

MASTERARBEIT

EINGEREICHT AN DER

LEOPOLD-FRANZENS-UNIVERSITÄT INNSBRUCK
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK UND PHYSIK
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

ZUR ERLANGUNG DES AKADEMISCHEN GRADES

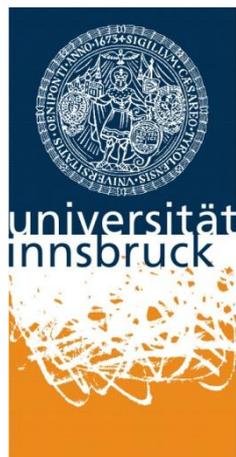
MASTER OF SCIENCE

FREIE POLYTOPE UND POLYEDER

Autorin:
Mag. Beatrix Huber BSc

Eingereicht bei:
Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr. Tim Netzer

15. Mai 2019



INHALTSVERZEICHNIS

Danksagung	ii
Einleitung	iii
1. Der reelle Fall - Hauptsatz für endlich erzeugte Kegel	1
1.1. Konvexe Kegel	1
1.2. Der duale Kegel	9
1.3. Hauptsatz für endlich erzeugte Kegel	10
2. Positiv semidefinite Matrizen und einige Eigenschaften	16
2.1. Positiv semidefinite Matrizen	16
2.2. Der Raum der positiv semidefiniter Matrizen	20
3. Erweiterung konvexer Kegel auf positiv semidefinite Matrizen	27
3.1. Der verallgemeinerte konvexer Kegel	27
3.2. Verallgemeinerte Kegel in höheren Dimensionen	36
3.3. Anmerkung Operatorsysteme	38
Literatur	41

DANKSAGUNG

Als Erstes möchte ich mich natürlich bei meinem Betreuer Tim Netzer bedanken. Vielen Dank, dass du dir immer geduldig für meine Fragen Zeit genommen hast und es dir auch nichts ausgemacht hat, mir Inhalte immer wieder aufs Neue erklären zu müssen. Ich habe Dank dir sehr viel Neues gelernt und habe so einiges aus unseren Besprechungen mitnehmen können (nicht nur mathematisch). Danke, dass du mich so herzlich unter deine Fittiche genommen hast.

Ein großer Dank natürlich auch meinen Eltern, die mir nicht nur ein, sondern gleich zwei Studien finanziert haben. Dank euch konnte ich ohne Sorgen in meinem Tempo beide Studien so schnell wie möglich abschließen und musste mir nie Gedanken wegen überzogenen Studienzeiten in einem der beiden Studien machen. Speziell werde ich wohl Papa mit dieser Arbeit ein wenig enttäuschen. Lieber Papa, leider wirst du in den Kapiteln dieser Arbeit keine einzige partielle Differentialgleichung finden. Um ehrlich zu sein, habe ich mit intensivstem Bemühen versucht diesem Themengebiet aus dem Weg zu gehen, jedoch werde ich für dich eine Ausnahme machen:

$$-\frac{\hbar}{2m}\Delta\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Dank gebührt auch meinen beiden Geschwistern, dafür dass ihr mich durch die gelegentlichen geschwisterlichen Streitereien auf den Ernst des Lebens vorbereitet habt. Danke Baba, dafür, dass du mich auch während Gesprächen in meine *Matheblase* hast wandern lassen und geduldig auf meine Rückkehr gewartet hast. Danke, klein Brudi Mabo, ein *Wamp* von dir heilt die Seele, deine *Bartungen* nicht!

Ich möchte mich natürlich auch bei all meinen Freunden bedanken, die alle Höhen und Tiefen meiner Studienzeit miterleben durften oder mussten. Danke, dass ihr mich immer unterstützt habt und ich hoffe, dass das auch in Zukunft so bleibt.

Lieber Gabo, ich bin so froh, dass du dich immer so aufmerksam um mich und meine photosynthese-betreibenden Haustiere kümmerst. Danke, dass du mich des Öfteren daran hinderst, Radfahrer über den Haufen zu rennen, wenn ich gedankenverloren Radewege passiere, aber vor allem danke, dass du immer an meiner Seite bist.

EINLEITUNG

In dieser Masterarbeit möchten wir uns mit Erweiterungen von reellen endlich erzeugten konvexen Kegeln auf Matrixlevel beschäftigen. Statt Kegelpunkten (x_1, \dots, x_n) mit $x_i \in \mathbb{R}$ möchten wir nun symmetrische reellwertige Matrixtupel (A_1, \dots, A_n) zulassen. Im reellen Fall können wir solche konvexen Kegel auf zwei Arten charakterisieren, einerseits mittels eines Systems linearer Ungleichungen, andererseits mit Hilfe einer Basis von Vektoren, welchen den Kegel durch Bilden von konischen Kombinationen erzeugen. Der Hauptsatz für endlich erzeugte Kegel besagt, dass im Falle eines Kegels im \mathbb{R}^n obige Charakterisierungen äquivalent sind. Beim Erweitern auf Matrixlevel trifft man hier jedoch auf Probleme, denn dort ist die Äquivalenz der beiden Kegeldarstellungen nicht immer gewährleistet.

Sie finden also im ersten Kapitel eine Zusammenfassung aller wichtigen Begriffe und Eigenschaften konvexer endlich erzeugter Kegel im \mathbb{R}^n . Wir werden dort auch den Hauptsatz für endlich erzeugte konvexe Kegel vorstellen und beweisen. Dieser Satz stellt die Äquivalenz der Kegeldarstellungen im reellen Fall sicher.

Im zweiten Kapitel werden wir uns mit positiv semidefiniten Matrizen beschäftigen, dies ist notwendig, da wir mit Hilfe solcher Matrizen den Begriff des endlich erzeugten konvexen Kegels auf Matrizen erweitern werden.

Im dritten und letzten Kapitel werden wir uns mit dem Hauptziel dieser Arbeit beschäftigen. Wir werden dort die beiden Kegelcharakterisierungen auf Matrixlevel definieren und ein Beispiel liefern, bei dem die beiden Darstellungen unterschiedliche Kegel definieren. In [Tobias Fritz, 2017] wird bereits mit etwas abstrakten Hilfsmitteln bewiesen, dass die beiden Charakterisierungen nicht äquivalent sind, hier werden wir eine nun Konkretisierung des dortigen Beweises vorstellen.

1. DER REELLE FALL - HAUPTSATZ FÜR ENDLICH ERZEUGTE KEGEL

In diesem Kapitel werden wir die wichtigsten Erkenntnisse über konvexe Kegel im \mathbb{R}^n beziehungsweise konvexen Mengen wiederholen. Der Großteil dieses Kapitels wird aus meiner Diplomarbeit [Huber, 2018] übernommen mit dem Unterschied, dass wir uns nun hier auf den homogenen Fall von konvexen Kegeln beschränken werden. Hauptziel dieses Abschnittes ist der Hauptsatz für endlich erzeugte Kegel im \mathbb{R}^n , welcher besagt, dass jeder konvexe Kegel eine Darstellung als Lösungsmenge eines endlichen Systems linearer Ungleichungen bzw. eine Darstellung mittels konischer Hülle von endlich vielen Erzeugenden besitzt. Das besondere im reellen Fall ist, dass diese beiden Darstellungen äquivalent sind, also denselben Kegel erzeugen.

Betrachten wir Kegel in anderen Räumen, wie zum Beispiel Kegel im Raum der n -Tupel (A_1, \dots, A_n) symmetrischer Matrizen, so kann es sein, dass die beiden Kegeldarstellungen nicht dieselbe Menge charakterisieren. (siehe Kapitel 3).

1.1. Konvexe Kegel. Zunächst möchten wir die Grundlagen über konvexe Mengen, speziell konvexer Kegel, wiederholen. Dieses Thema wurde bereits in meiner Diplomarbeit [Huber, 2018] aufgearbeitet und wir geben hier die dort ausgearbeiteten Resultate wieder. Teilweise werden wir auch für das Hauptresultat meiner Masterarbeit notwendige Ergänzungen hinzufügen.

Definition 1.1 (Affine und konvexe Kombinationen). Es seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ Elemente des euklidischen Raumes. Wir bezeichnen

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

als affine Kombination. Gilt zusätzlich noch die Bedingung, dass $\alpha_i \in [0, 1]$ für alle i , so sprechen wir von einer Konvexkombination.

Wir nennen die Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, falls für je zwei verschiedene Punkte v, w in K auch deren Verbindungsstrecke $\{\alpha v + (1 - \alpha)w \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$ in K enthalten ist.

Definition 1.2 (Konvexer Kegel). Es sei V ein Vektorraum und $K \subset V$. Wir nennen die Menge K einen Kegel, falls K konvex, $0 \in K$ und für alle $\lambda \geq 0$ und für jedes Element $v \in K$ gilt, dass $\lambda \cdot v \in K$. Bei dem hier definierten Kegel handelt es sich um eine konvexe Menge und wird deshalb auch als konvexer Kegel bezeichnet.

Bemerkung 1.3. Den Begriff des konvexen Kegels hätten wir auch alternativ folgendermaßen definieren können. Eine Teilmenge $K \subset V$ eines Vektorraums V heißt konvexer Kegel, genau dann wenn $0 \in K$ und für je zwei Elemente $v, w \in K$ und beliebige positive Skalare $\alpha, \beta \geq 0$ der Punkt $\alpha \cdot v + \beta \cdot w$ ebenfalls in K liegt.

Definition 1.4 (Konische Hülle). Es sei V ein Vektorraum und $v_1, \dots, v_m \in V$. Für nicht-negative $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ entsteht v als konische Kombination von v_1, \dots, v_m nach folgender Vorschrift:

$$v = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot v_i$$

Für eine Menge $S \subset V$ bezeichnet $\text{cone}(S)$ die Menge aller konischen Kombinationen von Elementen in S .

Definition 1.5. Es sei V ein Vektorraum und $S \subset V$. Betrachten wir den Kegel $K = \text{cone}(S)$, dann nennen wir K den von S erzeugten Kegel. Ist $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ eine endliche Menge, dann heißt K endlich erzeugt von den Elementen v_1, \dots, v_m .

Proposition 1.6. Der Schnitt von zwei konvexen Kegeln ist wieder ein konvexer Kegel.

Beweis. Seien K_1, K_2 zwei konvexe Kegel. Dann gilt offensichtlich, dass $0 \in K_1 \cap K_2$ liegt. Für ein weiteres Element $x \in K_1 \cap K_2$ gilt, dass für alle $\lambda \geq 0$ das Produkt λx in K_1 und in K_2 liegt und damit auch im Schnitt der beiden Kegel.

Nun müssen wir noch die Konvexität von $K_1 \cap K_2$ nachprüfen. Dazu betrachten wir $x, y \in K_1 \cap K_2$. Somit sind x und y in K_1 bzw. K_2 enthalten. Da beide Mengen nach Voraussetzung konvex sind, liegt deren Verbindungsstrecke sowohl in K_1 als auch K_2 und damit im Schnitt. \square

Bemerkung 1.7. Die Vereinigung zweier konvexer Kegel ist im Allgemeinen kein Kegel. Beispielsweise betrachten wir die zwei positiven Halbstrahlen der x - bzw. y -Achse im \mathbb{R}^2 . Die Vereinigung dieser beiden Strahlen ergibt gerade die positiven Achsenrichtungen. Diese Menge offensichtlich nicht konvex sind.

Lemma 1.8. Ist $M \subset \mathbb{R}^d$ eine konvexe Menge, so ist das Innere M° ebenfalls konvex.

Beweis. Wir betrachten die Punkte $x, y \in M^\circ$ im Inneren von M . Wir zeigen, dass für jedes $0 \leq \lambda \leq 1$ der Punkt $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in M^\circ$ erfüllt.

Im Falle $\lambda = 1$ ist die Aussage klar, denn $z = x \in M^\circ$.

Für $\lambda < 1$, wählen wir zum Inneren Punkt y einen offenen Ball $B_\epsilon(y) \subset M$ mit Mittelpunkt y und Radius ϵ . Dabei sei ϵ derart gewählt, dass $\overline{B_\epsilon(y)} \subset M$ ebenfalls in M enthalten ist. Wir bezeichnen mit s_1 bzw. mit s_2 die Schnittpunkte der Tangentialebenen t_1 bzw. t_2 an $\overline{B_\epsilon(y)} \subset M$ durch x .

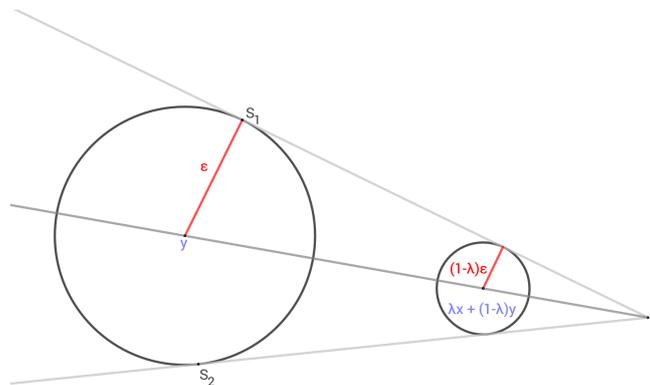


ABBILDUNG 1. Konstruktion offener Umgebung

Klarerweise gilt $s_1, s_2 \in M$ und da M konvex ist, folgt die Teilmengeeigenschaft

$$\text{conv}(x, y, s_1, s_2) \subset M$$

Der kleinere Ball $B_{\epsilon(1-\lambda)}(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ ist dann in $\text{conv}(x, y, s_1, s_2)$ enthalten und damit auch in M . Insgesamt ist dann $\lambda x + (1 - \lambda)y$ ein innerer Punkt von M . \square

Definition 1.9. Die Dimension eines Kegels $K \in V$ ist gegeben durch die Dimension der affinen Hülle seiner Punkte

$$\dim(K) = \dim(\text{aff}(K))$$

Definition 1.10. Wir betrachten eine konvexe Menge C im Vektorraum V und einen Halbraum H der C enthält. Der Schnitt der Menge mit dem Rand des Halbraumes $C \cap \partial H$ heißt Seite von C . Die Dimension einer Seite F wird durch die Dimension der affinen Hülle ihrer Punkte gegeben $\dim(F) = \dim(\text{aff}(F))$. Je nach Dimension bezeichnet man die Seiten dann als

- Ecken bei Dimension 0
- Kanten bei Dimension 1
- Flächen bei Dimension 2
- Facetten bei Dimension $\dim(K) - 1$

Definition 1.11 (Extremaler Punkt und Strahl). Es sei K ein konvexer Menge. Der Punkt $e \in K$ heißt Extrempunkt, wenn sich dieser nicht als Konvexkombination zweier verschiedener Punkte in K darstellen lässt. Insbesondere bedeutet dies, dass e nur als Konvexkombination durch sich selbst dargestellt werden kann.

Betrachten wir weiters einen konvexen Kegel K und es sei $S \subset K$ ein Strahl. S heißt extremer Strahl, genau dann wenn für $u \in S$ und $v, w \in K$ mit $u = \frac{(v+w)}{2}$ folgt, dass $v, w \in S$. Ist $S = \text{cone}(z)$ für ein $z \in K$, dann sagen wir z erzeugt den extremen Strahl S .

Lemma 1.12. Es seien $x_1, \dots, x_{d+1} \in \mathbb{R}^d$ affin unabhängige Punkte. Wir bezeichnen

$$M := \text{conv}(x_1, \dots, x_{d+1})$$

als d -dimensionalen Simplex. Die Menge M hat nicht-leeres Inneres.

Beweis. Um die Aussage zu beweisen, nehmen wir an, dass M leeres Inneres hat. Dementsprechend liegen alle Elemente am Rand von M , also auch der Punkt

$$z = \frac{1}{d+1} \sum_{i=1}^{d+1} x_i.$$

Da $z \in \partial M$, ist z in einer Facette F mit um 1 geringeren Dimension enthalten. Das hat zur Folge, dass wir z noch als Konvexkombination der Erzeugenden dieser Facette darstellen können. Wir nehmen o.B.d.A an, dass die Facette von x_1, \dots, x_d erzeugt wird. Für bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in [0, 1]$ und $\sum \lambda_i = 1$ gilt also

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{d+1} \sum_{i=1}^{d+1} x_i = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i \\ \frac{1}{d+1} x_{d+1} &= \sum_{i=1}^d \left(\lambda_i - \frac{1}{d+1} \right) x_i \\ x_{d+1} &= \sum_{i=1}^d (\lambda_i (d+1) - 1) x_i \end{aligned}$$

Also ist x_{d+1} eine affine Kombination von x_1, \dots, x_d , denn

$$\sum_{i=1}^d (\lambda_i(d+1) - 1) = (d+1) \cdot 1 - d = 1.$$

und damit ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme. \square

Definition 1.13. Wir betrachten einen endlich dimensionalen Vektorraum und eine konvexe Menge M . Für einen Punkt $x \notin M$ nennen wir eine Hyperebene H mit $x \in H$ isolierend, wenn M komplett in einem der beiden offenen durch H erzeugten Halbräumen liegt.

Proposition 1.14. Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und M eine offene nicht-leere konvexe Menge. Dann gibt es für $x \notin M$ eine Hyperebene H , die x enthält und die Menge M isoliert.

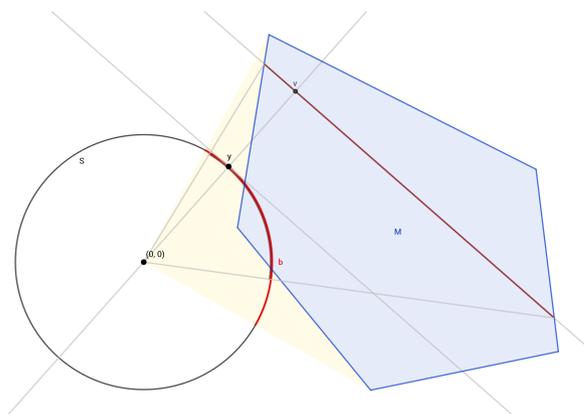
Beweis. Zunächst können wir O.B.d.A annehmen, dass der Punkt $x \notin M$ der Ursprung $x = 0$ ist, ansonsten können wir dies jederzeit durch eine lineare Transformation erzwingen.

Aufgrund von Isomorphie reicht es aus, die Behauptung für den Vektorraum \mathbb{R}^n zu beweisen. Wir betrachten dazu zunächst den Spezialfall des zweidimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{R}^2 .

Mit S bezeichnen wir die Einheitskugel in \mathbb{R}^2 . Wir betrachten also die Projektion

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|y\| = 1\} \\ u &\longmapsto \frac{u}{\|u\|} \end{aligned}$$

Da die Menge M konvex und damit zusammenhängend ist, folgt auch dass das Bild $\pi(M)$ zusammenhängend ist. $\pi(M)$ entspricht also einem Kreisbogen b auf dem Einheitskreis.



Dieser Bogen b ist offen in S , denn für einen Punkt $y = \frac{v}{\|v\|} \in b$ betrachten wir die Parallele durch v zur Tangenten durch y an die Einheitskugel S . Der Schnitt dieser Parallelen mit der offenen Menge M entspricht einem in der Parallelen offenen Intervall I welches durch die Projektion π auf einen offenen Kreisbogen in b abgebildet wird.

Klarerweise muss das Bild $\pi(M) = b$ einem kleineren Bogen als einem Halbkreis entsprechen. Denn wäre dem nicht der Fall, so müsste M zwei antipodale Punkte y und $-y$ enthalten und damit aufgrund der Konvexität auch den Steckenmittelpunkt $x = 0$.

Wir wählen nun als gesuchte Hyperebene H die Gerade durch 0 und einen der beiden Randpunkte des Abschlusses von b . Diese Gerade enthält also x und erfüllt $H \cap M = \emptyset$, da die Randpunkte von b nicht in b enthalten sind.

Nun wollen wir den Fall $\dim(V) = n > 2$ beweisen. Wir betrachten dafür einen affinen Unterraum H mit größtmöglicher Dimension und den Eigenschaften $0 \in H$ und $M \cap H = \emptyset$. Wie üblich bezeichnet *größtmöglich* einen Unterraum, der nicht in einem

größeren Unterraum mit denselben Eigenschaften enthalten ist. Ein solcher Unterraum existiert wirklich, denn wir behaupten, dass wir eine Gerade durch $x = 0$ finden können, deren Schnitt mit M leer ist. Betrachten wir dazu eine beliebigen zweidimensionalen Unterraum \tilde{H} durch 0 . Der Schnitt $\tilde{H} \cap M$ ist entweder leer oder eine offene zweidimensionale konvexe Menge. Ist der Schnitt leer, so haben wir bereits unsere gesuchte Hyperebene H höherer Dimension gefunden. Andernfalls können wir mit Hilfe des vorhin bewiesenen Spezialfalles $n = 2$ eine Gerade H finden, für die $x \in H$ und $H \cap (\tilde{H} \cap M) = \emptyset$ gilt.

Wir zeigen nun, dass dieser Unterraum H eine Hyperebene in V ist. Betrachten wir also den Faktorraum $V/H := \{v + H \mid v \in V\}$ und die Projektion

$$\text{pr} : V \longrightarrow V/H$$

Ist H keine Hyperebene, also $\dim(H) < (n - 1)$, so ist die Dimension $\dim(V/H) \geq 2$. Da Projektionen offene Abbildungen sind, ist das Bild $\text{pr}(M)$ eine offene Menge in V/H . Dann können wir wieder Dank des zweidimensionalen Spezialfalles eine Gerade G in V/H mit $0 \in G$ und $G \cap \text{pr}(M) = \emptyset$ finden. Das Urbild $\tilde{G} = \text{pr}^{-1}(G)$ ist dann ein Unterraum in V , sodass $0 \in \tilde{G}$ und $\tilde{G} \cap M = \emptyset$. Es gilt offensichtlich Weise, dass $H \subset \tilde{G}$ und da \tilde{G} strikt größer als H ist, folgt ein Widerspruch zur ursprünglichen Wahl von H . Insgesamt erhalten wir also, dass H eine Hyperebene sein muss. \square

Bemerkung 1.15. Wählen wir in der obigen Situation für eine nicht-leere abgeschlossene konvexe Menge einen Punkt $x \in \partial M$. So erhalten wir mit 1.14 eine isolierende Hyperebene für M° und x . Man kann zeigen, dass diese Hyperebene auch M und x isoliert.

Proposition 1.16. *Es sei K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^d und $x \in \partial K$ ein Punkt am Rand von K . Dann gibt es eine echte Seite F von K die x enthält.*

Beweis. Nach Lemma 1.8 ist das Innere K° ebenfalls eine konvexe Menge und da $x \in \partial K$ liegt, ist also x kein Element des Inneren. Dann kann man also mit Hilfe von 1.14 eine Hyperebene H finden, sodass diese K° isoliert. Mit Bemerkung 1.15 isoliert diese sogar K und die gesuchte Facette ergibt sich als Schnitt

$$K \cap H = F.$$

\square

Proposition 1.17. *Wir betrachten die konvexe Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^d$. Ist das Innere von K leer, so existiert eine affiner Unterraum $U \subset \mathbb{R}^d$ in dem K nicht-leeres Inneres hat und $\dim U < d$.*

Beweis. In K kann es keine $(d + 1)$ affin unabhängige Punkte v_1, \dots, v_{d+1} geben, denn ansonsten wäre $\text{conv}(v_1, \dots, v_{d+1}) \subset K$ und nach 1.12 das Innere von K nicht leer. Bezeichne k die maximale Anzahl an affin unabhängigen Punkten in K und wir bezeichnen diese mit x_1, \dots, x_k . Für jeden Punkt $z \in K$ gibt es eine Lösung des Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \gamma z &= 0 \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

so, dass $\gamma \neq 0$ und es gilt

$$z = \sum_{i=1}^k -\frac{\lambda_i}{\gamma} x_i.$$

Jeder Punkt z besitzt also eine affine Darstellung bezüglich x_1, \dots, x_k . Wir definieren nun U als jenen Unterraum, welcher durch die affine Hülle der Elemente x_1, \dots, x_k definiert wird. Klarerweise ist dann $K \subset U$ und $\dim U = (k - 1) < d$. \square

Lemma 1.18. *Es sei $K \neq \emptyset$ eine abgeschlossene konvexe Menge, die keine Geraden enthält. Dann hat K einen extremalen Punkt.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über die Dimension d .

- **Induktionsvoraussetzung:**

$d = 0$: M ist also ein Punkt und die Behauptung ist klar.

- **Induktionsschritt:**

$(d - 1) \mapsto d$: Wir können annehmen, dass K nicht-leeres Inneres hat, ansonsten reduzieren wir die Dimension des betrachteten Raumes mit Hilfe von 1.17, sodass K nicht-leeres Inneres hat.

Wir wählen nun einen Punkt $x \in K^\circ$ und eine beliebige Gerade G durch x . Da $x \in G \cap K$ gilt, ist der Schnitt der Geraden mit K nicht leer. Außerdem ist der Schnitt $G \cap K \subset G$ eine echte Teilmenge von G , da K nach Voraussetzung keine Geraden enthält. Das heißt also, dass der Schnitt einem abgeschlossenen aber nicht zwingender Weise beschränktem Intervall entspricht.

Es sei r ein Randpunkt dieses Intervalles. Es gilt also $r \in \partial K$ und nach Proposition 1.16 gibt es dann eine echte Facette F von K , die r enthält. Diese Facette entspricht aber wieder einer abgeschlossenen konvexen Menge mit niedriger Dimension als K . Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass F einen extremalen Punkt e enthält, welcher ebenfalls in K extremal ist. \square

Definition 1.19. Enthält ein Kegel C in V keine Geraden, so nennen wir diesen spitz.

Proposition 1.20. *Ist C ein spitzer Kegel, so ist 0 ein extremaler Punkt und es gilt*

$$C \text{ ist spitz} \Leftrightarrow C \cap (-C) = \{0\}.$$

Beweis. Nach Lemma 1.18 wissen wir, dass C einen extremalen Punkt enthält. Nehmen wir also an, dass 0 kein extremaler Punkt ist. Dann gibt es zwei Elemente a, b , sodass

$$0 = \lambda a + \gamma b$$

mit $\lambda, \gamma > 0$. Damit folgt also, dass $-\lambda a = \gamma b$ und damit, dass $b = -\zeta a$ ein negatives Vielfaches von a ist. Damit liegt aber die Gerade $\mathbb{R}a$ im Kegel.

Angenommen es gäbe ein weiteres Element $0 \neq x \in C \cap (-C)$, dann müsste x in C und $-C$ enthalten sein. Da $x \neq 0$ folgt also, dass $x, -x \in C$ und $x, -x \in -C$ gilt. Damit liegt aber die Gerade $\mathbb{R}x$ in C und dieser kann somit nicht spitz sein. \square

Nun werden wir einen weiteren Begriff ähnlich dem Begriff Facette kennen lernen, welcher für uns im Folgenden noch wichtig sein wird. Wir werden uns dabei auf die wichtigsten Erkenntnisse beschränken, welche in [Ziegler, 2002] nachzulesen sind.

Definition 1.21. Wir betrachten eine endlich erzeugte konvexe Menge $C = \text{conv}(v_1, \dots, v_r)$ mit $v_i \in \mathbb{R}^n$. Eine solche Menge bezeichnet man als Polytop im \mathbb{R}^n . Dann ist eine Vertexfigure jener Schnitt von C mit einer Hyperebene H , welche einen einzigen Eckpunkt v_j , $j = 1, \dots, r$ von den übrigen abtrennt.

ABBILDUNG 2. Vertex-figure

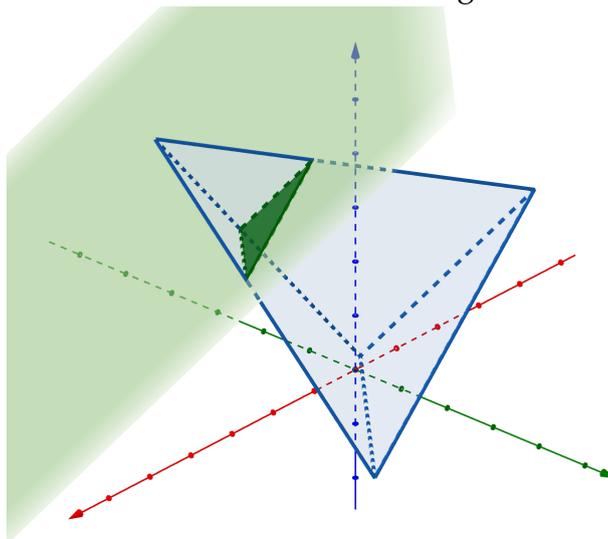
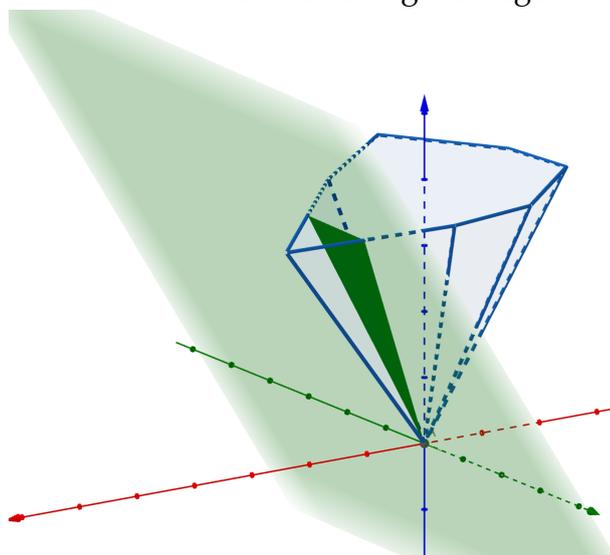


ABBILDUNG 3. Vertex-figure Kegel



Bemerkung 1.22. Eine Vertex-figure eines Polytopes ist wieder ein Polytop. Betrachten wir nun statt eines Polytopes die homogene Version, also einen endlich erzeugten konvexen Kegel, so ist eine Vertex-figure eines Kegels der Schnitt einer Hyperebene durch Null, welche genau einen der erzeugenden Extremalstrahlen von den übrigen trennt. Die entstehende Schnittfläche ist, wieder ein konvexer Kegel.

Da wir schon ab Dimension 3 Schwierigkeiten damit haben, uns Objekte wie Kegel oder dergleichen vorzustellen, ist es oft hilfreich, diese Objekte mit Hilfe deren niederdimensionaler Facetten oder Vertex-figures zu untersuchen. Die folgende Proposition ist eine wichtige Charakterisierung höherdimensionaler simplizialer Polytope, welche auch im homogenisierten Fall für Kegel zutrifft. Für unsere Belange reicht die Formulierung der Kernaussage, einen Beweis finden Sie in [Ziegler, 2002].

Proposition 1.23. Wir betrachten ein Polytop $P \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension d , das heißt, der kleinsten linearen Unterraum, welcher P enthält hat Dimension d . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (1) P ist simplizial, also von n Elementen erzeugt
- (2) jede Facette von P ist ein Simplex niedrigerer Dimension
- (3) jede k -dimensionale Facette hat $(k + 1)$ Ecken, für Facetten der Dimension $k = 0, \dots, d - 1$

Ebenso gilt die Äquivalenz der Aussagen

- (1) P ist simplizial, also von n Elementen erzeugt
- (2) jede Vertex-figure von P ist simplizial
- (3) jede Ecke ist in d Facetten enthalten.

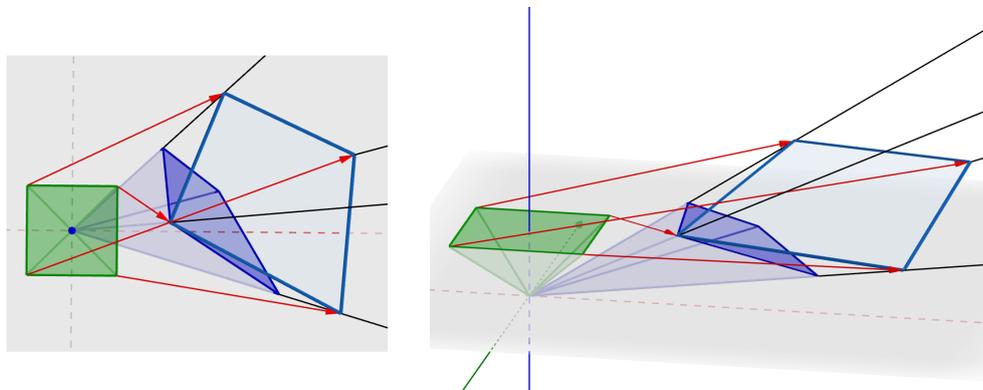
Beweis. In [Ziegler, 2002] wird ein Beweis der obigen Aussage mit Hilfe von partiell geordneten booleschen Mengen vorgestellt. \square

Bemerkung 1.24. Wir möchten nun eine Version der obigen Aussage 1.23 für endlich erzeugte, konvexe, spitze Kegel erhalten. Dazu betrachten wir einen Schnitt des Kegels C mit einer Hyperebene, welcher alle Extremalstrahlen von C schneidet. Dieser Schnitt entspricht dann einem Polytop niedrigerer Dimension, welches von gleich vielen Elementen erzeugt wird wie C .

Wenn der Kegel C nicht simplizial war, wird das Schnittpolytop von $d > n$ Elementen erzeugt und ist also ebenfalls nicht simplizial. Somit gibt es wegen 1.23 eine Facette oder eine Vertex-figure des Polytops, welche ebenfalls nicht simplizial ist.

Nach Homogenisierung folgt für nicht-simpliziale, endlich erzeugte konvexe Kegel also, dass es entweder eine Facette oder eine Vertex-figure des Kegels existiert, welche nicht simplizial ist.

Nun möchten wir noch kurz eine Transformation vorstellen, mit dessen Hilfe wir die Form eines von vier Vektoren erzeugten konvexen Kegels für unsere Zwecke verändern können. Grundsätzlich ist es mittels linearer Abbildungen möglich, die Lage von Kegeln zu beeinflussen. Nicht ganz so klar ist es, dass es auch möglich ist, die Form eines Kegels zu verändern. Im Falle von Polytopen benötigt man für diesen Zweck projektive Transformationen. Da für unsere Zwecke nur Kegel von Interesse sind, befinden wir uns also schon im homogenisierten Fall und die projektive Transformation reduziert sich auf eine lineare Abbildung.



Proposition 1.25. Wir betrachten jenen Kegel $C \in \mathbb{R}^3$, der von den vier Elementen

$$\begin{aligned} v_1 &= (x_1, y_1, 1) & v_2 &= (-x_2, y_2, 1) \\ v_3 &= (x_3, -y_3, 1) & v_4 &= (-x_4, -y_4, 1) \end{aligned}$$

mit $x_i, y_i \in \mathbb{R}_{>0}$ erzeugt wird. Dann ist C isomorph zum Kegel mit den Erzeugern

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 1, 1) & e_2 &= (-1, 1, 1) \\ e_3 &= (1, -1, 1) & e_4 &= (-1, -1, 1). \end{aligned}$$

Beweis. Beim Beweis werden wir ähnlich wie in [Jonas Gomes, 2012] vorgehen. Wir konstruieren eine lineare bijektive Abbildung, welche den Kegel erzeugt durch e_1, \dots, e_4 auf C abbildet. Gesucht ist also eine Abbildung, welche

$$\begin{aligned} \Gamma(e_1) &= v_1 \\ \Gamma(e_2) &= \gamma_2 v_2 = \gamma_2(-x_2, y_2, 1) \\ \Gamma(e_3) &= \gamma_3 v_3 = \gamma_3(x_3, -y_3, 1) \\ \Gamma(e_4) &= \gamma_4 v_4 = \gamma_4(-x_4, -y_4, 1) \end{aligned}$$

mit $\gamma_1 = 1$ erfüllt. Betrachten wir nur die letzten drei Bedingungen, so ist die Abbildungsmatrix von Γ bezüglich der Standardbasis gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -\gamma_2 x_2 & \gamma_3 x_3 & -\gamma_4 x_4 \\ \gamma_2 y_2 & -\gamma_3 y_3 & -\gamma_4 y_4 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung, dass $\Gamma(e_1) = v_1$ bedeutet dann, dass

$$\begin{pmatrix} -\gamma_2 x_2 & \gamma_3 x_3 & -\gamma_4 x_4 \\ \gamma_2 y_2 & -\gamma_3 y_3 & -\gamma_4 y_4 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten muss. Dieses System können wir aber auch als lineares Gleichungssystem in γ_2, γ_3 und γ_4 deuten:

$$\begin{pmatrix} -x_2 & x_3 & -x_4 \\ y_2 & -y_3 & -y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obige Matrix ist invertierbar, wie man leicht aufgrund der Vorzeichen der Einträge erkennen kann. Daher können wir $(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ berechnen und erhalten den gesuchten Isomorphismus. \square

1.2. Der duale Kegel. Nun möchten wir uns noch zur Vollständigkeit kurz mit der Dualität von Kegeln beschäftigen. Wie in vielen Teilbereichen der Mathematik können auch für Kegel Dualitätseigenschaften von Interesse sein. Im folgenden Kapitel 2 werden wir ein besonderes Beispiel eines selbstdualen konvexen Kegels kennen lernen, nämlich jenen der positiv semidefiniten Matrizen. Hier werden wir uns jedoch nur kurz der Dualität von Kegeln widmen und die wichtigsten Begriffe vorstellen.

Definition 1.26. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kegel und bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^n , also

$$x, y \in \mathbb{R}^n : \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Dann nennen wir

$$K^* := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in K : \langle x, y \rangle \geq 0\}$$

den dualen Kegel von K . Gilt für einen Kegel $K^* = K$ so nennen wir K selbstdual.

Bemerkung 1.27. Die obige Definition des dualen Kegels ist wirklich ein Kegel.

Beweis. Der Nullvektor ist klarerweise ein Element von K^* . Wählen wir nun ein beliebiges $x \in K^*$ und ein $\lambda \geq 0$ dann gilt

$$\forall y \in K : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \geq 0.$$

Es sei nun weiters $\gamma \in [0, 1]$ und $a, b \in K$. Dann ist

$$x = \gamma a + (1 - \gamma)b$$

ebenfalls in K . Dies gilt da für beliebige $y \in K$ gilt $\langle a, y \rangle \geq 0$ bzw. $\langle b, y \rangle \geq 0$ und wegen der Bilinearität des Skalarproduktes folgt:

$$\langle x, y \rangle = \langle \gamma a + (1 - \gamma)b, y \rangle = \gamma \langle a, y \rangle + (1 - \gamma) \langle b, y \rangle \geq 0$$

Damit ist K^* ebenfalls ein konvexer Kegel. □

Beispiel 1.28. Der duale Kegel des ersten Orthanten $K = \text{cone}(e_1, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^n$ ist der erste Orthant. Somit ist K selbstdual, denn betrachten wir ein Element des ersten Orthanten x , dann gilt

$$\forall y \in K : \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \geq 0$$

wobei x_i, y_i die für den ersten Orthanten positiven Koordinaten von x, y bezüglich der Standardbasis e_1, \dots, e_n darstellen. Weitere Elemente kann der duale Kegel K^* nicht enthalten, denn es gibt zu jedem $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ mindestens eine negative Koordinate x_i . Wählen wir dann $y = e_i$, so ist $\langle x, y \rangle = x_i < 0$ und damit gilt $x \notin K^*$.

1.3. Hauptsatz für endlich erzeugte Kegel. In diesem Abschnitt möchten wir den Hauptsatz für endlich erzeugte Kegel vorstellen. Dieser besagt einerseits, dass wir zu jedem endlich erzeugten konvexen Kegel $C = \text{cone}(v_1, \dots, v_r)$ ein System endlich viele lineare Ungleichungen finden können, welches als Lösungsmenge C hat. Die Umkehrung gilt ebenfalls: Wir können also zu jedem Kegel, welcher durch ein System endlich vieler linearer Ungleichungen definiert wird, endlich viele Erzeuger v_1, \dots, v_r finden, die den Kegel durch konische Kombination erzeugen.

In dieser Arbeit werden wir nur eine verkürzte Zusammenfassung der Resultate aus meiner Diplomarbeit [Huber, 2018] wiedergeben. Wir werden uns dabei nur auf den homogenen Fall beschränken und diesen eventuell noch durch für diese Arbeit relevante Inhalte ergänzen. Allgemeine Ergebnisse sind in [Huber, 2018], [Dür, 2014], [Florian Jarre, 2013] bzw. [Ziegler, 2002] nachzulesen.

Definition 1.29. Ein System homogener linearer Ungleichungen im \mathbb{R}^n ist gegeben durch lineare Funktionen l_i für $i \in \{1, \dots, m\}$. Gesucht sind alle Elemente $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ für die

$$\begin{aligned} l_1(\underline{x}) &\leq 0 \\ l_2(\underline{x}) &\leq 0 \\ &\vdots \\ l_m(\underline{x}) &\leq 0 \end{aligned}$$

gilt. Die Menge $\mathbb{L}(l_i \leq 0 | 1 \leq i \leq m) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n | l_i(\underline{x}) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$ bezeichnen wir als Lösungsmenge des homogenen Systems linearer Ungleichungen.

Wie üblich kann ein System linearer Ungleichung in Koordinatenform mittels $(m \times n)$ -Matrix A beschrieben werden. Also gesucht sind alle Spalten $x \in \mathbb{R}^n$, derart, dass

$$Ax \leq 0$$

gilt.

Bemerkung 1.30. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die Lösungsmenge einer homogenen linearen Ungleichungen einem Halbraum im \mathbb{R}^n mit dem Ursprung am Rand entspricht. Folglich handelt es sich dann bei der Lösungsmenge eines System endlich vieler solcher homogenen Ungleichungen um den endlichen Schnitt solcher Halbräume. Die Lösungsmenge entspricht also im schlimmsten Fall nur dem Ursprung, welcher einem recht einfachen konvexen Kegel entspricht. Unten werden wir sehen, dass die Lösungsmenge generell einem konvexen Kegel entspricht.

Bemerkung 1.31. Betrachten wir ein System endlich vieler homogener linearer Ungleichungen wie in 1.29. Dann ist es nicht schwer festzustellen, dass dessen Lösungsmenge einem konvexen Kegel entspricht, denn 0 ist klarerweise in

$$C = \mathbb{L}\{x \in \mathbb{R}^n | l_j(\underline{x}) \leq 0 \text{ für alle } j\}$$

enthalten. Für nicht-negatives $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein Element $\underline{x} \in C$ gilt, dass

$$l_j(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot l_j(\underline{x}) \leq 0$$

und damit auch, dass $\lambda \cdot \underline{x} \in C$. Für die Konvexität betrachten wir zwei Lösungen x, y des Systems homogener linearer Ungleichungen und $\gamma \in [0, 1]$. Dann gilt aufgrund der Linearität von l_j , dass

$$l_j(\gamma x + (1 - \gamma)y) = \gamma \cdot l_j(x) + (1 - \gamma) \cdot l_j(y) \geq 0$$

für alle j und somit liegt $\gamma x + (1 - \gamma)y$ ebenfalls in der Lösungsmenge. Schwieriger ist es Erzeugende für die Menge C zu finden, weshalb wir die folgenden beiden Lemmata benötigen.

Lemma 1.32 (Schnitt mit Hyperebene durch 0). *Es sei C ein endlich erzeugter Kegel mit den Erzeugenden $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m)$, also $C = \text{cone}(y_1, \dots, y_m)$. Für eine lineare Funktion $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Mengen*

$$I_{=} = \{e \in \{1, \dots, m\} | l(y_e) = 0\}$$

$$I_{>} = \{g \in \{1, \dots, m\} | l(y_g) > 0\}$$

$$I_{<} = \{k \in \{1, \dots, m\} | l(y_k) < 0\}$$

als jene Indexmengen, an denen die Funktionswerte der Erzeugenden von C unter l gleich, größer oder kleiner als 0 sind.

Dann ist die Menge

$$K \cap \ker(l)$$

ein Kegel und wird von den endlich vielen Vektoren

$$y_e \quad \text{für } e \in I_{=} \\ y_{gk} = l(y_g)y_k - l(y_k)y_g \quad \text{für } g \in I_{>} \text{ und } k \in I_{<}$$

erzeugt.

Beweis. siehe [Huber, 2018] □

Lemma 1.33. *Es sei $y = (y_1, \dots, y_n)$ eine beliebige Basis des \mathbb{R}^n und e_1, \dots, e_m bezeichne die Standardbasis des \mathbb{R}^m . Des Weiteren seien l_1, \dots, l_m lineare Funktionen und*

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \longmapsto (l_1(x), \dots, l_m(x)).$$

Dann ist die Menge

$$K := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid l_i(x) \leq z_i, i \in \{1, \dots, m\}\}$$

ein Kegel und wird von den endlichen Mengen

$$A = \{(0, e_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid 1 \leq i \leq m\}$$

$$B = \{\pm(y_j, F(y_j)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid 1 \leq j \leq n\}$$

erzeugt.

Beweis. Zunächst überprüfen wir, ob es sich bei der Menge K wirklich um einen Kegel handelt. Der Punkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist in K enthalten. Wählen wir also eine positive Konstante $\lambda \geq 0$ und ein Element $(x, z) \in K$. Für $\lambda(x, z) = (\lambda x, \lambda z)$ folgt

$$l_i(\lambda x) = \lambda \cdot l_i(x) \leq \lambda z_i \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

und damit $\lambda(x, z) \in K$. Für die Konvexität betrachten wir zwei Elemente (u, z_1) bzw. $(v, z_2) \in K$ und $\lambda \in [0, 1]$. Da

$$l_i(\lambda u + (1 - \lambda)v) = \lambda \cdot l_i(u) + (1 - \lambda) \cdot l_i(v) \leq \lambda \cdot z_1 + (1 - \lambda) \cdot z_2$$

ist $\lambda \cdot (u, z_1) + (1 - \lambda) \cdot (v, z_2) \in K$.

Man kann leicht erkennen, dass die angegebenen Erzeugenden von A und B in K enthalten sind. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass A und B den Kegel erzeugen.

Es sei dazu $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Koordinaten von x bezüglich der Basis y_1, \dots, y_n . Dann gilt

$$(x, z) = (x, F(x)) + (0, z - F(x)) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \text{sign}(\alpha_i) \cdot (y_i, F(y_i)) + \sum_{i=1}^m (z_i - l_i(x)) \cdot (0, e_i).$$

Also können wir jedes Element von K als positive Linearkombination von Elementen aus $A \cup B$ darstellen und damit ist $A \cup B$ ein Erzeugendensystem von K . □

Proposition 1.34 (Hauptsatz für endlich erzeugte Kegel: 1. Richtung). *Die Lösungsmenge eines Systems endlich vieler homogener linearer Ungleichungen ist ein endlich erzeugter Kegel.*

Beweis. Es sei das System linearer Ungleichungen durch die linearen Funktionen l_1, \dots, l_m gegeben. Setzen wir

$$K := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid l_i(x) \leq z_i, i \in \{1, \dots, m\}\}$$

und berechnen mit Lemma 1.33 die endliche Menge der Erzeugenden $A \cup B$. Betrachten wir die Projektionen

$$\pi_i : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, (y_1, \dots, y_m)) \longmapsto y_i$$

können wir mit Lemma 1.32 sukzessive Erzeugende von $K \cap \bigcap_{i=1}^m \ker(\pi_i)$ berechnen, indem wir für $k = 1, \dots, m$ Erzeuger für

$$K \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} \ker(\pi_i) \cap \ker(\pi_k)$$

bestimmen. Da

$$K \cap \bigcap_{i=1}^m \ker(\pi_i) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid l_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$$

folgt die Behauptung. □

Proposition 1.34 zeigt nicht nur, dass jedes homogene System linearer Ungleichungen einem Kegel entspricht, sondern liefert speziell auch ein Verfahren um Erzeuger dieses Kegels zu berechnen. Wir können also immer zu einem homogenen Systems linearer Gleichungen definiert durch lineare Funktionale l_1, \dots, l_m Vektoren $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ finden, die dann die Lösungsmenge des Systems durch das Bilden von konischer Kombinationen erzeugen.

Umgekehrt können auch zu einem von Elementen $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ erzeugten Kegel definierende homogene Ungleichungen gefunden werden. Es wird hierfür das sogenannte Fourier-Motzkin Verfahren benötigt, welches ich in meiner Diplomarbeit [Huber, 2018] bereits ausführlich vorgestellt habe. Hier werden wir dieses Verfahren in Schnellfassung speziell für den homogenen Fall vorstellen.

Hierfür betrachten wir das System endlich vieler linearer Ungleichungen definiert durch l_1, \dots, l_m in Koordinatenform. Das System wird also durch eine $(m \times n)$ -Matrix A , deren Zeilen den Koeffizienten der Funktionale l_i entsprechen, beschrieben. Gesucht sind somit alle Elemente $x \in \mathbb{R}^n$ für die

$$Ax \leq 0$$

gilt. Wir werden mit A_k , die k -te Zeile von A bezeichnen, dann entspricht

$$l_k(x) = A_k x.$$

Beim Fourier- Motzkin Verfahren werden definierende Ungleichungen der Projektion der Lösungsmenge des Systems $Ax \leq 0$ auf eine Koordinatenebene $x_k = 0$ bestimmt. Die Elimination der Komponente x_k erfolgt durch die sukzessive Berechnung von oberen bzw. unteren Schranken aus den definierenden Ungleichungen.

Für positive Koeffizienten a_{ik} ergeben sich obere Schranken der Form

$$a_{ik} x_k \leq a_{ik} x_k - A_i x$$

und für negative a_{jk} analog untere Schranken

$$-a_{jk} x_k \geq -a_{jk} x_k + A_j x.$$

Durch Kombination jeweils einer Negativ- und einer Positivzeile durch Multiplikation der positiven mit dem positiven $-a_{jk}$ und Multiplikation der negativen Ungleichung mit a_{ik} erhält man die von x_k unabhängigen Bedingungen

$$\begin{aligned} a_{ik} A_j x &\leq a_{jk} A_i x \\ (a_{ik} A_j - a_{jk} A_i) \cdot x &\leq 0. \end{aligned}$$

Die erhaltenen Ungleichungen und alle von x_k unabhängigen Ungleichungen aus dem ursprünglichen System linearer Ungleichungen beschreiben somit das Urbild der Projektion auf die Koordinatenhyperebene $x_k = 0$.

Proposition 1.35 (Fourier-Motzkin Elimination: homogene Version). *Wir betrachten das homogene System linearer Ungleichungen definiert durch l_1, \dots, l_m bzw. $Ax \leq 0$. π_k bezeichne wie gewohnt die Projektion auf die Koordinatenhyperebene mit $x_k = 0$.*

Dann werden die beschreibenden Ungleichungen für das Urbild $\pi_k^{-1}(\pi(\mathbb{L}(Ax \leq 0)))$ durch die Matrix ${}_kA$ repräsentiert, deren Zeilen $({}_kA|0$ aus den folgenden Zeilen besteht

- jene Zeilen $(A_i|0)$ von A , für die $a_{ik} = 0$
- den Zeilen $(a_{ik}A_j - a_{jk}A_i|0)$ mit $a_{ik} > 0$ und $a_{jk} < 0$.

Die Projektion auf die Hyperebene $H_k := \{x \in \mathbb{R}^n | x_k = 0\}$ ergibt sich dann als Schnitt

$$\pi_k(\mathbb{L}(Ax \leq 0)) = \mathbb{L}({}_kAx \leq 0) \cap H_k$$

Beweis. Das System $Ax \leq 0$ definiert wegen 1.34 einen Kegel, den wir mit C bezeichnen. Das Bild der Projektion π_k ist dann gegeben durch

$$\pi_k(C) = H_k \cap \{x - t \cdot e_k | t \in \mathbb{R}, x \in C\}$$

Im Folgenden zeigen wir nun, dass für

$$L := \{x - t \cdot e_k | t \in \mathbb{R}, x \in C\}$$

die Bedingung $L = \mathbb{L}({}_kAx \leq 0)$ gilt. Betrachten wir also $v \in L$, dann existiert ein $t \in \mathbb{R}$, sodass $v = p - t \cdot e_k$ für ein $p \in C$ gilt. Da wir die Zeilen in ${}_kA$ durch positive Linearkombinationen aus den Zeilen von A erhalten haben, gilt

$$\mathbb{L}(Ax \leq 0) \subset \mathbb{L}({}_kAx \leq 0).$$

Da $p \in C$ gilt, folgt wegen der obigen Inklusion auch, dass p in $\mathbb{L}({}_kAx \leq 0)$ enthalten ist. Des Weiteren ist aufgrund der Konstruktion die k -te Spalten von ${}_kA$ eine Nullspalte und damit das System ${}_kAx \leq 0$ unabhängig von x_k . Das impliziert aber dann, dass für ein $p \in \mathbb{L}({}_kAx \leq 0)$ auch $v = p + te_k \in \mathbb{L}({}_kAx \leq 0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt und damit

$$L \subset \mathbb{L}({}_kAx \leq 0).$$

Betrachten wir umgekehrt $v \in \mathbb{L}({}_kAx \leq 0)$. Wir zeigen nun, dass es ein geeignetes $t \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$v - te_k \in C$$

Damit ein solches t existiert, müssen die definierenden Ungleichungen des Systems $Ax \leq 0$ erfüllt sein. Also

$$\begin{aligned} A_i \cdot (v - te_k) &\leq 0 \\ A_i v &\leq t \cdot a_{ik} \end{aligned}$$

Wir bezeichnen wieder mit i jene Indizes für die $a_{ik} > 0$ gilt und mit j jene mit $a_{jk} < 0$. Wir erhalten also daher die Bedingungen:

$$\begin{aligned} a_{ik} > 0 & \quad \frac{A_i v}{a_{ik}} \leq t \\ a_{jk} < 0 & \quad \frac{A_j v}{a_{jk}} \geq t. \end{aligned}$$

Also muss das gewünschte t die Ungleichungskette

$$\max \left\{ \frac{A_i v}{a_{ik}} : a_{ik} > 0 \right\} \leq t \leq \min \left\{ \frac{A_j v}{a_{jk}} : a_{jk} < 0 \right\}$$

erfüllen, was nur dann der Fall ist, wenn die linke Seite auch wirklich kleiner gleich der rechten Seite ist. Dies gilt jedoch immer, da für $v \in \mathbb{L}_k(Ax \leq 0)$ folgt, dass

$$\begin{aligned} (a_{ik}A_j - a_{jk}A_i)v &\leq 0 \\ \frac{A_j v}{a_{jk}} &\geq \frac{A_i v}{a_{ik}}. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.36. (Hauptsatz für endlich erzeugte Kegel: 2. Richtung) Es sei $C \in \mathbb{R}^n$ ein Kegel der von den Elementen v_1, \dots, v_m erzeugt wird. Dann ist C die Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen.

Beweis. Wir können nun den Kegel $C = \text{conv}(v_1, \dots, v_m)$ darstellen als

$$\begin{aligned} C &= \{At \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leq t \in \mathbb{R}^m\} && \text{wobei } A = (v_1 \mid \dots \mid v_m) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists t \in \mathbb{R}^m : t \geq 0 \text{ und } x = At\} \end{aligned}$$

Die Menge K mit

$$K := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid t \geq 0 \text{ und } x = At\}$$

ist die Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned} x - At &\leq 0 \\ -x + At &\leq 0 \\ -t &\leq 0 \end{aligned}$$

also ein Kegel definiert durch ein System linearer Ungleichungen.

Projizieren wir nun diesen Kegel K mit $\pi_{t=0}$ auf die Koordinatenhyperebene $t = 0$, so erhalten wir

$$\pi_{t=0}(K) = C.$$

Diese Projektion kann durch sukzessive Fourier-Motzkin-Elimination auf die k -te Koordinatenebenen $t_k = 0$ berechnet werden. Die definierenden Ungleichungen des Bildes, also von C , werden dabei durch die Matrix ${}_k A$ gegeben und somit ist C die Lösungsmenge eines Systems linearer Ungleichungen. □

Bemerkung 1.37. Dank des Hauptsatzes für endlich erzeugte Kegel können wir also zu einem konvexen Kegel $\text{cone}(v_1, \dots, v_r)$ immer ein System homogener linearer Gleichungen definiert durch l_1, \dots, l_m finden und umgekehrt.

2. POSITIV SEMIDEFINITE MATRIZEN UND EINIGE EIGENSCHAFTEN

In diesem Abschnitt möchten wir uns kurz einige grundlegende Eigenschaften und Resultate zum Thema positiv (semi-)definiter Matrizen ins Gedächtnis rufen, die beispielsweise in [Barvinok, 2002] oder in [Plaumann, 2012] nachzulesen sind. Im Folgenden werden wir uns nur mit reellwertigen $n \times n$ -Matrizen beschäftigen. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels, werden wir Kriterien für die Semidefinitheit von Matrizen vorstellen und uns im zweiten Abschnitt mit dem Raum aller positiv semidefiniten Matrizen beschäftigen, welcher einen konvexen Kegel im Raum aller symmetrischen Matrizen bildet. In Kapitel 3 werden wir diese Erkenntnisse nutzen, um den Begriff des konvexen Kegels zu erweitern.

2.1. Positiv semidefinite Matrizen.

Definition 2.1. Eine Matrix $A := (a_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ heißt symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $0 \leq i, j \leq n$ gilt. Die Menge aller reeller, symmetrischen $n \times n$ - Matrizen bezeichnen wir mit $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$.

Definition 2.2 (Positiv (semi-) definite Matrix). Es sei $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Wir bezeichnen eine symmetrische $n \times n$ - Matrix A als positiv definit, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dass

$$x^T A x > 0$$

A heißt positiv semidefinit, sofern $x^T A x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Die Menge aller positiv semidefiniten $n \times n$ - Matrizen bezeichnen wir mit S_+^n und die Menge aller positiv definiten $n \times n$ - Matrizen mit $S_{>}^n$.

Bemerkung 2.3. Eine positiv semidefinite Matrix A mit Rang $\text{rank}(A) = r$ ist kongruent zu einer Matrix $D_A = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$. Das heißt es gibt eine invertierbare Matrix Q , welches A durch

$$D_A = Q^T A Q = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$$

mit positiven Zahlen d_1, \dots, d_r diagonalisiert.

Proposition 2.4 (Hauptachsentransformation). *Es sei $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ mit $\text{rank}(A) = r$. Speziell existiert sogar eine orthogonale Matrix U , dass $U^T A U$ Diagonalgestalt hat und deren Diagonalelemente den Eigenwerten von A entsprechen.*

Oft werden positiv semidefinite Matrizen auch mit Hilfe deren Eigenwerten charakterisiert. Wir verwenden hierfür die übliche Bezeichnung $\text{Spec}(A)$ für die Menge aller Eigenwerte einer Matrix A . Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die Eigenwerte einer positiv semidefiniten Matrix nur Werte größer oder gleich Null annehmen. Grundsätzlich kann man positiv semidefinite Matrizen auch mit Hilfe dieser äquivalenten Eigenschaft definieren.

Proposition 2.5. *Es sei $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ mit $\text{rank}(A) = r$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, $x^T A x \geq 0$.
- (2) Alle Eigenwerte von A sind nicht-negativ.
- (3) Es gibt eine $r \times n$ - Matrix B , sodass $A = B^T B$ gilt.
- (4) Es gibt eine symmetrische $n \times n$ - Matrix $P \in S_+$, sodass $A = P^T P = P^2$ gilt.

- (5) Alle Hauptminoren von A sind nicht-negativ.
 (6) Alle Hauptminoren bis zur Größe r sind nicht-negativ.

Beweis. (1) \Rightarrow (2)

Es sei $\lambda \in \text{Spec}(A)$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor zum Eigenwert λ . Dann gilt für v :

$$v^T Av = \lambda \cdot (v^T v) = \lambda \cdot \|v\|^2 \geq 0$$

Somit muss $\lambda \geq 0$ gelten.

(2) \Rightarrow (1)

Wir betrachten die positiven Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Da A symmetrisch ist, gibt es wegen 2.4 eine orthogonale Matrix O , derart, dass

$$O^T AO = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0).$$

Die Matrix $O^T AO$ ist wegen der nicht-negativen Diagonaleinträgen positiv semidefinit und daher muss dies auf für A gelten. Denn es gilt für alle $\tilde{v} = Ov$

$$0 \leq v^T O^T AO v = (v^T O^T) A (Ov) = \tilde{v}^T A \tilde{v}.$$

(1) \Rightarrow (4)

Zur positiv semidefiniten Matrix A wählen wir wieder eine orthogonale Matrix O mit der Eigenschaft $D_A = O^T AO = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, wobei die Diagonaleinträge aufgrund der Äquivalenz von (1) und (2) nicht-negative Zahlen sind. Wir können also Wurzelziehen, wobei $D_A = \sqrt{D_A} \cdot \sqrt{D_A}$ und $\sqrt{D_A} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \dots, 0)$ gilt. Wir setzen $P = O\sqrt{D_A}O^T$, dann ist P symmetrisch und positiv semidefinit, weil dies für D_A gilt und

$$P^T P = O\sqrt{D_A}O^T O\sqrt{D_A}O^T = O\sqrt{D_A}^2 O^T = OD_A O^T = A$$

(4) \Rightarrow (3) Es sei O wieder eine diagonalisierende orthogonale Matrix zu $A = P^2$. Dann gilt

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) = O^T AO = (PO)^T (PO).$$

Setzen wir $\tilde{B} = PO$, dann muss \tilde{B} in den Zeilen mit Indizes $k > r$ nur Nullen haben, da die Diagonaleinträge in $O^T AO$ eine Summe von Quadraten ist

$$\forall k > r : \quad 0 = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_{ki} \cdot \tilde{b}_{ik} = \sum_{i=1}^n (\tilde{b}_{ki})^2.$$

Die letzten $n - r$ Zeilen spielen also keine Rolle für das Produkt und wir können daher B so wählen, dass B aus \tilde{B} durch Weglassen ebendieser Zeilen entsteht.

(3) \Rightarrow (1)

Es sei B wie in (3) beschrieben und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$x^T Ax = x^T B^T Bx = (Bx)^T (Bx) = \|Bx\|^2 \geq 0.$$

(1) \Rightarrow (5)

Da für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass $x^T Ax \geq 0$, gilt dies auch für die speziellen \tilde{x} , deren j -ter

Eintrag 0 ist. Das Produkt $\tilde{x}^T A \tilde{x}$ entspricht dann dem Produkt der j -ten Streichungsmatrix A_j von A mit dem verkürzten Vektor \tilde{x}_j , der durch Streichen des j -ten Eintrages (also Null) aus \tilde{x} hervorgeht. Die Matrix A_j muss ebenfalls positiv semidefinit sein, da für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit j -tem Eintrag gleich Null gilt

$$0 \leq v^T A v = v_j^T A v_j$$

wobei hier $v_j \in \mathbb{R}^{n-1}$ durch Streichen der Null entsteht. Insbesondere können wir wieder eine orthogonale Matrix O_j wählen welche A_j auf übliche Weise diagonalisiert. Dann gilt

$$\det(A_j) = \det(O_j^T A_j O_j) = \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \geq 0.$$

Analog führt man ähnliche Überlegungen für Mehrfachstreichungen durch und erhält so die gewünschte Inklusion.

(5) \Rightarrow (6)

Klar.

(6) \Rightarrow (1) Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über die Anzahl der Nicht-Rang-Spalten k :

- **Induktionsvoraussetzung IA:**

$k = 0$: Somit hat A vollen Rang $r = n$ und damit ist A regulär. Insbesondere gilt dann, dass A keinen Eigenwert gleich Null haben kann. Es gibt also nur die Möglichkeit, dass alle Eigenwerte positiv sind, oder es gibt Eigenwerte, die negativ sind. Im ersten Fall folgt wegen der Äquivalenz (1) \Leftrightarrow (2) die Induktionsvoraussetzung.

Nehmen wir nun an, es gibt Eigenwerte, die negativ sind. Wir können auch annehmen, dass sich diese Eigenwerte nach dem Diagonalisieren an den letzten l Matrixeinträgen befinden. Nun betrachten wir die Untermatrix von A , die durch Streichen der letzten $l - 1$ Spalten bzw. Zeilen entsteht. Die Eigenwerte dieser Matrix entsprechen dann den positiven und einem einzigen negativen Eigenwert von A . Dementsprechend ist die Determinante dieser Untermatrix also negativ. Somit ist ein Hauptminor negativ und wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme.

- **Induktionsschritt IS:**

$k \mapsto k + 1$: Wir nehmen an, dass die Matrix A derart vorliegt, dass die ersten r Spalten den Pivotspalten entsprechen, sonst vertauschen wir entsprechend die Zeilen und Spalten, dass dem der Fall ist. Sei A_{r+1} die Streichungsmatrix, die durch Weglassen der $(r + 1)$ -ten Zeile und Spalte entsteht. Da in A_{r+1} eine Nicht-Rang-Spalte weniger vorkommt und alle Hauptminoren bis zur Größe r positiv sind, ist A_{r+1} nach Induktionsannahme positiv semidefinit. Dementsprechend gibt es eine orthogonale $(r + k) \times (r + k)$ -Matrix O , dass $O^T A_{r+1} O$ auf gewohnte Weise Diagonalgestalt mit den Eigenwerten von A auf der Diagonalen hat. Wir setzen

$$\tilde{O} = \left(\begin{array}{c|c} O & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

Dann gilt, dass

$$\tilde{O}^T A \tilde{O} = \left(\begin{array}{cccccc|c} O^T A O & * \\ * & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & * \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \lambda_r & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ddots & 0 & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & * \\ * & \dots & \dots & \dots & \dots & * & a_{nn} \end{array} \right)$$

und da A Rang r hat, kann man wegen 2.3 mit Hilfe eines Produktes invertierbarer Matrizen P weiter umformen, sodass $P^T \tilde{O}^T A \tilde{O} P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) =: D_A$. Somit ist A kongruent zu D_A , welche positiv semidefinit ist, also selbst positiv semidefinit.

□

Bemerkung 2.6. Für eine positiv semidefinite Matrix A gilt, dass aus $x^T A x = 0$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$ direkt folgt $Ax = 0$ gilt. Es folgt also aus $x^T A x = 0$, dass x ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist. Also gilt, dass jede positiv semidefinite, aber nicht positiv definite Matrix mindestens einen Eigenwert gleich 0 besitzt, also auch nicht vollen Rang haben kann.

Beweis. Für den ersten Teil betrachten wir die Darstellung von A mit Hilfe einer symmetrischen $n \times n$ -Matrix P , sodass $A = P^T P$ gilt. Dann ist

$$0 = x^T A x = x^T P^T P x = \|P x\|^2$$

und somit $Px = 0$. Nun ergibt sich $Ax = P^T P x = P^T 0 = 0$.

Der zweite Teil ist offensichtlich direkte Folgerung aus dem Ersten.

□

Bemerkung 2.7. Des Weiteren gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dass xx^T symmetrisch und positiv definit vom Rang 1 ist. Jede positiv semidefinite Matrix von Rang r kann also Summe solcher Rang 1 Matrizen mit höchstens r Summanden geschrieben werden.

Beweis. Dass xx^T positiv semidefinit ist folgt direkt aus

$$a^T (xx^T) a = (x^T a)^T (x^T a) = \|x^T a\|^2 \geq 0 \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

Rang 1 ergibt sich mit Hilfe von 2.5 und der Wahl $B = x^T$.

Für die Summendarstellung betrachten wir wieder die Diagonalisierung mittels orthogonaler Matrix O

$$O^T A O = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) = \sum_{i=1}^r v_i v_i^T,$$

wobei $v_i = [0, \dots, 0, \sqrt{\lambda_i}, 0, \dots, 0]^T$. Dann ist

$$A = \sum_{i=1}^r O v_i (O v_i)^T$$

□

Beispiel 2.8. Eine symmetrische 2×2 - Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ist also nach 2.5 genau dann positiv semidefinit, wenn ihre Hauptminoren $ac - b^2$, a und c nicht-negativ sind.

Bemerkung 2.9. Für eine positiv semidefinite Matrix A werden wir des Weiteren öfters die Schreibweise $A \succeq 0$ statt $A \in S_+^n$ verwenden. Für zwei Matrizen $A, B \in \text{Sym}_n$ definieren wir $A \succeq B$, wenn $(A - B) \succeq 0$ gilt. Mittels \succeq wird eine Halbordnung auf die Menge der symmetrischen $n \times n$ Matrizen definiert, für die also

$$\begin{aligned} \text{(Reflexivität)} \quad & A \succeq A \\ \text{(Transitivität)} \quad & A \succeq B \text{ und } B \succeq C \Rightarrow A \succeq C \\ \text{(Antisymmetrie)} \quad & A \succeq B \text{ und } B \succeq A \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

gilt.

In folgenden Kapitel werden wir dies Halbordnung benutzen, um den Begriff eines Kegels im \mathbb{R}^n auf Matrixebene zu erweitern indem wir statt positiv Kombinationen solche mit positiv semidefiniten Matrizen als Koeffizienten zulassen.

Zur Vollständigkeit möchten wir noch kurz über Bilinearformen sprechen. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass symmetrische Matrizen mit symmetrischen Bilinearformen identifiziert werden können. Wir betrachten also

Definition 2.10. Es sei $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine bilineare Funktion über \mathbb{R}^n . Dann nennen wir l symmetrisch, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$l(x, y) = l(y, x).$$

Bemerkung 2.11. Die Matrix einer symmetrischen Bilinearform bezüglich einer Basis ist genau dann symmetrisch, wenn dies für die Bilinearform gilt. Genauer betrachten wir eine Bilinearform $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und sei \underline{v} eine Basis von \mathbb{R}^n und es bezeichne A die Matrix von l bezüglich \underline{v} . Für beliebige Elemente $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit Koordinatenspalten \tilde{x}, \tilde{y} bezüglich \underline{v} gilt dann

$$l(x, y) = l\left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i v_i, \sum_{j=1}^n \tilde{y}_j v_j\right) = \sum_{i,j} \tilde{x}_i \tilde{y}_j \cdot l(v_i, v_j) = \sum_{i,j} \tilde{x}_i A_{ij} \tilde{y}_j = \tilde{x}^T A \tilde{y}$$

Ist also eine Bilinearform symmetrisch, so gilt $A_{ij} = l(v_i, v_j) = l(v_j, v_i) = A_{ji}$. Umgekehrt ist die Matrix bezüglich der Basis \underline{v} symmetrisch, so folgt nach der obigen Anmerkung, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$l(x, y) = \tilde{x}^T A \tilde{y} = (\tilde{x}^T A \tilde{y})^T = \tilde{y}^T A^T \tilde{x} = \tilde{y}^T A \tilde{x} = l(y, x)$$

gilt.

2.2. Der Raum der positiv semidefiniter Matrizen. Im folgenden wollen wir die Eigenschaften der Menge der symmetrischen bzw. positiv semidefiniten Matrizen eingehender studieren. Wir werden also die Menge S_+^n im Hinblick auf die wichtigen Begriffe wie Facette, Extremalstrahlen oder Dualität aus dem vorigen Kapitel über konvexe Kegel untersuchen.

Proposition 2.12. Die Menge $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ bilden einen Untervektorraum des Vektorraums der $n \times n$ -Matrizen der Dimension $d := \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Beweis. Es gilt offensichtlich, dass Summen und Skalare Vielfache symmetrischer Matrizen wieder symmetrisch sind, also handelt es sich bei der Menge der symmetrischen Matrizen wirklich um einen linearen Unterraum der $n \times n$ -Matrizen.

Für die Dimension betrachten wir die Identifikation

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Sym}_n &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ A = (a_{ij})_{ij} &\longmapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{nn}). \end{aligned}$$

□

Die Menge S_+^n kann klarerweise keinen solchen Unterraum bilden, da bereits negative Vielfache einer positiv semidefiniten Matrix nicht mehr positiv semidefinit sind. Es gilt jedoch folgende Proposition

Proposition 2.13. Die Menge aller positiv semidefiniten Matrizen bildet einen konvexen Kegel in Sym_n , der spitz ist (also keine Geraden enthält).

Beweis. Die Nullmatrix ist offensichtlich positiv semidefinit. Wir müssen also nur nachprüfen, dass skalare Vielfache einer Matrix $A \succeq 0$ mit positiven Zahlen wieder positiv semidefinit ist. Dies ist aber offensichtlich, da

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad x^T \alpha A x = \alpha (x^T A x) \geq 0$$

gilt. Für die Konvexität betrachten wir $\gamma \in [0, 1]$ und zwei positiv semidefinite Matrizen A, B . Dann gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad x^T (\gamma A + (1 - \gamma) B) x = \gamma x^T A x + (1 - \gamma) x^T B x \geq 0,$$

da $x^T A x \geq 0$ bzw. $x^T B x \geq 0$ gilt. Oben haben wir gesehen, dass sich die Eigenwerte der Matrix αA als Multiplikation der Eigenwerte von A mit α ergeben. Somit kann für die positiv semidefinite Matrix A die Matrix $-A$ klarerweise nicht positiv semidefinit sein und damit gilt $S_+^n \cap (-S_+^n) = \{0\}$ und damit ist der Kegel S_+^n .

□

Proposition 2.14. Der Kegel S_+^n ist abgeschlossen.

Beweis. Wir fixieren ein Element $x \in \mathbb{R}^n$ und betrachten zunächst die Abbildung:

$$\begin{aligned} \psi_x : \text{Sym}_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto x^T A x \end{aligned}$$

Die Abbildung ψ_x ist stetig, da sie als Hintereinanderausführung zweier stetiger Funktionen entsteht.

$$\text{Sym}_n \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^d \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

ϕ entspricht dabei der Abbildung zur Identifikation von Sym_n mit \mathbb{R}^d aus 2.12 und f entspricht einer polynomialen Abbildung von Grad 2. Offensichtlich gilt, dass $S_+^n \subset \psi_x^{-1}([0, \infty))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ebenso leicht erkennt man, dass

$$S_+^n = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^d} \psi_x^{-1}([0, \infty))$$

gilt. Da $\psi_x^{-1}([0, \infty))$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung abgeschlossen ist und der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, folgt, dass S_+ einen abgeschlossenen Kegel in Sym_n bildet. \square

Definition 2.15. Es sei $A = (a_{ij})_{ij}$ eine beliebige $n \times n$ -Matrix. Wir bezeichnen die Summe der Diagonaleinträge

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

als Spur (trace) der Matrix A .

Proposition 2.16. Seien A, B beliebige $n \times n$ -Matrizen. Dann gilt

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

und für eine invertierbare Matrix $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, dass

$$\text{tr}(Q^{-1}AQ) = \text{tr}(A)$$

Beweis. Das l -te Diagonalelement von AB ergibt sich durch

$$(AB)_{ll} = \sum_{i=1}^n a_{li}b_{il}.$$

Somit erhalten wir nach Vertauschen der Summationsreihenfolge, dass

$$\text{tr}(AB) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^n a_{li}b_{il} = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n b_{il}a_{li} = \text{tr}(BA)$$

gilt. Der zweite Teil für $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ folgt dann direkt aus dem Ersten, wegen

$$\text{tr}(Q^{-1}AQ) = \text{tr}(QQ^{-1}A) = \text{tr}(A).$$

\square

Definition 2.17. Es seien A und B zwei symmetrische Matrizen, dann handelt es sich bei der Abbildung

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ij}$$

um ein Skalarprodukt auf $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$ und wird Frobenius-Skalarprodukt genannt. Es induziert die Frobeniusnorm

$$\|A\| := \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$$

Proposition 2.18. Für zwei symmetrische Matrizen A, B gilt die Beziehung

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$$

Beweis. Das i -te Diagonalelement von AB ergibt sich durch Multiplikation der i -ten Zeile von A mit der i -ten Spalte von B . Die Summe aller dieser Einträge entspricht der Spur

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij} = \langle A, B \rangle$$

\square

Bemerkung 2.19. Das Frobenius-Skalarprodukt ist invariant unter orthogonaler Konjugation, d.h. es gilt für zwei Matrizen $A, B \in \text{Sym}_n$ und eine orthogonale Matrix O , dass

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(ABOO^T) = \text{tr}(O^T ABO) = \langle O^T A O, O^T A O \rangle$$

Proposition 2.20 (Satz von Fréjer). *Eine symmetrische Matrix A ist genau dann positiv semidefinit, wenn*

$$\langle A, X \rangle \geq 0$$

für alle positiv semidefiniten Matrizen $X \succeq 0$. [Florian Jarre, 2013]

Beweis. Nach 2.5 ist A genau dann positiv semidefinit, wenn eine Matrix $P \succeq 0$ mit $A = P^2$ existiert. Dann gilt

$$\langle A, X \rangle = \langle P^T P, X \rangle = \text{tr}(P^T P X) = \text{tr}(P X P^T)$$

und da die Matrizen X ebenfalls positiv semidefinit sind, folgt für $X = Y^2$

$$\langle A, X \rangle = \text{tr}((Y P)^T (Y P)) = \langle Y P, Y P \rangle \geq 0$$

Umgekehrt betrachten wir nun A derart, dass für alle positiv semidefiniten Matrizen X gilt, dass

$\langle A, X \rangle \geq 0$ ist. Es gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Bedingung:

$$x^T A x = \text{tr}(x^T A x) = \text{tr}(x^T I_n A x) = \text{tr}(A x (I_n x)^T) = \text{tr}(A x x^T) = \langle A, x x^T \rangle.$$

Da $x x^T$ eine symmetrische und positiv semidefinite Matrix ist, muss nach Voraussetzung das Skalarprodukt $\langle A, x x^T \rangle$ größer gleich Null sein. Also gilt $x^T A x = \langle A, x x^T \rangle \geq 0$ und damit $A \succeq 0$. \square

Proposition 2.21. *Es sei $A \in S_+^n$ eine symmetrische positiv semidefinite Matrix. Ist A strikt positiv definit, so liegt A im Inneren des Kegels S_+^n . Ist A positiv definit mit $\text{rank}(A) = r < n$, so liegt A auf einer Facette F von S_+^n mit Dimension $\frac{r(r+1)}{2}$.*

Beweis. Sei also $A \succ 0$ und damit hat A Rang n nach 2.6. Wir zeigen zunächst, dass wenn $A \succ 0$ wir in einem kleinen Bereich in Richtung einer symmetrischen Matrix $B \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ immer noch in S_+^n bleiben. Damit folgt also, dass eine strikt positiv definite Matrix im Inneren von S_+^n liegt. Sei also $B \in \text{Sym}_n$. Wir suchen also $\delta > 0$, sodass immer noch

$$A + \delta B \succeq 0$$

gilt. Da $A \succ 0$ gilt, sind alle Eigenwerte von A positiv und wir finden somit ein ϵ , sodass alle Eigenwerte von A größer ϵ sind. Es gilt dann, dass

$$A - \epsilon I_n \succeq 0,$$

denn für das charakteristische Polynom χ gilt

$$\chi(A - \epsilon I_n) = \det(\lambda I_n - A + \epsilon I_n) = \det((\lambda + \epsilon) I_n - A).$$

Die Eigenwerte, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms werden somit um $-\epsilon$ verschoben, bleiben also wegen der Definition von ϵ alle positiv. Des Weiteren existiert wegen eines ähnlichen Argumentes wie oben ein $\gamma > 0$, derart, dass

$$B + \gamma I_n \succeq 0$$

gilt. Die Wahl $\delta := \frac{\epsilon}{\gamma}$ liefert, dann

$$A + \delta B = (A - \epsilon I_n) + \epsilon I_n + \delta B = (A - \epsilon I_n) + \frac{\epsilon}{\gamma}(B + \gamma I_n) \succeq 0$$

und somit liegt jede positiv definite Matrix im Inneren von S_+^n .

Andererseits betrachten wir eine Matrix $A \succeq 0$, die aber nicht strikt positiv definit ist. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $x^T A x = 0$. Wir nehmen dabei an, dass $\|x\| = 1$, ansonsten wird x entsprechend normiert. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$

$$x^T (A - \epsilon I_n) x = x^T A x - \epsilon \|x\|^2 = -\epsilon.$$

Also kann $A - \epsilon I_n$ nicht in S_+^n liegen und damit muss A am Rand von S_+^n liegen.

Es sei nun $\text{rank}(A) = r < n$. Wir bezeichnen mit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die nicht-negativen Eigenwerte von A . Im Folgenden konstruieren wir eine Hyperebene H , die A enthält und S_+ isoliert.

Da A positiv semidefinit ist, gibt es eine orthogonale Matrix O , sodass $O^T A O = D_A$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0$ in der Diagonale ist. Betrachten wir des Weiteren eine Diagonalmatrix D_C deren Diagonale in den ersten r Einträgen aus Nullen und den letzten $n - r$ Einträgen aus 1en besteht.

$$\begin{aligned} D_A &= O^T A O = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) \\ D_C &= \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

Die Matrix $C = O D_C O^T$ ist ebenfalls eine positiv semidefinite Matrix ungleich der Nullmatrix. Für das Skalarprodukt $\langle C, A \rangle$ folgt also wegen der Invarianz aus 2.19

$$(1) \quad \langle C, A \rangle = \langle O D_C O^T, O D_A O^T \rangle = \langle D_C, D_A \rangle = 0.$$

Des Weiteren gilt für jede positiv semidefinite Matrix X , dass die Matrix $O^T X O = Y$ positiv semidefinit ist und damit gilt

$$\langle C, X \rangle = \langle O D_C O^T, O Y O^T \rangle = \langle D_C, Y \rangle$$

Da die Diagonaleinträge von Y alle größer gleich 0 sind (siehe 2.5, (5)), folgt insbesondere

$$(2) \quad \langle C, X \rangle \geq 0$$

Wir definieren nun die gesuchte Hyperebene H folgendermaßen:

$$H := \{X \in \text{Sym}_n \mid \langle C, X \rangle = 0\}$$

A ist wegen Gleichung (1) in H enthalten. Zusätzlich isoliert H laut Gleichung (2) die Menge S_+^n . Somit liegt A auf der Facette

$$F = H \cap S_+^n = \{X \in S_+^n \mid \langle C, X \rangle = 0\}.$$

Wir betrachten die lineare und nicht-entartete Abbildung $l : \text{Sym}_n \rightarrow \text{Sym}_n$ mit $M \mapsto O^T M O$. Dann gilt klarerweise

$$l(A) = D_A \quad \text{und} \quad l(C) = D_C.$$

Die Facette F wird dann wieder auf eine Facette von S_+^n abgebildet, nämlich

$$\{Y = O^T X O \in S_+^n \mid \langle C, X \rangle = \langle O D_C O^T, O Y O^T \rangle = 0\} = \{Y \in S_+^n \mid \langle D_C, Y \rangle = 0\}.$$

Da D_C nur in den letzten $n - r$ Diagonaleinträgen Einträge ungleich Null enthält, muss entsprechend Y an diesen Stellen Nullen enthalten. Da Y positiv semidefinit ist, besteht Y somit in den letzten $n - r$ Spalten bzw. Zeilen ebenfalls nur aus Nullen. Y hat also Blockgestalt mit nur Nullen außer dem linken oberen $r \times r$ -Block, der einer beliebigen positiv semidefiniten $r \times r$ -Matrix entspricht. Wir können also die Facette F mit dem Kegel S_+^r identifizieren, welcher nach 2.12 Dimension $\frac{r(r+1)}{2}$ hat. \square

Proposition 2.22. *Wir betrachten einen linearen Unterraum $L \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension r . Dann definiert die Menge*

$$F_L := \{X \in \text{Sym}_n \mid L \subset \ker(X)\}$$

eine Facette von S_+^n , deren Dimension $\frac{r \cdot (r+1)}{2}$ ist.

Beweis. Wir wählen zunächst eine lineare Transformation, sodass die Koordinaten von L vereinfacht als

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0\}$$

angenommen werden können. Weil $L \subset \ker(X)$ gelten muss, besteht die Menge F_L aus Matrizen der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

wobei $\tilde{A} \succeq 0$. Wählen wir D_C wie im Beweis von 2.22 dann definiert die Menge

$$H = \{X \in \text{Sym}_n \mid \langle X, D_C \rangle = 0\}$$

eine Hyperebene. Wir zeigen $F_L = S_+^n \cap H$. Betrachten wir also $A \in F_L$. Da $L \subset \ker(A)$ und alle Spalten von D_C in L enthalten sind, folgt $AD_C = 0$ und damit

$$\langle A, D_C \rangle = \text{tr}(AD_C) = 0.$$

Umgekehrt sei $B \in H \cap S_+^n$, wobei wir B in Blockmatrizen

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & C^T \\ \hline C & B_2 \end{array} \right)$$

aufteilen, mit $B_1 \in S_+^r$ und $B_2 \in S_+^{n-r}$. Da

$$0 = \langle B, D_C \rangle = \text{tr}(BD_C) = \text{tr}(B_2)$$

muss $B_2 = 0$ (wegen Symmetrie und positiv Semidefinitheit) gelten. Aufgrund der Charakterisierung mittels Minoren aus 2.5 folgt auch, dass $C = 0$ gelten muss. Somit ist B von der Form

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Damit gilt also $L \subset \ker(B)$. Die Dimension ergibt sich wie in Beweis von 2.22. \square

Proposition 2.23. *Die extremalen Strahlen von S_+^n werden von den Elementen xx^T erzeugt.*

Beweis. Wir betrachten den Kegel $\text{cone}(xx^T)$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$. Es ist also zu zeigen, dass für ein Element $A \in \text{cone}(xx^T)$ und $C, B \in S_+^n$ mit $A = \frac{1}{2}(C + B)$ folgt, dass $B, C \in \text{cone}(xx^T)$.

Weil $A \in \text{cone}(xx^T)$ existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dass $A = \alpha \cdot xx^T$ und nach 2.7 ist xx^T positiv semidefinit von $\text{rank}(xx^T) = 1$. xx^T besitzt also einen einzigen Eigenwert ungleich

Null λ . Weil $xx^T \succeq 0$ ist, gibt es eine orthogonale Matrix O die xx^T auf übliche Weise diagonalisiert.

$$O^T A O = \alpha O^T x x^T O = \alpha \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(O^T B O + O^T C O)$$

Da B und C positiv semidefinit sind und diese Eigenschaft unter orthogonaler Konjugation erhalten bleibt, sind auch $O^T B O$ und $O^T C O$ positiv semidefinit. Die Diagonaleinträge dieser Matrizen entsprechen wegen 2.5 nicht-negativen Zahlen. Vergleich mit der diagonalisierten Matrix $O^T A O$ zeigt, dass alle bis auf den ersten Diagonaleintrag Null sein müssen und da die Matrizen symmetrisch und positiv semidefinit sind, können diese nur einen Eintrag ungleich Null an der links-obersten Stelle enthalten. Es ist also

$$\tilde{B} = O^T B O = \begin{pmatrix} b & | & 0 \\ \hline 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{C} = O^T C O = \begin{pmatrix} c & | & 0 \\ \hline 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $b, c \geq 0$. Ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit einer der beiden, wie zum Beispiel b gleich Null, so gilt offensichtlich

$$O^T A O = \alpha O^T x x^T O = \frac{1}{2} O^T C O$$

und damit $C = 2\alpha x x^T$ und somit B und C positive Vielfache von A . Sind nun beide Werte b und c ungleich Null, dann existiert eine positive Zahl γ sodass $b = \gamma \cdot c$ und

$$O^T A O = \frac{1}{2}(1 + \gamma) O^T C O.$$

Es gilt also $C = \frac{2\alpha}{(1+\gamma)} \cdot x x^T$ und $B = \frac{2\alpha\gamma}{1+\gamma} \cdot x x^T$. □

In Kapitel 1 haben wir uns ein wenig mit dem Begriff des dualen Kegel auseinander gesetzt. Diesen Begriff haben wir dort mit Hilfe des Standardskalarproduktes des \mathbb{R}^n definiert. Wir haben nun auch ein Skalarprodukt auf dem Raum der positiv semidefiniten Matrizen mittels Spur definiert und können somit auf analoge Weise den dualen Kegel eines Kegels positiv semidefiniter Matrizen definieren.

Definition 2.24 (Dualer Matrizenkegel). Es sei $K \subseteq S_+^n$ ein Teilkegel des Kegels der positiv semidefiniten Matrizen und bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Frobeniuskalarprodukt in Sym_n . Dann definieren wir analog zum reellen Fall

$$K^* := \{A \in \text{Sym}_n \mid \forall B \in K : \langle A, B \rangle \geq 0\}$$

den dualen Kegel von K . Gilt für einen Kegel $K^* = K$ so nennen wir K selbstdual.

Proposition 2.25. *Der Kegel der positiv semidefiniten $n \times n$ - Matrizen S_+ ist selbstdual.*

Beweis. Siehe 2.20 □

3. ERWEITERUNG KONVEXER KEGEL AUF POSITIV SEMIDEFINITE MATRIZEN

Nun möchten wir uns mit dem Hauptziel meiner Masterarbeit widmen. Wir werden nun den Begriff konvexer Kegel auf Matrixlevel erweitern. Dies wird, wie wir unten sehen werden, auf zwei Arten möglich sein. Einerseits können wir lineare Ungleichungen in symmetrischen Matrizen betrachten und wie im Falle von Vektoren einen Matrixkegel als Schnitt der Lösungsmengen endlich vieler homogener linearer Ungleichungen definieren.

Andererseits haben wir in 2.9 gesehen, dass die Bedingung $\lambda > 0$ für Zahlen der Bedingung $A \succeq 0$ für Matrizen entspricht. Wir können also auch Matrixkegel mit Hilfe Linearkombinationen mit positiv semidefiniten Matrizen als Koeffizienten definieren.

Im reellen Fall stimmen die beiden Definitionen mittels linearen Ungleichungen bzw. mit Hilfe von Positivkombinationen von endlich vielen Erzeugenden überein, wie wir in Kapitel 1 ausgiebig diskutiert haben. In diesem Teil meiner Arbeit werden wir die Gleichheit der beiden Definitionen auf Matrixebene untersuchen und werden sehen, dass die Begriffe bereits ab einer Matrixgröße von 2×2 nicht mehr übereinstimmen. Dieses Resultat wurde bereits auf etwas abstrakterem Level in [Tobias Fritz, 2017] für Operatorsysteme (siehe [Tobias Fritz, 2017]) bewiesen. Hier möchten wir uns dem Problem konkret für reelle symmetrische Matrizen widmen und werden eine anschauliche Version des dortigen Gegenbeispiels vorstellen.

3.1. Der verallgemeinerte konvexer Kegel. Im Folgenden betrachten wir einen endlich erzeugten konvexen Kegel $C \subset \mathbb{R}^n$, der spitz ist und einen inneren Punkt besitzt. Wir möchten diesen nun auf Tupel positiv semidefiniten Matrizen der Größe k erweitern. Im ersten Kapitel haben wir gesehen, dass endlich erzeugte konvexe Kegel immer auf zwei Arten darstellbar sind.

Das heißt insbesondere, dass zu jedem Kegel, welcher durch endlich viele lineare Ungleichungen definiert ist auch endlich viele Erzeuger gefunden werden können, die denselben Kegel definieren. Umgekehrt existieren auch endlich viele lineare Ungleichungen für konisch definierter Kegel mit endlich vielen Erzeugern. Bei den obigen Darstellungen muss jedoch beachtet werden, dass die Anzahl linearer Gleichungen nicht zwingend der Anzahl an Erzeugern entsprechen muss.

Wie gewohnt werden wir mit l_1, \dots, l_m die bestimmenden linearen Funktionale und mit v_1, \dots, v_r die endlich vielen Erzeugenden bezeichnen. Dann sind

$$C_l = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i(x) \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m\}$$

bzw.

$$C_c = \text{cone}(v_1, \dots, v_r) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq r \right\}.$$

die zwei möglichen Kegeldarstellungen eines reellen endlich erzeugten konvexen Kegels und es gilt $C = C_l = C_c$.

Wir werden nun beide Kegeldefinitionen auf Matrixlevel erweitern. Dafür starten wir bei einem gegebenen reellen Kegel $C_l = C_c$ wie oben. Intuitiv können wir die Bedingungen an C_l erweitern, indem wir Matrizentupel $\underline{A} = (A_1, \dots, A_n)$ mit fixer Matrixgröße als Argumente zulassen und verlangen, dass die Linearkombination $l_i(\underline{A})$ einer positiv

semidefiniten Matrix entspricht.

$$\tilde{C}_{l,k} := \{ \underline{A} = (A_1, \dots, A_n) \in \text{Sym}_k^n \mid l_i(\underline{A}) \succeq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m \}$$

Bei der Erweiterung $\tilde{C}_{c,k}$ von C_c soll der neu entstehende Kegel ebenfalls von den Erzeugern v_1, \dots, v_r definiert werden. Dazu setzen wir für einen beliebigen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ und eine positiv semidefinite Matrix $P \succeq 0$

$$P \otimes x := (x_1 \cdot P, \dots, x_n \cdot P).$$

Dann können wir C_c mit Hilfe von \otimes erweitern zu

$$\tilde{C}_{c,k} := \left\{ \sum_{i=1}^r P_i \otimes v_i \mid P_i \succeq 0 \right\}.$$

Definition 3.1. (Erweiterter konvexer Kegel) Wir betrachten einen konvexen endlich erzeugten spitzen Kegel $C \subset \mathbb{R}^n$ mit innerem Punkt, der durch

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid l_i(x) \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m \} = \text{cone}(v_1, \dots, v_r)$$

definiert wird. Die konische Erweiterung von C sei gegeben durch

$$\tilde{C}_{c,k} := \left\{ \sum_{i=1}^r P_i \otimes v_i \mid P_i \succeq 0 \right\}$$

und die funktionelle Erweiterung sei durch

$$\tilde{C}_{l,k} := \{ \underline{A} = (A_1, \dots, A_n) \in \text{Sym}_k^n \mid l_i(\underline{A}) \succeq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq m \}$$

definiert. Wenn die Matrixgröße klar ist, werden wir den Index k zur Vereinfachung nicht angeben.

Beweis. Die beiden Definitionen \tilde{C}_l bzw. \tilde{C}_c sind wegen den obigen Ausführungen wohldefiniert. Wir prüfen nun nach, dass beide Mengen auch wirklich einem konvexen Kegel entsprechen.

Im Falle \tilde{C}_l ist dies offensichtlich. Für \tilde{C}_c erkennen wir, dass für zwei Matrixtupel $\underline{A} = \sum_i P_i \otimes v_i$, $\underline{B} = \sum_i Q_i \otimes v_i$ und eine nicht-negative Zahl α folgende Gleichungen gelten

$$\begin{aligned} \underline{A} + \underline{B} &= \sum_{i=1}^r (P_i + Q_i) \otimes v_i \\ \alpha \underline{A} &= \sum_{i=1}^r (\alpha \cdot P_i) \otimes v_i \end{aligned}$$

und damit alle Bedingungen für einen konvexen Kegel erfüllt sind. \square

Nun wollen wir die Zusammenhänge zwischen den beiden Kegeldefinitionen untersuchen. Leicht zu erkennen ist, dass folgende Beziehung zwischen den erweiterten Kegeldefinitionen immer gilt:

Proposition 3.2. *Es seien \tilde{C}_l bzw. \tilde{C}_c wie in Definition 3.1. Dann gilt*

$$\tilde{C}_c \subseteq \tilde{C}_l.$$

Beweis. Es sei $P \succeq 0$. Wir betrachten zunächst $P \otimes v_i$ für alle i und zeigen, dass $l(P \otimes v_i) \succeq 0$ gilt. Da l linear ist und die Summe positiv semidefiniter Matrizen positiv semidefinit ist, gilt das dann auch für beliebige Summen $\sum_{i=1}^r P_i \otimes v_i$ wegen

$$l\left(\sum_{i=1}^r P_i \otimes v_i\right) = \sum_{i=1}^r l(P_i \otimes v_i) \succeq 0.$$

Wir betrachten also $P \otimes v_i$, dann ist

$$l(P \otimes v_i) = l(v_{i,1}P, \dots, v_{i,n}P) = P \cdot l(v_i).$$

Da für all i die Vektoren v_i nach Voraussetzung die definierenden Ungleichungen von C_l erfüllen, gilt also offensichtlich, dass $l(v_i) \geq 0$ für alle i und damit ist $l(P \otimes v_i) \succeq 0$. \square

Die Umkehrung von 3.2 gilt allerdings nur für Simplexkegel, also Kegel, welche von so vielen Vektoren erzeugt werden wie der Dimension des Raumes entspricht. Für mehr Erzeuger ist die Umkehrung immer falsch, unabhängig von Dimension n des Raumes bzw. der Matrixgröße k , wie das einfache Beispiel aus 3.4 visualisiert.

Proposition 3.3. *Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ ein Simplex-Kegel definiert durch $C_l = C_c$. Das heißt also der Kegel C_c wird von n linear unabhängigen Vektoren v_1, \dots, v_n erzeugt. Dann gilt*

$$\tilde{C}_{c,k} = \tilde{C}_{l,k}.$$

Dabei gilt die obige Gleichheit für beliebige Matrixgrößen k .

Beweis. $\tilde{C}_c \subseteq \tilde{C}_l$ haben wir bereits in 3.2 bewiesen. Umgekehrt können wir weil C ein Simplex ist eine lineare Transformation finden, die die Erzeuger v_1, \dots, v_n auf die Erzeuger e_1, \dots, e_n des ersten Orthanten abbildet. Die definierenden Ungleichungen des ersten Orthanten entsprechen dann natürlich

$$\text{für } j = 1, \dots, n : \quad l_j(\underline{x}) = x_j \geq 0.$$

Betrachten wir also eine Element $\underline{A} = (A_1, \dots, A_n)$ in der konischen Erweiterung von C . Wenn alle $A_i \succeq 0$ wären, so wäre

$$\underline{A} = \sum_{i=1}^n A_i \otimes e_i$$

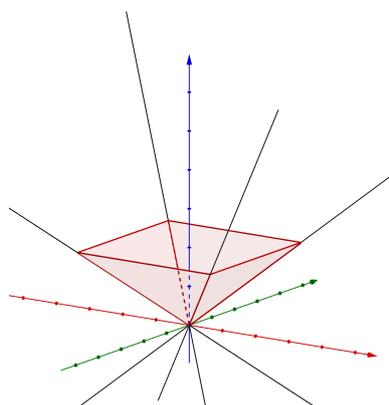
die gesuchte Darstellung von \underline{A} mittels \otimes . Dass $A_i \succeq 0$, folgt aber einfach direkt aus $l_j(e_j) \geq 0$ und, dass für alle j

$$0 \preceq l_j(\underline{A}) = l_j\left(\sum_{i=1}^n A_i \otimes e_i\right) = A_j \cdot l_j(e_j).$$

gilt. \square

Beispiel 3.4. *Betrachten wir den Kegel in \mathbb{R}^3 , welcher erzeugt wird durch die Vektoren*

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 1) \\ v_2 &= (-1, 1, 1) \\ v_3 &= (1, -1, 1) \\ v_4 &= (-1, -1, 1). \end{aligned}$$



Durch eine leichte Rechnung können die definierenden Ungleichungen

$$l_1(\underline{x}) = -x + z \geq 0$$

$$l_2(\underline{x}) = -y + z \geq 0$$

$$l_3(\underline{x}) = x + z \geq 0$$

$$l_4(\underline{x}) = y + z \geq 0$$

bestimmt werden. Wir erweitern diesen Kegel wie oben in 3.1 zu \tilde{C}_1 bzw. \tilde{C}_c . In Proposition 3.2 haben wir gesehen, dass $\tilde{C}_c \subseteq \tilde{C}_1$ gilt. Die Umkehrung ist nicht zwingend richtig, betrachten wir nämlich

$$\underline{A} = (A_1, A_2, A_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

so ist $\underline{A} \in \tilde{C}_1$ enthalten, wie leicht nachgerechnet werden kann. Wäre nun $\underline{A} \in \tilde{C}_c$, so gäbe es positiv semidefinite Matrizen P_1, P_2, P_3 und P_4 , sodass die Bedingung

$$(A_1, A_2, A_3) = (P_1 - P_2 + P_3 - P_4, P_1 + P_2 - P_3 - P_4, P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$$

erfüllt ist. Aus den letzten beiden Bedingungen erhalten wir, dass

$$A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2(P_1 + P_2).$$

Da P_1 und P_2 beides positiv semidefinit sind, und daher deren Diagonaleinträge größer gleich Null sein müssen, folgt, dass diese Matrizen von Gestalt

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq \alpha \leq 1$ sind. Betrachten wir nun

$$A_1 + A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2(P_1 + P_3) = 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P_3 \right)$$

Somit muss $P_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gelten und weil $P_3 \succeq 0$ folgt, $\alpha = 0$, da sich sonst ein Widerspruch zum Hauptminorkriterium

$$(1 - 2\alpha) - 1 \geq 0$$

ergibt. Insgesamt erhalten wir also, dass wegen

$$A_3 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + P_4$$

der links-oberste Eintrag von P_4 gleich $-\frac{1}{2}$ sein muss, was ein Widerspruch zur Annahme, dass $P_4 \succeq 0$ ist.

In der Proposition 3.3 haben erkannt, dass die beiden erweiterten Kegelbegriffe im \mathbb{R}^n nur übereinstimmen, wenn der Kegel von n Vektoren erzeugt wird. In Beispiel 3.4 haben wir gesehen, dass bereits Gegenbeispiele im \mathbb{R}^3 zu finden sind. Generell gilt, dass für

mehr als 3 Erzeuger die beiden Kegeldefinitionen \tilde{C}_l und \tilde{C}_c für $C \in \mathbb{R}^3$ nie übereinstimmen, wie wir in Proposition 3.6 zeigen werden. Zunächst benötigen wir noch folgendes Lemma:

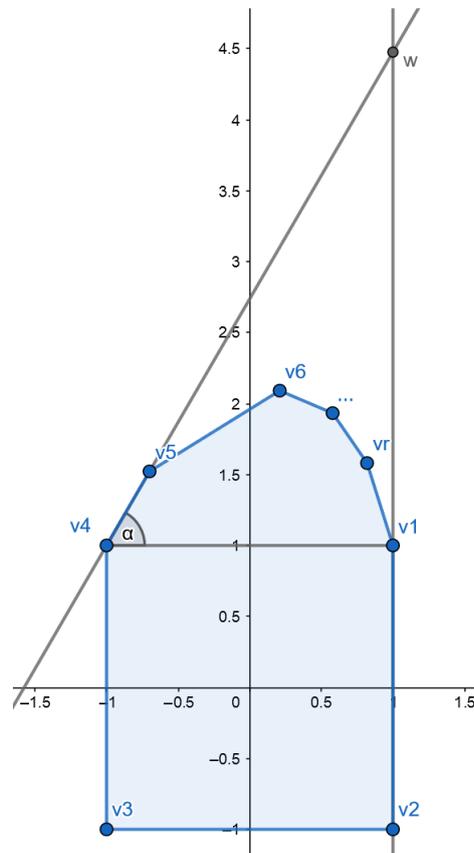
Lemma 3.5. *Wir betrachten den erweiterten Kegel \tilde{C}_c eines reellen, spitzen Kegels $C = \text{cone}(v_1, \dots, v_r) \subset \mathbb{R}^3$ mit nicht-leerem Inneren. Mit Hilfe der Transformation aus 1.25 können wir einen Kegelquerschnitt durch $x_3 = 1$ wie in Abbildung 4 (3.5) erreichen.*

Wir nehmen also an, dass alle Erzeuger des transformierten Kegels in der $x_3 = 1$ Ebene liegen und die Menge aller r Erzeuger die Elemente

$$v_1 = (1, 1, 1) \quad v_2 = (1, -1, 1) \quad v_3 = (-1, -1, 1) \quad v_4 = (-1, 1, 1)$$

enthält.

ABBILDUNG 4. Kegelquerschnitt auf Höhe $x_3 = 1$



Weiters betrachten wir den Kegel $C_w = \text{cone}(v_2, v_3, v_4, w)$ mit einem geeigneten $2 \cdot \tan(\alpha) = k > 0$ und $w = (1, k + 1, 1)$. Dann gilt

$$\tilde{C}_c(v_1, \dots, v_r) \subset \tilde{C}_c(v_2, v_3, v_4, w)$$

Beweis. Wir betrachten also $\underline{A} \in \tilde{C}_c(v_1, \dots, v_r)$. Dann gibt es eine Darstellung mittels positiv semidefiniter Matrizen P_i , sodass

$$\underline{A} = \sum_{i=1}^r P_i \otimes v_i = P_1 \otimes v_1 + \sum_{i=2}^4 P_i \otimes v_i + \sum_{j=5}^r P_j \otimes v_j$$

gilt. Da v_1 durch Konvexkombination aus v_2 und w entsteht und für $j = 5, \dots, r$ die Erzeuger v_j Konvexkombinationen von v_2 , v_4 und w sind, können wir diese Elemente schreiben als

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda v_2 + (1 - \lambda)w \\ v_j &= \lambda_2^j v_2 + \lambda_4^j v_4 + \lambda_w^j w \quad j = 5, \dots, r \end{aligned}$$

wobei alle Koeffizienten zwischen 0 und 1 liegen und $\lambda_2^j + \lambda_4^j + \lambda_w^j = 1$ gilt.

Nun erhalten wir durch einsetzen der konvexen Darstellungen, dass die untere äquivalente Darstellung für \underline{A} existiert.

$$\begin{aligned} \underline{A} &= P_1 \otimes v_1 + \sum_{i=2}^4 P_i \otimes v_i + \sum_{j=5}^r P_j \otimes v_j \\ &= P_1 \otimes (\lambda v_2 + (1 - \lambda)w) + \sum_{i=2}^4 P_i \otimes v_i + \sum_{j=5}^r P_j \otimes (\lambda_2^j v_2 + \lambda_4^j v_4 + \lambda_w^j w) \\ &= (\lambda P_1 + P_2 + \sum_{j=5}^r \lambda_2^j P_j) \otimes v_2 \\ &\quad + P_3 \otimes v_3 \\ &\quad + (P_4 + \sum_{j=5}^r \lambda_4^j P_j) \otimes v_4 \\ &\quad + ((1 - \lambda)P_1 + \sum_{j=5}^r \lambda_w^j P_j) \otimes w. \end{aligned}$$

Da alle auftretenden Koeffizienten vor den Matrizen nicht-negative Zahlen sind und weil $P_i \succeq 0$ ist, sind auch die auftretenden Matrixsummen ebenfalls wieder positiv semidefinit. Daher folgt die Behauptung. \square

Proposition 3.6. *Wir betrachten einen konvexen, spitzen Kegel C im \mathbb{R}^3 , der einen Inneren Punkt besitzt und von $r > 3$ und nicht von weniger als r Elementen erzeugt wird. Dann stimmen die Kegel \tilde{C}_l und \tilde{C}_c nicht überein.*

Beweis. Wir können wie in Lemma 3.5 annehmen, dass die Kegelerzeuger von der Gestalt aus Graphik 3.5 haben, also die Menge der Erzeuger enthält die Vektoren

$$v_1 = (1, 1, 1) \quad v_2 = (1, -1, 1) \quad v_3 = (-1, -1, 1) \quad v_4 = (-1, 1, 1)$$

und deren restliche $(r - 4)$ Vektoren ebenfalls in der $x_3 = 1$ Ebene liegen. Wir betrachten den größeren Kegel C_w aus Lemma 3.5, der von den Vektoren v_2, v_3, v_4 und w erzeugt wird.

In Beispiel 3.4 haben wir gesehen, dass die Pauli-Matrizen

$$\underline{A} = (A_1, A_2, A_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

in dem von v_1, \dots, v_4 erzeugten erweiterten funktionellen Kegel $\tilde{C}_l(v_1, \dots, v_4)$ liegen. Der um w vergrößerte Kegel $\tilde{C}_l(v_2, v_3, v_4, w)$ enthält dann ebenso \underline{A} , denn die schwächere fehlende definierende lineare Ungleichung für $w = (1, 1 + k, 1)$ mit $k > 0$ lautet

$$k \cdot x - 2y + (2 + k)z \geq 0$$

\underline{A} erfüllt also für jedes $k > 0$ diese Bedingung, da die Matrix

$$k \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (2+k) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k \\ k & 4+k \end{pmatrix}$$

für positives k immer positiv semidefinit ist.

Wir zeigen nun, dass \underline{A} nicht im erweiterten konischen Kegel $\tilde{C}_c(v_2, \dots, v_4, w)$ enthalten ist, und damit wegen 3.5 auch nicht in $\tilde{C}_c(v_1, \dots, v_r)$ liegen kann. Nehmen wir also an, dass es doch eine Darstellung

$$\underline{A} = P_2 \otimes v_2 + P_3 \otimes v_3 + P_4 \otimes v_4 + P_5 \otimes w$$

mittels positiv semidefiniter Matrizen P_2, \dots, P_5 gibt. Dann gilt also

$$\begin{aligned} (1) \quad & A_1 = P_2 - P_3 - P_4 + P_5 \\ (2) \quad & A_2 = -P_2 - P_3 + P_4 + (k+1)P_5 \\ (3) \quad & A_3 = P_2 + P_3 + P_4 + P_5. \end{aligned}$$

Betrachten wir die Summe der beiden letzten Gleichungen so erhalten wir

$$(2) + (3) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2P_4 + (k+2)P_5.$$

Da die Koeffizienten vor den Matrizen in der obigen Gleichung beide positiv sind und die Matrizen in den Diagonalen nur nicht-negative Einträge enthalten sein dürfen, folgt, dass die beiden positiv semidefiniten Matrizen P_4 und P_5 der Form

$$P_4 = \begin{pmatrix} p_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} p_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sein müssen. Betrachten wir die Differenz (3) – (1), so ergibt sich

$$(3) - (1) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2P_3 + 2 \cdot \begin{pmatrix} p_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit muss P_3 von der Gestalt

$$P_3 = \begin{pmatrix} x_3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

sein. Wir beobachten, dass wegen dem Minorenkriterium für die positiv Definitheit $x_3 \geq \frac{1}{2}$ gelten muss. Aus Gleichung (1) erkennt man durch ähnliche Überlegungen, dass P_2 die Gestalt

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

mit der Bedingung $x_2 \geq \frac{1}{2}$ haben muss. Aus der dritten Gleichung (3) und den beiden Forderungen $x_3, x_4 \geq \frac{1}{2}$ folgt, dass $P_4 = P_5 = 0$ und $x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$ gelten muss. Also gilt

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad P_4 = P_5 = 0.$$

Aber,

$$(2) \quad -P_2 - P_3 + P_4 + (k+1)P_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq A_2$$

gilt nicht und daher folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 3.7. In Proposition 3.6 haben wir gesehen, dass im \mathbb{R}^3 die beiden Kegeldefinitionen für mehr als 3 Erzeuger nie übereinstimmen. Wir haben dabei ein Gegenbeispiel im Fall von 2×2 Matrizen gefunden. Es folgt dann auch für allgemeine Matrixgrößen, dass die beiden erweiterten Kegeldefinitionen nicht äquivalent sein können. Ein Gegenbeispiel für höhere Matrixdimensionen erhält man zum Beispiel einfach durch Anhängen entsprechender Nullzeilen und Nullspalten an die Pauli-Matrizen.

Wir möchten nun versuchen, uns den Unterschied zwischen den beiden Kegelweiterungen vorzustellen. Wir betrachten dafür wieder den Kegel, welcher durch v_1, v_2, v_3 und v_4 bzw. durch die linearen Funktionale

$$l_1(\underline{x}) = -x + z \geq 0$$

$$l_2(\underline{x}) = -y + z \geq 0$$

$$l_3(\underline{x}) = x + z \geq 0$$

$$l_4(\underline{x}) = y + z \geq 0$$

aus Proposition 3.6 definiert wird. Es sei

$$C := \left\{ \underline{A} = \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a, b \geq 0 \right\} \subseteq \text{Sym}_2^3(\mathbb{R})$$

Wir wollen nun untersuchen, für welche Belegungen von a, b die Menge C ein Teilkegel von \tilde{C}_l bzw. \tilde{C}_c gilt. Zunächst überprüfen wir die linearen Bedingungen

$$\begin{aligned} \pm \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & \pm b \\ \pm b & a \end{pmatrix} \succeq 0 \\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0 \\ - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich sind diese Bedingungen für $a \geq b$ und $a, b \geq 0$ immer erfüllt, wir visualisieren diese in Abbildung 3.1 durch die blaue Fläche mit $a \geq b$. Nun versuchen wir Bedingungen an a, b zu finden, sodass Elemente aus C in \tilde{C}_c liegen. Es muss also

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = P_1 + P_2 - P_3 - P_4$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = P_1 - P_2 - P_3 + P_4$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

gelten. Durch ähnliche Überlegungen wie in 3.6 erhalten wir

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} p_2 & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} p_3 & -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} p_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um eine Darstellung zu finden, müssen wir also untersuchen, für welche $p_1, \dots, p_4 \geq 0$ die Matrizen $P_j \succeq 0$ sind. Wir betrachten also jeweils den links-obersten Eintrag in (1)-(3)

und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

welches äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

ist. Wir suchen also Elemente aus

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

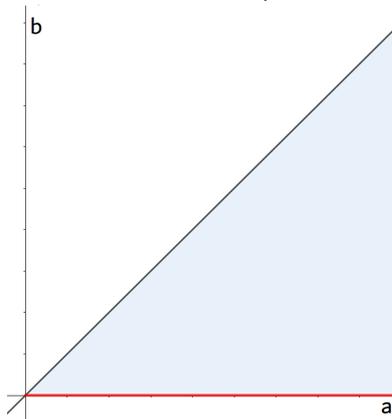
deren Einträge alle positiv sind. Dies ist offensichtlich nur für $\alpha = 0$, der Fall (Vergleiche die 2. und 3. Komponente). Daher haben also die Matrizen P_j die Gestalt

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun erkennen wir also, dass wir nur eine Darstellung mittels positiv semidefiniter Matrizen P_j erhalten können, falls $a \geq 0$ und $b = 0$ gilt. Wir sehen also in Abbildung 3.1 bereits einen Unterschied zwischen \tilde{C}_l und \tilde{C}_c .

ABBILDUNG 5. Unterschied: \tilde{C}_l in blau und \tilde{C}_c in rot



3.2. Verallgemeinerte Kegel in höheren Dimensionen. In 3.6 haben wir den dreidimensionalen Fall behandelt. Wir möchten nun einen Schritt in höhere Dimensionen machen und uns mit dem allgemeinen Fall von spitzen, konvexen Kegeln mit nicht-leerem Inneren im \mathbb{R}^n widmen. Die folgende Proposition 3.8 soll das Hauptresultat für diese Masterarbeit sein und liefert einen konkreten Beweis dafür, dass die beiden Kegelweiterungen nie übereinstimmen können. Interessanterweise entscheidet sich dies auch im \mathbb{R}^n ab Matrixgröße 2. Somit folgt, dass unabhängig von der Dimension des Raumes n , der Anzahl der Erzeuger $r > n$ des nicht simplizialen Kegels und der Größe der Matrizen, dass die beiden Definitionen nicht übereinstimmen können.

Proposition 3.8. *Wir betrachten wieder einen konvexen, spitzen Kegel $C \subset \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren, der von $r > n$ und nicht weniger als r Vektoren erzeugt wird. Dann gilt*

$$\tilde{C}_c \subset \tilde{C}_l.$$

Beweis. Proposition 3.2 liefert $\tilde{C}_c \subseteq \tilde{C}_l$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\tilde{C}_c \subsetneq \tilde{C}_l$ gilt. Wie gewohnt werden wir die Erzeuger mit v_1, \dots, v_r bezeichnen.

Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion über die Dimension n . Für $n = 3$ liefert Proposition 3.6 die gewünschte Aussage. Nehmen wir also an, die Aussage gelte für Kegel im \mathbb{R}^{n-1} .

Da wir einen nicht-simplizialen Kegel im \mathbb{R}^n betrachten, treten nach 1.24 zwei mögliche Fälle auf. Entweder besitzt der Kegel C eine nicht-simpliziale Facette, oder es gibt eine Vertex-figure, welche nicht simplizial ist.

1. Fall: Nehmen wir an, der von den r Vektoren erzeugte Kegel habe eine Facette S , die nicht simplizial im \mathbb{R}^{n-1} ist, also von mehr als $(n-1)$ Vektoren erzeugt wird. Wir können o.B.d.A annehmen, dass diese Facette in der Ebene mit $x_1 = 0$ enthalten ist und von den letzten $m > (n-1)$ Elementen v_{r-m}, \dots, v_r erzeugt wird.

Dann ist diese Facette ein Kegel niedrigerer Dimension und laut Induktionsvoraussetzung stimmen dort die beiden erweiterten Kegelbegriffe nicht überein. Es gibt also ein Element $\underline{A} = (A_2, \dots, A_n) \in \tilde{C}_l$, welches keine Darstellung in $\tilde{C}_c(v_{r-m}, \dots, v_r)$ besitzt. Ergänzen wir nun \underline{A} durch die Nullmatrix und setzen

$$\underline{A} = (0, A_2, \dots, A_n),$$

dann gilt offensichtlich $\underline{A} \in \tilde{C}_l$, da alle definierenden Ungleichungen von dem Matrixtupel \underline{A} erfüllt werden und damit dies auch für das um die Nullmatrix ergänzte Tupel gilt. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass es keine Darstellung

$$\underline{A} = \sum_{i=1}^r P_i \otimes v_i$$

geben kann. Da die Facette $S = C \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ ist, müssen die noch nicht betrachtete Erzeuger v_1, \dots, v_{r-m-1} in der ersten Komponente einen Eintrag ungleich Null mit gleichem Vorzeichen besitzen. Da alle anderen Erzeuger v_{r-m}, \dots, v_n in der $x_1 = 0$ Ebene liegen, sind die ersten Vektoren v_1, \dots, v_{r-m-1} die einzigen Erzeuger, die in der Summe einen Beitrag zur ersten Komponente liefern können. Da in der ersten Komponente des Matrixtupels \underline{A} jedoch die Nullmatrix steht, und die Vorzeichen der ersten Einträge in

v_1 bis v_{r-m-1} immer dasselbe sein muss, folgt aus der Bedingung

$$0 = v_{1,1} \cdot P_1 + \dots + v_{(m-r-1),1} P_{m-r-1},$$

dass $P_1 = \dots = P_{m-r-1} = 0$ sein müssen (Vergleiche Diagonaleinträge). Daher erkennen wir also, dass v_1, \dots, v_{m-r-1} auch für die Darstellung von \underline{A} keine Rolle mehr spielen. Da jedoch auch keine solche Darstellung mittels restlichen v_{r-m}, \dots, v_r existiert, folgt die Behauptung.

Fall 2: Wir gehen wie oben davon aus, dass der Kegel von den Vektoren v_1, \dots, v_r erzeugt wird und es eine nicht simpliziale Vertex-figure im \mathbb{R}^{n-1} ist. Aufgrund einfacher linearer Transformationen bzw. durch Umnumerieren können wir annehmen, dass sich diese Vertex-figure jene zum Punkt v_1 ist und sich in der Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n | x_1 = 0\}$ befindet. Die Erzeuger v_1 und v_2, \dots, v_r werden also durch die Vertex-figure getrennt und wir können ebenfalls annehmen, dass der erste Eintrag von v_1 negativ und die Einträge in der ersten Komponente der v_2, \dots, v_r positiv sind. Wir wechseln nun die Erzeuger des Kegels, indem wir mit entsprechenden positiven Zahlen skalieren, sodass die erste Komponente der Erzeuger v_2, \dots, v_r gleich 1 und die von v_1 gleich -1 ist. Dies ist klarerweise möglich, da Kegel abgeschlossen unter positivem Skalieren sind.

Nun folgt, da die Vertex-figure ein nicht simplizialer Kegel im \mathbb{R}^{n-1} ist, dass diese durch mindestens $n-1$ und maximal durch die r Elemente

$$w_j = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_j \quad j = 2, \dots, r$$

erzeugt wird. Laut Induktionsvoraussetzung können wir nun in dieser Vertex-figure ein Matrixtupel (A_2, \dots, A_n) finden, welches alle Ungleichungen von \tilde{C}_l erfüllt, jedoch keine Darstellung in $\tilde{C}_c(w_2, \dots, w_r)$ besitzt. Wir erweitern nun dieses Matrixtupel wie im ersten Fall durch die Nullmatrix in der ersten Komponente und erhalten ein Matrixtupel

$$\underline{A} = (0, A_2, \dots, A_n) \in \tilde{C}_l.$$

Wir zeigen nun wieder, dass dieses Tupel nicht in $\tilde{C}_c(v_1, \dots, v_r)$ enthalten sein kann. Nehmen wir also an, dem wäre doch so, dann gäbe es positiv semidefinite Matrizen P_j , $j = 1, \dots, r$, sodass

$$(0, A_2, \dots, A_r) = P_1 \otimes v_1 + \dots + P_r \otimes v_r$$

gilt. In der ersten Komponente erkennen wir also, dass

$$0 = -P_1 + P_2 + \dots + P_r$$

wegen den entsprechenden Skalierungen der v_j gelten muss. Somit folgt, dass

$$\begin{aligned} (0, A_2, \dots, A_n) &= (P_2 + \dots + P_r) \otimes v_1 + P_2 \otimes v_2 + \dots + P_r \otimes v_r \\ &= P_2 \otimes (v_1 + v_2) + \dots + P_r \otimes (v_1 + v_r) \\ &= 2P_2 \otimes w_2 + \dots + 2P_r \otimes w_r \end{aligned}$$

Somit folgt, dass $\underline{A} \in \tilde{C}_c(w_2, \dots, w_r)$ liegt, was ein Widerspruch zur Annahme ist. \square

3.3. Anmerkung Operatorsysteme. Abschließend möchten wir noch kurz damit beschäftigen, warum es überhaupt von Interesse ist, sich mit dem obigen Erweiterungen von reellen Kegeln auf Matrixniveau zu beschäftigen. Zugrunde liegt hier die Theorie über Operatorsysteme, welche in vielen Bereichen wie beispielsweise positiv semidefiniten Programmen eine Rolle spielen. Die in meiner Arbeit behandelten Kegelerweiterungen entsprechen im Grunde einen Spezialfall der in [Tobias Fritz, 2017] behandelten Operatorsystemen

Wir stellen also hier kurz Operatorsysteme und deren Erweiterungsmöglichkeiten vor, so wie sie in [Tobias Fritz, 2017] behandelt werden. In [Tobias Fritz, 2017] finden Sie auch einen abstrakteren Beweis für Operatorsysteme, welcher den speziellen reellen Fall aus Proposition 3.8 impliziert.

Ab nun betrachten wir den komplexen Vektorraum \mathbb{C}^n und bezeichnen mit $*$ jene Abbildung, die einem Element dessen konjugiert Komplexes zuordnet. Wir betrachten den Vektorraum als topologischen Raum, indem wir ihn mit der feinsten lokalkonvexen Topologie auf \mathbb{C}^n versehen. Aussagen über Abgeschlossenheit und dergleichen werden sich im Folgenden immer auf diese Topologie beziehen. Mit Index $_h$ bezeichnen wir den \mathbb{R} -Unterraum der hermiteschen Elemente, es gilt also $x^* = x$ für alle $x \in \mathbb{C}_h^n$.

Definition 3.9 (Operatorsystem). Ein abstraktes Operatorsystem auf \mathbb{C}^n ist eine Folge von abgeschlossenen, konvexen und spitzen Kegeln $(C_s)_{s \in \mathbb{N}}$ mit $C_s \subset \text{Mat}_{s \times s}(\mathbb{C})_h$, welche die zwei Bedingungen

- (1) Für $A \in C_s$ und $U \in \text{Mat}_{s \times t}(\mathbb{C})$ folgt, dass $U^*AU \in C_t$
- (2) Für jedes $s \in \mathbb{N}$ hat C_s nicht-leeres Inneres

erfüllt.

Bemerkung 3.10. Bei der zweiten Bedingung reicht es aus, dass C_1 einen inneren Punkt besitzt, dann gilt dies automatisch auch für alle anderen. Es sei x ein innerer Punkt von C_1 und $A \in \text{Mat}_{s \times s}(\mathbb{C})_h$ beliebig. Wir zerlegen A in

$$A = \sum_{i=1}^n v^{(i)} \otimes A_i$$

mit $A_i \in \text{Mat}_{s \times s}(\mathbb{C})_h$ und $v^{(i)} \in V_h$. Da x im Inneren von C_1 liegt, können wir ein λ finden, sodass

$$\pm v^{(i)} + \lambda x \in C_1 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

gilt. Für A_i können wir positiv semidefinite Matrizen $P_i, Q_i \in \text{Mat}_{s \times s}(\mathbb{C})_h$ finden, dass $A_i = P_i - Q_i$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left((v^{(i)} + \lambda x) \otimes P_i + (-v^{(i)} + \lambda x) \otimes Q_i \right) &= \sum_{i=1}^n v^{(i)} \otimes (P_i - Q_i) + \lambda \cdot x \otimes \sum_{i=1}^n (P_i + Q_i) \\ &= \sum_{i=1}^n v^{(i)} \otimes A_i + \lambda \cdot x \otimes \sum_{i=1}^n (P_i + Q_i) \\ &= A + \lambda \cdot x \otimes \sum_{i=1}^n (P_i + Q_i) \in C_s. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\gamma \geq 0$ groß genug, dass $\gamma I_s - \sum_{i=1}^n (P_i + Q_i) \succeq 0$ gilt, so ist

$$\begin{aligned} A + \lambda \gamma x \otimes I_s &= A + \lambda \gamma x \otimes I_s + \lambda \cdot x \otimes \sum_{i=1}^n (P_i + Q_i) - \lambda \cdot x \otimes \sum_{i=1}^n (P_i + Q_i) \\ &= \left(A + \lambda \cdot x \otimes \sum_{i=1}^n (P_i + Q_i) \right) + \lambda x \otimes \left(\gamma I_s - \sum_{i=1}^n (P_i + Q_i) \right) \end{aligned}$$

ebenfalls in C_s enthalten. Und somit ist $x \otimes I_s$ ein Innerer Punkt von C_s

In Bezug auf solche Operatorsysteme stellt sich nun die Frage, inwieweit man ein solches System nach Vorgabe eines Kegels C_1 konstruieren kann. Im einfachsten Fall können wir den Vektorraum $V = \mathbb{C}^n$ der komplexen Zahlen betrachten. Auf Level 1 starten wir also mit einem Kegel $C_1 \subset \mathbb{R}^n$, welcher endlich oder unendlich erzeugt sein kann. Nun bleibt die Frage, inwieweit wir die Erweiterungen C_s wählen müssen um ein Operatorsystem zu erhalten. In [Tobias Fritz, 2017] werden zwei Möglichkeiten vorgestellt, wie man einerseits das größte bzw. kleinste Operatorsystem definieren kann.

Definition 3.11. (Kleinstes und größtes Operatorsystem) Gegeben sei ein abgeschlossener, konvexer und spitzer Kegel $C_1 \in \mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren. Dann ist das größte Operatorsystem über C_1 , jenes mit

$$C_s^{\max} := \{(A_1, \dots, A_n) \in \text{Her}_{s \times s}(\mathbb{C})^n \mid (x^* A_1 x, \dots, x^* A_n x) \in C_1 \text{ für alle } x \in \mathbb{C}^s\}$$

und das kleinste Operatorsystem über C_1 mit

$$C_s^{\min} := \{(A_1, \dots, A_n) = \sum_i P_i \otimes v_i \mid v_i \in C_1, P_i \in \text{Her}_{s \times s}(\mathbb{C}) \text{ mit } P_i \succeq 0\}$$

Wobei wir die übliche Notation $\text{Her}_{s \times s}(\mathbb{C})$ für die Menge der hermiteschen Matrizen der Größe s verwenden.

Bemerkung 3.12. Die obigen Systeme aus 3.11 sind wirklich Operatorsysteme:

- (1) *kleinstes Operatorsystem:* Wir betrachten $(A_1, \dots, A_n) \in C_s^{\min}$ und $U \in \text{Mat}_{s \times t}(\mathbb{C})$ wie oben. Dann ist

$$(U^* A_1 U, \dots, U^* A_n U) = U^* \left(\sum_{i, v_i \in C_1} (P_i \otimes v_i) \right) U = \sum_i (U^* P_i U) \otimes v_i \in C_s^{\min}$$

wegen $U^* P_i U \succeq 0$ für $P_i \succeq 0$.

Da C_s^{\min} einen inneren Punkt besitzt (siehe [Tobias Fritz, 2017]) handelt es sich wirklich um ein Operatorsystem.

- (2) *größtes Operatorsystem:* Ist nämlich $(A_1, \dots, A_n) \in C_s^{\max}$ und $U \in \text{Mat}_{s \times t}(\mathbb{C})$, so ist $y := Ux \in \mathbb{C}^s$ für jedes $x \in \mathbb{C}^t$. Damit ist also

$$(x^* U^* A_1 U x, \dots, x^* U^* A_n U x) = (y^* A_1 y, \dots, y^* A_n y) \in C_t$$

Wir haben oben gesehen, dass C_s^{\min} einen inneren Punkt enthält. Da $C_s^{\min} \subset C_s^{\max}$ hat auch C_s^{\max} einen inneren Punkt.

Bemerkung 3.13. Im Hauptteil dieser Masterarbeit haben wir uns mit Kegelerweiterungen \tilde{C}_l und \tilde{C}_c für fixierte Matrixgrößen beschäftigt. Ausgang war dabei ein endlich erzeugter, spitzer konvexer Kegel mit nicht-leerem Inneren, der auf ein Matrixlevel mit

Matrixgröße s gehoben wurde. Betrachten wir nun nicht nur reelle, sondern komplexe Matrizen und statt einen solchen Kegel mit fixierter Matrixgröße eine Folge von Kegel mit immer größer werdender Matrixdimension, so erhalten wir einen Spezialfall eines solchen Operatorsystems.

$$C_{l,s} = \{(A_1, \dots, A_n) \in \text{Her}_{s \times s}(\mathbb{C})^n \mid l_i(A_1, \dots, A_n) \succeq 0, \text{ für alle } i = 1, \dots, m\}$$

$$C_{c,s} = \left\{ \sum_i^r P_i \otimes v_i \mid P_i \succeq 0 \right\}$$

$(C_{l,s})_{s \in \mathbb{N}}$ entspricht dann dem maximalen Operatorsystem aus Definition 3.11 und $(C_{c,s})_{s \in \mathbb{N}}$ dem minimalen $(C_s^{\min})_{s \in \mathbb{N}}$

Beweis. Dass $C_{c,s}$ dem Kegel C_s^{\min} entspricht ist klar. Sei nun $\underline{A} \in C_{l,s}$ und $x \in \mathbb{C}^s$ beliebig. Wegen

$$(3) \quad x^* l_i(\underline{A}) x = l_i(x^* \underline{A} x) \geq 0$$

folgt, dass auch $x^* \underline{A} x \in C_1$. Umgekehrt für $\underline{A} \in C_s^{\max}$ ist $x^* \underline{A} x \in C$, muss daher also alle definierenden Ungleichungen l_i des Kegels C_1 erfüllen. Wegen Gleichung (3) folgt nun, dass $l_i(\underline{A}) \succeq 0$. \square

Bemerkung 3.14. Man kann zeigen, dass C_s^{\max} wirklich das größte Operatorsystem unter allen Operatorsystemen $(D_s)_{s \in \mathbb{N}}$ mit $D_1 \subset C_1$. Analog für C_s^{\min} .

Nun ist es natürlich interessant zu untersuchen, wann minimales bzw. maximales Operatorsystem übereinstimmen oder auch ob dies ab einem bestimmten Level s der Fall ist. In dieser Arbeit haben konkret ein Gegenbeispiel konstruiert und dadurch bewiesen, dass bereits ab Matrixgröße 2 die beiden Kegelerweiterungen eines spitzen, endlich erzeugten konvexen Kegels $C \in \mathbb{R}^n$ mit innerem Punkt und mehr als n Erzeuger nicht übereinstimmt. In der Sprache von Operatorsystemen bedeutet dies also, dass bereits ab Level 2 ein Unterschied zwischen minimalem und maximalen Operatorsystem besteht.

LITERATUR

- [Barvinok, 2002] Barvinok, A. (2002). *A course in convexity*, volume 54. Oxford University Press.
- [Dür, 2014] Dür, A. (2014). *Skriptum zur Vorlesung Optimierung*. Universität Innsbruck.
- [Florian Jarre, 2013] Florian Jarre, J. S. (2013). *Optimierung*. Springer-Verlag.
- [Huber, 2018] Huber, B. (2018). *Polyeder und lineare Optimierung mit ihren Anwendungen im Schulunterricht*. Universität Innsbruck.
- [Jonas Gomes, 2012] Jonas Gomes, Luiz Velho, M. C. S. (2012). *Computer Graphics: Theory and Practice*. CRP Press.
- [Plaumann, 2012] Plaumann, D. (2011-2012). *Vorlesung über Konvexität*. Skriptum zur Vorlesung. Universität Konstanz.
- [Tobias Fritz, 2017] Tobias Fritz, Tim Netzer, A. T. (2017). *Spectrahedral Containment and Operator Systems with Finite-Dimensional Realization*. SIAM. J. APPL. ALGEBRA GEOMETRY.
- [Ziegler, 2002] Ziegler, G. M. (2002). *Lecture on polytopes*. 388. Springer-Verlag.