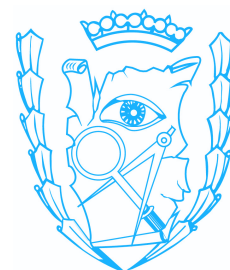




UNIVERSIDAD DE MURCIA
Facultad de Matemáticas



Trabajo Fin de Grado
Superficies regladas
Eduardo Lucas Marín

Grado en Matemáticas


2016/17

Foto de portada: **Museo Soumaya de Plaza Carso** (México D.F., México).
Fuente: commons.wikimedia.org/wiki/File:Museo_Soumaya_Plaza.jpg

Declaración de originalidad

Eduardo Lucas Marín, autor del TFG "Superficies regladas", bajo la tutela de la profesora D^ª María de los Ángeles Hernández Cifre, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 11 de julio de 2017



Firmado: Eduardo Lucas Marín

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.



Índice general

Pabellón Philips Expo 1958 (Bruselas, Bélgica). Fuente: s-media-cache-ak0.pinimg.com/originals/ad/b9/c6/adb9c6cd124a0181feddb61e8ef10c54.jpg

Resumen	III
Abstract	VII
1 Introducción	1
1.1 Ejemplos	2
2 Propiedades de las superficies regladas	9
2.1 La línea de estricción	9
2.2 El parámetro de distribución	11
2.3 Superficies desarrollables	17
3 Clasificaciones de superficies regladas	23
3.1 Curvatura gaussiana nula	24
3.1.1 Clasificación de superficies desarrollables	24
3.1.2 Clasificación de superficies regulares planas y completas	25
Líneas de curvatura sobre puntos parabólicos	26
Curvas asintóticas sobre puntos parabólicos	28
Clasificación de superficies planas completas	32
3.2 Curvatura media nula	36
3.2.1 Sobre superficies minimales	37
3.2.2 Caracterizando las superficies minimales regladas	39

3.3	Clasificación de superficies doblemente regladas	41
3.3.1	Superficies generadas por un trío de rectas	42
3.3.2	Hiperboloide de una hoja y paraboloides hiperbólico	49
	Bibliografía	53
	Índice de figuras	55
	Índice alfabético	57



Resumen

Iglesia de St. Aloysius (Jackson, Nueva Jersey). Fuente: www.metalconstruction.org/sysimg/StAIs%20Aerial%20view.JPG

En todas las ramas de las matemáticas y sus correspondientes objetos de estudio existen ciertas familias de tales objetos que, bien por su relevancia histórica, por sus apariciones en otros campos de la ciencia o la sociedad, o bien por su propio interés, han recibido una mayor atención. Estos objetos tienen en consecuencia una teoría más rica y vasta que el resto. Por ejemplo, en geometría de superficies, una de las familias más estudiadas es la de las superficies de curvatura (gaussiana o media) constante, en particular las superficies planas y las superficies minimales. Otra de estas familias destacadas es la de las *superficies regladas* que estudiaremos en este trabajo, es decir, superficies en las que por todo punto pasa al menos una recta contenida en la superficie. De hecho, estas superficies se pueden avistar fácilmente en numerosas obras arquitectónicas.

Estudiaremos las superficies regladas dentro del contexto de las superficies regulares. Esto nos permite imaginar las superficies regladas como la traza resultante de desplazar una recta mediante un movimiento rígido en el espacio. En ocasiones éstas presentarán autointersecciones o puntos donde no exista el plano tangente, lo que llamaremos *puntos singulares*. Una de las tareas que realizaremos será analizar dónde pueden localizarse tales puntos en las superficies regladas.

Comenzaremos introduciendo las superficies regladas en el marco de trabajo iniciado en el grado. Para ello usaremos las habituales parametrizaciones de este tipo de superficies, que consisten en fijar una curva en el espacio que denominaremos *directriz*, y en cada punto de ella, adjuntar una recta que llamaremos *generatriz*. Tras esto, pasaremos a ver algunos de los ejemplos más notables. Muchos de ellos serán muy relevantes en secciones posteriores del trabajo, razón por la cual conviene enfatizar su estudio.

Seguidamente daremos paso al segundo capítulo, donde realizaremos un estudio de las propiedades características básicas de las superficies regladas. Será necesario imponer ciertas condiciones para obtener los resultados habituales de esta teoría, concretamente, exigiremos que las generatrices no sean constantes en ningún abierto, lo que denominaremos una *superficie no cilíndrica*. De este modo, cuando los ceros de la derivada de la dirección de las generatrices sean aislados, bastará fragmentar la superficie y aplicar el estudio a cada fragmento. El caso en que los ceros se acumulen no lo trataremos en este trabajo.

Las condiciones anteriores no son demasiado restrictivas, y veremos que, bajo ellas, se cumple una propiedad muy interesante. Resulta que existe una directriz muy particular, que será única y no dependerá de la parametrización, verificando que su intersección con todas las generatrices es perpendicular. Esta directriz se denotará por *línea de estricción* y será muy útil usarla como directriz para obtener resultados.

A los puntos de la superficie que están sobre la traza de la línea de estricción los llamaremos *puntos centrales*.

Resulta, además, que la línea de estricción es el lugar geométrico de los puntos de la superficie donde las generatrices son más cercanas. Es decir, tomando dos generatrices arbitrarias y los puntos donde se alcanza la mínima distancia, y luego tomando límites cuando una generatriz tiende a otra, se obtienen justamente los puntos centrales.

A continuación, probaremos la existencia y unicidad de una herramienta que será crucial para el estudio posterior de las superficies regladas, una función escalar que se conoce como *parámetro de distribución*. La deduciremos en base a razonamientos analíticos; sin embargo, luego veremos que tiene una interesante interpretación geométrica. Resulta que si medimos, dadas dos generatrices arbitrarias, su distancia y el ángulo que determinan, y calculamos el límite del cociente (en ese orden) cuando se acercan, obtendremos el parámetro de distribución. Observemos que en cada punto, el plano tangente a la superficie ha de contener necesariamente la generatriz que pasa por ese punto, de modo que la única variación que puede tener el plano conforme nos movemos por una generatriz es girar sobre ella. Debido a esto, resultará que el parámetro de distribución mide el inverso de la velocidad a la que rota el plano tangente conforme avanzamos por una generatriz.

Esta herramienta nos permitirá probar numerosas propiedades. Por ejemplo, veremos que los puntos singulares han de ser, necesariamente, puntos centrales. Veremos además que la curvatura de Gauss de una superficie reglada ha de ser no positiva, y caracterizaremos cuándo se anula en términos del parámetro de distribución. Además, sobre cada generatriz, veremos cuándo la curvatura de Gauss es continua, así como que ésta alcanza un máximo en el punto central, que tiende a cero al avanzar sobre la generatriz, y que es simétrica sobre cada generatriz respecto del punto central.

Introduciremos para concluir el capítulo las *superficies desarrollables*, que son las superficies regladas que, intuitivamente, se pueden aplanar sin deformarlas ni distorsionarlas. Naturalmente, veremos que son localmente isométricas al plano. Caracterizaremos además las superficies desarrollables como las superficies regladas con curvatura de Gauss nula, las superficies regladas con parámetro de distribución nulo, y las superficies regladas tales que el plano tangente es constante a lo largo de cada generatriz.

Daremos entonces paso al capítulo tercero, cuyo objetivo será clasificar las superficies regladas atendiendo a diversos criterios. Será el capítulo con mayor contenido del trabajo, y necesitaremos en ocasiones numerosos resultados de teoría general de superficies que, por simplicidad o por el hecho de que son transversales a nuestro objetivo, mencionaremos sin demostración.

Comenzaremos con una clasificación muy sencilla, viendo que las superficies regladas *de revolución* se reducen a uniones de planos, cilindros, conos e hiperboloides de una hoja. Tras esto, acudiremos a la noción de curvatura de Gauss. Calentaremos viendo que las superficies regladas con curvatura de Gauss nula, o como ya sabemos, las superficies desarrollables, han de ser necesariamente una unión de fragmentos de planos, cilindros, conos y superficies tangentes a curvas (introduciremos esta superficie en el primer capítulo y veremos cuándo es una superficie regular). De hecho, luego reforzaremos este resultado viendo cómo son tales fragmentos.

Pasaremos luego a clasificar las superficies *completas* con curvatura de Gauss nula. Será un camino más largo, pero iremos construyendo poco a poco un atractivo tejido teórico que nos hará vislumbrar cómo aparecen las rectas, para concluir que, efectivamente, han de ser necesariamente superficies regladas. Comenzaremos viendo que una superficie plana está compuesta por puntos parabólicos y planos, donde el conjunto de puntos parabólicos es abierto en la superficie y el de los planos cerrado. Veremos que por cada punto parabólico pasa una única curva asintótica. Necesitaremos realizar un estudio previo de las líneas de curvatura, que al aplicarlo a los puntos parabólicos nos permitirá estudiar las curvas asintóticas. Observaremos que siempre podemos parametrizar una superficie de manera que las curvas coordenadas sean líneas de curvatura, lo cual será crucial para el estudio posterior pues conlleva un buen comportamiento de los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales.

Tras esto, probaremos que esta única curva asintótica ha de ser un segmento abierto de recta, y que además no puede tener puntos planos. Luego veremos que la frontera común entre los dos tipos de puntos es una unión de segmentos de rectas. Finalmente, llegaremos al colofón con el teorema final, donde veremos que por los puntos planos también pasan segmentos de rectas contenidos en la superficie, y que bajo la hipótesis de completitud los segmentos deben ser siempre rectas completas, llegando a que la superficie es reglada, como queríamos. De hecho, veremos además que todas las generatrices han de ser paralelas, con lo cual, concluiremos que las únicas superficies completas con curvatura de Gauss nula son los planos y los cilindros.

Después, clasificaremos las superficies regladas con curvatura media nula, es decir, las *superficies regladas minimales*. Veremos que únicamente el plano y el helicoide conforman esta categoría. La clave estribará en una sorprendente propiedad, concretamente, en que dada una superficie reglada minimal, todo par de generatrices verifica que son simétricas respecto de una generatriz intermedia, que llamaremos *línea media*. Para explotar esto a nuestro favor, trabajaremos con conjuntos de generatrices que sean densos en las superficies, algo que llamaremos *marcos*. Por continuidad, un marco determina unívocamente una superficie regular. Así pues, el esquema de la prueba consistirá en construir un marco de la superficie reglada minimal en cuestión, usando como generatrices líneas medias y un proceso iterativo, para luego terminar viendo que el marco resultante corresponde al de un plano o un helicoide.

Será necesario para lo anterior presentar algunos resultados generales de superficies minimales. Concretamente, como las superficies minimales se pueden caracterizar por el hecho de que sus parametrizaciones son armónicas bajo ciertas condiciones que precisaremos, esto nos permitirá extender un par de principios sobre funciones analíticas reales, que serán cruciales para la prueba del teorema.

Finalmente, clasificaremos las *superficies doblemente regladas*, es decir, aquéllas tales que por cada punto pasan dos rectas distintas. Es bien conocido, aunque lo veremos en los ejemplos del capítulo introductorio, que el hiperboloide de una hoja y el paraboloides hiperbólico son superficies doblemente regladas. Lógicamente, el plano también lo es. En esta sección veremos que, de hecho, no hay más que éstas, lo cual es también bastante asombroso.

Para ello, prepararemos una base teórica basada en el concepto que denominaremos *superficies generadas por un trío de rectas*. Éstas son superficies definidas como el conjunto de rectas coplanarias con tres rectas dadas previamente que se cruzan dos a dos. Probaremos que el conjunto así definido es una superficie regular. De hecho, veremos que tal superficie ha de ser, necesariamente, un paraboloides hiperbólico o un hiperboloide de una hoja, en algún sistema de coordenadas afines. Para ello, distinguiremos según sean los vectores directores de las tres rectas coplanarias o no, respectivamente. Tras esto, se probará que todas las rectas del conjunto verifican las ecuaciones canónicas correspondientes a las superficies anteriores en una cierta base, que se hallará explícitamente en cada caso. Usaremos una serie de propiedades de las generatrices de tales superficies para culminar el resultado.

Naturalmente explotaremos esto viendo que toda superficie doblemente reglada ha de estar generada por un cierto trío de rectas que se cruzan dos a dos. Como consecuencia de esta clasificación se desprendería un resultado interesante, el hecho de que no existen *superficies triplemente regladas* que no sean planas. Sin embargo, nosotros tendremos que probar esto independientemente pues lo necesitaremos para el resultado. La idea, en esencia, será que cuando por cada punto pasan tres rectas, se pueden formar triángulos en la superficie tales que sus interiores están contenidos en ella, obteniendo así regiones planas. Con este potente resultado concluiremos el trabajo.



Abstract

Hotel Casino de la Selva (Cuernavaca, México). Fuente: www.zonacentronoticias.com/wp-content/uploads/2013/05/image505.jpg

In every field of mathematics and their respective objects of study there are certain families of such objects that, because of their historical relevance, their appearances in other disciplines of science or society, or their own interest, have received a greater attention. These objects have, in consequence, a far richer and vaster theory than the rest. For instance, in geometry of surfaces, one of the most studied families is that of surfaces with constant (Gaussian or mean) curvature. In particular, flat and minimal surfaces. Another of these prominent families is the one of *ruled surfaces* which we will study in this text, that is, surfaces such that through every point passes a straight line contained in the surface. In fact, these surfaces can be easily seen in numerous architectural constructions.

We will study ruled surfaces in the context of regular surfaces. This allows us to think of ruled surfaces as the trace resulting from moving a straight line in space. Sometimes these surfaces will present self intersections or points where the tangent plane does not exist, which we will call *singular points*. One of the tasks we will accomplish consists in analyzing where such points might be located in a ruled surface.

We begin by introducing ruled surfaces within the framework started in the degree in Mathematics. For this, we will use the usual parametrizations for this type of surfaces, which consist in fixing a curve in the space denoted by *directrix*, and attaching a straight line in each point of it, called a *ruling* or *generatrix*. After this, we will proceed to see some of the most notable examples. Several of them will be of particular relevance in later sections of the text, and for this reason it will be convenient to emphasize its study.

Subsequently, in the second chapter, we will perform a study of the basic properties of ruled surfaces. It will be necessary to impose certain conditions in order to obtain the classical results of this theory. Specifically, we will require the rulings not to be constant in any open set, which we will call a *non-cylindrical surface*. In this way, whenever the zeros of the derivative of the direction of the ruling are isolated, we can just fragment the surface and apply the previous study to each piece. The case whether the zeros have cluster points will not be treated here.

The previous conditions are not too restrictive, and we will see that under them, we have particularly interesting properties. Concretely, there exists a unique directrix which does not depend on the initial parametrization of the surface, verifying that it intersects all rulings perpendicularly. We will denote this directrix by *line of striction*, and it will be very useful to use it as directrix in order to obtain results. The points of the surface located on the trace of the line of striction are called *central points*.

It turns out that the line of striction is also the locus of points of the surface where rulings are the closest to each other. This is, taking two arbitrary rulings and the point where the minimum distance is reached, and then taking limits as one ruling tends to the other one, we obtain precisely the central points.

Next, we will prove the existence and uniqueness of a tool that will be crucial for the succeeding study of ruled surfaces, a scalar function known as *distribution parameter*. We will derive it analytically, however, we will later see it has a striking geometrical interpretation. It turns out that, given two rulings, if we measure their distance and the angle they determine, and then take the limit of the ratio of such quantities (in that order) when the rulings get close, we obtain the parameter of distribution. Observe that in each point of the surface, the tangent plane must necessarily contain the ruling that passes through that point. Thus, the only possible variation that the plane can have when it moves along a ruling is to rotate around it. Consequently, the parameter of distribution measures the reciprocal of the velocity at which the tangent plane rotates around a ruling as we move along it.

This tool will allow us to prove numerous properties. For example, we will see that all singular points must necessarily be central. In addition, we will see that the Gaussian curvature in a ruled surface must always be non-positive, and we will characterize when it becomes zero in terms of the parameter of distribution. Furthermore, along each ruling, we will study when the gaussian curvature is continuous, that it reaches a maximum in the central point, that it vanishes at infinity, and that it is symmetrical with respect to the central point.

We will conclude the chapter by introducing *developable surfaces*, which are ruled surfaces that, intuitively, can be flattened without distortion. Naturally, we will see that they are locally isometric to the plane. We will characterize these surfaces as those ruled surfaces with zero Gaussian curvature, as well as those ruled surfaces with null parameter of distribution, and those ruled surfaces in which the tangent plane is constant along any ruling.

This will lead us to the third and final chapter of the text, whose purpose is to classify ruled surfaces according to several criteria. It will be the chapter having the most content, and we will often need various results from the general theory of surfaces which, for the sake of simplicity or due to them being transversal to our goal, we will only mention without proof.

We will commence with a simple classification, in which we will see that all *ruled surfaces of revolution* must be unions of planes, cylinders, cones and hyperboloids of one sheet. After this, we will resort to the notion of Gaussian curvature. We will set off by proving that all flat ruled surfaces, or as we already know, all developable surfaces, are unions of fragments of planes, cylinders, cones and tangent developables (we will present this example in the first chapter and study when it is a regular surface). In fact, we will strengthen this result by seeing how those fragments are.

We then move on to classifying *regular complete surfaces* with zero Gaussian curvature. It will be a longer journey, but we will steadily build an attractive theoretical tissue that will allow us to glimpse the straight lines that appear in the surface, to finally conclude that they must effectively be ruled surfaces. We will first see that flat surfaces must necessarily be composed only by flat and parabolic points, where the parabolic points form an open set in the surfaces and the flat ones a closed set. We will see that through each parabolic point there passes exactly one asymptotic curve. We will previously need to perform a study on lines of curvature, which, when applied to parabolic points, allows us to study asymptotic curves. We will observe that we can always parametrize a surface in a way that the two coordinate curves are lines of curvature, which will be crucial for our later study as it implies a particularly good behaviour of the coefficients of the first and second fundamental forms.

After this, we will prove that the only asymptotic curve passing through any parabolic point must necessarily be an open segment of a straight line, which furthermore cannot contain flat points. Subsequently, we will see that the common boundary of both types of points is a union of segments of straight lines. Finally, we prove in the main theorem that through flat points there are also straight segments contained in the surface, and that under the hypothesis of completeness, all segments must be the entire straight lines. This, of course, implies that the surface is ruled, just as we wanted. Moreover, we will see that all rulings

must necessarily be parallel, from which we conclude that any flat complete surface is either a plane or a cylinder.

We will then proceed to classify ruled surfaces with identically zero mean curvature, that is, *minimal ruled surfaces*. We will prove that they reduce only to the plane and the helicoid. The key point will lie in a rather remarkable property, specifically, that in any minimal ruled surface, every pair of rulings are symmetric with respect to an intermediate ruling, which we will call *midline*. In order to exploit this, we will work with sets of rulings that are dense in the surface, something called *frame*. Clearly, continuity implies that a frame uniquely determines a regular surface. Hence, the proof will consist in constructing a frame corresponding to a minimal ruled surface, which we can do by taking midlines in an iterative process, and then finishing by seeing that it corresponds to the frame of a plane or a helicoid.

It will be needed first to present some general results in minimal surface theory. Concretely, since minimal surfaces are characterized by the fact that their parametrizations are harmonic under some conditions that we will specify, this will allow us to extend a couple of principles for real analytic functions to the context of minimal surfaces, which will be crucial for the proof.

Finally, we will classify *doubly ruled surfaces*, that is, surfaces such that through every point there pass two different straight lines contained in the surface. It is well known, although we will see it in the introductory examples, that both the hyperboloid of one sheet and the hyperbolic paraboloid are doubly ruled surfaces. Trivially, the plane is also doubly ruled. In this section we will prove that, in fact, there are no more than those, which is also quite surprising.

For this, we will prepare a theoretical background based on the concept of *surfaces generated by triples of lines*. These surfaces are defined as the set of all straight lines that are coplanar with three previously given mutually skew lines. We will of course prove that the set so defined determines a regular surface. In fact, we will see that the surface must necessarily be a hyperbolic paraboloid or a hyperboloid of one sheet, in some (possibly skew) coordinate system. For this, we will distinguish whether the direction vectors are coplanar or not, respectively. After this, we will show that all lines in this set verify the canonical equations of the corresponding mentioned surfaces in a certain base, which will be obtained explicitly in each case. We will make use of a series of properties verified by the rulings of those surfaces.

We will naturally exploit this by seeing that every doubly ruled surface must be generated by some triple of mutually skew lines. As a consequence of this classification we could obtain an interesting result, the fact that there are no non-planar *triply ruled surfaces*. However, we will need to prove this independently since we require it for our result. The idea relies essentially on the fact that when through every point we have three different lines, we can find triangles whose interiors are contained in the surface, thus obtaining planar regions. With this powerful result we will conclude the text.



Introducción

L'Oceanogràfic (Valencia, España). Fuente: www.flickr.com/photos/felipe_gabaldon/5192001055/

Intuitivamente las superficies se suelen presentar como subconjuntos bidimensionales del espacio euclídeo que son, localmente, semejantes al plano, y que son suficientemente suaves. Con mayor precisión, la semejanza con el plano se traduce en que son subconjuntos localmente difeomorfos al plano euclídeo, y la suavidad se traduce en que en cada punto existe un plano tangente bien definido.

A la familia de difeomorfismos locales con el plano la llamamos una parametrización de la superficie, y nos permite identificar los puntos de la superficie con tuplas de coordenadas cartesianas, para así reducir el estudio analítico de la superficie, más complicado, a análisis real, terreno más cómodo. Precisemos la definición.

Definición 1.1 Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para todo punto $p = (x, y, z) \in S$ existe otro punto $q = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, un entorno U de q y una aplicación $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V := X(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que X es un difeomorfismo con diferencial inyectiva en todo punto de U .

El par (X, U) es una **parametrización** o **carta**, y la colección de tales cartas (bajo ciertas condiciones de compatibilidad) es un **atlas**.

La inyectividad de la diferencial es efectivamente la que asegura la existencia de un plano tangente bien definido en todo punto de la superficie. A menudo usaremos la imagen de los vectores canónicos mediante la diferencial como base estándar para trabajar en cada plano tangente.

Algunos de los ejemplos más comunes son los planos, las cuádricas, los helicoides, los grafos de funciones diferenciables, o las preimágenes de valores regulares mediante funciones diferenciables de tres variables (superficies de nivel). Otra forma de presentar las superficies, más apropiada para nuestro propósito, es la siguiente.

Definición 1.2 Una aplicación diferenciable $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con U abierto se denomina una **superficie parametrizada**. Se dirá **regular** si la diferencial es inyectiva en todo punto de U . Al subconjunto imagen $X(U)$ se le llama la **traza**.

Vemos que la diferencia fundamental es que se trata de aplicaciones y no de subconjuntos en este caso. En estas condiciones, se puede demostrar que la traza de una superficie parametrizada regular es, localmente, una superficie regular en el sentido de la definición 1.1.

! Esto no se puede extender globalmente ya que, como es fácil imaginar, la traza de una superficie parametrizada puede presentar por ejemplo autointersecciones, de modo que en tales puntos el plano tangente no está bien definido y, por tanto, no se trata de una superficie regular. Estos puntos donde falla la regularidad se dirán **puntos singulares**.

Veamos cómo esta noción permite introducir de forma natural las superficies regladas. Intuitivamente, las superficies regladas son superficies regulares en las que por cada punto pasa, al menos, una recta completamente contenida en la superficie. La regularidad de la superficie fuerza a que tales rectas estén íntimamente relacionadas. De hecho se puede demostrar que, al menos localmente, las superficies regladas consisten en *el terreno barrido* por una de las rectas mediante un movimiento rígido (lo que sería la traza de la transformación). Es por esto que a tales rectas se las conoce como rectas generatrices.

De este modo, tiene sentido construir la superficie fijando el camino que sigue tal recta y su dirección en cada momento, que puede interpretarse como el movimiento rígido de la recta generatriz. La traza de este movimiento será la superficie. Así pues, lo que hacemos es fijar una curva parametrizada en el espacio

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

y, en cada punto de la curva, indicar la dirección de la recta asignando un vector, es decir,

$$w : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

de modo que la superficie consistirá en el conjunto de las rectas que pasan por $\alpha(t)$ con dirección $w(t)$, para todo $t \in I$. Obsérvese que $\alpha(t)$ se interpreta como punto, mientras que $w(t)$ como vector.

Podemos pasar pues a dar una definición rigurosa del concepto.

Definición 1.3 Una superficie reglada es una superficie regular parametrizada por una expresión cualquiera de la forma

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X(t, s) &= \alpha(t) + sw(t), \end{aligned}$$

donde las funciones

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ w : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

son diferenciables. A la curva $\alpha(t)$ se le llama *directriz* y a cada recta $\beta_t(s) = X(t, s)$ *generatriz*.

1.1 Ejemplos

Es menester ahora dar algunos ejemplos que ilustren el concepto. Muchos de ellos serán protagonistas en secciones posteriores, de modo que haremos más énfasis en éstos.

■ **Ejemplo 1.1** El ejemplo más sencillo es un **plano**, que se puede obtener cuando la directriz es una recta, y las generatrices son paralelas entre sí. Por ejemplo, el plano que pasa por el punto p generado por los vectores v, w se puede parametrizar como

$$X(t, s) = p + tv + sw,$$

que está en la forma de la definición 1.3. Es necesario exigir que v, w sean linealmente independientes para obtener un verdadero plano. ■

■ **Ejemplo 1.2** Otro ejemplo particular y relevante son los **cilindros** (figura 1.1). Éste es el caso cuando la curva directriz α es plana, y las generatrices son todas paralelas entre sí. Así pues, tenemos una parametrización de la forma

$$X(t, s) = \alpha(t) + sv,$$

con α plana y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo. Es necesario exigir que v no sea coplanario con α para obtener un verdadero cilindro, pues en caso contrario se obtiene un plano.

Cuando las generatrices son perpendiculares al plano que contiene la directriz, se obtienen cilindros rectos. En particular, cuando la directriz es una circunferencia, se obtiene el cilindro usual: por ejemplo,

$$X(t, s) = (\cos t, \sin t, 0) + s(0, 0, 1)$$

es el cilindro recto de base circular y radio 1 a lo largo del eje Z . ■

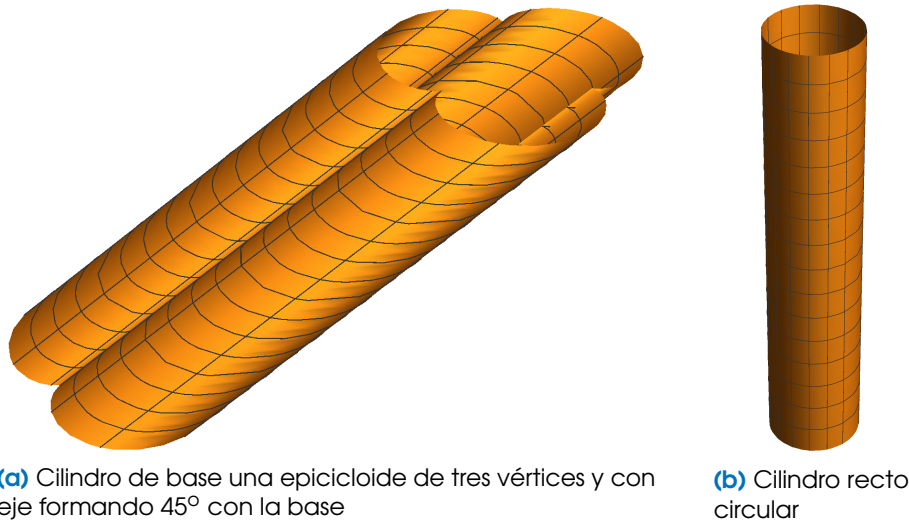


Figura 1.1: Ejemplos de cilindros

■ **Ejemplo 1.3** El **cono** (figura 1.2) es otro ejemplo fundamental, que en este caso se obtiene cuando todas las generatrices se cortan en un punto fijo p , el vértice del cono. Se tiene entonces la siguiente parametrización:

$$X(t, s) = p + s(\gamma(t) - p),$$

donde $\gamma(t)$ es una curva plana y $p \in \mathbb{R}^3$ es el vértice del cono. Observemos que la directriz es p , constante. De nuevo, y por razones obvias, es necesario exigir que p no sea coplanario con γ , pues en caso contrario se obtiene de nuevo un plano.

En particular, si $\gamma(t)$ es una circunferencia, y el vector que une p con el centro de la circunferencia es perpendicular al plano que contiene a la circunferencia, se obtiene el cono usual. Por ejemplo, tenemos que

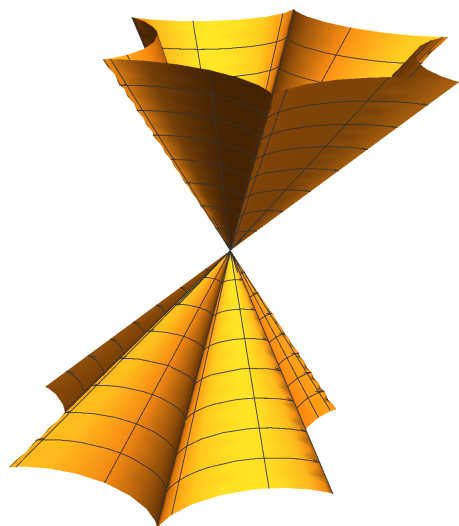
$$X(t, s) = s(\cos t, \sin t, 1)$$

es un cono con vértice en el origen y directriz circular perpendicular al eje Z . ■

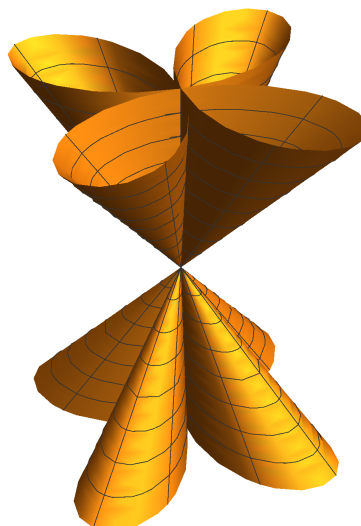
■ **Ejemplo 1.4** Pasamos ahora a un ejemplo más interesante por varias razones, el **hiperboloide de una hoja**. En primer lugar, porque es el primero que no es obviamente reglado dada su forma curva (véase la figura 1.3(a)). Y en segundo lugar porque, como vamos a ver, no tiene una sino dos familias de rectas generatrices linealmente independientes. Dicho de otro modo, por cada punto pasan dos rectas distintas contenidas en la superficie. A este tipo de superficies se las conoce como **superficies doblemente regladas**, que clasificaremos en la sección 3.3.

Una expresión implícita para un hiperboloide cuyo eje es el eje Z viene dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1.1)$$



(a) Cono de base una hipocicloide de 6 vértices y con eje formando 45° con la base



(b) Cono recto de base un trébol de 4 hojas (la curva radial de la astroide, hipocicloide de 4 vértices)

Figura 1.2: Ejemplos de conos

con $a, b, c > 0$. Todos los hiperboloides de una hoja vienen dados por esa ecuación en algún sistema de coordenadas afines. Si queremos obtener un hiperboloide de revolución tendremos que exigir $a^2 = b^2$, ya que estos números representan los radios sobre el eje X y el eje Y , respectivamente, en el plano $Z = 0$. Si no se verifica se obtienen los más generales hiperboloides elípticos. El caso de revolución se puede obtener rotando una hipérbola alrededor del eje perpendicular a la recta que une los focos, y que pasa por el punto medio de los mismos. Otro modo de obtenerlo consiste en rotar una recta alrededor de un eje con el que se cruza. Este caso presenta interés pues, como veremos en el teorema 3.1, se trata de una de las pocas superficies regladas de revolución.

Es fácil ver que la doble familia de rectas dada por la expresión

$$X^\pm(t, s) = (a(\cos t \mp s \sin t), b(\sin t \pm s \cos t), cs) \quad (1.2)$$

está contenida en la superficie, viendo que verifican la ecuación (1.1). También es fácil ver que cubre toda la superficie (luego lo anterior son dos parametrizaciones), igualando la expresión (1.2) a un punto arbitrario (x, y, z) que verifique la ecuación del hiperboloide (1.1), y observando que se obtiene siempre una solución única. ■

■ **Ejemplo 1.5** El **paraboloide hiperbólico** (figura 1.4) es otro ejemplo similar al anterior, descrito por una ecuación cuadrática, que además es también doblemente reglado. De hecho, estos dos ejemplos son las únicas superficies doblemente regladas no planas. Dedicaremos la sección 3.3 a probar esta afirmación.

El paraboloide hiperbólico, salvo transformaciones afines, viene descrito por la ecuación

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad (1.3)$$

con $a, b > 0$. Realizando un razonamiento análogo al ejemplo anterior, llegamos a una parametrización que desvela la doble familia de generatrices de la superficie:

$$X(t, s) = (at, 0, t^2) + s(a, \pm b, 2t) = (a(t+s), \pm bs, t^2 + 2ts),$$

donde hemos usado una de las parábolas de la superficie como generatriz. Es inmediato comprobar que verifica la ecuación (1.3) del paraboloide.

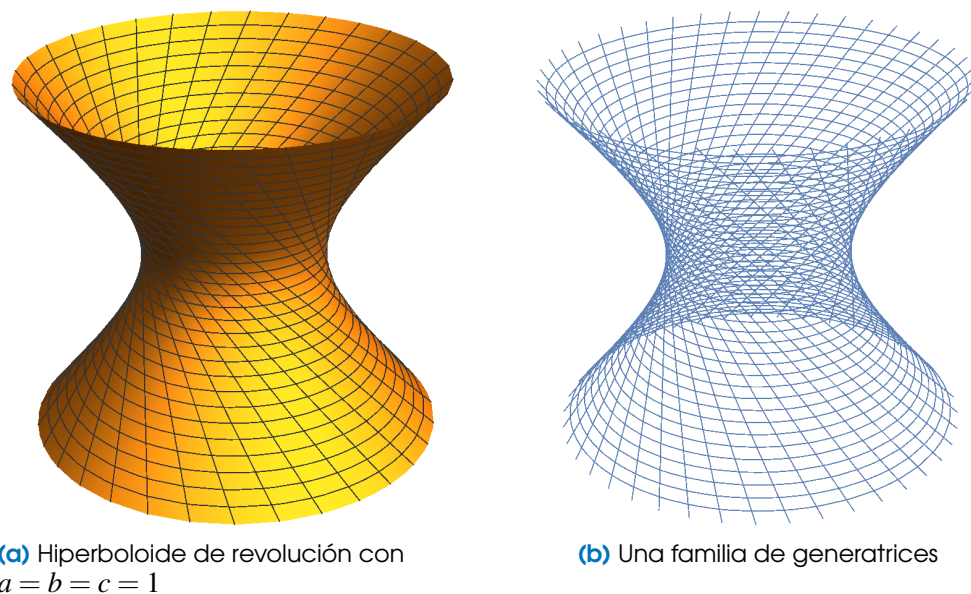


Figura 1.3: Ejemplos de hiperboloides de una hoja

Para terminar, dado un punto cualquiera (x, y, z) del paraboloides, es decir verificando (1.3), vamos a comprobar que pertenece a una recta de cada familia de las anteriores. Para ello, igualando

$$(x, y, z) = (a(t + s), \pm bs, t^2 + 2ts),$$

se deduce

$$t = \frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}, \quad s = \pm \frac{y}{b}.$$

Es claro que, efectivamente, $a(t + s) = x$ y $\pm bs = y$. Finalmente, usando (1.3), se comprueba que $t^2 + 2ts = z$, como queríamos ver. ■

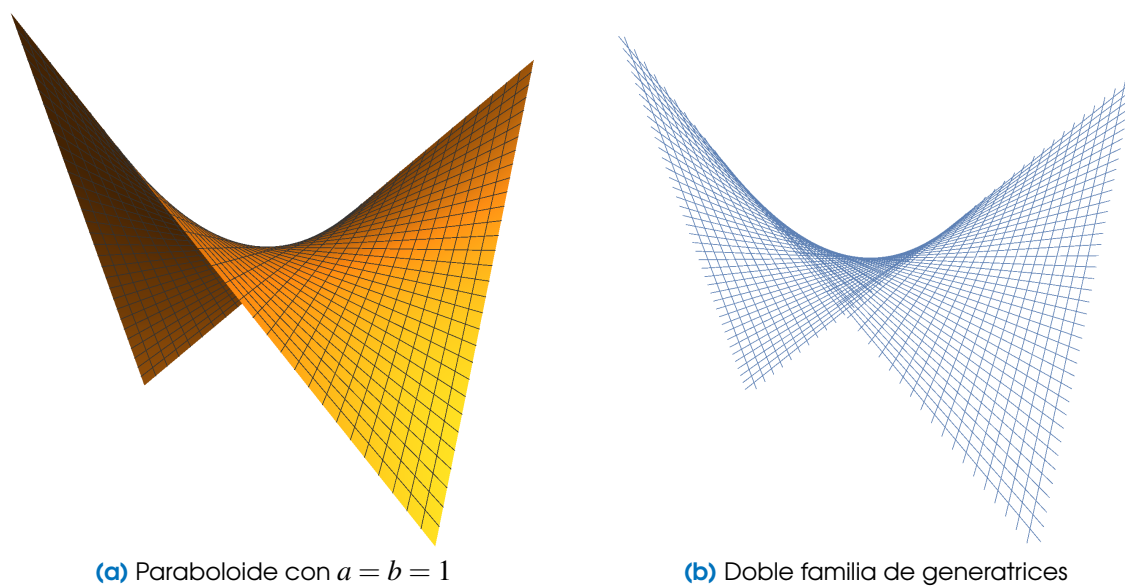


Figura 1.4: Ejemplos de paraboloides hiperbólicos

■ **Ejemplo 1.6** Por supuesto las superficies regladas no se limitan a las cuádricas. Una familia más general de superficies regladas son las llamadas **superficies tangentes a una curva** (figura 1.5). Para construir

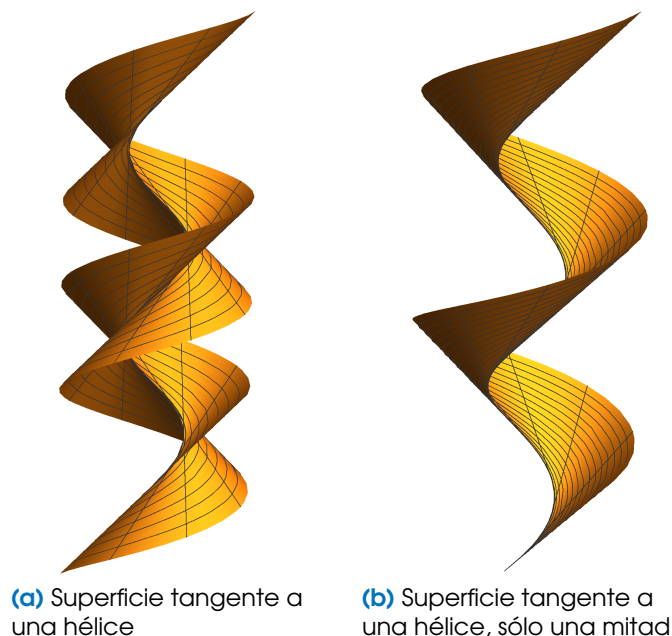


Figura 1.5: Ejemplos de superficies tangentes a curvas

una superficie de este tipo, basta tomar como generatrices las velocidades de la directriz. Consideremos pues una curva regular $\alpha(t) \subset \mathbb{R}^3$, y definimos la superficie parametrizada

$$X(t, s) = \alpha(t) + s\alpha'(t).$$

Vamos a ver que bajo ciertas condiciones, tal superficie es regular. En primer lugar será necesario asumir que la curvatura de α no se anula. Esto parece natural, ya que si en un tramo la curva es una recta, las velocidades son paralelas y por tanto se genera de nuevo una recta, es decir, es intuitivo que aparecen puntos singulares.

Como es habitual, tenemos que los puntos de la superficie serán regulares si el plano tangente está bien definido. Los vectores canónicos por la diferencial son

$$\begin{aligned} X_t(t, s) &= \alpha'(t) + s\alpha''(t), \\ X_s(t, s) &= \alpha'(t). \end{aligned}$$

La diferencial será inyectiva si y sólo si estos vectores son linealmente independientes, y se tiene

$$X_t \wedge X_s = s\alpha'' \wedge \alpha'.$$

Está claro que tal producto es nulo si $s = 0$, es decir, sobre α . Afirmamos que fuera de la curva inicial tal producto es no nulo. En efecto, aunque la curvatura k de una curva se asocia al módulo de la aceleración, esto es así únicamente cuando la curva está parametrizada por la longitud del arco. Más generalmente, no obstante, se puede demostrar que la definición anterior se extiende a curvas no parametrizadas por el arco como

$$k = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3} \neq 0.$$

Y como por hipótesis natural hemos asumido que la curvatura no es nula, tenemos que $X_t \wedge X_s \neq 0$, luego efectivamente los vectores son linealmente independientes y por tanto el plano tangente está bien definido.

Concluimos entonces que las superficies tangentes a curvas regulares son superficies regulares cuyos puntos singulares se localizan sobre la propia curva α , y sobre las generatrices que parten de los puntos de α con curvatura nula. ■

■ **Ejemplo 1.7** Otro ejemplo relevante que será protagonista en una sección posterior es el **helicoides** (figura 1.6). Tiene la propiedad de ser la única superficie reglada no plana que es minimal. Dedicaremos la sección 3.2 a demostrar este hecho. Para obtenerlo, fijamos un eje arbitrario, digamos el eje Z de coordenadas, y hacemos rotar una recta perpendicular al eje a velocidad constante conforme la vamos moviendo sobre éste, también a velocidad constante.

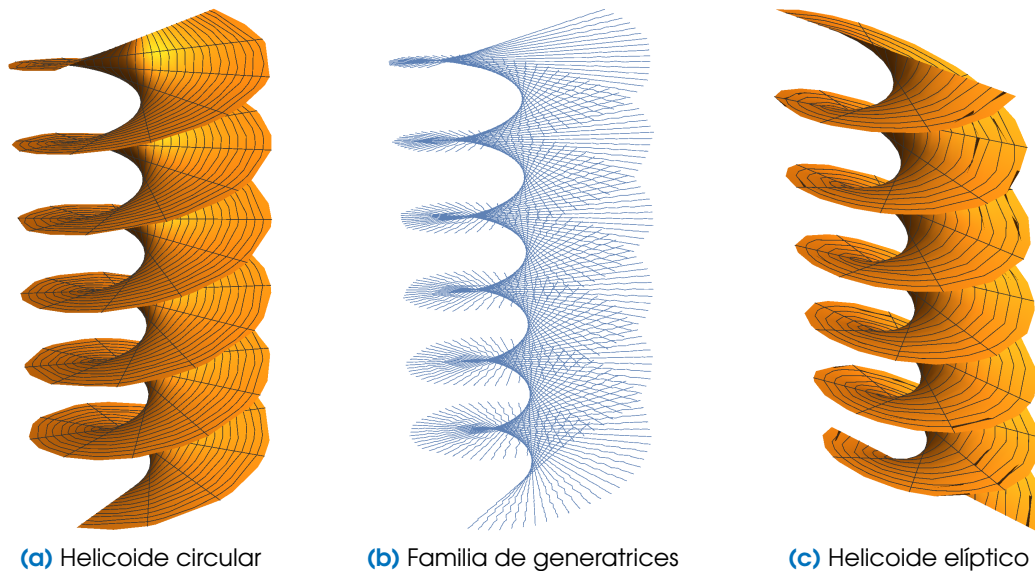


Figura 1.6: Ejemplos de helicoides

Así pues, tomaremos el eje Z como directriz α , y como dirección w de las generatrices el vector $(\cos t, \sin t, 0)$, obteniendo la parametrización

$$X(t, s) = (0, 0, at) + s(\cos t, \sin t, 0) = (s \cos t, s \sin t, at),$$

donde $a > 0$ determina la velocidad a la que se recorre el eje Z . La velocidad de giro no hace falta contemplarla, ya que en lo que respecta a la superficie, a determina por completo el aspecto. Para añadir más giro es suficiente disminuir a .

Aparte de variar el eje, también es posible considerar un helicoides elíptico modificando la parametrización, y tomando $b, c > 0$:

$$X(t, s) = (0, 0, at) + s(b \cos t, c \sin t, 0) = (bs \cos t, cs \sin t, at). \quad \blacksquare$$

■ **Ejemplo 1.8** Presentamos otros ejemplos conocidos, aunque de menor relevancia para nuestro trabajo, sin justificar los detalles. La **banda de Möbius** es una superficie reglada, aunque tenemos que relajar la condición de recta a segmento si queremos obtener una superficie regular.

También podemos realizar la misma construcción que realizamos para las superficies tangentes a curvas con el resto de vectores del *triedro de Frénet*. Tomando como generatrices los normales de la directriz obtenemos las **superficies normales**. Por otro lado, tomando como generatrices los binormales obtenemos igualmente las **superficies binormales**.

En el caso particular en que todas las generatrices sean paralelas a un mismo plano, se tiene una **superficie de Catalan**. Si además todas las generatrices intersectan una misma recta (que llamaremos eje), obtenemos el denominado **conoide**. Nótese que puede haber varios ejes. Si el eje es perpendicular al plano, tenemos un **conoide recto**. El helicoides es claramente un ejemplo de conoide recto.

El paraboloides hiperbólico (ejemplo 1.5) es un conoide con dos ejes. De los primeros conoides estudiados como tal es el **conoide de Plücker** (figura 1.7(a)), que viene parametrizado por la expresión

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

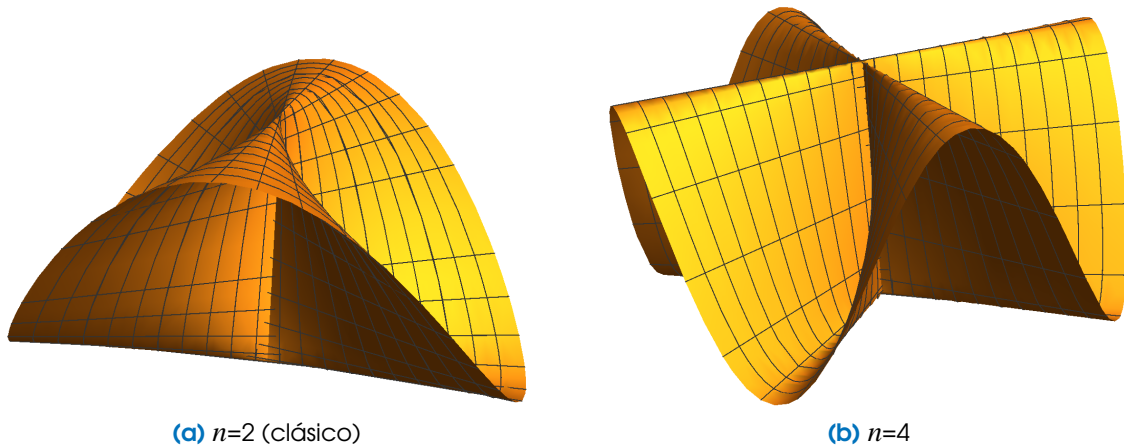
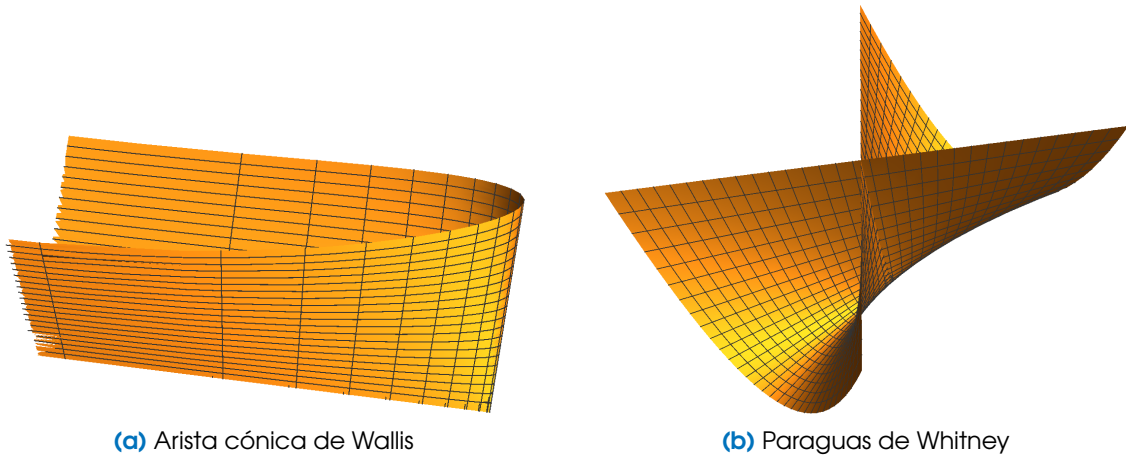
(a) $n=2$ (clásico)(b) $n=4$

Figura 1.7: Conoides de Plücker



(a) Arista cónica de Wallis

(b) Paraguas de Whitney

Figura 1.8: Otros conoides rectos

Este conoide se puede obtener rotando una recta perpendicular al eje Z mientras ésta se mueve sobre el eje realizando un movimiento oscilatorio de periodo 2π a lo largo del segmento $[-1, 1]$. En este caso, las generatrices se aprecian con facilidad en coordenadas polares, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, donde la superficie adopta la forma

$$(r \cos \theta, r \sin \theta, 2 \sin \theta \cos \theta) = (0, 0, \sin 2\theta) + r(\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Además en esta forma se puede generalizar fácilmente para añadir un número cualquiera n de pliegues (figura 1.7(b)), aunque cuando n es impar se obtienen $2n$ pliegues. Otro ejemplo que podemos mencionar es el **paraguas de Whitney** (figura 1.8(b)). Para construirlo, tomemos como eje por ejemplo el eje Z de coordenadas, y consideremos una parábola contenida en un plano paralelo al eje Z , pero que no pase por el origen. Entonces, la unión de las rectas que cortan perpendicularmente al eje y que intersecan a la parábola, es justamente un paraguas de Whitney. Es claro además que esta construcción se puede extender a cualquier curva. Finalmente podemos citar la **arista cónica de Wallis**, que se muestra en la figura 1.8(a). Todos los ejemplos anteriores son conoides rectos. ■



Propiedades de las superficies regladas

James S. McDonnell Planetarium (Saint Louis, MO, USA). Fuente: media-cdn.tripadvisor.com/media/photo-o/0c/a3/ea/ce/mcdonnell-planetarium.jpg

A lo largo de este capítulo presentaremos algunas de las principales características y propiedades de las que gozan las superficies regladas, y que resultan fundamentales para el estudio más profundo de las mismas. Las referencias fundamentales serán [[Car76](#), sec. 3.5], [[GAS06](#), cap. 14] y [[Kre91](#), sec. 58].

En concreto, comenzaremos presentando la existencia de una curva relevante de toda superficie reglada no cilíndrica, denominada la **línea de estricción**, con la propiedad de que su intersección con las generatrices de la superficie en cada punto es perpendicular. Será usual a partir de este momento parametrizar siempre las superficies regladas empleando esta curva como directriz, dado que esta propiedad resulta a menudo de gran utilidad.

Tras esto, probaremos que en estas condiciones existe una función escalar, llamada **parámetro de distribución**, que no depende tampoco de la parametrización de la superficie, y que resume mucha información acerca de la misma, como evidenciará el hecho de que numerosos resultados acerca de superficies regladas estén dados en términos del parámetro de distribución.

Seguidamente presentaremos una clase particularmente especial de superficies regladas, las **superficies desarrollables**, que se caracterizan por tener curvatura gaussiana idénticamente nula dentro de la clase de superficies regladas. Veremos que, en esencia, estas superficies se componen de una unión de fragmentos de planos, cilindros, conos, y superficies tangentes, con lo que las tendremos en cierto modo completamente clasificadas.

Completaremos el capítulo con propiedades adicionales para redondear el estudio y el entendimiento general de las superficies regladas.

2.1 La línea de estricción

Dada una superficie reglada mediante una parametrización estándar cualquiera, es decir, en la forma de la definición 1.3

$$X(t, s) = \alpha(t) + sw(t),$$

con $\alpha(t)$ la directriz y $w(t)$ la dirección de las generatrices, es interesante observar que podemos expresar una curva en la superficie de un modo muy cómodo, haciendo el parámetro s función de t , de modo que

una curva cualquiera β se expresaría bajo la parametrización como

$$\beta(t) = \alpha(t) + s(t)w(t).$$

Podemos suponer además sin pérdida de generalidad que $w(t)$ es unitario. Finalmente, vamos a añadir una condición para simplificar los cálculos, que viene ilustrada en la siguiente definición.

Definición 2.1 Una superficie reglada se dice **no cilíndrica** si $w'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

La motivación de la definición anterior es evidente, pues cuando la dirección de las generatrices es constante, se tiene que éstas son paralelas y por tanto obtenemos un fragmento de cilindro, en el sentido general definido en los ejemplos de la sección 1.1. Nuestra asunción es más fuerte, pues impedimos que w' sea nula en ningún punto.

De cara a aplicar los resultados, cuando los ceros de la función $w'(t)$ sean aislados simplemente se podrá fragmentar la superficie en regiones en las que $w'(t)$ no se anule, y por tanto donde se pueda aplicar la teoría que desarrollaremos. La situación más compleja en que $w'(t)$ tenga ceros que se acumulan no la trataremos en este trabajo.

Vamos a probar en primer lugar que las superficies regladas tienen una curva especial, llamada *línea de estricción*, que corta a las generatrices perpendicularmente en todo punto, y que gozará de propiedades interesantes.

Proposición 2.2 Dada una superficie reglada no cilíndrica parametrizada mediante $X(t, s) = \alpha(t) + sw(t)$ con $|w(t)| = 1$, existe una curva en la superficie parametrizada por

$$\beta(t) = \alpha(t) + s(t)w(t)$$

tal que $\beta'(t) \perp w'(t)$ para todo t , y que no depende de la directriz escogida para parametrizar la superficie.

Demostración. Como $|w| = 1$, derivando esta identidad se deduce que $w \perp w'$. Ahora, derivando la parametrización de $\beta(t)$ se tiene

$$\beta' = \alpha' + s'w + sw',$$

y buscando la igualdad a la que queremos llegar, y usando que $w \perp w'$, tenemos

$$\langle \beta', w' \rangle = \langle \alpha' + s'w + sw', w' \rangle = \langle \alpha', w' \rangle + s|w'|^2 = 0,$$

de modo que la curva β debe verificar que

$$s = -\frac{\langle \alpha', w' \rangle}{|w'|^2}.$$

Así pues, definiendo la curva como

$$\beta = \alpha - \frac{\langle \alpha', w' \rangle}{|w'|^2} w$$

se puede comprobar derivando como, efectivamente, $\beta' \perp w'$, como queríamos. ■

Como la curva no depende de la parametrización y está unívocamente determinada, tiene entonces sentido formalizar la definición de esta curva.

Definición 2.3 Dada una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t, s) = \alpha(t) + sw(t)$ se llama **línea de estricción** a la única curva sobre la superficie que corta a las generatrices perpendicularmente en todo punto. Llamamos **puntos centrales** a los puntos de la superficie que se encuentran en la traza de la línea de estricción.

Veremos que estos puntos centrales tendrán también un papel importante en la superficie.

Será conveniente para cálculos posteriores emplear esta curva privilegiada como directriz de nuestra superficie. Consideremos pues nuestra superficie reglada parametrizada a lo largo de la línea de estricción:

$$X(t, s) = \beta(t) + sw(t).$$

Resumiendo, en lo que sigue, trabajaremos con superficies regladas no cilíndricas con $|w| = 1$ y parametrizadas a lo largo de la línea de estricción, como hipótesis básicas. Como se ha dicho anteriormente, salvo en el caso de acumulación de ceros, estas hipótesis no son restrictivas.

2.2 El parámetro de distribución

Para continuar con el estudio básico, es recomendable primero realizar un breve recordatorio de la geometría de superficies que necesitaremos. Será también conveniente para capítulos posteriores, en especial, para la sección 3.1.2. Dada nuestra superficie reglada parametrizada como

$$X(t, s) = \beta(t) + sw(t),$$

por la regularidad de la superficie tenemos un plano tangente bien definido en todo punto no singular, y como se dijo, emplearemos como base del plano tangente la más natural, explicitada en la siguiente definición.

Definición 2.4 Dado un punto regular de una superficie, llamaremos **base canónica** a la base obtenida como imagen de la base canónica euclídea mediante la diferencial de la parametrización.

En nuestro caso particular, denotaremos estos vectores como $\{X_t, X_s\}$ en relación a los nombres de las variables. Observemos que se tiene

$$\begin{aligned} X_t(t, s) &= dX_{(t,s)}(1, 0) = \frac{\partial X}{\partial t}(t, s) = \beta'(t) + sw'(t), \\ X_s(t, s) &= dX_{(t,s)}(0, 1) = \frac{\partial X}{\partial s}(t, s) = w(t). \end{aligned}$$

En estas condiciones, la geometría de la superficie se realiza induciendo la estructura euclídea del espacio ambiente \mathbb{R}^3 . Por bilinealidad del producto escalar, en cada punto la métrica del plano tangente queda determinada por los coeficientes

$$E = \langle X_t, X_t \rangle, \quad F = \langle X_t, X_s \rangle = \langle X_s, X_t \rangle, \quad G = \langle X_s, X_s \rangle,$$

que conforman la llamada **primera forma fundamental**, un concepto intrínseco de la superficie. Esta herramienta nos permite medir longitudes, ángulos y áreas, entre otras cosas.

Por otro lado, si consideramos las derivadas segundas de la parametrización llegamos a un concepto que relaciona la geometría de la superficie con la del espacio (euclídeo) ambiente. Se trata de la parte normal de las derivadas segundas, obteniendo entonces los coeficientes

$$e = \langle X_{tt}, N \rangle, \quad f = \langle X_{ts}, N \rangle = \langle X_{st}, N \rangle, \quad g = \langle X_{ss}, N \rangle,$$

donde N es el vector normal a la superficie y unitario en cada punto, unívocamente determinado salvo el signo (al menos localmente, y globalmente si la superficie es orientable). Esta construcción se conoce por **segunda forma fundamental**, un concepto extrínseco de la superficie. Como el vector normal es ortogonal al plano tangente, se puede definir como el producto vectorial de los vectores de cualquier base del plano. Por ejemplo nosotros usaremos

$$N = \pm \frac{X_t \wedge X_s}{|X_t \wedge X_s|}.$$

Dado un punto de una superficie, podemos considerar el corte de la superficie con planos que contienen al vector normal, obteniendo las **curvas normales**. Las curvaturas de tales curvas se llaman **curvaturas normales** de la superficie, denotadas por $k_n(p, v)$, donde p es el punto y v el vector tangente que determina la dirección del corte del plano. A las curvaturas normales mínima y máxima se les llama **curvaturas principales**, que denotaremos por k_1 y k_2 . Las direcciones de las curvas normales respectivas se denominan **direcciones principales**, y las curvas cuyo tangente siempre es una dirección principal se conocen como **líneas de curvatura**. Análogamente, las direcciones donde la curvatura normal sea nula se llaman **direcciones asintóticas**, y las curvas cuya dirección siempre es asintótica se denominan **curvas asintóticas**. Su estudio será fundamental en secciones posteriores para clasificar las superficies planas completas.

Al vector normal unitario visto como función de los puntos de la superficie se le conoce como **aplicación de Gauss**. A la diferencial de esta aplicación, salvo quizá el signo, se la conoce como **operador forma** u operador de Weingarten. Resulta entonces que la forma cuadrática que define la segunda forma fundamental involucra al operador forma, pues de hecho viene dada por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ para cada punto p y vector tangente v . Es más, se tiene $k_n(p, v) = II_p(v)$. Una consecuencia importante de esto es que las curvaturas principales son los autovalores del operador forma, y las direcciones principales son los autovectores correspondientes.

Finalmente la **curvatura de Gauss** K se define (o se demuestra) como el producto de las curvaturas principales, y la **curvatura media** H como la media de las curvaturas principales. Como consecuencia, K es el determinante del operador forma y H es la mitad de la traza, por ser éstos invariantes. En adelante, *curvatura* hará siempre referencia a la curvatura de Gauss. Un punto se dice **elíptico** si tiene curvatura positiva, **hiperbólico** si tiene curvatura negativa, **parabólico** si tiene curvatura nula pero ambas curvaturas principales no son nulas, y **plano** si ambas lo son. Un punto es **umbílico** o umbilical si ambas curvaturas principales coinciden.

Resulta entonces que tales curvaturas se pueden calcular explícitamente en términos de los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales mediante las fórmulas

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}. \quad (2.1)$$

A pesar de depender de la segunda forma fundamental, el *teorema egregium de Gauss* muestra que K es totalmente intrínseco a la superficie. Las superficies con curvatura de Gauss idénticamente nula se llaman **superficies planas** o **llanas**, y aquéllas con curvatura media idénticamente nula se llaman **superficies minimales** o mínimas. Clasificaremos ambas en el caso reglado en secciones posteriores.

Hecho este breve repaso y volviendo a la materia que nos ocupa, vamos a estudiar diversas cuestiones sobre superficies regladas bajo las hipótesis que mencionamos anteriormente. Observemos que, como $w' \perp w$ y $w' \perp \beta'$, entonces w' es ortogonal al plano generado por ambos, y por tanto es proporcional a $\beta' \wedge w$. De este modo, existirá alguna función escalar λ tal que $\beta' \wedge w = \lambda w'$. Tiene sentido entonces la siguiente definición.

Definición 2.5 Dada una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t, s) = \beta(t) + sw(t)$, donde β es la línea de estricción, con $|w| = 1$, se define el **parámetro de distribución** de X como la única función escalar $\lambda(t)$ verificando $\beta'(t) \wedge w(t) = \lambda(t)w'(t)$ para todo $t \in I$.

La unicidad del parámetro de distribución es inmediata. En efecto, si existiesen dos funciones escalares λ_1, λ_2 en las condiciones de la definición anterior, se tendría

$$\begin{aligned} \beta' \wedge w &= \lambda_1 w', \\ \beta' \wedge w &= \lambda_2 w'. \end{aligned}$$

Y restando ambas expresiones se llega a que $(\lambda_1 - \lambda_2)w' = 0$. Como estamos trabajando con superficies no cilíndricas, $w' \neq 0$, de donde se deduce que $\lambda_1 = \lambda_2$.

Además, como la línea de estricción β no depende de la directriz, se deduce que el parámetro de distribución tampoco lo hace. Observemos, antes de continuar, una identidad útil que nos permitirá ahorrar cálculos.

Lema 2.6 Se verifica la identidad $|X_t \wedge X_s|^2 = EG - F^2$.

Demostración. Tomando módulos se tiene

$$\begin{aligned}|X_t \wedge X_s| &= |X_t||X_s| \operatorname{sen}(X_t, X_s), \\ \langle X_t, X_s \rangle &= |X_t||X_s| \cos(X_t, X_s).\end{aligned}$$

Luego sumando los cuadrados de ambos obtenemos

$$|X_t \wedge X_s|^2 + \langle X_t, X_s \rangle^2 = |X_t|^2 |X_s|^2,$$

e introduciendo las definiciones de los coeficientes de la primera forma fundamental,

$$|X_t \wedge X_s|^2 = EG - F^2. \quad \blacksquare$$

Es muy interesante la siguiente interpretación del parámetro de distribución, que como muestran obras clásicas como [HCV90, sec. 30, p. 208], [Sal15, Art. 462a, p. 85] ó [Eis09, Art. 105, p. 244], se trata, realmente, de la definición original del parámetro de distribución.

El parámetro de distribución mide el inverso de la velocidad a la que rota el plano tangente a lo largo de cada generatriz, o equivalentemente, la velocidad a la que cambia el ángulo del vector normal a la superficie a lo largo de dicha superficie.

Para probarlo, introduzcamos cierta terminología y resultados.

Definición 2.7 Dadas dos generatrices, consideremos el cociente entre el ángulo que determinan y su distancia. El límite cuando la distancia entre las generatrices tiende a 0 se llama la **estricción**.

El siguiente resultado justifica la validez de la definición y encuentra una expresión explícita para la estricción.

Teorema 2.8 La estricción en la definición 2.7 existe y vale

$$\frac{|w'|^2}{\det(\beta', w, w')}.$$

Demostración. Dada la superficie reglada parametrizada por $X(t, s) = \beta(t) + sw(t)$, consideremos dos generatrices arbitrarias “cercanas”:

$$\begin{aligned}w_t(s) &:= \beta(t) + sw(t), \\ w_{t+\Delta t}(s) &:= \beta(t + \Delta t) + sw(t + \Delta t),\end{aligned}$$

con $\Delta t > 0$. Supongamos que las generatrices no son paralelas. En tal caso, para hallar la distancia entre ellas, basta tomar la dirección perpendicular a ambas, y proyectar el segmento que une un par de puntos cualesquiera de ambas rectas en esta dirección.

La dirección perpendicular a ambas generatrices viene dada por

$$n(t) = \frac{w(t) \wedge w(t + \Delta t)}{|w(t) \wedge w(t + \Delta t)|},$$

que tomamos normalizada por comodidad. Ahora, proyectamos en esta dirección,

$$d(w_t, w_{t+\Delta t}) = \langle \beta(t + \Delta t) - \beta(t), n(t) \rangle = \frac{\langle \beta(t + \Delta t) - \beta(t), w(t) \wedge w(t + \Delta t) \rangle}{|w(t) \wedge w(t + \Delta t)|}.$$

Observemos que se tiene

$$w(t) \wedge w(t + \Delta t) = w(t) \wedge (w(t + \Delta t) - w(t)) + w(t) \wedge w(t) = w(t) \wedge (w(t + \Delta t) - w(t)).$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} d(w_t, w_{t+\Delta t}) &= \frac{\langle \beta(t + \Delta t) - \beta(t), w(t) \wedge (w(t + \Delta t) - w(t)) \rangle}{|w(t) \wedge (w(t + \Delta t) - w(t))|} \\ &= \frac{\det(\beta(t + \Delta t) - \beta(t), w(t), w(t + \Delta t) - w(t))}{|w(t) \wedge (w(t + \Delta t) - w(t))|} \\ &= (\Delta t)^2 \frac{\det\left(\frac{\beta(t + \Delta t) - \beta(t)}{\Delta t}, w(t), \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t}\right)}{|w(t) \wedge (w(t + \Delta t) - w(t))|}. \end{aligned}$$

Podemos realizar lo mismo en el denominador, concretamente

$$|w(t) \wedge (w(t + \Delta t) - w(t))| = \Delta t \left| w(t) \wedge \left(\frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} \right) \right|.$$

Denotemos por comodidad al cociente incremental como

$$Q(f, \Delta t) := \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Obsérvese que se omite el parámetro t dado que está fijo en todo el razonamiento y no hay confusión. Sustituyendo en la expresión anterior

$$\begin{aligned} d(w_t, w_{t+\Delta t}) &= (\Delta t)^2 \frac{\det(Q(\beta, \Delta t), w, Q(w, \Delta t))}{\Delta t |w \wedge Q(w, \Delta t)|} \\ &= \Delta t \frac{\det(Q(\beta, \Delta t), w, Q(w, \Delta t))}{|w \wedge Q(w, \Delta t)|}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por otro lado, calculemos ahora la expresión del ángulo entre ambas generatrices. Recordemos que trabajamos bajo la hipótesis de que $|w| = 1$, y como haremos tender Δt a cero, podemos asumir que ambas se encuentran en el mismo cuadrante.

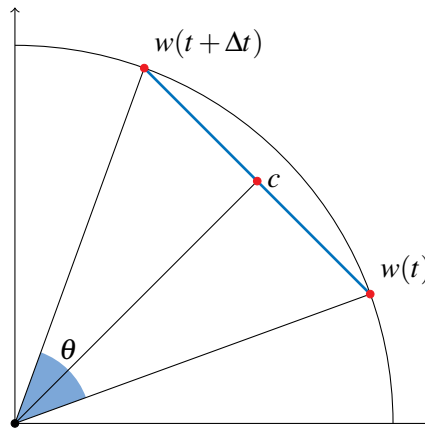


Figura 2.1: Cuerda entre generatrices

Observemos la figura 2.1, en ella se muestra un diagrama de la situación. Dado que tanto $w(t)$ como $w(t + \Delta t)$ se encuentran en la circunferencia unidad, el ángulo θ entre ambas rectas coincide con el segmento de arco que delimitan.

Por otro lado, la diferencia $w(t + \Delta t) - w(t)$ coincide en módulo con c , la longitud de la cuerda que los une. Cuando Δt tiende a 0, la cuerda y el arco tienden a la misma longitud, por lo que podremos aproximar el ángulo que forman por la longitud de la cuerda que delimitan.

En efecto, si consideramos la bisectriz del ángulo, obtenemos un triángulo rectángulo de ángulo $\theta/2$ cuyo cateto opuesto mide $c/2$, como la hipotenusa mide 1 por ser el radio de la circunferencia, obtenemos

$$\text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{c}{2},$$

de modo que la longitud de la cuerda viene dada en términos del ángulo por $c = 2 \text{sen}(\theta/2)$. Es bien sabido que si θ tiende a cero, entonces $\text{sen } \theta$ tiende a θ , lo cual se evidencia por ejemplo en el desarrollo de Taylor del seno, $\text{sen } x = x + o(x)$, donde $o(x)$ contiene términos de orden 3 y superiores. En definitiva, si Δt tiende a 0, entonces como θ tiende a 0, se tiene que la longitud de la cuerda $c = 2 \text{sen}(\theta/2)$ tiende a θ , como queríamos ver.

Por tanto, podemos usar la expresión $|w(t + \Delta t) - w(t)|$ para aproximar el ángulo entre las generatrices. Dicha expresión se puede reescribir como

$$|w(t + \Delta t) - w(t)| = \Delta t \left| \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t} \right| = \Delta t |Q(w, \Delta t)|.$$

Uniendo esto a la expresión deducida en (2.2) para la distancia entre las generatrices, y realizando el cociente, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sphericalangle(w_t, w_{t+\Delta t})}{d(w_t, w_{t+\Delta t})} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|w(t + \Delta t) - w(t)| |w \wedge Q(w, \Delta t)|}{\Delta t \det(Q(\beta, \Delta t), w, Q(w, \Delta t))} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t |Q(w, \Delta t)| |w \wedge Q(w, \Delta t)|}{\Delta t \det(Q(\beta, \Delta t), w, Q(w, \Delta t))} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|Q(w, \Delta t)| |Q(w, \Delta t)| \text{sen } \sphericalangle(w, Q(w, \Delta t))}{\det(Q(\beta, \Delta t), w, Q(w, \Delta t))}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Es evidente que para toda f diferenciable, $Q(f, \Delta t)$ tiende a $f'(t)$ cuando Δt tiende a 0. Por otro lado, recordemos que $w \perp w'$, de modo que $\sphericalangle(w, Q(w, \Delta t))$ tiende a $\pi/2$ si $\Delta t \rightarrow 0$, por ser el ángulo una función continua. Por tanto, el seno de tal ángulo converge a 1. En resumidas cuentas, el límite de (2.3) resulta ser

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sphericalangle(w_t, w_{t+\Delta t})}{d(w_t, w_{t+\Delta t})} = \frac{|w'|^2}{\det(\beta', w, w')}.$$

En particular, existe para todo $t \in I$, como queríamos ver. Observemos que no estamos interesados en el caso en que las generatrices sean paralelas, pues estamos estudiando superficies no cilíndricas, con lo cual en el límite el caso de generatrices paralelas no se puede dar. En efecto, no puede haber abiertos donde las generatrices sean constantes, y recordemos que los ceros de su derivada no se pueden acumular, luego tampoco puede haber infinitos cambios de dirección de las generatrices para dar infinitas paralelas, de modo que en un entorno de todo punto las generatrices son todas no paralelas. ■

Corolario 2.9 El parámetro de distribución es el inverso de la estricción.

Demostración. Esto es inmediato por la definición del parámetro de distribución. Recordemos que se trata de la única función escalar verificando $\beta'(t) \wedge w(t) = \lambda(t)w'(t)$, y que por tanto, viene dado por

$$\lambda = \frac{\langle \beta' \wedge w, w' \rangle}{|w'|^2} = \frac{\det(\beta', w, w')}{|w'|^2},$$

que se trata, efectivamente, del inverso de la estricción obtenida en el teorema 2.8. ■

Recapitulando pues lo dicho antes, la estricción mide lo rápido que gira el plano tangente alrededor de las generatrices conforme se avanza por ellas, y el inverso de esta cantidad es el parámetro de distribución.

! También podemos obtener una interpretación de la línea de estricción como el conjunto de los puntos de las generatrices que están más próximos entre sí, en el sentido de que tomando los puntos en los que se alcanza la distancia mínima entre generatrices como en la prueba del teorema 2.8, y tomando límites cuando las generatrices se acercan, se obtienen los puntos centrales. En efecto, los puntos de mínima distancia entre rectas que se cruzan sabemos que son exactamente aquéllos que determinan un vector perpendicular a sendas rectas (recordemos que las rectas no pueden ser paralelas). Tomando límites, como la línea de estricción interseca a todas las generatrices perpendicularmente, se tiene el resultado.

Pasemos a ver algunas propiedades generales, en las cuales vislumbraremos cómo el parámetro de distribución contiene una gran cantidad de información de la superficie.

Proposición 2.10 Las generatrices de una superficie reglada son líneas asintóticas y geodésicas.

Demostración. Esto es inmediato, ya que por ser rectas su curvatura k es nula. Como $k^2 = k_n^2 + k_g^2$, entonces tanto la curvatura normal como la curvatura geodésica se anulan, de modo que las generatrices son, respectivamente, líneas asintóticas y geodésicas. ■

Proposición 2.11 Dada una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t, s) = \beta(t) + sw(t)$ en las condiciones usuales, se verifica:

- (I) Los puntos singulares son exactamente los puntos centrales que son ceros del parámetro del distribución.
- (II) La curvatura de Gauss es no positiva, y nula sobre los ceros del parámetro del distribución.

Demostración. (I) Los puntos singulares son puntos donde el plano tangente no está definido. Esto es equivalente a que los vectores X_t, X_s sean linealmente dependientes, y por tanto a que su producto vectorial sea nulo. Calculando tenemos

$$X_t \wedge X_s = (\beta' + sw') \wedge w = \beta' \wedge w + sw' \wedge w = \lambda w' + sw' \wedge w,$$

luego el módulo es

$$|X_t \wedge X_s|^2 = \lambda^2 |w'|^2 + s^2 |w' \wedge w|^2 = (\lambda^2 + s^2) |w'|^2,$$

donde se ha usado que $w \perp w'$ y que $|w| = 1$. Deducimos entonces que los puntos singulares están localizados sobre la línea de estricción ($s = 0$) y se tienen sólo cuando $\lambda = 0$. Es decir, son puntos centrales y ceros del parámetro de distribución.

(II) Otra cuestión fundamental es la de encontrar una expresión general para la curvatura de Gauss en los puntos regulares. Ahora, de acuerdo al recordatorio anterior, para la curvatura necesitamos las segundas derivadas de la parametrización, que son

$$\begin{aligned} X_{tt}(t, s) &= \beta''(t) + sw''(t), \\ X_{ts}(t, s) &= w'(t), \\ X_{ss}(t, s) &= 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

así como el vector normal. Para éste podemos tomar, por ejemplo,

$$N = \frac{X_t \wedge X_s}{|X_t \wedge X_s|} = \frac{\lambda w' + sw' \wedge w}{\sqrt{\lambda^2 + s^2} |w'|}.$$

Como $X_{ss} = 0$ entonces tenemos $g = 0$, luego no es necesario calcular e . Por otro lado se tiene

$$f = \langle N, X_{ts} \rangle = \frac{\lambda |w'|}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}},$$

de modo que la curvatura de Gauss resulta ser

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + s^2)^2}. \tag{2.5}$$

Se tiene por tanto que la curvatura de toda superficie reglada es negativa o cero, anulándose únicamente en los ceros del parámetro de la distribución, es decir, a lo largo de las generatrices que cortan a la línea de estricción en un punto singular. ■

Corolario 2.12 Dada una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por $X(t, s) = \beta(t) + sw(t)$ en las condiciones usuales, se verifica:

- (I) Sobre cada generatriz con $\lambda \neq 0$, la curvatura de Gauss es continua y alcanza un máximo en el punto central.
- (II) Sobre cada generatriz, la curvatura tiende a 0 cuando s tiende a infinito.
- (III) La curvatura es simétrica respecto del punto central en toda generatriz.

Demostración.

- (I) Esto es inmediato en vista de la fórmula (2.5) obtenida para la curvatura. En primer lugar, si $\lambda \neq 0$ entonces K es una función racional cuyo denominador no se anula, y como λ es continua, se deduce que K también lo es. Por otro lado, es claro que K alcanza un máximo cuando $s = 0$, y la curvatura vale $K = -1/\lambda^2$.
- (II) Si $\lambda = 0$ entonces $K = 0$ con lo cual ya se tiene el resultado. Si no, basta tomar límites en (2.5).
- (III) De nuevo esto también es inmediato, ya que sólo aparecen potencias pares del parámetro s en la expresión de K . ■

Observemos que la simetría de la curvatura de Gauss, así como otras propiedades, vuelve a resaltar la importancia de los puntos centrales de una superficie reglada, y justifica esta nomenclatura.

Es inmediato, aunque no ha sido necesario para los cálculos anteriores, obtener los coeficientes de la primera forma fundamental para una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por la línea de estricción. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} E &= \langle X_t, X_t \rangle = \langle \beta' + sw', \beta' + sw' \rangle = \langle \beta', \beta' \rangle + 2s\langle \beta', w' \rangle + s^2\langle w', w' \rangle = |\beta'|^2 + s^2|w'|^2, \\ F &= \langle X_t, X_s \rangle = \langle \beta' + sw', w \rangle = \langle \beta', w \rangle + s\langle w', w \rangle = \langle \beta', w \rangle, \\ G &= \langle X_s, X_s \rangle = \langle w, w \rangle = 1. \end{aligned}$$

Resumimos entonces los elementos básicos de una superficie reglada por comodidad de referencia.

Elementos geométricos de las superficies regladas

Dada una superficie reglada parametrizada por la línea de estricción, $X(t, s) = \beta(t) + sw(t)$, con $|w(t)| = 1$, se tiene:

$$E = |\beta'|^2 + s^2|w'|^2, \quad F = \langle \beta', w \rangle, \quad G = 1.$$

$$f = \frac{\lambda|w'|}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}}, \quad g = 0.$$

$$N = \frac{\lambda w' + sw' \wedge w}{\sqrt{\lambda^2 + s^2}|w'|}, \quad K = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + s^2)^2}.$$

2.3 Superficies desarrollables

Dentro de las superficies regladas encontramos un subconjunto destacado, el de las superficies desarrollables, cuyo nombre trata de reflejar la propiedad de que pueden ser *aplanadas* hasta conseguir planos sin modificar las distancias entre los puntos. Intuitivamente, se trataría de una superficie que puede transformarse en un plano, cortándola y doblándola, pero sin distorsionarla. Vamos a dar una definición más operativa, que luego veremos se traducirá en la interpretación anterior.

Definición 2.13 Una superficie reglada parametrizada por $X(t, s) = \alpha(t) + sw(t)$, con $|w(t)| = 1$, se dice **desarrollable** si $\det(w, w', \alpha') = 0$.

Pasemos a ver algunos ejemplos.

■ **Ejemplo 2.1** Los **cilindros** son evidentemente desarrollables, tanto intuitivamente como formalmente, ya que se tiene que $w(t)$ es constante, luego $\det(w, w', \alpha') = 0$. ■

■ **Ejemplo 2.2** Los **conos** también son claramente desarrollables: usando la parametrización que vimos en la primera sección, $X(t, s) = p + s(\gamma(t) - p)$, tenemos en este caso que $\alpha(t) = p$ es constante, luego de nuevo $\det(w, w', \alpha') = 0$. ■

■ **Ejemplo 2.3** Las **superficies tangentes** a curvas también son desarrollables, lo que justifica su otra nomenclatura, **desarrollables tangentes**. En efecto, si tomamos la parametrización que introdujimos en los ejemplos de la primera sección, $X(t, s) = \alpha(t) + s\alpha'(t)$, se tiene que $w(t) = \alpha'(t)$, luego $\det(w, w', \alpha') = 0$ trivialmente. ■

■ **Ejemplo 2.4** Las superficies normales y binormales que introdujimos en el ejemplo 1.8, por otro lado, son siempre superficies regladas pero no tienen que ser necesariamente desarrollables. De hecho, se tiene que tales superficies son desarrollables si y sólo si la curva base es plana. Para probarlo, tomemos una curva α parametrizada por la longitud del arco y denotemos por n, b a los vectores normal y binormal, respectivamente. Estos vectores, junto con α' , son una base ortonormal del espacio en todo punto de la curva. Consideremos entonces las superficies parametrizadas por $\alpha(t) + sn(t)$ y $\alpha(t) + sb(t)$, las superficies normal y binormal, respectivamente.

Para la prueba haremos uso de las clásicas fórmulas de Frénet para las derivadas de los vectores del triedro; se puede consultar, por ejemplo, [HP10, cap. 1, ec. 1.13, p. 41] o [Car76, sec. 1.5, p. 32]. Denotaremos por k la curvatura de la curva y por τ la torsión. En el caso de las superficies normales, se tiene

$$\det(w, w', \alpha') = \det(n, n', \alpha') = \det(n, -\kappa\alpha' - \tau b, \alpha') = \det(n, \alpha', \tau b),$$

y como las tres entradas son linealmente independientes, se tiene que la superficie normal es desarrollable si y sólo si tal determinante es cero, lo cual equivale a que la torsión se anule, es decir, a que la curva sea plana. Para el otro caso se tiene análogamente

$$\det(w, w', \alpha') = \det(b, b', \alpha') = \det(b, \tau n, \alpha'),$$

y se llega a la misma conclusión. ■

■ **Ejemplo 2.5** Las **envolventes de familias de planos tangentes** a lo largo de curvas son otro buen ejemplo de superficies desarrollables. Para introducir estas superficies partimos de una superficie regular S y de una curva regular α sobre la superficie S , parametrizada por la longitud del arco, y seguimos la filosofía del ejemplo anterior. Véase la figura 2.2 para unos ejemplos.

Como queremos obtener planos tangentes a la superficie, debemos fijar una dirección que sea ortogonal al vector normal a la superficie. Escribiendo $N(t) = N(\alpha(t))$, dado que su derivada $N'(t)$ es un vector tangente, podemos tomar el producto $N \wedge N'$, que será siempre una dirección tangente a la superficie y ortogonal a N' . Consideramos por tanto la parametrización

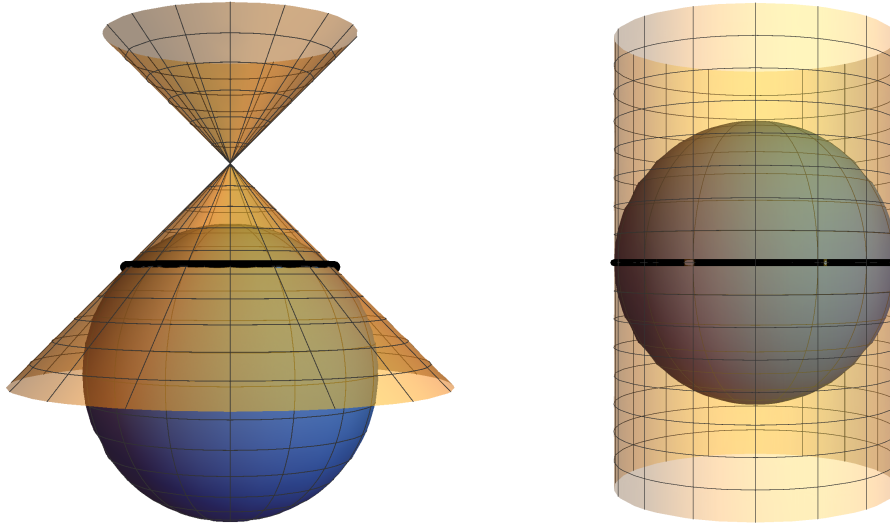
$$X(t, s) = \alpha(t) + sN(t) \wedge N'(t).$$

Probaremos que tal superficie es efectivamente desarrollable, regular en un entorno de la curva α y tangente a S a lo largo de la curva. En primer lugar la desarrollabilidad se tiene por definición:

$$\begin{aligned} \det(w, w', \alpha') &= \det(N \wedge N', (N \wedge N')', \alpha') = \det(N \wedge N', N \wedge N'', \alpha') \\ &= \langle (N \wedge N') \wedge (N \wedge N''), \alpha' \rangle. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la base ortonormal

$$\left\{ N, \frac{N'}{|N'|}, \frac{N \wedge N'}{|N \wedge N'|} \right\},$$



(a) Envoltente de planos tangentes al paralelo 45° de la esfera, un cono

(b) Envoltente de planos tangentes al ecuador de una esfera, un cilindro

Figura 2.2: Ejemplos de envoltentes de planos tangentes

que además, está positivamente orientada. Expresando la segunda derivada N'' en esta base tenemos

$$N'' = \langle N'', N \rangle N + \left\langle N'', \frac{N'}{|N'|} \right\rangle \frac{N'}{|N'|} + \left\langle N'', \frac{N \wedge N'}{|N'|} \right\rangle \frac{N \wedge N'}{|N'|},$$

de modo que realizando el producto vectorial, y usando la orientación de la base,

$$\begin{aligned} N \wedge N'' &= \left\langle N'', \frac{N'}{|N'|} \right\rangle \frac{N \wedge N'}{|N'|} + \left\langle N'', \frac{N \wedge N'}{|N'|} \right\rangle \frac{N \wedge (N \wedge N')}{|N'|} \\ &= \left\langle N'', \frac{N'}{|N'|} \right\rangle \frac{N \wedge N'}{|N'|} - \left\langle N'', \frac{N \wedge N'}{|N'|} \right\rangle \frac{N'}{|N'|}, \end{aligned}$$

y, por tanto, el producto que buscamos viene dado por

$$(N \wedge N') \wedge (N \wedge N'') = - \left\langle N'', \frac{N \wedge N'}{|N'|} \right\rangle \frac{(N \wedge N') \wedge N'}{|N'|} = \left\langle N'', \frac{N \wedge N'}{|N'|} \right\rangle \frac{N}{|N'|}.$$

En consecuencia, como α' es un vector tangente a la superficie, $\alpha' \perp N$, luego

$$\det(w, w', \alpha') = \langle (N \wedge N') \wedge (N \wedge N''), \alpha' \rangle = \left\langle \left\langle N'', \frac{N \wedge N'}{|N'|} \right\rangle \frac{N}{|N'|}, \alpha' \right\rangle = 0,$$

lo que prueba que la superficie es desarrollable.

Para probar la regularidad computamos, como viene siendo habitual, el producto vectorial de los vectores de la base canónica:

$$X_t \wedge X_s = (\alpha' + sN \wedge N'') \wedge (N \wedge N') = \alpha' \wedge (N \wedge N') + s(N \wedge N'') \wedge (N \wedge N').$$

En particular, a lo largo de la curva, es decir con $s = 0$, se tiene

$$X_t \wedge X_s = \alpha' \wedge (N \wedge N') = \langle \alpha', N' \rangle N - \langle \alpha', N \rangle N' = \langle \alpha', N' \rangle N,$$

donde se ha realizado un cálculo similar al anterior para obtener el triple producto vectorial. Observemos que, como $\langle N, \alpha' \rangle = 0$, derivando esta identidad obtenemos

$$\langle N', \alpha' \rangle + \langle N, \alpha'' \rangle = 0.$$

Por tanto, sustituyendo tenemos

$$X_t \wedge X_s = -\langle \alpha'', N \rangle N = -k_n N,$$

donde $k_n = k_n(\alpha, \alpha')$, que también podemos ver como la componente normal a la superficie de la aceleración de la curva.

De este modo, para obtener regularidad tenemos que asegurar que $k_n \neq 0$, restringiendo así las curvas a considerar. Podemos exigir de forma resumida que la curva α no sea paralela a ninguna dirección asintótica en ningún punto.

Esto no es muy restrictivo, dado que en cada punto con curvatura de Gauss no nula existen a lo sumo dos direcciones asintóticas linealmente independientes. Si la curvatura de Gauss es positiva no existen, y si es negativa hay dos. Si la curvatura es nula es claro que esto no se puede asegurar, como es el caso del plano, donde todas las direcciones son asintóticas.

En cualquier caso, de la última igualdad $\bar{N} = X_t \wedge X_s = -k_n N$ obtenemos que el vector normal a la superficie parametrizada por X a lo largo de α es colineal con N , el vector normal de S , y por tanto concluimos que la superficie X es efectivamente tangente a S a lo largo de α . ■

Lema 2.14 Las superficies desarrollables (no cilíndricas) son exactamente las superficies regladas cuyo parámetro de distribución es idénticamente nulo.

Demostración. Esto es inmediato por la definición del parámetro de distribución y la desarrollabilidad:

$$\lambda = \frac{\langle \beta' \wedge w, w' \rangle}{|w'|^2} = \frac{\det(\beta', w, w')}{|w'|^2} = 0. \quad \blacksquare$$

Corolario 2.15 Los puntos singulares de una superficie desarrollable (no cilíndrica) son exactamente los puntos centrales, es decir, los que se sitúan sobre la línea de estricción.

Demostración. Como se probó en la proposición 2.11, los puntos singulares de una superficie reglada son los puntos centrales que son ceros del parámetro de distribución, que en este caso son todos por el lema anterior. ■

Pasemos ahora a ver un resultado que justifica la noción intuitiva de superficie desarrollable como superficie que se puede transformar, sin distorsión, hasta un plano.

Proposición 2.16 Las superficies desarrollables son localmente isométricas al plano.

Demostración. Parametrizamos la superficie por $X(t, s) = \alpha(t) + sw(t)$. Como se comprobó en (2.4), para superficies regladas arbitrarias se tiene $g = \langle X_{ss}, N \rangle = 0$. Además, en este caso tenemos

$$\begin{aligned} f &= \langle N, X_{ts} \rangle = \left\langle \frac{X_t \wedge X_s}{|X_t \wedge X_s|}, X_{ts} \right\rangle = \frac{1}{|X_t \wedge X_s|} \langle X_t \wedge X_s, X_{ts} \rangle = \frac{1}{|X_t \wedge X_s|} \det(X_t, X_s, X_{ts}) \\ &= \frac{1}{|X_t \wedge X_s|} \det(\beta' + sw', w, w') = \frac{1}{|X_t \wedge X_s|} \det(\beta', w, w') = 0, \end{aligned}$$

de modo que la curvatura de Gauss es nula:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0.$$

El teorema de Minding (véase [HP10, p. 208]) asegura que dos superficies con igual curvatura de Gauss constante son localmente isométricas. Por lo tanto, toda superficie desarrollable es localmente isométrica al plano, como buscábamos. ■

Pasamos ahora a ver una propiedad que, de nuevo, caracteriza a las superficies desarrollables, y es igualmente usada de definición en algunos textos, como [Kre91, sec. 58, p. 181].

Proposición 2.17 Una superficie reglada (no cilíndrica) es desarrollable si y sólo si el plano tangente es constante a lo largo de cada generatriz.

Demostración. Observemos en primer lugar que la propiedad es razonable, teniendo en cuenta la interpretación geométrica del parámetro de distribución y el hecho de que las superficies desarrollables son aquéllas con parámetro de distribución nulo. Para probar la afirmación, bastará ver que el vector normal a la superficie es constante en cada generatriz. Fijemos pues la variable t y consideremos $N(s)$ el vector normal en el punto $X(t, s)$.

De nuevo sabemos por la ecuación (2.4) que $X_{ss} = 0$. Como $\langle X_s, N \rangle = 0$, derivando esta identidad respecto de s llegamos a que $\langle X_{ss}, N \rangle = -\langle X_s, N_s \rangle$, de modo que $\langle X_s, N_s \rangle = 0$ para toda superficie reglada.

Por otro lado, tenemos por una razón análoga que $\langle X_t, N_s \rangle = -\langle X_{ts}, N \rangle$. Introduciendo la definición del vector normal y reordenando llegamos al resultado buscado,

$$\langle X_{ts}, N \rangle = \left\langle X_{ts}, \frac{X_t \wedge X_s}{|X_t \wedge X_s|} \right\rangle = \frac{\langle X_{ts}, X_t \wedge X_s \rangle}{|X_t \wedge X_s|} = \frac{\det(X_{ts}, X_t, X_s)}{|X_t \wedge X_s|} = \frac{\det(w', \alpha' + sw', w)}{|X_t \wedge X_s|} = \frac{\det(w', \alpha', w)}{|X_t \wedge X_s|}.$$

Como N_s es un vector tangente, entonces $N_s = 0$ si y sólo si es ortogonal a la base canónica $\{X_t, X_s\}$ del plano tangente, o equivalentemente $\det(w', \alpha', w) = 0$, es decir si la superficie es desarrollable. ■

Podemos terminar recapitulando los diferentes resultados sobre superficies desarrollables que hemos acumulado, que nos dan una caracterización de tales superficies.

Teorema 2.18 Dada una superficie reglada no cilíndrica parametrizada por la línea de estricción, son equivalentes:

- I) La superficie es desarrollable.
- II) El parámetro de distribución λ es nulo.
- III) La superficie es plana.
- IV) La superficie es localmente isométrica al plano.
- V) El plano tangente es constante a lo largo de cada generatriz.

Demostración. Las equivalencias se deducen de que en toda superficie reglada se verifica

$$g = 0, \quad f = \frac{\det(\beta', w, w')}{|X_t \wedge X_s|},$$

según se vio en la demostración de la proposición 2.16, y de la fórmula para la curvatura de Gauss vista en la ecuación (2.5):

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + s^2)^2}.$$

Basta entonces aplicar el lema 2.14 y la definición de superficie desarrollable. Si dos superficies son isométricas entonces tienen la misma curvatura por el teorema egregium de Gauss, y el recíproco para curvaturas constantes lo da el teorema de Minding. Finalmente, usamos también la proposición 2.17. ■



Clasificaciones de superficies regladas

Iglesia de la Medalla Milagrosa (Puebla de los Ángeles, México). Fuente: www.planosdcasas.com/planos/iglesia-de-la-virgen-de-la-medalla-milagrosa-432.jpg

En este capítulo estudiaremos las superficies regladas de acuerdo a diversos criterios, que usaremos para realizar varias clasificaciones de las mismas. Para comenzar, acudimos a la noción de curvatura.

En primer lugar, clasificaremos las superficies regladas con curvatura de Gauss nula. Como consecuencia del teorema 2.18, éstas son exactamente las superficies desarrollables. Obtendremos que se limitan a una unión de fragmentos de cilindros, conos y superficies tangentes a curvas. Las referencias fundamentales para este apartado serán [Car76, cap. 3, sec. 5] y [Kre91, sec. 58]. Un teorema más fuerte nos permitirá ver que, de hecho, toda superficie completa con curvatura de Gauss nula no sólo es necesariamente reglada, sino que además debe ser un plano o un cilindro. La referencia fundamental para este apartado será [Car76, cap. 5, sec. 8], y adicionalmente [HP10, caps. 3 y 7].

En segundo lugar, clasificaremos las superficies regladas con curvatura media nula, es decir, las superficies regladas minimales, resultado probado por Catalan en 1845. Veremos que éstas se reducen al plano y el helicoides. La referencia principal será [FT91, cap. 1, sec. 2], y adicionalmente [FT91, cap. 2]. Otras fuentes secundarias son [AS60], [Ber58], [Che55] y [Oss86], que se indicarán con precisión cuando se haga uso de ellas.

Otro resultado importante que veremos consistirá en clasificar las superficies doblemente regladas. Veremos que éstas se reducen a los hiperboloides de una hoja y a los paraboloides hiperbólicos, ya estudiados en los ejemplos 1.4 y 1.5. La referencia esencial será [FT07, Lec. 16]. Un método alternativo se puede consultar en [Spi99], lo introduciremos más adelante.

Para comenzar, vamos a ver antes otra clasificación interesante de demostración sencilla, la de las superficies regladas de revolución.

Teorema 3.1 Las únicas superficies regladas de revolución son uniones de hiperboloides de una hoja, cilindros circulares rectos, conos circulares rectos, y planos.

Demostración. Sea S una superficie en tales condiciones. Por ser S reglada, entonces contiene una recta L . Llamemos A al eje del revolución. Al revolucionar L alrededor de A se obtiene un subconjunto que estará contenido en S . Esto producirá distintas situaciones cuyo estudio, en todos los casos, es inmediato.

Si L y A son coincidentes entonces se genera una recta. Si son paralelos, se genera un cilindro circular recto. Si L interseca con A perpendicularmente, se genera un plano. Si la intersección no es perpendicular, se genera un cono circular recto. Finalmente, si L y A se cruzan, se genera un hiperboloide de una hoja.

Como hemos mencionado, las superficies generadas estarán por definición contenidas en S . Si el contenido es estricto, es que existe al menos otra recta L' de S que no está contenida en la superficie obtenida al revolucionar L . En tal caso, al revolucionar L' , se vuelve a obtener una superficie de los tipos mencionados arriba. Repitiendo el razonamiento hasta incluir todas las rectas de S , se deduce la conclusión del teorema. ■

3.1 Curvatura gaussiana nula

En esta sección probaremos dos resultados principales. En primer lugar, que toda superficie reglada con curvatura de Gauss nula es, necesariamente, una unión de fragmentos de cilindros, conos y superficies tangentes a curvas. Tendremos que exigir la hipótesis de que los ceros de w' (la dirección de las generatrices) no se acumulen.

En segundo lugar, que toda superficie regular llana completa es necesariamente un plano o un cilindro, ambas superficies regladas. En este apartado requeriremos muchos resultados de teoría general de superficies, que iremos repasando por el camino. Además, serán necesarios otros resultados transversales, que referenciaremos sin demostración.

3.1.1 Clasificación de superficies desarrollables

En este apartado vamos a comprobar que toda superficie desarrollable es unión de trozos de cilindros, conos y superficies tangentes a curvas. Para ello asumiremos la hipótesis de que los ceros de w' no se acumulan, como dijimos anteriormente, o en su defecto el resultado será válido en entornos donde tales ceros no se acumulen.

Teorema 3.2 Una superficie desarrollable parametrizada por $X(t, s) = \alpha(t) + sw(t)$ es localmente un fragmento de cilindro, cono, o superficie tangente, en entornos que no contengan puntos de acumulación de ceros de w' .

Demostración. Consideremos el producto $w(t) \wedge w'(t)$. Recordemos que, como $|w| = 1$, se tiene $w \perp w'$. Por tanto, si el producto es nulo, $w \wedge w' \equiv 0$, entonces también se tiene $w \parallel w'$ y esto quiere decir que debe ser $w' = 0$, es decir que w es constante. Como w es la dirección de las generatrices, esto se traduce en que la superficie sea un cilindro.

Por otro lado, supongamos que no se tiene $w \wedge w' \equiv 0$. Podemos distinguir dos casos: que los ceros de la expresión sean aislados o se acumulen. Como los ceros del producto son los ceros de w' , el caso de acumulación vamos a dejarlo aparte. Por otro lado, en las regiones donde los ceros sean aislados, podemos aplicar el estudio que hicimos en la sección anterior en cada región intermedia con $w' \neq 0$.

En particular, podemos parametrizar la superficie por la línea de estricción, $X(t, s) = \beta(t) + sw(t)$. Podemos además definir el parámetro de distribución, que recordemos es la única función escalar verificando $\beta'(t) \wedge w(t) = \lambda(t)w'(t)$, y que por tanto, viene dado por

$$\lambda = \frac{\langle \beta' \wedge w, w' \rangle}{|w'|^2} = \frac{\det(\beta', w, w')}{|w'|^2} = 0,$$

por ser desarrollable. Recordemos que, como los puntos singulares de la superficie son los puntos centrales que son ceros de λ , tenemos que en una superficie desarrollable con $w' \neq 0$ los puntos singulares son, exactamente, los puntos centrales, es decir los puntos de la línea de estricción.

Finalmente distingamos dos casos. Por un lado, si $\beta(t) \equiv 0$ entonces la línea de estricción β es constante, luego su traza es un punto. Por tanto, tenemos un fragmento de cono. Por otro lado supongamos que fuese $\beta(t) \neq 0$ para algún $t \in I$. Como $\det(\beta', w, w') = 0$ entonces $\{\beta', w, w'\}$ son linealmente dependientes. Pero $w' \perp w$ y $w' \perp \beta'$, luego la dependencia lineal debe darse entre w y β' .

Como β' y w son paralelos, esto quiere decir que las generatrices en cada momento tienen la dirección del tangente a la línea de estricción, por tanto tenemos la superficie tangente a la curva β . ■

Como se ha mencionado en la demostración, la clasificación anterior es exhaustiva salvo el caso de acumulación de ceros de w' , cuyo estudio no abordamos en este trabajo.

Corolario 3.3 Las superficies regladas planas son uniones de fragmentos de planos, cilindros, conos y superficies tangentes.

Demostración. Por el teorema 2.18 las superficies regladas planas son exactamente las superficies desarrollables. Basta entonces aplicar el teorema 3.2 para obtener el resultado. ■

Terminamos el apartado comentando que, de hecho, se tiene también un resultado algo más fuerte, aunque su conclusión podría ser ya esperada por ser la superficie reglada. El siguiente teorema estudia cómo son los fragmentos de la clasificación anterior.

Teorema 3.4 Sea S una superficie reglada plana parametrizada por $X(t, s) = \alpha(t) + s w(t)$, tal que $w'(t)$ no tiene ceros de acumulación. Entonces, la parametrización se puede subdividir en una cantidad finita de t -intervalos I_t , de modo que la porción de superficie $X(t, s)$ con $(t, s) \in I_t \times \mathbb{R}$ es un fragmento de plano, cilindro, cono, o superficie tangente.

Demostración. Una prueba se puede encontrar en [Kre91, sec. 58, teorema 58.3, p. 185]. ■

3.1.2 Clasificación de superficies regulares planas y completas

Estudiar las superficies regulares con curvatura gaussiana nula es una tarea demasiado general. En el apartado anterior hemos estudiado el caso particular en que la superficie es, además, reglada. Otro caso que podemos estudiar, y que resulta reducirse al caso reglado de nuevo, es el caso en que la superficie es completa. En estas condiciones, vamos a ver que la superficie es, necesariamente, un plano o un cilindro, ambas superficies regladas.

Teniendo en cuenta que será necesario trabajar con el operador forma, emplearemos por convenio que éste viene dado por el opuesto de la diferencial de la aplicación de Gauss. Además, como esta sección se distingue del resto en que sus resultados son válidos para superficies regulares arbitrarias, no necesariamente regladas, emplearemos nuevas coordenadas (u, v) en lugar de las habituales (t, s) para distinguirlas.

Sea S una superficie regular plana. Como la curvatura de Gauss es $K = k_1 k_2$, tenemos que necesariamente todos los puntos han de ser parabólicos o planos. Si denotamos por P al conjunto de los puntos planos, y por $U = S \setminus P$ al conjunto de los puntos parabólicos, es inmediato que P es cerrado en S . En efecto, como $K = 0$, los puntos planos son exactamente los puntos de S que son solución de $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$, y sabemos que H es una función continua.

Para proceder en la presente sección será necesario utilizar numerosos conceptos y resultados de teoría general de superficies, por lo que recomendamos revisar el repaso realizado en la sección 2.2. Completaremos este repaso con el resto de conocimientos que necesitaremos. Recordemos que estamos empleando la base canónica $\{X_u, X_v\}$ para el plano tangente. Completando en cada punto de la superficie con el vector normal N a la misma, tenemos una base de \mathbb{R}^3 . Denotemos esta base por $\mathcal{B} = \{v_1 = X_u, v_2 = X_v, v_3 = N\}$ en cada punto de S .

Denotamos por Γ_{ij}^k al coeficiente de X_{ij} en el vector v_k de la base \mathcal{B} , con $k = 1, 2, 3$ e $i, j = 1, 2 = u, v$. Resulta entonces que los Γ_{ij}^3 (los coeficientes en N) son los coeficientes de la segunda forma fundamental, concretamente $\Gamma_{11}^3 = e, \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = f, \Gamma_{22}^3 = g$. Al resto de coeficientes se les conoce por el nombre de **símbolos de Christoffel**.

Para profundizar, véase [Car76, cap. 4, sec. 3] o [HP10, cap. 3, sec. 8]. Se tiene entonces el siguiente resultado fundamental.

Teorema 3.5 Se verifican las siguientes igualdades.

Ecuación de Gauss:

$$(1) \quad \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)^2 = EK.$$

Ecuaciones de Mainardi-Codazzi:

$$(2) \quad e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2,$$

$$(3) \quad f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.$$

Demostración. La demostración se basa en esencia en una serie de computaciones sencillas pero costosas. Puede consultarse, por ejemplo, [Car76, cap. 4, sec. 3] ó [HP10, cap. 3, sec. 8]. ■

Definición 3.6 Las tres ecuaciones anteriores, que se verifican en general para toda superficie regular, se conocen como **ecuaciones de compatibilidad**.

Líneas de curvatura sobre puntos parabólicos

Para el argumento del teorema central será clave estudiar las curvas asintóticas de la superficie que pasan por puntos parabólicos. Como consecuencia, para proceder es necesaria una serie de resultados preliminares que conciernen a las líneas de curvatura, y a cómo se relacionan las curvaturas normales entre ellas.

Proposición 3.7 — Teorema de Olinde-Rodrigues. Una curva regular $\alpha(t)$ en una superficie regular S es línea de curvatura si y sólo si $N'(\alpha(t)) = \mu(t)\alpha'(t)$, donde μ es una función escalar diferenciable. En tal caso, $-\mu(t)$ es la curvatura normal de S en $\alpha(t)$ en la dirección de $\alpha'(t)$.

Demostración. Ambas implicaciones se siguen de forma inmediata del hecho de que $\alpha(t)$ es línea de curvatura si y sólo si $\alpha'(t)$ es vector propio de $dN_{\alpha(t)}$, y de que

$$N'(\alpha(t)) = dN_{\alpha(t)}\alpha'(t).$$

En estas condiciones, es claro que $\mu(t)$ será el valor propio, que salvo el signo es el valor de la curvatura principal correspondiente. ■

Lema 3.8 Sea S una superficie regular parametrizada por X y sea $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ una curva en ella, donde u, v son funciones escalares reales diferenciables. Entonces la curva es una línea de curvatura si y sólo si se verifica la ecuación

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0.$$

Demostración. Por el teorema de Olinde-Rodrigues, proposición 3.7, α será línea de curvatura si y sólo si $N'(\alpha(t)) = \mu(t)\alpha'(t)$. Por otro lado, mediante una serie de cálculos que aquí eludiremos (véase, p.e., [HP10, cap. 3, sec. 5, p. 126]), se puede obtener la matriz del operador dN en términos de los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales, obteniendo

$$dN \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

De este modo, podemos reescribir la condición del teorema de Olinde-Rodrigues como el sistema

$$\begin{aligned}\frac{fF - eG}{EG - F^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' &= \mu u', \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' &= \mu v'.\end{aligned}$$

Despejando e igualando μ , se llega tras los cálculos a la ecuación deseada. Es interesante, por motivos de visualización, observar que tal ecuación se puede expresar de forma cómoda como un determinante:

$$\begin{vmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

Obtenemos inmediatamente la siguiente caracterización de un tipo especial de parametrizaciones, que enseguida definiremos, y que serán clave en el desarrollo posterior de la sección.

Corolario 3.9 Sea S una superficie regular parametrizada por X . Una condición necesaria y suficiente para que las curvas coordenadas de la parametrización sean líneas de curvatura es que se tenga $F = f = 0$.

Demostración. Si las curvas coordenadas son líneas de curvatura entonces sus direcciones son principales, luego ortogonales, de modo que $F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$. Observemos que como $\langle X_v, N \rangle = 0$, derivando respecto de u , tenemos que $\langle X_{uv}, N \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle$. Además, por el teorema de Olinde-Rodrigues, proposición 3.7, se tendrá $N_u = dN(X_u) = \mu X_u$, de modo que $f = \langle X_{uv}, N \rangle = -\langle X_v, N_u \rangle = -\mu \langle X_v, X_u \rangle = 0$.

Recíprocamente, si $F = f = 0$, se tiene acudiendo a la fórmula para líneas de curvatura del lema 3.8

$$(gE - eG)u'v' = 0,$$

de modo que a lo largo de las curvas coordenadas $u = \text{cte.}$ y $v = \text{cte.}$ se verifica la ecuación, y por tanto son líneas de curvatura. \blacksquare

Tenemos ahora el siguiente interesante resultado general.

Teorema 3.10 Sean S una superficie regular y w_1, w_2 dos campos diferenciables en algún entorno U de un punto $p \in S$ donde, además, son linealmente independientes. Entonces se puede parametrizar un entorno $V \subset U$ de forma que sendas curvas coordenadas sean paralelas a sendos campos en todo punto de V .

Demostración. Una prueba se puede consultar en [Car76, cap. 3, sec. 4, p. 186]. \blacksquare

Es decir, el resultado anterior permite obtener parametrizaciones cuyas curvas coordenadas sean las curvas integrales de cualesquiera dos campos linealmente independientes, localmente. En particular, se desprende una consecuencia crucial para nuestro estudio posterior en esta sección.

Corolario 3.11 Sean S una superficie regular y $p \in S$ un punto no umbílico. Entonces existe una parametrización local X de S alrededor de p tal que las curvas coordenadas $X(u, t)$ y $X(t, v)$, con u, v fijos, son líneas de curvatura.

Demostración. Para una demostración, se puede ver [Car76, cap. 3, sec. 4, corolarios 1 a 4, págs. 187–189]. En esencia, ésta consiste en que por el teorema 3.10, es suficiente ver que localmente en p las líneas de curvatura definen dos campos diferenciables linealmente independientes. Por la fórmula de las líneas de curvatura, lema 3.8, una curva $X(u(t), v(t))$ es línea de curvatura si y sólo si

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0.$$

El resultado se obtiene factorizando y manipulando la expresión. \blacksquare

Definición 3.12 Una parametrización en las condiciones anteriores se llama una **parametrización doblemente ortogonal**. El corolario anterior garantiza su existencia en el caso general.

Vemos que la nomenclatura de las parametrizaciones anteriores está justificada, ya que en ellas se tiene $F = 0$, lo que es equivalente a que los vectores de la base canónica del plano tangente $\{X_u, X_v\}$ sean ortogonales. Una parametrización que verifica esto se dice **ortogonal**. Por otro lado, $f = 0$ se traduce en que $\langle X_{uv}, N \rangle = 0 = \langle X_u, N_v \rangle = \langle X_v, N_u \rangle$.

! El resultado anterior se puede obtener también para curvas asintóticas mediante un razonamiento similar, deduciendo entonces que tales curvas vienen dadas por la ecuación

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0.$$

Será conveniente para su uso posterior particularizar ahora las ecuaciones de Mainardi-Codazzi en el caso en que la superficie esté parametrizada mediante una carta doblemente ortogonal.

Corolario 3.13 Dada una superficie equipada con una parametrización doblemente ortogonal, las ecuaciones de Mainardi-Codazzi se reducen a

$$e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right), \quad g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right).$$

Demostración. La demostración se basa en sustituir en las ecuaciones deducidas en el teorema 3.5, teniendo en cuenta a la hora de calcular los símbolos de Christoffel que $F = f = 0$ por el corolario 3.9. Como antes, se puede consultar por ejemplo [Car76, cap. 4, sec. 3] ó [HP10, cap. 3, sec. 8]. ■

Curvas asintóticas sobre puntos parabólicos

Aplicaremos ahora los conocimientos generales de la subsección anterior al caso que nos ocupa, las superficies planas. Cuando estudiamos los puntos parabólicos, es claro que las curvas asintóticas son líneas de curvatura, debido a que las direcciones principales corresponden a los autovectores del operador forma, y un autovalor es en este caso nulo, representando éste la curvatura normal de la superficie en tal dirección. Comencemos viendo un resultado general sobre la expresión de las curvaturas normales en términos de las curvaturas principales.

Lema 3.14 — Fórmula de Euler. Sea p un punto no umbílico de una superficie regular S , y sea $v \in T_p S$ un vector tangente a S en p unitario, cuyo ángulo respecto a la primera dirección principal es θ . Entonces la curvatura normal de S en p en la dirección de v viene dada por la expresión

$$k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Demostración. Como el punto no es umbílico, existen exactamente dos direcciones principales distintas que, por ser autovectores del operador forma, serán ortogonales. Tomemos en el plano tangente $T_p S$ a S en p la base ortonormal dada por las direcciones principales, digamos $\{e_1, e_2\}$, positivamente orientada. Entonces, todo vector tangente unitario en p podemos expresarlo como $v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$, donde θ es el ángulo de v respecto a e_1 . Se tiene entonces que la curvatura normal es

$$\begin{aligned} k_n(p, v) &= II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= -\langle dN_p(e_1) \cos \theta + dN_p(e_2) \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \langle k_1 e_1 \cos \theta + k_2 e_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usa la ortonormalidad. ■

Obtenemos ahora los primeros resultados relevantes para nuestro estudio.

Lema 3.15 Sean S una superficie regular y $p \in S$ un punto parabólico. Entonces, existe exactamente una dirección asintótica en el plano tangente a S en p .

Demostración. Como el punto es parabólico no puede ser umbílico, de modo que por la fórmula de Euler, lema 3.14, las curvaturas normales en p se pueden expresar mediante la fórmula de Euler como

$$k_n(p, v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta,$$

donde se ha expresado un vector tangente unitario arbitrario v en coordenadas de la base ortonormal positivamente orientada dada por las direcciones principales,

$$v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 = (\cos \theta, \sin \theta) = (x, y).$$

Se tiene pues que las direcciones asintóticas serán las soluciones en x, y de la ecuación

$$0 = k_n(p, v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = k_1 x^2 + k_2 y^2.$$

Si el punto p es parabólico, una de las curvaturas principales es nula. Como el vector $v = (x, y)$ es unitario, es inmediato que la ecuación anterior tiene una única solución, como queríamos ver. ■

! Es interesante notar que, del razonamiento anterior, también se desprende fácilmente el análisis para cualquier otro tipo de puntos. En efecto, para puntos elípticos sendas curvaturas principales tienen el mismo signo, luego la ecuación anterior no tiene solución no nula, de modo que no existen direcciones asintóticas. Para puntos hiperbólicos, las curvaturas principales tienen signos opuestos, luego existen exactamente dos direcciones asintóticas linealmente independientes. Para puntos planos, todas las direcciones son asintóticas.

Es evidente que toda recta es una curva asintótica. Pasemos ahora a ver el siguiente resultado, que refuerza el lema anterior al llevarlo al campo de las superficies planas.

Proposición 3.16 Sean S una superficie regular plana y $p \in U \subset S$ un punto parabólico. Entonces la única curva asintótica de S que pasa por p es un segmento abierto de recta.

Demostración. Como el punto p es parabólico no puede ser umbílico, de modo que por el corolario 3.11 existe una parametrización X de la superficie tal que en un entorno V de p las curvas coordenadas son líneas de curvatura. Como p es parabólico, una de las direcciones principales es asintótica, de modo que una de las líneas de curvatura es una curva asintótica, digamos la dada por $X(t, v)$ con $v = v_0$ constante.

Por el teorema de Olinde-Rodrigues, proposición 3.7, tendremos que $N_u = 0$ a lo largo de tal curva dado que, como se indicó entonces, la función escalar μ corresponde a la curvatura normal en la dirección de la curva, que en este caso es nula por ser una dirección asintótica. Este razonamiento es válido para todo punto de la curva, y derivando

$$\langle X, N \rangle_u = \langle X_u, N \rangle + \langle X, N_u \rangle = 0,$$

debido a que X_u es tangente. Esto implica que, a lo largo de la curva $X(u, v_0)$, $\langle X, N \rangle$ es constante, pero como $N_u = 0$, N también es constante a lo largo de esta curva. De modo que si denotamos $N_0 = N(p)$, tendremos que $N(u, v_0) = N_0$ y concluiremos que $\langle X, N_0 \rangle$ es constante, luego la curva $X(u, v_0)$ está contenida en un plano ortogonal al vector fijo N_0 .

Por otro lado, como $\langle X, N \rangle_u = 0$, se tiene que $\langle X, N \rangle = \varphi(v)$ en todo V . Derivando ahora respecto a v , tenemos igual que antes que $\langle X, N_v \rangle = \varphi'(v)$, y en particular tal producto escalar es constante a lo largo de la curva. Pero como $N_u = 0$ se deduce que $N_{vu} = N_{uv} = 0$, luego N_v también es constante a lo largo de $X(u, v_0)$, y será $N_v(u, v_0) = (N_v)_0 = N_v(p)$. Por tanto $\langle X, N_v \rangle = \langle X, (N_v)_0 \rangle$, de modo que como tal cantidad es constante, concluimos de nuevo que la curva está contenida en un plano normal a $(N_v)_0$.

Terminamos observando que los vectores N_0 y $(N_v)_0$ son linealmente independientes. En efecto, N_v siempre es ortogonal a N y no puede ser nulo, dado que el punto p es parabólico y el módulo de N_v

es la curvatura principal que no es nula, de nuevo por el teorema de Olinde-Rodrigues y por nuestra parametrización por líneas de curvatura. Por tanto, la curva está contenida, en todo un abierto V , en la intersección de dos planos distintos, con lo cual debe ser necesariamente un segmento de recta, como queríamos ver. ■

! Observemos que la hipótesis de que la superficie sea plana, al menos alrededor del punto p a considerar, es esencial. En efecto, los paralelos superior e inferior del toro son curvas asintóticas que no son rectas, a pesar de que sus puntos son parabólicos. Vemos que esto se debe a que este conjunto de puntos parabólicos no es abierto en el toro, mientras que en superficies planas tenemos asegurado que tal conjunto siempre es abierto por el razonamiento inicial de la sección, lo que nos permite realizar las derivaciones en la proposición precedente.

Será conveniente la siguiente expresión de la curvatura de Gauss para parametrizaciones ortogonales.

Proposición 3.17 Dada una superficie regular parametrizada ortogonalmente, se tiene

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right].$$

Demostración. La prueba se basa sencillamente en tener en cuenta que $F = 0$ al calcular los símbolos de Christoffel, y desarrollar con esto la ecuación de Gauss presentada en el teorema 3.5. Se puede consultar una demostración en [HP10, Apéndice C, p. 333]. ■

Para analizar el comportamiento de tales curvas asintóticas sobre superficies planas, presentamos primero un lema auxiliar en el que haremos uso de las ecuaciones de Mainardi-Codazzi. Su demostración es puramente operativa.

Lema 3.18 Sean S una superficie regular plana y $\alpha(s)$ la recta que pasa por un punto parabólico $p \in U \subset S$, donde s es la longitud de arco. Si denotamos por $H(s) = H(\alpha(s))$ la curvatura media de S a lo largo de la curva, entonces en todo el abierto U se tiene

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{H(s)} \right) = 0.$$

Demostración. Como p es parabólico no puede ser umbílico. Introducimos entonces en un cierto entorno $V \subset U$ de p un sistema de coordenadas de modo que las curvas coordenadas sean líneas de curvatura (haciendo uso del corolario 3.11) y, al igual que en la proposición 3.16, supongamos que las curvas $v = \text{cte.}$ son curvas asintóticas.

Por el corolario 3.9, tendremos que $F = f = 0$. Si denotamos por $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ a la curva $v = \text{cte.}$ en la superficie, parametrizada por la longitud de arco por hipótesis, tendremos que $v' = 0$ a lo largo de esta curva. Por ser curva asintótica, verificará la correspondiente ecuación

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0,$$

de modo que $e(u')^2 = 0$ con u no constante, luego debe ser $e = 0$. La ecuación de la curvatura media (2.1) se reduce entonces a

$$H = \frac{g}{2G}. \quad (3.1)$$

Acudiendo a las ecuaciones de Mainardi-Codazzi para el caso de parametrizaciones doblemente ortogonales deducidas en el corolario 3.13, y teniendo en cuenta que $F = f = e = 0$, se desprende que

$$0 = \frac{gE_v}{2G}, \quad g_u = \frac{gG_u}{2G}. \quad (3.2)$$

Explotaremos ahora la información que sendas ecuaciones nos proporcionan. Observemos antes de nada que no puede ser $g = 0$ puesto que entonces $H = 0$, y en consecuencia p sería plano y no parabólico. De

manera que debe, ser por la primera ecuación, $E_v = 0$. Luego $E = E(u)$ no depende de v a lo largo de la curva α . Es lícito entonces definir el siguiente cambio de parámetro.

$$\bar{u} = \int \sqrt{E(u)} du, \quad \bar{v} = v.$$

En adelante eliminaremos las barras por simplicidad de notación. Observemos que la nueva expresión del parámetro u mide la longitud de arco de α , es decir, la curva $v = \text{cte.}$, pues $E = \langle X_u, X_u \rangle$ y X_u es la velocidad de esta curva. Así pues, en esta nueva parametrización, se tiene que $u = s$ y $E = 1$. Por tanto, acudiendo a la fórmula de la curvatura de Gauss para parametrizaciones ortogonales dada en la proposición 3.17, se tiene

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{G}} \left(\frac{G_u}{\sqrt{G}} \right)_u = \frac{-1}{\sqrt{G}} (\sqrt{G})_{uu} = 0.$$

Se deduce entonces que debe ser necesariamente

$$\sqrt{G} = c_1(v)u + c_2(v). \quad (3.3)$$

Ahora, de la segunda ecuación de (3.2), como $g \neq 0$, podemos deducir que

$$\frac{g_u}{g} = \frac{G_u}{2\sqrt{G}\sqrt{G}} = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}}.$$

Dicho de otro modo, $(\log g)_u = (\log \sqrt{G})_u$, luego integrando y tomando exponenciales se tendrá

$$g = c_3(v)\sqrt{G}. \quad (3.4)$$

Introduciendo ambas igualdades (3.3) y (3.4) en la expresión para la curvatura media H de la ecuación (3.1) tenemos

$$H = \frac{g}{2G} = \frac{c_3(v)\sqrt{G}}{2\sqrt{G}\sqrt{G}} = \frac{c_3(v)}{2\sqrt{G}} = \frac{c_3(v)}{2(c_1(v)u + c_2(v))}.$$

Como $u = s$, es inmediato que derivando $1/H$ con respecto a s dos veces se obtiene 0, como queríamos ver. Antes de terminar, recordemos que la ecuación (3.1) dependía del hecho de que $F = f = e = 0$, por lo que tenemos que justificar que en la nueva parametrización esto se sigue verificando. Recuperamos de nuevo la notación de barras para los nuevos parámetros. Aplicando la regla de la cadena, como \bar{u} sólo depende de u y $\frac{d\bar{v}}{dv} = 1$, tenemos que

$$X_u = \frac{d\bar{u}}{du} X_{\bar{u}}, \quad X_v = X_{\bar{v}}, \quad X_{uu} = \frac{d^2\bar{u}}{du^2} X_{\bar{u}\bar{u}}, \quad X_{uv} = \frac{d\bar{u}}{du} X_{\bar{u}\bar{v}}, \quad X_{vv} = X_{\bar{v}\bar{v}}.$$

De lo anterior se deduce fácilmente que

$$\bar{e} = \frac{d^2\bar{u}}{du^2} e = 0, \quad \bar{F} = \frac{d\bar{u}}{du} F = 0, \quad \bar{f} = \frac{d\bar{u}}{du} f = 0,$$

como queríamos ver. ■

En el siguiente resultado estudiamos el comportamiento de los segmentos de rectas asintóticas que, por la proposición 3.16, pasan por todo punto parabólico. Veremos que nunca pueden llegar a cortar a P , el conjunto de los puntos planos. Por tanto, o bien se mantienen indefinidamente en U , o bien terminan en la frontera de la superficie, que no está incluida en ésta por regularidad. La siguiente definición surge de manera natural.

Definición 3.19 Diremos que una curva asintótica que pasa por $p \in S$ es maximal si no está contenida propiamente en otra curva asintótica que pase por p .

Corolario 3.20 Sea S una superficie regular plana y sea r una curva asintótica maximal que pasa por $p \in U \subset S$. Entonces $r \cap P = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que la curva asintótica maximal r que pasa por p contuviera un punto plano q , y digamos que $r(0) = p$. Tomémosla parametrizada por la longitud de arco. Como la curva también pasa por un punto parabólico y es conexa, tendrá algún punto de la frontera de U , digamos $r(s_0) = p_0$. Además, como U es abierto, se tendrá que $p_0 \in P$, es decir, p_0 es plano. Podemos tomarlo sin pérdida de generalidad como el primer punto plano contenido en r , es decir, tal que $r(s) \in U$ para todo $0 \leq s < s_0$.

Haciendo ahora uso del lema 3.18, se deduce que la curvatura media H viene dada, a lo largo de la curva, por una expresión de la forma

$$H(s) = \frac{1}{as + b},$$

con a, b constantes, y $H(s) = H(r(s))$. Como los puntos de P verifican $H = 0$ y P es cerrado, podemos tomar límites en s con $s < s_0$, obteniendo así

$$0 = H(p_0) = \lim_{s \rightarrow s_0^+} H(s) = \lim_{s \rightarrow s_0^-} \frac{1}{as + b},$$

lo cual es una clara contradicción. Así pues, una curva asintótica que pase por un punto parabólico ha de mantenerse siempre dentro del abierto U de puntos parabólicos. ■

Clasificación de superficies planas completas

Culminaremos en esta subsección el teorema que motiva toda la sección. Como se mencionó al comienzo de la misma, la superficie S está dividida en dos subconjuntos disjuntos P y U correspondientes a los puntos planos y parabólicos, respectivamente. Es fácil ver que sus fronteras en S coinciden.

Lema 3.21 Sea S una superficie regular plana. Entonces $Bd(P) = Bd(U) \subset P$.

Demostración. La frontera de P es el conjunto de puntos tales que todo entorno suyo contiene puntos de P y puntos de $S \setminus P$, pero esto es U , luego se trata del conjunto de puntos tales que todo entorno suyo contiene puntos planos y parabólicos. Pero lo mismo se puede decir, por simetría, de la frontera de U . El último contenido se deduce del hecho de que P es cerrado, por lo que contiene a su frontera. ■

Estudiamos seguidamente el comportamiento de tal frontera. Veremos que necesariamente está compuesta de una unión de segmentos de recta.

Proposición 3.22 Sean S una superficie regular plana, $Bd = Bd(P) = Bd(U) \subset P \subset S$ la frontera común y $p \in Bd$ un punto de ella. Entonces por p pasa un único segmento de recta $C \subset S$ que, además, está contenido en Bd .

Demostración. Como $p \in Bd(U)$ será un punto límite de U , luego podemos tomar una sucesión $\{p_n\}_n \subset U$ tal que $p_n \rightarrow p$. Para cada punto p_n , que es parabólico, tomamos la única curva asintótica maximal C_n que pasa por él (véase el lema 3.15), que sabemos se trata de un segmento abierto de recta (véase la proposición 3.16). Probaremos que las direcciones de estas rectas tienden a una dirección fija independiente además de la sucesión. Usaremos esto para ver que el límite de las rectas C_n sigue siendo un segmento abierto de recta, y finalmente que está contenido en Bd . Luego se trata de la curva C buscada.

Tomemos una esfera Σ centrada en p suficientemente pequeña si es necesario, y consideremos las intersecciones q_n de C_n con Σ . Como Σ es compacto, los q_n se acumulan en un cierto $q \in \Sigma$, y como $p_n \rightarrow p$, que es el centro de la esfera, puede ser que también se acumulen en el punto antipodal. No puede haber más. En efecto, de haber otro punto r de acumulación, podríamos encontrar subsucesiones de puntos convergentes a q y a r , de modo que habría puntos arbitrariamente cercanos p_n, p_m tales que C_n, C_m formarían un ángulo mayor que

$$\frac{1}{2} \angle(pq, pr).$$

Sin embargo, esto no es posible, dado que las curvas asintóticas son solución de una ecuación diferencial respecto al punto de la superficie, concretamente $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0$, donde los coeficientes son funciones diferenciables, de modo que la solución general ha de ser continua. Por tanto, no puede haber dos puntos de acumulación de q_n no antipodales. De este modo, las direcciones de C_n tienden a una dirección fija, la que une q con su punto antipodal.

Para ver que tales puntos de acumulación no dependen de la sucesión escogida basta realizar el mismo argumento. Dada otra sucesión $p'_n \rightarrow p$ con otro punto de acumulación q' , si fuera q' distinto de q o de su punto antipodal, se podría considerar la sucesión mixta p_n, p'_n que convergería a p , y obtendríamos puntos arbitrariamente cercanos con C_n, C'_n formando un ángulo mayor que la cantidad positiva fija $\frac{1}{2}\angle(pq, pq')$, contradiciendo de nuevo la continuidad de las curvas asintóticas como solución general de la ecuación diferencial anterior.

Tenemos pues que $p_n \rightarrow p$ y las direcciones de los segmentos asociados convergen, de modo que los segmentos C_n en sí también convergen (puntualmente) a un cierto segmento de recta $C \subset S$ que pasa por p . Para ver que efectivamente es un segmento abierto que no se reduce a p aplicaremos un razonamiento análogo. Por un lado, si fuera $C = \{p\}$ tendríamos que p sería punto de acumulación de los extremos de los segmentos C_n . Sin embargo, como los C_n son maximales, se sigue del corolario 3.20 que tales extremos pertenecen a la frontera de S , que no está incluida en S por regularidad. Y dado que ésta es cerrada en \mathbb{R}^3 , se tendría que p tampoco está en S , contradicción. Por el mismo razonamiento se ve que C es un segmento abierto. En efecto, de contener sus extremos, tales puntos serían de acumulación de los extremos de C_n y por tanto no estarían en S .

Visto que C es un segmento abierto de recta, finalicemos viendo que $C \subset Bd$. Dado $q \in C$, como $C_n \rightarrow C$, existe $q_n \rightarrow q$ con $q_n \in C_n$. Ahora, al estar $C_n \subset U$ por el corolario 3.20, se deduce que $q \in U \cup Bd(U) = U \cup Bd$. Si fuera $q \notin Bd$ se tendría por tanto $q \in U$. Como C es una curva asintótica, por el lema 3.15 es la única que pasa por q , y por el corolario 3.20, estará contenida en U , de donde $p \in U$ pues $p \in C$. Esto es una contradicción pues $p \in Bd \subset P$ por ser P cerrado. Esto termina la prueba. ■

Se deduce de forma inmediata que, como dijimos, la frontera de los puntos parabólicos y los puntos planos es una unión de segmentos rectilíneos. Estamos en condiciones de probar ya el resultado principal de la sección. Pero antes, un resultado auxiliar nada trivial.

Lema 3.23 Si todos los puntos de una superficie regular conexa S son umbílicos, entonces S está contenida en un plano o una esfera.

Demostración. Se puede ver una prueba en [Car76, cap. 3, sec. 3, prop. 4, p. 153] o en [HP10, cap. 3, sec. 4, teorema 3.4.7, p. 122]. ■

Para el teorema final, conviene recordar la definición y las propiedades básicas de una superficie completa. El teorema fundamental que nos habilita a establecer la definición usual de superficie completa es el teorema de *Hopf-Rinow*. Recordemos que en toda superficie podemos definir una **distancia intrínseca** dada por la menor longitud entre todas las curvas en la superficie uniendo cada pareja de puntos.

Teorema 3.24 — Teorema de Hopf-Rinow. Dada una superficie S conexa, son equivalentes:

- I) S es métricamente completa con la distancia intrínseca.
- II) S es geodésicamente completa en un punto.
- III) S es geodésicamente completa.
- IV) S verifica el teorema de Heine-Borel.

Demostración. Se puede consultar [HP10, cap. 7, sec. 2] ó [Car76, cap. 5, sec. 3]. ■

Hay que recordar que una superficie es métricamente completa si toda sucesión de Cauchy es convergente. Por otro lado, una superficie es geodésicamente completa si las geodésicas están definidas (como aplicaciones) en todo \mathbb{R} .

Definición 3.25 Cuando se verifican las condiciones del teorema 3.24, decimos que la superficie S es **completa**.

Del resultado anterior se deducen algunas propiedades que necesitaremos para el teorema final.

Definición 3.26 Una superficie es **extendible** si está contenida propiamente en otra superficie con igual número de componentes conexas.

Corolario 3.27 Toda superficie regular completa es cerrada y no extendible.

Demostración. Se puede consultar [HP10, cap. 7, sec. 2, prop. 7.2.8 y prop. 7.2.11, págs. 269–270] ó [Car76, cap. 3, sec. 4, prop. 1 y prop. 5, págs. 327 y 332]. ■

Recordemos finalmente la **aplicación exponencial**, que necesitaremos para el colofón. Se trata de una aplicación $\exp_p : T_p S \rightarrow S$ que, para cada vector tangente v a S en p , recorre a partir de p una distancia $|v|$ sobre la única geodésica maximal que pasa por p con dirección v . Esta existencia y unicidad se deduce de reducir el problema de las geodésicas a un sistema de ecuaciones diferenciales. Se puede consultar una prueba en [HP10, cap. 5, sec. 2, p. 189]. Se tiene entonces el siguiente resultado sobre la exponencial en el caso especial de superficies completas.

Proposición 3.28 Sea S una superficie regular con aplicación exponencial \exp_p en cada punto. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

- I) Si $K = 0$ entonces \exp_p es una isometría local para todo p de S .
- II) Si $K \leq 0$ y S es completa, entonces \exp_p es una aplicación recubridora para todo p de S .

Demostración. Se puede consultar en [Car76, cap. 5, sec. 6B] a lo largo del lema 1, su corolario, y la proposición 7. ■

Es conveniente recordar que una **aplicación recubridora** es una aplicación continua y sobreyectiva tal que, para cada punto del conjunto imagen, existe un entorno cuya preimagen es una unión disjunta de abiertos de forma que la restricción de la aplicación a tales abiertos es un homeomorfismo. Observemos que esta noción, cuando el número de abiertos es siempre uno, coincide con la de homeomorfismo local. Se trata por tanto de una relajación de tal concepto. Destaquemos ahora una de las propiedades clave de las aplicaciones recubridoras: la posibilidad de *levantar curvas*, que será útil para el teorema final de la sección.

Definición 3.29 Sean $\pi : \bar{S} \rightarrow S$ una aplicación continua, y $\alpha : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ una curva en S . Entonces decimos que una curva en \bar{S} dada por $\bar{\alpha} : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{S}$ es un **levantamiento** de α si se verifica $\alpha = \pi \circ \bar{\alpha}$. Llamaremos al punto $\alpha(0)$ el **origen** del levantamiento.

! Nótese que, a pesar de la notación, lo anterior no tiene porqué estar definido en superficies. Se trata, de hecho, de una definición general para espacios topológicos cualesquiera.

Es decir, un levantamiento de una curva es una aplicación que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \bar{S} \\
 & \nearrow \bar{\alpha} & \downarrow \pi \\
 I \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha} & S
 \end{array}$$

Proposición 3.30 Sean $\pi : \bar{S} \rightarrow S$ una aplicación recubridora, $\alpha : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ una curva en S con origen en un punto p , y \bar{p} una preimagen de p por π . Entonces existe un único levantamiento $\bar{\alpha} : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{S}$ con origen en \bar{p} .

Demostración. Se puede consultar una prueba en [Car76, cap. 5, sec. 6, prop. 2, p. 376]. ■

Culminamos finalmente la sección demostrando el teorema final.

Teorema 3.31 Sea S una superficie regular plana, conexa y completa. Entonces S es necesariamente un plano o un cilindro.

Demostración. Supongamos que S no es un plano. Entonces no todos los puntos serán planos. En efecto, de serlo, todos los puntos serían umbílicos y por el lema 3.23 la superficie sería un fragmento de plano por conexión. Así, como la superficie es plana, existe un abierto U no vacío de puntos parabólicos. Al igual antes, denotemos por $P = S \setminus U$ al conjunto cerrado de puntos planos de S . Como el interior de P es un abierto formado por puntos planos, de nuevo por el lema 3.23 se tendrá que cada componente conexa de $\text{int}P$ es un fragmento de plano. Definamos por simplicidad el conjunto $Q = S \setminus \text{int}P = U \cup Bd$ con $Bd = Bd(U) = Bd(P)$ (véase el lema 3.21).

El esquema de la prueba es el siguiente. En primer lugar, probaremos que por cada punto $q \in Q$ pasa una única recta $C(q) \subset Q \subset S$, y que todas estas rectas son, o bien coincidentes, o bien no se cortan. En segundo lugar, reforzaremos esta afirmación viendo que si no son coincidentes entonces son paralelas. Esto lo haremos llevando las rectas al plano tangente mediante la exponencial y trabajando allí, para luego conectar los resultados mediante las propiedades de la exponencial anteriormente demostradas. En tercer lugar, veremos que $\text{int}P$ debe ser necesariamente una banda de plano delimitada por dos rectas paralelas. De aquí deduciremos finalmente que la superficie ha de ser un cilindro. Observemos antes de comenzar con los detalles que, por el corolario 3.27, S no puede tener frontera (pues por ser cerrada debería contenerla y esto viola la regularidad) y tampoco puede ser un fragmento de cilindro o plano (pues la superficie sería extendible).

Paso 1. Comenzamos pues tomando un punto $q \in Q$, digamos $q \in U$. Entonces por q pasa una única curva r asintótica maximal (lema 3.15) que es un segmento de recta (proposición 3.16) y que no interseca con P (corolario 3.20). Como r es un segmento de recta, será una geodésica dado que su curvatura geodésica es nula, y por el teorema de Hopf-Rinow (teorema 3.24) observamos que no puede ser un segmento finito. De ser así, basta parametrizar por la longitud del arco y obtendríamos una geodésica no definida en todo \mathbb{R} , contradiciendo la completitud. Así pues, r es una recta completa contenida en S que denotaremos por $C(q)$. Por el corolario 3.20 es $C(q) \subset U$, pues al ser la superficie completa no tiene frontera por el corolario 3.27. Esto prueba la existencia de las rectas. Para ver que dos rectas distintas no pueden cortarse, como éstas están contenidas en U , el punto de intersección estaría en U , y en él se violaría la unicidad de curvas maximales que garantiza el lema 3.15.

Estudiemos ahora el otro caso, sea $q \in Bd$. Por la proposición 3.22, existe un único segmento de recta r contenido en Bd pasando por q . Por el teorema de Hopf-Rinow se deduce de nuevo que tal segmento debe ser una recta completa $C(q) \subset Bd$. La unicidad en este caso no se deduce como antes pues los puntos son planos y no parabólicos, pero se desprende de la unicidad que garantiza la proposición 3.22 mediante un argumento análogo.

Finalmente, tampoco dos de estas rectas $C(p)$ y $C(q)$ se cortan si $p \in U$ y $q \in Bd$, pues de nuevo cada recta está contenida en los respectivos conjuntos, que por ser U abierto, son disjuntos. Con esto queda terminado el primer paso.

Paso 2. Lo siguiente será probar que todas estas rectas son, de hecho, paralelas o coincidentes, y como dijimos, haremos esto levantando las rectas al plano tangente. En primer lugar, vamos a ver que los levantamientos de rectas distintas no pueden cortarse en el plano tangente, luego han de ser necesariamente paralelos. En segundo lugar, probaremos la existencia de rectas que pasan por puntos de $\text{int}P$, el conjunto que nos faltaba. En tercer lugar, veremos que todas estas rectas son paralelas entre sí en la superficie, trasladando la información que conocemos del plano tangente mediante la exponencial.

Tomemos $q \in Q$ y $p \in U$. Por ser S conexa existe una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Por la proposición 3.28 y nuestras hipótesis, la exponencial es una aplicación recubridora. Por tanto, por la proposición 3.30 podemos levantar la curva α al plano tangente, obteniendo una curva $\bar{\alpha} : [0, 1] \rightarrow T_p S$ con origen el 0. Ahora podemos usar la exponencial para *proyectar* esta curva de nuevo sobre la superficie.

Así, para cada punto $\bar{\alpha}(t) \in T_p S$ tal que $\alpha(t) = \exp_p \bar{\alpha}(t) \in Q = U \cup Bd$, podemos considerar la recta $C(\alpha(t))$ que hemos probado existe, y su respectivo levantamiento $r_t \subset T_p S$ por la exponencial. Como por la proposición 3.28 la exponencial es una isometría local, se tendrá que los levantamientos r_t también son rectas. Ahora, estudiar el comportamiento de estas rectas en un plano es mucho más sencillo, pues no existe la posibilidad de que se crucen. Dados dos puntos $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, si $v \in r_{t_1} \cap r_{t_2}$, entonces se tendría que $\exp_p(v) \in C(\alpha(t_1)) \cap C(\alpha(t_2))$. Sin embargo, como tales rectas pasan por puntos distintos, no pueden cortarse, llegando en consecuencia a una contradicción. Por tanto, las rectas r_{t_1} y r_{t_2} tampoco se cortan, de modo que son paralelas.

Ahora vamos a probar también la existencia de las rectas $C(\alpha(t))$ para los puntos $\alpha(t) = \exp_p \bar{\alpha}(t) \in \text{int}P$. Consideremos en $T_p S$ la recta r que pasa por $\bar{\alpha}(t)$ con dirección paralela a todas las obtenidas en el párrafo anterior. Debe tenerse que $\exp_p(r) \subset P$, pues si intersecase con Q , se violaría la unicidad de las rectas en cada punto de tal conjunto, ya probada. Como r es una geodésica por ser una recta y \exp_p es una isometría local, $\exp_p(r)$ es una recta y una geodésica. Por el argumento empleado en párrafos anteriores, no puede ser un segmento de recta pues esto contradiría la completitud, luego es una recta completa. Denotamos de este modo $C(\alpha(t)) = \exp_p(r)$ para cada $\alpha(t) \in \text{int}P$. En conclusión, $C(\alpha(t))$ define ahora una recta para todo $t \in [0, 1]$.

Vamos ya a probar que las rectas $C(\alpha(t))$ son paralelas para todo $t \in [0, 1]$. Para cada $t \in [0, 1]$, como la aplicación exponencial es una isometría local, podemos considerar el entorno V_t de $\bar{\alpha}(t)$ tal que \exp_p es una isometría en V_t . Si consideramos ahora el correspondiente intervalo $I_t \subset [0, 1]$ tal que $\bar{\alpha}(s) \in V_t$ para todo $s \in I_t$, que evidentemente incluye a t , obtenemos un cubrimiento de $[0, 1]$. Por compacidad, podemos obtener un subcubrimiento finito, que indexamos como V_i, I_i . Entonces, dados $t_1, t_2 \in I_i$ con $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, sabemos que las rectas r_{t_1} y r_{t_2} son paralelas en $T_p S$, luego por ser \exp_p una isometría en cada V_i , tenemos que $\exp_p(r_{t_1} \cap V_i)$ y $\exp_p(r_{t_2} \cap V_i)$ son segmentos paralelos. Observemos que estos segmentos no se pueden reducir a puntos por ser los V_i abiertos, y tampoco pueden ser vacíos pues $t_1, t_2 \in I_i$. En definitiva, esto nos indica que las rectas $\exp_p(r_{t_1})$ y $\exp_p(r_{t_2})$ también son paralelas por contener segmentos abiertos no vacíos paralelos.

Podemos extender este proceso para toda pareja de puntos $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ con $t_1, t_2 \in [0, 1]$. En efecto, tomando puntos en las intersecciones de los I_i , obtenemos que las rectas de distintos V_i son también paralelas, y como hay una cantidad finita, la propiedad se cumple en todo $[0, 1]$. En particular, las rectas inicial y final $C(p)$ y $C(q)$ son paralelas. Cambiando el punto q por otro cualquiera de Q se obtienen rectas paralelas con $C(p)$ y por tanto entre sí, con lo cual, queda probado que todas las rectas $C(p)$ con $p \in Q$ son paralelas en S .

Paso 3. Vamos finalmente a culminar el teorema en este último paso. Recordemos que, por la proposición 3.22, la frontera Bd entre el conjunto de los puntos planos y los puntos parabólicos está constituida por una unión de segmentos de recta contenidos en Bd . Como $Bd \subset Q$, lo demostrado en el paso anterior nos permite asegurar que todos estos segmentos son paralelos. Además, de nuevo por el argumento de completitud y el teorema de Hopf-Rinow realizados en el primer paso de la demostración, estos segmentos son rectas completas. Así pues, la única posibilidad es que cada componente conexa de $\text{int}P$, que ya sabemos se trata de un fragmento de plano, sea una banda plana.

De este modo, por cada punto $p \in \text{int}P$ también podemos definir una única recta $C(p)$, paralela a los márgenes de la banda, que se mantiene contenida en $\text{int}P$. Concluimos que por todo punto de la superficie S pasa exactamente una recta, que ahora podemos llamar generatriz puesto que cubren toda la superficie, luego S es una superficie reglada. Finalmente, como todas las generatrices son paralelas, S es un cilindro, lo que termina la prueba. ■

3.2 Curvatura media nula

En este apartado vamos a probar que las únicas superficies regladas minimales son el plano y el helicoides. Recordemos que las superficies minimales son exactamente aquéllas con curvatura media idénticamente nula. De hecho, para proceder en la prueba, será conveniente recordar una serie de caracteri-

zaciones bien conocidas de las superficies minimales. Recordemos que una parametrización del helicoides cuyo eje es el eje Z viene dada por

$$X(t, s) = (s \cos t, s \sin t, at),$$

donde $a > 0$ es la velocidad (constante) a la que se recorre el eje, lo cual determinará la cercanía de las hojas del helicoides.

Proposición 3.32 El helicoides dado por la parametrización anterior es una superficie minimal, es decir, tiene curvatura media idénticamente nula.

Demostración. Recordemos que la curvatura media en general viene dada por la fórmula

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}.$$

Será suficiente ver que $e = g = F = 0$ para probar que $H = 0$. Calculemos los vectores de la base canónica del plano tangente al helicoides:

$$\begin{aligned} X_t &= (-s \sin t, s \cos t, a), \\ X_s &= (\cos t, \sin t, 0). \end{aligned}$$

Por otro lado, las derivadas segundas vienen dadas por

$$\begin{aligned} X_{tt} &= (-s \cos t, -s \sin t, 0), \\ X_{ts} &= (-\sin t, \cos t, 0), \\ X_{ss} &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Como $g = \langle N, X_{ss} \rangle$ se deduce que $g = 0$, y también es inmediato que $F = \langle X_t, X_s \rangle = 0$. Finalmente, tenemos que

$$\det(X_t, X_s, X_{tt}) = \begin{vmatrix} -s \sin t & s \cos t & a \\ \cos t & \sin t & 0 \\ -s \cos t & -s \sin t & 0 \end{vmatrix} = -as \cos t \sin t + as \cos t \sin t = 0,$$

de modo que

$$e = \langle N, X_{tt} \rangle = \left\langle \frac{X_t \wedge X_s}{|X_t \wedge X_s|}, X_{tt} \right\rangle = \frac{\det(X_t, X_s, X_{tt})}{|X_t \wedge X_s|} = 0,$$

con lo cual terminamos la prueba. ■

Probado que el helicoides es una superficie minimal, pasamos ahora a demostrar que se trata de hecho de la única superficie reglada no plana que es minimal. Para ello, necesitaremos primero recordar ciertos resultados sobre superficies minimales.

3.2.1 Sobre superficies minimales

Las superficies minimales se caracterizan por numerosas propiedades, en particular, nosotros haremos uso de que, bajo ciertas condiciones, las superficies minimales son aquéllas cuya parametrización es armónica. Este enlace permitirá extender propiedades de funciones analíticas a las superficies minimales, que usaremos para probar nuestro resultado. Primero, necesitamos introducir un par de conceptos previos.

Definición 3.33 Dada una superficie parametrizada por $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$, se dice que la parametrización es **isoterma** si los coeficientes de su primera forma fundamental son $E = G = \mu > 0$ y $F = 0$. La aplicación μ se llama el **factor de escala** o el **factor de conformidad**.

Es decir, en una parametrización isoterma, los vectores de la base canónica del plano tangente a la superficie X_t y X_s son siempre ortogonales y de igual longitud $\sqrt{\mu}$. El nombre del factor de conformidad se debe a que toda parametrización isoterma es conforme con factor de escala μ . Recordemos la definición brevemente.

Definición 3.34 Dadas dos superficies S_1 y S_2 de \mathbb{R}^3 , decimos que una aplicación $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ es **conforme** si existe una función escalar $\mu : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ verificando que $|d\varphi_p(v)| = \mu(p)|v|$, para todo $v \in T_p S_1$. La aplicación μ se llama el **factor de escala** o el **factor de conformidad**.

Es decir, la diferencial de una aplicación conforme preserva la escala de los vectores tangentes en cada punto, ya que las normas de éstos se ven modificadas por el mismo valor, $\mu(p)$. Es inmediata entonces la siguiente propiedad.

Lema 3.35 Toda parametrización isoterma es conforme.

Demostración. Sea μ el factor de escala de la parametrización isoterma. Expresando la parametrización mediante $X(t, s)$ como es habitual, dado un punto $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ y dado un vector $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$|dX_{(t,s)}(u, v)|^2 = |uX_t + vX_s|^2 = |u|^2|X_t|^2 + |v|^2|X_s|^2 = \mu^2(|u|^2 + |v|^2) = \mu^2|(u, v)|^2,$$

donde el teorema de Pitágoras aplica debido a que $\{X_t, X_s\}$ son ortogonales. Esto prueba el lema. ■

Los dos siguientes resultados demuestran lo que veníamos anticipando.

Proposición 3.36 Sea S una superficie parametrizada por X isoterma. Entonces se verifica que

$$X_{tt} + X_{ss} = (e + g)N = 2\mu HN.$$

Demostración. Como X es isoterma, $F = \langle X_t, X_s \rangle = 0$. Derivando respecto a s , $\langle X_{ts}, X_s \rangle + \langle X_t, X_{ss} \rangle = 0$, y despejando, $\langle X_{ts}, X_s \rangle = -\langle X_t, X_{ss} \rangle$.

Por otro lado, como $E = \langle X_t, X_t \rangle = \langle X_s, X_s \rangle = G$, derivando respecto a t se deduce $\langle X_{tt}, X_t \rangle = \langle X_{ts}, X_s \rangle = -\langle X_t, X_{ss} \rangle$.

Despejando de lo anterior se tiene $\langle X_{tt} + X_{ss}, X_t \rangle = 0$. Un argumento simétrico nos lleva análogamente a que $\langle X_{tt} + X_{ss}, X_s \rangle = 0$. Esto quiere decir que el vector $X_{tt} + X_{ss}$ es ortogonal al plano tangente, y por tanto es colineal con el vector normal unitario N . En consecuencia podemos escribir

$$X_{tt} + X_{ss} = \langle X_{tt} + X_{ss}, N \rangle N = (\langle X_{tt}, N \rangle + \langle X_{ss}, N \rangle) N = (e + g)N.$$

Y, calculando la curvatura media de la superficie, tenemos que

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{e + g}{2\mu}.$$

Así pues, llegamos a que

$$X_{tt} + X_{ss} = (e + g)N = 2\mu HN. \quad \blacksquare$$

Corolario 3.37 Sea S una superficie parametrizada por X isoterma. Entonces S es minimal si y sólo si X es armónica.

Demostración. Como $X_{tt} + X_{ss} = (e + g)N = 2\mu HN$, S es minimal si y sólo si $H = 0$, lo que es equivalente a que $X_{tt} + X_{ss} = 0$, es decir a que X sea armónica. ■

Es natural preguntarse por la existencia de parametrizaciones isotermas, a fin de poder sacar el máximo partido al resultado anterior. La propiedad que indicamos sin demostración a continuación resuelve satisfactoriamente el problema.

Teorema 3.38 Dada una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ y un punto $p \in S$, existe una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es isoterma, con $p \in X(U)$.

Demostración. Para el caso particular de superficies minimales, que son las que nos ocupan en esta sección, se pueden encontrar pruebas en [FT91, sec 3.1, p. 54] y en [Oss86, lema 4.4, p. 31]. Para pruebas en condiciones más generales, se pueden consultar los recursos que mencionamos a continuación.

En el caso de superficies arbitrarias con métrica analítica, una prueba se puede encontrar en [AS60, sec 2.5, p. 125]. En el caso de superficies arbitrarias con métrica Hölder continua, la condición más general de la que conocemos resultados, se pueden encontrar pruebas similares en [Ber58, Lectures 3–5] y en [Che55]. ■

El teorema anterior nos garantiza que podemos asumir, en resultados futuros, que estamos trabajando con parametrizaciones X isotermas. En estas condiciones, si la superficie parametrizada por X es minimal, entonces X es armónica. Recordemos que en \mathbb{R} esto implica que X es analítica, lo que nos permite extender un par de propiedades de las funciones analíticas al terreno de las superficies minimales. En concreto, tenemos los resultados siguientes, ya adaptados para superficies minimales.

Teorema 3.39 — Principio de reflexión de Schwarz-Riemann. Supongamos que una superficie minimal S contiene un segmento de recta ℓ . Consideremos S^* la reflexión de S en torno a ℓ , es decir, S^* es una superficie minimal simétrica de S respecto de ℓ . Entonces la unión $S \cup S^*$ es una superficie regular minimal.

Demostración. Se trata de una extensión del principio de reflexión para funciones analíticas. Se puede encontrar una prueba, en el caso más general de superficies minimales en el espacio euclídeo n -dimensional, en [Oss86, sec. 7, lema 7.3, p. 54]. ■

Teorema 3.40 — Teorema de unicidad. Dadas dos superficies regulares minimales S_1 y S_2 , si su intersección $S_1 \cap S_2$ contiene un abierto, entonces su unión $S = S_1 \cup S_2$ es una superficie regular minimal.

Demostración. Se trata de una extensión de un principio de unicidad para funciones analíticas. Una prueba puede consultarse en [FT91, sec 3.2, corolario 3, p. 61]. ■

Observemos que del primer teorema se desprende que si una superficie regular minimal contiene un segmento de recta, entonces ésta y su simétrica respecto de la recta deben unirse de forma suave. Por otro lado, del segundo teorema se tiene que si dos superficies regulares minimales coinciden en un abierto, entonces una debe contener a la otra.

3.2.2 Caracterizando las superficies minimales regladas

Con las herramientas anteriores, estamos en condiciones de demostrar el resultado que buscamos. Para ello, probamos primero un lema sorprendente, que refleja una propiedad que será clave para estudiar las superficies minimales regladas. Resulta que, en una superficie reglada minimal, todo par de generatrices son simétricas respecto de una generatriz intermedia.

Lema 3.41 Sea S una superficie reglada minimal con directriz $\alpha(t)$. Sean ℓ_0 y ℓ_1 las generatrices de S que parten de los puntos de la directriz $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$, respectivamente, con $t_0, t_1 \in I$. Entonces, existe una generatriz ℓ intermedia, es decir, que corta a la directriz en un punto $\alpha(t)$ con $t \in (t_0, t_1)$, que es el eje de simetría entre ℓ_0 y ℓ_1 .

Demostración. Dados dos puntos cualesquiera $r, s \in I$ con $r < s$, denotemos por $S[r, s]$ al fragmento de la superficie S que consiste en la unión de las generatrices que cortan a la directriz en puntos $\alpha(t)$, con $r \leq t \leq s$. Equivalentemente, se trata de la restricción de la superficie parametrizada por X al dominio $[r, s] \times \mathbb{R} \subset I \times \mathbb{R}$.

Tomemos una generatriz intermedia arbitraria ℓ pasando por un punto $\alpha(t')$, con $t_0 \leq t' \leq t_1$. Consideremos la reflexión $S^*[t_0, t']$ del fragmento de superficie $S[t_0, t']$ respecto a la generatriz ℓ . Entonces, $\bar{S} = S[t_0, t'] \cup S^*[t_0, t']$ es, por el principio de reflexión, una superficie regular minimal. Y por el teorema de unicidad, como su intersección con S contiene un abierto, pues de hecho contiene $S[t_0, t']$, tenemos que ambas deben coincidir en su dominio de definición.

Dicho de otro modo, o bien \bar{S} contiene a $S[t_0, t_1]$, o bien coincide con $S[t_0, t^*]$ para algún $t_0 < t^* < t_1$. Si t' tiende a t_0 , entonces se da el segundo caso y, además, también t^* tiende a t_0 . Por otro lado, si t' tiende a t_1 , entonces a partir de cierto punto, t^* es mayor que t_1 , y por tanto se da el primer caso.

Por continuidad existe un valor t' , entre t_0 y t_1 , tal que $t^* = t_1$, o dicho de otro modo, tal que \bar{S} coincide con $S[t_0, t_1]$. En particular, se tiene que ℓ_1 es el simétrico de ℓ_0 respecto de ℓ , como buscábamos. ■

El lema justifica la siguiente definición.

Definición 3.42 Dadas dos generatrices ℓ_0, ℓ_1 de una superficie reglada minimal, llamaremos **línea media** de ℓ_0 y ℓ_1 a la generatriz ℓ que es eje de simetría entre ambas.

A continuación, definimos un concepto que será la base del teorema final.

Definición 3.43 Dada una superficie reglada arbitraria, llamamos **marco** a una familia de generatrices que es densa en la superficie.

Naturalmente, todo marco determina unívocamente la superficie reglada correspondiente. En efecto, si dos superficies regladas tienen dos marcos iguales entonces, por continuidad, las propias superficies coinciden.

Esto nos permite reducir el estudio de superficies regladas al de sus marcos respectivos. Construiremos un marco correspondiente a una superficie reglada minimal, y veremos que debe ser, necesariamente, el marco de un plano o de un helicoides.

Teorema 3.44 — Teorema de Catalan. Una superficie reglada minimal no plana es un fragmento de helicoides.

Demostración. Sea S una superficie reglada minimal arbitraria con directriz $\alpha(t)$. Tomemos dos generatrices ℓ_0 y ℓ_1 distintas cualesquiera que corten a la directriz en puntos $\alpha(t_0)$ y $\alpha(t_1)$, respectivamente. Por el lema 3.41, la línea media $\ell_{1/2}$ es una generatriz de S intermedia a ℓ_0 y ℓ_1 .

Asimismo, podemos considerar $\ell_{1/4}$ la generatriz de S que es línea media de ℓ_0 y $\ell_{1/2}$, y $\ell_{3/4}$ la generatriz línea media de $\ell_{1/2}$ y ℓ_1 . Procediendo inductivamente, en el paso n obtenemos una familia de $2^n + 1$ generatrices denotadas por $\ell_{j/2^n}$ con $j = 0, \dots, 2^n$, donde además cada par de generatrices cuyos índices difieren en un número par, tienen a su eje de simetría en la familia.

En el límite, obtenemos una familia de generatrices que es densa en $S[t_0, t_1]$. Denotemos por L a este marco. Para obtener un marco de la superficie completa, procedemos como sigue. Denotemos por S_1^* a la superficie resultante de reflejar $S[t_0, t_1]$ respecto de ℓ_1 , y S_0^* a la resultante de reflejar $S[t_0, t_1]$ respecto de ℓ_0 . Entonces tomando la unión obtenemos, de nuevo por los dos teoremas anteriores y el razonamiento seguido en la demostración del lema anterior, una superficie regular minimal S_1 que deberá verificar que, o bien contiene a S , o bien está contenido en ella.

Continuando el proceso de reflexión, en el límite, obtenemos una superficie regular minimal S_∞ que, por el mismo razonamiento, deberá contener a S . Observemos que no podría ser que S estuviera estrictamente a S_∞ . De ser así, bastaría tomar un punto de S que no esté en S_∞ , considerar la generatriz que pasa por ese punto, digamos la que parte de $\alpha(t')$, y considerar $S[t_0, t']$ (o $S[t', t_0]$, según sea el valor de t'). Entonces, como la distancia entre t_0 y t' es finita, basta reflejar $S[t_0, t_1]$ suficientes veces en ambas direcciones para llegar a cubrir la susodicha generatriz, llegando a una contradicción.

Realizando el mismo proceso de reflexión con el marco L , obtenemos marcos para las superficies reflejadas anteriores. En particular, en el límite, obtenemos L_∞ , un marco de la superficie S_∞ que contiene a nuestra superficie S .

Resta probar que L_∞ corresponde al marco de un plano o de un helicoides. El primer caso es sencillo. Si las generatrices de partida ℓ_0 y ℓ_1 son paralelas o se cortan, entonces la línea media de ellas es, por ser el eje de simetría, o bien también paralela, o bien la bisectriz de ambas, respectivamente. En cualquier caso, las tres rectas son coplanarias. Procediendo inductivamente todo el marco obtenido está en un plano, lo cual sigue siendo verdad al reflejar. Por tanto, en este caso obtenemos el marco de un plano.

Supongamos ahora que las generatrices ℓ_0 y ℓ_1 se cruzan. Consideremos el plano Π paralelo a ambas rectas, es decir, generado por $w(t_0)$ y $w(t_1)$. Denotemos por ℓ'_0 y ℓ'_1 a las proyecciones ortogonales de ℓ_0 y ℓ_1 sobre el plano Π , respectivamente. Asimismo, sea P el punto de intersección de ℓ'_0 y ℓ'_1 , que existe pues las rectas originales se cruzan. Finalmente, consideremos Z la recta ortogonal al plano Π que pasa por P .

Vamos a probar que el eje Z es el eje del helicoides que estamos buscando. Si $\ell = \ell_{1/2}$ es la línea media de ℓ_0 y ℓ_1 , entonces por ser eje de simetría $d(\ell, \ell_0) = d(\ell, \ell_1)$, ℓ es coplanaria con ℓ_0 y ℓ_1 , y su proyección ℓ' en el plano Π es la bisectriz de las proyecciones ℓ'_0 y ℓ'_1 .

Dado que el eje Z pasa por P , entonces ℓ_0 y ℓ_1 cortan a Z , digamos en z_0 y z_1 , respectivamente. Como ℓ es coplanaria con ℓ_0 y ℓ_1 , y su proyección pasa por P , también corta a Z , digamos en un punto z . Además, este corte es ortogonal, ya que Z es ortogonal al plano generado por ℓ'_0 y ℓ'_1 .

Como las distancias entre rectas se miden perpendicularmente, y en este caso la recta perpendicular a ℓ, ℓ_0, ℓ_1 es Z , esto quiere decir que las distancias entre tales rectas se alcanzan en la dirección de Z . Y al ser $d(\ell, \ell_0) = d(\ell, \ell_1)$, entonces $d(z, z_0) = d(z, z_1)$.

En resumen, la terna de generatrices ℓ_0, ℓ, ℓ_1 son coplanarias, cortan al eje Z en puntos equidistantes, y sus proyecciones sobre el plano $Z^\perp = \Pi$ verifican $\sphericalangle(\ell'_0, \ell') = \sphericalangle(\ell', \ell'_1)$. Por tanto, esta terna de rectas pertenece a un helicoides de eje la recta Z , y lo mismo ocurre con toda terna de generatrices que se escoja de L_∞ donde una de ellas sea la línea media de las otras dos.

Para acabar, hay que justificar que todas las ternas pertenecen al mismo helicoides. Para verlo, basta realizar la misma construcción que se realizó con el marco, y aplicar el razonamiento anterior. Es decir, tomamos $\ell_{1/4}$ la línea media de ℓ_0 y ℓ , que de nuevo será coplanaria con estas rectas. La distancia $d(\ell_{1/4}, \ell_0) = d(\ell_{1/4}, \ell)$ será además la mitad que la distancia $d(\ell, \ell_0) = d(\ell, \ell_1)$, y el ángulo $\sphericalangle(\ell'_0, \ell'_{1/4}) = \sphericalangle(\ell'_{1/4}, \ell')$ también será la mitad que el ángulo $\sphericalangle(\ell'_0, \ell') = \sphericalangle(\ell', \ell'_1)$, por ser su proyección sobre Π la bisectriz de ℓ'_0 y ℓ' .

Procediendo por inducción se obtiene que L_∞ es el marco de un helicoides con eje o directriz la recta Z . Por la observación realizada anteriormente, deducimos que la propia superficie S_∞ coincide con el susodicho helicoides, y como tal superficie contiene a S , concluimos que S es un fragmento de helicoides, como queríamos ver. ■

3.3 Clasificación de superficies doblemente regladas

En los ejemplos de la sección 1.1 vimos que el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico eran superficies doblemente regladas. Evidentemente, el plano también es doblemente reglado. En esta sección vamos a ver que, de hecho, éstas son las únicas superficies regulares doblemente regladas que hay.

Para verlo, definiremos lo que llamaremos superficies generadas por un trío de rectas, y veremos que a la postre se trata exactamente de todos los posibles hiperboloides y paraboloides hiperbólicos, concluyendo que esta propiedad caracteriza tales superficies. Terminaremos viendo que toda superficie doblemente reglada conexa y no plana ha de tener necesariamente esta propiedad, de donde se deduce el resultado principal de la sección.

La referencia fundamental para esta sección es [FT07, Lec. 16]. Un método de demostración alternativo puede encontrarse en [Spi99], problema 11 del capítulo 3, problemas 14 y 16 del capítulo 4 y las referencias

contenidas en el mismo. En éste, el procedimiento se basa en probar que una superficie doblemente reglada ha de ser necesariamente cuadrática. Como éstas están totalmente clasificadas, sabemos que las únicas doblemente regladas son, efectivamente, el hiperboloide de una hoja y el paraboloides hiperbólico.

3.3.1 Superficies generadas por un trío de rectas

Recordemos brevemente la siguiente definición.

Definición 3.45 Cualesquiera objetos son **coplanarios** si existe un plano que los contiene a todos.

Observemos que, en el caso de dos rectas, esto es equivalente a decir que ambas rectas se cortan o son paralelas, es decir, no se cruzan. Veamos ahora un breve resultado auxiliar antes de continuar, del cual la unicidad es la pieza clave.

Lema 3.46 Sean P un punto y ℓ_1, ℓ_2 dos rectas tales que $P \notin \ell_i$, y tales que los tres objetos no son coplanarios. Entonces existe una única recta pasando por P que es coplanaria con cada ℓ_i .

Demostración. Consideremos Π_i el plano conteniendo a P y a ℓ_i para $i = 1, 2$. Tales planos siempre existen, y como $P \notin \ell_i$, son únicos. Además no son paralelos, pues ambos contienen al mismo punto P , ni son coincidentes pues las rectas ℓ_i no son coplanarias con P .

Por tanto, su intersección es una recta, $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$ que contiene al punto P . El plano Π_i contiene todos los vectores que unen P con puntos de ℓ_i , a partir de lo cual es fácil ver que r está en las condiciones del enunciado.

Si las rectas ℓ_i eran originalmente paralelas, entonces eran coplanarias luego P no está en el mismo plano. Se tiene entonces que r es paralela con ellas.

Si se cortaban, entonces el vector que une el punto de corte con P estaba en sendos Π_i , luego está en r , y por tanto r corta a ambas rectas.

Finalmente, si se cruzaban, tenemos dos casos esencialmente distintos. Consideremos Π_1 . Si este plano corta a ℓ_2 , entonces el vector que pasa por este punto de corte y por P también está en Π_2 , luego es el vector director de la recta r , y se deduce que tal recta corta a ambas ℓ_i .

Si Π_1 no corta a ℓ_2 , entonces la recta r corta a ℓ_1 y es paralela a ℓ_2 , luego de nuevo está en las condiciones del enunciado.

La unicidad se deduce de que una recta r que contenga a P y corte o sea paralela a ℓ_i , debe pertenecer necesariamente a Π_i . Aplicándolo a sendas rectas se deduce que debe ser $\Pi_1 \cap \Pi_2$. ■

Lema 3.47 Sea S un hiperboloide de una hoja o un paraboloides hiperbólico, y sean \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 las dos familias de generatrices linealmente independientes. Todo par de generatrices de una misma familia se cruzan, mientras que todo par de generatrices de familias distintas son coplanarias.

Demostración. En los ejemplos 1.4 y 1.5 estudiamos sendas superficies, y mostramos explícitamente sus dos familias de generatrices. Probaremos el resultado para el hiperboloide de una hoja. El procedimiento para el paraboloides hiperbólico es análogo. Consideremos la ecuación canónica del hiperboloide de una hoja,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La doble familia de generatrices correspondiente viene dada por

$$X^\pm(t, s) = (a \cos t, b \sin t, 0) + s(\mp a \sin t, \pm b \cos t, c).$$

Observemos que se está empleando como directriz el paralelo del hiperboloide contenido en el plano $z = 0$, el cual se trata de una elipse de radios a y b que es, además, la línea de estricción del hiperboloide. El parámetro t determina la generatriz, mientras que el parámetro s determina el punto en cada generatriz.

Es fácil ver, en primer lugar, que dos generatrices de una misma familia no se puede cortar, pues el punto de corte estaría en la superficie y sus dos generatrices, por definición, pertenecen a familias distintas. Tampoco pueden ser paralelas. En efecto, como unos vectores directores de las generatrices son $(\mp a \operatorname{sent} t, \pm b \operatorname{cost} t, c)$, si dos generatrices fueran paralelas tendrían vectores directores proporcionales, pero como la tercera componente es fija, los vectores directores anteriores habrían de coincidir. Pero entonces coinciden tanto el seno como el coseno del parámetro t , luego el parámetro t queda determinado (módulo 2π). En consecuencia, también la generatriz queda determinada, luego ambas generatrices en el razonamiento anterior han de coincidir.

Vamos ahora a ver que dos generatrices de familias distintas son coplanarias, es decir, se cortan o son paralelas. Afirmamos que dada una generatriz de una familia, la única generatriz de la otra familia que es paralela es la que parte del punto opuesto de la elipse, mientras que el resto se cortan. En efecto, los vectores directores de dos generatrices de parámetros t y t' vienen dados por $(-a \operatorname{sent} t, b \operatorname{cost} t, c)$ y $(a \operatorname{sent} t', -b \operatorname{cost} t', c)$ respectivamente. Igualando, se tiene que debe ser $\operatorname{sent} t = -\operatorname{sent} t'$ y $\operatorname{cost} t = -\operatorname{cost} t'$. La única posibilidad es que sea $|t - t'| = \pi$, luego son puntos opuestos de la elipse.

Consideremos ahora dos generatrices dadas por las expresiones siguientes, y calculemos el punto de corte suponiendo que no parten de puntos opuestos de la elipse.

$$\begin{aligned} & (a(\operatorname{cost} t - s \operatorname{sent} t), b(\operatorname{sent} t + s \operatorname{cost} t), cs), \\ & (a(\operatorname{cost} t' + s' \operatorname{sent} t'), b(\operatorname{sent} t' - s' \operatorname{cost} t'), cs'). \end{aligned} \quad (3.5)$$

De la tercera componente se sigue que debe ser $s = s'$, y de las dos primeras deducimos

$$\begin{aligned} \operatorname{cost} t - s \operatorname{sent} t &= \operatorname{cost} t' + s \operatorname{sent} t', \\ \operatorname{sent} t + s \operatorname{cost} t &= \operatorname{sent} t' - s \operatorname{cost} t'. \end{aligned}$$

Despejando el parámetro s de ambas igualdades se tiene

$$s = \frac{\operatorname{cost} t - \operatorname{cost} t'}{\operatorname{sent} t + \operatorname{sent} t'}, \quad s = \frac{\operatorname{sent} t' - \operatorname{sent} t}{\operatorname{cost} t' + \operatorname{cost} t}.$$

Obsérvese que ambos denominadores no pueden ser simultáneamente nulos, pues en tal caso se tendría que $\operatorname{sent} t = -\operatorname{sent} t'$ y $\operatorname{cost} t = -\operatorname{cost} t'$ y, por tanto, las generatrices serían opuestas. En consecuencia, una de las dos expresiones anteriores está bien definida, y se puede comprobar como sustituyendo en (3.5), se obtienen efectivamente valores iguales, luego llegamos así a un verdadero punto de corte. Además, en el caso en que ambas expresiones están bien definidas, es inmediato ver que coinciden, pues su igualdad resulta ser equivalente a $\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t = \operatorname{sen}^2 t' + \operatorname{cos}^2 t'$. ■

De la unicidad del lema 3.46 y el lema 3.47 anterior se desprende el siguiente resultado.

Corolario 3.48 Sea S un hiperboloide de una hoja o un paraboloides hiperbólico, y sean \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 las dos familias de generatrices linealmente independientes. Dado un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ de tres generatrices cualquiera, se tiene que \mathcal{F}_2 es precisamente la familia de rectas coplanarias con \mathcal{F} .

Demostración. Dada $\mathcal{F} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$, el lema 3.47 nos dice que toda generatriz de \mathcal{F}_2 es coplanaria con ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 , de hecho con todas las generatrices de \mathcal{F}_1 . Veamos ahora el otro contenido, que toda recta ℓ coplanaria con ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 pertenece a \mathcal{F}_2 .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que ℓ corta a ℓ_1 en un punto P , ya que no puede ser paralela con todas, pues, de nuevo por el lema 3.47, las generatrices de una misma familia se cruzan.

El punto P pertenece por tanto a S , de modo que existe una recta ℓ' de \mathcal{F}_2 que pasa por P . Por ser $\ell' \in \mathcal{F}_2$, será coplanaria con ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 . Por la unicidad del lema 3.46, una recta que pasa por P coplanaria con ℓ_2 y ℓ_3 es única, luego debe ser $\ell' = \ell$, y por tanto $\ell \in \mathcal{F}_2$, como queríamos ver. ■

Naturalmente, en el resultado anterior se pueden invertir los papeles de las familias. Pasamos pues a la definición central de la sección.

Definición 3.49 Sea $\mathcal{F} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ una familia de tres rectas que se cruzan dos a dos. La unión S de todas las rectas coplanarias con \mathcal{F} es una superficie reglada que llamamos **superficie generada por un trío de rectas** o superficie generada por las rectas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 .

Observemos que las rectas de la superficie de la definición 3.49 las tenemos caracterizadas por el lema 3.46. En efecto, por cada punto de ℓ_3 pasa exactamente una recta coplanaria con ℓ_1 y ℓ_2 , y finalmente existe a lo sumo una única recta paralela a ℓ_3 que corta a ℓ_1 y ℓ_2 , lo que da una familia uniparamétrica de rectas. La justificación de que tal unión de rectas es una superficie regular se deducirá del teorema siguiente.

Teorema 3.50 Sea $\mathcal{F} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ una familia de tres rectas que se cruzan dos a dos, y sea S la superficie generada por \mathcal{F} . Entonces:

1. Si los vectores directores de las rectas no son coplanarios, S es un hiperboloide de una hoja.
2. En caso contrario, S es un paraboloides hiperbólico.

Para abordar el teorema 3.50 vamos a estudiar sendos casos por separado en los lemas siguientes, y luego uniremos la información.

El objetivo general será probar, en el primer caso, que S está descrita en un cierto sistema de coordenadas por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, mientras que en el segundo caso, por $z = xy$.

Lema 3.51 Sea $\mathcal{F} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ una familia de tres rectas que se cruzan dos a dos, cuyos vectores directores no son coplanarios. Entonces existe un sistema de coordenadas respecto del cual las rectas vienen descritas por

$$\begin{aligned} \ell_1: & \quad x = -z, \quad y = 1; \\ \ell_2: & \quad x = z, \quad y = -1; \\ \ell_3: & \quad x = 1, \quad y = z. \end{aligned}$$

Demostración. Veamos en primer lugar que para cada recta ℓ_i existe otra, ℓ'_i , que es paralela a ℓ_i y corta a las otras dos, y además es única.

En efecto, fijemos i y j . Como no son paralelas, existe un único plano Π paralelo a ambas conteniendo a ℓ_j . El plano no contiene a ℓ_i porque entonces ambas rectas serían coplanarias. Por hipótesis, este plano no es paralelo a la tercera línea, ℓ_k , luego intersecan.

Sea C el punto de intersección entre Π y ℓ_k , y consideremos la recta que pasa por C paralela a ℓ_i . Esta recta por construcción corta a ℓ_k , y además está contenida en Π , luego también corta a ℓ_j , dado que no era paralela con ℓ_j . En resumen, esta recta está en las condiciones que buscamos.

Observemos que el plano Π se puede ver como el conjunto de todas las rectas paralelas a ℓ_i que cortan a ℓ_j . Por tanto, dada una recta l paralela a ℓ_i que corte a ℓ_j y a ℓ_k , deberá pertenecer a Π y pasar por C , luego se trata de la recta construida en el párrafo anterior. Deducimos de aquí la unicidad buscada.

Es lícito entonces definir las rectas ℓ'_i como las únicas rectas paralelas a ℓ_i que cortan a las otras dos, para $i = 1, 2, 3$.

Observemos ahora que las rectas ordenadas como $\ell_1, \ell'_2, \ell_3, \ell'_1, \ell_2, \ell'_3$ forman un hexágono en el espacio con los lados opuestos paralelos. Denotemos por A, B, C, D, E, F los vértices del hexágono en el orden anterior (A siendo la intersección de ℓ_1 y ℓ'_2 , y así sucesivamente, hasta $F = \ell'_3 \cap \ell_1$). Véase la figura 3.1. Vamos a probar que este hexágono es simétrico respecto de un cierto punto central en su interior, que será el nuevo origen de coordenadas.

Observemos que como las rectas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 se cruzan dos a dos, sus vectores directores (que coinciden con los de las rectas ℓ'_i) son una base de \mathbb{R}^3 . Tomando el vector que une dos vértices opuestos, se tiene, recorriendo el hexágono en sendas direcciones, las igualdades

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AF} + \vec{FE} + \vec{ED}.$$

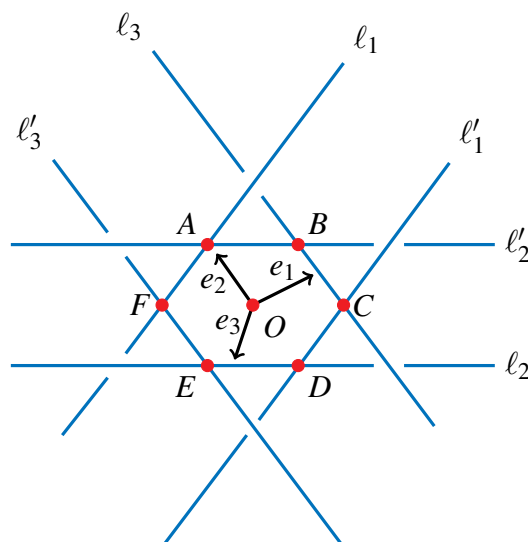


Figura 3.1: Superficie generada por un trío de rectas: direcciones no coplanarias

Dado que estas expresiones son dos presentaciones del mismo vector como combinación lineal de vectores proporcionales a los de una base, deben medir lo mismo, luego $\vec{AB} = \vec{ED}$, $\vec{BC} = \vec{FE}$ y $\vec{CD} = \vec{AF}$. Concluimos pues que los lados opuestos del hexágono, además de ser paralelos, tienen la misma longitud, de donde se deduce que el hexágono es simétrico respecto de un punto central.

Sea O el centro de simetría, y consideremos una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ dada por los vectores siguientes:

$$e_1 = \vec{OP}, \quad e_2 = \vec{OA}, \quad e_3 = \vec{OB} - e_1 - e_2,$$

donde P es el punto medio entre B y C . Estos vectores también se pueden apreciar en la figura 3.1. Es inmediato que e_1 y e_2 no están alineados, pues el simétrico de A respecto de O es D .

Por otro lado, e_3 no puede ser combinación lineal de e_1 y e_2 , pues de ser así, \vec{OB} también lo sería. Deduciríamos entonces que B es coplanario con O, A y con el punto medio de B y C . Pero entonces también C estaría en este plano, y por la simetría central respecto de O , todo el hexágono estaría en un plano, cosa que es falsa, pues las rectas que lo forman se cruzan dos a dos.

En resumen, $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una verdadera base con origen el punto O . Es fácil observar que los vértices del hexágono tienen, en esta base, las coordenadas que muestra la figura 3.2.

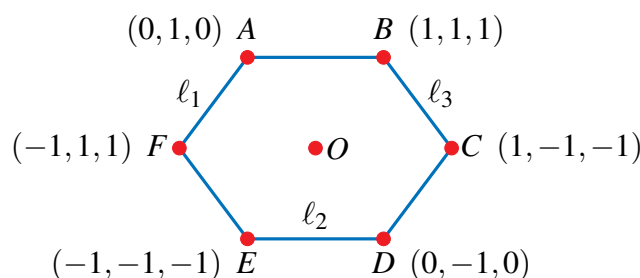


Figura 3.2: Superficie generada por un trío de rectas: direcciones no coplanarias, nueva base

Se observa entonces que las coordenadas de los puntos A y F verifican ambas que $y = 1$ y que $x = -z$, y del mismo modo, todos los puntos de la recta $A + t(F - A)$, que es ℓ_1 , son de la forma $(-t, 1, t)$ luego también lo verifican. Por tanto, éstas son las ecuaciones de la primera recta en la nueva base.

De modo análogo, las coordenadas de ℓ_2 verifican $y = -1$ y $x = z$, y las coordenadas de ℓ_3 verifican $x = 1$ y $z = y$, como queríamos ver. ■

Estudiemos ahora el segundo caso. Sea $\mathcal{F} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ una familia de tres rectas que se cruzan dos a dos, y supongamos que sus vectores directores son coplanarios. Denotemos por Π_i los planos paralelos conteniendo a las rectas ℓ_i para $i = 1, 2, 3$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que Π_2 se encuentra entre Π_1 y Π_3 , y denotemos por a al cociente entre la distancia de Π_1 a Π_2 y la distancia de Π_2 a Π_3 . Tenemos entonces el siguiente resultado.

Lema 3.52 Sea $\mathcal{F} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ una familia de tres rectas que se cruzan dos a dos, cuyos vectores directores son coplanarios. Con la notación anterior, existe un sistema de coordenadas respecto del cual las rectas vienen descritas por

$$\ell_1 : y = -a, \quad z = -ax;$$

$$\ell_2 : y = 0, \quad z = 0;$$

$$\ell_3 : y = 1, \quad z = x.$$

Demostración. Fijemos dos rectas m_1 y m_2 distintas que intersequen a ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en puntos $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$, respectivamente. La situación concreta puede observarse en la figura 3.3. Tales rectas existen; de hecho, existe una familia uniparamétrica de ellas.

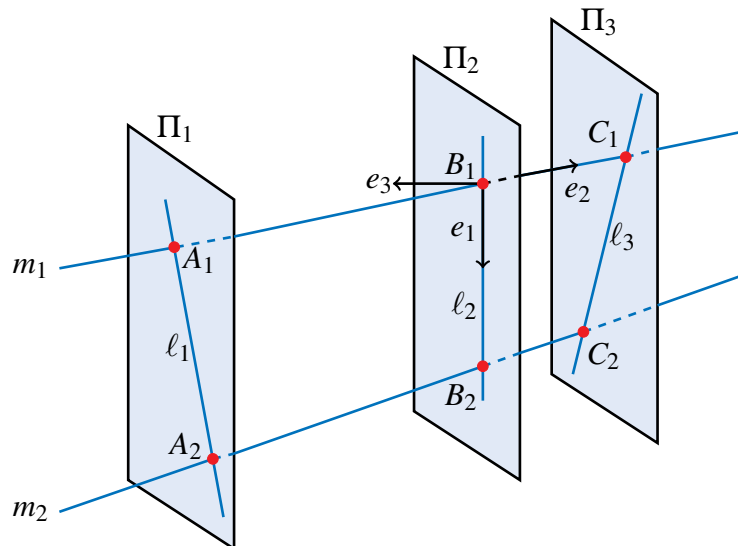


Figura 3.3: Superficie generada por un trío de rectas: direcciones coplanarias

En efecto, como las rectas se cruzan dos a dos, si tomamos ℓ_1 y un punto cualquiera de ℓ_2 , tenemos un único plano, y éste cortará en un único punto a ℓ_3 . Esto determina una única recta r que pasa por los mencionados puntos de ℓ_2 y ℓ_3 , que además cortará también a ℓ_1 ya que es coplanaria con ella pero no paralela.

Para ver que r no puede ser paralela a ℓ_1 , basta observar que r une puntos de ℓ_2 y ℓ_3 , que se cruzan. Por tanto, la dirección de r no pertenece al plano que generan los vectores directores de ℓ_2 y ℓ_3 . Pero el vector director de ℓ_1 también pertenece a este plano por hipótesis, luego r no es paralela a ℓ_1 .

Como en el lema anterior, vamos a definir explícitamente el nuevo sistema de coordenadas. Tomemos B_1 como origen, y como base, los vectores

$$e_1 = \overrightarrow{B_1 B_2}, \quad e_2 = \overrightarrow{B_1 C_1}, \quad e_3 = \overrightarrow{B_1 C_2} - e_1 - e_2.$$

Véase la figura 3.3 para más detalles. De nuevo, comprobamos fácilmente que tal conjunto es una base. Como las rectas se cruzan, es inmediato que e_1 y e_2 no están alineados.

Por otro lado, si e_3 fuera combinación lineal de e_1 y e_2 , entonces también lo sería $\overrightarrow{B_1C_2}$, y esto implicaría que los puntos B_1, B_2, C_1 y C_2 serían coplanarios, lo cual aseguraría que las rectas ℓ_2 y ℓ_3 serían paralelas, una contradicción.

Las coordenadas de los puntos B_i y C_i en esta base son inmediatas. Por otro lado, como los planos Π_i son paralelos, se tiene la relación

$$\frac{|\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{B_1C_1}|} = \frac{|\overrightarrow{A_2B_2}|}{|\overrightarrow{B_2C_2}|} = a,$$

de modo que las coordenadas de A_1 son $-ae_2 = (0, -a, 0)$, y las coordenadas de A_2 son $B_2 - a(C_2 - B_2) = (1, -a, -a)$, como se observa en la figura 3.4.

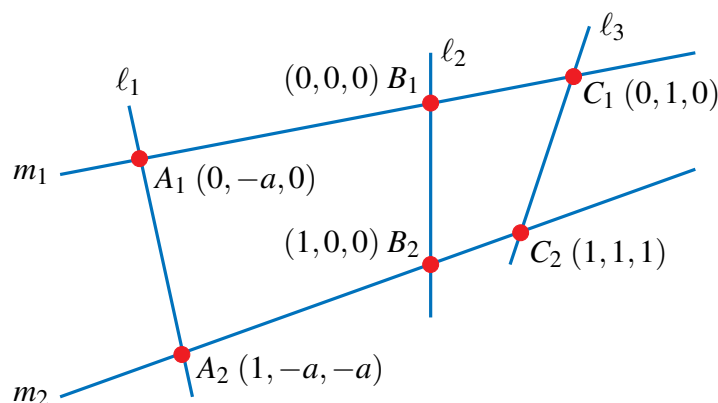


Figura 3.4: Superficie generada por un trío de rectas: direcciones coplanarias, nueva base

Como en el lema anterior, se observa que las coordenadas de los puntos A_1 y A_2 verifican en esta base que $y = -a$ y $z = -ax$, y que los puntos de la recta que los une, que podemos escribir como $(0, -a, 0) + t(1, 0, -a) = (t, -a, -at)$, también. De modo que éstas son las ecuaciones de ℓ_1 en la nueva base. Análogamente ocurre con las ecuaciones de ℓ_2 y ℓ_3 . ■

Demostración del Teorema 3.50. Supongamos que los vectores directores de las rectas no son coplanarios. Entonces por el lema 3.51 tenemos que existe una base en la cual las ecuaciones de las rectas son

$$\begin{aligned} \ell_1 : \quad x &= -z, \quad y = 1; \\ \ell_2 : \quad x &= z, \quad y = -1; \\ \ell_3 : \quad x &= 1, \quad y = z. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Es inmediato que tales rectas verifican $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, luego pertenecen a un hiperboloide de una hoja en este sistema de coordenadas. Denotemos por S' a tal superficie.

Por el corolario 3.48, cada familia de generatrices del hiperboloide es exactamente la unión de las rectas coplanarias con una terna de rectas cualquiera de la otra familia de generatrices. Por tanto, como ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 son tres rectas que se cruzan dos a dos y pertenecen a S' , se deduce que pertenecen a la misma familia de generatrices por el lema 3.47 y, en consecuencia, S' es exactamente la superficie generada por ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 , en el sentido de la definición 3.49.

Como el cambio de coordenadas realizado para obtener las ecuaciones (3.6) en el lema 3.51 es afín, lleva rectas a rectas, y por tanto también es cierto que la preimagen de S' es la superficie generada por ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en el sistema de coordenadas canónicas. Pero esto es S por definición. Luego $S = S'$ es un hiperboloide de una hoja como queríamos ver.

El segundo caso tiene un estudio análogo. De acuerdo al lema 3.52, existe un sistema de coordenadas en el cual las rectas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 tienen ecuaciones

$$\begin{aligned}\ell_1: & y = -a, \quad z = -ax; \\ \ell_2: & y = 0, \quad z = 0; \\ \ell_3: & y = 1, \quad z = x.\end{aligned}$$

De nuevo es claro que las tres rectas verifican la ecuación $z = xy$, luego pertenecen a un paraboloides hiperbólico que podemos denotar por S' .

Al igual que antes, del lema 3.47 y el corolario 3.48 se deduce que, como ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 se cruzan dos a dos y pertenecen a S' , S' es precisamente la superficie generada por ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 . Y de nuevo, por ser el cambio de coordenadas afín, resulta que S coincide con S' por ser la superficie generada por ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 en el sistema canónico. En conclusión, S es un paraboloides hiperbólico como queríamos ver. ■

Cerramos la sección con una interesante consecuencia adicional, que concierne a la enumeración.

Consideremos el problema de hallar un plano que contenga a un cierto conjunto de puntos. Si hay dos puntos en el conjunto, el problema tiene infinitas soluciones, mientras que si hay cuatro, no habrá en general solución salvo que tales puntos sean, casualmente, coplanarios. Sin embargo, si hay exactamente tres puntos, el problema tendrá solución única salvo en el caso de que sean, casualmente, colineales.

Observemos un problema similar, el de hallar un plano que pase por un punto dado y sea paralelo a un cierto conjunto de rectas. El número de rectas a dar para asegurar solución única al problema es, evidentemente, dos, asumiendo que son rectas distintas.

Pensemos finalmente en otro problema análogo, el de hallar una recta que sea coplanaria con un cierto conjunto de rectas que se cruzan dos a dos. ¿Cual es ahora el comportamiento del problema según la cantidad de rectas que pongamos? La respuesta es una consecuencia directa del teorema 3.50.

Corolario 3.53 Dadas 4 rectas que se cruzan dos a dos, y suponiendo que no pertenecen a una misma cuádrica, pueden existir 0, 1 ó 2 rectas a lo sumo que sean coplanarias con las cuatro.

Demostración. Denotemos por $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ a las rectas. Las rectas coplanarias con ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 forman una superficie que, por el teorema 3.50, es un hiperboloides de una hoja o un paraboloides hiperbólico. En general, forman una superficie cuadrática S .

La cuarta recta ℓ_4 intersecará por tanto a la superficie en 0, 1 ó 2 puntos. Cada uno de estos puntos de intersección pertenece exactamente a una recta coplanaria con ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 , en concreto a una generatriz de S (no de la familia a la que pertenecen ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Esta generatriz, por tanto, es coplanaria con $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$.

No puede haber más rectas coplanarias, pues cualquier otra debe pertenecer necesariamente a S por el corolario 3.48 y, o bien intersecar con ℓ_4 , o bien ser paralela a ella. Las que intersecan las hemos contemplado arriba. Por otro lado, no existen rectas paralelas a ℓ_4 que pertenezcan a S , pues por el lema 3.47 como ℓ_4 se cruza con ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 se deduciría que ℓ_4 pertenece a la misma familia de generatrices, descartado por hipótesis. ■

Observemos que la situación de que un conjunto de rectas se crucen dos a dos es la situación más usual, y se conoce como **situación general**. En efecto, dadas dos parejas de puntos, éstos determinan una pareja de rectas. Supuesta la elección de puntos al azar en algún conjunto tridimensional, una vez escogidos los tres primeros, la probabilidad de que el cuarto sea coplanario con éstos es cero, ya que el plano que forman los tres primeros tiene medida nula. Por tanto, la probabilidad de que las rectas sean coplanarias es también cero.

Lo mismo ocurre con el hecho de que 4 rectas que se cruzan dos a dos pertenezcan a una misma cuádrica. Las 3 primeras definen una única cuádrica, y la probabilidad de que la cuarta pertenezca a ella es cero. Esto quiere decir intuitivamente que el último teorema, así como el resto de los presentados en esta sección, se pueden aplicar *casi siempre*.

3.3.2 Hiperboloide de una hoja y paraboloides hiperbólicos

Antes de probar el resultado principal de la sección, necesitamos una propiedad que, de por sí, tiene mucho interés. Definimos, como es natural, una **superficie triplemente reglada** como una superficie tal que por cada punto pasan al menos tres rectas linealmente independientes. Equivalentemente, se trata de una superficie con tres familias independientes de generatrices.

Veremos que, en esencia, sólo el plano es triplemente reglado. Esto es algo que se deduciría como consecuencia de nuestra clasificación de las superficies doblemente regladas, pero resulta que para ella necesitamos a priori este resultado, por tanto, hemos de probarlo independientemente.

Teorema 3.54 Sean S una superficie reglada y P un punto de ella tal que hay tres rectas distintas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 pasando por P y contenidas en S . Entonces, o bien S contiene un disco plano centrado en P , o bien S consiste en la unión de rectas que pasan por P .

Demostración. Como este es un resultado local, podemos hacer uso de que toda superficie regular se puede ver, en un entorno de cada punto, como el grafo de una función diferenciable. Véase [HP10, cap. 2, prop. 2.1.6, p. 69]. Explotaremos esencialmente el hecho de poder proyectar biyectivamente la superficie de forma ortogonal sobre un plano, en un cierto dominio D del mismo. Es importante observar que la proyección ortogonal de una recta es una recta.

Tomemos pues las tres rectas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 que pasan por P y obtengamos sus proyecciones en el dominio D , digamos $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3$ y P' . Ahora, tomemos otro punto Q de la superficie suficientemente cercano a P , tal que la recta PQ no está en la superficie. Si este punto no existe, es que toda la superficie está formada por rectas que pasan por P . Por ser la superficie reglada, sea ℓ una recta en S que pasa por Q (y no por P), y consideremos sus proyecciones ortogonales ℓ' y Q' en D .

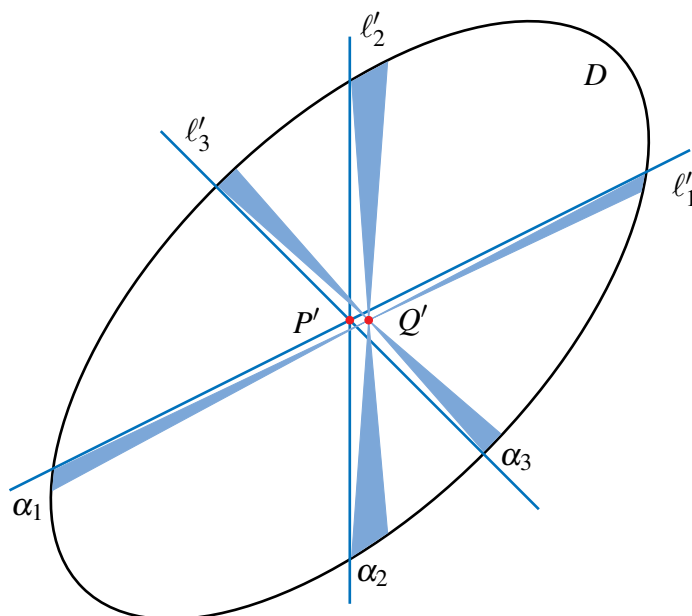


Figura 3.5: Superficie triplemente reglada: sectores disjuntos

Si el dominio D fuera todo el plano, entonces, como las tres rectas ℓ'_i se cortan en P' , una recta pasando por Q' sería paralela a una de ellas a lo sumo, digamos a ℓ'_1 , y por tanto cortaría a las otras dos.

En un dominio arbitrario, por ejemplo si es acotado en algunas direcciones, puede ser que dos rectas no paralelas no se corten debido a que alguna de ellas sea sólo un segmento y se acabe el dominio antes de cortarse. En tal caso, podemos siempre definir un cono saliente de Q' donde deba estar contenida toda recta que pase por Q' y que no corte a ℓ'_1 . Denotemos por α_1 al ángulo de este cono. Podemos realizar el mismo procedimiento con las otras dos rectas, obteniendo lo que se muestra en la figura 3.5.

Observemos que localmente siempre podemos considerar el dominio D convexo como el de la figura, ya que como $P' \in D$ y D es abierto, existe una bola alrededor de P' contenida en D , y por tanto basta tomar Q' suficientemente cercano a P' para obtener un diagrama como el de la figura 3.5.

El dominio queda particionado en 6 regiones disjuntas por las rectas ℓ'_i , incluso podemos suponer que son sectores circulares. Lo importante ahora es que los conos de ángulos α_i han de ser necesariamente disjuntos, pues de lo contrario intersecarían con la recta que, por construcción, no cortan.

Por tanto toda recta que pasa por Q' corta a dos de las ℓ'_i si pertenece a uno de los conos, y a las tres en otro caso. Supongamos por ejemplo que ℓ' interseca a ℓ'_1 y ℓ'_2 . Entonces ℓ, ℓ_1, ℓ_2 también se cortan en tres puntos de S distintos, y por tanto en particular, pertenecen a un mismo plano Π .

Finalmente, dado otro punto arbitrario R suficientemente cercano a P (y por tanto a Q), se tendrá por el mismo razonamiento anterior que toda recta en S que pase por R cortará al menos a dos de las rectas ℓ, ℓ_1, ℓ_2 , y como consecuencia, también pertenecerá al plano Π . Por tanto, existe un entorno de P en que todos los puntos de S son coplanarios, como queríamos ver. ■

Corolario 3.55 Toda superficie triplemente reglada es localmente un plano, es decir, existe un disco plano contenido en la superficie alrededor de todo punto de la misma.

Demostración. Por el teorema 3.54, la superficie será localmente plana o cónica. Pero no puede ser cónica en ningún entorno pues, al ser triplemente reglada, siempre contendrá rectas que no pasan por el vértice, contradiciendo la definición de cono. ■

Corolario 3.56 Toda superficie regular triplemente reglada y conexa es un fragmento de plano. Si además es completa, es un plano.

Demostración. La superficie debe ser una unión de fragmentos de plano, pues de no ser así, existiría algún punto donde se contradice la planaridad local que asegura el corolario 3.55. Además, debe ser un único fragmento de plano por la conexión. Si añadimos la hipótesis de completitud, entonces por el corolario 3.27, la superficie no es extendible, luego no puede ser un fragmento incompleto de plano. ■

Estamos ya en condiciones de probar el resultado central de la sección.

Teorema 3.57 Sea S una superficie regular doblemente reglada que no contiene discos planos. Entonces la superficie está localmente generada por un trío de líneas.

Demostración. Como la superficie no contiene discos planos, no puede ser triplemente reglada en ningún punto por el corolario 3.55, de modo que dado un punto P de S existen exactamente dos rectas ℓ_1, ℓ_2 que pasan por P contenidas en S .

De nuevo, explotemos el uso de que podemos proyectar un entorno de este punto ortogonalmente sobre un plano Π de forma biyectiva, y denotemos igualmente por P', ℓ'_1, ℓ'_2 a las proyecciones del punto y las rectas sobre Π .

Tomemos Q otro punto de S suficientemente cercano a P y sea Q' su proyección. Entonces, por el mismo razonamiento que el realizado en la prueba del teorema 3.54, la proyección m' de toda recta m que pase por Q pasará por Q' y cortará al menos una de las rectas ℓ'_1 ó ℓ'_2 .

Sin embargo, ahora no puede cortar a ambas. En efecto, de ser así se tendría que las rectas m, ℓ_1, ℓ_2 formarían un triángulo en S , y como se vio en el teorema 3.54, el interior plano de este triángulo estaría contenido en S . De hecho, dado que por cada punto interior pasa al menos una recta, cuya proyección corta a la frontera del triángulo en dos puntos, se deduce que ocurre lo mismo en S y, en consecuencia, el punto es coplanario con el triángulo formado por m, ℓ_1, ℓ_2 .

Por tanto, esto contradice la hipótesis. Como S es doblemente reglada, sean m_1, m_2 dos rectas distintas pasando por Q , y m'_1, m'_2 sus proyecciones. Por lo dicho antes, cada m'_i corta exactamente a una de las

ℓ'_i , y además han de ser distintas, pues si ambas m'_i cortasen a una ℓ'_k fija, por el mismo razonamiento, m_1, m_2, ℓ_k formarían un triángulo en S . Se tiene así una situación similar a la presentada en la figura 3.6.

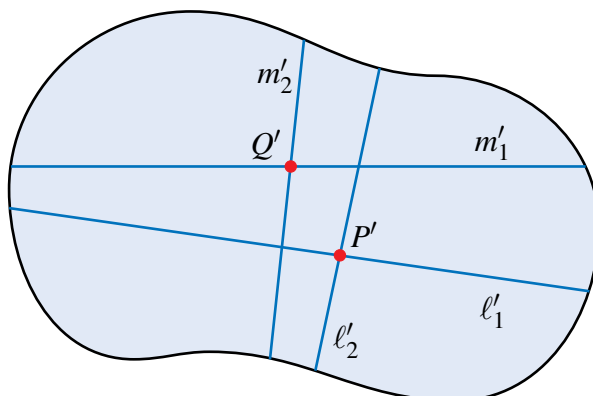


Figura 3.6: Superficie doblemente reglada: diagrama de la proyección en el plano Π

Como esto es válido para todo punto Q en las proximidades de P , restringiéndonos a un entorno de P podemos hablar de dos familias de rectas: las que cortan a ℓ_2 (incluyendo ℓ_1) y las que cortan a ℓ_1 (incluyendo ℓ_2).

Afirmamos que esta doble familia corresponde a las dos familias de generatrices de una superficie generada por tres rectas que, por el teorema 3.50, se corresponden con hiperboloides de una hoja y paraboloides hiperbólicos. En efecto, observemos que se verifican las propiedades siguientes:

- I) Dos rectas de familias distintas siempre se cortan, luego son coplanarias.
- II) Dos rectas de la misma familia no pueden ser coplanarias. De hecho, de ser así, como ambas son intersectadas por las rectas de la otra familia, se formaría de nuevo un polígono plano. Concretamente, si se cortasen, dado que ambas cortan a la misma recta ℓ_i formarían un triángulo en S . Si fueran paralelas, tomando dos rectas cualesquiera de la otra familia se formaría un cuadrilátero plano.
- III) Las rectas de cada familia cubren el entorno completo de P .

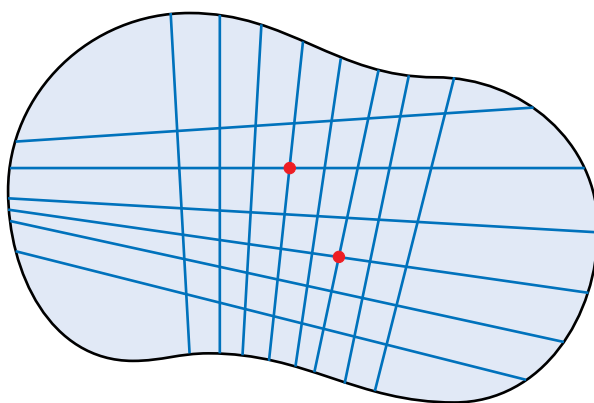


Figura 3.7: Superficie doblemente reglada: diagrama de las dos familias de rectas

Obtenemos así una situación similar a la que se observa en la figura 3.7. Por tanto, tomando tres rectas de una de las familias, digamos de \mathcal{F}_1 , éstas se cruzarán dos a dos, y por la definición 3.49 y el teorema 3.50, la superficie generada por ellas S' será un hiperboloide de una hoja o un paraboloides hiperbólico.

Sin embargo, como las rectas de la otra familia \mathcal{F}_2 son todas coplanarias con \mathcal{F}_1 , estarán contenidas en S' por el corolario 3.48. Y como tales rectas cubren localmente la superficie S , se deduce que S está contenida localmente en S' , y por tanto, ambas coinciden en un entorno de P , como queríamos ver. ■

Corolario 3.58 Toda superficie regular doblemente reglada, conexa y no plana es un fragmento de un hiperboloide de una hoja o de un paraboloides hiperbólico. Si además es completa, será el hiperboloide o el paraboloides completo.

Demostración. Por el teorema 3.57, la superficie S estará generada localmente por un trío de rectas. Por el teorema 3.50, S es localmente un hiperboloide de una hoja o un paraboloides hiperbólico. Por tanto, S es una unión de fragmentos de tales superficies.

Si S es conexa, será un único fragmento. En efecto, en una misma componente conexa no pueden confluír superficies distintas, pues por el corolario 3.48, tanto el hiperboloide como el paraboloides hiperbólico quedan determinados únicamente por tres rectas de una de las familias. Por tanto, de confluír dos distintas, digamos S_1 y S_2 , bastaría tomar un punto en la frontera de ambas, y existiría un entorno donde S estaría generada por tres rectas cualesquiera de la misma familia. Como tales rectas se podrían tomar tanto de S_1 como de S_2 , se sigue que unas determinan por completo las otras, luego deben pertenecer al mismo hiperboloide o paraboloides.

Finalmente, si además S es completa, entonces por el corolario 3.27 será no extendible, luego deberá ser un hiperboloide de una hoja o un paraboloides hiperbólico completos. ■

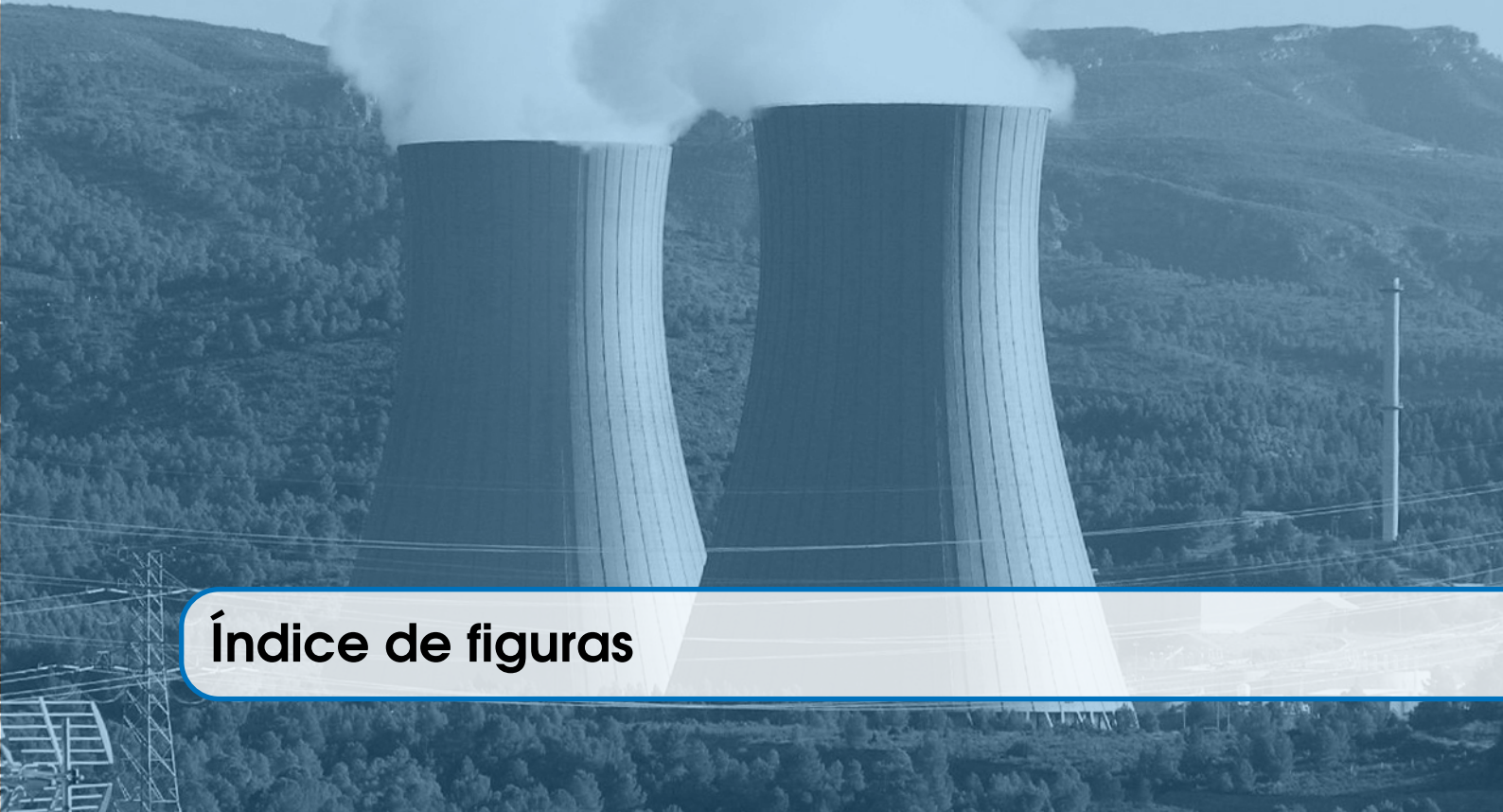


Bibliografía

Torre de Kobe (Japón). Fuente: a.travel-assets.com/findyours-php/viewfinder/images/res60/69000/69885-Kobe-Tower.jpg

- [AS60] L.V. Ahlfors y L. Sario. *Riemann surfaces*, Princeton, Nueva York: Princeton University Press, 1ª ed., 1960.
- [Ber58] L. Bers. *Riemann surfaces*, Nueva York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1ª ed., 1958.
- [Car76] M.P. Do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Río de Janeiro: Alianza Universidad Textos, 1ª ed., 1976.
- [Che55] S-S. Chern. “An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6:5** (1955), 771–782.
- [Eis09] L.P. Eisenhart. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*, Boston: Ginn and Company, 1ª ed., 1909.
- [FT91] A.T. Fomenko y A.A. Tuzhilin. *Elements of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space*, Providence, Rhode Island: AMS, 1ª ed., 1991.
- [FT07] D. Fuchs y S. Tabachnikov. *Mathematical omnibus: Thirty lectures on classic mathematics*, Providence, Rhode Island: AMS, 1ª ed., 2007.
- [GAS06] A. Gray, E. Abbena y S. Salamon. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, Londres: Chapman and Hall/CRC, 3ª ed., 2006.
- [HCV90] D. Hilbert y S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination*, Nueva York: Chelsea, 2ª ed., 1990.
- [HP10] M.A. Hernández Cifre y J.A. Pastor González. *Un curso de geometría diferencial*, Madrid: CSIC, 1ª ed., 2010.
- [Kre91] E. Kreyszig. *Differential geometry*, Nueva York: Dover, 1ª ed., 1991.
- [Oss86] R. Osserman. *A survey of minimal surfaces*, Mineola, Nueva York: Dover, 1ª ed., 1986.

- [Sal15] G. Salmon. *A treatise on the analytic geometry of three dimensions*, vol. 2, Londres: Longmans, Green and Company, 5^a ed., 1915.
- [Spi99] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 3, Houston, Texas: Publish or Perish, Incorporated, 3^a ed., 1999.



Índice de figuras

Central nuclear de Cofrentes (España). Fuente: commons.wikimedia.org/wiki/File:Cofrentes_nuclear_power_plant_cooling_towers.jpg

1.1	Ejemplos de cilindros: cilindro de base una epicicloide y cilindro circular recto	3
1.2	Ejemplos de conos: cono de base una hipocicloide y cono de base un trébol	4
1.3	Ejemplo de hiperboloide de una hoja y una familia de generatrices	5
1.4	Ejemplo de paraboloides hiperbólicos y sus familias de generatrices	5
1.5	Ejemplos de superficies tangentes a una hélice circular	6
1.6	Ejemplos de helicoides circulares y elípticos con sus generatrices	7
1.7	Conoides de Plücker	8
1.8	Otros conoides rectos: arista cónica de Wallis y paraguas de Whitney	8
2.1	Existencia de la estricción: cuerda entre generatrices	14
2.2	Envolventes de planos tangentes al ecuador y a un paralelo de la esfera	19
3.1	Superficie generada por un trío de rectas: direcciones no coplanarias	45
3.2	Superficie generada por un trío de rectas: direcciones no coplanarias, nueva base . .	45
3.3	Superficie generada por un trío de rectas: direcciones coplanarias	46
3.4	Superficie generada por un trío de rectas: direcciones coplanarias, nueva base	47
3.5	Superficie triplemente reglada: sectores disjuntos	49
3.6	Superficie doblemente reglada: diagrama de la proyección en el plano II	51
3.7	Superficie doblemente reglada: diagrama de las dos familias de rectas	51



Índice alfabético

Estación de tren Warszawa-Ochota (Varsovia, Polonia). Fuente: commons.wikimedia.org/wiki/File:W-wa_Ochota_PKP-WKD.jpg

A

aplicación conforme	38
aplicación de Gauss	12
aplicación exponencial	34
aplicación recubridora	34
atlas	1

B

banda de Möbius	7
-----------------------	---

C

carta	1
cilindro	2
cono	3
conoide	7
de Plücker	7
recto	7
coplanaridad	42, 48
curva asintótica	12, 28
curva coordenada integral	27
curva normal	12
curvatura	12
media	12
de Gauss	12
normal	12
principal	12

curvatura de Gauss	12
continuidad	17
límite	17
máximo	17
signo	16
simetría	17

D

dirección asintótica	12
dirección principal	12
directriz	2
distancia intrínseca	33

E

ecuación de Gauss	26
ecuaciones de compatibilidad	26
ecuaciones de Mainardi-Codazzi	26
estricción	13

F

factor de conformidad	37
factor de escala	37
fórmula de Euler	28

G

generatriz	2
geodésica maximal	34

H

helicoide	7, 37
hiperboloide de una hoja	3
generatrices	42

I

isoterma, parametrización	37, 38
-------------------------------------	--------

L

levantamiento de una curva	34
línea de curvatura	12, 26
línea de estricción	10
puntos centrales	10
línea media	40

M

marco	40
-----------------	----

O

operador forma (de Weingarten)	12
autovalores	12
autovectores	12

P

paraboloide hiperbólico	4
generatrices	42
parametrización	1
armónica	37
doblemente ortogonal	28
isoterma	37, 38
ortogonal	28
parámetro de distribución	12, 15
plano	2
primera forma fundamental	11
punto elíptico	12
punto hiperbólico	12
punto parabólico	12
punto plano	12

punto singular	2
punto umbílico	12

S

segunda forma fundamental	11
símbolos de Christoffel	25
superficie binormal	7
superficie completa	34
superficie de Catalan	7
superficie desarrollable	17
clasificación	24
isometrías	20
puntos singulares	20
superficie doblemente reglada	3, 52
superficie extendible	34
superficie generada por un trío de rectas	44
superficie geodésicamente completa	33
superficie minimal	12
principio de reflexión de Schwarz	39
teorema de unicidad	39
superficie no cilíndrica	10
superficie normal	7
superficie parametrizada	1
superficie plana	12
superficie reglada	2
de revolución	23
minimal	36, 40
plana	24
superficie regular	1
superficie tangente a una curva	5
superficie triplemente reglada	49, 50

T

teorema de Catalan	40
teorema de Heine-Borel	33
teorema de Hopf-Rinow	33
teorema de Minding	20
teorema de Olinde-Rodrigues	26
teorema egregium de Gauss	12
traza	1
triedro de Frénet	7