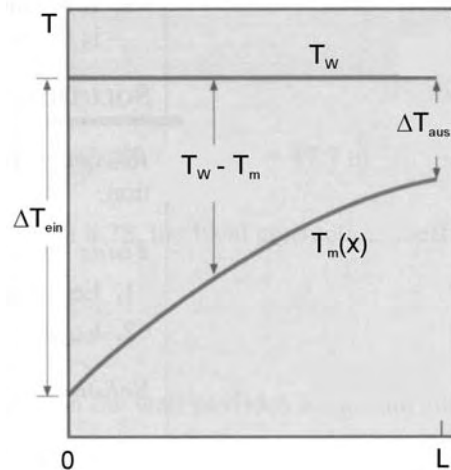
Trennung der Variablen und Integration liefert:

$$\int_{\Delta T_{ein}}^{\Delta T_{aus}} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -\frac{U}{\dot{m} c_p} \int_0^x \alpha(x) dx \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{\Delta T_{aus}}{\Delta T_{ein}} = -\frac{U x}{\dot{m} c_p} \left[ \frac{1}{x} \int_0^x \alpha(x) dx \right] \quad (\otimes\otimes\otimes)$$

wobei der Ausdruck in eckiger Klammer  $\left[ \frac{1}{x} \int_0^x \alpha(x) dx \right] = \bar{\alpha}_x$  die zwischen  $x = 0$  und irgendeiner Stelle  $x$  im Rohr gemittelte Wärmeübergangszahl darstellt. Daraus erhalten wir durch Umformen

$$\frac{\Delta T_{aus}}{\Delta T_{ein}} = \frac{T_w - T_m(x)}{T_w - T_{m,ein}} = \exp\left(-\frac{U x}{\dot{m} c_p} \bar{\alpha}_x\right).$$

Hieraus erkennt man, dass die Temperaturdifferenz  $T_w - T_m(x)$  exponentiell mit der Koordinate  $x$  abnimmt, was in der folgenden Skizze dargestellt ist.



Die Berechnung des insgesamt übertragenen Wärmestromes ist hier aufgrund des exponentiellen Temperaturverlaufes etwas komplizierter. Die globale Energiebilanz zwischen Eintritt und Austritt lautet etwas umgeformt wie folgt:

$$Q = \dot{m} c_p \left[ (T_W - T_{m,\text{ein}}) - (T_W - T_{m,\text{aus}}) \right] = \dot{m} c_p \left[ \Delta T_{\text{ein}} - \Delta T_{\text{aus}} \right]$$

Wenn wir hier  $(\dot{m} c_p)$  mit Hilfe von Gleichung (⊗⊗⊗) ausdrücken, so erhalten wir

$$Q = U \times \bar{\alpha}_x \frac{\Delta T_{\text{aus}} - \Delta T_{\text{ein}}}{\ln \frac{\Delta T_{\text{aus}}}{\Delta T_{\text{ein}}}} = A_O \bar{\alpha}_x (\Delta T_{\text{log}})$$

mit

$A_O = U \cdot x$  als die Oberfläche und  $\Delta T_{\text{log}} = \frac{\Delta T_{\text{aus}} - \Delta T_{\text{ein}}}{\ln \frac{\Delta T_{\text{aus}}}{\Delta T_{\text{ein}}}}$  als die mittlere logarithmische

Temperaturdifferenz. Diese Beziehung stellt ein Wärmeübergangsgesetz dar, das einen Zusammenhang zwischen dem insgesamt übertragenen Wärmestrom und der Differenz der mittleren Fluidtemperatur zwischen Eintritt und Austritt wiedergibt.

**Bemerkung:** Die beiden isoliert betrachteten Randbedingungen stellen zwar Vereinfachungen dar, die aber bei praktischen Rechnungen in vielen Fällen plausibel argumentiert werden können.

- $q_w = \text{konstant}$ : elektrisch beheizte Wände oder konstante Beaufschlagung der äußeren Wandoberfläche durch Strahlung.
- $T_w = \text{konstant}$ : in der Regel bei vielen Problemen mit Phasenübergang (Sieden, Kondensation).
- Beide Randbedingungen können natürlich durch entsprechend geregelte Beheizung oder Kühlung eingestellt werden.

## (9) Bestimmung von Wärmeübergangszahlen bzw. Nußeltzahlen

(a) Laminare Strömung in Rohren mit Kreisquerschnitt, thermisch voll entwickelter Bereich.

Dafür ist die Geschwindigkeitsverteilung bekannt:

$$\frac{u}{u_m} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad \text{mit} \quad \frac{u_m}{u_{\text{max}}} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad v = 0.$$

Die Energiegleichung für inkompressible, stationäre Strömung unter Vernachlässigung der Dissipation durch innere Reibung sowie unter Berücksichtigung der Grenzschichtnäherung  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$  lautet:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = a \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

Für voll entwickelte Strömung ist mit  $v = 0$  eine Lösung der folgenden vereinfachten Gleichung möglich:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = a \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

- i) Wandwärmestrom  $q_w = \text{konstant}$

Für diesen Fall hatten wir schon gezeigt, dass gilt

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_E = \left. \frac{dT_m}{dx} \right|_E,$$

und außerdem, dass die mittlere Fluidtemperatur linear mit  $x$  veränderlich ist. In diesem Fall ist also die Grenzschichtnäherung  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$  exakt. Nach Einsetzen der obigen Beziehung sowie der Geschwindigkeitsverteilung in die Energiegleichung kann diese integriert werden und liefert die Temperaturverteilung  $T(r,x)$ . Daraus kann nach Einführen der mittleren Temperatur  $T_m$  und einigen Manipulationen das folgende sehr wichtige Ergebnis erhalten werden (ohne weiteren Beweis):

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = 4,36} \quad \text{für } q_w = \text{konstant} \text{ am Rohr mit Kreisquerschnitt}$$

Die Nußelt-Zahl, die für diese Belange mit dem Rohrdurchmesser  $D$  gebildet wird, ist konstant.

- ii) Wandtemperatur  $T_w = \text{konstant}$

Ausgangspunkt dafür ist wieder die Energiegleichung in Grenzschichtnäherung. Unter Berücksichtigung der in den vorigen Abschnitten dargestellten Zusammenhänge für  $T_w = \text{konstant}$  erhält man eine Gleichung, die allerdings nicht geschlossen, sondern nur iterativ gelöst werden kann. Das Ergebnis wird ebenfalls ohne weiteren Beweis angegeben:

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = 3,66} \quad \text{für } T_w = \text{konstant} \text{ am Rohr mit Kreisquerschnitt}$$

- (b) Turbulente Strömung in Rohren mit Kreisquerschnitt, thermisch voll entwickelter Bereich

Die beiden im folgenden angeführten Beziehungen gelten nur für nicht allzu große Differenzen  $(T_w - T_m)$ , und die Stoffwerte sind jeweils bei  $T_m$  zu ermitteln. Beide Beziehungen gelten sowohl für  $T_w = \text{konstant}$  als auch für  $q_w = \text{konstant}$ , und wurden experimentell bestätigt für folgende Parameter:



$$0,7 \leq Pr \leq 160$$

$$Re_D = \frac{u_m D}{\nu} > 10000$$

$$\frac{L}{D} \geq 10$$

- Gleichung von Colburn:

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^{1/3}$$

- Gleichung von Dittus-Boelter:

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n$$

mit  $n=0,4$  für Wärmezufuhr  $T_W > T_m$

und  $n=0,3$  für Wärmeabfuhr  $T_W < T_m$ .

Abschließend muss festgehalten werden, dass beide Beziehungen in der Anwendung sehr einfach sind, aber Fehler bis zu 25% des Wärmestromes verursachen können. Auf komplexere Beziehungen wollen wir aber nicht eingehen.

(c) Strömung mit Wärmezufuhr im Anlaufbereich

Die Berechnung von Wärmetransportvorgängen bei thermischer Anlaufströmung bzw. bei kombiniertem hydraulischem und thermischem Anlauf sind naturgemäß komplexer. Entsprechende Beziehungen zur Bestimmung von Nußeltzahlen können der einschlägigen Fachliteratur entnommen werden.

Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung  
Technische Universität Graz  
**Strömungslehre und Wärmeübertragung I, UE (LV 321.101)**

<b>Stoffwerte von Wasser bei einem Druck von p = 1 bar</b>								
T [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_p$ [J/kg K]	$\beta$ [10 <sup>-3</sup> /K]	$\lambda$ [W/m K]	$\mu$ [10 <sup>-6</sup> Pa s]	$\nu$ [10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s]	a [10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s]	Pr [-]
- 20	992,8	4375	- 0,7056	0,5118	4311,0	4,342	0,118	36,85
- 15	995,8	4312	- 0,4946	0,5259	3312,8	3,372	0,122	27,17
- 10	997,8	4269	- 0,3281	0,5388	2533,4	2,639	0,125	20,86
- 5	999,1	4238	- 0,1943	0,5508	2149,4	2,151	0,130	16,54
0	999,8	4217	- 0,0852	0,5620	1791,8	1,792	0,133	13,44
5	1000,0	4202	0,0055	0,5724	1519,6	1,520	0,136	11,16
10	999,8	4192	0,0823	0,5820	1307,6	1,308	0,139	9,42
15	999,2	4186	0,1486	0,5911	1139,0	1,140	0,141	8,07
20	998,3	4182	0,2067	0,5996	1002,6	1,004	0,144	6,99
25	997,2	4180	0,2586	0,6076	890,8	0,893	0,146	6,13
30	995,8	4178	0,3056	0,6151	797,7	0,801	0,148	5,42
35	994,1	4178	0,3488	0,6221	719,5	0,724	0,150	4,83
40	992,3	4179	0,3890	0,6287	653,1	0,658	0,152	4,34
45	990,3	4180	0,4267	0,6348	596,3	0,602	0,153	3,93
50	988,1	4181	0,4523	0,6405	547,1	0,554	0,155	3,57
55	985,7	4183	0,4963	0,6458	504,3	0,512	0,157	3,27
60	983,2	4185	0,5288	0,6507	465,8	0,475	0,158	3,00
65	980,5	4187	0,5590	0,6553	433,8	0,442	0,160	2,77
70	977,7	4190	0,5900	0,6595	404,5	0,414	0,161	2,57
75	974,7	4193	0,5190	0,6633	378,3	0,388	0,162	2,39
80	971,4	4196	0,6473	0,6668	355,0	0,365	0,164	2,23
85	968,5	4200	0,6748	0,6699	333,9	0,345	0,165	2,09
90	965,1	4205	0,7018	0,6728	315,0	0,326	0,166	1,97
95	961,7	4210	0,7284	0,6753	297,8	0,310	0,167	1,86
99,63 <sup>+) </sup>	958,4	4215	0,7527	0,6773	283,3	0,296	0,168	1,76

<sup>+)</sup>  Sättigungszustand

**Stoffwerte von Wasser bei einem Druck  $p = 5$  bar**

T [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_p$ [J/kg K]	$\beta$ [10 <sup>-3</sup> /K]	$\lambda$ [W/m K]	$\mu$ [10 <sup>-6</sup> Pa s]	$\nu$ [10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s]	$a$ [10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s]	Pr [-]
0	1000,0	4215	- 0,08376	0,5622	1791	1,79	0,133	13,4
25	997,3	4178	0,2590	0,6078	890,7	0,893	0,146	6,12
50	988,2	4180	0,4622	0,6407	547,2	0,554	0,155	3,57
75	974,9	4192	0,6185	0,6635	378,4	0,388	0,162	2,39
100	958,3	4215	0,7539	0,6777	282,3	0,295	0,168	1,76
150	916,8	4310	1,024	0,6836	181,9	0,198	0,173	1,15

**Stoffwerte von Wasser bei einem Druck  $p = 10$  bar**

T [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_p$ [J/kg K]	$\beta$ [10 <sup>-3</sup> /K]	$\lambda$ [W/m K]	$\mu$ [10 <sup>-6</sup> Pa s]	$\nu$ [10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s]	$a$ [10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s]	Pr [-]
0	1000,3	4212	- 0,08199	0,5625	1790	1,79	0,134	13,4
25	997,6	4177	0,2595	0,6081	890,6	0,893	0,146	6,12
50	988,5	4179	0,4620	0,6410	547,2	0,554	0,155	3,57
75	975,1	4191	0,6179	0,6638	378,6	0,388	0,162	2,39
100	958,6	4214	0,7530	0,6780	282,4	0,295	0,168	1,76
150	917,1	4308	1,022	0,6839	182,0	0,198	0,173	1,15

**Stoffwerte von Wasser im Sättigungszustand (Flüssigkeit)**

T [°C]	p [bar]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_p$ [J/kg K]	$\beta$ [10 <sup>-3</sup> /K]	$\lambda$ [W/m K]	$\mu$ [10 <sup>-6</sup> Pa s]	$\nu$ [10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s]	a [10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s]	Pr [-]
0,01	0,00611	999,8	4217	- 0,0853	0,562	1791,4	1,792	0,1333	13,44
10	0,01227	999,7	4193	0,0821	0,582	1307,7	1,308	0,1388	9,42
20	0,02337	998,3	4182	0,2066	0,600	1002,7	1,004	0,1436	6,99
30	0,04242	995,7	4179	0,3056	0,615	797,7	0,801	0,1478	5,42
40	0,07375	992,2	4179	0,3890	0,629	653,1	0,658	0,1516	4,34
50	0,12335	988,0	4181	0,4624	0,640	547,1	0,554	0,1550	3,57
60	0,19919	983,1	4185	0,5288	0,651	466,8	0,475	0,1582	3,00
70	0,31151	977,7	4190	0,5900	0,659	404,4	0,414	0,1610	2,57
80	0,47359	971,6	4197	0,6473	0,667	355,0	0,365	0,1635	2,234
90	0,70108	965,1	4205	0,7019	0,673	315,0	0,326	0,1658	1,969
100	1,01325	958,1	4216	0,7547	0,677	282,2	0,294	0,1677	1,756
110	1,4326	950,7	4229	0,8068	0,681	254,9	0,268	0,1694	1,583
120	1,9854	942,8	4245	0,8590	0,683	232,1	0,246	0,1707	1,442
130	2,7012	934,6	4263	0,9121	0,684	212,7	0,228	0,1718	1,325

**Stoffwerte von trockener Luft bei einem Druck  $p = 1$  bar**

T [°C]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c_p$ [J/kg K]	$\beta$ [10 <sup>-3</sup> /K]	$\lambda$ [W/m K]	$\mu$ [10 <sup>-6</sup> Pa s]	$\nu$ [10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s]	a [10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s]	Pr [-]
- 40	1,4952	1006	4,304	0,02145	15,09	10,09	14,3	0,71
- 20	1,3765	1006	3,962	0,02301	16,15	11,73	16,6	0,71
0	1,2754	1006	3,671	0,02454	17,10	13,41	19,1	0,70
20	1,1881	1007	3,419	0,02603	17,98	15,13	21,8	0,70
40	1,1120	1008	3,200	0,02749	18,81	16,92	24,5	0,69
60	1,0452	1009	3,007	0,02894	19,73	18,88	27,4	0,69
80	0,9859	1010	2,836	0,03038	20,73	21,02	30,5	0,69
100	0,9329	1012	2,684	0,03181	21,60	23,15	33,7	0,69
120	0,8854	1014	2,547	0,03323	22,43	25,33	37,0	0,68
140	0,8425	1017	2,423	0,03466	23,19	27,53	40,5	0,68
160	0,8036	1020	2,311	0,03607	24,01	29,88	44,0	0,68
180	0,7681	1023	2,209	0,03749	24,91	32,43	47,7	0,68
200	0,7356	1026	2,115	0,03891	25,70	34,94	51,6	0,68
250	0,6653	1035	1,912	0,04243	27,40	41,18	61,6	0,67

T	Temperatur in °C	$\beta$	thermischer Ausdehnungskoeffizient	a	Temperaturleitzahl
p	Druck	$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	Pr	Prandtl-Zahl
$\rho$	Dichte	$\mu$	dynamische Zähigkeit		
$c_p$	spezifische Wärmekapazität bei p = konstant	$\nu$	kinematische Zähigkeit		

FICKSches Gesetz (äquimolare Gegendiffusion in binären Systemen)

$$\boxed{\tilde{j}_A = -D_{AB} \frac{dc_A}{dz}} \quad \left[ \frac{\text{kmol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$$

$D_{AB}$  ... Diffusionskoeffizient

Beschreibung von Gemischen mit  $K$  Komponenten

molare Größen	$x_i = \frac{\frac{w_i}{M_{G,i}}}{\sum_{j=1}^K \frac{w_j}{M_{G,j}}}$	$c_i = \frac{\rho_i}{M_{G,i}}$	$c_{ges} = \frac{\rho_{ges}}{M_{G,ges}}$
massenbehaftete Größen	$w_i = \frac{x_i \cdot M_{G,i}}{\sum_{j=1}^K x_j \cdot M_{G,j}}$	$\rho_i = c_i \cdot M_{G,i}$	$\rho_{ges} = c_{ges} \cdot M_{G,ges}$

molare Größen:  $M_{G,ges} = \sum_{i=1}^K x_i \cdot M_{G,i}$

massenbehaftete Größen:  $M_{G,ges} = \frac{1}{\sum_{i=1}^K \frac{w_i}{M_{G,i}}}$

Die Bilanzgleichung

$$\boxed{\frac{\partial c_i}{\partial t} + \text{div } \vec{n}_i = \dot{r}_i}$$

$\vec{n}_i = \tilde{j}_i + \tilde{v}c_i \dots$  mit  $\tilde{j}_i$  als diffusive Stoffstromdichte

Chemische Umsatzrate

$$\boxed{\dot{r}_i = k_i \cdot c_i^n} \quad \left[ \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}} \right]$$

Äquimolare Diffusion

$$\boxed{dy_i = -\frac{\dot{n}_i dz}{D c}} \quad \text{kartesisch eindimensional}$$

Einseitige Diffusion - STEFAN-Diffusion

$$\boxed{\frac{dy_i}{1 - y_i} = -\frac{\dot{n}_i dz}{D c}} \quad \text{kartesisch eindimensional}$$

Massenströme	Molenströme
$\vec{m}_1 = \rho w_1 \vec{v} - \rho D \text{ grad } w_1$	$\vec{n}_1 = c x_1 \vec{v} - c D \text{ grad } x_1$
$\vec{m}_2 = \rho w_2 \vec{v} - \rho D \text{ grad } w_2$	$\vec{n}_2 = c x_2 \vec{v} - c D \text{ grad } x_2$
$w_1 + w_2 = 1 \quad \text{grad } w_1 + \text{grad } w_2 = 0$	$x_1 + x_2 = 1 \quad \text{grad } x_1 + \text{grad } x_2 = 0$
$\text{grad} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$	
gesamt: $\vec{m} = \rho \vec{v}$	$\vec{n} = c \vec{v}$

Eindimensionale differentielle Stofftransportgleichung für binäre Gemische

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = D \frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2} \quad \text{2. FICKSches Gesetz}$$

Diffusionskoeffizienten für binäre Gasgemische

Von FULLER/SCHETTLER/GIDDINGS stammt folgende empirische Beziehung:

$$D = \frac{1,43 \cdot 10^{-7} \cdot T^{1,75}}{p M_{G,12}^{0,5} \left[ (\sum v)_1^{1/3} + (\sum v)_2^{1/3} \right]^2} \quad \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

$p$ ..... Druck [bar]  
 $T$ ..... Temperatur [K]  
 $M_G$ .... Molmasse [kg/kmol]  
 $v$ ..... atomares Diffusionsvolumen

$$M_{G,12} = \frac{2}{\frac{1}{M_{G,1}} + \frac{1}{M_{G,2}}}$$

Atomares Diffusionsvolumen  $v$ .

Atomare und strukturelle Zunahme des Diffusionsvolumens			
$C$	15,9	$F$	14,7
$H$	2,31	$Cl$	21,0
$O$	6,11	$Br$	21,9
$N$	4,54	$I$	29,8
Aromatischer Ring	-18,3	$S$	22,9
Heterozyklischer Ring	-18,3		
Diffusionsvolumen einfacher Atome, Moleküle und Gemische			
$He$	2,67	$CO$	18,0
$Ne$	5,98	$CO_2$	26,9
$Ar$	16,2	$N_2O$	35,9
$Kr$	24,5	$NH_3$	20,7
$Xe$	32,7	$H_2O$	13,1
$H_2$	6,12	$SF_6$	71,3
$D_2$	6,84	$Cl_2$	38,4
$N_2$	18,5	$Br_2$	69,0
$O_2$	16,3	$SO_2$	41,8
Luft	19,7		

Dimensionslose Stoffübergangszahlen

Stoffübergang an ebener Platte bei laminarer Strömung

$$Sh_x = 0,332 \sqrt{Re_x} \cdot Sc^{1/3}$$

für

$$Re < 10^5 \quad \text{und} \quad 0,6 < Sc < 2000$$

Stoffübergang bei turbulenten Strömungen

Turbulente Strömung längs ebener Platte (Zhukauskas)

$$Sh_x = 0,0296 Re_x^{0,8} \cdot Sc^{0,43}$$

für  $Re > 10^5$  und  $Sc < 380$

$$Sh = 0,037 Re^{0,8} \cdot Sc^{0,43}$$



## Stoffübergang an der überströmten Platte bei laminarer und turbulenter Strömung

In den meisten praktischen Fällen wird sich schon bei mittleren Reynoldszahlen infolge stumpfer Plattenränder und der Turbulenz des zuströmenden Mediums keine laminare Grenzschicht über der gesamten Plattenlänge ausbilden. KRISCHER und KAST haben Meßergebnisse, die den laminaren und turbulenten Bereich umfassen, ausgeglichen und durch eine Mittelkurve dargestellt.

Danach kann für einen großen Bereich der Schmidtzahlen die über die Plattenlänge  $L$  gemittelte Sherwoodzahl aus der Beziehung

$$Sh = \sqrt{Sh_{lam}^2 + Sh_{turb}^2} \quad \text{für } 10 \leq Re \leq 10^7 \quad \text{und} \quad 0,7 \leq Sc \leq 70.000$$

ermittelt werden.

Dabei gilt für die laminare Sh-Zahl die Beziehung von POHLHAUSEN

$$Sh_{lam} = 0,664 \sqrt{Re_L} \cdot \sqrt[3]{Sc}$$

und für die turbulente Sherwoodzahl die neuere Beziehung von PETUKHOV und POPOV

$$Sh_{turb} = \frac{0,037 \cdot Re^{0,8} \cdot Sc}{1 + 2,443 \cdot Re^{-0,1} (Sc^{2/3} - 1)}$$

Darin sind die Kennzahlen wie folgt definiert:

$$Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu} \quad Sc = \frac{\nu}{D} \quad Sh = \frac{\beta L}{D}$$

## Der mittlere Stoffübergang

Empirische und halbempirische Beziehungen für Stoffübergang an Kugeln.

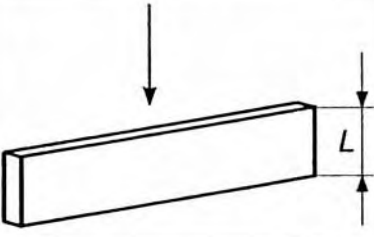
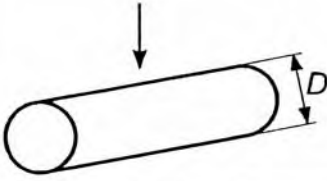
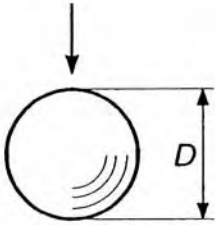
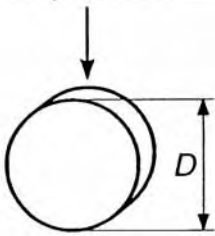
	Re	Sc	Sh
GARNER/SUCKLING	100 ÷ 700	1100 ÷ 2200	$2 + 0,95 \sqrt{Re} Sc^{1/3}$
FRÖSSLING	> 100	≤ 1000	$2 + 0,552 \sqrt{Re} Sc^{1/3}$
STEINBERGER/TREYBAL	10 ÷ $17 \cdot 10^3$	1 ÷ 70000	$2 + 0,347 Re^{0,62} Sc^{0,31}$
ROWE u.a.	25 ÷ 1150	1220	$0,79 \sqrt{Re} Sc^{1/3}$

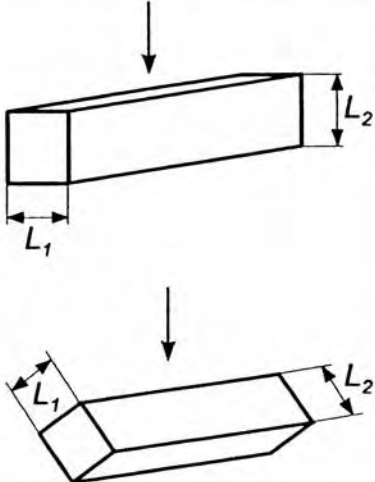
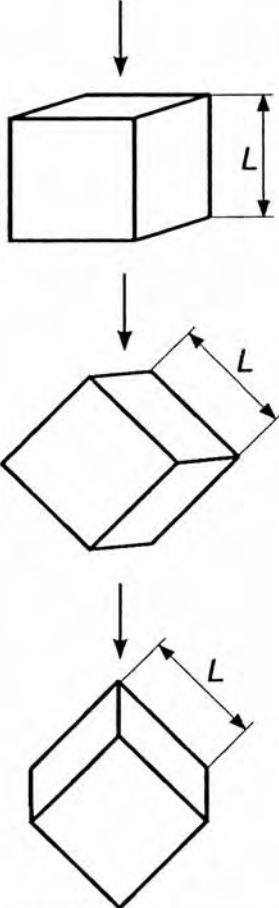
## Stoffübergang an umströmten Einzelkörpern unterschiedlicher Form

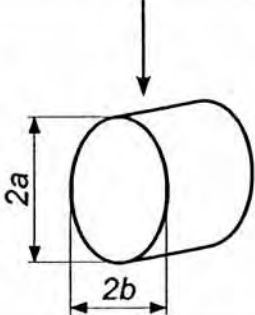
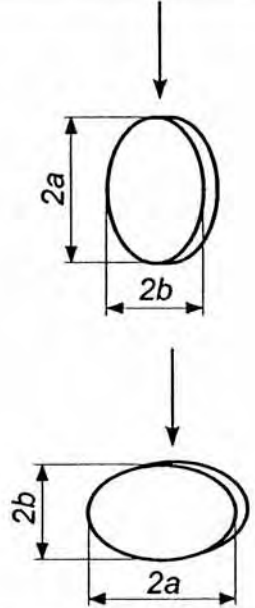
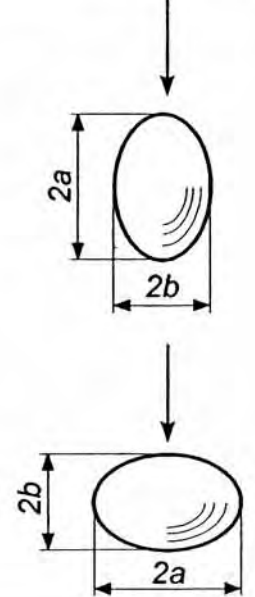
$$Sh = Sh_{min} + \sqrt{Sh_{lam}^2 + Sh_{turb}^2}$$

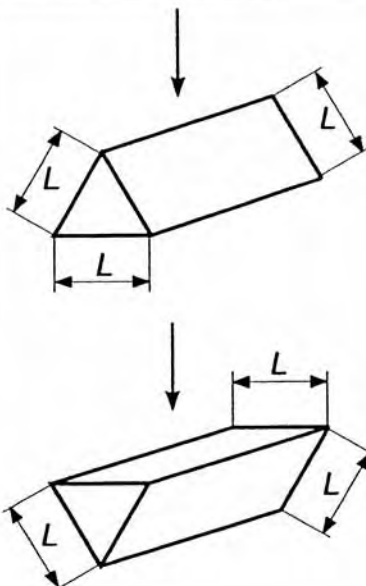
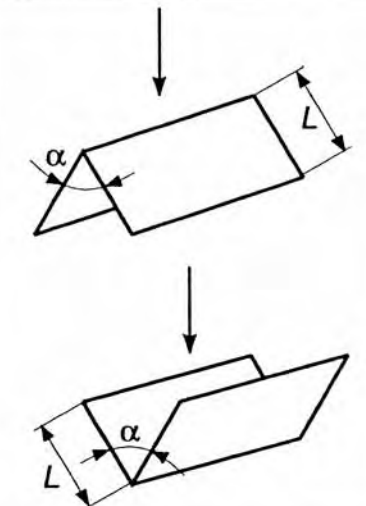
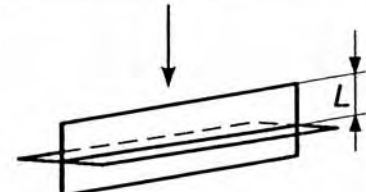
Kugel	$Sh_{min} = 2$
unendlich langer Zylinder	$Sh_{min} = 0,3$
Platte	$Sh_{min} = 0$

Tabelle 1: Charakteristische Überströmlängen  $L'$  für verschiedene Körperformen.

SKIZZE	BESCHREIBUNG	ANSTRÖMLÄNGE
	<b>Ebene Platte</b> <i>längs angeströmt</i>	$L' = L$
	<b>Kreiszylinder</b> <i>quer angeströmt</i>	$L' = \frac{\pi}{2} D$
	<b>Kugel</b>	$L = D$
	<b>Kreisscheibe</b> <i>in Richtung eines Durchmessers angeströmt</i>	$L' = \frac{\pi}{4} D$

SKIZZE	BESCHREIBUNG	ANSTRÖMLÄNGE
	<p><b>Rechteckförmiges Prisma</b> <i>quer angeströmt</i></p> <p>a) <i>Strömung <math>\perp</math> auf eine Fläche</i></p> <p>b) <i>Strömung <math>\perp</math> auf eine Kante</i></p>	<p><math>L' = L_1 + L_2</math></p> <p><math>L' = L_1 + L_2</math></p>
	<p><b>Würfel</b></p> <p>a) <i>Strömung <math>\perp</math> auf eine Fläche</i></p> <p>b) <i>Strömung <math>\perp</math> auf eine Kante</i></p> <p>c) <i>Strömung <math>\perp</math> auf ein Eck</i></p>	<p><math>L' = 1,50L</math></p> <p><math>L' = 1,24L</math></p> <p><math>L' = 1,16L</math></p> <p style="text-align: right;">} <i>in einer ungeordneten Schüttung <math>L' = 1,3L</math></i></p>

SKIZZE	BESCHREIBUNG	ANSTRÖMLÄNGE
	<p><b>Ellipsenförmiger Zylinder</b> <i>quer angeströmt</i></p>	$L' = \frac{\pi}{2} [1,5(a + b) - \sqrt{ab}]$ $= \frac{\pi}{2} (a + b)$
	<p><b>Ellipsenförmig Scheibe</b></p> <p>a) <i>Strömung <math>\perp</math> zur kleinen Halbachse</i></p> <p>b) <i>Strömung <math>\perp</math> zur großen Halbachse</i></p>	$L' = \frac{\pi}{2} a$  $L' = \frac{\pi}{2} b$
	<p><b>Rotationsellipsoid</b></p> <p>a) <i>Strömung <math>\perp</math> zur kleinen Halbachse</i></p> <p>b) <i>Strömung <math>\perp</math> zur großen Halbachse</i></p>	$L' = \frac{(a + b)^2}{2b}$  $L' = \frac{(a + b)^2}{2a}$

SKIZZE	BESCHREIBUNG	ANSTRÖMLÄNGE
	<p><b>Dreieckförmiges Prisma</b> <i>quer angeströmt</i></p> <p>a) <i>Strömung <math>\perp</math> auf eine Kante</i></p> <p>b) <i>Strömung <math>\perp</math> auf eine Fläche</i></p>	<p><math>L' = \frac{3}{2} L</math></p> <p><math>L' = \frac{3}{2} L</math></p>
	<p><b>Winkelförmiges Prisma</b> <i>quer angeströmt</i></p> <p>a) <i>Strömung <math>\perp</math> auf Winkelkante</i>  1) <math>\alpha &gt; 60^\circ</math>  2) <math>\alpha &lt; 60^\circ</math></p> <p>b) <i>Strömung <math>\perp</math> in den Winkel</i>  1) <math>\alpha &gt; 60^\circ</math>  2) <math>\alpha &lt; 60^\circ</math></p>	<p><math>L' = 2L</math></p> <p><math>L' = L</math></p> <p><math>L' = 2L</math></p> <p><math>L' = L</math></p>
	<p><b>Kreuzförmiges Prisma</b> <i>quer angeströmt</i></p> <p><i>Strömung <math>\perp</math> auf Kante</i></p>	<p><math>L' = 4L</math></p>

SKIZZE	BESCHREIBUNG	ANSTRÖMLÄNGE
	<b>Berippte Rohre quer angeströmt</b> a) <i>kreisförmiges Rippe</i>	$L' = \frac{\pi}{2} \sqrt{D^2 + h^2}$
	b) <i>rechteckförmige Rippe</i>	$L' = \frac{\pi}{2} \sqrt{D^2 + h^2}$ <p>mit</p> $h = 0,565 \cdot L_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2} - \frac{D}{2}}$

Stoffübergang in durchströmten Kanälen und Rohren

$$\dot{N}_A = A \beta \overline{\Delta c_A}$$

$$\overline{\Delta c_A} = \frac{\Delta c_{A,0} - \Delta c_{A,L}}{\ln \frac{\Delta c_{A,0}}{\Delta c_{A,L}}}$$

Bei fluiddynamisch ausgebildeter laminarer Strömung im Rohr mit Kreisquerschnitt

$$Sh = \frac{\beta d}{D} = 3,66 + \frac{0,188 \left( Re Sc \frac{d}{L} \right)^{0,8}}{1 + 0,117 \left( Re Sc \frac{d}{L} \right)^{0,467}}$$

Stoffliche Einlaufänge zu Rohrdurchmesser

$$\frac{L_{0,c}}{d} = 1,365 Re Sc$$

Bei fluiddynamischem und stofflichem Einlauf im Rohr mit Kreisquerschnitt (laminar)

Fluiddynamische Einlaufänge zu Rohrdurchmesser

$$\frac{L_{0,u}}{d} = 0,0575 Re$$

Stoffliche zu fluiddynamische Einlaufänge

$$\frac{L_{0,c}}{L_{0,u}} = 23,7 \cdot Sc$$

$$Sh = 3,66 + \frac{0,0677 \left( Re Sc \frac{d}{L} \right)^{1,33}}{1 + 0,1 \cdot Sc^{0,17} \left( Re Sc \frac{d}{L} \right)^{0,83}} \quad \text{für } 0,1 \leq Sc \leq 100 \text{ und } Re \cdot Sc \cdot \frac{d}{L} \geq 0$$

## Stoffübergang bei turbulenter Strömung im Rohr mit Kreisquerschnitt

### Hydraulisch glattes Rohr

$$Sh = \frac{\lambda_0}{8} \frac{Re \cdot Sc}{1,07 + 12,7 (Sc^{2/3} - 1) \sqrt{\frac{\lambda_0}{8}}} \left(1 - \frac{180}{Re^{0,75}}\right) \left[1 + \left(\frac{d}{L}\right)^{2/3}\right]$$

Die Gültigkeitsgrenzen sind darin

$$Re \geq 2300 \quad Sc \geq 0,5 \quad 0 \leq \frac{d}{L} < \infty$$

Der Rohrreibungsbeiwert  $\lambda_0$  für das glatte Rohr kann für den gesamten Reynoldszahlenbereich der turbulenten Rohrströmung nach der Beziehung von FILONENKO berechnet werden:

$$\lambda_0 = \frac{1}{(1,82 \cdot \log_{10} Re - 1,64)^2}$$

### Rauhes Rohr

$$Sh_r = \frac{\lambda_r}{8} \frac{Re \cdot Sc}{1 + \left(Sc \frac{\lambda_r}{\lambda_0} - 1\right) \cdot 1,5 \cdot Re^{-1/8} \cdot Sc^{-1/6}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} = -2 \cdot \log_{10} \left( \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda_r}} + \frac{1}{3,71} \frac{K}{d} \right)$$

## Phasengleichgewichte

Bereich geringer Konzentrationen ( $x_i \rightarrow 0$ ):

Hier kommt das HENRY-Gesetz zur Anwendung, das lautet:

$$p_i = H_{i,x} \cdot x_i \quad \text{wobei} \quad H_{i,x} = f(T) \quad \text{nur eine Funktion der Temperatur ist}$$

$$\text{bzw.} \quad p_i = H_{i,c} \cdot c_i \quad \text{mit} \quad H_{i,c} = \frac{H_{i,x}}{c_f}$$

$$\text{bzw.} \quad y_i = H_i^* \cdot x_i \quad \text{mit} \quad H_i^* = \frac{H_{i,x}}{p}$$

wobei die HENRY-Konstante die folgenden Dimensionen hat:

$$H_{i,x} \dots \dots [Pa] \quad (\text{oder } [bar])$$

$$H_{i,c} \dots \dots \left[ \frac{m^3 \cdot Pa}{mol} \right] \quad (\text{oder } \left[ \frac{m^3 \cdot bar}{mol} \right])$$

$$H_i^* \dots \dots [-]$$

Bereich großer Konzentrationen ( $x_i \rightarrow 1$ ):

Hier kommt das RAOULTsche Gesetz zur Anwendung, das lautet:

$$p_i = x_i \cdot p_i^\circ$$

wobei  $p_i^\circ$  [Pa] der Dampfdruck der reinen Komponente  $i$  ist.

Die Stoffdurchgangszahl

Stoffdurchgangszahl bezogen auf die Gasphase

$$k_{i,g} = \frac{1}{\frac{1}{\beta_{i,g}} + \frac{H_{i,c}}{R T_I \cdot \beta_{i,f}}}$$

Stoffdurchgangszahl bezogen auf die Flüssigphase

$$k_{i,f} = \frac{1}{\frac{R T_I}{H_{i,c} \cdot \beta_{i,g}} + \frac{1}{\beta_{i,f}}}$$

Stoffübergangswiderstände

Wir definieren die folgenden Stoffübergangswiderstände:

A) Bezogen auf die Gasphase:

$$\text{Gasphase: } c_{i,g,\infty} - c_{i,g,I}^* = \frac{1}{\beta_{i,g}} \cdot \dot{n}_i \quad \boxed{r_{i,g,g} = \frac{1}{\beta_{i,g}}}$$

$$\text{Flüssigphase: } \underbrace{\frac{H_{i,c}}{R T_I} c_{i,f,I}^*}_{c_{i,g,I}^*} - \underbrace{\frac{H_{i,c}}{R T_I} c_{i,f,\infty}}_{c_{i,g,\infty}^*} = \frac{H_{i,c}}{R T_I} \cdot \frac{1}{\beta_{i,f}} \cdot \dot{n}_i \quad \boxed{r_{i,g,f} = \frac{H_{i,c}}{R T_I} \frac{1}{\beta_{i,f}}}$$

B) Bezogen auf die Flüssigphase:

$$\text{Gasphase: } \underbrace{\frac{R T_I}{H_{i,c}} c_{i,g,\infty}}_{c_{i,f,\infty}^*} - \underbrace{\frac{R T_I}{H_{i,c}} c_{i,g,I}^*}_{c_{i,f,I}^*} = \frac{R T_I}{H_{i,c}} \cdot \frac{1}{\beta_{i,g}} \cdot \dot{n}_i \quad \boxed{r_{i,f,g} = \frac{R T_I}{H_{i,c}} \frac{1}{\beta_{i,g}}}$$

$$\text{Flüssigphase: } c_{i,f,I}^* - c_{i,f,\infty} = \frac{1}{\beta_{i,f}} \cdot \dot{n}_i \quad \boxed{r_{i,f,f} = \frac{1}{\beta_{i,f}}}$$

HTU/NTU-Konzept für konstante Phasenströme

$$HTU_1 = \frac{\dot{N}_1}{U c_1 k_{i,g}} \quad NTU_1 = \pm \int_{y_{i,\alpha}}^{y_{i,\omega}} \frac{dy_i}{y_i^* - y_i}$$



oder

$$HTU_2 = \frac{\dot{N}_2}{U c_2 k_{i,f}} \quad NTU_2 = \pm \int_{x_{i,\alpha}}^{x_{i,\omega}} \frac{dx_i}{x_i^* - x_i}$$

Abhängigkeit der Stoffübergangszahl vom Molenbruch (binäres System)

STEFAN-Korrektur

$$\boxed{\frac{\beta}{\beta_0} \approx \frac{1}{1 - y_{i,\infty}} \approx \frac{1}{1 - y_{i,I}^*}}$$

Für Gase kann die Korrektur auch in Partialdrücken angeschrieben werden:

$$\boxed{\frac{\beta}{\beta_0} \approx \frac{p}{p - p_{i,\infty}} \approx \frac{p}{p - p_{i,I}^*}}$$