Funciones univalentes, espacios de Hardy y espacios de tipo Dirichlet

José Ángel Peláez Márquez

Denotaremos por $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ a la clase de las funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y por $\mathcal{U}$ a la clase de las funciones univalentes en $\mathbb{D}$. Consideraremos ciertos espacios de tipo Dirichlet estrechamente relacionados con los espacios de Hardy H^p. Para $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$ y $\alpha > -1$, definimos

$$D(p,q,\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) : \int_0^1 (1-r^2)^\alpha \left(\int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|^p \right)^{q/p} dr < \infty \right\}.$$

Se tiene $D(2,2,1) = H^2$, y

$$\begin{aligned} &D(p,p,p-1) \subset H^p \subset D(p,2,1), \quad \text{si} \quad 0 < p < 2, \quad \text{y} \\ &D(p,2,1) \subset H^p \subset D(p,p,p-1), \quad \text{si} \quad 2 < p < \infty, \end{aligned}$$

siendo además estas inclusiones estrictas. En un trabajo realizado en colaboración con A. Baernstein y D. Girela hemos probado que las funciones univalentes en H^p y en $D(p,p,p-1)$ son las mismas, para todo $p \in (0,\infty)$. Este resultado sólo era conocido previamente para $p = 1$ (Pommerenke, 1962) y, naturalmente, para $p = 2$. Sin embargo, en un trabajo posterior, en colaboración con D. Girela y M. Pavlovic, hemos demostrado que $\mathcal{U} \cap H^p \neq \mathcal{U} \cap D(p,2,1)$, para todo $p \neq 2$.

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, Universidad de Málaga, 29071 Málaga. pelaez@anamat.cie.uma.es