

Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2010/11
2. Dezember 2010
Lösungen

- 46) *Wie kann man nach Wahl eines Nullpunktes die Zeichenebene in natürlicher Weise als Vektorraum betrachten?*

Skriptum Kapitel 4, Par. 1.

Sei E dieser Vektorraum. Welche Untervektorräume von E gibt es? Skizzieren Sie diese Untervektorräume.

$\{0\}$, Geraden durch 0 , E

Beschreiben Sie geometrisch die Bedingungen, dass ein n -Tupel von Punkten linear unabhängig ist, dass ein n -Tupel von Punkten den Vektorraum E erzeugt und dass ein n -Tupel von Punkten eine Basis von E ist!

Da E zweidimensional ist, kann ein n -Tupel nur für $n \leq 2$ bzw. $n \geq 2$ bzw. $n = 2$ linear unabhängig bzw. ein Erzeugendensystem bzw. eine Basis sein.

(v_1) ist genau dann linear unabhängig, wenn $v_1 \neq 0$ ist.

(v_1, v_2) ist genau dann linear unabhängig, wenn $0, v_1, v_2$ nicht auf einer Geraden liegen.

(v_1, \dots, v_n) ist genau dann ein Erzeugendensystem, wenn $0, v_1, \dots, v_n$ nicht auf einer Geraden liegen.

(v_1, v_2) ist genau dann eine Basis, wenn (v_1, v_2) linear unabhängig oder ein Erzeugendensystem ist (cf. Satz 100).

Wählen Sie drei vom Nullpunkt verschiedene Punkte A, B, C und zeichnen Sie $(A + B) + C$, $A + (B + C)$, $2A$ und $A - B$!

- 47) *Was ist ein affiner Unterraum eines Vektorraums?*

Siehe Definition 133.

Was ist eine Gerade in einem Vektorraum?

Eine Gerade ist ein eindimensionaler affiner Unterraum.

Es sei G die Gerade in \mathbb{R}^2 mit Aufpunkt $(2, -3)$, die zur Geraden durch $(0, 0)$ und $(1, 2)$ parallel ist. Es sei H die Gerade in \mathbb{R}^2 mit Aufpunkt $(0, 1)$, die zur Geraden durch $(0, 0)$ und

$(3, 4)$ parallel ist. Berechnen Sie den Durchschnitt von G und H .

Es ist $G = \{(2, -3) + c(1, 2) \mid c \in \mathbb{R}\}$ und $H = \{(0, 1) + d(3, 4) \mid d \in \mathbb{R}\}$. Gesucht sind reelle Zahlen c und d mit

$$(2, -3) + c(1, 2) = (0, 1) + d(3, 4).$$

Das Paar (c, d) ist eine Lösung des Systems linearer Gleichungen

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right),$$

also ist $(c, d) = (10, 4)$. Der Durchschnitt von G und H ist $\{(2, -3) + 10(1, 2)\} = \{(12, 17)\}$.

Berechnen Sie reelle Zahlen a, b, c, d, e, f so, dass

$$G = \{(x_1, x_2) \mid ax_1 + bx_2 = c\}$$

und

$$H = \{(x_1, x_2) \mid dx_1 + ex_2 = f\}$$

ist. (Dabei sollen die Zahlen a, b, d, e eigentlich nicht berechnet, sondern direkt hingeschrieben werden). Was ist dann

$\{(x_1, x_2) \mid ax_1 + bx_2 = 0\}$ und $\{(x_1, x_2) \mid dx_1 + ex_2 = 0\}$? Berechnen Sie schließlich die Lösungsmenge des durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ und die Spalte $\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ gegebenen Systems linearer Gleichungen.

Es ist $G = \{(2, -3) + c(1, 2) \mid c \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 + (-1)x_2 = 2.2 + (-1).(-3) = 7\}$ und $H = \{(0, 1) + d(3, 4) \mid d \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2) \mid 4x_1 + (-3)x_2 = 4.0 + (-3).(1) = -3\}$.

Die Mengen $\{(x_1, x_2) \mid 2x_1 + (-1)x_2 = 0\}$ und $\{(x_1, x_2) \mid 4x_1 + (-3)x_2 = 0\}$ sind die zu G und H parallelen Geraden durch 0. Die Matrixform des Gleichungssystems

$$2x_1 + (-1)x_2 = 7, \quad 4x_1 + (-3)x_2 = -3$$

ist

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right),$$

die eindeutig bestimmte Lösung davon ist $(12, 17)$. (Wir haben nun den Schnittpunkt von G und H mit Hilfe ihrer impliziten Formen berechnet).

- 48) Wie kann man (ähnlich wie in Aufgabe 46) nach Wahl eines Nullpunktes den „Anschauungsraum“ in natürlicher Weise als Vektorraum betrachten?

Skriptum Kapitel 4, Par. 1.

Sei V dieser Vektorraum. Welche Untervektorräume von V gibt es? Skizzieren Sie diese Untervektorräume.

$\{0\}$, Geraden durch 0, Ebenen durch 0, V

Beschreiben Sie geometrisch die Bedingungen, dass ein n -Tupel von Punkten linear unabhängig ist, dass ein n -Tupel von Punkten den Vektorraum V erzeugt und dass ein n -Tupel von Punkten eine Basis von V ist!

Da V dreidimensional ist, kann ein n -Tupel nur für $n \leq 3$ bzw. $n \geq 3$ bzw. $n = 3$ linear unabhängig bzw. ein Erzeugendensystem bzw. eine Basis sein.

(v_1) ist genau dann linear unabhängig, wenn $v_1 \neq 0$ ist.

(v_1, v_2) ist genau dann linear unabhängig, wenn $0, v_1, v_2$ nicht auf einer Geraden liegen.

(v_1, v_2, v_3) ist genau dann linear unabhängig, wenn $0, v_1, v_2, v_3$ nicht auf einer Ebene liegen.

(v_1, \dots, v_n) ist genau dann ein Erzeugendensystem, wenn $0, v_1, \dots, v_n$ nicht auf einer Ebene liegen.

(v_1, v_2, v_3) ist genau dann eine Basis, wenn (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig oder ein Erzeugendensystem ist (cf. Satz 100).

- 49) Stellen Sie die Gerade in $\mathbb{R}^{3 \times 1}$, die man als Durchschnitt der Ebenen

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}, x + y - 2z = 3 \right\}$$

und

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

erhält, in Parameterform und in impliziter Form dar.

Liegt ein Tripel P in der zweiten Ebene, dann gibt es reelle Zahlen s, t so, dass $P = (s - 2t, 1 + 2s + t, 1 - s)$ ist. Dieses

Tripel liegt genau dann in der ersten Ebene, wenn $(s - 2t) + (1 + 2s + t) - 2(1 - s) = 3$ ist, also $t = 5s - 4$ ist. Also ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (5s-4) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

die Parameterform des Durchschnitts der zwei Geraden.

Die Dimension einer Geraden ist 1, daher sind zwei Gleichungen (mit drei Unbekannten) für die implizite Form erforderlich.

Diese können direkt aus der Parameterform abgelesen werden:

$$7x + 9y = 7 \cdot 8 + 9 \cdot (-3) = 29, \quad -x + 9z = -8 + 9 \cdot 1 = 1.$$

- 50) Wir betrachten den „Anschauungsraum“ nach Wahl eines Nullpunktes 0 als Vektorraum. Das Punktetripel (P, Q, R) sei eine Basis dieses Vektorraums. Welche Koordinatenspalten haben die Punkte Q , $2P - Q$, $P + 2Q + 3R$ bezüglich dieser Basis?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass der Durchschnitt der Ebenen durch P , Q und R und durch 0 , $\frac{1}{3}(P + Q)$ und $\frac{1}{2}(Q - R)$ eine Gerade ist und berechnen Sie eine Parameterform davon.

Die Parameterformen der zwei Ebenen sind $\{P + s(Q - P) + t(R - P) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ und $\{\frac{1}{3}a(P + Q) + \frac{1}{2}b(Q - R) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Ist ein Punkt im Durchschnitt dieser zwei Ebenen enthalten, dann gibt es reelle Zahlen a, b, s, t mit

$$P + s(Q - P) + t(R - P) = \frac{1}{3}a(P + Q) + \frac{1}{2}b(Q - R),$$

also

$$(1 - s - t)P + sQ + tR = \frac{1}{3}aP + \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)Q - \frac{1}{2}bR.$$

Weil (P, Q, R) eine Basis ist, folgt daraus

$$1 - s - t = \frac{1}{3}a, \quad s = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b, \quad t = -\frac{1}{2}b,$$

somit muss $t = \frac{1}{2} - s$ sein. Daher ist die Parameterform des Durchschnittes der zwei Ebenen gleich

$$\left\{ P + s(Q - P) + \left(\frac{1}{2} - s\right)(R - P) \mid s \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{2}(P + R) + \mathbb{R}(Q - R).$$

Berechnen Sie die Koordinaten (bezüglich der Basis (P, Q, R)) des Schnittpunktes der Geraden durch 0 und $2P + Q + R$ mit der Ebene durch P, Q und R .

Die Parameterform der Ebene ist $\{P + s(Q - P) + t(R - P) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$, die Parameterform der Geraden ist $\mathbb{R}(2P + Q + R)$. Wir suchen reelle Zahlen c, s, t mit $P + s(Q - P) + t(R - P) = c(2P + Q + R)$. Weil (P, Q, R) eine Basis ist, bedeutet das, Zahlen c, s, t mit $1 - s - t = 2c, s = c, t = c$ zu finden. Also: $c = \frac{1}{4}$ und der Schnittpunkt ist $\frac{1}{4}(2P + Q + R)$.

- 51) *Es seien a, b, c, d und a', b', c', d' reelle Zahlen mit $c \neq 0$ und $c' \neq 0$. Zeigen Sie: Die Mengen*

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}, ax + by + cz = d \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}, a'x + b'y + c'z = d' \right\}$$

sind Ebenen in $\mathbb{R}^{3 \times 1}$. Sie sind genau dann parallel, wenn die Tripel (a, b, c) und (a', b', c') linear abhängig sind.

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ist ein affiner Unterraum. Die Dimension der zwei gegebenen Lösungsmengen ist $3 - \text{rg}((a \ b \ c))$ bzw. $3 - \text{rg}((a' \ b' \ c'))$. Weil $c \neq 0$ bzw. $c' \neq 0$ ist, ist der Rang der Zeile $(a \ b \ c)$ bzw. $(a' \ b' \ c')$ gleich 1, die Dimension der Lösungsmengen also gleich 2. Daher sind die zwei Mengen Ebenen. Diese sind genau dann parallel, wenn die Lösungsmengen der entsprechenden homogenen Gleichungen $ax + by + cz = 0$ und $a'x + b'y + c'z = 0$ gleich sind. Das bedeutet aber, dass die Stufenformen von $(a \ b \ c)$ und $(a' \ b' \ c')$ gleich sind. Die Stufenform einer Zeile erhält man aber durch Multiplikation der Zeile mit einer Zahl $\neq 0$.