

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY

# Matematika 2

(Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika)

**Zdeněk Svoboda**  
**Jiří Vítovec**



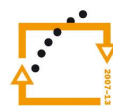
evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



VYSOKÉ  
UČENÍ  
TECHNICKÉ  
V BRNĚ

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2014

<http://www.umat.feec.vutbr.cz>

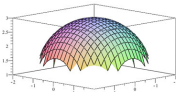
Obrázky pomocí METAPOSTu a METAFONTu: Jaromír Kuben

Animace a 3D objekty: Roman Plch

Tento text byl vytvořen v rámci realizace projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0156,  
*Inovace výuky matematických předmětů v rámci studijních programů FEKT a FIT VUT v Brně.*



Součástí tohoto učebního textu jsou odkazy na tzv. maplety, tj. programy vytvořené v prostředí Maple. Tyto odkazy jsou v textu zvýrazněny barvou, příp. uvozeny slovem *maplet*. Maplety ke svému běhu nevyžadují software Maple – je však nutné mít na klientském počítači nainstalováno prostředí Java a nastavenou vhodnou úroveň zabezpečení prohlížeče i prostředí Java. Po kliknutí na odkaz mapletu se v závislosti na softwarovém prostředí klientského počítače zobrazí různá hlášení o zabezpečení – všechny dialogy je třeba povolit a spouštění požadovaných prvků neblokovat.



Součástí tohoto učebního textu jsou animace, resp. prvky 3D grafiky. Pro korektní zobrazení těchto multimediálních prvků a práci s nimi je nutné správně nastavit zabezpečení prohlížeče PDF souborů, a to zejména na záložkách typu *3D a multimédia*, *Důvěryhodnost multimedia (starší)*, *Multimédia (starší)*. Vlastnosti zobrazení těchto prvků lze ovlivnit pomocí položek jejich kontextového menu, příp. pomocí práce s myší nebo jiným polohovacím zařízením.



Doplňující součástí tohoto učebního textu jsou příklady zpracované v [elektronické bance příkladů](#).

# Obsah

<b>1</b>	<b>Diferenciální počet funkcí více proměnných</b>	<b>6</b>
1.1	Funkce více proměnných a související pojmy	6
1.2	Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$	8
1.3	Metrické vlastnosti $\mathbb{R}^n$	10
1.4	Limita a spojitost funkce	12
1.5	Parciální derivace, derivace ve směru	19
1.6	Diferenciál funkce	25
1.7	Funkce zadané implicitně	27
1.7.1	Funkce jedné proměnné zadaná implicitně	27
1.7.2	Funkce dvou proměnných zadaná implicitně	30
1.8	Příklady na procvičení	32
	Cvičení	32
	Výsledky	33
<b>2</b>	<b>Obyčejné diferenciální rovnice</b>	<b>35</b>
2.1	Základní pojmy	35
2.2	Diferenciální rovnice prvního řádu	38
2.2.1	Geometrická interpretace rovnic prvního řádu	39
2.2.2	Rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými	40
2.2.3	Homogenní separovatelné rovnice prvního řádu	42
2.2.4	Lineární diferenciální rovnice prvního řádu	43
2.3	Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů	46
2.3.1	Homogenní rovnice s konstantními koeficienty	50
2.3.2	Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty	52
2.4	Příklady na procvičení	59
	Cvičení	59
	Výsledky	60
<b>3</b>	<b>Funkce komplexní proměnné</b>	<b>62</b>
3.1	Komplexní čísla	62
3.1.1	Základní pojmy	62
3.1.2	Rozšíření komplexních čísel o nevlastní bod	65
3.1.3	Množiny komplexních čísel	66
3.2	Posloupnosti, řady, mocninné řady	67

3.2.1	Mocninné řady	68
3.3	Funkce reálné proměnné	68
3.3.1	Křivky v $\mathbb{C}$	69
3.4	Funkce komplexní proměnné	71
3.4.1	Grafické znázornění funkce komplexní proměnné	72
3.5	Limita, spojitost	78
3.6	Derivace funkce komplexní proměnné	79
3.6.1	Geometrický význam Cauchy-Riemannových podmínek a derivace funkce komplexní proměnné	81
3.6.2	Holomorfní a harmonické funkce	82
3.7	Elementární funkce komplexní proměnné	84
3.8	Integrál funkce komplexní proměnné	88
3.9	Řady v komplexním oboru a singulární body	95
3.9.1	Singulární body a jejich klasifikace	97
3.10	Rezidua a jejich užití	100
3.10.1	Užití reziduí při výpočtu reálných integrálů	103
3.11	Příklady na procvičení	105
	Cvičení	105
	Výsledky	106
<b>4</b>	<b>Speciální funkce, Fourierovy řady a Fourierova transformace</b>	<b>107</b>
4.1	Diracova zobecněná funkce $\delta(t)$ , zobecněná derivace	107
4.2	Fourierovy trigonometrické řady	113
4.2.1	Periodické a harmonické funkce	113
4.2.2	Fourierovy trigonometrické řady	115
4.2.3	Rozvoj pouze do sinů resp. kosinů	121
4.2.4	Grafické znázornění Fourierova rozvoje - Spektrum	123
4.3	Fourierova transformace a Fourierův integrál	124
4.3.1	Zavedení Fourierovy transformace	125
4.3.2	Užití Fourierovy transformace při určování obrazů některých funkcí	128
4.3.3	Užití Fourierovy transformace při řešení diferenciálních rovnic	131
4.3.4	Slovník Fourierovy transformace	132
4.4	Příklady na procvičení	133
	Cvičení	133
	Výsledky	134
<b>5</b>	<b>Laplaceova transformace</b>	<b>136</b>
5.1	Zpětná Laplaceova transformace	144
5.1.1	Zpětná transformace racionální lomené funkce	144
5.1.2	Integrální tvar inverzní transformace	145
5.2	Souvislost Fourierovy a Laplaceovy transformace	148
5.3	Užití Laplaceovy transformace k řešení rovnic	149
5.4	Slovník Laplaceovy transformace	155
5.5	Příklady na procvičení	156
	Cvičení	156

---

<b>6</b>	<b><math>\mathcal{L}</math> transformace</b>	<b>159</b>
6.1	Souvislost $\mathcal{L}$ a Laplaceovy transformace . . . . .	165
6.2	Zpětná $\mathcal{L}$ transformace . . . . .	165
6.2.1	Předmět k racionální funkci . . . . .	166
6.3	Řešení diferenčních a rekurentních rovnic . . . . .	169
6.4	Konečné součty . . . . .	175
6.5	Příklady na procvičení . . . . .	178
	Cvičení . . . . .	178
	Výsledky . . . . .	179
	<b>Literatura</b>	<b>180</b>

# Předmluva

Tento učební text je určen pro posluchače druhého semestru bakalářského studia oboru Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií Vysokého učení technického v Brně.

Autoři předpokládají znalost základních matematických pojmů probraných v rámci předmětu Matematika 1. Jedná se zejména o základy lineární algebry a geometrie, diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné a nekonečných řad. Obsah tohoto učebního textu je zaměřen na dvě významné matematické disciplíny, které velice těsně souvisejí s četnými praktickými aplikacemi rozvíjenými v navazujících předmětech. Těmito disciplínami jsou diferenciální rovnice a různé (zejména integrální) transformace.

Diferenciální rovnice se vyskytují všude tam, kde dochází k nějaké změně, pohybu, vývoji či růstu. Setkáváme se s nimi v mnohých oborech lidské činnosti. Namátkou jmenujme např. studium elektrických obvodů, fyzikálních polí, dále při sledování pohybů těles, při vyšetřování koncentrace chemických reakcí, při studiu ekonomických modelů, při popisu toku zdrojů v tržní ekonomice, při simulování biologických procesů apod. V tomto textu, konkrétně v Kapitole 2, se zaměříme především na vysvětlení základních pojmů a vlastností diferenciálních rovnic, přičemž velký důraz budeme klást na popis metod jejich řešení. Jejich sestavováním a interpretací vlastností řešení se budeme zabývat jen okrajově. Autorem této kapitoly a úvodní Kapitoly 1, kde jsou uvedeny základní pojmy z diferenciálního počtu funkcí více proměnných, a která je nezbytná pro další porozumění textu, je Jiří Vítovec.

Pro praktické řešení mnoha konkrétních problémů, zvláště problémů spojených s lineárními diferenciálními rovnicemi, lze úspěšně využít tzv. operátorového počtu. Ten je reprezentován různými integrálními transformacemi, které umožní zadanou úlohu řešit. Postup je při tom takový, že nejprve úlohu transformujeme na zpravidla jednodušší, kterou vyřešíme, a nakonec zpětnou transformací získáme řešení původní úlohy. Uvedený postup je s výhodou používán při řešení úloh vyskytujících se v mnohých technických disciplínách jako např. v elektrických obvodech, teorii systémů, automatizaci, energetice, sdělovací technice, apod. Přestože existuje řada rozličných integrálních transformací, předmětem zájmu tohoto textu jsou Fourierova a Laplaceova transformace, studované v Kapitole 4 a v Kapitole 5. Podobný postup užitý při řešení diferenciálních rovnic je možné aplikovat i na rovnice diferenční, které se zabývají procesy s tzv. diskrétním časem. V tomto případě je s výhodou používána  $\mathcal{Z}$  transformace, studovaná v Kapitole 6. Tato transformace není integrální a využívá místo procesu integrace proces sumace. Neformální používání zmíněných transformací předpokládá hlubší znalosti z diferenciálního počtu funkcí komplexní proměnné. Proto podstatná část textu, Kapitola 3, je věnována této problematice. Tuto

a navazující tři kapitoly sestavil Zdeněk Svoboda.

S ohledem na aplikační zaměření textu je většina matematických tvrzení formulována bez důkazů. S výjimkou několika málo případů, kde je stručně naznačeno, jak by se uvedené tvrzení dokazovalo. Přitom, pokud to je možné, vyhýbáme se složitým teoretickým úvahám. Cílem je především využít formulovaných vět při řešení rozmanitých úloh. Z tohoto důvodu je text doplněn o velké množství řešených úloh i s naznačením možných technických interpretací. V tomto směru se autoři inspirovali zejména učebním textem [8] autorů Melkese a Řezáče. Vzhledem k rozsahu textu jsou pro zájemce uvedeny odkazy na použitou literaturu, kde se mohou s danou problematikou seznámit podrobněji.

Ke správnému pochopení probrané látky jsou ke konci všech kapitol uvedeny příklady k procvičení, společně s jejich výsledky. V úplném závěru všech kapitol jsou navíc přidány odkazy na tzv. maplety, kde si lze pomocí webové aplikace procvičit probraná témata.

Celý text je strukturován tak, že některé jeho části jsou vysázeny drobným písmem. To jsou ty části, které jsou náročnější a jejich pochopení není předpokladem pro porozumění dalšího textu.

V Brně, 31. března 2014

Autoři



# 1 Diferenciální počet funkcí více proměnných

V první kapitole se stručně seznámíme se základními pojmy, které se týkají funkcí více proměnných a jsou nezbytné pro výklad dalších tematických celků probíraných v rámci předmětu Matematika 2. Ze základních témat vynecháme pouze studium extrémů funkcí více proměnných<sup>1</sup>.

Omezíme se především na funkce dvou proměnných, které se dají (jako jediné funkce více proměnných) rozumně geometricky interpretovat v trojrozměrném prostoru. Navíc jsou důležitým základem pro pochopení látky v kapitole věnované funkcím komplexní proměnné.

Reálná funkce jedné reálné proměnné je zobrazení z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ . Zobecněním tohoto pojmu dostaneme zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) do  $\mathbb{R}$ , které se nazývá funkce více proměnných. V tomto textu budeme body v  $\mathbb{R}^n$ , tj. prvky prostoru  $\mathbb{R}^n$ , značit malými písmeny, např.  $x = [x_1, \dots, x_n]$ . Naopak množiny v  $\mathbb{R}^n$ , tj. souhrny (většinou nekonečně mnoha) bodů, budeme značit velkými písmeny, např.  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

## 1.1 Funkce více proměnných a související pojmy

**Definice 1.1.** Nechtě  $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $D(f) \neq \emptyset$ . Zobrazení  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  se nazývá **reálná funkce  $n$  reálných proměnných** a množina  $D(f)$  se nazývá **definičním oborem** funkce  $f$ . Funkci obvykle zapisujeme ve tvaru  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nebo zkráceně  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . V případě funkce dvou proměnných, resp. tří proměnných obvykle preferujeme zápis  $z = f(x, y)$ , resp.  $u = f(x, y, z)$ . Množinu  $H(f)$  definovanou jako  $H(f) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid [x_1, x_2, \dots, x_n] \in D(f)\}$  nazýváme **oborem hodnot** funkce  $f$ .

Příkladem funkce více proměnných mohou být například známé matematické (či fyzikální) vzorce. Objem rotačního válce  $V$  je funkcí svého poloměru  $r$  a výšky  $v$ , což zapíšeme jako

$$V = V(r, v) = \pi r^2 v.$$

Analogicky objem komolého rotačního kužele  $V$  je funkcí tří proměnných – poloměrů  $r$  a  $R$  jeho spodní a horní podstavy a výšky tělesa  $v$ , což zapíšeme jako

$$V = V(r, R, v) = \frac{\pi v}{3} (r^2 + rR + R^2).$$

<sup>1</sup>Toto téma bude podrobně probíráno později v rámci předmětu BVPM.

Z definice funkce více proměnných vyplývá, že tato funkce je jednoznačně určena svým definičním oborem a předpisem, kterým je každému bodu  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in D(f)$  přiřazena funkční hodnota  $f(x)$ . Pokud je předpis dán vzorcem a definiční obor funkce není zadán, pak definičním oborem rozumíme množinu všech  $x \in \mathbb{R}^n$ , pro něž má tento vzorec smysl. Např. u výše uvedené funkce pro objem rotačního válce je definičním oborem množina  $D(f) = (0, \infty) \times (0, \infty)$  ve shodě s geometrickým významem proměnných  $r$  a  $v$ .

**Příklad 1.2.** Zobrazte v rovině definiční obor funkce

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(x^2 + y^2 - 1).$$

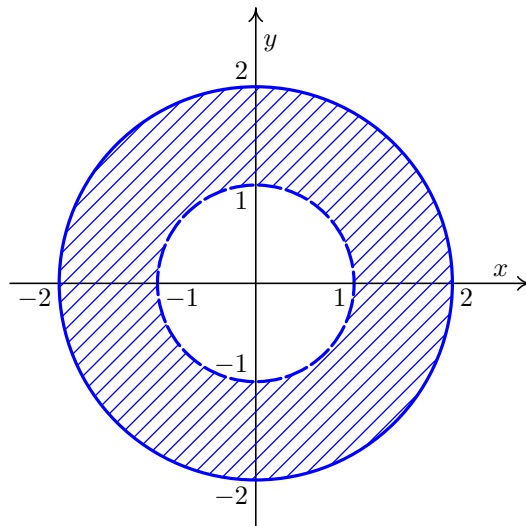
**Řešení.** Výraz pod odmocninou, resp. v logaritmu musí být nezáporný, resp. kladný. Odtud dostáváme podmínku

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 - 1 > 0,$$

což je ekvivalentní s

$$x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 > 1.$$

Rovnice  $x^2 + y^2 = 4$  a  $x^2 + y^2 = 1$  jsou rovnicemi kružnic se středy v počátku o poloměrech  $r = 2$  a  $r = 1$ . Definičním oborem funkce  $f$  je množina  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$  vyšrafovaná na Obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Množina  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

□

**Definice 1.3.** Nechť  $f$  je funkce  $n$  proměnných definovaná na množině  $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . **Grafem funkce**  $f$  nazýváme množinu všech bodů

$$G(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in D(f), y = f(x)\}.$$

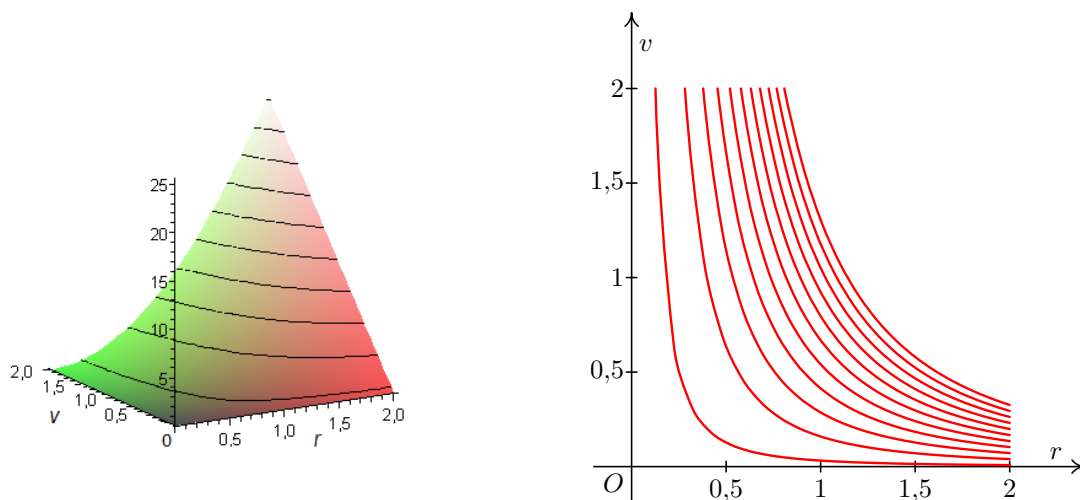
Grafem funkce dvou proměnných  $z = f(x, y)$  je tedy množina všech bodů  $[x, y, f(x, y)]$  vyhovující předpisu  $f$ . Tím je nejčastěji plocha v trojrozměrném prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Pro grafické znázornění funkce  $z = f(x, y)$  často využíváme i tzv. **metodu rovinných řezů**, jimiž jsou především řezy funkce  $f$  s rovinami  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ . Další možností rovinných řezů jsou tzv. **vrstevnice**, což jsou průsečnice grafu funkce  $f$  s rovinami  $z = c$ .

**Definice 1.4.** Nechť  $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$  a  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce dvou proměnných a necht'  $c \in \mathbb{R}$ . Množinu

$$f_c = \{[x, y] \in D(f) \mid f(x, y) = c\}$$

nazýváme **vrstevnicemi funkce  $f$  na úrovni  $c$** .

Interpretujeme-li zemský povrch jako funkci dvou proměnných, kdy dvojici čísel, chápaných jako zeměpisná šířka a délka bodu zemského povrchu, přiřadíme jeho nadmořskou výšku, pak vrstevnicí  $f_c$  na mapě rozumíme množinu všech bodů se stejnou nadmořskou výškou  $c$ . Vrstevnicí je tedy nejčastěji nějaká křivka v rovině  $\mathbb{R}^2$ . V následující obrázku je pro  $r, v \in (0, 2)$  znázorněn graf a vrstevnice výše uvedené funkce  $V(r, v) = \pi r^2 v$  pro objem válce  $V$ .



Obr. 1.2: Graf a vrstevnice funkce  $V(r, v) = \pi r^2 v$ .

Pro funkce  $n$  proměnných lze analogicky definovat tzv. **hladinu funkce  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  na úrovni  $c \in \mathbb{R}$**  jako množinu všech bodů  $\{[x_1, \dots, x_n] \in D(f) \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$ . Ovšem v tomto obecném případě již chybí geometrická analogie s vrstevnicemi na mapě, jako tomu je pro případ  $n = 2$ .

## 1.2 Zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$

Dalším důležitým pojmem, který přímo souvisí s funkcemi více proměnných, je zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^m$ . Pro názornost uvedeme pouze definici zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$  a další rozšíření definice pro vyšší dimenze ponecháme na samotném čtenáři. Poznamenejme, že zobrazení

z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$ , má mnohá využití v geometrii a dá se jím do jisté míry dobře popsat i funkce komplexní proměnné, jak uvidíme později.

**Definice 1.5.** Nechť jsou dány funkce  $f, g$  dvou reálných proměnných a  $D = D(f) \cap D(g)$ . Dále nechť zobrazení  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  je dáno předpisem

$$[x, y] \xrightarrow{F} [f(x, y), g(x, y)].$$

Pak řekneme, že **zobrazení  $F$  je určeno funkcemi  $f, g$**  a tyto funkce nazýváme **složkami zobrazení  $F$** .

Zobrazení  $F$  z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}^2$  (resp. z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$ ) si můžeme představit jako „přemísťování“ bodů v rovině  $\mathbb{R}^2$  (resp. v  $n$ -rozměrném prostoru  $\mathbb{R}^n$ ). V takovémto případě nazýváme zobrazení  $F$  **transformací**.

**Příklad 1.6.** V matematice se často používá transformace do **polárních souřadnic**, která umožní v rovině  $\mathbb{R}^2$  převést kruh nebo výseč mezikruží na obdélník. Transformace je definována vztahy:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Pro bod roviny  $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ , značí první složka zobrazení  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  vzdálenost bodu  $[x, y]$  od počátku soustavy souřadnic. Druhá složka  $\varphi(x, y)$  značí úhel, který svírá vektor určený počátečním bodem  $[0, 0]$  a koncovým bodem  $[x, y]$  s kladnou částí osy  $x$ , a jejím oborem hodnot je tedy interval  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Úhel  $\varphi$  lze určit ze vztahů:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pro funkce  $n$  proměnných, které mají neprázdný průnik svých definičních oborů, zavádíme analogicky jako u funkce jedné reálné proměnné algebraické operace jako sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí a násobení funkce konstantou. Nechť  $x = [x_1, \dots, x_n]$  a  $c \in \mathbb{R}$ , potom:

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x), & (c \cdot f)(x) &= c \cdot f(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro } x \text{ taková, že } g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Pro zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^m$  jsou výše uvedené operace definované analogicky, tj. pro každou složku zobrazení zvlášť. Při operaci skládání funkcí  $n$  proměnných, resp. zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^m$  je situace podstatně složitější. Situaci popíšeme pro zobrazení a odtud vyplyne, jak je to se skládáním funkcí více proměnných.

**Definice 1.7.** Nechť  $n, m, k \in \mathbb{N}$  a  $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m, Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{R}^k$  jsou množiny takové, že  $Z_2 \subseteq Z_1$ . Dále nechť  $F : Z_1 \rightarrow Y$  a  $G : X \rightarrow Z_2$ . Potom zobrazení  $F \circ G : X \rightarrow Y$  přiřazující každému bodu  $x \in X$  bod  $y \in Y$  předpisem

$$y = F \circ G = F(G(x))$$

nazveme **složeným zobrazením**.

**Poznámka 1.8.** Bod  $z \in Z_2$  musí ležet současně v oboru hodnot zobrazení  $G$ , které nazýváme **vnitřním**, a v definičním oboru zobrazení  $F$ , které nazýváme **vnějším**, což znamená, že počet složek vnitřního zobrazení musí být stejný jako dimenze definičního oboru vnějšího zobrazení. Odtud plyne, že pokud chceme složit dvě funkce více proměnných, lze to učinit pouze mezi funkcí  $n$  proměnných a funkcí jedné proměnné. Situaci ilustrujeme na následujícím příkladě.

**Příklad 1.9.** Složte funkce  $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$  a  $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ .

**Řešení.** Oborem hodnot funkce  $g$  je zřejmě interval  $\langle 1, \infty \rangle$ , což je podmnožinou definičního oboru funkce  $f$ , jímž je interval  $(0, \infty)$ . Tedy

$$f \circ g = f(g(x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

□

### 1.3 Metrické vlastnosti $\mathbb{R}^n$

Při studiu „lokálních“ vlastností funkcí více proměnných je vhodné zavést některé pojmy popisující vlastnosti podmnožin v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Základním pojmem je vzdálenost dvou bodů.

**Definice 1.10.** Nechť  $x = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $y = [y_1, \dots, y_n]$  jsou libovolné body prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Potom nezáporné číslo

$$v(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

nazýváme **vzdáleností bodů**  $x$  a  $y$ . Vzdálenost dvou množin  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  definujeme jako

$$\min\{v(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Připomeňme, že  $\varepsilon$ -okolí vlastního bodu  $x_0 \in \mathbb{R}$  je definováno jako otevřený interval  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . V prostoru  $\mathbb{R}^n$  definujeme okolí bodu pomocí vzdálenosti. Jak si lze všimnout, případ  $n = 1$  je speciálním případem následující definice.

**Definice 1.11.** Nechť  $\varepsilon > 0$ . Množinu

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid v(x, x_0) < \varepsilon\}$$

nazýváme  **$\varepsilon$ -okolím bodu**  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Množinu

$$P_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < v(x, x_0) < \varepsilon\}$$

nazýváme  **$\varepsilon$ -ryzím** nebo  **$\varepsilon$ -prstencovým** nebo též  **$\varepsilon$ -redukovaným okolím bodu**  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Pokud není vzdálenost  $\varepsilon$  podstatná, budeme symbol  $\varepsilon$  vynechávat a psát jednoduše  $U(x_0)$ , resp.  $P(x_0)$ .

Poznamenejme, že ryzí okolí bodu  $x_0$ , lze chápat jako „normální okolí“ neobsahující bod  $x_0$ . Geometricky si lze okolí v  $\mathbb{R}^2$  představit jako vnitřek kruhu, v  $\mathbb{R}^3$  pak jako vnitřek koule. Dále se zaměříme na množiny bodů prostoru  $\mathbb{R}^n$  mající určitou vazbu ke konkrétním podmnožinám tohoto prostoru.

**Definice 1.12.** Nechť  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je libovolná množina,  $a \in \mathbb{R}^n$  bod v  $\mathbb{R}^n$ . Bod  $a$  se nazývá:

- (i) **vnitřním bodem** množiny  $A$ , existuje-li okolí  $U(a)$  takové, že  $U(a) \subset A$ . Množina všech vnitřních bodů množiny  $A$  se nazývá **vnitřek** množiny  $A$  a značí se  $A^\circ$ .
- (ii) **bodem uzávěru** množiny  $A$ , jestliže pro každé okolí  $U(a)$  platí  $U(a) \cap A \neq \emptyset$ . Množina všech bodů uzávěru množiny  $A$  se nazývá **uzávěr** množiny  $A$  a značí se  $\bar{A}$ .
- (iii) **hraničním bodem** množiny  $A$ , jestliže v každém okolí  $U(a)$  existují body  $x_1, x_2$  takové, že současně platí  $x_1 \in A, x_2 \notin A$ . Množina všech hraničních bodů množiny  $A$  se nazývá **hranice** množiny  $A$  a značí se  $\partial A$ .
- (iv) **hromadným bodem** množiny  $A$ , jestliže každé okolí  $U(a)$  obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny  $A$ . Množina všech hromadných bodů množiny  $A$  se nazývá **derivace** množiny  $A$  a značí se  $A'$ .
- (v) **izolovaným bodem** množiny  $A$ , jestliže existuje okolí  $U(a)$  takové, že  $U(a) \cap A = \{a\}$ .

Dále definujeme nejznámější typy množin v  $\mathbb{R}^n$ .

**Definice 1.13.** Nechť  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  jsou libovolné množiny. Řekneme, že množiny  $A$  a  $B$  jsou **oddělené** v  $\mathbb{R}^n$  pokud  $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$ . Dále řekneme, že množina  $A$  je:

- (i) **otevřená**, pokud obsahuje pouze své vnitřní body, tedy  $A^\circ = A$ .
- (ii) **uzavřená**, pokud obsahuje body svého uzávěru, tedy  $\bar{A} = A$ .
- (iii) **komplementem** neboli **doplňkem** množiny  $B$ , pokud  $B = \mathbb{R}^n \setminus A$ . Množinu  $B$  pak značíme  $A^C$ .

Poznamenejme, že v prostoru  $\mathbb{R}^n$  platí, že doplňkem otevřené množiny je uzavřená množina a naopak doplňkem uzavřené množiny je otevřená množina. Navíc pokud je  $A$  uzavřená, tak  $A = A^\circ \cup \partial A$ . Dále prázdná množina  $\emptyset$  a celý prostor  $\mathbb{R}^n$  jsou jediné tzv. **obojetné** množiny, tj. zároveň otevřené a uzavřené. Na druhou stranu v prostoru  $\mathbb{R}^n$  existují i množiny, které nejsou ani otevřené, ani uzavřené. Příkladem může být třeba mezikruží  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ , kde větší hraniční kružnice je součástí množiny  $M$  a menší hraniční kružnice není součástí množiny  $M$ , viz Obrázek 1.1 z Příkladu 1.2.

Na závěr rozšířme množinu  $\mathbb{R}^n$  o nevlastní body podobně, jak jsme to učinili v případě množiny  $\mathbb{R}$ , kde jsme přidali k reálným číslům prvky  $\infty$  a  $-\infty$ . Pro množinu  $\mathbb{R}^n$  se situace mírně komplikuje z důvodu, že takových nevlastních bodů je zde více. Jsou jimi všechny body prostoru  $\mathbb{R}^n$  mající alespoň jednu svou souřadnici rovnu  $\infty$  nebo  $-\infty$ .

**Příklad 1.14.** Nevlastní body v  $\mathbb{R}^2$  jsou typu:  $[x_1, \pm\infty]$ ,  $[\pm\infty, x_2]$ ,  $[\pm\infty, \pm\infty]$  (dohromady 8 možných typů bodů), kde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  jsou libovolná čísla.

**Poznámka 1.15.** Množinu  $\mathbb{R}^n$  spolu se všemi jejími nevlastními body budeme označovat symbolem  $(\mathbb{R}^*)^n$ .

Okolí nevlastních bodů budeme definovat analogicky, jako tomu bylo u funkcí jedné reálné proměnné. Pro jednoduchost postup popíšeme pouze u některých nevlastních bodů prostoru  $\mathbb{R}^2$ .

**Příklad 1.16.** Určete okolí nevlastních bodů  $[\infty, \infty]$  a  $[x_1, \infty]$  v  $\mathbb{R}^2$ .

**Řešení.** V případě bodu  $[\infty, \infty]$  je jeho okolím libovolná nekonečná část roviny, tj.  $U([\infty, \infty]) = (a, \infty) \times (b, \infty)$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$  jsou libovolná (nejčastěji velká) reálná čísla.

V případě bodu  $[x_1, \infty]$  je jeho  $\varepsilon$ -okolím libovolná nekonečná část  $\varepsilon$ -pásu, tj.  $U_\varepsilon([x_1, \infty]) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times (a, \infty)$ , kde  $a \in \mathbb{R}$  je libovolné (nejčastěji velké) reálné číslo. Zde je možné zavést  $\varepsilon$ -okolí, protože alespoň jedna souřadnice bodu  $[x_1, \infty]$  je vlastní.  $\square$

## 1.4 Limita a spojitost funkce

Při zavádění pojmů limity funkce více proměnných se budeme snažit postupovat analogicky jako u funkce jedné reálné proměnné. Na druhou stranu „rozmanitost“ prostoru  $\mathbb{R}^n$  nás nutí opustit určité tendence používané v případě funkce jedné proměnné. Zásadním rozdílem při výpočtu limit funkcí jedné a více proměnných hraje fakt, že okolí bodu  $a$  funkce jedné proměnné je otevřený interval, zatímco v případě funkcí více proměnných je jím otevřená  $n$ -rozměrná koule. U funkce jedné proměnné jsme předpokládali, že pokud limita v bodě  $a \in \mathbb{R}$  existovala, byla funkce definovaná v nějakém pravém i levém ryzím okolí bodu  $a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

tj. do bodu  $a$  jsme se mohli blížit pouze ve dvou směrech, zprava nebo zleva.

V případě funkcí více proměnných se můžeme do bodu  $a$  blížit nekonečně mnoha způsoby, tj. po libovolné křivce. Pokud limita existuje, musí nám (ať se do bodu  $a$  blížíme jakkoliv) vycházet vždy stejná hodnota. Již z tohoto pohledu je výpočet limity obtížnější.

Z výše uvedených důvodů nebudeme při výpočtu limity funkce více proměnných v bodě  $a$  požadovat, aby funkce byla definována ve všech bodech nějakého ryzího okolí bodu  $a$ . Aby ovšem následující definice limity dávala smysl, budeme v dalším textu, aniž bychom tento fakt stále zdůrazňovali, předpokládat, že **bod  $a$  je hromadným (klidně i hraničním) bodem svého definičního oboru.**

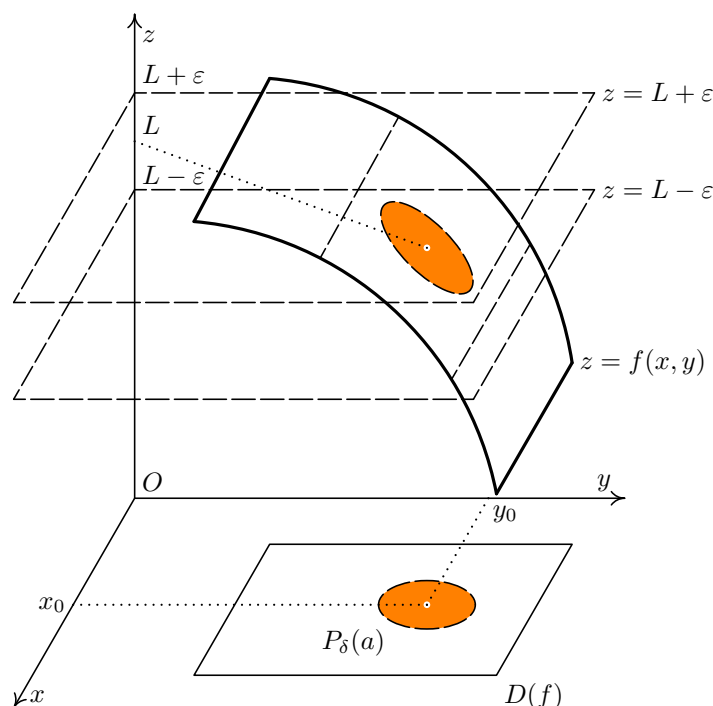
**Definice 1.17.** Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \geq 1$ ) má v bodě  $a \in (\mathbb{R}^*)^n$  **limitu**  $L$ ,  $L \in \mathbb{R}^*$ , jestliže ke každému okolí  $U(L)$  bodu  $L$  existuje ryzí okolí  $P(a)$  bodu  $a$  takové, že pro každý bod  $x \in P(a) \cap D(f)$  platí  $f(x) \in U(L)$ . Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Limita se nazývá **vlastní**, jestliže  $L \in \mathbb{R}$ , v opačném případě ( $L = \pm\infty$ ) se limita nazývá **nevlastní**. Bod  $a \in (\mathbb{R}^*)^n$  se nazývá **limitní bod**.

**Poznámka 1.18.** Definice 1.17 je univerzální definicí limity pro funkci jedné či více proměnných a zahrnuje i případy vlastní či nevlastní limity pro vlastní i nevlastní limitní bod. Pokud bychom „povolili“ izolovanost bodu  $a \in D(f)$ , je obvyklé definovat limitu v tomto bodě jako  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Na následujícím obrázku je znázorněná (vlastní) limita funkce dvou proměnných.



Obr. 1.3: Limita funkce dvou proměnných  $z = f(x, y)$ .

Poznamenejme, že v případě zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^m$  je definice limity analogická, jen je vhodné si uvědomit, že limitou v tomto případě není číslo, ale  $m$ -tice čísel. Z definice limity (podobně jako u funkce jedné proměnné) lze přímo ukázat platnost mnohých tvrzení. Uvedme si ty nejdůležitější, jež budou obdobou těch, která dobře známe z teorie funkce jedné proměnné.

**Věta 1.19.** Funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $a \in (\mathbb{R}^*)^n$  nejvýše jednu limitu.

**Věta 1.20.** Necht'  $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jsou funkce,  $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ . Dále necht'  $f$  je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu  $a$ . Pokud platí  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \infty$ , pak

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0,$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0.$$



**Věta 1.21.** *Nechť  $a \in (\mathbb{R}^*)^n$  a nechť existují vlastní limity funkcí  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  v bodě  $a$ . Potom pro algebraické operace s funkcemi platí*

- (i)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x),$  kde  $\alpha \in \mathbb{R},$
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
- (iv)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$  pokud  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$

Spojitosť funkce více proměnných je definována analogicky jako u funkce jedné proměnné.

**Definice 1.22.** Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , resp. zobrazení  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je **spojité v bodě  $a \in \mathbb{R}^n$** , jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Poznamenejme, že vzhledem k existenci limity funkce, která je výsledkem algebraických operací s funkcemi majících limitu, platí také, že výsledkem algebraických operací se spojitými funkcemi je spojitá funkce. Pro zobrazení platí následující tvrzení.

**Věta 1.23.** *Nechť  $F$  a  $G$  jsou zobrazení. Existuje-li kompozice  $F(G(x))$  a  $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = b$  a navíc je-li zobrazení  $F$  spojitě v bodě  $b$ , potom*

$$\lim_{x \rightarrow a} F(G(x)) = F(b).$$

Tato věta spolu s předcházející poznámkou umožňuje tvrdit:

- (i) Elementární funkce (jedné i více proměnných) jsou spojitě tam, kde jsou definované, přičemž za elementární funkce považujeme mocninné funkce, exponenciální funkce, goniometrické funkce a všechny funkce k nim inverzní. Dále mezi elementární funkce řadíme všechny funkce, které vznikly z těchto funkcí konečným počtem algebraických operací nebo operací skládání.
- (ii) Zobrazení obsahující pouze elementární složky je spojitě na množině  $M$ , pokud jsou na množině  $M$  spojitě všechny jeho elementární složky.

Tyto skutečnosti jsou podstatné při stanovení postupu při výpočtu limity u elementárních funkcí, kdy nejdříve zkusíme vypočítat hodnotu funkce (resp. zobrazení) dosazením limitního bodu do předpisu funkce. Pokud tato hodnota existuje, tj. po dosazení obdržíme určitý výraz, je limita rovna této funkční hodnotě.

**Příklad 1.24.** Vypočtěte limitu

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [2,-3,1]} \left[ \frac{\sqrt{x^3 + y^2 - z}}{x + y \ln z}, x + y + z \right]$$

zobrazení z  $\mathbb{R}^3$  do  $\mathbb{R}^2$ .

**Řešení.** Přímým dosazením dostáváme

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [2,-3,1]} \left[ \frac{\sqrt{x^3 + y^2 - z}}{x + y \ln z}, x + y + z \right] = \left[ \frac{\sqrt{2^3 + (-3)^2 - 1}}{2 - 3 \ln 1}, 2 - 3 + 1 \right] = [2, 0].$$

□

Zobrazení má limitu (je spojitě) právě tehdy, když mají limitu (jsou spojitě) všechny složky tohoto zobrazení. Proto se v dalším zaměříme pouze na výpočet limit funkcí více proměnných.

**Příklad 1.25.** Určete limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty]} \frac{\cos(x + e^{-y})}{\sqrt{x + y}}.$$

**Řešení.** Zřejmě  $|\cos(x + e^{-y})| \leq 1$  pro všechna  $[x, y] \in \mathbb{R}^2$  a tudíž výraz v čitateli je ohraničený v okolí bodu  $[\infty, \infty]$ . Navíc  $\lim_{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty]} \sqrt{x + y} = \infty$ . Přímým použitím Věty 1.20 dostáváme

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty]} \frac{\cos(x + e^{-y})}{\sqrt{x + y}} = 0.$$

□

**Příklad 1.26.** Určete limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{3}{y - 2x}.$$

**Řešení.** Po dosazení limitního bodu dostaneme výraz  $\frac{3}{0}$ . Aby limita existovala, musela by se hodnota funkce v okolí bodu  $[0, 0]$  blížit k  $\infty$  nebo k  $-\infty$ . Snadno nahlédneme, že funkce je ve II. kvadrantu (tj. pro  $x < 0$  a  $y > 0$ ) kladná a blízko bodu  $[0, 0]$  roste nade všechny meze. Naopak, ve IV. kvadrantu (tj. pro  $x > 0$  a  $y < 0$ ) je funkce záporná a blízko bodu  $[0, 0]$  klesá pod všechny meze. Odtud (dle Věty 1.19) zkoumaná limita neexistuje. □

Nyní se budeme zabývat případy, kdy po dosazení limitního bodu do předpisu funkce vyjde neurčitý výraz typu  $\frac{0}{0}$  nebo  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Příklad 1.27.** Určete limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{3x^2 - 2y^2}{\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 1} - 1}.$$

**Řešení.** Dosazením limitního bodu do funkce dostáváme neurčitý výraz typu  $\frac{0}{0}$ . Hodnotu limity najdeme typickým obratem používaným i v případě hledání limity funkce jedné proměnné. Čitatele i jmenovatele zlomku vynásobíme výrazem  $\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 1} + 1$ . Po této úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{3x^2 - 2y^2}{\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 1} - 1} &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{(3x^2 - 2y^2)(\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 1} + 1)}{3x^2 - 2y^2 + 1 - 1} = \\ &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} (\sqrt{3x^2 - 2y^2 + 1} + 1) = 2. \end{aligned}$$

□

V dalších úvahách o existenci limit funkcí více proměnných je vhodné zavést následující pojem.

**Definice 1.28.** Nechť  $a \in M$  je hromadný bod množiny  $M$ . Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $a$  **limitu  $L$  vzhledem k množině  $M$** ,  $M \subseteq D(f)$ , jestliže

$$\forall U(L) \exists P(a) \mid f(P(a) \cap M) \subset U(L),$$

tj. ke každému  $\varepsilon > 0$ , existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každý bod  $x \in P_\delta(a) \cap M$  platí  $f(x) \in U_\varepsilon(L)$ . Píšeme

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = L.$$

**Věta 1.29.** Nechť existuje limita  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Potom pro každou množinu  $M \subseteq D(f)$ , jejímž hromadným bodem je bod  $a$  platí

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Speciální volbou množiny  $M = \{[x_1(t), \dots, x_n(t)] \mid t \in I\}$ , kde  $x_i(t)$  jsou spojité funkce jedné reálné proměnné definované na intervalu  $I$ , je možné při výpočtu limity funkce více proměnných vzhledem k množině  $M$  využít postupů známých pro funkci jedné proměnné. Množina  $M$  je v tomto případě jednoparametrickou křivkou v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Pokud navíc  $a \in \mathbb{R}^n$  a  $t_0 \in I$  jsou takové, že  $a = [x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)]$ , potom platí

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in M}} f(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

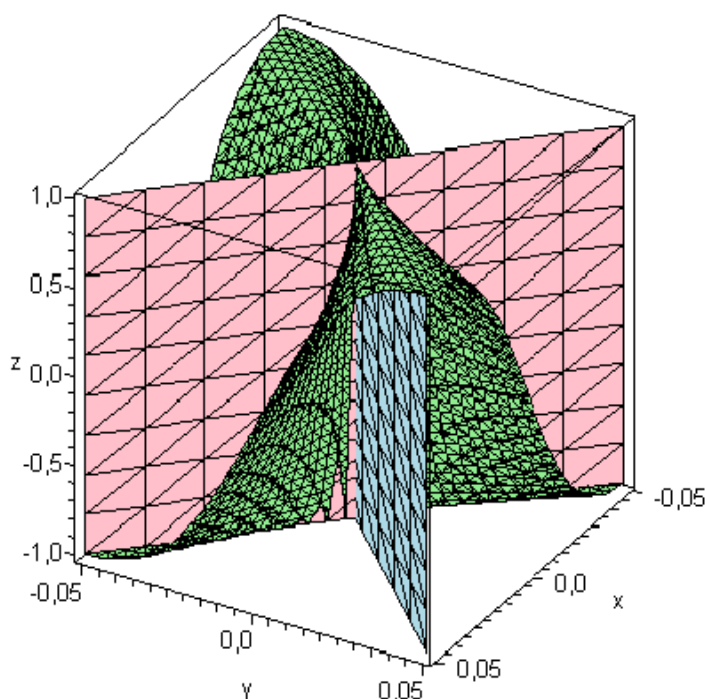
Tato skutečnost se s výhodou použije při dokazování neexistence limity funkce  $f$ , kdy stačí najít dvě různé množiny  $M_1$  a  $M_2$ , pro něž limity funkce  $f$  vzhledem k  $M_1$  a  $M_2$  vycházejí různě, viz následující příklad.

**Příklad 1.30.** Vypočtěte limitu  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ .

**Řešení.** Vyšetříme všechny limity vzhledem k přímkám procházejícím počátkem mající tvar  $y = kx$ . Potom platí

$$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ [x,y] \in [x,kx]}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ [x,y] \in [x,kx]}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

To znamená, že hodnota limity v bodě  $[0, 0]$  vzhledem k přímkám tvaru  $y = kx$  závisí na volbě  $k$ . Tudíž výsledek limity je pro různá  $k$  různý a vyšetřovaná limita neexistuje, viz následující obrázek.  $\square$



Obr. 1.4: Graf funkce  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  vzhledem k rovinám  $y = x$  a  $y = -x$ .

**Příklad 1.31.** Vypočítejte limitu  $\lim_{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty]} \frac{y}{e^x + x}$ .

**Řešení.** Na první pohled by se mohlo zdát, že díky tomu, že funkce  $e^x$  ve jmenovateli roste „rychleji“ než lineární funkce  $y$  v čitateli, výsledek limity bude 0. Opak je pravdou. Vyšetříme všechny limity vzhledem k exponenciálám směřujícím do bodu  $[\infty, \infty]$  majícím tvar  $y = ke^x$ ,  $k > 0$ . Potom platí

$$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty] \\ [x,y] \in [x, ke^x]}} \frac{y}{e^x + x} = \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [\infty, \infty] \\ [x,y] \in [x, ke^x]}} \frac{y}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ke^x}{e^x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{1 + \frac{x}{e^x}} = k.$$

To znamená, že hodnota limity závisí na volbě  $k$  a tudíž vyšetřovaná limita neexistuje.  $\square$

Ve výše uvedených příkladech je poměrně snadno ukázáno, že limita neexistuje. Pro opačný výsledek, že limita existuje, je třeba ukázat, že po všech křivkách má limita vzhledem k této křivce stejnou hodnotu. Ověřit tuto skutečnost pouze pro určitou třídu křivek (např. přímek) nestačí.

Obecně při výpočtu limity je nutné vycházet z definice limity a pracovat s okolími. V případě funkce dvou proměnných je možné okolí bodu  $[x_0, y_0]$  vhodně popsat pomocí polárních souřadnic ve tvaru

$$x = x_0 + r \cos \varphi, \quad y = y_0 + r \sin \varphi,$$

kde  $r \geq 0$  udává vzdálenost bodů  $[x_0, y_0]$  a  $[x, y]$ ,  $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$  je úhel, který svírá spojnice těchto bodů s kladným směrem osy  $x$ . Výhodou tohoto popisu je, že potom limitní přechod  $[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]$  lze nahradit limitním přechodem  $r \rightarrow 0$ . Uvedený postup ilustrujeme na následujícím příkladě.

**Příklad 1.32.** Rozhodněte, zda funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 1 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

je spojitá v bodě  $[0, 0]$ .

**Řešení.** Abychom zjistili spojitost v bodě  $[0, 0]$ , je nutné (dle Definice 1.22) porovnat funkční hodnotu a limitu funkce  $f$  v bodě  $[0, 0]$ .

Jelikož v tomto případě vychází po dosazení limitního bodu  $[0, 0]$  do předpisu funkce neurčitý výraz typu  $\frac{0}{0}$ , použijeme při výpočtu limity transformaci do polárních souřadnic. Po nahrazení proměnných  $x, y$  novými proměnnými má funkce  $f$  tvar

$$\frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - \cos^2[r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)]}{[r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)]^2} = \frac{1 - \cos^2(r^2)}{r^4}$$

a tudíž lze výpočet uvedené limity nahradit výpočtem limity funkce jedné proměnné. Při výpočtu použijeme L'Hospitalovo pravidlo, jakožto aparát známý z teorie funkcí jedné proměnné:

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2(r^2)}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{4r \sin(r^2) \cos(r^2)}{4r^3} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r^2) \cos(r^2)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r^2)}{r^2} \cdot \lim_{r \rightarrow 0^+} \cos(r^2) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Jelikož platí

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = 1 = f(0, 0),$$

funkce je v bodě  $[0, 0]$  spojitá. □

Poznamenejme, že v případě použití polárních souřadnic, kdy výsledek limity závisí na  $\varphi$  (tj. na úhlu, pod kterým se do limitního bodu blížíme), limita neexistuje, viz Příklad 1.30, který doporučujeme čtenáři spočítat i pomocí transformace do polárních souřadnic.

**Příklad 1.33.** Určete limitu

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

**Řešení.** Po dosažení bodu  $[0,0]$  do předpisu funkce dostaneme neurčitý výraz  $\frac{0}{0}$ . Po transformaci limity do polárních souřadnic dostáváme

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2 (r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi}.$$

Blížíme-li se do bodu  $[0,0]$  po libovolných křivkách s výjimkou těch, které svírají s kladným směrem osy  $x$  úhel  $\varphi = 0$  či  $\varphi = \pi$ , vyjde limita nulová. Pro křivky, kde  $\varphi$  se blíží k  $0$  či k  $\pi$ , tj. pro ty, jejichž tečna v bodě  $[0,0]$  se blíží k ose  $x$ , dostáváme po dosažení neurčitý výraz  $\frac{0}{0}$  a hodnotu limity neumíme určit. Vybereme-li však z množiny „podezřelých“ křivek paraboly tvaru  $y = kx^2$  a dosadíme-li je do zadané limity, zjistíme, že

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ [x,y] \in [x, kx^2]}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Odtud vidíme, že výsledek limity závisí na tom, po jaké parabole se k limitnímu bodu blížíme, a tudíž limita neexistuje.  $\square$

Při výpočtu limity funkcí tří a více proměnných lze postupovat analogicky jako v předcházejících příkladech, ovšem celá situace je zde komplikovanější kvůli vyšší dimenzi okolí limitního bodu.

## 1.5 Parciální derivace, derivace ve směru

Pro funkce více proměnných se zavádí pojem parciální derivace, který využívá pojem derivace funkce jedné proměnné.

**Definice 1.34.** **Parciální derivací (prvního řádu)** funkce  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  **v bodě**  $a = [a_1, \dots, a_n]$  podle proměnné  $x_i$  rozumíme derivaci funkce jedné proměnné

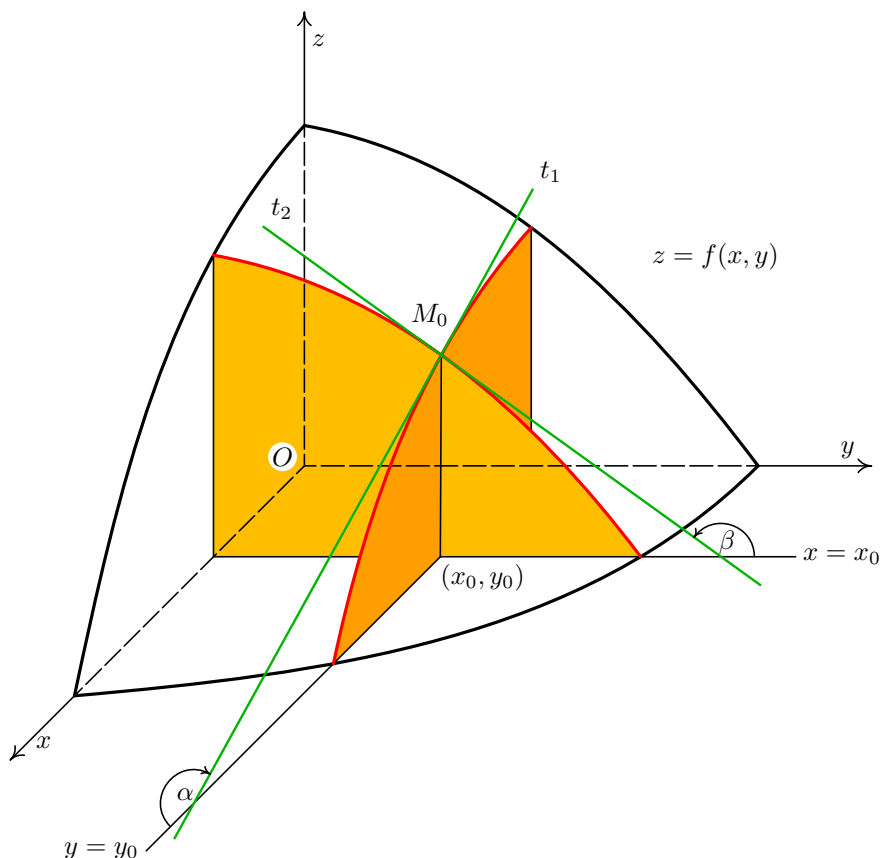
$$y(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

v bodě  $a_i$ . Tuto derivaci zapisujeme dvěma způsoby:

$$f'_{x_i}(a) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Funkce  $n$  proměnných má tedy  $n$  různých parciálních derivací prvního řádu. Při výpočtu parciální derivace podle proměnné  $x_i$  všechny proměnné kromě proměnné  $x_i$  „zafixujeme“, tj. nazíráme na ně při derivování jako na konstanty a derivujeme pouze podle proměnné  $x_i$ . Pro grafické vyjádření pojmu parciální derivace v bodě se omezíme pouze na funkci dvou proměnných a bod  $[x_0, y_0]$ . V tomto případě „zafixování“ proměnné  $y$ , resp.  $x$  znamená omezit se při výpočtu  $f'_x(x_0, y_0)$ , resp.  $f'_y(x_0, y_0)$  na rovinu  $y = y_0$ , resp.

$x = x_0$ . Ve shodě s geometrickým významem derivace funkce jedné proměnné je pak derivace  $f'_x(x_0, y_0)$  rovna směrnici tečny v bodě  $[x_0, y_0]$  k průsečnici funkce  $f(x, y)$  s rovinou  $y = y_0$ . Analogické úvahy platí i pro  $f'_y(x_0, y_0)$ . Situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Obr. 1.5: Geometrický význam parciálních derivací  $f'_x$  a  $f'_y$  v bodě  $[x_0, y_0]$ .

**Definice 1.35.** Nechť funkce  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  má definovanou parciální derivaci podle proměnné  $x_i$  v každém bodě množiny  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Potom je funkce, přiřazující každému bodu této množiny hodnotu této parciální derivace, nazývána **parciální derivací (prvního řádu)** funkce  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  podle proměnné  $x_i$ , což zapisujeme

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Parciální derivace na nějaké množině  $M$  je tedy funkce  $n$  proměnných. Při praktickém výpočtu parciální derivace (prvního řádu) funkce  $f$  v bodě  $a \in \mathbb{R}^n$  postupujeme tak, že nejprve spočítáme parciální derivaci obecně a poté do ní bod  $a$  dosadíme, viz následující příklad.

**Příklad 1.36.** Vypočtete všechny parciální derivace prvního řádu funkce

- a)  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$  v bodě  $[0, 1]$ ,    b)  $z = x^y$  v bodě  $[1, 2]$ .

**Řešení.** a) Derivujeme jako složenou funkci, tj.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left( \frac{1}{y} \right) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \left( -\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Odtud  $z'_x(0, 1) = 1$  a  $z'_y(0, 1) = 0$ .

b) Na výpočet parciální derivace podle  $x$  použijeme vzorec pro derivaci mocninné funkce a při parciální derivaci podle  $y$  využijeme vzorce pro derivaci exponenciální funkce se základem  $x$ , tj.

$$z'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x.$$

Odtud  $z'_x(1, 2) = 2$  a  $z'_y(1, 2) = 0$ . □

**Poznámka 1.37.** Z existence parciálních derivací funkce  $f$  v bodě  $[x_1, \dots, x_n]$  neplyne nutně spojitost funkce  $f$  v tomto bodě. Tedy neplatí jistá analogie s funkcí jedné proměnné, kde existence derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  implikovala spojitost funkce  $f$  v tomto bodě, viz následující příklad.

**Příklad 1.38.** Funkce  $z$  definovaná jako

$$z(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě  $[0, 0]$  obě parciální derivace rovny 0, ale není v tomto bodě spojitá, protože zde neexistuje limita. Blížíme-li se totiž do bodu  $[0, 0]$  po ose  $x$  či  $y$  vychází hodnota 1 a v jiném směru vychází hodnota 0. Grafem funkce je rovina  $z = 0$ , z níž je „vzdvížen“ osový kříž.

Zobecněním pojmu parciální derivace je derivace ve směru vektoru  $\vec{s}$ .

**Definice 1.39.** Derivací funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$  v bodě  $a = [a_1, \dots, a_n]$  ve směru  $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$  rozumíme derivaci funkce jedné proměnné

$$y(t) = f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n)$$

v bodě  $t = 0$  a zapisujeme ji  $f'_{\vec{s}}(a)$ . To znamená, že

$$f'_{\vec{s}}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}.$$

Volíme-li vektor  $\vec{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  tvořený nulami s výjimkou  $i$ -té pozice (kde je 1), derivace funkce  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  v bodě  $a = [a_1, \dots, a_n]$  ve směru  $\vec{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  je rovna parciální derivaci  $f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n)$ .

Abychom uvedli i souvislost parciálních derivací s derivací ve směru, je vhodné zavést pojem gradientu funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$ .



**Definice 1.40.** Jestliže má funkce  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  parciální derivace v bodě  $a = [a_1, \dots, a_n]$  podle všech proměnných  $x_i$ , řekneme, že funkce  $y$  má v bodě  $a$  **gradient**  $\text{grad } f(a)$ , který je roven vektoru parciálních derivací v tomto bodě podle jednotlivých proměnných, tj.

$$\text{grad } f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

**Věta 1.41.** *Existuje-li okolí bodu  $a = [a_1, \dots, a_n]$ , v němž má funkce  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  spojitě parciální derivace podle všech proměnných  $x_i$ , potom pro libovolný vektor  $\vec{s} = [s_1, \dots, s_n]$  existuje derivace funkce  $y$  ve směru  $\vec{s}$  a platí:*

$$f'_s(a) = \langle \text{grad } f(a) \cdot \vec{s} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) s_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) s_n,$$

kde výraz  $\langle \text{grad } f(a) \cdot \vec{s} \rangle$  označuje **skalární součin** těchto vektorů.

Poznamenejme, že pro  $k$ -násobný vektor  $\vec{s}$  vychází směrová derivace  $k$ -násobná, tj. pro  $k \in \mathbb{R}$  platí

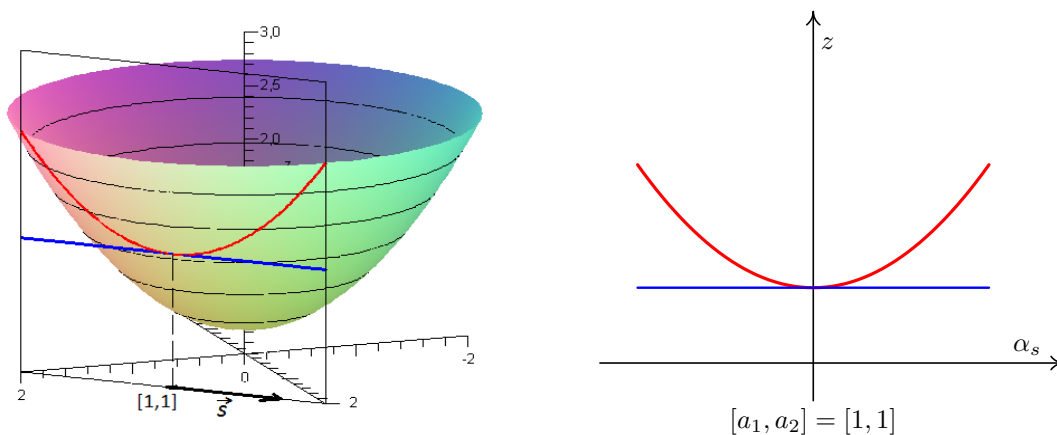
$$f'_{k\vec{s}}(a) = k f'_s(a).$$

Omezíme-li se na vektory konkrétní velikosti  $v > 0$ , tak z vlastností skalárního součinu plyne fakt, že největší hodnoty nabývá  $f'_s(a)$  pro vektor  $\vec{s}$  ( $|\vec{s}| = v$ ), který je roven vhodnému  $k$ -násobku vektoru  $\text{grad } f(a)$ . Gradient funkce  $f$  v bodě  $a$  je tedy směrem největšího růstu funkce  $f$  v bodě  $a$  a hodnota  $f'_s(a)$  udává, jak moc funkce  $f$  v tomto směru roste.

Pro geometrickou interpretaci derivace ve směru  $\vec{s}$ , kde  $|\vec{s}| = 1$ , se podobně jako u parciálních derivací omezíme na funkce dvou proměnných. Množinu bodů

$$[a_1 + ts_1, a_2 + ts_2, f(a_1 + ts_1, a_2 + ts_2)], \quad t \in \mathbb{R},$$

si lze představit jako průsečnici grafu funkce  $f$  s rovinou  $\alpha$ . Rovina  $\alpha$  je rovnoběžná s osou  $z$  a má stopu v rovině  $xy$  určenou bodem  $[a_1, a_2]$  a vektorem  $\vec{s} = (s_1, s_2)$ , viz Obrázek 1.6.



Obr. 1.6: Směrová derivace v bodě  $[1, 1]$  ve směru  $\vec{s}$ .

Derivace ve směru vektoru  $\vec{s}$  v bodě  $[a_1, a_2]$  je potom tangentou úhlu, který svírají vektor  $\vec{s}$  spolu s tečným vektorem průsečnice v bodě  $[a_1, a_2, f(a_1, a_2)]$ . Na obrázku jsou příslušné vektory rovnoběžné, což znamená, že jejich úhel a tudíž i směrová derivace (zde konkrétně pro bod  $[1, 1]$ ) jsou nulové.

Jinou možnou interpretací je představa, že funkce  $f$  lokálně popisuje nadmořskou výšku zemského povrchu. Postavíme-li se s lyžemi na svah v bodě  $[a_1, a_2, f(a_1, a_2)]$  tak, že lyže se nám při rovnoběžném promítání ve směru osy  $z$  promítnou do vektoru  $(s_1, s_2)$ , potom podíl rozdílu nadmořských výšek špiček a pat lyží ku délce lyží je roven derivaci funkce  $f$  v bodě  $[a_1, a_2]$  ve směru  $\vec{s}$ .

**Příklad 1.42.** Určete směr ve kterém funkce

$$f(x, y) = xy + \sin \frac{x}{y}$$

v bodě  $[\pi, 1]$  nejrychleji roste. Dále určete  $f'_{\vec{s}}$  v tomto bodě pro  $\vec{s} = (1, 3)$ .

**Řešení.** Nejdříve spočítáme parciální derivace funkce  $f$ , tj.

$$f'_x = y + \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}, \quad f'_y = x - \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}.$$

Odtud  $f'_x(\pi, 1) = 0$ ,  $f'_y(\pi, 1) = 2\pi$  a  $\text{grad } f(\pi, 1) = (0, 2\pi)$ , tedy funkce nejrychleji roste ve směru  $(0, 2\pi)$  neboli v kladném směru osy  $y$ . Jelikož jsou obě parciální derivace spojité v okolí bodu  $[\pi, 1]$ , využijeme k určení směrové derivace Větu 1.41:

$$f'_{(1,3)}(\pi, 1) = \langle \text{grad } f(\pi, 1) \cdot (1, 3) \rangle = 0 \cdot 1 + 2\pi \cdot 3 = 6\pi.$$

□

**Poznámka 1.43.** Podobně jako u parciálních derivací, i z existence směrových derivací funkce  $f$  v bodě  $[x_1, \dots, x_n]$  neplyne nutně spojitost funkce  $f$  v tomto bodě, viz následující příklad.

**Příklad 1.44.** Funkce  $f$  definovaná jako

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

má v bodě  $[0, 0]$  směrové derivace dokonce v libovolném směru, ale není zde spojitá. Ověření existence všech směrových derivací v bodě  $[0, 0]$  ponecháme na samotném čtenáři. Je však nutné při jejich určování použít přímo definici směrové derivace. Nespojité v bodě  $[0, 0]$  plyne z neexistence limity v tomto bodě, viz Příklad 1.33.

Jak jsme již uvedli dříve, lze parciální derivaci prvního řádu chápat jako funkci více proměnných na množině  $M$ . Jestliže má funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$  na této množině parciální derivaci  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ , která má v bodě  $a = [a_1, \dots, a_n] \in M$  parciální derivaci podle

proměnné  $x_j$ , nazveme tuto parciální derivaci parciální derivací druhého řádu funkce  $f$  podle  $x_i x_j$ , tj.

$$f''_{x_i x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a).$$

Opakováním uvedeného postupu definujeme rekurentně i parciální derivace vyšších řádů. Pro parciální derivace vyšších řádů platí tzv. Schwarzova věta o záměně pořadí derivování. Uvedeme ji v nejjednodušší podobě, tj. pro funkci dvou proměnných a (smíšené) parciální derivace druhého řádu.

**Věta 1.45 (Schwarzova).** *Nechť v nějakém okolí  $U(a)$  bodu  $a = [a_1, a_2]$  existují obě parciální derivace  $f'_x$  a  $f'_y$  funkce  $f(x, y)$ . Dále, nechť funkce  $f(x, y)$  má v bodě  $a = [a_1, a_2]$  spojitou parciální derivaci  $f''_{xy}$  nebo  $f''_{yx}$ . Potom jsou spojité obě tyto parciální derivace a navíc jsou záměnné, tj. platí*

$$f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a).$$

**Příklad 1.46.** Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce  $z = x^y$ . Dále ověřte platnost Schwarzovy věty a najděte množinu  $M \subseteq \mathbb{R}^2$ , pro kterou je tato věta splněna.

**Řešení.** Z Příkladu 1.36 b) víme, že

$$z'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x.$$

Dalším derivováním určíme

$$z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad z'_{yy} = x^y \ln^2 x.$$

Pro smíšené parciální derivace dostáváme

$$z''_{xy} = 1x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x), \quad z''_{yx} = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = x^{y-1}(y \ln x + 1).$$

Odtud je vidět, že Schwarzova věta je splněna pro všechna  $[x, y]$ , kde jsou smíšené derivace definované, tj. na množině  $M = \{[x, y] \mid x > 0\}$ .  $\square$

Závěrem uvedeme důležité diferenciální operátory používané zejména ve fyzice a aplikacích. Již jsme se zmínili o gradientu. Pro jednoduchý zápis gradientu se používá symbolického vektoru nabla

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

který je nejčastěji používán pro funkce tří proměnných, tj.

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Gradient  $\text{grad } f(a)$  v bodě  $a = [a_1, \dots, a_n]$  zapisujeme potom jako součin symbolického vektoru

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

a skaláru  $f(a)$ , tj.

$$\text{grad } f(a) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(a).$$

Dalším důležitým operátorem je tzv. **Laplaceův operátor**, který můžeme symbolicky vyjádřit jako

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

a který je nejčastěji používán pro funkce dvou nebo tří proměnných, tj.

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

nebo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Poznamenejme, že s tzv. Laplaceovou rovnicí pro funkci  $u(x, y)$ , tj. s rovnicí

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se setkáme později u funkcí komplexní proměnné, podrobněji viz Odstavec 3.6.2.

## 1.6 Diferenciál funkce

Diferenciál funkce jedné proměnné v bodě  $x_0$  vnímáme jako nahrazení funkce tečnou v bodě  $x_0$  a jeho existence je rovnocenná existenci derivace v tomto bodě. Situace v případě funkcí více proměnných je komplikovanější, i když z formálního hlediska je význam diferenciálu totožný.

**Definice 1.47.** Řekneme, že funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definovaná v nějakém okolí bodu  $a = [a_1, \dots, a_n]$  je v tomto bodě **diferencovatelná**, jestliže existují konstanty  $D_1, \dots, D_n \in \mathbb{R}$  takové, že platí

$$\lim_{[h_1, \dots, h_n] \rightarrow [0, \dots, 0]} \frac{f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) - (D_1 h_1 + \dots + D_n h_n)}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0.$$

Lineární výraz  $D_1 h_1 + \dots + D_n h_n$  proměnných  $h_1, \dots, h_n$  se nazývá **diferenciál** nebo též **totální diferenciál** funkce  $f$  v bodě  $[a_1, \dots, a_n]$  a značí se  $df(a_1, \dots, a_n)$ .

**Věta 1.48.** *Je-li funkce  $f(x_1, \dots, x_n)$  diferencovatelná v bodě  $a = [a_1, \dots, a_n]$ , resp. v jeho okolí, pak je v tomto bodě, resp. v jeho okolí spojitá. Navíc v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu a splňují rovnosti*

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) = (D_1, \dots, D_n).$$

**Poznámka 1.49.** (i) Výrazy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i \quad \text{pro } i = 1, \dots, n$$

se někdy v odborné literatuře nazývají **parciální diferenciály**. Přírůstky  $h_i$  lze značit i jako  $dx_i$ .

(ii) Opak předešlé věty (podobně jako u funkce jedné proměnné) neplatí. Je-li funkce spojitá v bodě, nemusí být zde diferencovatelná, viz např.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  v bodě  $[0, 0]$ .

Při geometrické interpretaci se opět omezíme pouze na funkci dvou proměnných. V tomto případě diferenciál funkce  $z = f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  obvykle zapisujeme ve zkrácené podobě

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy .$$

Vyjádříme-li přírůstky  $dx = x - x_0$ ,  $dy = y - y_0$ ,  $dz = z - z_0$  a dosadíme do výše uvedené rovnice, vznikne nám pro proměnné  $x, y, z$  lineární rovnice

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (1.1)$$

která je vzorcem **tečné roviny** k funkci  $z = f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0, z_0]$ , kde  $z_0 = f(x_0, y_0)$ .

**Příklad 1.50.** Napište rovnici tečné roviny a normály (normálové přímky), tj. přímky kolmé k tečné rovině k funkci  $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  v bodě  $[1, 1, ?]$ .

**Řešení.** Nejdříve vypočteme třetí souřadnici  $z_0$  tečného bodu  $z_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$ . Tedy tečný bod má souřadnice  $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$ . Dále vypočteme parciální derivace prvního řádu, tj.

$$f'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{a} \quad f'_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Odtud dostáváme  $f'_x(1, 1) = -\frac{1}{2}$  a  $f'_y(1, 1) = \frac{1}{2}$ . Dosazením do vztahu (1.1) dostáváme hledanou rovinu, tj.

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{-1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Normálový vektor tečné roviny  $\vec{n} = (1, -1, 2)$  je směrovým vektorem normálové přímky, což spolu se znalostí jednoho bodu normály, tj. bodu  $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$ , umožňuje napsat např. kanonickou rovnici normálové přímky:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{2}.$$

□

Kromě určení tečné roviny je dalším možným využitím diferenciálu přibližný výpočet funkční hodnoty  $f(b)$  funkce více proměnných  $f(x_1, \dots, x_n)$  v bodě  $b = [b_1, \dots, b_n]$ , který je „blízko“ bodu  $a = [a_1, \dots, a_n]$ , jehož funkční hodnotu známe přesně. Platí totiž

$$f(b) \doteq f(a) + df(a). \quad (1.2)$$

Rozepsáním tohoto vztahu a dosazením  $dx_i = b_i - a_i$  dostáváme podrobný vzorec na přibližný výpočet funkční hodnoty  $f(b)$ , tj.

$$f(b) \doteq f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n) dx_i = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n) (b_i - a_i).$$

**Příklad 1.51.** Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte  $\sqrt{(1,05)^2 + (3,97)^2 + (8,02)^2}$ .

**Řešení.** K výpočtu využijeme diferenciál funkce  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  v bodě  $[1, 4, 8]$  s přírůstky  $dx = 0,05$ ,  $dy = -0,03$  a  $dz = 0,02$ . Platí

$$df(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz$$

a odtud

$$df(1, 4, 8) = \frac{1}{9} dx + \frac{4}{9} dy + \frac{8}{9} dz = \frac{1 \cdot 0,05 - 4 \cdot 0,03 + 8 \cdot 0,02}{9} = 0,01.$$

Podle (1.2) dostáváme

$$\sqrt{(1,05)^2 + (3,97)^2 + (8,02)^2} = f(1,05; 3,97; 8,02) \doteq f(1, 4, 8) + df(1, 4, 8) = 9,01,$$

což se od přesné hodnoty 9,0102053... liší až v řádech  $10^{-4}$ . □

## 1.7 Funkce zadané implicitně

### 1.7.1 Funkce jedné proměnné zadaná implicitně

Uvažujme funkci dvou proměnných  $F(x, y)$ . Množinou  $M$ , definovanou jako

$$M = \{[x, y] \in D(F) \mid F(x, y) = 0\},$$

rozumíme křivku v rovině  $\mathbb{R}^2$ . Například pro  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  je křivka  $M$  jednotková kružnice se středem v počátku.

Důležitou vlastností křivky  $M$  je, že v okolí nějakého bodu  $[x_0, y_0] \in M$  (ne nutně každého) může definovat funkci jedné proměnné. S touto situací se budeme setkávat při řešení některých typů diferenciálních rovnic (viz Kapitola 2), kdy řešením dané diferenciální rovnice bude nejčastěji právě tzv. integrální křivka neboli funkce zadaná implicitně. Naším úkolem bude zjistit vlastnosti této funkce v okolí bodu  $[x_0, y_0]$ , zejména pak derivaci této funkce v bodě  $[x_0, y_0]$ .

Pozorného čtenáře jistě napadne, že v případě, kdy lze proměnnou  $y$  vyjádřit z rovnice  $F(x, y) = 0$ , můžeme tento problém řešit klasickou derivací funkce jedné proměnné. To může například nastat, když je křivka  $M$  přímo grafem funkce jedné proměnné  $y = f(x)$ , tj. pokud ji můžeme zapsat ve tvaru  $F(x, y) = y - f(x) = 0$ . Derivaci v libovolném bodě křivky  $M$  pak určíme pomocí derivace  $f'(x)$ . I v případě jednotkové kružnice můžeme derivaci v libovolném jejím bodě  $[x, y] \neq [\pm 1, 0]$  spočítat jako derivaci funkce

$$f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

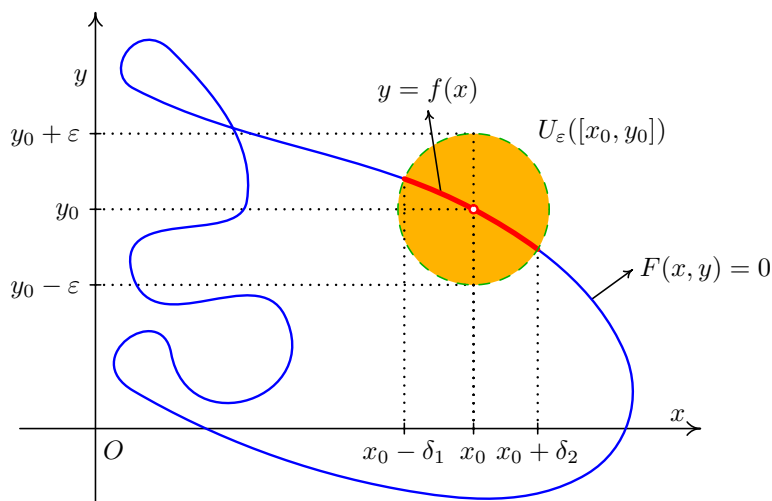
Stačí si při derivování funkce  $f$  vybrat „správnou“, tj. kladnou či zápornou, větev funkce  $f$  podle toho, zda bod  $[x, y]$  leží nad či pod osou  $x$ . Poznamenejme, že pro body  $[\pm 1, 0]$ , jak se lze snadno přesvědčit, není (vlastní) derivace  $f'$  (a tudíž ani derivace křivky) definovaná.

Výše uvedený postup ovšem selhává, pokud je křivka  $M$  komplikovanější a nelze z ní rozumně proměnnou  $y$  vyjádřit. Například pro  $x^y + y^x + x^3 + y^3 = 0$  toto vyjádření nelze provést. Naším cílem bude vytvořit aparát, který nám umožní tuto nesnáz řešit. Přitom důležitým požadavkem pro nás bude, aby rovnice  $F(x, y) = 0$  a bod  $[x_0, y_0]$ , který ji vyhovuje, určily v jeho okolí (implicitně) maximálně jednu funkci.

**Definice 1.52.** Nechť  $F(x, y)$  je funkce dvou proměnných. Označme

$$M = \{[x, y] \in D(F) \mid F(x, y) = 0\}$$

a nechť  $F(x_0, y_0) = 0$ . Jestliže existují čísla  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  a okolí  $U_\varepsilon([x_0, y_0])$  bodu  $[x_0, y_0]$  tak, že množina  $M \cap U_\varepsilon([x_0, y_0])$  je totožná s grafem funkce  $y = f(x)$  definované na intervalu  $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ , řekneme, že  $y = f(x)$  je v okolí bodu  $[x_0, y_0]$  **funkce zadaná implicitně** rovnicí  $F(x, y) = 0$ .



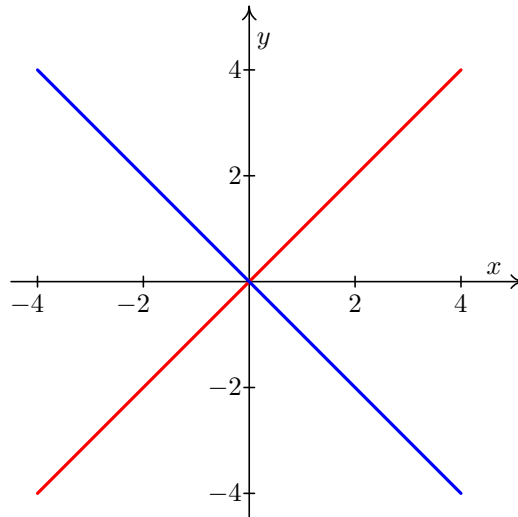
Obr. 1.7: Funkce zadaná implicitně.

**Příklad 1.53.** Uvažujme křivku

$$F(x, y) = x^2 - y^2 = 0,$$

tj. dvojice přímek, viz Obrázek 1.8.

Z obrázku je patrné, že v libovolném okolí bodu  $[x_0, y_0]$  křivky  $F$  s výjimkou počátku



Obr. 1.8: Křivka  $x^2 - y^2 = 0$ .

$[0, 0]$  je rovnicí  $F(x, y) = 0$  implicitně určena funkce  $y = x$  nebo funkce  $y = -x$ . Naopak v okolí bodu  $[0, 0]$  není rovnicí  $F(x, y) = 0$  určena žádná funkce.

V následující větě je uvedena postačující podmínka pro existenci funkce zadané implicitně v okolí daného bodu křivky a podmínka pro existenci derivace v tomto bodě.

**Věta 1.54.** *Nechť  $F(x_0, y_0) = 0$  a nechť je funkce  $F(x, y)$  spojitá v nějakém okolí  $U([x_0, y_0])$  bodu  $[x_0, y_0]$ . Předpokládejme, že funkce  $F$  má v tomto okolí spojitou parciální derivaci  $F'_y(x, y)$  a platí  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Potom existuje okolí bodu  $[x_0, y_0]$ , v němž je rovnicí  $F(x, y) = 0$  implicitně zadaná právě jedna funkce  $y = f(x)$ , která je navíc v tomto okolí spojitá.*

*Má-li navíc funkce  $F$  v bodě  $[x_0, y_0]$  spojitou parciální derivaci  $F'_x$ , má implicitně určená funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci a platí*

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \quad (1.3)$$

Vzorec (1.3) lze odvodit pomocí derivace složené funkce. Rovnici  $F(x, y) = 0$  derivujeme podle proměnné  $x$ , kde výraz s  $y$  bereme jako složenou funkci s vnitřní složkou  $y(x)$ . Poté vyjádříme  $y'$ , kde  $y' = f'$ . Na následujícím příkladě si ukážeme výpočet derivace  $f'(x_0)$  tímto postupem a zároveň porovnáme s přímým dosazením do vzorce (1.3).

**Příklad 1.55.** Určete derivaci funkce  $y = f(x)$  v bodě  $[1, 1]$  zadanou implicitně rovnicí  $xy + y^3 - 2x^2 = 0$ .



**Řešení.** (i) *Pomocí derivace složené funkce*

Derivací výše uvedené rovnice, kde proměnnou  $y$ , bereme jako funkci  $y(x)$  proměnné  $x$  dostáváme

$$1y + xy' + 3y^2y' - 4x = 0$$

a odtud

$$y' = \frac{4x - y}{x + 3y^2}.$$

Po dosazení bodu  $[1, 1]$  dostaneme  $y'(1) = f'(1) = \frac{3}{4}$ .

(ii) *Přímé použití vzorce (1.3)*

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{y - 4x}{x + 3y^2},$$

což je ekvivalentní s předcházejícím způsobem a dostaneme opět  $f'(1) = \frac{3}{4}$ . □

**Příklad 1.56.** Určete rovnici tečny a normály ke křivce dané rovnicí  $x^3 + y^3 - 2xy = 0$  v bodě  $[1, 1]$ .

**Řešení.** Označme  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ . Potom platí  $F'_y(x, y) = 3y^2 - 2x$ ,  $F'_y(1, 1) = 1 \neq 0$ . Jsou tedy splněny předpoklady Věty 1.54 a rovnice  $x^3 + y^3 - 2xy = 0$  zadává v jistém okolí bodu  $[1, 1]$  implicitně funkci  $y = f(x)$ . Pro její derivaci v bodě  $x = 1$  dostáváme

$$f'(1) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x} \Big|_{[x, y] = [1, 1]} = -1.$$

Rovnice tečny  $t$  je  $y - 1 = -(x - 1) \implies x + y - 2 = 0$ . Normála  $n$ , jakožto přímka kolmá k tečně, má směrnici  $k = 1$  a její rovnice je  $y - 1 = x - 1 \implies x - y = 0$ . □

## 1.7.2 Funkce dvou proměnných zadaná implicitně

V následujícím odstavci rozšíříme naše úvahy o implicitně zadaných funkcích na funkce více proměnných. Pro jednoduchost se omezíme pouze na funkce dvou proměnných (ty se vyskytují v našich aplikacích nejčastěji). Analogické rozšíření lze však udělat i pro funkce tří a více proměnných - to však ponecháme čtenáři k samostatné úvaze.

Podobně jako jsme u funkce jedné proměnné uvažovali rovnici  $F(x, y) = 0$ , která nám v okolí bodu  $[x_0, y_0]$  roviny  $\mathbb{R}^2$  definovala implicitně funkci  $y = f(x)$ , můžeme uvažovat rovnici  $F(x, y, z) = 0$ , která nám v okolí bodu  $[x_0, y_0, z_0]$  prostoru  $\mathbb{R}^3$  definuje implicitně funkci dvou proměnných  $z = f(x, y)$ .

**Definice 1.57.** Nechť  $F(x, y, z)$  je funkce tří proměnných. Označme

$$M = \{[x, y, z] \in D(F) \mid F(x, y, z) = 0\}$$

a nechť  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ . Jestliže existuje množina  $A \subset \mathbb{R}^2$  s vnitřním bodem  $[x_0, y_0]$  a okolí  $U_\varepsilon([x_0, y_0, z_0])$  bodu  $[x_0, y_0, z_0]$  tak, že množina  $M \cap U_\varepsilon([x_0, y_0, z_0])$  je totožná s grafem

funkce  $z = f(x, y)$  definované na množině  $A$ , řekneme, že  $z = f(x, y)$  je v okolí bodu  $[x_0, y_0, z_0]$  **funkce dvou proměnných zadaná implicitně** rovnicí  $F(x, y, z) = 0$ .

Následující věta je analogií Věty 1.54 a uvádí postačující podmínku pro existenci funkce zadané implicitně a podmínku pro existenci jejích parciálních derivací v daném bodě.

**Věta 1.58.** *Nechť  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  a nechť je funkce  $F(x, y, z)$  spojitá v nějakém okolí  $U([x_0, y_0, z_0])$  bodu  $[x_0, y_0, z_0]$ . Předpokládejme, že funkce  $F$  má v tomto okolí spojitou parciální derivaci  $F'_z$  a platí  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Potom existuje okolí bodu  $[x_0, y_0, z_0]$ , v němž je rovnicí  $F(x, y, z) = 0$  implicitně zadaná právě jedna spojitá funkce  $z = f(x, y)$ .*

*Má-li navíc funkce  $F$  v bodě  $[x_0, y_0, z_0]$  spojitě parciální derivace  $F'_x$  a  $F'_y$ , má implicitně určená funkce  $f(x, y)$  v bodě  $[x_0, y_0]$  parciální derivace a platí*

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \quad a \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (1.4)$$

**Příklad 1.59.** Určete parciální derivaci  $f'_x$  funkce  $z = f(x, y)$  v bodě  $[1, 1, 1]$  zadanou implicitně rovnicí  $x^2 - y^3 - z^4 + xyz = 0$ . Použijte jak vzorec (1.4), tak postup derivování celé rovnice podle proměnné  $x$ .

**Řešení.** (i) *Přímé užití vzorce (1.4)*

Přímým užitím vzorce (1.4) dostaneme

$$f'_x(1, 1) = -\frac{F'_x(1, 1, 1)}{F'_z(1, 1, 1)} = -\frac{2x + yz}{-4z^3 + xy} \Big|_{[x, y, z] = [1, 1, 1]} = 1.$$

(ii) *Pomocí derivace rovnice podle proměnné  $x$*

Při postupu derivování zadané rovnice podle  $x$  chápeme výrazy s proměnnou  $z$  jako funkce proměnné  $x, y$  a celou rovnici můžeme zapsat jako

$$x^2 - y^3 - [z(x, y)]^4 + xyz(x, y) = 0.$$

Derivací rovnice podle  $x$  dostaneme  $2x - 4z^3 z'_x + y(1z + xz'_x) = 0$  a odtud

$$z'_x = \frac{-2x - yz}{xy - 4z^3},$$

což je ekvivalentní s předcházejícím způsobem a dostaneme opět  $f'_x(1, 1) = 1$ . □

Při určování tečné roviny k funkci  $f(x, y)$  dané implicitně rovnicí  $F(x, y, z) = 0$  v bodě  $T = [x_0, y_0, z_0]$  lze postupovat dvojím způsobem. Buď „klasicky“ výpočtem derivací funkce  $f$  v bodě  $T$  a užitím vzorce (1.1), nebo lépe pomocí vzorce uvedeném v následující větě.

**Věta 1.60.** *Nechť  $F(x, y, z) = 0$  zadává v okolí bodu  $[x_0, y_0, z_0]$  funkci  $z = f(x, y)$  implicitně a nechť existuje tečná rovina v bodě  $T = [x_0, y_0, z_0]$ . Potom pro její rovnici platí*

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (1.5)$$

**Důkaz.** Připomeňme, že normálový vektor  $\vec{n}$  roviny  $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ , tj. vektor kolmý na rovinu  $\alpha$ , je tvaru  $\vec{n} = (a, b, c)$ . Normálový vektor plochy  $F(x, y, z) = 0$  v bodě  $[x_0, y_0, z_0]$  je kolmý na tečnou rovinu plochy  $F$  v tomto bodě a udává směr ve kterém funkce  $F$  v tomto bodě nejrychleji roste, tj. její gradient. Odtud tečná rovina k ploše  $F(x, y, z) = 0$  v bodě  $[x_0, y_0, z_0]$  je určena rovnicí

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)x + F'_y(x_0, y_0, z_0)y + F'_z(x_0, y_0, z_0)z + d = 0. \quad (1.6)$$

Dosazením bodu  $[x_0, y_0, z_0]$  do (1.6), který této rovnici vyhovuje, dopočítáme koeficient

$$d = -F'_x(x_0, y_0, z_0)x_0 - F'_y(x_0, y_0, z_0)y_0 - F'_z(x_0, y_0, z_0)z_0.$$

Zpětným dosazením koeficientu  $d$  do (1.6) a úpravou dostáváme vzorec (1.5).  $\square$

**Příklad 1.61.** Určete tečnou rovinu k funkci  $f(x, y)$  v bodě  $T = [1, 0, 1]$  zadanou implicitně rovnicí  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$ .

**Řešení.** Určíme  $F'_x = 3x^2 - 3yz - 1$  a odtud  $F'_x(1, 0, 1) = 2$ , dále  $F'_y = 3y^2 - 3xz - 1$  a odtud  $F'_y(1, 0, 1) = -4$  a nakonec  $F'_z = 3z^2 - 3xy - 1$  a odtud  $F'_z(1, 0, 1) = 2$ . Použijeme vzorec (1.5) a dostaneme  $2(x - 1) - 4y + 2(z - 1) = 0$  a po úpravě  $x - 2y + z - 2 = 0$ .  $\square$

## 1.8 Příklady na procvičení

### Cvičení

1. Určete a v  $\mathbb{R}^2$  zobrazte definiční obor funkce  $f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - \ln(|x| + |y|)}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ .
2. Určete vrstevnici funkce  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}$  procházející bodem  $a = [2, 5]$  a tuto vrstevnici načrtněte. Dále vypočtěte gradient této funkce v bodě  $a$  a rozhodněte o vzájemné poloze tohoto gradientu a vrstevnice.
3. U množiny  $A = \langle -1, 0 \rangle \cup \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{(2, 3) \cap \mathbb{Q}\}$  určete její vnitřek, uzávěr, hranici a všechny její hromadné a izolované body.
4. Rozhodněte o spojitosti funkce  $f$  v bodě  $[0, 0]$ , pokud

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 1 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

5. Určete limitu

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [\infty, \infty]} \frac{x - y}{x^2 - xy + y^2}.$$

6. Najděte všechny parciální derivace 1. a 2. řádu funkce  $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} - x) - \ln(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$ .
7. Určete diferenciál funkce  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$  v bodě  $[x_0, y_0] = [\sqrt{3}, 1]$ .
8. Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce  $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$  v bodě  $[1, 1, ?]$ .

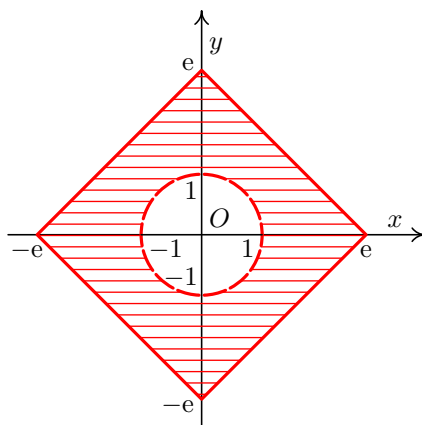
9. Ukažte, že funkce zadaná implicitně rovnicí  $4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$  a bodem  $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$  má v tomto bodě lokální maximum.

10. Najděte všechny parciální derivace 1. a 2. řádu funkce  $z = f(x, y)$  dané implicitně rovnicí

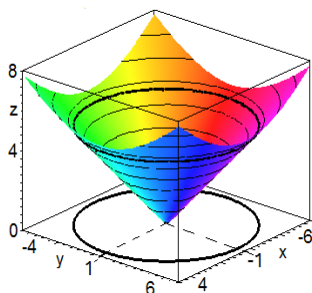
$$x + y + z = e^{-(x+y+z)}.$$

## Výsledky

1. Definičním oborem je množina  $D(f) = \{[x, y] \mid x^2 + y^2 > 1, -e \leq x \leq e, |x| - e \leq y \leq e - |x|\}$ .



2. Vrstevnice je dána rovnicí  $f(2, 5) = 5 = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2}$ , tj.  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ , což je rovnice kružnice se středem  $S = [-1, 1]$  o poloměru  $r = 5$ . Gradient  $\text{grad } f(2, 5) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  je kolmý na vrstevnici v bodě  $a$ .



3.  $A^\circ = (-1, 0)$ ,  $\bar{A} = \langle -1, 0 \rangle \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty \cup \langle 2, 3 \rangle$ ,  $\partial A = \{-1\} \cup \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty \cup \langle 2, 3 \rangle$ ,  $A' = \langle -1, 0 \rangle \cup \{(2, 3) \cap \mathbb{Q}\}$ , množina všech izolovaných bodů množiny  $A$  je  $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ .

4. Funkce není spojitá v bodě  $[0, 0]$ , protože  $f(0, 0) = 1$  a  $\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} f(x, y) = 0$ , což lze ověřit např. transformací funkce  $f$  do polárních souřadnic.

5. Limita je nulová, což lze ověřit např. transformací výrazu do polárních souřadnic a provedením limitního přechodu pro  $r \rightarrow \infty$ , kde  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

6. Parciální derivace 1. řádu jsou

$$z'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Parciální derivace 2. řádu jsou

$$z''_{xx} = \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{2y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad z''_{yy} = -\frac{2x(x^2 + 2y^2)}{y^2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

7. Dosazením do výrazu  $dz(x_0, y_0) = z'_x(x_0, y_0)dx + z'_y(x_0, y_0)dy$  dostaneme

$$dz(\sqrt{3}, 1) = \frac{1}{4}dx + \frac{1}{2}dy.$$

8. Dopočítáním souřadnice  $z_0 = f(1, 1) = 4$  a dosazením do vzorce pro tečnou rovinu dostáváme

$$3x + 5y - z - 4 = 0.$$

9. Pro funkci  $F(x, y) = 4x^4 - 4x^2 + y^2$  platí vztahy  $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 0$ ,  $F'_y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 2 \neq 0$ , které zaručí existenci funkce dané implicitně. Dále

$$y' = \frac{8x - 16x^3}{2y} \quad \text{a} \quad y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Opakovaným derivováním, kde  $y$  bereme jako funkci  $y(x)$ , dostáváme

$$y'' = \frac{(8 - 48x^2)2y - (8x - 16x^3)2y'}{4y^2} \quad \text{a} \quad y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -8 < 0,$$

z čehož plyne, že v bodě  $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$  je lokální maximum.

10. Použitím vzorce pro derivaci funkce dané implicitně dostáváme  $z'_x = z'_y = -1$  a odtud pro druhé parciální derivace platí  $z''_{xx} = z''_{xy} = z''_{yx} = z''_{yy} = 0$ .

## Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Výpočet parciálních derivací funkce více proměnných.](#)
2. [Určení tečné roviny k funkci dvou proměnných.](#)

## 2 Obyčejné diferenciální rovnice

### 2.1 Základní pojmy

Ze střední školy je všem dobře znám pojem *rovnice*. Rovnicí se zde rozumí tzv. *algebraická rovnice*, tj. rovnice, jejíž koeficienty i řešení jsou *čísla*. Na komplexní popis fyzikálních jevů však algebraické rovnice nestačí.

**Definice 2.1.** Obyčejnou diferenciální rovnicí  $n$ -tého řádu nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje neznámá funkce jedné proměnné a její derivace až do řádu  $n$ . Zapisujeme ji obecně ve tvaru

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

kde  $F$  je funkce  $n + 2$  proměnných definovaná na otevřené množině  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ . Tento tvar rovnice nazýváme **nerozřešený vzhledem k nejvyšší derivaci** neboli **implicitní**.

Speciálním případem rovnice (2.1) je rovnice, která se dá zapsat ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.2)$$

kde  $f$  je funkce  $n + 1$  proměnných definovaná na otevřené množině  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Tento tvar rovnice nazýváme **rozřešený vzhledem k nejvyšší derivaci** neboli **explicitní**.

**Příklad 2.2.** Příklady obyčejných diferenciálních rovnic různých řádů, které se dají zapsat ve tvaru (2.2):

- (i)  $y' + 2y = \cos x$  je obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu,
- (ii)  $y'' + y^4 y' + 3y = x$  je obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu,
- (iii)  $3y^{(8)} + \sin xy''' + 5 \ln xy'' - y^{10} y' = 0$  je obyčejnou diferenciální rovnicí osmého řádu.

Pojem *řešení* diferenciální rovnice má na rozdíl od algebraických rovnic několik významů.

**Příklad 2.3.** Mějme danu rovnici  $y' = y$ . Je zřejmé, že funkcí, která se rovná své první derivaci, je funkce  $y = e^x$ . Není však jediná, tutéž vlastnost má funkce  $y = 2e^x$ ,  $y = 3e^x$ , resp. libovolná funkce  $y = ce^x$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ .

**Definice 2.4.** **Řešením** obyčejné diferenciální rovnice řádu  $n$  na intervalu  $I$  nazýváme každou  $n$ -krát diferencovatelnou funkci na intervalu  $I$ , která vyhovuje dané rovnici. **Obecným řešením** obyčejné diferenciální rovnice rozumíme obecný předpis závisející na  $n$  různých parametrech  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ,  $[c_1, c_2, \dots, c_n] \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ , kde libovolnou volbou těchto parametrů dostaneme konkrétní řešení, které nazýváme **partikulárním (částečným) řešením**.

**Poznámka 2.5.** Některá řešení diferenciálních rovnic řádu  $n$  nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Taková řešení, která se vyskytují pouze u některých rovnic, popř. v některých bodech definičního oboru dané rovnice, označujeme jako **singulární (výjimečná)**. Se všemi typy řešení se setkáme později u konkrétních příkladech.

Ne vždy se řešení diferenciální rovnice podaří vyjádřit ve tvaru  $y = f(x)$ , tj. v **explicitním tvaru**. Často řešení  $y(x)$  dostaneme ve tvaru  $F(x, y) = 0$ , tj. v tzv. **implicitním tvaru**.

**Příklad 2.6.** Rozhodněte, zda funkce  $y(x)$  vyjádřená implicitně rovnicí

$$x^2 - xy + y^2 + x - y = 1$$

je řešením diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y - 2x - 1}{2y - x - 1}.$$

**Řešení.** Při ověřování musíme derivovat funkci  $y(x)$  jako funkci zadanou implicitně, viz Odstavec 1.7.1. Dostaneme

$$2x - y - xy' + 2yy' + 1 - y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y - 2x - 1}{2y - x - 1},$$

což vyhovuje dané rovnici. □

V případě, že na obecné řešení nějaké obyčejné diferenciální rovnice klademe další konkrétní podmínky, pak dostáváme následující pojem.

**Definice 2.7.** Úlohu najít řešení  $y(x)$  diferenciální rovnice (2.1) definované na intervalu  $I$  a splňující podmínky

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad x_0 \in I \quad (2.3)$$

nazýváme **počáteční (Cauchyho) úlohou** nebo **počátečním (Cauchyho) problémem**. Podmínky (2.3) se nazývají **počáteční podmínky**.

**Příklad 2.8.** Ověřte, že funkce  $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + \frac{1}{3} x e^x$  je obecné řešení rovnice  $y'' + y' - 2y = e^x$ . Určete konstanty  $c_1$  a  $c_2$  tak, aby byly splněny počáteční podmínky  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = \frac{4}{3}$ .

**Řešení.** Dvojím zderivováním funkce  $y$  a dosazením do diferenciální rovnice snadno ověříme, že  $y$  je jejím řešením. Má-li platit  $y(0) = 4$ , musí být

$$y(0) = c_1 e^{-2 \cdot 0} + c_2 e^0 + \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 4.$$

Má-li platit  $y'(0) = \frac{4}{3}$ , je třeba dosadit do derivace  $y$  a opět porovnat. Dostáváme

$$y'(0) = -2c_1 e^{-2 \cdot 0} + c_2 e^0 + \frac{1}{3} e^0 + \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = \frac{4}{3}.$$

Po úpravě výše uvedených rovnic dostáváme, že hledané konstanty  $c_1, c_2$  jsou řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 4, \\ -2c_1 + c_2 + \frac{1}{3} &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Odtud  $c_1 = 1, c_2 = 3$  a řešení zadané počáteční úlohy je tedy  $y = e^{-2x} + 3e^x + \frac{1}{3}xe^x$ .  $\square$

Na následujícím praktickém příkladě ukážeme, jak lze pro konkrétní problém sestavit obecnou diferenciální rovnici a specifikovat její konkrétní řešení.

**Příklad 2.9.** Je dán elektrický  $RL$  obvod s cívkou o indukci  $L$ , ohmickým odporem  $R$  a konstantním napětím  $U$ . Popište průběh proudu  $i$  v závislosti na čase  $t$ .

**Řešení.** Podle prvního Kirchhoffova zákona je součet všech elektromotorických sil v uzavřeném obvodu roven nule a hledaná funkce  $i(t)$  je řešením obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$Li'(t) + Ri(t) = U.$$

Řešení výše uvedené rovnice (získané postupem, který uvedeme v dalším odstavci této kapitoly) je

$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R},$$

kde proud  $i$  je funkcí času  $t$  a  $c \in \mathbb{R}$  je libovolná konstanta. Tato závislost  $i$  na  $t$  představuje obecné řešení (tj. popis obecné situace) dané diferenciální rovnice.

Počáteční velikost proudu bývá obvykle známa. V čase  $t = 0$  je proud obvykle nulový. Tato podmínka říká, že máme najít funkci  $i(t)$  v situaci, kdy  $i(0) = 0$ . Dosazením zjistíme, že v tomto případě  $c = -\frac{U}{R}$ , tj. hledaná závislost  $i$  na  $t$  je potom

$$i(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

a představuje *partikulární řešení* zadané diferenciální rovnice.  $\square$

Úloha „Najděte řešení diferenciální rovnice (resp. počáteční úlohy)“ není obecně řešitelná. V teorii obyčejných diferenciálních rovnic se proto zavádí poměrně podrobná klasifikace typů diferenciálních rovnic. Postup hledání řešení dané rovnice pak závisí na tom,



jakého konkrétního typu daná rovnice je. Řešit přitom umíme jen rovnice některých typů. S těmi nejzákladnějšími se seznámíme v dalších odstavcích této kapitoly.

V případě, že je nalezení řešení nějaké počáteční úlohy obtížné nebo nemožné, můžeme přibližné řešení nalézt pomocí numerických metod<sup>1</sup>. Tímto postupem však nalezneme pouze funkci, která splňuje danou rovnici jen v určitých předem zadaných bodech a v ostatních bodech definičního oboru funkce se funkční hodnoty přesnému řešení pouze blíží.

## 2.2 Diferenciální rovnice prvního řádu

V tomto odstavci se budeme zabývat nejznámějšími typy diferenciálních rovnic prvního řádu rozřešenými vzhledem k první derivaci<sup>2</sup>.

**Definice 2.10.** Necht'  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  a  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  je funkce dvou proměnných. Potom **diferenciální rovnici prvního řádu** (rozřešenou vzhledem k první derivaci) nazýváme rovnici

$$y' = f(x, y). \quad (2.4)$$

Poznamenejme, že z Definice 2.4 vyplývá, že obecné řešení rovnice (2.4) závisí na jedné konstantě  $c$ .

Než se vůbec začneme zabývat metodami řešení konkrétních rovnic, tak by nás z praktického hlediska měly zajímat tyto otázky. Má konkrétní zadaná rovnice řešení? Na jaké množině je definováno? Je řešení jejího počátečního problému jednoznačné (tj. existuje právě jedno řešení procházející předem daným bodem)?

**Věta 2.11 (O existenci řešení).** *Necht'  $f(x, y)$  je spojitá na otevřené množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$ . Pak pro každé  $[x_0, y_0] \in M$  má úloha*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.5)$$

*alespoň jedno řešení definované na nějakém otevřeném intervalu  $(a, b)$ ,  $x_0 \in (a, b)$ .*

Spojitosť tedy zaručuje, že každým bodem oblasti  $M$  prochází alespoň jedno řešení. Toto řešení nemusí být jediné, jak ukazuje následující příklad.

**Příklad 2.12.** Uvažujme počáteční úlohu

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Pak  $y = x^2$ ,  $x \geq 0$ , je partikulární řešení (vzniklé z obecného řešení  $y = (x - c)^2$ ,  $x \geq c$ , volbou  $c = 0$ ) a  $y = 0$  je singulární řešení, jak se lze snadno přesvědčit dosazením do rovnice.

Existuje řada podmínek, které vedle existence řešení zaručí i jeho jednoznačnost. Nejznámější z nich je tzv. **Lipschitzova podmínka**, kterou uvedeme jako součást následující věty.

<sup>1</sup>Budou náplní předmětu *Matematika 3*

<sup>2</sup>S dalšími typy rovnic prvního řádu se mohou případní zájemci setkat v rámci předmětu MDRE.

**Věta 2.13 (O existenci a jednoznačnosti řešení).** *Nechť  $f(x, y)$  je spojitá na otevřené množině  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  a v každém bodě  $[x_0, y_0]$  množiny  $M$  je splněna Lipschitzova podmínka, tj. existuje  $L > 0$  tak, že platí*

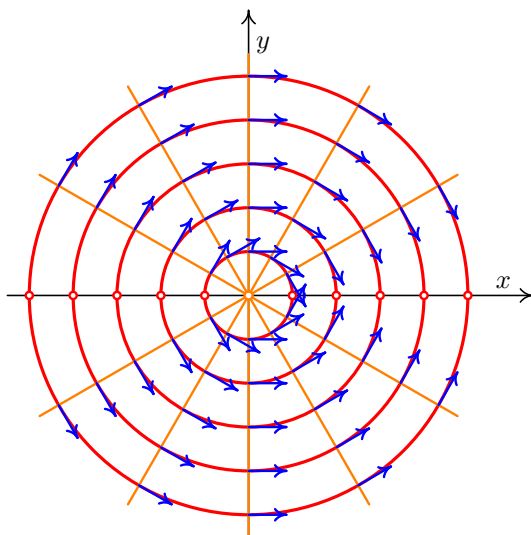
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (2.6)$$

pro každé dva body  $[x, y_1], [x, y_2]$  z nějakého okolí bodu  $[x_0, y_0]$ . Pak pro libovolný bod  $[x_0, y_0] \in M$  má úloha (2.5) právě jedno řešení.

Poznamenejme, že Lipschitzova podmínka bude splněna, pokud parciální derivace  $f'_y(x, y)$  v okolí bodu  $[x_0, y_0]$  bude ohraničená, což platí, pokud je tato derivace v nějakém okolí  $[x_0, y_0]$  spojitá.

### 2.2.1 Geometrická interpretace rovnic prvního řádu

Diferenciální rovnice (2.4) přiřazuje každému bodu  $[x, y] \in M$  právě jednu hodnotu  $y'(x)$ , kterou můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem  $[x, y]$ . Tuto přímku znázorňujeme krátkou šipkou vedenou z bodu  $[x, y]$  doprava ve směru přímky a nazýváme ji **lineárním elementem**. Množinu všech lineárních elementů rovnice (2.4) nazýváme **směrovým polem** rovnice (2.4). Dále **integrální křivkou** rovnice (2.4) budeme rozumět graf nějakého jejího řešení  $y(x)$ . Ten bude mít tu vlastnost, že jeho tečna v každém jeho bodě  $[x, y(x)]$  obsahuje odpovídající lineární element, takže směrové pole dává velmi dobrou představu o integrálních křivkách. Konstrukci směrového pole často usnadní nalezení křivek, v jejichž bodech mají lineární elementy stejný směr. Takovéto křivky nazýváme **izokliny**.



Obr. 2.1: Směrové pole, izokliny a řešení rovnice  $y' = -x/y$ .

Položíme-li v rovnici (2.4)  $f(x, y) = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , dostáváme množinu všech izoklin rovnice (2.4) zadanou implicitně. Ve většině jednoduchých příkladů lze z předpisu  $f(x, y) = k$  neznámou  $y$  či  $x$  vyjádřit a izokliny tak určit explicitně. Na Obrázku 2.1 je znázorněno směrové pole (modře), izokliny (hnědě) a integrální křivky (červeně) rovnice  $y' = -x/y$ . Snadno lze nahlédnout, že v tomto případě mají izokliny rovnici  $x = -ky$ , kde  $y \neq 0$ . Integrální křivky (řešení rovnice) jsou pak půlkružnice  $y = \sqrt{c^2 - x^2}$  a  $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$ .

## 2.2.2 Rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými

**Definice 2.14.** Diferenciální rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými nazýváme rovnicí tvaru

$$y' = f(x)g(y) \quad (2.7)$$

nebo rovnici, která se dá elementárními úpravami na tento tvar upravit.

### Postup při řešení rovnice se separovanými proměnnými.

Pokud je rovnice tvaru (2.7) nebo ji lze na tento tvar převést, postupujeme při řešení následovně:

- 1) Výraz  $y'$  nahradíme výrazem  $\frac{dy}{dx}$ .
- 2) Celou rovnici vynásobíme  $dx$ .
- 3) Odseparujeme proměnné, tj. členy, které obsahují  $y$ , převedeme na levou stranu rovnice spolu s  $dy$  a členy, které obsahují  $x$ , převedeme na pravou stranu rovnice spolu s  $dx$ .
- 4) Nakonec integrujeme obě strany poslední rovnice zvlášť.

**Příklad 2.15.** Řešte diferenciální rovnici se separovanými proměnnými  $y' = \frac{3x^2 - 2}{y^4}$ .

**Řešení.** Postupujeme podle návodu: 1)  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2}{y^4}$ .

$$2) dy = \frac{3x^2 - 2}{y^4} dx.$$

$$3) y^4 dy = (3x^2 - 2) dx.$$

$$4) \int y^4 dy = \int (3x^2 - 2) dx.$$

Integrací poslední rovnice dostaneme  $\frac{y^5}{5} + C = x^3 - 2x + K$ , kde  $C$  a  $K$  jsou integrační konstanty. Převedením konstanty  $C$  na pravou stranu rovnice dostaneme řešení ve tvaru  $\frac{y^5}{5} = x^3 - 2x + K - C$ . Označíme-li konstantu  $K - C = c$ , dostaneme obecné řešení

$$\frac{y^5}{5} = x^3 - 2x + c.$$

Poslední úpravu s konstantami můžeme udělat pokaždé, a proto stačí psát integrační konstantu pouze jednou (obyčejně ji píšeme na pravou stranu rovnice).  $\square$

Řešení, která se dostanou při řešení rovnice se separovanými proměnnými, jsou obvykle v implicitním tvaru, tj.  $F(x, y) = 0$ . Úpravou se někdy podaří získat explicitní tvar řešení, tj.  $y = \varphi(x)$ .

**Příklad 2.16.** Řešte diferenciální rovnici se separovanými proměnnými  $y' \cotg x + y = 0$ .

**Řešení.** 1)  $\cotg x \frac{dy}{dx} = -y$ .    2)  $\cotg x dy = -y dx$ .    3)  $\frac{1}{y} dy = \frac{-\sin x}{\cos x} dx$ .

$$4) \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \quad \text{a odtud} \quad \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx.$$

Integrováním dostaneme

$$\ln |y| = \ln |\cos x| + C.$$

Získané řešení postupně upravíme na

$$|y| = e^{\ln |\cos x| + C} = e^{\ln |\cos x|} \cdot e^C = e^C |\cos x| \quad \text{a odtud} \quad y = \pm e^C \cos x.$$

Označíme  $c = \pm e^C$ , tj.  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Jelikož jsme při úpravě z kroku 1) na krok 2) dělili celou rovnici výrazem  $y$ , je nutné diskutovat případ, že  $y = 0$ . Jak lze snadno ověřit,  $y = 0$  je řešením zadané rovnice a právě připustíme-li  $c = 0$  v našem obecném řešení, tak toto partikulární řešení dostaneme. Celkové (obecné) řešení zadané rovnice je tedy ve tvaru

$$y = c \cos x, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.$$

□

**Poznámka 2.17.** Někdy při hledání řešení rovnice se separovanými proměnnými děláme úpravu, že dělíme celou rovnici výrazem v proměnné  $y$  (podobně tomu bylo i v minulém příkladě). Vždy je pak nutné tento výraz položit rovno nule a dořešit vzniklou rovnici. Pokud je jejím řešením konstantní funkce  $y = h$ , musíme se přesvědčit, zda tato funkce není řešením zadané diferenciální rovnice. Pokud ano, mohou nastat tyto dva případy:

- (i) Řešení  $y = h$  je partikulární a tudíž se dá zahrnout do obecného řešení vhodnou volbou konstanty  $c \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Řešení  $y = h$  je singulární a tudíž se nedá zahrnout do obecného řešení vhodnou volbou konstanty  $c \in \mathbb{R}$ .

V případě, že diferenciální rovnice se separovanými proměnnými je přímo tvaru (2.7), potom kořeny funkce  $g(y)$  (tj. konstantní funkce, které řeší rovnici  $g(y) = 0$ ) jsou vždy řešením (partikulárním či singulárním) této diferenciální rovnice, jak se lze snadno přesvědčit dosazením.

**Příklad 2.18.** Řešte diferenciální rovnici se separovanými proměnnými  $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Řešení.** Po odseparování a úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Integrací této rovnice dostaneme obecné řešení

$$\arcsin y = \arcsin x + c,$$

kde  $c$  je v tomto případě vhodná (nikoliv libovolná) reálná konstanta. Dále nesmíme zapomenout, že jsme při „odseparovávání“ rovnice provedli úpravu dělení výrazem  $\sqrt{1-y^2}$ , který je nulový pro  $y = \pm 1$ . Jelikož funkce  $y = 1$  a  $y = -1$  jsou řešením zadané rovnice a nedají se zahrnout do obecného řešení, jsou tyto funkce singulárním řešením zadané rovnice.  $\square$

**Příklad 2.19.** Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice se separovanými proměnnými s počáteční podmínkou

$$2(x - e^{-x})yy' = 1 + e^{-x}, \quad y(0) = 2.$$

**Řešení.** 1)  $2(x - e^{-x})y \frac{dy}{dx} = 1 + e^{-x}$ .      2)  $2(x - e^{-x})y dy = (1 + e^{-x}) dx$ .

$$3) 2y dy = \frac{1 + e^{-x}}{x - e^{-x}} dx. \quad 4) \int 2y dy = \int \frac{1 + e^{-x}}{x - e^{-x}} dx.$$

Integrovaním dostaneme obecné řešení ve tvaru  $y^2 = \ln|x - e^{-x}| + c$ . Hledáme partikulární řešení. Dosadíme počáteční podmínku, čímž dostaneme  $2^2 = \ln|0 - 1| + c$ . Odtud  $c = 4$ . Partikulární řešení je tedy  $y^2 = \ln|x - e^{-x}| + 4$ . Po úpravě (s přihlédnutím k podmínce  $y(0) = 2$ ) dostaneme řešení v explicitním tvaru

$$y = \sqrt{\ln|x - e^{-x}| + 4}.$$

$\square$

### 2.2.3 Homogenní separovatelné rovnice prvního řádu

**Definice 2.20.** Homogenní separovatelnou diferenciální rovnicí prvního řádu nazýváme rovnici, která se dá upravit na tvar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.8)$$

Obecně separovatelnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozumíme rovnici, která se dá (pomocí konečného počtu substitucí) převést na rovnici se separovanými proměnnými (2.7). To znamená, že rovnice (2.7) i rovnice (2.8) (jak uvidíme za chvíli) jsou speciálními případy separovatelných rovnic.

**Postup při řešení homogenní separovatelné rovnice.**

Nejprve zavedeme substituci

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Odtud máme

$$y(x) = xu(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = u(x) + xu'(x).$$

Po dosazení do rovnice (2.8) dostaneme (píšeme bez argumentu  $x$ )

$$u + xu' = f(u),$$

což je ekvivalentní s rovnicí se separovanými proměnnými

$$u' = \frac{f(u) - u}{x},$$

kteřou již umíme vyřešit. Po vyřešení se vrátíme zpět k původní neznámé  $y(x)$ .

**Příklad 2.21.** Řešte homogenní separovatelnou diferenciální rovnici  $y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ .

**Řešení.** Provedeme výše uvedenou substituci a dostaneme rovnici

$$u + xu' = u(1 + \ln u),$$

což je ekvivalentní po úpravě s rovnicí

$$u' = \frac{u \ln u}{x}.$$

Po odseparování rovnice dostaneme

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}.$$

Poznamenejme, že  $u = 0$ , resp.  $y = 0$  nevyhovuje zadané rovnici. Naopak  $u = 1$ , resp.  $y = x$  rovnici vyhovuje. Po integraci (na levé straně rovnice lze volit např. substituci  $t = \ln u$ ) dostaneme

$$\ln |\ln u| = \ln |x| + C,$$

kde dalšími úpravami a zpětnou substitucí za  $u = \frac{y}{x}$  můžeme vyjádřit explicitně řešení  $y$  jako

$$y = xe^{cx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Všimněme si, že řešení  $y = x$  je partikulární a je zahrnuto v obecném volbou  $c = 0$ .  $\square$

**Poznámka 2.22.** Poznamenejme, že podobným způsobem, tj. převodem na rovnice se separovanými proměnnými, se dají řešit i další typy separovatelných rovnic tvaru  $y' = f(x, y)$ , kde v předpisu pro funkci  $f$  jsou její proměnné  $x$  a  $y(x)$  určitým způsobem „svázány“. Jako příklad uveďme rovnici  $y' = f(ax + by + c)$ , která se dá řešit substitucí  $u = ax + by + c$ .

## 2.2.4 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

**Definice 2.23.** Lineární diferenciální rovnici prvního řádu nazýváme rovnicí tvaru

$$y' + f(x)y = g(x). \quad (2.9)$$

Pokud je  $g(x) \not\equiv 0$ , nazýváme tuto rovnici **nehomogenní**. Pokud položíme  $g(x) \equiv 0$ , dostaneme rovnici  $y' + f(x)y = 0$ , kterou nazýváme **homogenní** neboli **přidruženou homogenní rovnicí** k rovnici (2.9).

Nejprve poznamenejme, že homogenní lineární rovnice je zároveň rovnicí se separovanými proměnnými a její řešení umíme nalézt. V tomto odstavci budeme toto obecné homogenní řešení značit  $y_h$ . Nejčastěji používanou metodou pro nalezení nehomogenního řešení rovnice (2.9), je tzv. **metoda variace konstanty**.

### Postup při řešení lineární rovnice metodou variace konstanty.

Nejprve metodou separace proměnných najdeme obecné řešení  $y_h$  odpovídající homogenní rovnice

$$y' + f(x)y = 0.$$

Toto řešení se upraví na tvar  $y_h = cF(x)$ , kde  $c \in \mathbb{R}$  je konstanta. Obecné řešení lineární rovnice (2.9) je pak ve tvaru

$$y = c(x)F(x), \quad (2.10)$$

kde  $c(x)$  je neznámá funkce. Nakonec je ještě nutné předpokládaný tvar řešení (2.10) dosadit do diferenciální rovnice (2.9) a určit  $c(x)$ . Pokud jsme postupovali správně, vyjde nám po dosazení a upravení rovnice typu  $c'(x) = h(x)$  a odtud již snadno integrací funkce  $h(x)$  dopočítáme neznámou funkci  $c(x)$ .

**Příklad 2.24.** Řešte lineární diferenciální rovnici  $y' - 5x^4y = e^{x^5}$ .

**Řešení.** Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici  $y' - 5x^4y = 0$  :

$$y' = 5x^4y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 5x^4y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = 5x^4dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int 5x^4dx.$$

Integrací poslední rovnice dostaneme  $\ln|y| = x^5 + C$ . Potřebujeme vyjádřit  $y$ , a proto musíme dále upravovat:

$$|y| = e^{x^5+C} \Leftrightarrow |y| = e^{x^5}e^C \Leftrightarrow y = ce^{x^5},$$

kde  $c = \pm e^C \cup \{0\}$ , tedy  $c \in \mathbb{R}$ . Nulu můžeme do konstanty  $c$  zahrnout, neboť  $y = 0$  je řešením homogenní rovnice. Našli jsme tedy obecné řešení

$$y_h = ce^{x^5}, \quad c \in \mathbb{R},$$

lineární homogenní rovnice  $y' - 5x^4y = 0$ . Obecné řešení lineární nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru

$$y = c(x)e^{x^5}.$$

Abychom mohli určit  $c(x)$ , musíme dosadit  $y$  do zadané diferenciální rovnice, a k tomu musíme nejdřív  $y$  derivovat.

$$y = c(x)e^{x^5} \Rightarrow y' = c'(x)e^{x^5} + c(x)e^{x^5}5x^4.$$

Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme podmínku pro  $c'(x)$  :

$$c'(x)e^{x^5} + c(x)e^{x^5}5x^4 - 5x^4c(x)e^{x^5} = e^{x^5},$$

což je ekvivalentní s  $c'(x) = 1$ . Z toho integrováním dostaneme, že  $c(x) = \int 1 dx = x + c$ . Zbývá už jenom dosadit za  $c(x)$ . Hledané obecné řešení bude

$$y = c(x)e^{x^5} = (x + c)e^{x^5}.$$

□

**Příklad 2.25.** Řešte lineární diferenciální rovnici  $y' + \frac{xy}{1+x^2} = 3x$  s počáteční podmínkou  $y(0) = 4$ .

**Řešení.** a) *Hledání homogenního řešení:*

$$y' = -\frac{xy}{1+x^2} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Odtud integrováním dostaneme  $\ln |y| = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \ln \left[ (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \right] + C$ , tedy

$$y_h = c(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) *Variace konstanty:*

$$y = c(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = c'(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - c(x)x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Po dosazení do zadané diferenciální rovnice a úpravě:

$$c'(x)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 3x \Leftrightarrow c'(x) = 3x\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow c(x) = \int 3x\sqrt{1+x^2} dx.$$

Substituce  $1+x^2 = t^2$  vede na

$$c(x) = \sqrt{(1+x^2)^3} + c.$$

c) *Obecné řešení dané rovnice:*

$$y = 1+x^2 + \frac{c}{\sqrt{1+x^2}}.$$

d) *Partikulární řešení dané rovnice:*

Dosadíme počáteční podmínku:  $4 = y(0) = 1 + c$ . Z toho  $c = 3$  a hledané partikulární řešení bude

$$y = 1+x^2 + \frac{3}{\sqrt{1+x^2}}.$$

□

**Řešení lineární rovnice pomocí vzorce obsahující integrační faktor.**

Jiný způsob, jak lze určit řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu, je přímé použití vzorce využívající tzv. **integrační faktor**, tj. výraz

$$e^{\int f(x) dx}. \quad (2.11)$$

Ten je chápán jako funkce proměnné  $x$  bez aditivní konstanty, resp. tato konstanta je zde nulová.



**Věta 2.26.** *Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou spojité na otevřeném intervalu  $I$ . Pak obecné řešení lineární diferenciální rovnice (2.9) na  $I$  závisající na jedné konstantě  $c$  je tvaru*

$$y(x, c) = e^{-\int f(x)dx} \left[ \int \left( g(x) e^{\int f(x)dx} \right) dx + c \right], \quad (2.12)$$

kde každý integrál chápeme jako funkci proměnné  $x$  bez aditivní konstanty.

**Důkaz.** Vynásobíme-li rovnici (2.9) integračním faktorem (2.11). Dostaneme

$$y' e^{\int f(x)dx} + f(x) e^{\int f(x)dx} y = g(x) e^{\int f(x)dx},$$

což je ekvivalentní s

$$\left( y e^{\int f(x)dx} \right)' = g(x) e^{\int f(x)dx}$$

a odtud

$$y e^{\int f(x)dx} = \int \left( g(x) e^{\int f(x)dx} \right) dx + c.$$

Vyjádříme-li  $y$ , dostaneme

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left[ \int \left( g(x) e^{\int f(x)dx} \right) dx + c \right],$$

což odpovídá vzorci (2.12). □

**Důsledek 2.27.** *Nechť  $\phi(x, t)$  je tzv. **váhová funkce** definovaná vztahem*

$$\phi(x, t) = e^{\int_x^t f(s)ds}.$$

*Dále nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou spojité na otevřeném intervalu  $I$ . Potom má rovnice (2.9) s počáteční podmínkou  $y(x_0) = y_0$ ,  $x_0 \in I$ , na  $I$  partikulární řešení*

$$y(x) = y_0 \phi(x, x_0) + \int_{x_0}^x g(t) \phi(x, t) dt.$$

**Poznámka 2.28.** Na závěr poznamenejme, že lineární diferenciální rovnice (ať už prvního nebo  $n$ -tého řádu, jež budeme studovat v dalším odstavci) neobsahují (na rozdíl od separovatelných rovnic) singulární řešení, tedy každé jejich řešení se dá zahrnout do obecného. Navíc se dá vyjádřit explicitně.

## 2.3 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Velmi důležitým typem obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů jsou *lineární diferenciální rovnice*.

**Definice 2.29.** **Lineární diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu** nazýváme rovnici

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (2.13)$$

kde  $a_0(x), \dots, a_n(x)$  a  $f(x)$  jsou funkce,  $a_n(x) \neq 0$ . Pokud je  $f(x) \neq 0$ , nazýváme tuto rovnici **nehomogenní**. Pokud položíme  $f(x) \equiv 0$ , dostaneme rovnici

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (2.14)$$

kterou nazýváme **homogenní** neboli **přidruženou homogenní rovnici** k rovnici (2.13).

**Příklad 2.30.** Příklady lineárních diferenciálních rovnic různých řádů:

(i)  $y''' + \sqrt{x}y'' - e^x y' + 5x^2 y = \ln x$  (nehomogenní 4. řádu),

(ii)  $5y^{(8)} + \sin x y''' + 2x y'' - 3y = 0$  (homogenní 8. řádu).

**Příklad 2.31.** Příklad zadání lineární diferenciální rovnice a Cauchyho počáteční úlohy: Najděte řešení rovnice  $y''' + 2y'' + y' = -2xe^{-2x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 0$ .

Řešením Cauchyho počáteční úlohy (Definice 2.7), může být v případě lineárních rovnic pouze partikulární řešení zadané diferenciální rovnice. Jiná řešení, např. singulární, tato rovnice neobsahuje, viz Poznámka 2.28. Je ovšem otázkou, zda toto partikulární řešení vůbec existuje, resp. pokud ano, zda je určeno jednoznačně. Tento problém částečně řeší následující věta.

**Věta 2.32.** *Nechť funkce  $a_0(x), \dots, a_n(x)$  a  $f(x)$  jsou spojité na intervalu  $I$ . Pak má počáteční úloha daná rovnicí (2.13) a podmínkami (2.3) pro libovolné  $x_0 \in I$  právě jedno řešení  $y(x)$ . Toto řešení existuje na celém intervalu  $I$ .*

Následující věta, v literatuře často nazývána jako **princip superpozice**, popisuje základní vlastnosti a vztahy mezi řešeními homogenní a nehomogenní rovnice (2.14) a (2.13).

**Věta 2.33 (Princip superpozice).** *Pro řešení rovnic (2.14) a (2.13) platí následující tvrzení.*

(i) *Nechť  $y_1$  a  $y_2$  jsou řešeními homogenní rovnice (2.14) a  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Potom i funkce  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  je řešením (2.14).*

(ii) *Nechť  $y_1$  a  $y_2$  jsou řešeními nehomogenní rovnice (2.13). Potom funkce  $y = y_1 - y_2$  je řešením homogenní rovnice (2.14).*

**Důkaz.** Uvedené vlastnosti jsou přímým důsledkem linearity operace derivace, tj. platnosti vztahu  $(c_1 y_1 + c_2 y_2)' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$  pro libovolné diferencovatelné funkce  $y_1$  a  $y_2$  a konstanty  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Označme levou stranu rovnice (2.13) pomocí operátoru  $L[y]$ . Ten každé  $n$ -krát diferencovatelné funkci  $y$  přiřadí, dosazením  $y$  do levé strany této rovnice, konkrétní funkci. Snadno se můžeme přímým výpočtem přesvědčit, že uvedená linearita operace derivace se přenese i na tento (lineární) operátor  $L$ , tedy bude platit:

$$\begin{aligned} L[y_1] = 0 = L[y_2] &\Rightarrow L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \\ L[y_1] = f(x) = L[y_2] &\Rightarrow L[y_1 - y_2] = L[y_1] - L[y_2] = f(x) - f(x) = 0, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

Než zformulujeme větu pro obecné řešení nehomogenní lineární rovnice (2.13), budeme se chvíli zabývat vlastnostmi a strukturou obecného řešení homogenní lineární rovnice (2.14). Najít obecné řešení homogenní rovnice (2.14), pokud se nejedná o speciální případ rovnice, je téměř neřešitelný problém. Proto se v teorii obyčejných diferenciálních rovnic toto obecné řešení nehledá, ale studují se pouze jeho základní vlastnosti, jako je jeho struktura, ohraničenost, oscilatoričnost apod.

**Věta 2.34.** *Nechť  $f(x) = 0$  a jsou splněny předpoklady Věty 2.32. Potom obecné řešení homogenní rovnice (2.14) je tvaru*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \quad (2.15)$$

kde  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  jsou libovolné konstanty a  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (2.14), která nazýváme **fundamentální systém řešení** rovnice (2.14). Tento systém tvoří bázi vektorového prostoru dimenze  $n$ .

Tato věta přímo plyne z principu superpozice, tvrzení (i), a faktu, že množina všech řešení zkoumané rovnice tvoří vektorový prostor dimenze  $n$ .

**Poznámka 2.35.** Definice lineární nezávislosti funkcí je analogií definice lineární nezávislosti vektorů. To znamená, že funkce  $y_1, y_2, \dots, y_n$  jsou **lineárně nezávislé** na intervalu  $I$ , pokud pro všechna  $x \in I$  platí

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Jak poznat, zda daná  $n$ -tice funkcí je lineárně nezávislá a zároveň generuje obecné řešení rovnice (2.14), uvádí následující věta.

**Věta 2.36.** *Nechť funkce  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  jsou řešeními homogenní diferenciální rovnice (2.14) na intervalu  $I$ . Dále nechť  $\det(W(x))$  je determinant, tzv. **wronskián**, z následující matice*

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

*Potom je-li  $\det(W(x)) = 0$  pro libovolné  $x \in I$ , pak  $\det(W(x)) = 0$  pro všechna  $x \in I$  a funkce  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  jsou lineárně závislé a netvoří (negenerují) obecné řešení rovnice (2.14). V opačném případě, tj. je-li  $\det(W(x)) \neq 0$  pro libovolné  $x \in I$ , pak  $\det(W(x)) \neq 0$  pro všechna  $x \in I$  a funkce  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  jsou lineárně nezávislé a tvoří (generují) obecné řešení rovnice (2.14).*

**Poznámka 2.37.** Podmínka, že  $y_1, y_2, \dots, y_n$  jsou řešeními jedné homogenní diferenciální rovnice, je podstatná. Bez ní zkoumat lineární nezávislost funkcí  $y_1, y_2, \dots, y_n$  nemá smysl, viz následující příklad.

**Příklad 2.38.** Funkce  $y_1(x) = x^3$  a  $y_2(x) = |x^3|$  jsou na  $\mathbb{R}$  lineárně nezávislé, přesto je

$$\begin{vmatrix} x^3 & |x^3| \\ 3x^2 & 3x|x| \end{vmatrix} = 3x^4|x| - 3x^2|x^3| = 0.$$

Nyní se zabýváme nehomogenní diferenciální rovnicí (2.13). O obecném řešení této rovnice platí následující tvrzení.

**Věta 2.39.** *Nechť  $Y$  je jedno libovolné partikulární řešení nehomogenní lineární rovnice (2.13). Dále nechť  $y_h$  je obecné řešení k ní přidružené homogenní rovnice (2.14). Potom obecné řešení  $y$  rovnice (2.13) má tvar*

$$y = y_h + Y. \quad (2.16)$$

**Důkaz.** Tato věta je přímým důsledkem principu superpozice a Věty 2.34. Totiž, pokud je  $y$  libovolné řešení rovnice (2.13) a  $Y$  nějaké konkrétní řešení rovnice (2.13), pak jejich rozdíl je vždy (podle (ii) Věty 2.33) nějaké homogenní řešení rovnice (2.14). Vezmeme-li za toto řešení množinu všech řešení, tj. řešení  $y_h$ , pak každé řešení  $y$  rovnice (2.13) se dá vyjádřit ve tvaru (2.16).  $\square$

K určení obecného řešení nehomogenní rovnice (pokud známe obecné řešení homogenní rovnice) zbývá tedy nalézt alespoň jedno její partikulární řešení  $Y$ . Univerzální možností, kterou lze aplikovat na libovolnou lineární rovnici (2.13), je tzv. **metoda variace konstant**, která zobecňuje postup uvedený v Odstavci 2.2.4 pro rovnici prvního řádu. Uvedme si tuto metodu formou věty, přičemž konkrétní použití ukážeme poté na příkladech.

**Věta 2.40 (Variace konstant).** *Nechť (2.13) je nehomogenní rovnice pro niž platí, že obecné řešení příslušné homogenní rovnice (2.14) je tvaru  $y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ . Pak partikulární řešení  $Y$  rovnice (2.13) je tvaru  $Y = c_1(x)y_1 + \dots + c_n(x)y_n$ , kde  $c_1(x), \dots, c_n(x)$  jsou libovolné primitivní funkce k funkcím  $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$ , které vyhovují soustavě rovnic*

$$\begin{aligned} c'_1(x)y_1 + \dots + c'_n(x)y_n &= 0, \\ c'_1(x)y'_1 + \dots + c'_n(x)y'_n &= 0, \\ \vdots & \\ c'_1(x)y_1^{(n-2)} + \dots + c'_n(x)y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c'_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + c'_n(x)y_n^{(n-1)} &= \frac{f(x)}{a_n(x)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

**Poznámka 2.41.** Poznamenejme, že soustava (2.17) se dá zapsat i maticově ve tvaru

$$W(x)c'(x) = b(x),$$

kde  $W(x)$  je matice z Věty 2.36,  $c'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))^T$  a  $b(x) = \left(0, \dots, 0, \frac{f(x)}{a_n(x)}\right)^T$ . Z tohoto zápisu je zřejmé, že při výpočtu funkcí  $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$  ze soustavy (2.17) lze použít Cramerovo pravidlo a hodnoty wronskiánu  $\det(W(x))$ .

**Příklad 2.42.** Najděte obecné řešení rovnice  $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x$ , známe-li obecné řešení příslušné homogenní rovnice  $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$ , které je rovno  $y_h = c_1x + c_2x^2$ .

**Řešení.** Nejprve určíme partikulární řešení  $Y$  zadané rovnice. Podle předchozí věty ho budeme hledat ve tvaru  $Y = c_1(x)x + c_2(x)x^2$ . Po dosazení do (2.17) dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} c'_1(x)x + c'_2(x)x^2 &= 0, \\ c'_1(x) + c'_2(x)2x &= x, \end{aligned}$$

jejíž řešením jsou funkce  $c_1'(x) = -x$  a  $c_2'(x) = 1$ . Integrací dostáváme např. primitivní funkce  $c_1(x) = -\frac{x^2}{2}$  a  $c_2(x) = x$ . Odtud  $Y = -\frac{x^3}{2} + x^3$  a po úpravě  $Y = \frac{x^3}{2}$ . Podle Věty 2.39 je hledané obecné řešení

$$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{x^3}{2}.$$

□

**Poznámka 2.43.** Podobně jako u lineární rovnice prvního řádu (2.9) lze i u rovnice (2.13) hledat její partikulární řešení  $Y$  alternativně pomocí vzorce využívajícího tzv. váhovou funkci  $\Phi(x, t)$ . Pro jednoduchost se omezíme na speciální případ a budeme hledat partikulární řešení  $Y(x)$  rovnice (2.13) splňující počáteční podmínky

$$Y(x_0) = Y'(x_0) = \dots = Y^{(n-1)}(x_0) = 0. \quad (2.18)$$

V tomto případě je vhodné definovat váhovou funkci  $y(x) = \Phi(x, t)$  jako řešení homogenní rovnice (2.14) splňující počáteční podmínky

$$y(t) = y'(t) = \dots = y^{(n-2)}(t) = 0, \quad y^{(n-1)}(t) = \frac{1}{a_n(t)}.$$

Potom lze ukázat, že partikulární řešení  $Y(x)$  počáteční úlohy (2.13), (2.18) je následujícího tvaru

$$Y(x) = \int_{x_0}^x f(t) \Phi(x, t) dt. \quad (2.19)$$

Na druhou stranu, najít obecné řešení homogenní rovnice (2.14) s libovolnými koeficienty  $a_0(x), \dots, a_n(x)$  je stále problematické. Proto se v následujícím odstavci omezíme na rovnici (2.14), kde tyto koeficienty budou konstantní.

### 2.3.1 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

**Definice 2.44.** Lineární diferenciální rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (2.20)$$

kde  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$ , nazýváme **homogenní lineární diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty**.

Nalezení obecného řešení rovnice (2.20) je na první pohled relativně jednoduché. Nejdříve zavedeme následující pojem.

**Definice 2.45.** Nechť je dána rovnice (2.20). Algebraickou rovnici

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2.21)$$

nazýváme **charakteristickou rovnicí diferenciální rovnice (2.20)**.

**Příklad 2.46.** Příklady charakteristických rovnic diferenciálních rovnic:

Diferenciální rovnice	Charakteristická rovnice
$y^{(5)} + 3y''' - 6y' + 7y = 0$	$\lambda^5 + 3\lambda^3 - 6\lambda + 7 = 0$
$y'' + 5y' = 0$	$\lambda^2 + 5\lambda = 0$
$y''' - 10y'' + 12y = 0$	$\lambda^3 - 10\lambda^2 + 12 = 0$

**Věta 2.47.** Mějme homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty tvaru (2.20) a její charakteristickou rovnicí (2.21). Pak platí:

1. Je-li  $\lambda \in \mathbb{R}$   $k$ -násobný kořen charakteristické rovnice,  $k \geq 1$ , pak funkce

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}, \dots, y_k(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$$

jsou řešením a součástí fundamentálního systému rovnice (2.20).

2. Je-li  $\lambda_{1,2} = a \pm bj$  dvojice komplexně sdružených  $k$ -násobných komplexních kořenů charakteristické rovnice,  $k \geq 1$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ , pak funkce

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx, y_3 = xe^{ax} \cos bx, \dots, y_{2k-1} = x^{k-1}e^{ax} \cos bx, \\ y_2(x) &= e^{ax} \sin bx, y_4 = xe^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k} = x^{k-1}e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

jsou řešením a součástí fundamentálního systému rovnice (2.20).

Naznačíme, jak by se uvedená věta dokazovala. Nechť  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  je jednoduchý kořen charakteristické rovnice (2.21). Ověříme dosazením, že  $y_k = e^{\lambda_k x}$  je řešením rovnice (2.20). Po dosazení a vylíčení  $e^{\lambda_k x}$  obdržíme rovnici

$$e^{\lambda_k x} (a_n \lambda_k^n + a_{n-1} \lambda_k^{n-1} + \dots + a_1 \lambda_k + a_0) = 0.$$

Jelikož  $\lambda_k$  je řešením charakteristické rovnice (2.21), vyjde výše uvedená kulatá závorka nulová a zkoumaná identita je splněna, což odpovídá tomu, že  $y_k = e^{\lambda_k x}$  je řešením rovnice (2.20). Podobně by se dokazovaly i ostatní případy.

**Poznámka 2.48.** Jelikož charakteristická rovnice (2.21) je  $n$ -tého řádu, existuje právě  $n$  (ne nutně různých) komplexních kořenů. Tomu odpovídá  $n$  funkcí fundamentálního systému a množina všech řešení rovnice (2.20) tvoří vektorový prostor dimenze  $n$ , což je ve shodě s Větou 2.34. Bází tohoto prostoru jsou například všechna řešení získaná podle návodu Věty 2.47.

**Příklad 2.49.** Pomocí Věty 2.47 najděte obecné řešení rovnice  $y^{(7)} + 8y^{(5)} + 16y''' = 0$ .

**Řešení.** Charakteristická rovnice diferenciální rovnice je  $\lambda^7 + 8\lambda^5 + 16\lambda^3 = 0$ . Je zřejmé, že jejím trojnásobným kořenem je  $\lambda_{1,2,3} = 0$ . Zbývající kořeny určíme z rovnice  $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$ . Jedná se o rovnici 4. stupně. Snadno lze nahlédnout, že se jedná o kvadratický dvojčlen  $\lambda^2 + 4$  umocněný na druhou. Pokud dořešíme tuto kvadratickou rovnici (v komplexním oboru), dostaneme celkem zbývající kořeny  $\lambda_{4,5,6,7} = \pm 2j$ . Proto

podle Věty 2.47 získáváme následující řešení, která tvoří fundamentální systém zadané diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{0x}, & y_2(x) &= xe^{0x}, & y_3(x) &= x^2e^{0x}, \\ y_4(x) &= e^{0x} \cos 2x, & y_5(x) &= xe^{0x} \cos 2x, & y_6(x) &= e^{0x} \sin 2x, & y_7(x) &= xe^{0x} \sin 2x. \end{aligned}$$

Obecné řešení je pak tvaru

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4 \cos 2x + c_5x \cos 2x + c_6 \sin 2x + c_7x \sin 2x.$$

□

Při hledání řešení charakteristické rovnice (podobné té, co je uvedena v Příkladu 2.49) je možné použít metody postupného rozkládání polynomu. V žádném případě se však nejedná o postup jednoduchý. Právě v tom tkví problém při hledání obecného řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Zatímco řešení diferenciální rovnice druhého řádu je jednoduché – řešíme kvadratickou rovnici, je řešení rovnic vyšších řádů komplikovanější<sup>1</sup>.

### 2.3.2 Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty

**Definice 2.50.** Lineární diferenciální rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (2.22)$$

kde  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$ , a  $f(x) \neq 0$  je funkce nazýváme **nehomogenní lineární diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty**.

K nalezení obecného řešení rovnice (2.22) je možné použít Větu 2.39. Je však otázka, jakým způsobem najít nějaké partikulární řešení  $Y$  zadané nehomogenní lineární diferenciální rovnice. Univerzální metoda variace konstant přirozeně funguje i pro rovnici s konstantními koeficienty (2.22). Lze samozřejmě použít i vzorec (2.19) z Poznámky 2.43, který se v případě lineárních rovnic s konstantními koeficienty dokonce zjednoduší, jelikož váhová funkce  $\Phi(x, t)$  bude tvaru  $\Phi(x, t) = \Phi(x - t)$ .

**Příklad 2.51.** Řešte nehomogenní diferenciální rovnici

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

a) variací konstant,    b) pomocí váhové funkce.

**Řešení.** a) Nejprve určíme homogenní řešení  $y_h$ . Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice je  $\lambda^2 + 1 = 0$ . Odtud  $\lambda_{1,2} = \pm j$  a fundamentální systém této rovnice má tvar  $y_1 = \cos x$  a  $y_2 = \sin x$ . To jest  $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ . Nyní určíme partikulární

<sup>1</sup>Obecně neexistuje explicitní vzorec pro určení kořenů polynomů stupně  $n \geq 5$  a tyto kořeny a tudíž i řešení lze často vyjádřit pouze přibližně s použitím numerických metod.

řešení  $Y$  zadané rovnice. Podle Věty 2.40 ho budeme hledat ve tvaru  $Y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$ . Po dosazení do vzorce (2.17) dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x &= 0, \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x &= \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy (vhodné je například použít Cramerovo pravidlo) určíme, že  $c_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$  a  $c_2'(x) = 1$ . Integrováním dostáváme například primitivní funkce  $c_1(x) = \ln |\cos x|$  a  $c_2(x) = x$ , tedy  $Y = \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$ . Podle Věty 2.39 je pak hledané obecné řešení

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

b) Nejprve určíme váhovou funkci  $\Phi(x, t)$ . Tou bude podle Poznámky 2.43 homogenní řešení  $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$  splňující počáteční podmínky  $y_h(t) = 0$ ,  $y_h'(t) = 1$ . Určíme konstanty  $c_1, c_2$  tak, aby tyto počáteční podmínky byly splněny. To jest

$$\begin{aligned} c_1 \cos t + c_2 \sin t &= 0, \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t &= 1. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy (opět například Cramerovým pravidlem) určíme, že  $c_1 = -\sin t$  a  $c_2 = \cos t$ . Dostáváme váhovou funkci

$$\Phi(x, t) = \Phi(x - t) = -\sin t \cos x + \cos t \sin x = \sin(x - t).$$

Volbou například  $x_0 = 0$  a dosazením do vzorce (2.19) získáme partikulární řešení (splňující  $Y(0) = Y'(0) = 0$ )

$$\begin{aligned} Y(x) &= \int_0^x \frac{-\sin t \cos x + \cos t \sin x}{\cos t} dt = [\ln |\cos t| \cos x + t \sin x]_0^x \\ &= \cos x \ln |\cos x| + x \sin x. \end{aligned}$$

Hledané obecné řešení je potom opět

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x.$$

□

Metoda variace konstant nebo výpočet partikulárního řešení pomocí váhové funkce nejsou jediné způsoby, jak nalézt obecné řešení nehomogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty.

V praxi se často používá tzv. **metoda neurčitých koeficientů**. Tato metoda je sice „uživatelsky přívětivější“, avšak je použitelná pouze pro rovnice (2.22) se speciální pravou stranou. Při řešení využíváme opět Větu 2.39 a obecné řešení hledáme ve tvaru

$$y = y_h + Y.$$



Rozdíl je však ve způsobu hledání partikulárního řešení  $Y$ . Nyní popíšeme, jak lze toto řešení metodou neurčitých koeficientů najít. U této metody se předpokládá, že pravá strana rovnice (2.22), tj. funkce  $f(x)$ , je ve **speciálním tvaru** - viz následující tabulka. Tvar partikulárního řešení  $Y$  pak určíme z tvaru funkce  $f(x)$  podle tabulky. Tento tvar obsahující neurčité (reálné) koeficienty dosadíme do dané rovnice (2.22). Porovnáním obou stran rovnice (podobně jako např. při hledání koeficientů u rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky) tyto koeficienty dopočítáme.

Pravá strana $f(x)$	Tvar partikulárního řešení $Y$
$f(x) = e^{ax} P_n(x)$ , kde $P_n(x)$ je polynom $n$ -tého stupně, $a \in \mathbb{R}$	$Y = e^{ax} x^k Q_n(x)$ , $a$ je $k$ -násobný kořen char. rovnice, $Q_n(x)$ je obecný polynom $n$ -tého stupně
$f(x) = e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx)$ , kde $M, N, a, b$ jsou reálná čísla	$Y = e^{ax} x^k (A \cos bx + B \sin bx)$ , $a + bj$ je $k$ -násobný kořen char. rovnice, $A, B$ jsou reálná čísla

**Upozornění.** V případě, že  $a$  (resp.  $a + bj$ ) není kořen charakteristické rovnice,  $k = 0$ .

**Poznámka 2.52 (Obecnější případ pravé strany).** Metodou neurčitých koeficientů lze řešit i obecnější případ (zahrnující předchozí dva případy), kdy pravá strana rovnice (2.22), tj. funkce  $f$  je ve tvaru

$$f(x) = e^{ax} (P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx),$$

kde  $a, b$  jsou reálná čísla a  $P_n$  a  $Q_m$  jsou polynomy stupně  $n$  a  $m$ . Potom partikulární řešení  $Y$  rovnice (2.22) hledáme ve tvaru

$$Y = e^{ax} x^k (R_{\max\{m,n\}}(x) \cos bx + S_{\max\{m,n\}}(x) \sin bx),$$

kde číslo  $a + bj$  je  $k$ -násobný kořen charakteristické rovnice a  $R_{\max\{m,n\}}$  a  $S_{\max\{m,n\}}$  jsou obecné polynomy stupně  $\max\{m, n\}$ .

Pokusme se nyní naznačit, proč tato metoda funguje. Důvodem je, že předpokládané partikulární řešení  $Y$  se derivováním v jistém slova smyslu „nemění“. To jest, po zderivování a dosazení do rovnice (2.22), vychází opět funkce složená z polynomů, exponenciály sinů či kosinů. Tato funkce se pak dá dobře porovnat s pravou stranou rovnice (2.22), které se podobá až na koeficienty před jednotlivými elementárními funkcemi.

**Příklad 2.53.** Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou:

a)  $y'' - 9y = 15e^{2x}$

b)  $y'' + 9y = 9x^2 - 27x + 11$

c)  $y'' - 4y' + 3y = 4xe^{3x}$

d)  $y'' - y' = 10 \cos 2x$

**Řešení.** a) Vyřešíme homogenní rovnici  $y'' - 9y = 0$ . Máme  $\lambda^2 - 9 = 0$ . Kořeny charakteristické rovnice jsou  $\lambda_{1,2} = \pm 3$  a  $y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ . Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 15e^{2x} = e^{2x} P_0(x).$$

Zde  $a = 2$  není kořen charakteristické rovnice ( $2 \neq \pm 3$ ), a proto  $k = 0$ . Obecný polynom nultého stupně je konstanta, odtud  $P_0(x) = A$ . Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{2x} x^0 A = Ae^{2x}$$

a musí splňovat zadanou rovnici  $Y'' - 9Y = 15e^{2x}$ . Nyní musíme  $Y$  dvakrát derivovat a dosadit do této rovnice:

$$Y' = 2Ae^{2x}, \quad Y'' = 4Ae^{2x}.$$

Po dosazení dostáváme

$$4Ae^{2x} - 9Ae^{2x} = 15e^{2x}.$$

Rovnici nejdříve vydělíme  $e^{2x}$  a dostaneme  $4A - 9A = 15$  a odtud  $A = -3$ . Máme jedno partikulární řešení  $Y = -3e^{2x}$  a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = y_h + Y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - 3e^{2x}.$$

b) Vyřešíme homogenní rovnici  $y'' + 9y = 0$ . Charakteristická rovnice je  $\lambda^2 + 9 = 0$  a její kořeny jsou  $\lambda_{1,2} = \pm 3j$  a  $y_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$ . Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 9x^2 - 27x + 11 = e^{0x}(9x^2 - 27x + 11) = e^{0x} P_2(x).$$

Zde  $a = 0$  není kořen charakteristické rovnice ( $0 \neq \pm 3j$ ), a proto  $k = 0$ . Obecný polynom druhého stupně je  $P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ . Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x} x^0 (Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C$$

a musí splňovat rovnici  $Y'' + 9Y = 9x^2 - 27x + 11$ . Nyní musíme  $Y$  dvakrát derivovat:

$$Y' = 2Ax + B, \quad Y'' = 2A.$$

Po dosazení do zadání dostáváme

$$2A + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 9x^2 - 27x + 11.$$

Na obou stranách rovnice jsou polynomy druhého stupně. Aby platila rovnost musí se rovnat koeficienty u jednotlivých mocnin (odtud název metoda neurčitých koeficientů):

$$\begin{aligned} x^2 : \quad & 9A = 9, \\ x^1 : \quad & 9B = -27, \\ x^0 : \quad & 2A + 9C = 11. \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu rovnic. Po vyřešení máme  $A = 1$ ,  $B = -3$ ,  $C = 1$ . Získali jsme jedno partikulární řešení  $Y = x^2 - 3x + 1$ . Potom obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + x^2 - 3x + 1.$$

c) Vyřešíme homogenní rovnici  $y'' - 4y' + 3y = 0$ . Její charakteristická rovnice je  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$  a její kořeny jsou  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$  a  $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ . Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 4xe^{3x} = e^{3x} P_1(x).$$

Zde  $a = 3$  je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, a proto  $k = 1$ . Obecný polynom prvního stupně je  $P_1(x) = Ax + B$  a partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{3x} x^1 (Ax + B) = e^{3x} (Ax^2 + Bx)$$

a musí splňovat rovnici  $Y'' - 4Y' + 3Y = 4xe^{3x}$ . Nyní musíme  $Y$  dvakrát derivovat:

$$\begin{aligned} Y &= e^{3x} (Ax^2 + Bx), \\ Y' &= 3e^{3x} (Ax^2 + Bx) + e^{3x} (2Ax + B) = e^{3x} (3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B), \\ Y'' &= 3e^{3x} (3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B) + e^{3x} (6Ax + 3B + 2A) = \\ &= e^{3x} (9Ax^2 + 9Bx + 6Ax + 3B + 6Ax + 3B + 2A) = \\ &= e^{3x} (9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A). \end{aligned}$$

Po dosazení do zadání dostáváme

$$e^{3x} (9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A) - 4e^{3x} (3Ax^2 + 3Bx + 2Ax + B) + 3e^{3x} (Ax^2 + Bx) = 4xe^{3x}.$$

Rovnici nejdřív vydělíme výrazem  $e^{3x}$  a dostaneme

$$9Ax^2 + 9Bx + 12Ax + 6B + 2A - 12Ax^2 - 12Bx - 8Ax - 4B + 3Ax^2 + 3Bx = 4x.$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin.

$$\begin{aligned} x^2 : \quad & 9A - 12A + 3A = 0, \\ x^1 : \quad & 9B + 12A - 12B - 8A + 3B = 4, \\ x^0 : \quad & 6B + 2A - 4B = 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu  $4A = 4$ ,  $2A + 2B = 0$ . Odtud  $A = 1$ ,  $B = -1$ . Partikulární řešení je

$$Y = e^{3x} (x^2 - x).$$

Potom obecné řešení bude

$$y = y_h + Y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + e^{3x} (x^2 - x).$$

d) Vyřešíme homogenní rovnici  $y'' - y' = 0$ . Její charakteristická rovnice je tvaru  $\lambda^2 - \lambda = 0$  a její kořeny jsou  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  a  $y_h = c_1 + c_2 e^x$ . Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 10 \cos 2x = e^{0x} (10 \cos 2x + 0 \sin 2x).$$

Zde  $a + bj = 0 + 2j$  není kořen charakteristické rovnice, a proto  $k = 0$ . Partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x} x^0 (A \cos 2x + B \sin 2x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

a musí splňovat rovnici  $Y'' - Y' = 10 \cos 2x$ . Nyní musíme  $Y$  dvakrát derivovat:

$$Y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad Y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Dosadíme do zadání a dostáváme

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 2A \sin 2x - 2B \cos 2x = 10 \cos 2x.$$

Aby toto platilo, musí se koeficienty při  $\cos 2x$  a  $\sin 2x$  rovnat na obou stranách rovnice, to jest:

$$\begin{aligned} \cos 2x : \quad & -4A - 2B = 10, \\ \sin 2x : \quad & -4B + 2A = 0. \end{aligned}$$

Odtud  $A = -2$ ,  $B = -1$ . Partikulární řešení je

$$Y = -2 \cos 2x - \sin 2x.$$

Obečné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = c_1 + c_2 e^x - 2 \cos 2x - \sin 2x.$$

□

Na závěr uvedeme větu, podle které můžeme metodu neurčitých koeficientů použít i na další speciální pravé strany rovnice (2.22).

**Věta 2.54 (Princip superpozice pro pravou stranu).** *Jestliže funkce  $f$  na pravé straně rovnice (2.22) je součtem speciálních pravých stran*

$$f(x) = f_1(x) + \cdots + f_m(x),$$

*potom i partikulární řešení nehomogenní rovnice bude součtem partikulárních řešení pro jednotlivé speciální pravé strany, tj.*

$$Y = Y_1 + \cdots + Y_m.$$

**Důkaz.** Uvedená věta je opět přímým důsledkem linearity operace derivace, podobně jako tomu bylo u Věty 2.33. Použijeme-li stejného operátoru  $L[y]$  jako v důkazu této věty, můžeme (pro  $m = 2$ ) psát:

$$L[Y_1] = f_1, \quad L[Y_2] = f_2 \quad \Rightarrow \quad L[Y_1 + Y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1 + f_2.$$

Analogicky by se dal dokázat případ  $m > 2$ .

□

**Příklad 2.55.** Principem superpozice vyřešte diferenciální rovnici  $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$ .

**Řešení.** Kořeny charakteristické rovnice  $\lambda^2 + 1 = 0$  jsou  $\lambda_{1,2} = \pm j$  a odtud plyne, že

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Partikulární řešení  $Y$  dostaneme jako součet partikulárních řešení  $Y_1$  a  $Y_2$  dvou rovnic se speciálními pravými stranami

$$y'' + y = \sin x \quad \text{a} \quad y'' + y = -2e^{-x}.$$

1) U první rovnice je pravá strana tvaru

$$f_1(x) = \sin x = e^{0x}(0 \cos 1x + 1 \sin 1x).$$

Zde  $a + bj = 0 + 1j = j$  je jednoduchý kořen charakteristické rovnice, a proto  $k = 1$ . Potom partikulární řešení  $Y_1$  bude mít tvar

$$Y_1 = e^{0x}x^1(A \cos x + B \sin x) = Ax \cos x + Bx \sin x$$

a bude splňovat rovnici  $Y_1'' + Y_1 = \sin x$ . Nyní budeme  $Y_1$  dvakrát derivovat:

$$Y_1 = Ax \cos x + Bx \sin x,$$

$$Y_1' = A \cos x - Ax \sin x + B \sin x + Bx \cos x,$$

$$Y_1'' = -A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x.$$

Po dosazení do odpovídající rovnice dostáváme

$$-A \sin x - A \sin x - Ax \cos x + B \cos x + B \cos x - Bx \sin x + Ax \cos x + Bx \sin = \sin x.$$

Porovnáme koeficienty při  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $x \cos x$  a  $x \sin x$  na obou stranách rovnice, to jest:

$$\begin{aligned} \cos x : \quad & B + B = 0, \\ \sin x : \quad & -A - A = 1, \\ x \cos x : \quad & -A + A = 0, \\ x \sin x : \quad & -B + B = 0. \end{aligned}$$

Odtud  $A = -\frac{1}{2}$  a  $B = 0$ . Dostali jsme

$$Y_1 = -\frac{1}{2}x \cos x.$$

2) U druhé rovnice je pravá strana tvaru

$$f_2(x) = -2e^{-x} = e^{-1x}2 = e^{-1x}P_0(x).$$

Zde  $a = -1$  není kořen charakteristické rovnice, a proto  $k = 0$ . Potom partikulární řešení  $Y_2$  bude mít tvar

$$Y_2 = e^{-1x}x^0A = Ae^{-x}$$

a bude splňovat rovnici  $Y_2'' + Y_2 = -2e^{-x}$ . Nyní budeme  $Y_2$  dvakrát derivovat:

$$Y_2' = -Ae^{-x}, \quad Y_2'' = Ae^{-x}.$$

Po dosazení do odpovídající rovnice dostáváme

$$Ae^{-x} + Ae^{-x} = -2e^{-x}.$$

Rovnici nejdřív vydělíme  $e^x$  a dostaneme  $A + A = -2$  a odtud  $A = -1$ . Dostali jsme

$$Y_2 = -e^{-x}.$$

Celkem

$$Y = Y_1 + Y_2 = -\frac{1}{2}x \cos x - e^{-x}.$$

Hledané obecné řešení je

$$y = y_h + Y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x - e^{-x}.$$

□

## 2.4 Příklady na procvičení

### Cvičení

1. Najděte řešení diferenciálních rovnic prvního řádu se separovanými proměnnými:

- $xyy' = 1 - x^2$ ,
- $y' = y \operatorname{tg} x$ ,
- $y' + \frac{y-1}{x^2y^2} = 0$ ,
- $y' = (y-1)(y-2)$ ,
- $y' = e^{x+y}$ ,
- $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ .

2. Najděte řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu:

- $y' + \frac{y}{x} = 6x$ ,
- $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ ,
- $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ,
- $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ ,
- $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ ,
- $y' + y \cos x = \sin x \cos x$ .

3. Najděte řešení  $y(x)$  počáteční úlohy:

- a)  $y' \cos x - y \sin x = 2x$ ,  $y(0) = 0$ ,  
 b)  $y' = 6y - 4e^{6x} \cos 5x + 24$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$ ,  
 c)  $y' - \frac{y}{x+1} = x - 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  
 d)  $y' = \frac{y}{x-5} + 5x - 25$ ,  $y(6) = 14$ .

4. Najděte obecné řešení rovnic druhého řádu metodou neurčitých koeficientů:

- a)  $2y'' - 5y' - 7y = 18e^{2x}$ ,  
 b)  $y'' - 2y' - 3y = 1 - x$ ,  
 c)  $y'' + 3y = 9x^2$ ,  
 d)  $y'' + 6y' + 9y = 36xe^{3x}$ ,  
 e)  $y'' + 2y' + 5y = 17 \sin 2x$ ,  
 f)  $3y'' - 4y' = 25 \sin x$ .

5. Pomocí principu superpozice najděte obecné řešení rovnic druhého řádu metodou neurčitých koeficientů:

- a)  $y'' + y' = 5x + 2e^x$ ,  
 b)  $y'' + 4y = \sin x + \cos 2x$ .

6. Najděte partikulární řešení rovnic metodou neurčitých koeficientů:

- a)  $y'' - 2y' = 2x^2e^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 5$ ,  
 b)  $y'' - 2y = (2x - 1)^2$ ,  $y(0) = -\frac{1}{2}$ ,  $y'(0) = 2$ ,  
 c)  $y'' - 7y' + 10y = 116 \sin 2x$ ,  $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -2$ .

7. Variací konstant řešte nehomogenní diferenciální rovnice:

- a)  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ ,  
 b)  $y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x}$ .

## Výsledky

1. a)  $x^2 + y^2 = \ln cx^2$ ,  $c > 0$ ,  
 b)  $y = \frac{C}{\cos x}$ ,  
 c)  $\frac{1}{2}y^2 + y + \ln|y - 1| + \frac{1}{x} = c$ ,  $y = 1$ ,  
 d)  $\ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = x + c$ ,  $y = 1$ ,  
 e)  $e^x + e^{-y} = c$ ,  
 f)  $\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + c$ .
2. a)  $y = \frac{c}{x} + 2x^2$ ,  
 b)  $y = c \cos x + \sin x$ ,

- c)  $y = e^{-x^2} \left( \frac{x^2}{2} + c \right)$ ,  
 d)  $y = \frac{x}{x+1} (c + x + \ln |x|)$ ,  
 e)  $y = (1 + x^2)(c + x)$ ,  
 f)  $y = ce^{-\sin x} + \sin x - 1$ .
3. a)  $y = \frac{x^2}{\cos x}$ ,  
 b)  $y = \left( \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \sin 5x - 4e^{-6x} \right) e^{6x}$ ,  
 c)  $y = (x + 1)(x - 2 \ln |x + 1|)$ ,  
 d)  $y = (5x - 16)(x - 5) = 5x^2 - 41x + 80$ .
4. a)  $y = c_1 e^{\frac{7}{2}x} + c_2 e^{-x} - 2e^{2x}$ ,  
 b)  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{9}(3x - 5)$ ,  
 c)  $y = c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x + 3x^2 - 2$ ,  
 d)  $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + e^{3x} \left( x - \frac{1}{3} \right)$ ,  
 e)  $y = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x - 4 \cos 2x + \sin 2x$ ,  
 f)  $y = c_1 + c_2 e^{\frac{4}{3}x} + 4 \cos x - 3 \sin x$ .
5. a)  $y = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x + e^x$ ,  
 b)  $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{4}x \sin 2x$ .
6. a)  $y = \frac{1}{2} + \frac{9}{2}e^{2x} + e^x(-2x^2 - 4)$ ,  
 b)  $y = e^{\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x} - 2x^2 + 2x - \frac{5}{2}$ ,  
 c)  $y = -4e^{2x} + 7 \cos 2x + 3 \sin 2x$ .
7. a)  $y = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2}e^x \ln(x^2 + 1) + x e^x \operatorname{arctg} x$ ,  
 b)  $y = c_1 + c_2 e^x + x e^x - (e^x + 1) \ln(e^x + 1)$ .

## Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Určení typu diferenciální rovnice.](#)
2. [Ověření, zda je funkce řešením zadané diferenciální rovnice.](#)
3. [Řešení diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými.](#)
4. [Řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu.](#)
5. [Řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty metodou variace konstant.](#)
6. [Řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty metodou neurčitých koeficientů.](#)
7. [Nalezení obecného řešení diferenciální rovnice.](#)



## 3 Funkce komplexní proměnné

### 3.1 Komplexní čísla

#### 3.1.1 Základní pojmy

Problematika řešení rovnic, např.  $z^2 + 1 = 0$ , která nemá řešení v oboru reálných čísel, vedla k rozšíření číselného oboru na **čísla komplexní**  $z = x + jy$ , kde  $x = \Re z$ ,  $y = \Im z$  jsou reálná čísla a  $j$  nazýváme **imaginární jednotkou**<sup>1</sup>, pro kterou platí  $j^2 = -1$ . Pro komplexní číslo  $z$  nazýváme číslo  $x = \Re z$  **reálnou částí** a  $y = \Im z$  **imaginární částí** komplexního čísla  $z$ . Sčítání a násobení komplexních čísel je ve shodě s obvyklými pravidly, proto je budeme ilustrovat pouze na příkladě:

$$(3 + j) + 4(1 - 2j) = 7 - 7j, \quad (3 + j)(1 - 2j) = 3 + j - 6j - 2j^2 = 3 - 5j + 2 = 5 - 5j.$$

Množinu všech komplexních čísel značíme  $\mathbb{C}$ . Číslo  $\bar{z} = x - jy$  nazýváme **číslem komplexně sdruženým** ke komplexnímu číslu  $z = x + jy$  a s výhodou je užíváme při dělení komplexních čísel, kdy zlomek rozšíříme jedničkou ve tvaru podílu komplexně sdruženého jmenovatele se sebou samým:

$$\frac{20 - 5j}{2 + j} = \frac{20 - 5j}{2 + j} \cdot \frac{2 - j}{2 - j} = \frac{40 - 10j - 20j + 5j^2}{2^2 - j^2} = \frac{35 - 30j}{5} = 7 - 6j.$$

Lze snadno ověřit, že pro všechna komplexní čísla  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  platí rovnosti

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \bar{\bar{z}} = z, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Poznamenejme, že  $z\bar{z}$  je nezáporné reálné číslo a ke každému  $z = x + jy \in \mathbb{C}$  definujeme jeho **absolutní hodnotu** (nebo také **modul**)  $|z|$  vztahem

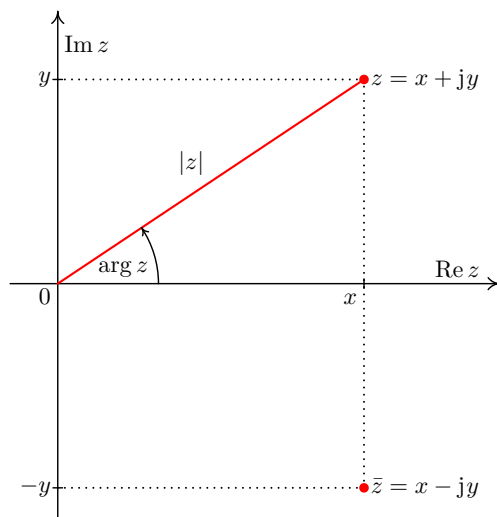
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Interpretujeme-li komplexní čísla jako body v rovině, pak  $|z|$  je vzdálenost bodu  $z = [x, y]$  od počátku a  $\varphi$  úhel, který svírá průvodič bodu  $z = [x, y]$  s kladným směrem reálné osy  $x$ . Odtud plyne, že další možností, jak vyjádřit komplexní číslo  $z = x + jy \neq 0$ , je tzv. **goniometrický tvar**

$$z = x + jy = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|(\cos \arg z + j \sin \arg z),$$

<sup>1</sup>V matematice bývá zvykem označovat komplexní jednotku písmenem  $i$ ; v technické praxi se často používá označování písmenem  $j$ .

kde úhel  $\varphi = \arg z$  nazýváme **argumentem** komplexního čísla  $z$ .



Tento tvar je vhodný pro geometrickou interpretaci násobení nebo dělení dvou komplexních čísel  $z_1, z_2$ , platí totiž:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| |z_2| & \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} & \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2. \end{aligned}$$

Této vlastnosti lze s výhodou použít při výpočtu  $n$ -té mocniny komplexního čísla:

$$(|z|(\cos \varphi + j \sin \varphi))^n = |z|^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi). \quad (3.1)$$

Nevýhodou je nejednoznačnost funkce argument, proto tu hodnotu  $\varphi$  argumentu  $\arg z$ , pro kterou platí  $-\pi < \varphi \leq \pi$  nazveme **hlavní hodnotou argumentu** komplexního čísla  $z$  a zapisujeme ji  $\text{Arg } z$ . Uvedená nejednoznačnost funkce  $\arg z$  se projeví při určení  $n$ -té odmocniny čísla  $z$ . Ze vztahu (3.1) a z rovnosti  $(\sqrt[n]{z})^n = z$  plyne  $n \arg \sqrt[n]{z} = \arg z$ , což má za důsledek existenci  $n$  různých  $\text{Arg}_i \sqrt[n]{z}$ , které výše uvedený vztah splňují.

Dále zavádíme také **exponenciální tvar** komplexního čísla

$$z = x + jy = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|(\cos \arg z + j \sin \arg z) = |z|e^{j \arg z}.$$

Tento zápis „přirozeně“ reflektuje výše uvedenou skutečnost a vlastnosti exponenciální funkce

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{j \arg z_1} |z_2| e^{j \arg z_2} = |z_1| |z_2| e^{j(\arg z_1 + \arg z_2)}.$$

Využití uvedených pojmů ukážeme v následujícím příkladě.

**Příklad 3.1.** Nalezněte řešení kvadratické rovnice

$$(1 + j)z^2 - (3 + j)z + 6 - 2j = 0.$$

Postup řešení kvadratické rovnice je stejný i v oboru komplexních čísel jako pro reálná čísla, proto nejdříve vypočteme diskriminant rovnice:

$$D = (-(3+j))^2 - 4(1+j)(6-j) = 9 + 6j + j^2 - 4(6 + 4j - 2j^2) = -24 - 10j$$

Platí  $|D| = \sqrt{(-24)^2 + (-10)^2} = \sqrt{676} = 26$  a diskriminant můžeme zapsat ve tvaru:

$$D = 26 \left( \frac{-24}{26} + j \frac{-10}{26} \right) \text{ odtud } \cos \arg D = \frac{-24}{26} \wedge \sin \arg D = \frac{-10}{26}.$$

Pro „přesný“ výpočet algebraického tvaru  $\cos((\arg D)/2)$  a  $\sin((\arg D)/2)$  využijeme známých vzorců

$$\left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \quad \text{a} \quad \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}.$$

Ze znamének  $\cos \arg D$ ,  $\sin \arg D$  určíme, že pro hodnotu argumentu  $\arg D$  platí

$$-\pi < \arg D < -\pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad \pi < \arg D + \pi < 3\pi/2$$

a pro hlavní hodnotu úhlu  $\arg D/2$  dostáváme v intervalu  $(-\pi, \pi)$  dvě rovnocenné možnosti

$$\arg \sqrt{D} \in (-\pi/2, 3\pi/4) \quad \text{a} \quad \arg \sqrt{D} \in (\pi/2, 3\pi/4).$$

Druhá odmocnina diskriminantu má tedy dvě hodnoty, pro které ve výše uvedených vzorcích odstraníme absolutní hodnotu (v návaznosti na  $\arg D/2$ ) a určíme  $\cos(\arg \sqrt{D})$  a  $\sin(\arg \sqrt{D})$ :

$$\cos(\arg \sqrt{D}) = \pm \sqrt{\frac{1 - 24/26}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{26}} \quad \sin(\arg \sqrt{D}) = \mp \sqrt{\frac{1 + 24/26}{2}} = \mp \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

Odtud dostáváme  $\sqrt{D} = \sqrt{26} \left( \pm \frac{1}{\sqrt{26}} \mp \frac{5}{\sqrt{26}} j \right) = \pm(1 - 5j)$  a po dosazení do vzorce pro řešení kvadratické rovnice získáme její kořeny:

$$z_{1,2} = \frac{3 + j \pm (1 - 5j)}{2(1 + j)} = \begin{cases} \frac{4-4j}{2(1+j)} = \frac{4(1-j)^2}{2 \cdot 2} = -2j \\ \frac{2+6j}{2(1+j)} = \frac{2(1+3j)(1-j)}{4} = 2 + j \end{cases}.$$

**Poznámka 3.2.** Hlavní hodnotu argumentu  $\arg z$  je možné vyjádřit takto:

$$\arg z = \begin{cases} \pi, & \text{pro } z = x + jy, \text{ kde } x < 0 \text{ a } y = 0, \\ 2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{pro } z = x + jy \neq 0, \text{ jinak.} \end{cases} \quad (3.2)$$

K odvození tohoto vztahu je možné využít analogického postupu jako postupu při výpočtu druhé odmocniny v předchozím příkladě. Jestliže pro libovolné  $z \neq 0$ :

$$z = x + jy = \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + j \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

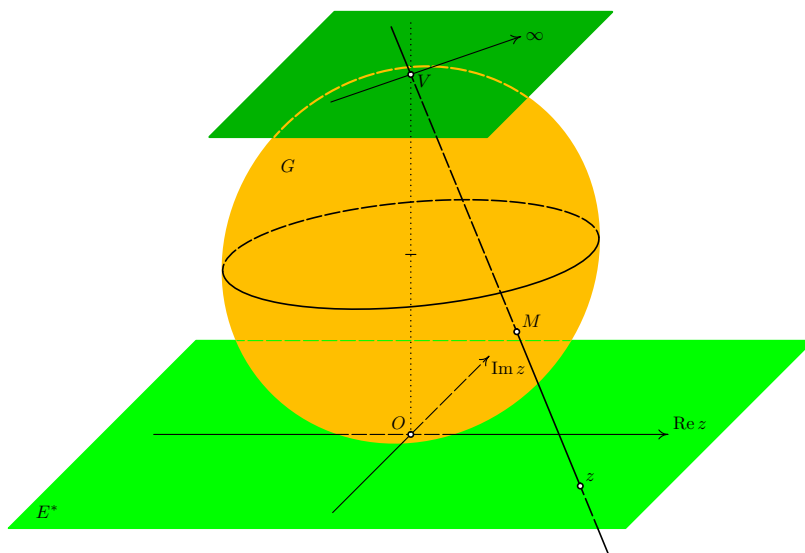
vybereme z druhé odmocniny pouze hodnotu  $\widehat{\sqrt{z}}$  takovou, že  $\text{Arg } \widehat{\sqrt{z}} \in (-\pi/2, \pi/2)$  dostáváme

$$\cos \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}} > 0 \quad \text{sgn}(\sin \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}}) = \text{sgn } y.$$

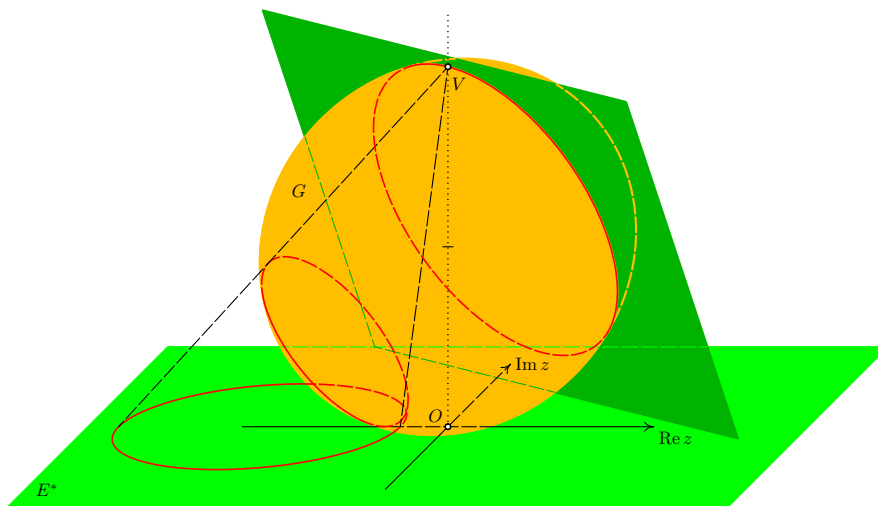
$$\begin{aligned} \text{Arg } z &= 2 \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}} = 2 \arctg(\text{tg } \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}}) = 2 \arctg \frac{\sin \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}}}{\cos \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}}} = \\ &= 2 \arctg \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}} = 2 \arctg \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}} = \\ &= 2 \arctg \sqrt{\frac{(\sqrt{x^2+y^2} - x)(\sqrt{x^2+y^2} + x)}{(\sqrt{x^2+y^2} + x)^2}} = 2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

### 3.1.2 Rozšíření komplexních čísel o nevlastní bod

Množinu komplexních čísel rozšíříme na množinu  $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \infty$ . Zdůvodnění tohoto postupu můžeme opřít o stereografickou projekci, která zobrazuje body komplexní roviny na body kulové plochy jednoznačně pomocí přímek procházejících daným bodem roviny a nejvyšším bodem koule (vrcholem, severním pólem). Při tomto zobrazení zůstane na kulové ploše neobsazený právě tento bod, který ztotožníme s  $\infty$ .



Důležitou vlastností tohoto zobrazení je, že kružnice na kulové ploše neprocházející vrcholem koule se zobrazí na kružnici v rovině. To znamená, že se kruhová okolí na kouli zobrazují na kruhová okolí v rovině. Proto okolí bodu  $\infty$  rozumíme vnějšek kružnice se středem v počátku.



Doplnění množiny  $\mathbb{C}$  „pouze“ jedním  $\infty$  přináší na rozdíl od množiny reálných čísel možnost zavést i některé početní operace s  $\infty$  (např.  $\frac{z}{0} = \infty$  pro  $z \neq 0$ ). Tyto jsou uvedeny v následující definici.

**Definice 3.3.** Pro počítání s nekonečnem definujeme operace takto:

$$\text{Pro } z \in \mathbb{C}, z \neq 0 \quad z \pm \infty = \infty \pm z = \infty \quad (\infty \pm \infty \text{ není definováno});$$

$$\text{Pro } z \in \mathbb{C} \quad z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \quad (0 \cdot \infty \text{ není definováno});$$

$$\text{Pro } z \in \mathbb{C} \quad z/\infty = 0 \quad (\text{tedy } 0/\infty = 0);$$

$$\text{Pro } z \in \mathbb{C}, \infty/z = \infty \quad (\text{tedy } \infty/0 = \infty);$$

$$\text{Pro přirozené číslo } \infty^n = \infty, \infty^{-n} = 0, 0^{-n} = \infty;$$

### 3.1.3 Množiny komplexních čísel

Nyní zavedeme označení a analytické vyjádření důležitých množin v komplexní rovině:

**Otevřeným kruhem**  $U_\varepsilon(z_0)$  rozumíme množinu všech komplexních čísel  $z$ , které mají od bodu  $z_0$  vzdálenost menší než  $\varepsilon$  tedy:  $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ , To jest množina čísel  $z = x + jy$  pro něž platí:

$$|z - z_0| < \varepsilon \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

Hranicí této množiny je kružnice  $K_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$ , kterou můžeme ztotožnit s množinou řešení rovnice  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ . Pro dvojici reálných čísel  $0 \leq \epsilon < \varepsilon$  definujeme množinu  $P_{\epsilon\varepsilon}(z_0) = \{w \in \mathbb{C} \mid \epsilon < |z - z_0| < \varepsilon\}$ , kterou nazýváme **prstencem**. V případě volby  $\epsilon = 0$  budeme prstencem  $P_{0,\varepsilon}(z_0)$  zapisovat pouze symbolem  $P_\varepsilon(z_0)$  a budeme hovořit o prstencovém okolí bodu  $z_0$  a pro  $\epsilon > 0$  hovoříme o mezikružích.

Obecnou rovnici přímky  $ax + by + c = 0$  můžeme zapsat ve tvaru

$$z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 + \varepsilon = 0,$$

kde  $z_0 = \frac{k}{2}(a + jb)$ ,  $\varepsilon = kc$ , kde  $k \neq 0$  je libovolné reálné číslo. Nahradíme-li rovnost nerovností dostáváme nerovnost vymežující polorovinu.

Množiny  $U_\varepsilon(z_0)$  a  $P_\varepsilon(z_0)$  jsou  $\varepsilon$ -ovým **okolím** a **ryzím okolím bodu**  $z_0$ . Budeme-li hovořit obecně o okolí budeme používat i označení  $U(z_0)$  a  $P(z_0)$ . Poznamenejme, že zavedeme-li vzdálenost dvou komplexních čísel jako modul jejich rozdílu můžeme používat dříve zavedené pojmy jako otevřená, uzavřená množina, dále uzávěr množiny, hranice množiny a oddělené množiny. Množina se nazývá **souvislá**, jestliže ji nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin. Otevřenou souvislou množinu nazýváme **oblastí**. Komponentou množiny je každá její maximální souvislá část. Oblast nazveme  **$n$ -násobně souvislou**, jestliže je její komplement tvořen právě  $n$  komponentami. Pro  $n = 1$  nazýváme oblast **jednoduše souvislou**.

## 3.2 Posloupnosti, řady, mocninné řady

Jednou z pasází, kdy je poměrně snadné přenést známé výsledky z reálné analýzy na komplexní čísla  $z \in \mathbb{C}$ , jsou posloupnosti, řady, mocninné řady. Jedná se o definici posloupnosti, o větu o existenci nejvýše jedné limity posloupnosti dále vět o součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou posloupností, kdy je možné ve formulacích pouze nahradit reálné číslo pouze číslem komplexním. Podobně obdržíme i analogické výsledky pro řady komplexních čísel s výjimkou kritérii konvergence řad s kladnými členy (relace srovnání se pro komplexní čísla nezavádí). Výsledky s absolutní konvergencí modifikujeme nahrazením absolutní hodnoty jeho „rozšířením na  $\mathbb{C}$ “ – velikostí komplexního čísla. Situaci budeme ilustrovat v následujícím příkladě.

**Příklad 3.4.** Rozhodněte o absolutní konvergenci řady  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  a určete součty reálné a imaginární části této řady.

**Řešení.** Tato řada je geometrickou řadou s kvocientem  $q = z$  a pro  $|z| < 1$  konverguje absolutně a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Využijeme-li skutečnosti, že reálná resp. imaginární část součtu je součtem reálných resp. imaginárních částí členů řady spolu s goniometrickým tvarem  $z = r(\cos \alpha + j \sin \alpha)$ , odvodíme pro  $|r| < 1$  součty dvou reálných řad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\alpha + j \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Tedy platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\alpha = \Im m \frac{1}{1 - r(\cos \alpha + j \sin \alpha)} \frac{1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha}{1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha} = \frac{r \sin \alpha}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\alpha = \Re e \frac{1}{1 - r(\cos \alpha + j \sin \alpha)}$$

$$= \Re e \frac{(1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha)}{(1 - r \cos \alpha - rj \sin \alpha)(1 - r \cos \alpha + jr \sin \alpha)}$$

$$= \frac{1 - r \cos \alpha}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha}$$

□

### 3.2.1 Mocninné řady

Situace je analogická i pro mocninné řady. Pro mocninnou řadu  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  nastane jedna ze tří následujících možností:

1. řada konverguje pouze ve svém středu  $z_0$ ,
2. řada konverguje pro všechna  $z \in \mathbb{C}$ ,
3. existuje reálné číslo  $0 < r$  (poloměr mocninné řady) takové, že řada konverguje pro všechna  $z$  taková, že  $|z - z_0| < r$  a diverguje pro všechna  $z$  taková, že  $|z - z_0| > r$ .

Výše uvedené číslo  $r$  nazýváme **poloměrem** mocninné řady v prvním případě definujeme  $r = 0$  ve druhém případě klademe  $r = \infty$  a ve třetím případě  $r$  můžeme určit:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (3.3)$$

Poznamenejme, že z existence  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$  plyne také existence  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  a jejich rovnost a navíc existuje-li  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  je tato rovna  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ .

Mocninné řady jsou důležitým pojmem, neboť umožňují definovat některé funkce komplexní proměnné pomocí Taylorovy řady známé z reálného oboru, což zaručuje, že takto definované funkce jsou pro reálná čísla shodné s původní funkcí.

## 3.3 Funkce reálné proměnné

**Definice 3.5.** **Funkcí reálné proměnné** rozumíme každé zobrazení  $z(t) = x(t) + jy(t)$  podmnožiny reálných čísel do  $\mathbb{C}$ . Řekneme, že funkce  $z(t)$  je **spojitá**, je-li dvojice reálných funkcí  $x(t), y(t)$  spojitá. Řekneme, že funkce  $z(t)$  má **derivaci**, jestliže funkce  $x(t), y(t)$  mají derivaci a definujeme  $z'(t) = x'(t) + jy'(t)$ .

Ukážeme si některé interpretace funkce reálné proměnné.

- Impedance sériového RL obvodu je funkcí frekvence  $\omega$  připojeného střídavého napětí  $u(t) = \sin \omega t$  podle vztahu

$$Z(\omega) = R + j\omega L.$$

Podobně pro sériový RC obvod je impedance funkcí frekvence  $\omega$  připojeného střídavého napětí  $u(t) = \sin \omega t$  definovaná vztahem

$$Z(\omega) = R + \frac{1}{j\omega C}.$$

- Další ukázkou využití funkce reálné proměnné je zavedení komplexní charakteristiky harmonických kmitů, které popisují funkce

$$F(t) = F \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{resp.} \quad F(t) = F \sin(\omega t + \varphi).$$

Tyto vztahy je možné popsat jedinou komplexní funkcí reálného argumentu, která se nazývá komplexní tvar harmonického kmitu (komplexním kmitem):

$$F(t) = F(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)) = F e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{F} e^{j\omega t},$$

kde  $\hat{F} = F e^{j\varphi}$  nazýváme komplexní amplitudou, reálné číslo  $F$  je amplitudou kmitů a  $\varphi = \arg \hat{F}$  se nazývá fázový posun. S využitím exponenciálního tvaru komplexního čísla snadno pro nenulový součet dvou komplexních kmitů (se stejnou frekvencí  $\omega$ )

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = \hat{F}_1 e^{j\omega t} + \hat{F}_2 e^{j\omega t} = (\hat{F}_1 + \hat{F}_2) e^{j\omega t},$$

odvodíme, že má komplexní amplitudu ve tvaru součtu komplexních amplitud tj.

$$\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2.$$

- Funkce reálné proměnné bývá často interpretována jako pohyb v Gaussově rovině, neboť proměnnou  $t$  interpretujeme jako čas a dvojici  $[x(t), y(t)]$  jako souřadnice bodu v čase  $t$ . Tato interpretace tvoří základ pro zavedení pojmu křivka.

### 3.3.1 Křivky v $\mathbb{C}$

**Definice 3.6.** **Křivkou** rozumíme každé spojitě zobrazení  $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ . Bod  $\varphi(a)$  nazýváme **počátečním bodem** křivky a bod  $\varphi(b)$  nazýváme **koncovým bodem** křivky  $\varphi$ . Množinu všech bodů křivky  $[\varphi] = \{\varphi(t) | t \in \langle a, b \rangle\}$  nazýváme **grafem** křivky  $\varphi$ .

Důležitým geometrickým pojmem je tečna resp. polotečna.

**Definice 3.7.** Nechť  $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  je křivka. Řekneme, že křivka  $\varphi$  má v bodě  $t \in \langle a, b \rangle$  **polotečnu zprava** právě když existuje konečná limita

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{|\varphi(t+h) - \varphi(t)|} = T^+_{\varphi}(t).$$

Analogicky definujeme **polotečnu zleva** pro bod  $t \in \langle a, b \rangle$ . Řekneme, že křivka  $\varphi$  má v bodě  $t \in \langle a, b \rangle$  **tečnu**, jestliže má polotečnu zleva i zprava a  $T^-_{\varphi}(t) = T^+_{\varphi}(t)$ .



Podíl rozdílu funkčních hodnot křivky dělený jeho modulem má jednotkový modul a tedy i v definici uvedené limity mají jednotkovou velikost. Dostatečnou podmínku existence těchto objektů popisuje následující věta.

**Věta 3.8.** *Nechť má křivka  $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  v bodě  $t \in \langle a, b \rangle$  nenulovou derivaci zprava  $\varphi'_+(t)$  resp. nenulovou derivaci zleva  $\varphi'_-(t)$  resp. nenulovou derivaci  $\varphi'(t)$  potom existuje v bodě  $t$  ke křivce polotečna zprava resp. polotečna zleva resp. tečna a platí*

$$T^+_{\varphi}(t) = \frac{\varphi'_+(t)}{|\varphi'_+(t)|} \quad \text{resp.} \quad T^-_{\varphi}(t) = \frac{\varphi'_-(t)}{|\varphi'_-(t)|} \quad \text{resp.} \quad T_{\varphi}(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}.$$

Příkladem křivky, která nemá v bodě  $t = 0$  tečnu může být  $\varphi(t) = t^3 + j\sqrt{t^6}$ . Poznamenejme, že nulovost derivace  $\varphi'(t)$  neznamena neexistenci tečny viz například  $\varphi(t) = t^3 + jt^3$  pro  $t = 0$ .

V geometrii se obvykle pod pojmem křivka rozumí její graf tj.  $[\varphi]$ . Potom proces nalezení zobrazení  $\varphi : D_{\varphi} \rightarrow \mathbb{C}$  se zadanou množinou  $[\varphi]$  nazýváme parametrizací křivky. Tento proces nemá jednoznačný výsledek viz následující příklad.

**Příklad 3.9.** Nalezněte různé parametrizace úsečky  $AB$ , pro  $A, B$  různá komplexní čísla.

**Řešení.** Ukážeme 4 různé parametrizace z nich poslední je odlišná.

1.  $\varphi(t) = A + (B - A)t, t \in \langle 0, 1 \rangle$
2.  $\varphi(t) = A + (B - A) \sin t, t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$
3.  $\varphi(t) = B + (B - A) \cos t, t \in \langle \pi, 3\pi/2 \rangle$
4.  $\varphi(t) = A + (B - A) \sin^2 t, t \in \langle 0, 3\pi/2 \rangle$

Představíme-li si uvedené funkce jako pohybové rovnice, to jest parametr  $t$  interpretujeme jako čas a  $\varphi(t)$  jako polohu bodu v čase  $t$  ( $\varphi'(t)$  je vektor okamžité rychlosti), získáme 4 různé pohyby po dané úsečce. V prvním případě se jedná o pohyb rovnoměrný přímočarý ve směru  $B - A$  s konstantní rychlostí  $|\varphi'(t)| = |B - A|$ . Ve druhém případě se jedná o pohyb zpomalený, neboť  $|\varphi'(\pi/2)| = (B - A) \cos \pi/2 = 0$ . Ve třetím případě se jedná o pohyb zrychlený, neboť  $|\varphi'(\pi)| = (B - A) \sin 0 = 0$ . A čtvrtý pohyb se od zbývajících odlišuje, neboť se bod nejdříve pohybuje z bodu  $A$  do bodu  $B$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ) potom zpět ( $\pi/2 \leq t \leq \pi$ ) a nakonec znovu z bodu  $A$  do bodu  $B$  ( $\pi \leq t \leq 3\pi/2$ ).  $\square$

Nechť pro dvě křivky  $\varphi_1 : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi_2 : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ , platí že koncový bod první křivky splývá s počátečním bodem druhé křivky, tj.  $\varphi_1(b) = \varphi_2(c)$ . Potom definujeme jako jejich **součet**  $\varphi_1 + \varphi_2$  takovou křivku, že pohyb po křivce  $\varphi_1$ , který skončí v bodě  $\varphi_1(b)$  pokračuje po křivce  $\varphi_2$  v bodě  $\varphi_2(c)$ .

Jestliže splývá koncový a počáteční bod křivky  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , nazýváme křivku **uzavřenou**. Křivku nazveme **prostou**, jestliže  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$  pro všechny body  $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$  splňující  $0 < |t_1 - t_2| < b - a$ . každou uzavřenou prostou křivku nazýváme **Jordanovou** křivkou. Pro Jordanovy křivky platí věta.

**Věta 3.10.** *Nechť  $\varphi$  je Jordanova křivka v  $\mathbb{C}$ . Potom platí*

$$\mathbb{S} - [\varphi] = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

kde  $\Omega_1, \Omega_2$  jsou neprázdné disjunktní oblasti, jejichž společnou hranicí je graf křivky  $[\varphi]$ .

Podobně je třeba v návaznosti na „geometrické zvyklosti“ řešit otázku **orientace** křivky, která znamená směr pohybu. Je zřejmé, že různé křivky (pohyby) mohou mít stejný graf a často o křivce hovoříme jako o parametrizaci množiny  $[\varphi]$ . Z pohledu praktických aplikací často nezáleží na volbě konkrétní křivky (pohybu), ale na jejím grafu  $[\varphi]$  např. velikost práce. Orientaci křivky, která není uzavřená popíšeme stanovením počátečního a koncového bodu grafu  $[\varphi]$ . U Jordanovy křivky (je uzavřená a rovinu rozděluje na vnějšek a vnitřek) je směr pohybu dán tím, že při pohledu ve směru pohybu máme vnitřek křivky po levé straně (křivku procházíme proti směru chodu hodinových ručiček) nebo po pravé straně (křivku procházíme po směru chodu hodinových ručiček). V prvním případě hovoříme o **kladné orientaci** a ve druhém o **záporné orientaci** křivky.

### 3.4 Funkce komplexní proměnné

Definice funkce komplexní proměnné musí zohlednit fakt, že některé elementární funkce nejsou prosté a k nim inverzní funkce obecně neexistují, což v reálném oboru je „řešeno“ zúžením dané funkce na interval kde je původní funkce prostá. Již v Příkladě 3.1 jsme dostali dvě hodnoty druhé odmocniny

$$\sqrt{-24 - 10j} = \pm(1 - 5j) \Leftrightarrow (\pm(1 - 5j))^2 = -24 - j10.$$

Proto v komplexním oboru připouštíme obecnější definici.

**Definice 3.11.** Je-li ke každému komplexnímu číslu  $z = x + jy \in G \subseteq \mathbb{S}$  přiřazeno nějakým předpisem  $f$  alespoň jedno komplexní číslo  $w = u + jv \in \mathbb{S}$ , řekneme, že na množině  $G$  je definována **komplexní funkce komplexní proměnné  $z$**  a tuto skutečnost zapisujeme vztahem  $w = f(z)$ . Množinu  $D(f) = G$  nazýváme **definiční obor** funkce  $f(z)$ . Množinu  $H(f) = \{w | w = f(z) | z \in D(f)\} \subseteq \mathbb{S}$  nazýváme **oborem hodnot** funkce  $f(z)$ . Je-li  $H(f) \subseteq \mathbb{C}$  nazýváme funkci  $f(z)$  **konečnou**.

Jestliže je funkce zobrazení tj. přiřazuje každému číslu  $z \in D(f)$  právě jedno číslo  $w = u + jv \in \mathbb{S}$ , říkáme, že funkce  $f(z)$  je **jednoznačná** a můžeme ji vyjádřit pomocí dvojice reálných funkcí:

$$w = f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y).$$

Funkci  $u(x, y)$  nazýváme **reálná část** funkce  $f(z)$  a značíme ji  $\Re w$  nebo  $\Re f(z)$ , funkci  $v(x, y)$  nazýváme **imaginární část** funkce  $f(z)$  a značíme ji  $\Im w$  nebo  $\Im f(z)$ .

Jestliže funkce  $f(z)$  není jednoznačná, říkáme, že je **mnohoznačná**. Je-li  $f(z)$  funkce mnohoznačná budeme jednoznačnou funkci  $\hat{f}(z)$  nazývat **jednoznačnou větví funkce  $f(z)$** , jestliže platí  $D(\hat{f}) \subseteq D(f)$  a  $\hat{f}(z) \in f(z)$  pro všechna  $z \in D(f)$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Jestliže je  $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ , řekneme, že na množině  $D(f)$  je definována **komplexní funkce reálné proměnné  $z$** . Podobně můžeme definovat **reálnou funkci komplexní proměnné**.

Příkladem dvouznačné funkce je druhá odmocnina  $\sqrt{z}$ , kdy každému  $z \neq 0$  jsou přiřazeny 2 hodnoty. Funkci  $\sqrt{z}$  můžeme chápat jako sjednocení dvou jednoznačných větví

$$\widehat{\sqrt{z}} = \{[z, w] \mid w^2 = z \wedge \text{Arg } w = \text{Arg } z/2\} \quad \widehat{\widehat{\sqrt{z}}} = \{[z, w] \mid w^2 = z \wedge \text{Arg } w = \text{Arg } z/2 \pm \pi\},$$

kde znaménko před  $\pi$  volíme tak, že je opačné než u  $\Im m z$ . Obecně je pro přirozené  $n$  funkce  $\sqrt[n]{z}$   $n$ -značnou funkcí.

V dalším textu budou tvrzení o komplexních funkcích  $f(z)$  formulována pomocí vlastností dvojice reálných funkcí dvou proměnných  $\Re f = u(x, y)$  a  $\Im m = v(x, y)$ . Z toho vyplývá nutnost umět najít reálnou a imaginární složku dané funkce. Z důvodu stručnosti budeme v dalším místo označování  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  často používat zkrácené označování  $u$  a  $v$ .

**Příklad 3.12.** *Určení reálné a imaginární části funkce  $f(z)$*

Je dána komplexní funkce  $w = z^2 + jz$ . Najděte její reálnou a imaginární část.

**Řešení.** Komplexní číslo  $z = x + jy$  je v algebraickém tvaru viz Definice 3.11. Proto

$$\begin{aligned} w = z^2 + jz &= (x + jy)^2 + j(x + jy) = x^2 + 2jxy + j^2y^2 + jx + j^2y = \\ &= x^2 + 2jxy - y^2 + jx - y = x^2 - y^2 - y + j(2xy + x). \end{aligned}$$

Reálná část zadané funkce je  $u = \Re w = x^2 - y^2 - y$  a imaginární část zadané funkce je  $v = \Im m w = 2xy + x$ . Definičním oborem zadané funkce může být celá množina  $\mathbb{C}$ , resp. libovolná její podmnožina.  $\square$

### 3.4.1 Grafické znázornění funkce komplexní proměnné

Vzhledem k tomu, že kartézský součin  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  má čtyřrozměrný geometrický model vzniká problém s grafickým znázorněním komplexních funkcí. Zpravidla volíme model dvou Gaussových rovin přičemž v první, obsahující  $Df$ , body označujeme  $z$  a body druhé roviny používané na zobrazování funkčních hodnot označujeme  $w$ . Charakter funkce pak demonstrujeme tak, že ke zvolené množině  $A$  (bod, křivka, oblast...) v rovině  $z$  ukážeme odpovídající množinu  $f(A)$  v rovině  $w$ . V případě více množin je můžeme ztotožnit popisky nebo odpovídající množiny spojit šipkami. Některé funkce realizují známá zobrazení rovin. Například funkce  $f(z) = z + a$  realizuje translaci (posunutí) o vektor  $(\Re a, \Im a)$ , otočení roviny se středem v počátku o úhel  $\alpha$  realizuje funkce  $f(z) = az$ , kde  $|a| = 1$  a  $\arg a = \alpha$ . Funkce  $f(z) = \bar{z}$  realizuje osovou symetrii okolo reálné osy, dále funkce  $f(z) = 1/z$  realizuje složení dvou zobrazení a sice kruhové inverze v rozšířené rovině  $\mathbb{S}$  (vnitřek kruhu se středem v počátku se zobrazí na jeho vnějšek a naopak) s výše zmíněnou osovou symetrií kolem osy  $\Re z$ . Využití funkce  $f(z) = 1/z$  souvisí v elektrotechnice s pojmem admitance [8, str. 58].

**Příklad 3.13.** Graficky znázorněte přímku  $6x - 8y - 1 = 0$  a její obraz funkcí  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

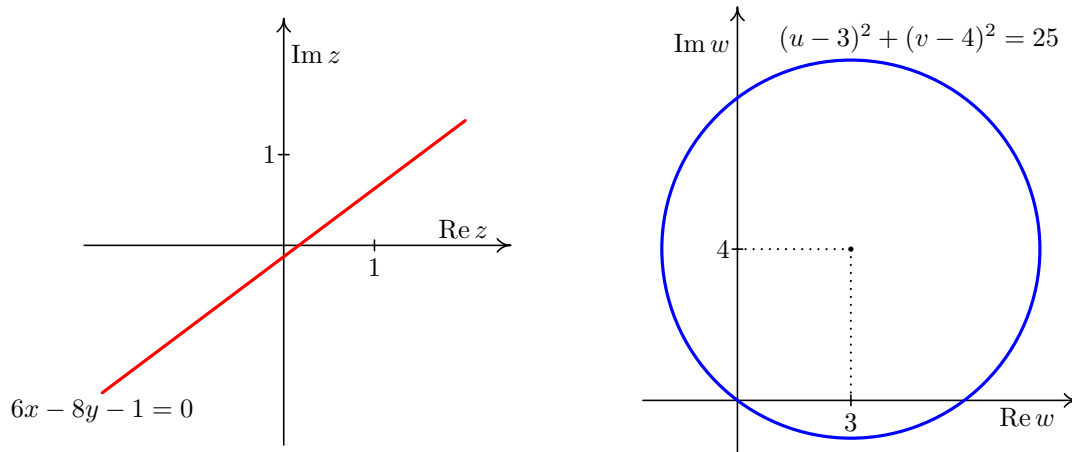
**Řešení.** Nejdříve vyjádříme proměnné  $x$  a  $y$  pomocí proměnných  $u, v$ :

$$w = \frac{1}{z} \Leftrightarrow u + jv = \frac{1}{x + jy} \Leftrightarrow x + jy = \frac{1}{u + jv} = \frac{u - jv}{u^2 + v^2} \Leftrightarrow x = \frac{u}{u^2 + v^2} \wedge y = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Jejich dosazením do rovnice přímky dostaneme

$$6\frac{u}{u^2+v^2} - 8\frac{-v}{u^2+v^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 6u + 8v - u^2 - v^2 = 0 \Leftrightarrow (u-3)^2 + (v-4)^2 = 25,$$

tj. rovnici kružnice se středem  $3 + 4j$  o poloměru 5. Tomu odpovídá obrázek:



□

Složením výše uvedených funkcí můžeme vytvořit lineárně lomenou funkci

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Protože tato funkce má značný význam v elektrotechnice, při popisu globálních charakteristik elektrostatických polí viz [8, str. 58], uvedeme některé důležité vlastnosti této funkce, které platí za předpokladu  $ad - bc \neq 0$ .

- $f(z)$  je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny  $\mathbb{S}$  na sebe ( $f(-d/c) = \infty$ ,  $f(\infty) = a/c$ ).
- Tato funkce zobrazuje množinu všech kružnic a přímek na sebe.
- pro libovolné body  $z_1, z_2, z_3, z$  platí

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{f(z) - f(z_2)} : \frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_2)} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Pomocí těchto vlastností lze odvodit koeficienty lineárně lomené funkce na základě předem zvolených geometrických atributů dané funkce.

**Příklad 3.14.** Graficky znázorněte funkci  $w = u + jv = \frac{z - 1 - j}{z + 1 - j}$ , tak, že zobrazíte systém přímek procházejících bodem  $z_0 = 1 + j$  a systém soustředných kružnic se středem v tomto bodě.

**Řešení.** Budeme postupovat analogicky s předchozím případem. Proměnné  $z$  a  $w$  nahradíme proměnnými proměnou  $x$ ,  $y$  a  $u$ ,  $v$ :

$$u + jv = \frac{x + jy - 1 - j}{x + jy + 1 - j} = \frac{x - 1 + j(y - 1)}{x + 1 + j(y - 1)}.$$

Dále vyjádříme proměnné  $x$ ,  $y$  jako funkce proměnných  $u$ ,  $v$ :

$$x = \frac{1 - u^2 - v^2}{(u - 1)^2 + v^2} \quad y = \frac{(u - 1)^2 + v^2 + 2v}{(u - 1)^2 + v^2},$$

Jejich dosazením do rovnic křivek v rovině  $z$  získáme rovnice odpovídajících obrazů těchto křivek v rovině  $w$ .

Pro přímky  $k(x - 1) = y - 1$  dostáváme rovnice kružnic  $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k^2}$ :

$$\begin{aligned} 0 &= k \left( \frac{1 - v^2 - u^2}{1 - 2u + v^2 + u^2} - 1 \right) - \frac{u^2 + 1 - 2u + 2v + v^2}{1 - 2u + v^2 + u^2} + 1 = \frac{2(kv^2 + ku^2 - ku + v)}{1 - 2u + v^2 + u^2} \\ &\Leftrightarrow k \left( v^2 + \frac{v}{k} + \frac{1}{4k^2} + u^2 - u + \frac{1}{4} - \frac{1}{4k^2} - \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow \left( v + \frac{1}{2k} \right)^2 + \left( u - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že pro všechna  $k$  kružnice procházejí dvěma body 0 a 1. Pro kružnice  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = k^2$  dostáváme po dosazení 2 možnosti:

$$\begin{aligned} k^2 &= \left( \frac{1 - v^2 - u^2}{(u - 1)^2 + v^2} - 1 \right)^2 + \left( \frac{(u - 1)^2 + v^2 + 2v}{(u - 1)^2 + v^2} - 1 \right)^2 = \frac{4(-u^2 - v^2 + u)^2 + 4v^2}{((u - 1)^2 + v^2)^2} = \frac{4(u^2 + v^2)}{(u - 1)^2 + v^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{k^2}{4}((u - 1)^2 + v^2) = u^2 + v^2. \end{aligned}$$

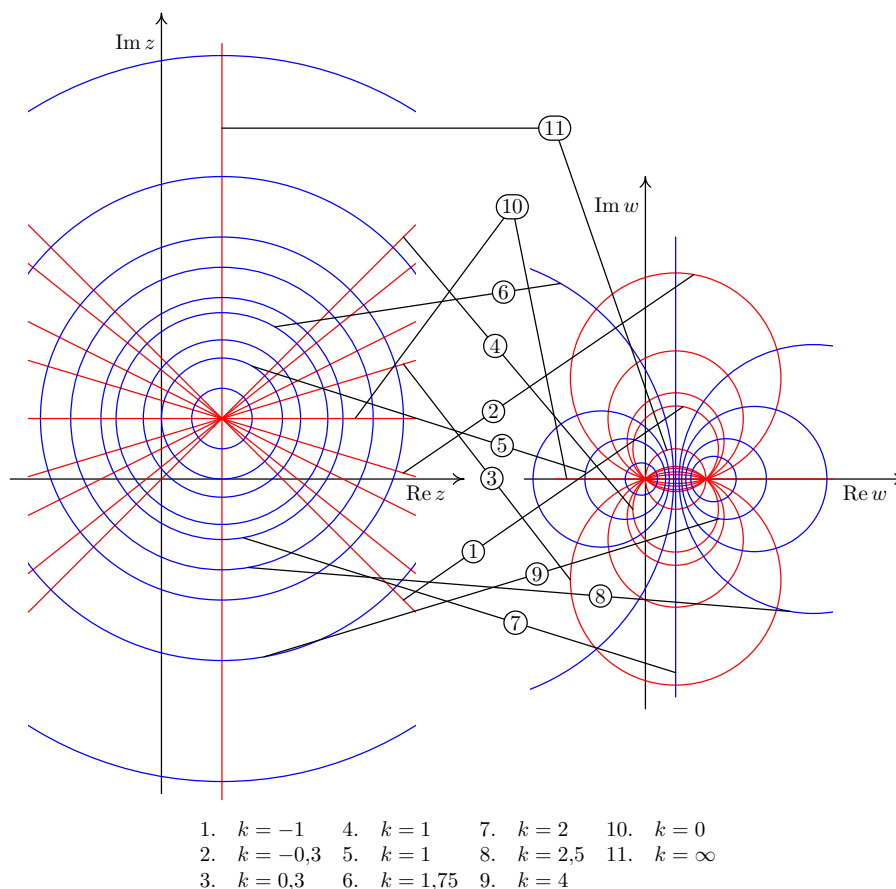
1. pro  $k = 2$  jde rovnicí přímky  $u = 1/2$ ,

2. pro  $k \neq 2$  po úpravách získáme

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{4}(u^2 - 2u + 1 + v^2) &= u^2 + v^2 \Leftrightarrow u^2 \frac{k^2 - 4}{4} - 2u \frac{k^2}{4} + v^2 \frac{k^2 - 4}{4} = -\frac{k^2}{4} \Leftrightarrow \\ u^2 - 2u \frac{k^2}{k^2 - 4} + \frac{k^4}{(k^2 - 4)^2} + v^2 &= -\frac{k^2}{k^2 - 4} + \frac{k^4}{(k^2 - 4)^2} = \frac{4k^2}{(k^2 - 4)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{což jsou rovnice kružnic: } \left( u - \frac{k^2}{k^2 - 4} \right)^2 + v^2 = \frac{4k^2}{(k^2 - 4)^2}.$$

Následující obrázek ukazuje několik zobrazovaných křivek. Zároveň je obrázek vpravo ve shodě s interpretací elektrického pole dvou opačně nabitých rovnoběžných vláken, v němž modré čáry vyznačují ekvipotenciály a červené silokřivky podobně jako obrázek vlevo lze interpretovat jako pole jednoho nabitého vlákna.



□

V dalším příkladě se budeme zabývat dvojicí funkcí  $f(z) = z^2$  a jednoznačnou větví funkce  $f(z) = \sqrt{z}$  určenou podmínkou  $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$ .

**Příklad 3.15.** V polorovině  $\Im m z \geq 0$  proveďte grafické znázornění funkce  $f(z)$ , která je jednoznačnou větví funkce  $\sqrt{z}$  určené podmínkou  $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$ , pro polopřímky  $x = k \wedge y > 0$  a přímky  $y = l$ , kde  $k \geq 0$  a  $l$  jsou reálné konstanty. Poznamenejme že, podobně jako předchozím příkladě se jedná o ortogonální systémy křivek (tj. libovolné dvě křivky z různých systémů jsou na sebe kolmé)

**Řešení.** V tomto příkladě můžeme postupovat tak, že určíme reálnou část  $u = \Re f(z)$  a imaginární část  $v = \Im f(z)$  funkce dále dosazením  $x = k$  resp.  $y = l$  dostaneme zobrazení daných přímek. Postupovat budeme podobně jako v Poznámce 3.2:

Nejdříve určíme  $|z|$  a  $\cos \text{Arg } z$   $z = x + jy = \sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + j \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$  a pomocí nich  $|f(z)|$  a  $\cos \text{Arg } f(z)$ ,  $\sin \text{Arg } f(z)$ . Platí totiž  $|f(z)| = \sqrt{|z|} = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$  a  $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } f(z)$ .

Pro  $y \neq 0$  dostáváme

$$\cos \operatorname{Arg} f(z) = \sqrt{\frac{1 + \cos \operatorname{Arg} z}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2} + x)}}{2\sqrt[4]{x^2+y^2}},$$

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{Arg} f(z) &= \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{1 - \cos \operatorname{Arg} z}{2}} = \\ &= \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{2}} = \operatorname{sgn}(y) \frac{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2} - x)}}{2\sqrt[4]{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

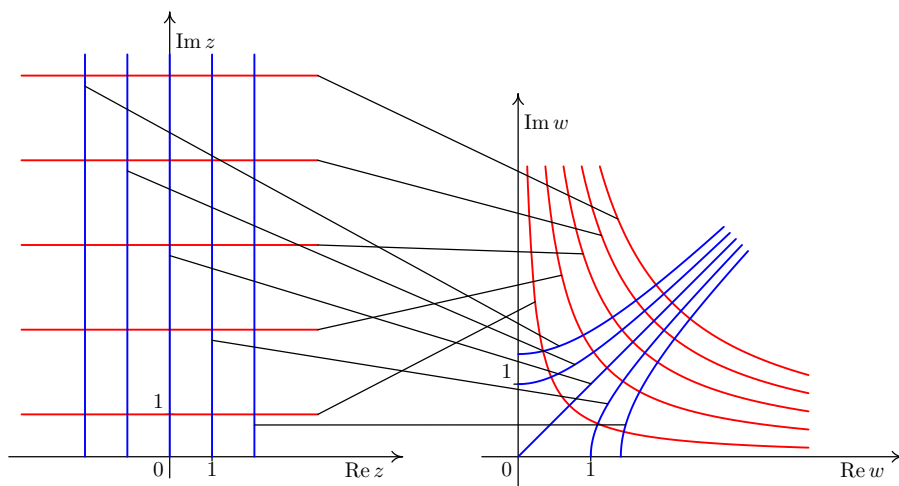
Dosazením do goniometrického tvaru dostaneme  $f(z)$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt[4]{x^2+y^2} \left( \frac{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2} + x)}}{2\sqrt[4]{x^2+y^2}} + j \operatorname{sgn}(y) \frac{\sqrt{2(\sqrt{x^2+y^2} - x)}}{2\sqrt[4]{x^2+y^2}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2} + x}{2}} + j \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{2}}. \end{aligned}$$

Pro  $y = 0$  dostáváme

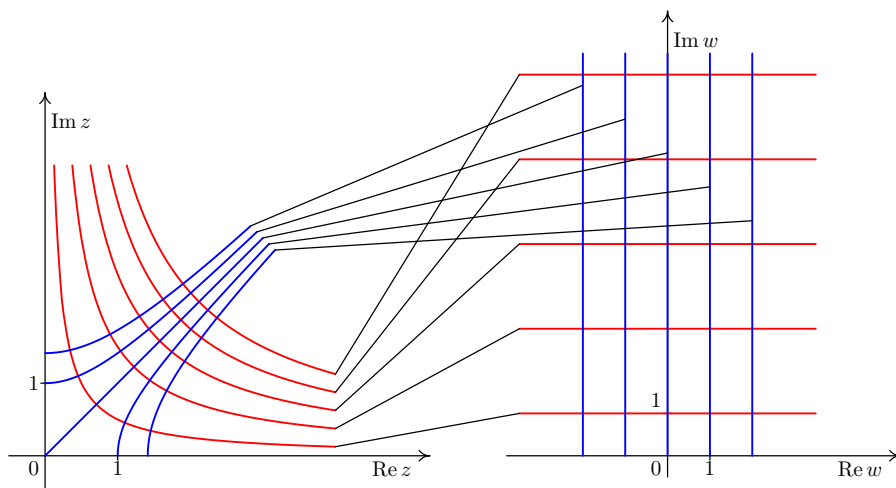
$$f(z) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{pro } x > 0; \\ j\sqrt{-x}, & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Poznamenejme, že ve výše uvedeném případě se již jedná o reálnou funkci  $\sqrt{\cdot}$ . Pro  $y > 0$  obrazy polopřímek  $x = \text{konst.}$  a  $y > 0$  a přímek  $y = \text{konst.}$  a  $x > 0$  budou v prvním kvadrantu jako části grafů hyperbol:



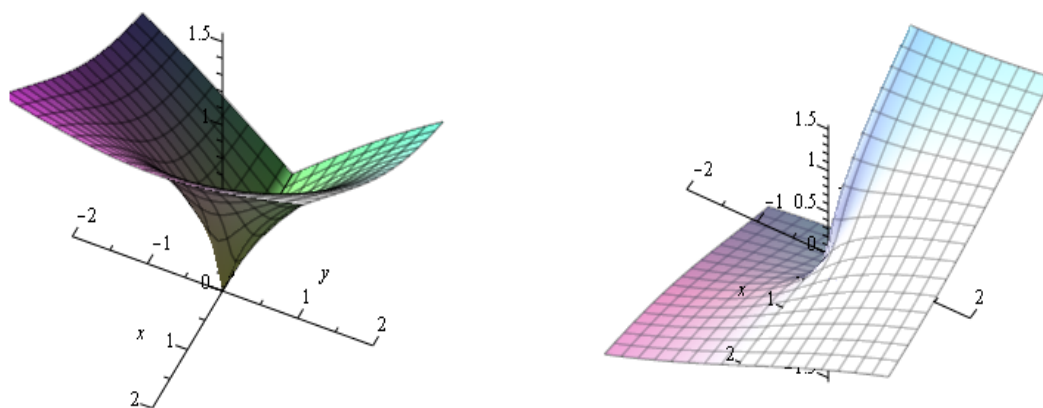
I v tomto příkladě lze obrázek vpravo interpretovat jako ekvipotenciály (modré hyperboly) a siločivky (červené hyperboly) elektrostatického pole dvou na sebe kolmých stěn.

Vzhledem ke skutečnosti, že  $\sqrt{z}$  a  $z^2$  jsou inverzní funkce, lze pouhým „otočením“ šipek (záměnou rovin  $z$  a  $w$ ) získat grafické znázornění funkce  $z^2$ , která zobrazuje hyperboly z prvního kvadrantu na přímky a polopřímky:



□

Druhou možností jak zobrazovat funkci komplexní proměnné  $f(z) = f(x + jy)$  je dvojice funkcí dvou proměnných  $\Re f(x + jy) = u(x, y)$  a  $\Im f(x + jy) = v(x, y)$ . Výhodou tohoto způsobu zobrazení je možnost snadného určení některých vlastností jako je např. spojitost, diferencovatelnost, atd. Situaci můžeme předvést na jednoznačné větvi funkce  $\sqrt{z}$  určené podmínkou  $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$ .



Obr. 3.1: Reálná část  $u(x, y)$  a imaginární část  $v(x, y)$  funkce  $\sqrt{z}$ .

Z grafu je patrné, že jednoznačná větev funkce  $\sqrt{z}$  určená podmínkou  $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$  má imaginární část nespojitou na záporné části reálné osy a reálná část není tamtéž diferencovatelná.



### 3.5 Limita, spojitost

V dalším textu bude platit úmluva, že budeme o konečných funkcích obecně předpokládat jejich jednoznačnost, nebude-li zdůrazněn opak, neboť budeme převážně pracovat s konečnými a jednoznačnými funkcemi (zobrazeními) a také proto, abychom dosáhli co největší analogie s učebním textem Matematika 1 pro první semestr.

**Definice 3.16.** Nechť  $z_0$  je hromadným bodem množiny  $Df \subseteq \mathbb{S}$ . Dále nechť  $U(z_0)$  je okolí bodu  $z_0$ . Řekneme, že funkce  $f(z)$  má v bodě  $z_0$  **limitu  $w_0$  vzhledem k množině  $M$** , kde  $M \subseteq Df$ , jestliže ke každému kruhovému okolí  $U(w_0)$  existuje alespoň jedno prstencové okolí  $P(z_0)$  takové, že pro všechna  $z \in P(z_0) \cap M$  platí:

$$f(z) \in U(w_0).$$

Tuto skutečnost zapíšeme  $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in M}} f(z) = w_0$ .

Vynecháme-li v definici množinu  $M$  a nahradíme-li předpoklad  $z \in P(z_0) \cap M$  pouze  $z \in P(z_0)$  (totéž jako volba  $M = \mathbb{C}$ ) získáme tak definici **limity funkce  $f(z)$**  v bodě  $z_0$  a tuto zapisujeme jako  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ .

**Věta 3.17.** *Funkce  $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  má v bodě  $z_0 = x_0 + jy_0$  limitu  $u_0 + jv_0$  právě tehdy, když její složky  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  mají v bodě  $[x_0, y_0]$  limitu a pro reálnou část je tato rovna  $u_0$  a pro imaginární část je rovna  $v_0$ .*

Tato věta umožňuje přenést známé věty o limitách funkcí dvou reálných proměnných pro funkce komplexní proměnné, jedná se především o věty jako jsou věty o existenci nejvýše jedné limity o limitách součtu, rozdílu, součinu, podílu.

**Definice 3.18.** Nechť  $w = f(z)$  je komplexní funkce a dále buď  $z_0 \in Df$ . Jestliže existuje limita  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  a platí, že

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

řekneme, že funkce  $w = f(z)$  je **spojitá v bodě  $z_0$** .

O spojitosti funkce  $f(z)$  v bodě lze ve shodě s Větou 3.17 rozhodnout podle chování její reálné a imaginární části.

**Věta 3.19.** *Funkce  $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  je spojitá v bodě  $z_0 = x_0 + jy_0$  právě tehdy, když její složky  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  jsou spojité v bodě  $[x_0, y_0]$ .*

## 3.6 Derivace funkce komplexní proměnné

Pojem *derivace funkce komplexní proměnné* se opět zavádí podobně jako v reálném oboru pro funkci jedné reálné proměnné.

**Definice 3.20.** Nechť je funkce  $f(z)$  definována na nějakém okolí  $U(z_0)$  bodu  $z_0$ . **Derivací funkce  $f(z)$  v bodě  $z_0$**  definujeme jako limitu

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (3.4)$$

Derivaci funkce  $f(z)$  v bodě  $z_0$  značíme  $f'(z_0)$ . Existuje-li derivace  $f'(z)$  v nějakém okolí  $U(z_0)$ , pak se funkce nazývá **holomorfní<sup>1</sup> v bodě  $f(z_0)$** . Existuje-li derivace  $f'(z)$  v každém bodě oblasti  $G$ , pak řekneme, že funkce  $f(z)$  je **holomorfní** na  $G$ .

Formální definice derivace je prakticky totožná s definicí v reálném oboru, proto v mnohých příkladech můžeme postupovat analogicky, např. při nalezení derivace funkce  $w = z^n$ :

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h-z) \sum_{i=1}^n (z+h)^{i-1} z^{n-i}}{h} = nz^{n-1}.$$

I když je formální definice derivace prakticky totožná s definicí v reálném oboru, musíme mít na paměti, že celá řada komplexních funkcí – např. funkce  $w = \bar{z}$  – nemá derivaci nebo má jiné vlastnosti v návaznosti na jiné vlastnosti funkcí viz např. již zmiňovaná mnohoznačnost funkcí. Pro praktické ověřování, zda funkce má nebo nemá derivaci, slouží následující věta:

**Věta 3.21.** Nechť je dán bod  $z_0 = x_0 + jy_0$ . Označme  $P = [x_0, y_0]$ . Funkce  $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  má v bodě  $z_0$  derivaci právě tehdy, když

1. funkce  $\Re f(z) = u(x, y)$ ,  $\Im f(z) = v(x, y)$  mají v bodě  $P$  totální diferenciál,
2. platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky<sup>2</sup>

$$u'_x(P) = v'_y(P) \quad u'_y(P) = -v'_x(P). \quad (3.5)$$

Funkce  $f(z)$  má derivaci v bodě  $z_0$  ve tvaru

$$f'(z_0) = u'_x(P) + jv'_x(P) = v'_y(P) - ju'_y(P). \quad (3.6)$$

**Důkaz.** V důkazu se omezíme pouze na ověření uvedených vzorců. Z existence limity  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  plyne existence a rovnost limit po přímkách rovnoběžných s reálnou a imaginární osou ( $y = y_0, x = x_0$ ):

<sup>1</sup>Často se také používá označení *analytická* nebo *regulární*.

<sup>2</sup> někdy jsou také nazývány d'Alambert-Eulerovy podmínky

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) + jv(x, y_0) - (u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0))}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + j \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = u'_x(x_0, y_0) + jv'_x(x_0, y_0),$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) + jv(x_0, y) - (u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0))}{jy - jy_0} =$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{jy - jy_0} + j \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{jy - jy_0} = -ju'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0).$$

Dokázali jsme tak vzorec (3.6), jehož důsledkem jsou rovnosti (3.5).  $\square$

Poznamenejme, že je možné odvodit i další tvary Cauchy-Riemannových podmínek v závislosti na použitém tvaru (goniometrický, exponenciální) závislé a nezávislé proměnné viz [8, str. 53]

**Příklad 3.22.** Pro níže uvedené funkce nalezněte body, ve kterých existuje derivace a určete ji.

1. Najděte derivaci funkce  $w = \bar{z} = x - jy$ .

**Řešení.** Nejprve nalezneme reálnou a imaginární část zadané funkce. Zřejmě je  $w = \bar{z} = x - jy$ , tj.  $u = \Re w = x$  a  $v = \Im w = -y$ .

Uřídíme příslušné parciální derivace požadované ve Větě 3.21. Dostáváme:  $u'_x = 1$ ,  $u'_y = 0$ ,  $v'_x = 0$ ,  $v'_y = -1$ . Vidíme, že podmínky (3.5) nejsou splněny pro žádný bod  $z_0 = x_0 + jy_0$ , resp.  $P_0 = [x_0, y_0]$ . Derivace funkce  $w = \bar{z}$  tedy neexistuje v žádném bodě definičního oboru.  $\square$

2. Najděte derivaci funkce  $w = |z|^2$ .

**Řešení.** Protože  $w = |z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$  je funkce s reálnými funkčními hodnotami, máme  $u = \Re w = x^2 + y^2$  a  $v = \Im w = 0$ .

Uřídíme parciální derivace požadované ve Větě 3.21:  $u'_x = 2x$ ,  $u'_y = 2y$ ,  $v'_x = v'_y = 0$ . Vidíme, že podmínky (3.5) jsou splněny pouze pro bod  $z_0 = 0$ , resp.  $P_0 = [0, 0]$ . Pro derivaci funkce  $w = |z|^2$  platí, že existuje pouze v jediném bodě a  $f'(0) = 0$ . V reálném oboru má daná funkce  $|x|^2 = x^2$  derivaci pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Použitelnost dané věty je třeba vždy zvážit, neboť pro srovnání s přímým výpočtem uveďme pouze určení reálné a imaginární části funkce  $z^n$ :

$$w = z^n = (x + jy)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} (jy)^i =$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} x^{n-2k} (-1)^k y^{2k} + j \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} (-1)^k y^{2k+1}.$$

Podobně jako ve výše uvedeném odvození derivace funkce  $z^n$  z definice můžeme postupovat a odvodit i stejná pravidla jako v reálném oboru pro derivaci **lineární kombinace funkcí**, **součinu** a **podílu** dvou funkcí. Totéž platí také pro **derivování složené funkce** a **funkce inverzní**.

U derivace inverzní funkce poznamenejme, že u víceznačných funkcí je možné ji aplikovat na jednoznačné větve. V návaznosti na jejich výběr je třeba uvážit existenci derivace např. pro jednoznačnou větev funkce  $\sqrt{z}$  určené podmínkou  $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$  nemá tato derivaci pro nekladná reálná čísla, neboť imaginární složka dané funkce je nespojitá. Naopak užitím věty o derivaci inverzní funkce získáme  $(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$  což připouští možnost derivaci pro nekladná čísla spočítat, bude-li volena jednoznačná větev funkce jinak.

Podobně platí, že funkce, která je součtem mocninné řady má v každém vnitřním bodě definičního oboru derivaci, která je rovna součtu řady, vzniklé z původní derivováním člen po členu. V další části využijeme vzorec pro derivaci složené funkce ke geometrické interpretaci derivace a Cauchy-Riemannových podmínek.

### 3.6.1 Geometrický význam Cauchy-Riemannových podmínek a derivace funkce komplexní proměnné

Uvažujme křivky jejichž grafy, prochází bodem  $z_0 = x_0 + jy_0$  a vyhovují rovnicím:

$$u(x, y) = u_0 \quad v(x, y) = v_0.$$

Z diferenciálů těchto rovnic dostáváme rovnice tečných přímk k daným křivkám:

$$u'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \quad v'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

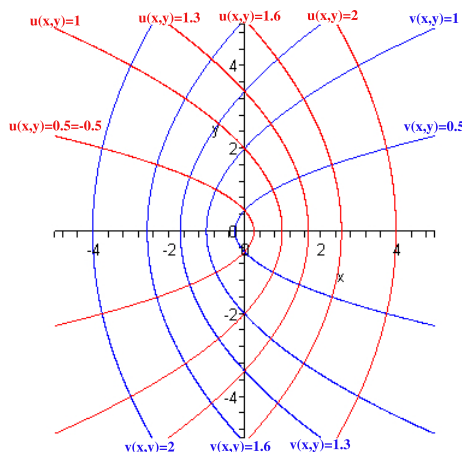
S využitím Cauchy-Riemannových podmínek dostáváme, že normálové vektory těchto přímk  $(u'_x(x_0, y_0), u'_y(x_0, y_0))$ ,  $(v'_x(x_0, y_0), v'_y(x_0, y_0))$  jsou na sebe kolmé, neboť mají nulový skalární součin:

$$u'_x(x_0, y_0)v'_x(x_0, y_0) + u'_y(x_0, y_0)v'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Uvedenou skutečnost je možné sledovat na těchto křivkách pro jednoznačnou větev  $\sqrt{z}$  určenou podmínkou  $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$ , pro kterou jsme v Příkladu 3.15 odvodili

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}, \quad v(x, y) = \text{sgn } y \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}, \quad \text{pro } y \neq 0.$$

V tomto případě jsou křivky  $u(x, y) = u_0$ ,  $v(x, y) = v_0$  vzájemně kolmé paraboly.



Porovnáním geometrických charakteristik křivek a jejich obrazů odvodíme geometrickou interpretaci derivace funkce.

Uvažujme funkci  $w = f(z)$ , která má v bodě  $z_0 = x_0 + jy_0$  nenulovou derivaci. Uvažujme křivku  $\varphi : z(t) = x(t) + jy(t)$ , která má v bodě  $[x_0, y_0]$ , odpovídajícím hodnotě  $t = t_0$  tečný vektor  $T_\varphi(t_0)$ . Podobně obraz křivky  $\varphi$  to jest funkce  $\Phi : w(t) = f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + jv(x(t), y(t))$  je křivkou v rovině  $w$ . Podle věty o derivaci složené funkce platí:

$$\Phi'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)$$

Protože argument součinu je roven součtu argumentů dostáváme

$$\arg \Phi'(t_0) = \arg f'(\varphi(t_0)) + \arg \varphi'(t_0),$$

což znamená, že tečný vektor obrazu křivky je proti tečnému vektoru křivky otočený o úhel  $\arg f'(z_0)$  a tato vlastnost nezávisí na volbě křivky. Analogicky porovnáním modulů

$$|\Phi'(t_0)| = |f'(\varphi(t_0))||\varphi'(t_0)|,$$

dostáváme, že poměr délek je dán tzv. koeficientem dilatace  $f'(z_0)$ . Otočení o konstantní úhel  $\arg f'(z_0)$  má následující důsledek.

Zobrazení realizované holomorfní funkcí  $w = f(z)$  zachovává úhly, pod kterými se křivky vzájemně protínají viz Příklady 3.14, 3.15, kdy se ortogonální systémy křivek transformují opět na ortogonální systémy (ekvipotenciály a silokřivky).

### 3.6.2 Holomorfní a harmonické funkce

Nechť funkce  $f(z)$  má derivaci a její reálná část  $\Re f(x + jy) = u(x, y)$  resp. imaginární část  $\Im f(x + jy) = v(x, y)$  mají parciální derivace druhého řádu, snadno s použitím Cauchy-Riemannových podmínek a Schwarzovy věty o záměně derivování odvodíme, že vyhovují tzv. **Laplaceově rovnici**

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0. \quad (3.7)$$

**Definice 3.23.** Řekneme, že funkce  $u(x, y)$  je **harmonická**, jestliže má spojitě parciální derivace druhého řádu a vyhovuje rovnici (3.7). O dvojici harmonických funkcí řekneme, že jsou **sdužené harmonické funkce**, jestliže pro ně platí Cauchy-Riemannovy podmínky (3.5).

Jsou-li funkce  $u(x, y), v(x, y)$  sdružené harmonické funkce, potom funkce  $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$  je holomorfní. K dané harmonické funkci k ní harmonicky sdružená je určena jednoznačně až na aditivní konstantu.

Tuto funkci můžeme nalézt s využitím Cauchy-Riemannových podmínek, neboť tyto určí první parciální derivace sdružené funkce. Při určování této funkce můžeme postupovat tak, že jednu rovnici integrujeme podle té proměnné podle níž je neznámá funkce derivována (při integrování považujeme druhou proměnnou za konstantu). V získané rovnici je neznámá funkce určena až na neznámou funkci druhé proměnné (při zpětném derivování by měla nulovou derivaci). Tuto funkci určíme z rovnice, kterou získáme z obdržené rovnice derivováním podle druhé proměnné než podle které jsme integrovali a porovnáním s parciální derivací, jež je určena z Cauchy-Riemannových podmínek. Uvedený postup budeme ilustrovat na příkladě.

**Příklad 3.24.** Ověřte, že funkce  $v(x, y) = e^{-y} \sin x + 2xy + 3$  je imaginární složkou holomorfní funkce  $f(x + jy)$  a tuto funkci najděte, jestliže  $f(0) = 2 + 3j$ .

**Řešení.** Ověříme, že funkce  $v(x, y)$  je harmonická:

$$\begin{aligned} v'_x &= e^{-y} \cos x + 2y & v'_{xx} &= -e^{-y} \sin x \\ v'_y &= -e^{-y} \sin x + 2x & v'_{yy} &= e^{-y} \sin x. \end{aligned}$$

Tedy  $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$ , navíc harmonicky sdružená funkce je určena rovnicemi

$$u'_x = v'_y = -e^{-y} \sin x + 2x \quad u'_y = -v'_x = -(e^{-y} \cos x + 2y) = -e^{-y} \cos x - 2y.$$

Integrací první rovnice podle  $x$  dostáváme:

$$u = \int (-e^{-y} \sin x + 2x) dx = e^{-y} \cos x + x^2 + h(y).$$

K určení neznámé funkce  $h(y)$  porovnáme parciální derivaci podle  $y$  funkce získané z předchozí rovnice s druhou podmínkou:

$$-e^{-y} \cos x + h'(y) = u'_y = -e^{-y} \cos x - 2y \Rightarrow h'(y) = -2y \Rightarrow h(y) = -y^2 + c.$$

Dosazením funkce  $h(y)$  do  $u$  a následně do  $f$  dostaneme:

$$f(x + jy) = e^{-y} \cos x + x^2 - y^2 + c + j(e^{-y} \sin x + 2xy + 3).$$

K určení integrační konstanty  $c$  využijeme podmínku  $f(0) = 2 + 3j$ :

$$2 + 3j = f(0) = 1 + c + 3j \Rightarrow c = 1.$$

S využitím exponenciálního tvaru komplexního čísla můžeme funkci

$$f(x + jy) = e^{-y} \cos x + x^2 - y^2 + 1 + j(e^{-y} \sin x + 2xy + 3)$$

vyjádřit pomocí proměnné  $z = x + jy$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-y} \cos x + x^2 - y^2 + 1 + j(e^{-y} \sin x + 2xy + 3) = \\ &= e^{-y}(\cos x + j \sin x) + x^2 - y^2 + j2xy + 1 + 3j = \\ &= e^{-y+jx} + (x + jy)^2 + 1 + 3j = e^{j(x+jy)} + z^2 + 1 + 3j = e^{jz} + z^2 + 1 + 3j. \end{aligned}$$

□

**Poznámka 3.25.** Při hledání harmonicky sdružené funkce je možné postupovat i jinak. Např. integrací obou rovnic získáme dva tvary hledané funkce, které obsahují neznámé funkce jedné proměnné. Tyto funkce určíme vzájemným porovnáním. Postup ukážeme na předchozím příkladu:

$$e^{-y} \cos x + \underbrace{x^2}_{g(x)} + h(y) + c = \int u'_x dx = \int u'_y dy = e^{-y} \cos x \underbrace{-y^2}_{h(y)} + g(x) + c$$

Další možností je využití tvrzení, že všechny holomorfní funkce s reálnou částí  $u(x, y)$  resp. imaginární částí  $v(x, y)$  mají tvar

$$f(z) = 2u \left( \frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2j} \right) - u(x_0, y_0) + jC$$

resp.

$$f(z) = 2jv \left( \frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2j} \right) - jv(x_0, y_0) + C,$$

kde  $z_0 = x_0 + jy_0$  je vhodně zvolený bod a  $C$  je reálná konstanta.

Pro holomorfní funkci  $f(x+jy) = u(x, y) + jv(x, y)$  je možné získat zápis pomocí proměnné  $z$  také tak, že do funkcí  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  „dosadíme  $x = z$ ,  $y = 0$  resp.  $x = 0$ ,  $y = -jz$ “, je-li to možné.

Později ukážeme pro komplexní obor novou důležitou vlastnost holomorfních funkcí na oblasti a sice, že na této oblasti mají derivace všech řádů a jejich hodnota uvnitř oblasti je jednoznačně určena hodnotami na hranici této oblasti.

### 3.7 Elementární funkce komplexní proměnné

V této pasáži se budeme zabývat rozšířením definic známých reálných funkcí pro komplexní obor. Stejně jako v reálném oboru definujeme polynom a racionální funkci.

**Definice 3.26.** **Komplexním polynomem**  $P$  komplexní proměnné  $z$  nazýváme funkci tvaru

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n, \quad (3.8)$$

kde  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Je-li  $\alpha_n \neq 0$ , číslo  $n$  nazveme **stupeň komplexního polynomu**  $P(z)$ ; píšeme *st*  $P(z)$ . **Komplexní racionální funkcí**  $R$  nazýváme podíl dvou komplexních polynomů  $P(z), Q(z)$ , takže

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (3.9)$$

Podobně jako reálném oboru je komplexní polynom  $P(z)$  spojitou funkcí, která má derivace všech řádů, které se počítají podle stejných pravidel jako v oboru reálném. Aby byly tyto skutečnosti zachovány, je jednou ze základních možností jak definovat tzv. transcendentní funkce jejich definování jako součet mocninné řady, známé z reálné analýzy.

**Definice 3.27.** Následující vyjádření uvažujeme pro libovolné  $z \in \mathbb{C}$ .

**Komplexní exponenciální funkci  $e^z$**  nazýváme funkci

$$e^z = \exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (3.10)$$

**Komplexní funkci kosinus** nazýváme funkci

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (3.11)$$

**Komplexní funkci sinus** nazýváme funkci

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.12)$$

Tyto funkce je možné vyjádřit pomocí známých reálných funkcí:

$$e^{x+jy} = e^x (\cos y + j \sin y) \quad (3.13)$$

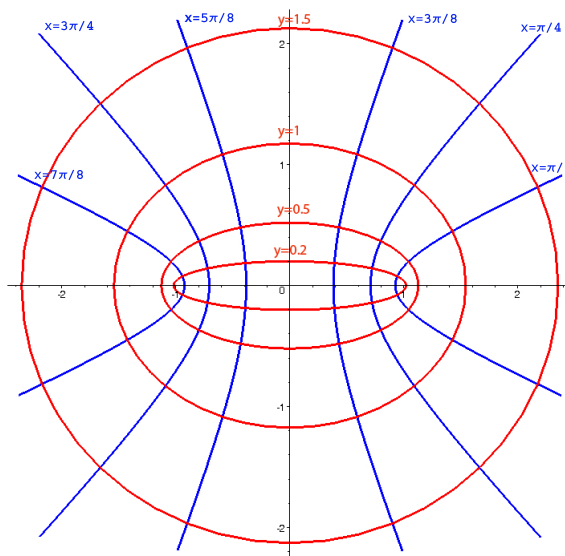
$$\cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y \quad (3.14)$$

$$\sin(x + jy) = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y. \quad (3.15)$$

Poznamenejme, že první vzorec, který souvisí s tzv. Eulerovou identitou je základem pro zavedení exponenciálního tvaru komplexního čísla. Navíc pro výše uvedené funkce platí kromě známých vzorců z reálné analýzy následující důležité vztahy:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}) \quad \sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}). \quad (3.16)$$

Takto definované funkce mají „jiné“ vlastnosti než v reálném oboru. Např. funkce  $e^z$  je periodická s periodou  $2\pi j$ . Pro hodnoty funkcí  $\sin z$  a  $\cos z$  samozřejmě neplatí, že nabývají hodnot pouze z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  (jako v reálném oboru) – zejména proto, že v oboru komplexních čísel nemá vůbec smysl mluvit o intervalech. Situaci budeme ilustrovat na obrazu obdélníkové sítě, která je zobrazena funkcí  $\cos z$ :





Poznamenejme, že pro funkci  $\sin z$  dostáváme jiné křivky, ale množina grafů těchto křivek je stejná jako u funkce  $\cos z$ . Pomocí funkcí definovaných v Definicí 3.27 můžeme definovat další funkce, jejíž reálné analogie jsou známé.

**Definice 3.28.** **Komplexní funkci tangens** nazýváme funkci

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \text{ kde } \cos z \neq 0. \quad (3.17)$$

**Komplexní funkci kotangens** nazýváme funkci

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \text{ kde } \sin z \neq 0. \quad (3.18)$$

**Komplexní funkci hyperbolický sinus** nazýváme funkci

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad (3.19)$$

**Komplexní funkci hyperbolický kosinus** nazýváme funkci

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad (3.20)$$

Poznamenejme, že všechny výše uvedené funkce jsou na svých definičních oborech v  $\mathbb{C}$  holomorfní a derivací jsou stejné funkce jako v reálném oboru. Tato skutečnost spolu s platností pravidel pro derivování algebraických operací s funkcemi vede k obdobnému postupu při výpočtu derivace funkce komplexní proměnné, hovoříme o tzv. **zákonu permanence pravidel pro derivování funkcí komplexní proměnné**. Pro mnohoznačné funkce je třeba se omezit pouze na jednoznačné větve.

Z periodičnosti funkce  $e^z$  vyplývá další důležitý poznatek. V reálném oboru je inverzní funkcí k funkci  $y = e^x$  funkce  $y = \ln x$ . Inverzní funkce k periodické funkci však nemůže být jednoznačná funkce. Definování logaritmu v komplexním oboru je proto poněkud složitější.

**Definice 3.29.** Inverzní funkce k exponenciální funkci  $e^z$  se nazývá **logaritmická funkce**  $\ln z$ . To jest

$$\ln z = \{w | w \in \mathbb{C}, e^w = z\}.$$

Tato funkce je nekonečně mnohoznačná a ze vztahu (3.13) je možné odvodit

$$e^w = e^{\Re w}(\cos \Im w + i \sin \Im w) = z \Leftrightarrow e^{\Re w} = |z| \wedge \Im w = \arg z$$

hodnotu  $\ln z$ :

$$\ln z = \ln |z| + j \arg z. \quad (3.21)$$

Nahradíme-li v tomto vztahu funkci  $\arg z$  funkcí  $\operatorname{Arg} z$  dostáváme jednoznačnou funkci  $\operatorname{Ln} z$ , kterou nazýváme **hlavní větev logaritmické funkce**, resp. **hlavní větev logaritmu**.

Poznamenejme, že funkce  $\operatorname{Ln}$  i  $\ln$  jsou v komplexním oboru definovány pro všechna nenulová čísla  $0 \neq z \in \mathbb{C}$ .

Místo odvození jednotlivých vztahů pro další inverzní funkce ukážeme postup nalezení všech řešení analogické rovnice.

**Příklad 3.30.** Řešte rovnici  $\cosh z = -2$ , která nemá řešení v oboru reálných čísel.

**Řešení.** Funkci  $\cosh z$  nahradíme lineární kombinací funkce  $e^z$  a nalezneme ekvivalentní rovnici pro tuto funkci  $e^z$ , kterou vyřešíme vzhledem k  $e^z$ . Potom  $z$  získáme pomocí funkce  $\ln z$ :

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z = -2 \Leftrightarrow (e^z)^2 + 4e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow e^z = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4}}{2} = \begin{cases} -2 - \sqrt{3} \\ -2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Oba kořeny kvadratické rovnice jsou záporná reálná čísla, tedy jejich argument je  $(2k+1)\pi$ , kde  $k$  je celé číslo. Velikosti těchto kořenů jsou  $2 \pm \sqrt{3}$ . Množina řešení zadané rovnice je sjednocení dvou množin:

$$M_1 = \{\ln(2 + \sqrt{3}) + j(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, M_2 = \{\ln(2 - \sqrt{3}) + j(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$M_1 \cup M_2 = \{\pm \ln(2 + \sqrt{3}) + j(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

což plyne ze skutečností  $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$  a  $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ . □

Podobná situace nastává i u dalších inverzních funkcí k funkcím uvedeným výše, neboť s využitím vzorců (3.16), (3.20), (3.19) je možné jejich vyjádření pomocí funkce  $\text{Ln } z$ :

$$\arcsin z = -j \text{Ln} \left( jz + \sqrt{1 - z^2} \right) \quad \arccos z = -j \text{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (3.22)$$

$$\text{arctg } z = -\frac{j}{2} \text{Ln} \frac{1 + jz}{1 - jz} \quad \text{arccotg } z = \frac{j}{2} \text{Ln} \frac{z - j}{z + j} \quad (3.23)$$

$$\text{arcsinh } z = \text{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 + 1} \right) \quad \text{arccosh } z = \text{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right). \quad (3.24)$$

Pro definování tzv. obecné mocniny  $z^\alpha$  kde  $\alpha \in \mathbb{C}$  využijeme identitu pro logaritmy známou z reálné analýzy využívající funkci  $\ln$ .

**Definice 3.31.** Obecnou mocninou  $z^\alpha$ , kde  $\alpha \in \mathbb{C}$ , nazýváme funkci definovanou vztahem

$$z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln } z}. \quad (3.25)$$

Funkce  $z^\alpha$  je podobně jako funkce  $\ln z$  nekonečně mnohoznačná. Její hlavní větev získáme, pokud nahradíme  $\ln z$  hlavní hodnotou  $\text{Ln } z$ .

**Příklad 3.32.** Určete funkční hodnoty (uvažujte pouze hlavní větev logaritmu).

1. Vypočtete  $j^j$ .

**Řešení.** Podle (3.25) je  $j^j = e^{j \text{Ln } j}$ . Protože  $\arg j = \frac{\pi}{2}$  a  $|j| = 1$ , je  $\text{Ln } j = \ln 1 + j \frac{\pi}{2}$ , tedy po dosazení

$$j^j = e^{j^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

□

2. Vypočtěte  $\operatorname{arctg}(2j)$ .

**Řešení.** Podle (3.23) je  $\operatorname{arctg}(2j) = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+j2j}{1-j2j} = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \left(-\frac{1}{3}\right)$ , protože  $\arg\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi$  a  $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$ , je  $\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = \ln\frac{1}{3} + j\pi$ , tedy po dosazení

$$\operatorname{arctg}(2j) = -\frac{j(-\ln 3 + j\pi)}{2} = \frac{\pi}{2} + j\frac{\ln 3}{2}.$$

□

3. Vypočtěte  $\operatorname{arctg}(j)$ .

**Řešení.** Uvedená funkční hodnota  $\operatorname{arctg}(j)$  není definována, neboť podle (3.23)

$$\operatorname{arctg}(j) = -\frac{j}{2} \ln \frac{1+j^2}{1-j^2} = -\frac{j}{2} \ln 0, \text{ což není definováno.}$$

□

### 3.8 Integrál funkce komplexní proměnné

Definovat analogii určitého integrálu reálné funkce jedné reálné proměnné je pro funkci komplexní v komplexní rovině možné nahrazením úsečky (intervalu) jejím spojitým obrazem v komplexní rovině, tj. křivkou. V dalším se omezíme pouze na tzv. rektifikovatelné křivky konečné délky.

Nechť je dána křivka  $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$  kde  $t \in \langle a, b \rangle$  tedy  $(\Gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C})$ . Každému dělení  $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  s normou dělení  $\nu(D) = \max_{k=1, \dots, n} \{ |t_k - t_{k-1}| \}$  odpovídá

lomená čára s vrcholy  $z_k = \Gamma(t_k)$ , jejíž délka je  $\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|$ . Existuje-li konečné reálné číslo  $K$  takové, že pro každé dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  je

$$\sum_{k=1}^n |\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| < K,$$

existuje konečné suprémum  $d(\Gamma)$  množiny délek všech lomených čar, které nazýváme **délka křivky**  $\Gamma$ , a křivku  $\varphi$  nazýváme rektifikovatelnou. Speciálním případem rektifikovatelných křivek jsou **hladké křivky**  $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$ , které mají na celém intervalu  $\langle a, b \rangle$  spojitou nenulovou derivaci  $\Gamma'$  a platí

$$d(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Jejich dalším možným zobecněním jsou **po částech hladké orientované křivky**, které jsou konečným součtem hladkých křivek.

Pro konečnou komplexní funkci  $f(z)$  a křivku  $\Gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ , pro dělení  $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  a množinu bodů  $\{\tau_k\}$ , splňujících  $\tau_k \in \langle t_{k-1}, t_k \rangle$  pro  $k = 1 \dots n$  definujeme integrální součet

$$\sigma(f(z), \Gamma, D, \{\tau_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\Gamma(\tau_k))(\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})).$$

**Definice 3.33.** Nechť existuje konečná limita

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} \sigma(f(z), \Gamma, D, \{\tau_k\}) = \lim_{\nu(D) \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\Gamma(\tau_k))(\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})),$$

uvažovaná pro všechna dělení  $D$  a množiny  $\{\tau_k\}$ . Pak tuto limitu nazveme **integrálem funkce  $f$  po křivce  $\Gamma$**  a zapisujeme ji  $\int_{\Gamma} f(z)dz$ . Křivku  $\Gamma$  nazýváme **integrační cesta**.

Následující věta stanoví podmínky existence integrálu.

**Věta 3.34.** Nechť  $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$ ,  $t \in \langle a, b \rangle$  je rektifikovatelná křivka a funkce  $f(z)$  je definovaná, konečná a spojitá na množině  $[\Gamma]$ . Potom existuje  $\int_{\Gamma} f(z)dz$  pro jehož hodnotu platí navíc odhad

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)|dz \leq \sup_{z \in [\Gamma]} |f(z)|d(\Gamma). \quad (3.26)$$

Jestliže je navíc  $\Gamma$  po částech hladká křivka, platí

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)dt = \int_a^b f(x(t) + jy(t))(x'(t) + jy'(t))dt. \quad (3.27)$$

Tato věta dává do souvislosti geometrickou povahu definice integrálu s parametrizací po částech hladké křivky. V Příkladu 3.9 bylo uvedeno několik parametrizací jedné úsečky. Možný problém různých hodnot integrálu pro různé parametrizace, „řeší“ zavedení následujícího pojmu.

Jsou-li dány 2 křivky  $\Gamma_1 : \langle a_1, b_1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  a  $\Gamma_2 : \langle a_2, b_2 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  a existuje-li spojitá rostoucí funkce  $\omega$  definovaná na intervalu  $\langle a_1, b_1 \rangle$  taková, že platí

1.  $\omega([a_1, b_1]) = [a_2, b_2]$
2.  $\Gamma_2(\omega(t)) = \Gamma_1(t)$  pro  $t \in \langle a_1, b_1 \rangle$ ,

potom se křivky  $\Gamma_1, \Gamma_2$  liší jen nepodstatně a platí

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Další vlastnosti křivkového integrálu z komplexní funkce jsou uvedeny níže.

**Věta 3.35.** Nechť jsou funkce komplexní proměnné  $f(z), f_1(z), f_2(z)$  spojitě na  $[\Gamma], [\Gamma_1], [\Gamma_2]$ , kde  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$  jsou rektifikovatelné křivky a  $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ . Pak platí:

$$\int_{\Gamma} (k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z))dz = k_1 \int_{\Gamma} f_1(z)dz + k_2 \int_{\Gamma} f_2(z)dz. \quad (3.28)$$

Jestliže  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , pak

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz, \quad (3.29)$$

Jestliže  $\Gamma_2$  je opačně orientovaná křivka  $\Gamma_1$ , pak

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2} f(z) dz \quad (3.30)$$

V dalším textu se omezíme na křivky, které budou po částech hladké, a tuto skutečnost nebudeme dále zdůrazňovat.

**Příklad 3.36 (Výpočet integrálu komplexní funkce po křivce).** Vypočtěte inte-

grál  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , je-li dáno:

1.  $f(z) = z^n$ , kde  $n$  je celé číslo a  $\Gamma$  je kružnice se středem 0 o poloměru  $r$  kladně orientovaná, např.  $z(t) = r(\cos t + j \sin t) = re^{jt}$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

**Řešení.** Ověříme, že křivka  $\Gamma : z(t) = r(\cos t + j \sin t) = re^{jt}$  je hladká, výpočtem její derivace  $z'(t) = r(-\sin t + j \cos t) = jre^{jt}$  a můžeme tedy požit vzorec (3.27) Celkem tedy získáváme, že

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} r^n e^{njt} jre^{jt} dt = \int_0^{2\pi} jr^{n+1} e^{(n+1)jt} dt = \\ &= r^{n+1} \int_0^{2\pi} -\sin(n+1)t + j \cos(n+1)t dt = \\ &\left\{ \begin{array}{l} \text{pro } n = -1 : [t]_0^{2\pi} = 2j\pi, \\ \text{pro } n \neq -1 : \frac{r^{n+1}}{n+1} [\cos(n+1)t + j \sin(n+1)t]_0^{2\pi} = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

□

2.  $f(z) = e^z$ ,  $\Gamma$  je lomená čára spojující body  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = 1 + j\pi$ .

**Řešení.** Lomená čára zcela jistě splňuje předpoklady pro použití vztahu (3.29). Za  $\Gamma_1$  budeme považovat úsečku spojující body  $z_1 = 2$  a  $z_2 = 1$  a za  $\Gamma_2$  úsečku spojující body  $z_2 = 1$  a  $z_3 = 1 + j\pi$ . Pro výpočet integrálu potřebujeme následující údaje:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1 : z(t) = 2 - t & \Gamma_2 : z(t) = 1 + j\pi t \\ \alpha_1, \beta_1 : \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1 & \alpha_2, \beta_2 : \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1 \\ z'(t)dt : dz = -dt & z'(t)dt : dz = j\pi dt. \end{array}$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} e^z dz &= \int_0^1 e^{2-t}(-1)dt + \int_0^1 e^{1+j\pi t} j\pi dt = \\ &= e^2 \int_0^1 -e^{-t} dt + j\pi e \int_0^1 (\cos(\pi t) + j \sin(\pi t)) dt = \\ &= e^2 [e^{-t}]_0^1 + j\pi e [\sin(\pi t)/\pi - j \cos(\pi t)/\pi]_0^1 = e - e^2 + e(-1 - 1) = -e^2 - e. \end{aligned}$$

□

Ve speciálních případech je možné výpočet integrálu uskutečnit i jiným postupem než poskytuje Věta 3.34. Motivací pro další úvahy je aplikace substituce při výpočtu určitého integrálu, jejíž „mechanické“ použití vede k domněnce, že hodnota integrálu nezávisí na konkrétní křivce, ale pouze na počátečním a koncovém bodě křivky. Tato je ekvivalentní tvrzení, že hodnota integrálu po uzavřené křivce je nulová, což obecně neplatí, viz Příklad 3.36. Připomeňme, že v Odstavci 3.1.3 byl zaveden pojem jednoduše souvislé oblasti. Příkladem jednoduše souvislé oblasti je otevřený kruh  $U_\varepsilon(z_0)$ , prstenec  $P_\varepsilon(z_0)$  je příkladem oblasti, která není jednoduše souvislá. Tento pojem je podstatný pro formulaci tzv. Cauchyho fundamentální věty.

**Věta 3.37 (Cauchy).** *Nechť je dána funkce  $f(z)$ , která je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti  $\Omega$ . Pak pro její integrál po každé uzavřené křivce  $\Gamma$ , která leží v  $\Omega$  platí*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (3.31)$$

Důkaz této věty, která má mnoho významných důsledků, je z důvodu jeho rozsáhlosti vynechán a zájemce jej nalezne např. [11, str. 126-128].

Poznamenejme, že „opačné“ tvrzení je předmětem tzv. Morerovy věty:

**Věta 3.38.** *Nechť  $f(z)$  je konečná a spojitá funkce na otevřené množině  $M \subseteq \mathbb{C}$ . Pak funkce  $f(z)$  je holomorfní na množině  $M$  právě když, platí*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (3.32)$$

pro každou Jordanovu křivku  $\Gamma$ , pro niž je  $\overline{\text{int } \Gamma} \subset M$ .

Uvedme jako první důsledek Cauchyho fundamentální věty větu o nezávislosti na integrační cestě.

**Věta 3.39.** *Nechť  $D \subseteq \mathbb{C}$  je jednoduše souvislá oblast a nechť  $f(z)$  je holomorfní na oblasti  $D$ . Nechť  $z_1, z_2$  jsou libovolné dva body  $D$  a  $\Gamma_1, \Gamma_2$  křivky se stejným počátečním bodem  $z_1$  a koncovým bodem  $z_2$ . Potom platí*

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz. \quad (3.33)$$

**Důkaz.** Tvrzení věty plyne ze skutečnosti, že součet křivky  $\Gamma_1$  s opačně orientovanou křivkou  $\Gamma_2$  je uzavřená křivka a podle (3.30), (3.29) a Cauchyho věty platí  $\int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz = 0$ .  $\square$

Tato skutečnost umožňuje definovat k holomorfní funkci  $f(z)$  v jednoduše souvislé oblasti  $\Omega$  funkci  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$  jako křivkový integrál po libovolné křivce. Tato funkce je funkcí horní meze integrálu a podobně jako v reálné analýze lze odvodit následující tvrzení.

**Věta 3.40.** *Bud'  $\Omega$  jednoduše souvislá rovinná oblast a  $f(z)$  holomorfní funkce. Potom pro každý pevně zvolený bod  $z_0 \in \Omega$  funkce definovaná tak, že*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$$

*má derivaci  $F'(z) = f(z)$ .*

Říkáme, že funkce  $F(z)$  je **primitivní funkcí** k funkci  $f(z)$ , neboť platí  $F'(z) = f(z)$ . Primitivní funkce není určena k funkci  $f(z)$  jednoznačně a vzájemně se liší až na aditivní konstantu. Obdobně jako pro funkce reálné proměnné lze dokázat analogii Newton-Leibnizovy formule.

**Věta 3.41.** *Nechť funkce  $f(z)$  je spojitá a má primitivní funkci  $F(z)$  v jednoduše souvislé oblasti  $\Omega$ . Nechť dále  $\Gamma$  je libovolná po částech hladká orientovaná křivka s počátečním bodem  $z_1$  a koncovým bodem  $z_2$  ležící v  $\Omega$ . Pak hodnota integrálu  $\int_{\Gamma} f(z)dz$  nezávisí na tvaru křivky  $\Gamma$  ale pouze na jejích krajních bodech a platí*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1). \quad (3.34)$$

Poznamenejme, že pomocí této věty je možné zjednodušit výpočet integrálů z holomorfních funkcí, viz Příklad 3.36, 2), kde je počítán integrál z funkce  $e^z$ :

$$\int_{\Gamma} e^z dz = \int_2^{1+j\pi} e^z dz = [e^z]_2^{1+j\pi} = e(\cos \pi + j \sin \pi) - e^2 = -e^2 - e.$$

Na Příklad 3.36, 1) uvedenou větu pro  $n \leq -1$  nelze použít, protože křivka  $\Gamma$  je uzavřená a Cauchyho fundamentální větu nelze použít, neboť funkce je v bodě 0 není holomorfní a navíc tento bod leží uvnitř kružnice  $\Gamma$ . Situaci budeme dále ilustrovat na příkladech.

**Příklad 3.42.** *Výpočet integrálu komplexní funkce*

Vypočtete následující integrály  $\int_{\Gamma} f(z)dz$ , je-li dáno:

1.  $f_1(z) = \sin z$ ,  $\Gamma(t) = \pi(2 \sin t - 1 + j2 \sin 2t)$  pro  $t = \langle 0, 3\pi/2 \rangle$ .

**Řešení.** Vzhledem k tomu, že funkce  $f_1(z) = \sin z$  je na celém oboru  $\mathbb{C}$  spojitá a holomorfní a  $\Gamma_1$  je rektifikovatelná křivka, existuje integrál a můžeme použít Větu 3.41. S využitím zákona permanence pravidel pro derivování funkcí komplexní proměnné dostáváme:

$$\int_{\Gamma_1} \sin z dz = \int_{\Gamma_1(0)}^{\Gamma_1(3\pi/2)} \sin z dz = -\left[\cos z\right]_{-\pi}^{-3\pi} = 0.$$

□

2.  $f_2(z) = 1/z$ ,  $\Gamma_2$  je úsečka z bodu  $z_1 = -1 + j$  do bodu  $z_2 = 1 + j$  tj. např.  $\Gamma(t) = 2t - 1 + j$ , kde  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

**Řešení.** Přestože funkce  $f(z) = \frac{1}{z}$  není holomorfní v bodě 0 můžeme použít Větu 3.41. Zvolíme-li za oblast  $\Omega$  okolí bodu  $2j$  o poloměru  $\sqrt{3}$ , platí, že daná křivka patří do  $\Omega$  a jediný bod 0, kde funkce  $1/z$  není holomorfní, do  $\Omega$  nepatří. Můžeme tedy Větu 3.41 v oblasti  $\Omega$  použít. Musíme však vhodně zvolit primitivní funkci, kterou je logaritmus. Můžeme zvolit hlavní hodnotu  $\text{Ln } z$ , neboť ta není holomorfní pouze na záporné části reálné osy a tedy v oblasti  $\Omega$  je holomorfní.

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{-1+j}^{1+j} \frac{1}{z} dz = \left[\text{Ln } z\right]_{-1+j}^{1+j} = \ln \sqrt{2} + j\frac{\pi}{4} - \left(\ln \sqrt{2} + j\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}j$$

□

**Poznámka 1.** Pro integrál sestavený z funkce v Příkladě 3.42, 2. a křivky z Příkladu 3.42, 1. by výše uvedené výpočty nesplňovaly podmínky Věty 3.41, protože není možné nalézt jednoduše souvislou oblast  $\Omega$  obsahující křivku  $\Gamma_1$ , na níž bude funkce  $f_2(z) = 1/z$  holomorfní. Křivka  $\Gamma(t) = \pi(2 \sin t - 1 + j2 \sin 2t)$  pro  $t \in \langle 0, \pi \rangle$ , která je částí křivky  $\Gamma_1$  je uzavřená, neboť  $\Gamma(0) = -\pi$  a  $\Gamma(\pi) = -\pi$ . Navíc bod 0, ve kterém funkce  $f_2(z) = 1/z$  není holomorfní je vnitřním bodem oblasti ohraničené křivkou  $\Gamma(t)$ . Což plyne z nerovností,  $2 \sin 2t > 0$  pro  $t \in (0, \pi/2)$  a tedy  $[\Gamma(t)]$  leží v horní polorovině Gaussovy roviny a pro  $t \in (\pi/2, \pi)$  platí  $2 \sin 2t < 0$  a tedy  $[\Gamma(t)]$  leží v dolní polorovině Gaussovy roviny. Protože je navíc platí  $\Gamma(0) = -\pi$  a  $\Gamma(\pi/2) = \pi$ , je bod 0, který je středem úsečky  $\langle -\pi, \pi \rangle$  vnitřním bodem oblasti ohraničené křivkou  $\Gamma(t)$ .

**Věta 3.43.** *Nechť je funkce  $f(z)$  holomorfní uvnitř uvnitř  $n$ -násobně souvislé oblasti  $\Omega$  a spojitá na jejím uzávěru. Nechť je hranice oblasti  $\Omega$  tvořena stejně orientovanými Jordanovými křivkami  $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ , takovými že křivky  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$  leží uvnitř křivky  $\Gamma$ . Potom platí*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\Gamma_i} f(z) dz \quad (3.35)$$

Pomocí této věty můžeme výpočet integrálu z Poznámky 1 tj.  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$  nahradit integrálem po kružnici se středem v počátku s dostatečně malým poloměrem  $r$ , aby celá kružnice ležela ve vnitřku křivky  $\Gamma$ . Tento integrál je spočítán v Příkladu 3.36, 1. pro  $n = -1$ .



Protože křivka  $\Gamma$  je záporně orientována a kružnice v uvedeném příkladě je kladně orientována celkově dostáváme  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = -2j\pi$ . Integrály tohoto typu se zabývají následující věty.

**Věta 3.44 (Cauchyho vzorec).** *Nechť funkce  $f(z)$  je holomorfní uvnitř Jordanovy křivky  $\Gamma$  a navíc je spojitá a konečná na křivce  $\Gamma$ , která je kladně orientovaná. Potom pro každý bod  $z_0$ , který leží uvnitř křivky  $\Gamma$  platí:*

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j f(z_0). \quad (3.36)$$

**Důkaz.** Pro libovolný pevně zvolený bod  $z$  ležící uvnitř křivky  $\Gamma$ ,  $z \in D = \text{int } \Gamma$  definujeme funkci  $g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z; \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$ . Neboť funkce  $g(\zeta)$  je v oblasti  $D$  holomorfní (s případnou výjimkou bodu  $z$  kde je spojitá), lze s využitím Cauchyho integrální věty odvodit  $\int_{\Gamma} g(\zeta) d\zeta = 0$ . Z čehož plyne tvrzení věty:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi j f(z).$$

Při výpočtu posledního integrálu jsme použili Příklad 3.36, 1. pro  $n = -1$ . □

Splňuje-li funkce  $f(z)$  předpoklady Věty 3.44 existují integrály  $g_n(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$ , pro které je možné odvodit vztah

$$g'_n(z) = \frac{d}{dz} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \left( \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} \right) d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{nf(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = n g_{n+1}(z),$$

který spolu s Větou 3.44 umožňuje obecnější formulaci předchozí věty.

**Věta 3.45 (Cauchyho vzorec pro  $n$ -tou derivaci).** *Nechť funkce  $f(z)$  je holomorfní uvnitř Jordanovy křivky  $\Gamma$  a navíc je spojitá a konečná na křivce  $\Gamma$ , která je kladně orientovaná. Potom pro každý bod  $z$ , který leží uvnitř křivky  $\Gamma$  má tato funkce derivace všech řádů a platí:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (3.37)$$

Tato věta spolu s Větou 3.43 umožňuje výpočet integrálů po uzavřených křivkách z funkcí typu  $\frac{f(z)}{P(z)}$ , kde funkce  $f(z)$  je holomorfní a  $P(z)$  je polynom, neboť v komplexním oboru lze každý polynom rozložit na součin lineárních polynomů. Potom lze integrál po uzavřené křivce nahradit součtem integrálů po křivkách, které budou obsahovat pouze jeden kořen polynomu ve jmenovateli uvažované funkce a který je vnitřním bodem křivky. Tyto integrály lze spočítat pomocí Věty 3.44.

**Příklad 3.46.** Pomocí Cauchyho vzorce vypočtete  $\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2}$ , je-li  $\Gamma$  kladně orientovaná kružnice se středem  $2j$  o poloměru 3.

**Řešení.** Polynom lze rozložit  $z(z^2 + 4)^2 = z(z + 2j)^2(z - 2j)^2$ . V křivce  $\Gamma$ , což je kružnice daná rovnicí  $|z - 2j| = 3$  leží dva kořeny jmenovatele  $z = 0$  a  $z = 2j$ , neboť  $|0 - 2j| = 2 < 3$  a  $|2j - 2j| = 0 < 3$ , ale  $|-2j - 2j| = 4 > 3$ . Můžeme tedy volit dvě křivky  $\Gamma_1$  jako kružnici se středem v bodě 0 o poloměru 1/2 a křivku  $\Gamma_2$  jako kružnici se středem v bodě  $2j$  o poloměru 1 takové, že podle Věty 3.43 platí:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2}.$$

V prvním integrálu je funkcí  $f(z)$  použitou ve Větě 3.44 funkce  $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 4)^2}$  a bodem  $z_0 = 0$ , tedy  $f(0) = \frac{1}{16}$ .

V druhém integrálu uijeme Větu 3.45 kde  $f(z) = \frac{e^z}{z(z + 2j)^2}$ ,  $n = 1$  a bodem  $z_0 = 2j$ , tedy  $f'(z) = \frac{e^z(z^2 + z(-3 + 2j) - 2j)}{z^2(z + 2j)^3}$  a  $f'(2j) = \frac{e^{2j}(-1 + j)}{32}$ . Celkově tedy dostáváme

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = 2\pi j \left( \frac{1}{16} + e^{2j} \frac{-1 + j}{32} \right).$$

□

Význam této Věty 3.45 spočívá ve skutečnosti, že funkce holomorfní v nějaké oblasti má derivace všech řádů a je možno očekávat její rozvoj v Taylorovu řadu.

### 3.9 Řady v komplexním oboru a singulární body

**Věta 3.47.** *Nechť funkce  $f(z)$  je holomorfní v bodě  $z_0$ . Pak existuje otevřený kruh  $U(z_0, R)$  ( $R > 0$ ) takový, že pro každý bod  $z \in U(z_0, R)$  platí:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ kde } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (3.38)$$

kde  $\Gamma_r = z_0 + re^{jt}$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$  je kladně orientovaná kružnice se středem  $z_0$  o poloměru  $r$ , pro který platí  $0 < r < R$ .

Také naopak platí, že každá konvergentní mocninná uvnitř kruhu  $U(z_0, R)$ , má zde součet, který je holomorfní funkcí a její derivace můžeme získat jako součty odpovídajících derivací dané mocninné řady (součet můžeme derivovat „člen po členu“ podobně jako v reálném oboru).

Uvedené integrální vzorce (3.38) jsou platné, ale v mnohých případech je možné Taylorovu řadu získat i jiným postupem.

**Příklad 3.48.** Rozviňte racionálně lomenou funkci  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$  v Taylorovu řadu se středem  $z_0 = 0$ .

**Řešení.** Danou funkci lze rozložit na součet dvou zlomků

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}}.$$

Oba zlomky je možné vyjádřit jako součet vhodné geometrické řady  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ,

$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ . Celkově dostáváme Taylorův rozvoj, který konverguje pro  $|z| < 1$ :

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n.$$

□

Povšimněme si, že uvedenou funkci je možné vyjádřit jako součet řady i v dalších oblastech komplexní roviny.

**1 < |z| < 2** upravíme první zlomek na tvar:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1},$$

neboť takto upravený zlomek je součtem geometrické řady a kvocientem  $\frac{1}{z}$ . Celkově dostáváme:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n.$$

Poznamenejme, že první geometrická řada konverguje pro  $1 < |z|$  a druhá pro  $|z| < 2$ .

**2 < |z|:** abychom i druhý zlomek mohli v této oblasti interpretovat jako součet geometrické řady upravíme jej:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{2}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$$

a celkově dostáváme rozvoj

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{2}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1 + 2^{-n}) z^n,$$

Zobecnění podobných úvah vede k zavedení pojmu Laurentův rozvoj funkce.

**Definice 3.49.** Nechť  $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ , kde  $n$  je celé číslo. Potom výraz

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.39)$$

nazýváme **Laurentovou řadou se středem v bodě**  $z_0$  a říkáme, že **řada konverguje** v bodě  $z$ , jestliže konvergují současně obě řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

První, resp. druhá řada se nazývá **regulární část**, resp. **hlavní část** Laurentovy řady a její **součtem** je součet obou jejích částí.

**Věta 3.50.** *Nechť je funkce  $f(z)$  holomorfní na prstenci  $P_{rR}(z_0)$ . Pak pro každé  $z$  ležící v tomto prstenci, lze funkci  $f(z)$  vyjádřit jako součet Laurentovy řady*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (3.40)$$

pro jejíž koeficienty platí  $a_n$ , kde  $n \in \mathbb{Z}$  platí:

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (3.41)$$

kde  $\Gamma$  je libovolná kružnice se středem v bodě  $z_0$  a poloměrem  $\bar{r}$  takovým, že  $r < \bar{r} < R$ .

Opačnou implikací se zabývá následující věta.

**Věta 3.51.** *Nechť je v mezikruží  $0 \leq r < |z - z_0| < R$  dána funkce  $f(z)$  jako součet řady (3.40), pak je v množině  $P_{rR}(z_0)$  holomorfní a pro její koeficienty platí (3.41).*

### 3.9.1 Singulární body a jejich klasifikace

**Definice 3.52.** Nechť je  $f(z)$  holomorfní funkce v prstencovém okolí  $P_r(z_0)$  bodu  $z_0$  a současně není holomorfní v bodě  $z_0$ . Potom říkáme, že bod  $z_0$  je **izolovaným singulárním bodem** funkce  $f(z)$ .

Poznamenejme, že ne každý singulární bod je izolovaným singulárním bodem. Například bod 0 není izolovaným bodem jakékoli jednoznačné větve funkce  $\sqrt{z}$ . Pro izolované singulární body platí modifikace L'Hospitalova pravidla.

**Věta 3.53 (L'Hospitalovo pravidlo).** *Nechť funkce  $f(z)$ ,  $g(z)$  jsou holomorfní na prstencovém okolí  $P_r(z_0)$  ( $r > 0$ ) navíc jsou bodě  $z_0$  spojité a platí  $f(z_0) = 0$ ,  $g(z_0) = 0$ , potom existují obě následující limity a platí:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (3.42)$$

### Klasifikace singulárních bodů funkce $f(z)$

Pro izolovaný singulární bod  $z_0$  nastane právě jedna ze tří následujících možností

1. Hlavní část Laurentova rozvoje je v prstencovém okolí identicky rovna 0, potom existuje konečná limita  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  a po dodefinování funkční hodnoty  $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  je funkce v tomto bodě holomorfní. V tomto případě hovoříme o **odstranitelné singularitě**.
2. Hlavní část Laurentova rozvoje má v prstencovém okolí pouze konečný počet nenulových koeficientů  $a_n \neq 0$  a platí  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ . Singulární bod potom nazýváme **pólem** a absolutní hodnota nejmenšího indexu nenulového koeficientu hlavní části Laurentova rozvoje se nazývá **řád pólu**.
3. Hlavní část Laurentova rozvoje má v prstencovém okolí nekonečný počet nenulových koeficientů  $a_n \neq 0$  a potom k libovolně zvolenému číslu  $L \in \mathbb{S}$  lze nalézt posloupnost  $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$  takovou, že platí  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$  a současně  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = L$ . V tomto případě hovoříme o **podstatné singularitě**.

**Příklad 3.54.** Pro uvedené funkce určete izolované singulární body a pomocí Laurentova rozvoje proveďte jejich klasifikaci

1.  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

**Řešení.** Funkce  $\sin z$  je definována jako řada  $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$  celkově je Lau-

rentův rozvoj ve tvaru  $\frac{\sin z}{z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$  a bod  $z = 0$  je odstranitelnou singularitou, a po dodefinování  $f(0) = 1$  dostaneme holomorfní funkci.  $\square$

2.  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4}$

**Řešení.** Funkce  $\cos z$  je definována jako řada  $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ . Laurentův rozvoj odvodíme ve tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos z}{z^4} &= \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}{z^4} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n)!}}{z^4} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-4}}{(2n)!} = \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-4}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

Nejmenší nenulový koeficient (pro  $n = 1$ ) je  $a_{-2} = \frac{1}{2}$ , proto je bod  $z = 0$  pólem druhého řádu.  $\square$

$$3. f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

**Řešení.** Funkce  $e^z$  je definována jako řada  $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$  Laurentův rozvoj dané funkce dostaneme substitucí  $t = \frac{1}{z^2}$ :

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^{2n}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^{2n}} + \dots, \quad (3.43)$$

tedy bod  $z = 0$  je podstatnou singularitou.  $\square$

Nalézt Laurentův rozvoj je v některých případech technicky náročné např. pro převrácenou hodnotu funkce z Příkladu 3.54, 1., proto klasifikování singulárních bodů na základě detailní znalosti Laurentova rozvoje nahradíme pro funkce ve tvaru zlomku jiným postupem. K jeho uskutečnění je nutné zavedení pojmu nulového bodu holomorfní funkce a jeho násobnosti.

**Definice 3.55.** Buď  $f(z)$  holomorfní funkce v okolí  $U(z_0)$  bodu  $z_0$  a současně  $f(z_0) = 0$ . Potom říkáme, že bod  $z_0$  je **nulovým bodem** funkce  $f(z)$ . Řekneme, že nulový bod  $z_0$  je **n-násobným** nulovým bodem, jestliže platí

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0. \quad (3.44)$$

Pro bod  $z_0$ , který není nulový zavedeme násobnost 0.

Z existence Taylorovy řady holomorfní funkce  $f(z)$  plyne následující tvrzení.

**Věta 3.56.** Bod  $z_0 \in \mathbb{C}$  je *n-násobným nulovým bodem holomorfní funkce  $f(z)$  právě když, v nějakém okolí  $U(z_0)$  lze funkci  $f(z)$  vyjádřit ve tvaru*

$$f(z) = (z - z_0)^n F(z), \quad (3.45)$$

kde funkce  $F(z)$  je v bodě  $z_0$  holomorfní a nenulová.

**Důsledek 3.57.** *Nechť je dána funkce  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , která podílem holomorfních funkcí.*

*Potom má funkce  $f(z)$  singulární body (nejsou podstatnými singularitami) pouze v nulových bodech  $z_0$  funkce  $\psi(z)$ . Je-li  $q$  násobnost nulového bodu  $z_0$  funkce  $\psi(z)$  větší než  $p$  násobnost nulového bodu  $z_0$  funkce  $\varphi(z)$  ( $q > p$ ) je tento bod pólem, jehož řád je roven rozdílu  $q - p$  v opačném případě je ve zkoumaném bodě  $z_0$  odstranitelná singularita.*

Výše uvedený postup budeme ilustrovat na prvních dvou funkcích (třetí není ve tvaru zlomku) Příkladu 3.54.

Uvažme funkci  $f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ . Obě funkce mají bod  $z = 0$  nulovým bodem násobnosti 1, tedy uvažovaný rozdíl je 0 a v bodě  $z_0 = 0$  je odstranitelná singularita.

Pro funkci  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$  dostáváme v bodě  $z = 0$ :

$\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(z) = \sin z \Rightarrow \varphi'(0) = 0$ ,  $\varphi''(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$ , což znamená, že funkce  $\varphi(z)$  má bod  $z_0 = 0$  nulovým bodem násobnosti 2. Funkce  $\psi(z) = z^4$  má bod  $z_0 = 0$  nulovým bodem násobnosti 4. Proto určíme, že bod  $z_0 = 0$  je pólem násobnosti  $4 - 2 = 2$ .

### 3.10 Rezidua a jejich užití

Ze vzorců (3.41) vyplývá, že koeficient  $a_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz$  úzce souvisí s hodnotou integrálu po uzavřené kladně orientované křivce obsahující bod  $z_0$ . Zavádíme proto pojem:

**Definice 3.58.** Nechť je dána funkce  $f(z)$  a její rozvoj do Laurentovy v prstencovém okolí bodu  $z_0$  ve tvaru  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ . Koeficient  $a_{-1}$  v tomto rozvoji nazýváme **reziduum** funkce  $f(z)$  v bodě  $z_0$  a píšeme  $\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$ .

Předchozí úvaha spolu s Větou 3.43 umožňují odvodit následující větu:

**Věta 3.59 (reziduová, Cauchy).** Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  je jednoduše souvislá oblast a  $\Gamma$  Jordanova uzavřená kladně orientovaná křivka ležící v této oblasti. Vnitřek množiny ohraničené křivkou  $\Gamma$  označíme  $\Gamma^\circ$ . Nechť komplexní funkce  $f(z)$  je holomorfní uvnitř oblasti  $\Omega$ , s případnou s výjimkou konečného počtu bodů  $z_1, z_2, \dots, z_n$  z nichž žádný neleží na křivce  $\Gamma$ . Pak platí:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{z_k \in \Gamma^\circ} \operatorname{rez}_{z=z_k} f(z). \quad (3.46)$$

K „efektivnímu“ využití uvedené věty potřebujeme určovat rezidua i jiným způsobem než pomocí integrálu jak je reziduum definováno. K nalezení tohoto postupu využijeme Laurentova rozvoje funkce.

Odtud bezprostředně plyne, že pro bod  $z_0$ , který je odstranitelnou singularitou funkce  $f(z)$  platí  $\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = 0$ . Pro singulární bod, který je pólem, platí:

**Věta 3.60.** Nechť je dána funkce  $f(z)$ , která má v bodě  $z_0$  pól řádu  $m$ . Potom platí:

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]. \quad (3.47)$$

Jedná-li se o pól prvního řádu, pak se daný vzorec zjednoduší na tvar:

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z), \quad (3.48)$$

**Důkaz.** Funkce, která má v bodě  $z_0$  pól řádu  $m$ , má Laurentův rozvoj se středem v tomto bodě ve tvaru:

$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ . Vynásobením tohoto rozvoje výrazem  $(z-z_0)^m$  dostáváme funkci

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-z_0)^{k+m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m}(z-z_0)^k,$$

kteřá má v tomto bodě odstranitelnou singularitu. Po spojitým dodefinování získáme funkci holomorfní, kterou můžeme  $m-1$ -krát derivovat.

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=m-1}^{\infty} a_{k-m} \cdot k \cdot (k-1) \dots (k-m+2) (z-z_0)^{k-m+1}.$$

Všechny členy v nekonečné řadě kromě prvního mají nulovou hodnotu pro  $z = z_0$  a tedy platí:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = a_{-1} \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots 1,$$

což dokazuje tvrzení věty.  $\square$

V případě pólů prvního řádu, nazývaných také prosté póly, můžeme výpočet reziduí u funkce, která je podílem dvou holomorfních funkcí realizovat, pomocí následující věty.

**Věta 3.61.** *Nechť  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , kde funkce  $\varphi(z)$  a  $\psi(z)$  jsou holomorfní v bodě  $z_0$  a platí  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$ ,  $\psi'(z_0) \neq 0$ . Pak má funkce  $f(z)$  v bodě  $z_0$  pól prvního řádu a reziduum lze určit ze vzorce*

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (3.49)$$

**Příklad 3.62.** Vypočtěte rezidua funkce  $f(z)$

$$1) f(z) = \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2}$$

**Řešení.** Funkce je ve tvaru podílu holomorfních funkcí, proto jejími singulárními body jsou nulové body funkce ve jmenovateli.

Bod  $z = 0$  je pól prvního řádu a  $z = \pm 2j$  jsou póly druhého řádu a můžeme použít vzorec (3.47). Pro reziduum  $z = 0$  je  $m = 1$ :

$$\operatorname{rez}_{z=0} \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^z}{z(z^2 + 4)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{16}.$$

Pro rezidua  $z = \pm 2j$  je  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rez}_{z=\pm 2j} \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2} &= \lim_{z \rightarrow \pm 2j} \left( \frac{(z \mp 2j)^2 e^z}{z(z^2 + 4)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow \pm 2j} \left( \frac{e^z}{z(z \pm 2j)^2} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm 2j} \frac{e^z(z^2 + (-3 \pm 2j)z \mp 2j)}{z^2(z \pm 2j)^3} = \frac{-1 \pm j}{32} e^{\pm 2j}, \end{aligned}$$

$\square$

$$2) f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4}$$

**Řešení.** Funkce je ve tvaru podílu holomorfních funkcí, proto jejím singulárním bodem je nulový bod funkce ve jmenovateli  $z = 0$ , který je pól druhého řádu. Toto plyne z faktu  $z = 0$  je nulový bod funkce  $1 - \cos z$  druhého řádu a nulový bod řádu 4 funkce  $z^4$  a můžeme použít vzorec (3.47), kde  $z_0 = 0$  je  $m = 2$ :

$$\operatorname{rez}_{z=0} \frac{1 - \cos z}{z^4} = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos z}{z^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z + 2 \cos z - 2}{z^3}$$

Při výpočtu této limity uijeme opakovaně L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z + 2 \cos z - 2}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos z - \sin z}{3z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z \sin z}{6z} = 0.$$



Poznamenejme, že výsledek je ve shodě s definicí rezidua a Laurentovým rozvojem této funkce viz Příklad 3.54 2.  $\square$

$$3) f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

**Řešení.** Funkce  $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$  má póly prvního řádu v nulových bodech funkce  $\cos z$ , které určíme ze vztahu  $\cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y$  viz (3.14) kde využijeme vztahy pro reálné hyperbolické funkce  $\cosh y > 0$ ,  $\sinh y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \Re \cos(x + jy) = \cos x \cosh y \Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 0 &= \Im \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi + jy\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \sinh y = (-1)^k \sinh y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sinh y = 0 \Leftrightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Tedy nulové body komplexní funkce  $\cos z$  jsou stejné jako nulové body reálné funkce  $\cos x$ , tj.  $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$  a funkce  $\operatorname{tg} z$  má spočetně mnoho singulárních pólů prvního řádu. K výpočtu reziduí v těchto pólech je vhodné použít vzorec (3.49):

$$\operatorname{rez}_{z=\pi/2+k\pi} \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{(\cos z)'} \Big|_{z=\pi/2+k\pi} = \frac{\sin(\pi/2 + k\pi)}{-\sin(\pi/2 + k\pi)} = -1.$$

$\square$

Reziduí je možné využít při výpočtu integrálu z funkce komplexní proměnné s izolovanými singulárními body po uzavřené křivce. K tomuto výpočtu použijeme Cauchyho reziduovou Větu 3.59. Postup předvedeme na příkladě.

**Příklad 3.63.** Vypočtete následující integrály pomocí reziduí podle Věty 3.59.

$$1. \int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2}, \text{ je-li } \Gamma \text{ kladně orientovaná kružnice se středem } 2j \text{ o poloměru } 3.$$

Tento integrál je ve textu již spočítaný viz Příklad 3.46.

**Řešení.** Podobně jako v citovaném příkladě je třeba určit singulární body funkce  $\frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2}$ , jimiž jsou  $z = 0$ ,  $z = \pm 2j$ . Uvnitř křivky  $\Gamma$  jsou body vyhovující rovnici  $|z - 2j| < 3$ . Body  $z = 0$  a  $z = 2j$  jsou uvnitř, neboť  $|0 - 2j| = 2 < 3$  a  $|2j - 2j| = 0 < 3$ , naopak bod  $z = -2j$  leží vně kružnice, protože  $|-2j - 2j| = 4 > 3$ . Proto užitím Věty 3.59 dostáváme

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4)^2} = 2\pi j \left( \operatorname{rez}_{z=0} \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2} + \operatorname{rez}_{z=2j} \frac{e^z}{z(z^2 + 4)^2} \right) = 2\pi j \left( \frac{1}{16} + \frac{-1 + j}{32} e^{2j} \right).$$

Poznamenejme, že výše uvedená rezidua byla vypočtena v Příkladu 3.62  $\square$

$$2. \int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz, \text{ kde kružnice } |z| = 1 \text{ je záporně orientována.}$$

**Řešení.** I v případě, že křivka je záporně orientována je možné použít Větu 3.59 a opačnou orientaci křivky kompenzovat změnou znaménka integrálu. V daném případě má funkce  $\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$  jediný singulární bod  $z = 0$ , který je vnitřním bodem křivky. Reziduum v tomto bodě určíme z Laurentova rozvoje (3.43) v Příkladě 3.54, jako koeficient  $a_{-1} = \operatorname{rez}_{z=0} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0$ , tedy  $\int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0$ .  $\square$

### 3.10.1 Užití reziduí při výpočtu reálných integrálů

Integrálů funkce komplexní proměnné je možné využít při výpočtu některých typů určitých nebo nevlastních integrálů reálné funkce. Důvodem je minimálně zjednodušení jejich výpočtu. Situaci budeme ilustrovat pouze na některých typech.

**Výpočet integrálů typu**  $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$ .

Funkce  $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$  je racionální funkcí, která splňuje podmínku  $Q(\sin t, \cos t) \neq 0$ , pro  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ , což je ekvivalentní s podmínkou  $Q(x, y) \neq 0$  pro  $x^2 + y^2 = 1$ .

Při výpočtu budeme postupovat tak, že v daném integrálu provedeme substituci  $z = \exp(jt)$ . Tedy  $dz = j \exp(jt) dt \Leftrightarrow dt = \frac{dz}{jz}$  a pomocí vztahů (3.16) dostaneme

$$\sin t = \frac{z - 1/z}{2j} = \frac{z^2 - 1}{2jz}, \quad \cos t = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Tedy celkově nahradíme uvedený integrál integrálem z funkce komplexní proměnné přes kladně orientovanou kružnici se středem v počátku o poloměru 1, který můžeme vyčíslit pomocí Cauchyovy reziduové věty:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2 - 1}{2jz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{dz}{jz} = 2\pi \sum_{\substack{z=z_k \\ |z_k| < 1}} \operatorname{rez}_{z=z_k} \frac{1}{z} R\left(\frac{z^2 - 1}{2jz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right)$$

**Příklad 3.64.** Vypočtete  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos t + 1}$ , kde  $a \neq \pm 1$ .

**Řešení.** Jmenovatel je pro  $a \neq \pm 1$  kladný  $a^2 - 2a \cos t + 1 = (a \sin t)^2 + (a \cos t - 1)^2 > 0$ , tedy funkce v zadaném integrálu splňuje předpoklad o nenulovosti jmenovatele a zadaný integrál je integrálem vlastním. Výše uvedenou substitucí dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos t + 1} &= \int_{\Gamma} \frac{1}{a^2 - 2a \frac{z^2+1}{2z} + 1} \frac{dz}{jz} = \frac{1}{j} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(a^2 + 1)z - a(z^2 + 1)} = \\ &= \frac{1}{j} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(1 - az)(z - a)} = 2\pi \sum_{\substack{z=z_k \\ |z_k| < 1}} \operatorname{rez}_{z=z_k} \frac{1}{(1 - az)(z - a)}. \end{aligned}$$

Funkce  $\frac{1}{(1-az)(z-a)}$  má pouze dva jednoduché póly  $a, 1/a$ , v nichž se rezidua liší pouze znaménkem:

$$\operatorname{rez}_{z=a} \frac{1}{(1-az)(z-a)} = \frac{1}{1-a^2} \quad \operatorname{rez}_{z=1/a} \frac{1}{a(\frac{1}{a}-z)(z-a)} = \frac{-1}{1-a^2}$$

a uvnitř jednotkové kružnice leží pouze jedno reziduum dostáváme pro  $a \neq 0$  (pro  $a = 0$  má evidentně integrál hodnotu  $2\pi$ ) hodnotu integrálu:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos t + 1} = \frac{2\pi \operatorname{sgn}(\ln |a|)}{a^2 - 1} = \begin{cases} \frac{2\pi}{a^2 - 1}, & \text{pro } a > 1; \\ \frac{2\pi}{1 - a^2}, & \text{pro } a < 1. \end{cases}$$

□

Uvedený výpočet je jednodušší než standardní výpočet, který je založen na univerzální substituci  $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$  a vyžaduje rozdělení integračního oboru na dva. To proto, že univerzální substituce je v čísle  $\pi$  nespojitá a navíc oba integrály po provedení substituce jsou nevlastní.

**Výpočet nevlastních integrálů typu**  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ .

Aby i v tomto případě měl uvažovaný integrál (jeho hlavní hodnota) smysl, nemůže být funkce  $f(x)$  libovolná. Situaci popisuje následující věta

**Věta 3.65.** *Nechť je funkce  $f(z)$  holomorfní ve všech bodech komplexní roviny s nezápornou imaginární částí s případnou výjimkou konečného počtu pólů  $z_1, \dots, z_n$  a stejnoměrně platí:  $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi}} z f(z) = 0$ . Potom platí*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x)dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{rez}_{z=z_k} f(z).$$

**Příklad 3.66.** Vypočtěte  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{x^4 + 1}$ .

**Řešení.** Integrál konverguje a integrovaná funkce přesněji její rozšíření do komplexního oboru splňuje předpoklady Věty 3.65, tj.

$$1. \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z^2 + 1)}{z^4 + 1} = 0.$$

2. Funkce  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1}$  je holomorfní s výjimkou prostých pólů, které jsou kořeny rovnice  $z^4 + 1 = 0$ , neboli  $\sqrt[4]{-1} = \{z | z^4 = -1\} = \{z | z = \exp(j\varphi), \text{ kde } 4\varphi = \pi\}$ . Tedy funkce má pouze dva póly s nezápornou imaginární částí  $z_1 = \exp(j\pi/4) = (1 + j)/\sqrt{2}$  a  $z_2 = \exp(j3\pi/4) = (-1 + j)/\sqrt{2}$ .

Obě rezidua určíme pomocí Věty 3.61:

$$\operatorname{rez}_{z=(\pm 1+j)/\sqrt{2}} \frac{z^2+1}{z^4+1} = \frac{z^2+1}{4z^3} \Big|_{z=(\pm 1+j)/\sqrt{2}} = \frac{\frac{1\pm 2j+j^2}{2}+1}{4 \frac{\pm 1+3j\pm 3j^2+j^3}{2\sqrt{2}}} = \frac{1\pm j}{\sqrt{2}(\mp 2+2j)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}j.$$

Pomocí Věty 3.65 vypočteme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1} = 2\pi j 2 \frac{-j\sqrt{2}}{4} = \pi\sqrt{2}.$$

□

## 3.11 Příklady na procvičení

### Cvičení

1. Vypočtete hlavní hodnotu funkční hodnoty:

- a)  $\cos(\pi + j)$ ,
- b)  $\sqrt{-j}$ ,
- c)  $j^{1+j}$ .

2. Ověřte, že daná funkce  $u(x, y)$  resp.  $v(x, y)$  je reálnou resp. imaginární složkou holomorfní funkce  $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ . Funkci  $f(z)$  vyjádřete s využitím uvedené podmínky, navíc uveďte kde je funkce holomorfní:

- a)  $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2y + 1$ ,  $f(j) = 2$
- b)  $v(x, y) = e^{-y} \sin(x) + y$ ,  $f(-j) = e - j$
- c)  $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + 2x$ ,  $f(1) = 3$
- d)  $v(x, y) = \sinh x \sin y$ ,  $f(j) = \cos 1$

3. Vypočtete integrál  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , jsou-li funkce  $f(z)$  a křivka  $\Gamma$  zadány:

- a)  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $\Gamma$  je úsečka od bodu  $A = 1 - 2j$  do bodu  $B = 2 + j$
- b)  $f(z) = \frac{1}{z^2}$ ,  $\Gamma(t) = 1 + t \exp(jt)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
- c)  $f(z) = \operatorname{Ln} z$  (hlavní větev),  $\Gamma$  je horní půlkružnice se středem v počátku od bodu  $A = 1$  do bodu  $B = -1$
- d)  $f(z)$  hlavní větev  $\sqrt{z}$ ,  $\Gamma(t) = \exp(jt)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

4. Rozhodněte o nezávislosti integrál  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  na integrační cestě a s jejím využitím integrál vypočtete, jsou-li funkce  $f(z)$  a křivka  $\Gamma$  zadány:

- a)  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $\Gamma$  je úsečka od bodu  $A = 1 - 2j$  do bodu  $B = 2 + j$ ,

- b)  $f(z) = z \cos jz$ ,  $\Gamma(t) = \frac{\pi}{2}(j + \exp(jt))$ ,  $t \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ ,  
 c)  $f(z) = e^z \cos z$ ,  $\Gamma = t \exp(jt)$ ,  $t \in (0, \pi)$ ,  
 d)  $f(z)$  hlavní větev  $\sqrt{z}$ ,  $\Gamma(t) = \exp(jt)$ ,  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

## Výsledky

1. a)  $\cos(\pi + j) = -\cosh 1$ ,  
 b)  $\sqrt{-j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j)$ ,  
 c)  $j^{1+j} = j \exp(-\frac{\pi}{2})$ .
2. a)  $f(z) = z^2 - 2jz + 1$ ,  
 b)  $f(z) = \exp(jz) + z$ ,  
 c)  $f(z) = \frac{2z^2+1}{z}$ .  
 d)  $f(z) = \cosh z$ .
3. a)  $\frac{j\pi}{2}$ ,  
 b)  $\frac{\pi}{\pi-1}$ ,  
 c)  $2 - j\pi$ ,  
 d)  $-\frac{4}{3}$ .
4. a)  $[\operatorname{Ln} z]_{1-2j}^{2+j} = \frac{j\pi}{2}$ ,  
 b)  $[-\cos(jz) - j \sin(jz)]_0^{\pi j} = 2$ ,  
 c)  $\left[\frac{\exp(z)}{2}(\cos z + \sin z)\right]_0^{-\pi} = -\frac{1}{2}(1 + \exp(-\pi))$ ,  
 d) nelze.

## Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Nalezení funkčních hodnot funkcí komplexní proměnné.](#)
2. [Vykreslení grafů v komplexní rovině funkcí zadaných parametricky.](#)
3. [Určení reálné a imaginární části funkcí komplexní proměnné.](#)
4. [Hledání druhé složky holomorfní funkce.](#)
5. [Určení singulárních bodů funkce komplexní proměnné.](#)
6. [Výpočet reziduí v pólech racionálních lomených funkcí komplexní proměnné.](#)
7. [Kreslení integračních cest funkcí komplexní proměnné.](#)

## 4 Speciální funkce, Fourierovy řady a Fourierova transformace

Úvodem dané kapitoly zavedeme důležitý pojem hojně využívaný při studiu přírodních jevů. Níže uvedený přístup je motivován analogií s definicí iracionálních čísel jako limity čísel racionálních. Poznamenejme, že v literatuře jsou často zobecněné funkce definovány pomocí pojmu funkcionál např. [8].

### 4.1 Diracova zobecněná funkce $\delta(t)$ , zobecněná derivace

Při studiu mnoha přírodních jevů se setkáváme s veličinami, které jsou všude nulové s výjimkou malého časového intervalu  $I$ , ale jejich celková energie (integrál) je kladná. Takový charakter má velká síla působící po velmi krátkou dobu (náraz), velké elektrické proudy působící jen velice krátkou dobu (elektrický impuls), aj. Z věty o střední hodnotě integrálu vyplývá, že funkční hodnoty takovéto funkce musí být uvnitř  $I$  velké a pro konstantní hodnotu integrálu a délku intervalu blížící se nule musí funkční hodnoty růst nade všechny meze.

Matematickou motivací následujících úvah může být nalezení derivace nespojitě funkce. Nejdříve uveďme možný postup pro zavedení derivace spojitě funkce, které nemají v daném bodě derivaci. Takovou funkcí je např. absolutní hodnota  $y = |x|$  v bodě 0. V těchto případech považujeme za derivaci této funkce funkci, jejíž integrál je roven zadané funkci. V tomto smyslu je nespojitá funkce  $\operatorname{sgn}(x)$  derivací funkce  $|x|$ , neboť platí

$$|x| = \int_0^x \operatorname{sgn}(t) dt.$$

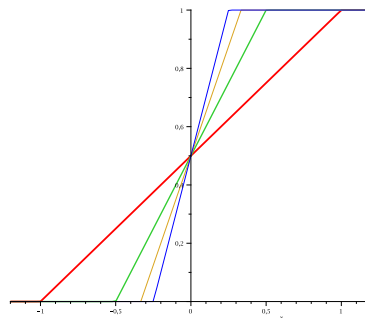
Jako prototyp nespojitě funkce uvažujme Heavisideovu funkci jednotkového skoku  $\eta(t)$ , které je definována:

$$\eta = \begin{cases} 0, & \text{pro } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{pro } x = 0; \\ 1, & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

Funkce  $\eta(t)$  je nespojitá v bodě 0 (bod nespojitosti prvního druhu) bez ohledu na funkční hodnotu pro  $x = 0$ , neboť má funkce  $\eta(t)$  různé jednostranné limity. Pomocí této

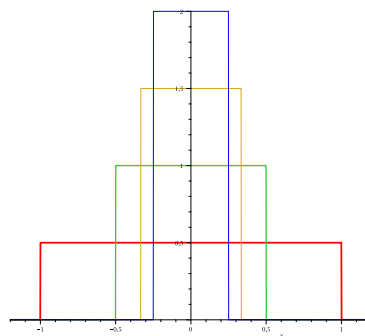
funkce je možné modelovat funkce, které mají v izolovaných bodech nespojitosti prvního druhu (jednostranné limity jsou konečné a nejsou si rovny). Heavisideova funkce je limitou posloupnosti funkcí

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < -1/n; \\ \frac{n}{2} \left(t + \frac{1}{n}\right), & \text{pro } -1/n \leq t \leq 1/n; \\ 1, & \text{pro } 1/n \leq t, \end{cases}$$



které jsou spojité a mají ve výše uvedeném smyslu derivaci:

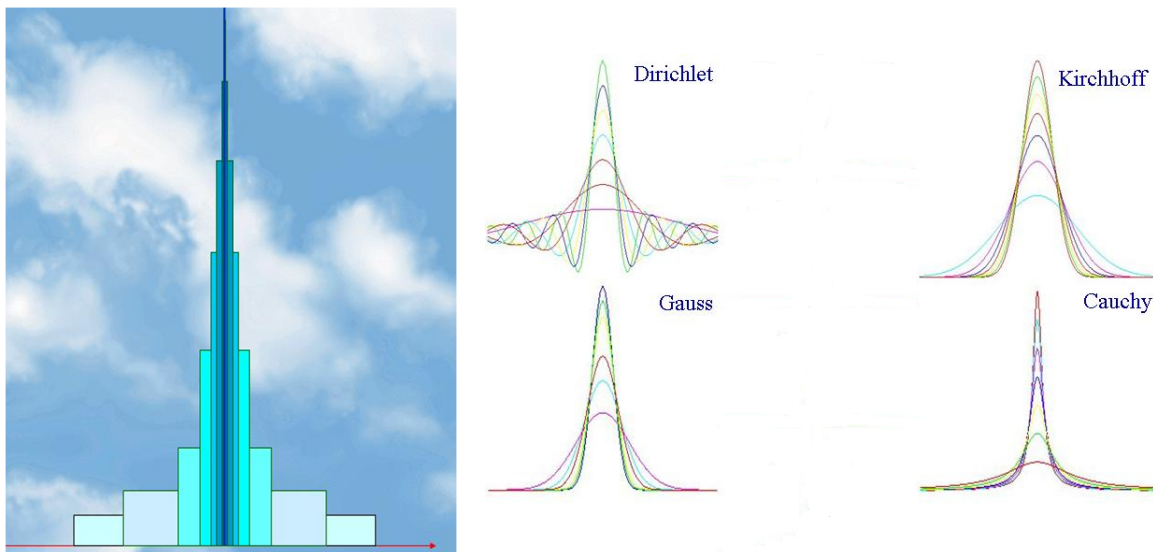
$$F'_n(t) = f_n(t) = \frac{n}{2} \left( \eta\left(t + \frac{1}{n}\right) - \eta\left(t - \frac{1}{n}\right) \right).$$



Provedením obvyklého limitního přechodu pro funkce  $f_n(t)$ , dostaneme funkci nulovou s výjimkou jednoho bodu s neohrazenou funkční hodnotou ( $f(0) = \infty$ ). Integrál z takovéto funkce je ovšem nulový a tedy výše naznačený postup je nevyhovující. Budeme postupovat podobně jako u reálných čísel, kdy iracionální čísla chápeme jako limitu posloupnosti čísel racionálních blížících se k danému iracionálnímu číslu. Příkladem mohou být různé „definice“ čísla e:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Podobně posloupnost obdélníkových kmitů  $f_n(t)$  není jedinou posloupností funkcí, které jsou derivací funkcí majících za limitu Heavisideovu funkci jednotkového skoku. Stručně jsou uvedeny grafy některých dalších možných posloupností funkcí:



Uvedená nejednoznačnost těchto posloupností je důvodem k zobecnění, proto zavedeme pojem jehlové funkce.

**Definice 4.1.** Spojitou, příp. po částech spojitou funkci,  $\delta(t, \lambda)$  argumentu  $t$  závislou na parametru  $\lambda$  nazveme jehlovou funkcí jestliže platí:

1.  $\delta(t, \lambda) = 0$  pro  $|t| > \lambda$ ;
2.  $\delta(t, \lambda) \geq 0$  pro  $|t| < \lambda$ ;
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \lambda) dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t, \lambda) dt = 1$ .

Uvažme limitní chování jehlové funkce  $\delta(t, \lambda)$  pro  $\lambda \rightarrow 0$ . Současně platí

- $\delta(t, \lambda) = 0$  pro  $t \neq 0$  a  $\lambda \rightarrow 0$ .
- $\delta(0, \lambda) \rightarrow \infty$  pro  $\lambda \rightarrow 0$ , což plyne z věty o střední hodnotě určitého integrálu.

To znamená, že limita jehlové funkce pro  $\delta \rightarrow 0$  v klasickém slova smyslu nemá požadovanou vlastnost. Proto uvažujme limitní chování  $\int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt$  pro  $\lambda \rightarrow 0$ , kde  $\delta(t, \lambda)$  je jehlovou funkcí a  $f(t)$  je spojitá funkce. I v tomto případě nastanou dva případy v závislosti na skutečnosti, zda interval  $\langle a, b \rangle$  obsahuje počátek či nikoli:

- Pro  $ab < 0$  ( $a < b$ ) platí

$$\int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} f(t)\delta(t, \lambda)dt = f(\tau) \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t, \lambda)dt = f(\tau), \text{ kde } \tau \in (a, b)$$

je vhodné číslo, existující podle věty o střední hodnotě integrálu.

- Pro  $ab > 0$  ( $a < b$ ) platí  $\int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = 0$ .



Protože hodnota  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = \begin{cases} f(0), & \text{pro } ab < 0; \\ 0, & \text{pro } ab > 0, \end{cases}$  tedy nezávisí na volbě konkrétní jehlové funkce  $\delta(t, \lambda)$  můžeme použít stručnější zápis

**Definice 4.2.** Zavedme označení

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t)\delta(t, \lambda)dt = \int_a^b f(t)\delta(t)dt. \quad (4.1)$$

Potom v integrálech používaný symbol  $\delta(t)$  nazýváme **Diracovou distribucí**, či **Diracovým impulsem**.

Diracova distribuce je tzv. zobecněnou funkcí, charakterizující limitní chování jehlové funkce  $\delta(t, \lambda)$  pro  $\lambda \rightarrow 0$  a užívá se při výpočtu integrálů. Pro Diracovu distribuci  $\delta(t)$  a spojitou funkci  $f(t)$  platí tzv. filtrační vlastnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t_0 - t)dt = f(t_0). \quad (4.2)$$

Pro monotónní funkci  $\varphi(t)$ , která má prostý nulový bod v  $t_0$  tj.  $\varphi(t_0) = 0 \wedge \varphi'(t_0) \neq 0$  platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\varphi(t - t_0))dt = \frac{f(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \quad (4.3)$$

Vztah mezi Diracovým impulsem a Heavisideovou funkcí  $\eta(t)$  je dán skutečností:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1 & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

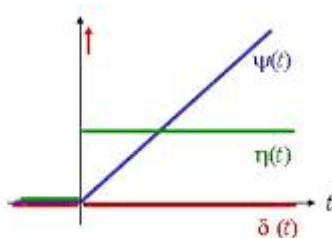
Heavisideovou funkci jednotkového skoku tak můžeme chápat jako zobecněnou primitivní funkci Diracova impulsu. Tento vztah je podobný vztahu mezi Heavisideovou funkcí  $\eta(t)$  a identickou funkcí  $\psi(t)$ , kde platí

$$\int_{-\infty}^t \eta(\tau)d\tau = \psi(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t \leq 0. \end{cases}$$

Využitím vztahu mezi integrálem a derivací můžeme interpretovat Diracovu distribuci jako derivaci Heavisideovy funkce jednotkového skoku, kterou podobně můžeme dále chápat jako derivaci identické funkce  $\psi(t)$ . Tj.

$$\psi''(t) = \eta'(t) = \delta(t).$$

Situaci ilustruje následující obrázek



Tato ukázka ilustruje obecnější situaci zavedení zobecněné derivace funkcí, které jsou po částech spojitě spolu s derivací.

**Definice 4.3.** Nechť má funkce  $f(t)$  v  $t_0$  bod nespojitosti prvního druhu a je vyjádřena ve tvaru

$$f(t) = \psi(t) + \left( \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right) \eta(t - t_0),$$

kde funkce  $\psi(t)$  je spojitá v  $t_0$  a má zde klasickou derivaci  $\psi'(t_0)$ . **Zobecněnou derivaci**  $f'_o(t)$  nazveme potom součet

$$f'_o(t) = \psi'(t) + \left( \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right) \delta(t - t_0). \quad (4.4)$$

Analogicky postupujeme také u zobecněných derivací vyšších řádů. Navíc uvedený postup koresponduje i se zavedením derivace zobecněné  $\delta(t)$  funkce, tj. stanovení limity pro  $h \rightarrow 0$  z integrálu

$$\int_a^b f(t) \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} dt = \frac{f(-h) - f(0)}{h}$$

Má-li funkce  $f(t)$  derivaci  $f'(0)$  dostáváme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} dt = \begin{cases} -f'(0) & \text{pro } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } 0 \notin (a, b) \end{cases}$$

**Definice 4.4.** Nechť funkce  $f(t)$  má derivaci  $f'(t_0)$  v bodě  $t_0$ , potom v limitě z integrálu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta(t_0+h) - \delta(t_0)}{h} dt = \int_a^b f(t) \delta'(t - t_0) dt = -f'(t_0). \quad (4.5)$$

užitý symbol  $\delta'(t)$  nazýváme **derivací Diracovy distribuce**. Jestliže existují potřebné derivace, zavádíme analogicky  $n$ -tou derivací Diracovy distribuce  $\delta^{(n)}$  postupem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta^{(n-1)}(t_0+h) - \delta^{(n-1)}(t_0)}{h} dt = \int_a^b f(t) \delta^{(n)}(t - t_0) dt = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(t_0) & \text{pro } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } 0 \notin (a, b) \end{cases}. \quad (4.6)$$

**Poznámka 2.** Je-li navíc jehlová funkce sudá v proměnné  $t$  je možné vyjádřit i integrál z funkce  $f(t)$  nespojitě v bodě 0:

$$\int_a^b f(t)\delta(t)dt = \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) \right)$$

**Příklad 4.5.** Výše uvedené vlastnosti jsou demonstrovány na funkcích.

a) Zjednodušte výraz  $(t^3 + 1)\delta(t - 2)$

**Řešení.** Protože je funkce  $t^3 + 1$  spojitá lze v integrálech daný výraz podle (4.2) nahradit  $(2^3 + 1)\delta(t - 2) = 9\delta(t - 2)$ .  $\square$

b) Vypočtete integrál  $\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t - t_0)dt, t_0 \geq 0$ . Později bude tento integrál interpretován jako obraz Laplaceovy transformace Diracovy funkce  $\delta(t - t_0)$ .

**Řešení.** S využitím (4.2) a skutečnosti  $\int_{-\infty}^0 e^{-pt}\delta(t - t_0)dt = 0$  dostáváme

$$\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-pt}\delta(t - t_0)dt = e^{-t_0p}$$

$\square$

c) Vypočtete integrál  $\int_{-\infty}^\infty (t^2 + 2)\delta(5 - 5t)dt$

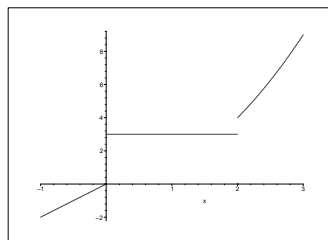
**Řešení.** Využijeme vlastnosti (4.3) a dostáváme:

$$\int_{-\infty}^\infty (t^2 + 2)\delta(5 - 5t)dt = \frac{1^2 + 2}{|-5|} = \frac{3}{5}$$

$\square$

d) Následující funkci zapište jediným analytickým zápisem a určete její první a druhou zobecněnou derivaci.

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } -\infty < t < 0 \\ 3 & \text{pro } 0 < t < 2 \\ t^2 & \text{pro } 2 < t < \infty \end{cases}$$



**Řešení.** K požadovanému zápisu využijeme funkci jednotkového skoku. Uvažme funkci  $g(t) = 2t + (3 - 2t)\eta(t)$ . Pro  $t < 0$  platí  $g(t) = 2t$ , neboť součin  $(3 - 2t)\eta(t)$  je nulový a pro  $t > 0$  platí  $g(t) = 2t + 3 - 2t = 3$ , neboť  $(3 - 2t)\eta(t) = 3 - 2t$ . Tedy platí  $g(t) = f(t)$  pro  $t < 2$ . V dalším zopakujeme daný postup, tj. k funkci  $g(t)$  přičteme součin vhodné funkce s  $\eta(t - 2)$ . Tato je rovna rozdílu analytického vyjádření funkce

$f(t)$  pro  $t > 2$  minus analytického vyjádření funkce  $f(t)$  pro  $0 < t < 2$ , dohromady dostáváme:

$$f(t) = 2t + (3 - 2t)\eta(t) + (t^2 - 3)\eta(t - 2).$$

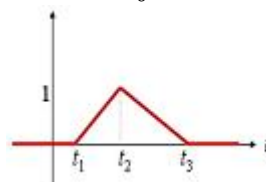
Pro funkce vyjádřené „složitěji“ postupujeme analogicky vždy „zleva doprava“. Zobecněné derivace získáme podle definice:

$$\begin{aligned} f'_o(t) &= 2 - 2\eta(t) + (3 - 2t)\delta(t) + 2t\eta(t - 2) + (t^2 - 3)\delta(t - 2) = \\ &= 2 - 2\eta(t) + 3\delta(t) + 2t\eta(t - 2) + \delta(t - 2), \\ f''_o(t) &= -2\delta(t) + 3\delta'(t) + 2\eta(t - 2) + 2t\delta(t - 2) + \delta'(t - 2) = \\ &= -2\delta(t) + 3\delta'(t) + 2\eta(t - 2) + 4\delta(t - 2) + \delta'(t - 2). \end{aligned}$$

Poznamenejme, že třetí zobecněná derivace bude pouze lineární kombinací funkce jednotkového skoku a jejich derivací.  $\square$

e) Nalezněte druhou zobecněnou derivaci tzv. obecného trojúhelníkového impulsu.

Trojúhelníkový impuls  $f(t)$  je zadaný grafem, který je mimo interval  $\langle t_1, t_3 \rangle$  nulový a vrchol trojúhelníka má pro  $t = t_2$  ( $t_1 < t_2 < t_3$ ) hodnotu  $v$ .



**Řešení.** V tomto příkladě budeme postupovat tak, že derivaci budeme provádět po jednotlivých intervalech bez „znanosti“ analytického zápisu. V intervalu  $(t_1, t_2)$  je derivace rovna  $\frac{v}{t_2 - t_1}$ , což je směrnice úsečky v tomto intervalu analogicky v intervalu  $(t_2, t_3)$  je derivace rovna  $\frac{-v}{t_3 - t_2}$  a v zbývajících intervalech je derivace nulová. Druhou zobecněnou derivaci určíme snadno ze skutečnosti  $\eta'(t) = \delta(t)$  a ze zápisu první derivace pomocí Heavisideovy funkce:

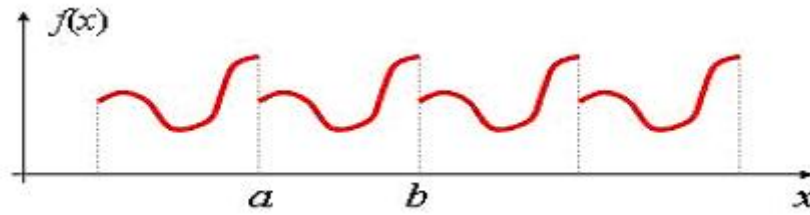
$$\begin{aligned} f'_o(t) &= \frac{v((t_3 - t_2)\eta(t - t_1) + (t_1 - t_3)\eta(t - t_2) + (t_2 - t_1)\eta(t - t_3))}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} \\ f''_o(t) &= \frac{v((t_3 - t_2)\delta(t - t_1) + (t_1 - t_3)\delta(t - t_2) + (t_2 - t_1)\delta(t - t_3))}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)} \end{aligned}$$

$\square$

## 4.2 Fourierovy trigonometrické řady

### 4.2.1 Periodické a harmonické funkce

Při vyšetřování periodických dějů, jako jsou např. elektrické, mechanické a akustické kmity, kruhové pohyby, ale také při řešení diferenciálních či integrálních rovnic používáme periodické funkce. Mějme interval  $I = \langle a, b \rangle$  a označme  $T = b - a$ . Řekneme, že funkce  $f(x)$  je *periodická s periodou*  $T$ , jestliže platí  $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Zabývájme se nejdříve speciálními periodickými funkcemi.



Obr. 4.1: Periodická funkce

**Definice 4.6.** Reálnou harmonickou funkcí nazýváme každou reálnou funkci, kterou je možné zapsat v tzv. fázovém tvaru

$$f(t) = F \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{kde } -\infty < t < \infty \quad (4.7)$$

a tato je jednoznačně určena trojicí parametrů  $F$ ,  $\varphi$  a  $\omega$ , které jsou postupně nazývány **amplituda**, **počáteční fáze** a **frekvence** harmonické funkce,

Udává-li funkce  $f(t)$  závislost nějaké fyzikální veličiny na čase, pak se hovoří o harmonickém kmitání. Poznamenejme navíc, že každé nenulové řešení diferenciální rovnice

$$f'' + \omega^2 f = 0, \quad \text{kde } \omega > 0$$

je harmonickou funkcí. Navíc také platí, že harmonická funkce (4.7) je pro  $F \neq 0$  periodická s periodou  $T = 2\pi/\omega$ .

Za předpokladu, že hodnota frekvence  $\omega$  je pevně zvolena, lze funkci (4.7) jednoznačně určit dvojicí  $F$ ,  $\varphi$  nebo jedním komplexním parametrem  $\hat{F}$  nazývaným **komplexní amplituda**:

$$\hat{F} = F e^{j\varphi} = F(\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad (4.8)$$

tj.  $|\hat{F}| = F$ ,  $\arg \hat{F} = \varphi$ . V Paragrafu 3.3 věnovaném komplexní funkci reálné proměnné jsme ukázali, že i součet harmonických funkcí se (stejnou frekvencí  $\omega$ )

$$f_1(t) = F_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad f_2(t) = F_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

je za předpokladu

$$\hat{F}_1 + \hat{F}_2 = F_1 e^{j\varphi_1} + F_2 e^{j\varphi_2} \neq 0$$

harmonická (funkce se stejnou frekvencí  $\omega$ ), tj.

$$f(t) = F_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + F_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = F \cos(\omega t + \varphi).$$

Navíc komplexní amplituda součtu je součtem komplexních amplitud, tj.

$$\hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2.$$

Poznamenejme, že i funkce  $f(t) = F \sin(\omega t + \varphi)$  je také harmonická funkce, neboť platí  $\sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$ . Další možností zápisu harmonické funkce  $F \cos(\omega t + \varphi)$  je

$$F \cos(\omega t + \varphi) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t),$$

přičemž  $a = F \cos \varphi$ ,  $b = -F \sin \varphi$ , který bude dále využíván.

### 4.2.2 Fourierovy trigonometrické řady

Dále se budeme zabývat možností vyjádřit periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$ . Jedna z možností může být odvozena jako důsledek Laurentova rozvoje holomorfních funkcí. Předpokládejme, že funkce  $F(z)$  je holomorfní na prstenci  $P_{rR}(0)$  kde pro konstanty  $r, R$  platí  $0 \leq r < 1 < R$ . Uvažme parametrizaci kladně orientované jednotkové kružnice se středem v počátku ve tvaru  $\Gamma(t) = \exp(j\omega t) = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$ ,  $t \in \langle \theta, \theta + T \rangle$  kde  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Potom koeficienty Laurentova rozvoje

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

dostaneme dle (3.41) ve tvaru integrálu

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{\theta}^{\theta+T} \frac{F(\exp(j\omega t))}{\exp(j\omega(n+1)t)} \exp(j\omega t) \frac{2\pi j}{T} dt =$$

$$\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} F(\exp(j\omega t)) \exp(j\omega(-n)t) dt. \quad (4.9)$$

Funkce  $f(t) = F(\exp(j\omega t))$  je periodická s periodou  $T$  a dosazením  $z = \exp(j\omega t)$  do Laurentova rozvoje dostaneme:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}) =$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (c_n + c_{-n}) \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + (c_n - c_{-n}) \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2} \right) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t),$$

kde platí  $a_0 = 2c_0$   $a_n = c_n + c_{-n}$   $b_n = j(c_n - c_{-n})$ .

Tyto koeficienty můžeme pomocí integrálního vyjádření (4.9) odvodit ve tvaru

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} F(\exp(j\omega t)) \exp(-j\omega n t) dt +$$

$$\frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} F(\exp(j\omega t)) \exp(j\omega n t) dt = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = \frac{j}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} F(\exp(j\omega t)) \exp(-j\omega n t) dt -$$

$$\frac{j}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} F(\exp(j\omega t)) \exp(j\omega n t) dt = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Z tohoto vyjádření koeficientů je patrné, že pro reálnou  $T$  periodickou funkci  $f(t)$  jsou i koeficienty  $a_n$ ,  $b_n$  reálné. Výše uvedené řady a vzorce jsou spojovány se jménem francouzského matematika a fyzika Josepha Fouriera.

**Definice 4.7.** Necht' je funkce  $f(t)$  integrovatelná na intervalu  $\langle \theta, \theta + T \rangle$ . Označme  $\omega = 2\pi/T$ . Potom řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (4.10)$$

nazýváme **Fourierovou trigonometrickou řadou** funkce  $f(t)$ , kde konstanty  $a_n, b_n$  jsou určeny vztahy

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (4.11)$$

a nazývají se **koefficienty Fourierovy řady** funkce  $f(t)$ . Tuto řadu je možné vyjádřit v tzv. **komplexním tvaru Fourierovy řady**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega t), \text{ kde } c_n = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \exp(-jn\omega t) dt. \quad (4.12)$$

nebo tzv. **fázovém tvaru Fourierovy řady**:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega t + \varphi_n), \text{ kde } 2c_{-n} = F_n e^{j\varphi_n} \quad (4.13)$$

**Poznámka 4.8.** Konstanty v jednotlivých tvarech Fourierovy řady jsou svázány jednoduchými vztahy.  $F_n$  je modul a  $\varphi_n$  je argument komplexního čísla  $2c_{-n}$  dále

$$\begin{aligned} F_n &= |a_n - jb_n| & \varphi_n &= \text{Arg}(a_n - jb_n) \\ a_n &= F_n \cos \varphi_n & b_n &= -F_n \sin \varphi_n \\ a_n &= c_n + c_{-n} & b_n &= j(c_n - c_{-n}) \\ c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} & c_{-n} &= \frac{a_n + jb_n}{2}. \end{aligned}$$

Upozorněme, že Fourierovy řady se v technické praxi často používají velice formálně, bez ověření přípustnosti jejich použití, což může vést k naprosto nesprávným výsledkům. Pokud tedy provádíme různé operace formálně, je nutné se zpětně přesvědčit, že použití všech operací bylo oprávněné. Dále poznamenejme, že podmínkou pro stanovení koeficientů  $a_n, b_n$ , případně  $c_n$  nebo  $F_n, \varphi_n$  je možnost určit integrál z funkce  $f(t)$  na intervalu délky  $T$ . Tato podmínka není ovšem dostatečná pro konvergenci (4.10), (4.12) případně (4.13) a rovnosti součtů těchto řad původní funkci. V literatuře je udáván často jako příklad takovéto funkce součet řady

$$s(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{\ln n},$$

která není Fourierovou řadou žádné integrovatelné funkce na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ . Pro stanovení těchto podmínek, které upravují možnost užití Fourierových řad, je potřebná následující definice.

**Definice 4.9.** Řekneme, že funkce  $f(t)$  je **po částech spojitá** na uzavřeném intervalu, jestliže je možné tento interval rozdělit konečným počtem bodů  $t_1, t_2, \dots, t_k$  tak, že na každém z těchto intervalů je spojitá a existují konečné jednostranné limity v bodech  $t_i$  pro  $i = 1, \dots, k$ .

Dále řekneme, že je funkce **po částech monotónní** na uzavřeném intervalu, jestliže je možné tento interval rozdělit konečným počtem bodů tak, že na každém z těchto intervalů je monotónní.

Nakonec řekneme, že funkce  $f(t)$  splňuje na uzavřeném intervalu **Dirichletovy podmínky**, jestliže je na tomto intervalu po částech spojitá a po částech monotónní.

**Věta 4.10.** *Nechť funkce  $f(t)$  je periodická s periodou  $T$  a splňuje Dirichletovy podmínky na libovolném intervalu délky  $T$ . Potom řada ve vztahu (4.10), resp. (4.12), resp. (4.13) (kde Fourierovy koeficienty jsou definovány vztahy (4.11), resp. (4.12), resp. (4.13) konverguje pro každé  $t$  a její součet je roven:*

1.  $f(t)$  v každém bodě  $t$ , v němž je funkce  $f(t)$  spojitá,
2.  $\frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)) = \frac{1}{2} \left( \lim_{h \rightarrow 0^-} f(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) \right)$  v každém bodě  $t$ , v němž je funkce  $f(t)$  nespojitá.

**Příklad 4.11.** Sestrojte Fourierovu řadu funkce  $f(t) = t$  pro  $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ , která má periodu  $T = 2\pi$ .

**Řešení.** V tomto případě je  $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ . Dále zvolíme  $\theta = -\pi$ , abychom mohli při určení koeficientů  $a_n$  využít skutečnosti, že funkce  $f(t) = t$  je lichá, protože potom integrály (4.11) určující koeficienty  $a_n$  jsou integrály z liché funkce na symetrickém intervalu kolem počátku nulové a tedy  $a_n = 0$ . Pomocí integrace per partes spočítáme

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{t \cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

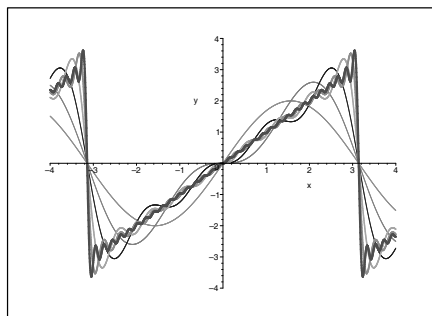
Při výpočtu integrálu jsme také využili možnosti vyjádřit integrál ze sudé funkce na intervalu  $\langle -\pi, \pi \rangle$  jako dvojnásobek integrálu z této funkce na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ . Protože funkce  $f(t)$  splňuje Dirichletovy podmínky, podle Věty 4.10 řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nt)}{n}$$

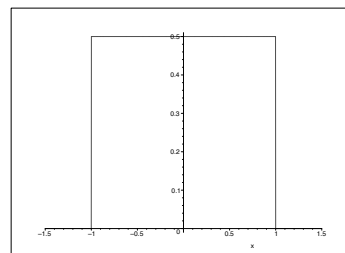
konverguje pro všechna  $t \in \mathbb{R}$  a pro  $t \in (-\pi, \pi)$  je rovna  $t$ , pro  $t = n\pi$  je rovna 0. Následující obrázek ukazuje částečné součty postupně pro 1, 2, 4, 8, 16, 32 členů. □

V dalším příkladě rozvineme sudou funkci, která popisuje periodicky se opakující obdélníkové impulsy, do komplexního tvaru Fourierova rozvoje.



Obr. 4.2: Aproximace funkce  $f(t) = t$ **Příklad 4.12.**

Uvažujme obdélníkový signál, který má šířku  $2\varepsilon$ , výšku  $h$  a délka periody je  $T$  ( $T > 2\varepsilon$ ). Funkci  $f(t)$ , která vyhovuje zadaným požadavkům, zvolíme tak, aby byla sudá, tj. v intervalu  $\langle -T/2, T/2 \rangle$ , který má délku  $T$ , bude signál nenulový pouze v intervalu  $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$ , viz obrázek vpravo



**Řešení.** Pro frekvenci  $\omega$  platí  $\omega = 2\pi/T$ :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h e^{-jn\omega t} dt = \frac{h}{-jn\omega T} [e^{-jn\omega t}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{h}{T} \frac{2 \sin(n\omega\varepsilon)}{n\omega}$$

Koeficient  $c_0 = 2h\varepsilon/T$  není daným vztahem definován, neboť se jedná o podíl  $\frac{0}{0}$ . Tato skutečnost bývá zejména v technické literatuře řešena zavedením funkce sinc, která je definována vztahem

$$\text{sinc } t = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{pro } t \neq 0; \\ 1, & \text{pro } t = 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

což umožňuje zápis  $c_n = \frac{h\varepsilon}{T} \text{sinc}(n\omega\varepsilon)$  a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2h\varepsilon}{T} \text{sinc}(n\omega\varepsilon) e^{jn\omega t} = \frac{2h\varepsilon}{T} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h\varepsilon}{T} \text{sinc}(n\omega\varepsilon) \cos(n\omega t).$$

Řada vpravo je fázový tvar Fourierovy řady. Skutečnost, že funkce  $f(t)$  je sudá, nám sice neumožnila určit část koeficientů  $c_n$ , ale projevila se díky Poznámce 4.8 v tom, že  $c_n$  jsou reálné (neboť  $b_n = 0$ ).  $\square$

**Příklad 4.13.** Rozviňte funkci  $f(t) = \frac{1}{a^2 - 2a \cos t + 1}$ , kde  $a > 1$  ve Fourierovu řadu.

**Řešení.** V tomto případě použijeme jiný postup než v ostatních příkladech. Budeme postupovat analogicky s motivací, která předcházela Definici 4.7. Provedeme-li substituci  $z = \exp(jt) \Leftrightarrow \cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$ , dostáváme po dosazení do funkce  $f(t) = F(\exp(jt))$  ve shodě s Příkladem 3.64  $F(z) = \frac{1}{a^2 - 2a \frac{z^2+1}{2z} + 1} = \frac{z}{(1-az)(z-a)}$ , což je funkce, která je na jednotkové kružnici se středem v počátku holomorfní a je tedy možné určit její Laurentův rozvoj rozkladem na součet parciálních zlomků:

$$\begin{aligned} \frac{z}{(1-az)(z-a)} &= \frac{1}{a^2-1} \left( \frac{1}{az-1} + \frac{a}{a-z} \right) = \frac{1}{a^2-1} \left( \frac{1}{az} \frac{1}{1-\frac{1}{az}} + \frac{1}{1-\frac{z}{a}} \right) = \\ &= \frac{1}{a^2-1} \left( \frac{1}{az} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(az)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{a} \right)^n \right) = \frac{1}{a^2-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{a^{|n|}}, \end{aligned}$$

což znamená  $c_n = \frac{a^{-|n|}}{a^2-1} = \frac{1}{(a^2-1)a^{|n|}}$ . Jinou možností vyjádření Fourierova rozvoje s využitím zpětné substituce odvodíme

$$f(z) = \frac{1}{a^2-1} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \left( z^n + \frac{1}{z^n} \right) \right) \Leftrightarrow F(t) = \frac{1}{a^2-1} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \cos(nt) \right).$$

Tedy dostáváme Fourierův rozvoj funkce  $F(t) = \frac{1}{a^2 - 2a \cos t + 1}$ :

$$F(t) = \frac{1}{a^2-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{jnt}}{a^{|n|}} = \frac{1}{a^2-1} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{a^n} \right),$$

kde řada vlevo je komplexní tvar Fourierovy řady a řada vpravo je současně Fourierovou trigonometrickou řadou a tak i fázovým tvarem této řady.  $\square$

**Příklad 4.14.** Rozviňme tzv. **dvoucestné** a **jednocestné usměrnění** ve Fourierovu řadu.

Dvoucestné usměrnění je definované relací  $f_d(t) = |\sin t|$  neboli  $f_d(t) = \sin t$  pro  $t \in \langle 0, \pi \rangle$  a funkce  $f_d(t)$  je periodická s periodou  $\pi$ , tj.  $f(t + \pi) = f(t)$ . Funkce je zřejmě sudá, proto pro všechna  $n$  je  $b_n = 0$ . Stačí tedy určit jen koeficienty  $a_n$ . Nejdříve vypočteme koeficient  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} [-\cos t]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Využitím známé trigonometrické relace  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$  postupně vypočteme

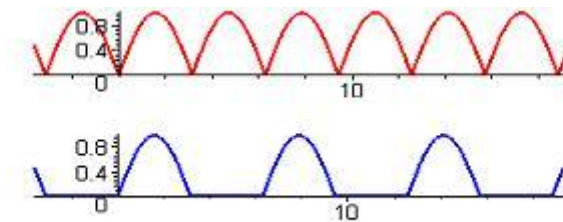
$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)) dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos((n+1)t)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)t)}{n-1} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\cos((n+1)\pi) - 1}{n+1} + \frac{\cos((n-1)\pi) - 1}{n-1} \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n+1)(n-1)} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi(n^2-1)} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Protože funkce  $f_d(t)$  je spojitá dostáváme její Fourierův rozvoj, kde  $n = 2m$ , ve tvaru

$$f_d(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mt}{4m^2 - 1}.$$

Jednocestné usměrnění je definováno vztahem  $f_j(t) = \frac{1}{2}(|\sin t| + \sin t)$ . S využitím linearity integrálu je zřejmé, že součet funkcí má rozvoj ve tvaru součtu rozvoje. Využijeme znalosti rozvoje dvoucestného usměrnění a bezprostředně dostáváme:

$$f_j(t) = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2mt)}{4m^2 - 1}$$



Obr. 4.3: Dvoucestné a jednocestné usměrnění

**Poznámka 3.** Jestliže funkce  $f(t)$  splňuje Dirichletovy podmínky (viz Definice 4.9) potom lze také získat integrál z funkce  $f(t)$  jako řadu, která vznikne z původní integrací jejich členů. Analogické tvrzení pro derivaci platí, jestliže řada vzniklá derivováním jednotlivých členů konverguje, což ale nemusí být vždy splněno.

Chceme-li rozvinout ve Fourierovu řadu funkci  $f(t) = \cos t$  pro  $t \in (0, \pi)$  s periodou  $\pi$ , tj.  $f(t + \pi) = f(t)$ . Tuto funkci můžeme s výjimkou bodů  $n\pi$  chápat jako derivaci funkce  $|\sin t|$ . Navíc splňuje Dirichletovy podmínky a její Fourierův rozvoj existuje a můžeme jej bezprostředně získat derivací člen po členu rozvoje funkce  $|\sin t|$ , neboť ten konverguje tj.

$$f(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin(2mt)}{4m^2 - 1}$$

Naopak derivací člen po členu rozvoje v Příkladu 4.11 vznikne řada, která nesplňuje nutnou podmínku konvergence a tedy uvedený postup nelze použít.

### 4.2.3 Rozvoj pouze do sinů resp. kosinů

Předcházející ukázky nás mohou motivovat k úvaze, za jakých předpokladů je možné funkci rozvinout v řadu sinů nebo kosinů. Z předcházejících ukázek je patrné, že lichou funkci ( $f(-t) = -f(t)$ ) rozložíme ve Fourierovu řadu pouze lichých funkcí, tj. v řadu sinů a sudou funkci ( $f(-t) = f(t)$ ) rozložíme ve Fourierovu řadu pouze sudých funkcí, tj. v řadu kosinů. Tato skutečnost je dána tím, že integrál na symetrickém intervalu kolem počátku je z liché funkce nulový a pro součin sudých a lichých funkcí platí obdobná pravidla jako pro sčítání sudých a lichých čísel.

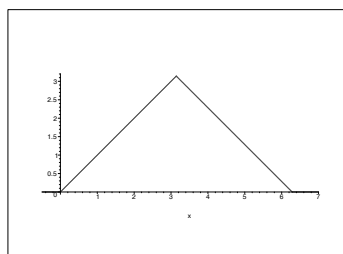
Tedy nebudeme-li trvat na periodicitě dané funkce  $f(t)$  můžeme postupovat tak, že funkci  $f(t)$  definovanou na intervalu  $\langle 0, T \rangle$ , je možné dodefinovat v intervalu  $\langle -T, 0 \rangle$  v sudou  $f_s(t)$  resp. lichou funkci  $f_l(t)$ , která má periodu  $2T$ . Potom v bodech kde je funkce  $f(t)$  spojitá platí:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{nT}{\pi} t, \quad \text{pro } t \in (0, T), \quad \text{kde } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt,$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nT}{\pi} t, \quad \text{pro } t \in (0, T), \quad \text{kde } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt.$$

**Příklad 4.15.** Na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  rozviňte do sinů a kosinů funkci  $f(t)$  definovanou vztahem

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq \pi \\ 2\pi - t & \text{pro } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$



**Řešení.** Pro rozvoj do sinů je třeba vypočít integrály (při jejich výpočtu zohledníme, že platí  $\sin(n\pi) = 0$ ,  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin \frac{n\pi t}{2\pi} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin \frac{nt}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t) \sin \frac{nt}{2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{4}{n^2} \left( \sin \left( \frac{nt}{2} \right) - \frac{nt}{2} \cos \left( \frac{nt}{2} \right) \right) \right]_0^{\pi} + \right. \\ & \left. 2\pi \left[ -\frac{2}{n} \cos \left( \frac{nt}{2} \right) \right]_{\pi}^{2\pi} - \left[ \frac{4}{n^2} \left( \sin \left( \frac{nt}{2} \right) - \frac{nt}{2} \cos \left( \frac{nt}{2} \right) \right) \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{n^2} \left( \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{n\pi}{2} \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right) - \frac{4\pi}{n} (-1)^n + \frac{4\pi}{n} \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) - \right. \\ & \left. \frac{4}{n^2} \left( -n\pi (-1)^n - \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{n\pi}{2} \cos \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right) \right) = \frac{8}{\pi n^2} \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Rozvoj do sinů  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)$  obsahuje pouze členy s lichými koeficienty:

$$\frac{8}{\pi} \left( \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(\frac{3t}{2}\right) + \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) + \dots \right)$$

Pro rozvoj do kosinů je třeba vypočítat integrály

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \frac{n\pi t}{2\pi} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos \frac{nt}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - t) \cos \frac{nt}{2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{4}{n^2} \left( \cos\left(\frac{nt}{2}\right) + \frac{nt}{2} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right) \right]_0^{\pi} + \right. \\ &\quad \left. 2 \left[ \frac{2}{n} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right]_{\pi}^{2\pi} - \left[ \frac{4}{n^2} \left( \cos\left(\frac{nt}{2}\right) + \frac{nt}{2} \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right) \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{n^2} \left( \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{n\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 \right) + \frac{4\pi}{n} \sin(n\pi) - \frac{4\pi}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{4}{n^2} \left( (-1)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{n\pi}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \right) = \frac{4}{\pi n^2} \left( 2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right) \end{aligned}$$

Dále musíme ještě vyčíslit  $a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$ , což lze určením plochy shora ohraničené funkcí  $f(t)$  zdola osou  $x$ , jejíž hodnota je  $\pi$ . Rozvoj do kosinů můžeme tedy formálně vyjádřit ve tvaru

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \left( 2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right) \cos\left(\frac{n\pi t}{2\pi}\right).$$

Tento tvar lze zjednodušit v závislosti na sudosti resp. lichosti  $n$ :

Pro  $n = 2k - 1$  platí

$$a_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)^2} (0 - 1 + 1) = 0.$$

Pro  $n = 2k$  platí

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi(2k)^2} (2(-1)^k - 1 - 1) = \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1).$$

Další zjednodušení dostáváme analogicky s předchozím opětovným rozlišením na sudá resp. lichá  $k$

Pro  $k = 2\ell$   $a_{2k} = a_{4\ell} = 0$

Pro  $k = 2\ell - 1$   $a_{2(2\ell-1)} = \frac{4}{\pi(2\ell-1)^2}$ .

Funkci  $f(t)$  můžeme tedy rozvinout do kosinů tak, že budeme zapisovat pouze nenulové členy rozvoje tj. budeme počítat přes index  $\ell$  a tomu odpovídajícím způsobem upravíme

koeficienty v argumentu funkcí kosinus  $n = 2k = 2(2\ell - 1)$ :

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2\ell-1)^2} \cos \frac{2(2\ell-1)}{2}t = \frac{\pi}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2\ell-1)^2} \cos((2\ell-1)t)$$

Tento tvar odpovídá rozvoji na intervalu poloviční délky, což není žádná náhoda, neboť funkce  $y = t$  definovaná v intervalu  $(0, \pi)$  rozvinutá do cosinů, tj. sudá funkce, má stejné periodické pokračování jako funkce  $f(t)$ . Tento fakt umožňuje podstatným způsobem zjednodušit výpočet Fourierova rozvoje do kosinů a sice volit  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos \frac{n\pi t}{\pi} dt$  a rozvoj provést vzhledem k funkcím  $\cos(nt)$ .  $\square$

#### 4.2.4 Grafické znázornění Fourierova rozvoje - Spektrum

Graficky Fourierův rozvoj reprezentujeme pomocí **spektra**, kdy jednu číselnou osu užíváme k vynášení frekvencí  $n\omega = \frac{n2\pi}{T}$  a v rovině kolmé na osu frekvencí koeficienty  $a_n = F_n \cos \varphi_n$ ,  $b_n = -F_n \sin \varphi_n$  jsou souřadnicemi bodu přiřazeného  $n$ -té harmonické složce Fourierova rozvoje. Tato grafická interpretace je ovšem trojrozměrná, proto se používá zobrazení pomocí dvou rovinných zobrazení, kdy se na jednu osu vynáší frekvence  $n\omega = \frac{n2\pi}{T}$  a na druhou koeficient  $a_n$  resp.  $b_n$ , které znázorníme úsečkou začínající na ose frekvencí a končící v bodě jehož druhá souřadnice je  $a_n$  resp.  $b_n$ . Druhou možností je vynášet místo dvojice  $a_n, b_n$  dvojici  $F_n, \varphi_n$ , hovoříme tak o **spektru modulů** a **spektru argumentů**.

Další možností je vyjádření spektra pro Fourierův rozvoj v komplexním tvaru. Analogicky s reálným oborem můžeme vytvořit dvojici zobrazující zvlášť reálnou a imaginární část koeficientu  $c_n$  nebo obvykle postupujeme tak, že zobrazujeme komplexní koeficient  $c_n$  dvojicí jeho amplitudy a argumentu.

Analogicky s harmonickými funkcemi platí pro spektra funkcí:

1. spektrum součtu je rovno součtu spekter
2. spektrum  $\alpha$  násobku funkce je rovno  $\alpha$  násobku tohoto spektra
3. posunutá funkce  $f_\tau(t) = f(t - \tau)$  má spektrum modulů stejné jako funkce  $f(t)$  a spektrum argumentů je o  $n\omega\tau$  menší tj.

$$\varphi_{\varphi n} = \varphi_n - n\omega\tau$$

4. spektrum funkce se změněným měřítkem  $f(mt)$  má periodu  $T/m$  a frekvence harmonických složek jsou násobkem  $m\omega$ , ale koeficienty  $a_n, b_n$  a tedy moduly  $F_n$  a argumenty  $\varphi_n$  jsou stejné.

Závěrem uveďme, že výpočet integrálu  $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt$ , který je nazýván střední hodnotou součinu dvou funkcí se stejnou periodou, pro které existuje Fourierův rozvoj:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin n\omega t = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega t}$$

$$g(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{-jn\omega t},$$

je možné realizovat bez použití integrování. Využijte se přitom skutečnost, že trigonometrický systém funkcí

$$1, \cos(\omega t), \dots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \dots, \sin(n\omega t), \dots$$

je ortogonální na intervalu délky periody  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Tato vlastnost znamená, že pro dvě různé funkce  $f_1(t) \neq f_2(t)$  tohoto systému platí  $\int_0^T f_1(t)f_2(t) dt = 0$ . S využitím této skutečnosti je možné odvodit:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt = \frac{a_0}{2} \frac{\alpha_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \gamma_{-n}$$

Poznamenejme, že pomocí tohoto vztahu je možné určit hodnotu integrálu

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt,$$

který je v technické praxi interpretován jako střední výkon elektromagnetické soustavy v ustáleném stavu, které je napájena ze zdroje, jehož napětí  $u(t)$  je periodická funkce a  $i(t)$  je proud, který je rovněž periodická funkce.

Pro  $f(t) = g(t)$  dostáváme tzv. Parsevalovu rovnost tj.

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n}$$

### 4.3 Fourierova transformace a Fourierův integrál

V tomto odstavci se budeme zabývat přenesením aparátu komplexního tvaru Fourierova rozvoje periodických funkcí na funkce, které nejsou periodické. Tímto postupem je motivováno zavedení pojmu Fourierovy transformace spolu s „ověřením“ základního vztahu této transformace.

Uvažujme na intervalu  $\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \rangle$  funkci  $f(t)$ , která zde splňuje Dirichletovy podmínky, viz Definice 4.9. S využitím Věty 4.10 na tomto intervalu dostáváme ve všech bodech spojitosti funkce  $f(t)$  rovnost:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega x} dx e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega(x-t)} dx, \text{ kde } t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right).$$

Proto, abychom mohli výše uvedenou sumu interpretovat jako integrální součet, zavedeme dělení množiny reálných čísel jako posloupnost bodů  $z_n = n\omega = \frac{n2\pi}{T}$  pro  $n = -\infty, \dots, \infty$ , přičemž norma dělení  $\Delta z_n = z_{n+1} - z_n = \frac{2\pi}{T}$ , se zmenšuje pro zvětšující se  $T$  tj.  $\Delta z_n \rightarrow 0$

pro  $T \rightarrow \infty$ . Potom je možné při tomto označení vyjádřit funkční hodnotu  $f(t)$  pomocí nekonečné řady

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta z_{m-1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn z_n(x-t)} dx,$$

a interpretovat ji jako integrální součet funkce

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jz(x-t)} dx$$

proměnné  $z$  na intervalu  $(-\infty, \infty)$ . Formálním provedením limitního přechodu pro periodu  $T \rightarrow \infty$  obdržíme **Fourierův integrální vzorec**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jz(x-t)} dx \right) dz. \quad (4.15)$$

Před stanovením podmínek, které „zabezpečí“ platnost uvedeného vztahu, uveďme následující definici.

**Definice 4.16.** Řekneme, že funkce  $f(t)$  je absolutně integrovatelná, jestliže platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

**Věta 4.17.** *Nechť je funkce  $f(t)$  absolutně integrovatelná a  $f(t)$ ,  $f'(t)$  jsou po částech spojitě viz Definice 4.9, potom pravá strana vztahu (4.15) se rovná*

1.  $f(t)$  v každém bodě spojitosti  $t$  funkce  $f(t)$
2.  $\frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)) = \frac{1}{2} \left( \lim_{h \rightarrow 0^-} f(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) \right)$  v každém bodě nespojitosti  $t$  funkce  $f(t)$ .

Různými aspekty Fourierova integrálního vzorce se budeme zabývat v následujícím textu, neboť právě Fourierův integrální vzorec lze chápat jako složení Fourierovy transformace přímé a zpětné.

### 4.3.1 Zavedení Fourierovy transformace

**Definice 4.18.** Nechť  $f(t)$  je funkce reálné proměnné  $t$  (reálná nebo komplexní), která je spolu se svojí derivací  $f'(t)$  po částech spojitá a navíc je absolutně integrovatelná. Potom je pro všechna reálná  $\omega$  definována funkce

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4.16)$$



kterou nazýváme **Fourierovým obrazem** (spektrém) funkce  $f(t)$ . Toto přiřazení se nazývá **Fourierovou transformací**, funkce  $f(t)$  jejím předmětem, funkce  $F(\omega)$  obrazem Fourierovy transformace.

Druhý vztah, který můžeme vysvětlovat tak, že ze známé funkce  $F(\omega)$  určíme funkci  $f(t)$ , tj.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.17)$$

nazýváme **zpětnou Fourierovou transformací**. Vztah mezi funkcemi  $f(t)$  a  $F(\omega)$  stručně zapisujeme

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\omega) \quad \text{a} \quad \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = f(t).$$

**Poznámka 4.** V literatuře nalezneme i zápis  $F(j\omega)$ , který je třeba interpretovat jako složenou funkci, kdy vnější složkou je integrál obsahující komplexní proměnnou  $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ , za kterou dosadíme vnitřní složku  $j\omega$ .

Obecně platí, že v případě sudé nebo liché funkce se výše uvedené integrály zjednoduší. Pro funkci  $f(t)$ , která je spolu se svojí derivací  $f'(t)$  po částech spojitá a navíc je absolutně integrovatelná na intervalu  $\langle 0, \infty \rangle$  je možné jejím definováním na intervalu  $(-\infty, 0)$  do **sudé funkce**  $f(-t) = f(t)$  zavést tzv. **Fourierovu kosinovou transformaci**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos(\omega t) d\omega.$$

a jejím definováním do **liché funkce**  $f(-t) = -f(t)$  zavést tzv. **Fourierovu sinovou transformaci**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sin(\omega t) d\omega.$$

Fourierovu transformaci není možné „použít na libovolné funkce“, neboť užívané integrály nemusí obecně konvergovat. Situaci se zabývá následující věta, která stanoví dostatečnou podmínku existence obrazu Fourierovy transformace, navíc udává podmínku pro funkci komplexní proměnné, kterou musí splňovat obraz Fourierovy transformace reálné funkce.

**Věta 4.19.** *Nechť je funkce  $f(t)$  absolutně integrovatelná, potom obraz Fourierovy transformace  $F(\omega)$  existuje a je spojitá funkce, pro kterou platí  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) = 0$ .*

Poznamejme, že se budeme zabývat i funkcemi komplexní proměnné nesplňujícími uvedenou podmínku, které budou obrazem zobecněných funkcí např. Diracův impuls viz níže. Další věta je analogií tvrzení, které jsme pro periodické funkce spojili s tzv. Parsevalovou rovností.

**Věta 4.20.** *Nechť  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ . Potom platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Další vlastnosti uspořádáme pro větší přehlednost do tabulky. Před uvedením věty, která shrne základní vlastnosti Fourierovy transformace připomeňme pojem konvoluce dvou absolutně integrovatelných funkcí.

**Definice 4.21.** Nechť jsou funkce  $f(t)$ ,  $g(t)$  absolutně integrovatelné. Potom funkci definovanou vztahem

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau. \quad (4.18)$$

nazýváme konvolucí funkcí  $f(t)$ ,  $g(t)$  a zapisujeme ji  $f(t) * g(t)$ .

**Věta 4.22.** O předmětech Fourierovy transformace (funkce v tabulce vlevo) předpokládáme, že jsou absolutně integrovatelné. Navíc označme  $\mathcal{F} f(t) = F(\omega)$ , případně  $\mathcal{F} g(t) = G(\omega)$ . Potom platí

Věta o	předmět	obraz
<i>linearitě</i>	$af(t) + bg(t)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$
<i>podobnosti</i>	$f(rt)$	$\frac{1}{r}F\left(\frac{\omega}{r}\right)$
<i>posunutí předmětu</i>	$f(t - r)$	$\exp(-jr\omega)F(\omega)$
<i>posunutí obrazu</i>	$\exp(jrt)f(t)$	$F(\omega - r)$
<i>derivaci předmětu</i>	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
<i>derivaci obrazu</i>	$t^n f(t)$	$j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
<i>integraci předmětu</i>	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega}$
<i>konvoluci předmětu</i>	$f(t) * g(t)$	$F(\omega)G(\omega)$

Při zavádění Fourierovy transformace pro funkce nesplňující výše uvedené podmínky nebo pro zobecněné funkce postupujeme tak, že uvedenou funkci případně zobecněnou funkci chápeme jako „limitu“ posloupnosti funkcí, které uvedené předpoklady splňují. Fourierův obraz potom chápeme jako limitu obrazů funkcí dané posloupnosti. Takto můžeme nalézt obraz Fourierovy transformace Diracovy distribuce a jejích derivací, ale v těchto konkrétních případech můžeme formálně postupovat i tak, že u Diracovy distribuce využijeme tzv. filtrační vlastnost (4.2):

$$\mathcal{F} \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}. \quad (4.19)$$

Pro derivaci Diracovy delta funkce lze odvodit:

$$\mathcal{F} \delta^{(n)}(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-j\omega t} dt = (j\omega)^n e^{-j\omega t_0}. \quad (4.20)$$

Pro funkci jednotkového skoku můžeme přímým výpočtem získat:

$$\mathcal{F}\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \left[ -\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{-j}{\omega} \quad (4.21)$$

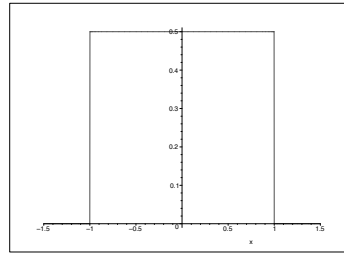
Při výpočtu tohoto integrálu je vhodné si uvědomit, že konverguje pouze pro  $\omega$  s kladnou reálnou částí.

### 4.3.2 Užití Fourierovy transformace při určování obrazů některých funkcí

V tomto odstavci využijeme uvedené vlastnosti Fourierovy transformace při výpočtu Fourierových obrazů některých speciálních funkcí (signálů).

#### Příklad 4.23.

Nalezněte obraz obdélníkového signálu, který má šířku  $2\varepsilon$ , výšku  $h$ , který je navíc umístěn tak, aby funkce  $f(t)$ , která jej popisuje byla sudá, tj. signál bude umístěn v intervalu  $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$  viz obrázek vpravo.

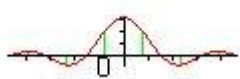
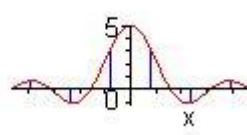
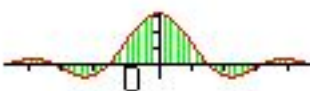
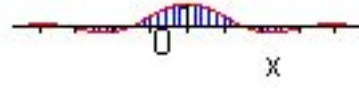
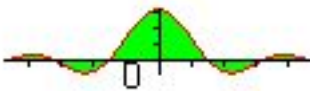



**Řešení.**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(t) = F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} he^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{h}{-jn\omega} [e^{-jn\omega t}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 2h \frac{\sin n\omega\varepsilon}{n\omega} = 2h\varepsilon \operatorname{sinc}(n\omega\varepsilon), \end{aligned}$$

kde funkce sinc je definována vztahem 4.14 uvedeným v příkladu při stanovení Fourierova rozvoje sudého obdélníkového signálu, tj. Příkladu 4.12.  $\square$

**Poznámka 5.** Na daném příkladu a Příkladu 4.12 je možné demonstrovat limitní přechod spektra Fourierova rozvoje periodického obdélníkového signálu (s periodou  $T$ ) (viz příklad 4.12) v obraz Fourierovy transformace jednoho obdélníkového signálu. Uvažme, že koeficienty  $c_n$  Fourierova rozvoje jsou integrály (4.12) násobené převrácenou hodnotou periody  $T$ , která se v limitním přechodu „použije“ k vytvoření dělení vnějšího integrálu ve Fourierově integrálním vzorci. Proto si také zobrazíme modifikované spektrum kdy koeficienty  $c_n$  vynásobíme periodou  $T$ . V následující tabulce jsou zobrazena pouze spektra modulů, protože argumenty koeficientů  $c_n$  jsou nulové. Úhlový kmitočet základní harmonické složky je  $\omega = 2\pi/T$ .

$T$	modifikované spektrum	spektrum
4		
16		
64		

Z uvedených spekter je patrné, že pro zvětšující se  $T$  roste hustota spekter a pro hodnotu  $T = 64$  při zvoleném grafickém znázornění (tloušťka čar) modifikovaného je obraz spektra stejný jako integrál vyjadřující Fourierovu transformaci.

**Poznámka 6.** Další možností užití obrazu sudého obdélníkového impulsu je ověřit již dříve uvedený Fourierův obraz Diracova impulsu  $\delta(t)$ . Tuto Diracovu funkci chápeme jako limitní chování jehlové funkce viz Definice 4.1, za kterou volíme obdélníky

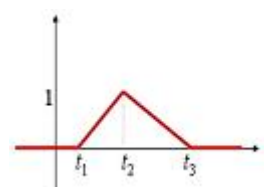
$$\delta(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} (\eta(t - \varepsilon) - \eta(t + \varepsilon)).$$

Využijeme-li výsledek předchozího příkladu dostaneme obraz  $\delta(t)$  jako limitu obrazů jednotlivých obdélníkových impulsů, tj.

$$\mathcal{F}\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}\delta(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{2\varepsilon} \frac{\sin n\omega\varepsilon}{n\omega} = 1.$$

#### Příklad 4.24.

Nalezněte Fourierův obraz tzv. obecného trojúhelníkového impulsu  $f(t)$  zadaného grafem, který je mimo interval  $[t_1, t_3]$  nulový a vrchol trojúhelníka má pro  $t = t_2$  ( $t_1 < t_2 < t_3$ ) hodnotu  $v$ .



**Řešení.** K jeho určení využijeme znalosti druhé zobecněné derivace této funkce z Příkladu 4.5 e) a uijeme také větu o derivaci předmětu a pro obraz  $F(j\omega)$  dostáváme rovnici

$$-\omega^2 F(\omega) = \mathcal{F}f''(t) = \frac{v((t_3 - t_2)e^{-j\omega t_1} + (t_1 - t_3)e^{-j\omega t_2} + (t_2 - t_1)e^{-j\omega t_3})}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Co po úpravě dává:

$$F(\omega) = -\frac{v((t_3 - t_2)e^{-j\omega t_1} + (t_1 - t_3)e^{-j\omega t_2} + (t_2 - t_1)e^{-j\omega t_3})}{\omega^2(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Poznamenejme, že pro sudý trojúhelníkový impuls tj,  $t_1 = -T$ ,  $t_2 = 0$ ,  $t_3 = T$  lze obraz zapsat jednoduše:

$$F(\omega) = v \frac{T e^{j\omega T} - 2T + T e^{-j\omega T}}{T^2 \omega^2} = v \frac{2(\cos(\omega T) - 1)}{T \omega^2} = v T \left( \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 = v T \left( \operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2} \right)^2$$

□

**Příklad 4.25.** Nalezněte Fourierův obraz funkce  $f(t) = e^{-a^2 t^2}$ . Nejdříve poznamenejme, že funkce má obraz Fourierovy transformace, neboť existuje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

Výpočet tohoto integrálu lze nalézt v literatuře viz [8]. Pro funkci  $f(t)$  platí diferenciální rovnice

$$f'(t) = -a^2 2t e^{-a^2 t^2} = 2a^2 t f(t)$$

Pro Fourierův obraz této rovnice dostáváme

$$j\omega F(\omega) = \mathcal{F} f'(t) = -2a^2 \mathcal{F} t f(t) = -2a^2 j \frac{dF(\omega)}{d\omega},$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Jak vidíme v následující úpravě, jež řeší danou rovnici:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{2a^2} d\omega = \frac{dF(\omega)}{F(\omega)} &\Leftrightarrow \int -\frac{\omega}{2a^2} d\omega = \int \frac{dF}{F} \\ -\frac{\omega^2}{4a^2} + \ln |C| = \ln |F| &\Leftrightarrow F(\omega) = C e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}, \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Integrační konstantu  $C$  určíme dosazením  $\omega = 0$   $C = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$  a ze vztahu známého z literatury [8]. Celkově tak dostáváme  $\mathcal{F} e^{-a^2 t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a^2}\right)$ .

V daném příkladě jsme využili větu o derivaci předmětu, která umožní převést diferenciální rovnice pro předmět řešení na rovnici bez derivací, kterou je možno obvykle řešit jednodušeji, pro obraz řešení. Uvedený postup je základem příštího odstavce.

### 4.3.3 Užití Fourierovy transformace při řešení diferenciálních rovnic

Pro diferenciální případně integro-diferenciální rovnice, jejichž řešení je v technické praxi určeno počáteční podmínkou, to jest řešení existuje na intervalu  $\langle t_0, \infty \rangle$ , se obvykle používá později probíraná Laplaceova transformace. Proto budeme pomocí Fourierovy transformace řešit rovnici, kde bude řešení definováno pro všechna reálná čísla. V následujícím příkladě se budeme zabývat parciální diferenciální rovnicí aniž bychom se touto problematikou v tomto textu systematicky zabývali. To je umožněno tím, že níže uvedený postup hlubším způsobem teorii parciálních diferenciálních rovnic nevyužívá.

V literatuře známým užitím Fourierovy transformace je řešení diferenciální rovnice vedení tepla v nekonečně dlouhé a tenké tyči, kterou ztotožníme s osou  $x$  a popisujeme ji pomocí funkce  $u(x, t)$ , jejíž hodnota udává teplotu v bodě o souřadnici  $x$  a v čase  $t$ . Tato funkce vyhovuje tzv. počáteční diferenciální úloze:

$$au''_{xx} = u'_t, \quad u(x, 0) = g(x), \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Použitím Fourierovy transformace vzhledem k proměnné  $x$  pro každou konstantu  $t$  dostaneme obraz  $\mathcal{F}u(x, t) = U(\omega, t)$  řešení, což je funkce dvou proměnných  $\omega, t$ . Použitím této transformace na zadanou rovnici vznikne diferenciální rovnice vzhledem k proměnné  $t$ , kterou formálně řešíme jako rovnici se separovanými proměnnými (předpokládá to tvar funkce  $U(\omega, t)$  ve tvaru součinu funkcí obou proměnných):

$$a(j\omega)^2 U = \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{U} = -a\omega^2 dt \Rightarrow U(\omega, t) = G(\omega) \exp(-a\omega^2 t),$$

kde  $G(\omega) = \mathcal{F}g(x)$  je obraz počátečního rozložení  $u(x, 0) = g(x)$  teplot v tyči v čase  $t = 0$ . Při hledání předmětu využijeme, že obraz konvoluce je součinem obrazů. Nejdříve stanovíme předmět k obrazu  $\exp(-a\omega^2 t)$  s využitím Příkladu 4.25 (proměnná obrazu je  $\omega$  a  $x$  je proměnná vzoru,  $t$  je parametr), tj.

$$\mathcal{F}^{-1} \exp(-a\omega^2 t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

Rovnice vedení tepla má řešení (tzv. elementární) ve tvaru konvolučního integrálu:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4ta}\right)}{2\sqrt{\pi at}} g(\xi) d\xi.$$

**Poznámka 7.** Při použití Fourierovy transformace k řešení rovnic se může stát, že uvedeným postupem není možné nalézt všechna řešení (aniž bychom se dopustili chyby), neboť použití Fourierovy transformace omezuje prostor funkcí viz Definice 4.16, které je možno takto získat. Konkrétní příklad je možné nalézt v [8] (Ukázka 7.2).

## 4.3.4 Slovník Fourierovy transformace

Předmět	Obraz
$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$
$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{a} \exp(-a \omega ) a > 0$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$ t e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}$
$\eta(t)t^n e^{-at}, a > 0, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$
$\frac{\exp(-a/\sqrt{ t })}{\sqrt{ t }}, a > 0$	$\frac{\sqrt{2}(\cos \sqrt{2\pi \omega } - \sin \sqrt{2\pi \omega })}{ \omega }$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$te^{-at^2}, a > 0$	$-j \frac{\sqrt{\pi}\omega}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$\frac{\sin(at)}{\sqrt{ t }}$	$j\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{ \omega - a }} - \frac{1}{\sqrt{ \omega + a }} \right)$
$\frac{\cos(at)}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{ \omega - a }} + \frac{1}{\sqrt{ \omega + a }} \right)$
$\sin(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
$\cos(at^2)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
$\frac{\sin t}{t}$	$\pi(\eta(\omega + 1) - \eta(\omega - 1))$

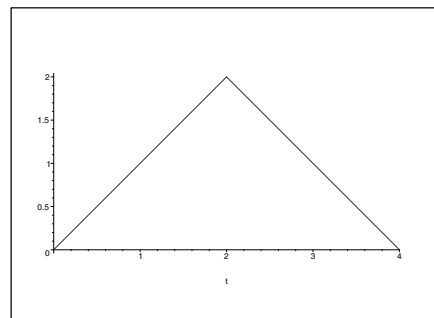
## 4.4 Příklady na procvičení

### Cvičení

1. Pro uvedené funkce určete jejich Fourierovu trigonometrickou řadu. Uveďte také její komplexní a fázový tvar.

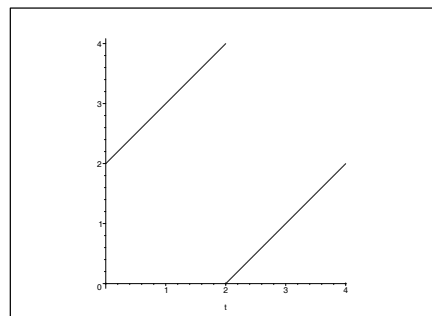
a) Pro níže uvedenou funkci určete součet Fourierovy trigonometrické řady pro  $t = 10$ :

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{kde } 0 \leq t \leq 2; \\ 4 - t, & \text{kde } 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$



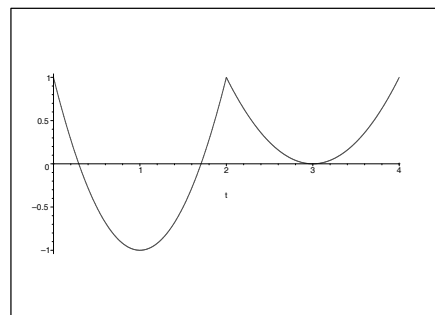
b) Pro níže uvedenou funkci určete součet Fourierovy trigonometrické řady pro  $t = 10$ :

$$f(t) = \begin{cases} t + 2, & \text{kde } 0 \leq t \leq 2; \\ t - 2, & \text{kde } 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$



c) Pro níže uvedenou funkci určete součet Fourierovy trigonometrické řady pro  $t = 10$ :

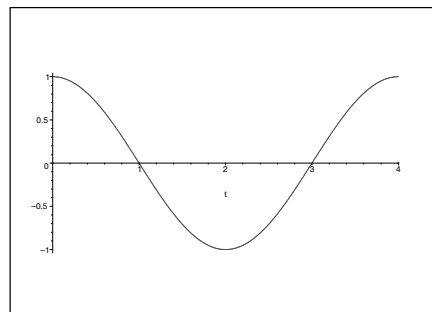
$$f(t) = \begin{cases} 2(t - 1)^2 - 1, & 0 \leq t \leq 2; \\ (t - 3)^2, & 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$



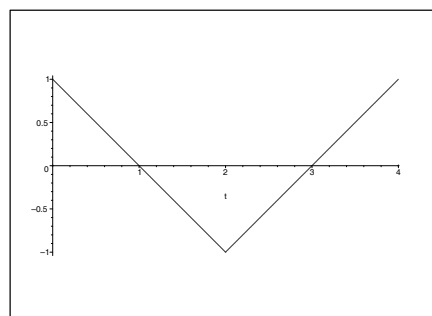


2. Pro uvedené funkce napište jejich rozvoj do sinů a cosinů:

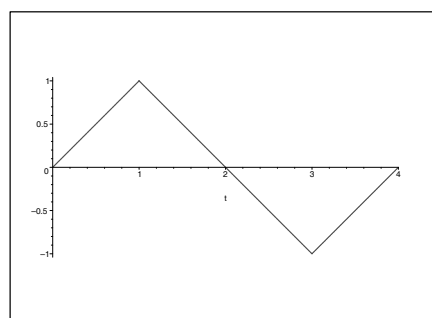
a)  $f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$



b)  $f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq t \leq 2; \\ t+3, & 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$



c)  $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1; \\ 2-t, & 2 \leq t \leq 3; \\ t-4, & 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$



## Výsledky

1. a)  $1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2} = 1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)}{(2k+1)^2}$ , fázový tvar je stejný jako s trigonometrickými funkcemi ( $\varphi_n = 0$ ),  $f(10) = f(2) = 2$ .
- b)  $2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi t}{2}$ , komplexní tvar  $2 + \frac{4j}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)}{2k+1}$ , fázový tvar

$$2 + \frac{2j}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2} + \pi\right), f(10) = f(2) = \frac{1}{2} \left( \lim_{t=2^-} f(t) + \lim_{t=2^+} f(t) \right) = 2.$$

$$\text{c) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2\pi^2} \cos(k\pi t) - \frac{32}{(2k-1)^3\pi^3} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi t}{2}\right), \text{ komplexní tvar } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{3 \exp(k\pi t)}{k^2\pi^2} - \\ - \frac{16j \exp\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)}{(2k-1)^3}, \text{ fázový tvar } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2\pi^2} \cos(k\pi t) + \frac{32}{(2k-1)^3\pi^3} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi t}{2} + \pi\right), \\ f(10) = f(2) = 2.$$

$$2. \quad \text{a) } f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n}{\pi(4n^2-1)} \sin(n\pi t), \quad f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right),$$

$$\text{b) } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi(2n+1) - 8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{4}\right), \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2}\right)$$

$$\text{c) } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2}\right), \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16 \left( \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) - 1 \right)}{(2n+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi t}{4}\right)$$

## Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Rozvinutí reálné funkce do Fourierovy řady.](#)
2. [Fourierova transformace - hledání obrazu či předmětu k dané funkci.](#)

## 5 Laplaceova transformace

V mnoha technických aplikacích jsou studovány děje, které „začínají“ od nějakého časového okamžiku, např. připojíme elektrický obvod k napětí, spustíme stroj, atd. O takových procesech můžeme předpokládat, že jejich studium začne v čase  $t = 0$ . Pro studium dějů tohoto typu, popsanými rovnicemi, které kromě neznámé funkce obsahují i její derivace či integrál (integro-diferenciální rovnice), je s výhodou používáno tzv. operátorového počtu. Ten je založen na procesu, že k dané rovnici vytvoříme její obraz, tj. novou rovnici, která je snadněji řešitelná. Poté najdeme řešení této rovnice a zpětným procesem nalezneme řešení původního problému.

Celý postup můžeme přirovnat k používání logaritmů při násobení čísel v dobách, kdy neexistovaly kalkulačky. Při „ručním“ počítání je sečtení dvou čísel jistě výrazně jednodušší než jejich násobení. Součin byl proto určován tak, že se pomocí logaritmických tabulek našly logaritmy jednotlivých činitelů a ty se „ručně“ sečetly. Po zpětném použití logaritmických tabulek na tento součet (tzv. delogarithmování) se našel hledaný součin.

Hojně v elektrotechnice užívanou integrální transformací je transformace Laplaceova, která reálné funkci přiřazuje funkci komplexní.

**Definice 5.1.** Jestliže pro  $t \in \mathbb{R}$  a  $p \in \mathbb{C}$  konverguje nevlastní integrál

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt, \quad (5.1)$$

nazýváme jím definovanou funkci  $F(p)$  **Laplaceovým obrazem** funkce  $f(t)$ . Naopak funkci  $f(t)$  nazýváme **vzorem** funkce  $F(p)$ . Zobrazení přiřazující funkci  $f(t)$  funkci  $F(p)$  nazýváme **Laplaceovou transformací** a zapisujeme  $F(p) = \mathcal{L}f(t)$  nebo  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ .

Ze vzorce (5.1) je patrné, že pro některé funkce (např.  $f(t) = \exp(t^2)$ ) nelze definovat Laplaceův obraz, protože integrál je divergentní. Vymezíme si nejdříve třídu funkcí, pro kterou je tato transformace definována a je jednoznačná.

**Definice 5.2.** Funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme **předmětem** neboli **originálem** Laplaceovy transformace  $\mathcal{L}$ , jestliže splňuje následující podmínky

- (i)  $f(t)$ ,  $f'(t)$  jsou po částech spojitě pro všechna  $t \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $f(t) = 0$  pro  $t < 0$ ,
- (iii) existují kladné konstanty  $M$ ,  $t_0$  a konstanta  $s \in \mathbb{R}$  tak, že platí  $|f(t)| \leq M \exp(st)$  pro všechna  $t \geq t_0$ . Říkáme, že  $f(t)$  je funkcí **ohrazeného růstu s indexem  $s$** .

Předpoklad (ii) Definice 5.2 je zaveden z důvodu jednoznačnosti zobrazení definovaného Laplaceovou transformací, neboť integrál v její definici je na intervalu  $(0, \infty)$ . Často budeme zobrazovat elementární funkce, které nesplňují uvedený předpoklad. Tento „problém“ lze snadno eliminovat tak, že danou funkci násobíme Hevisideovou funkcí jednotkového skoku  $\eta(t)$ . V literatuře je zvykem, že tuto skutečnost často mlčky předpokládáme a nezapisujeme.

**Příklad 5.3.** Nalezněte Laplaceův obraz funkce jednotkového skoku  $\eta(t)$ .

**Řešení.** Před každým nalezením obrazu je vhodné ověřit, že integrál definující obraz konverguje. Stačí ověřit, že je originálem Laplaceovy transformace viz Definice 5.2. U Hevisideovy funkce snadno ověříme i platnost předpokladu (iii) dané definice, např. volbou konstant  $M = 2$ ,  $t_0 = 1$  a  $s = 0$ . Přímým výpočtem získáme:

$$\mathcal{L}\eta(t) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\exp(-pt)}{p} \right]_0^u = \frac{1}{p} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-pu)}{p} = \frac{1}{p}.$$

□

V následujícím příkladu odvodíme obecnější vztah pro  $\mathcal{L}(t^n \eta(t))$

**Příklad 5.4.** Nalezněte Laplaceův obraz funkce  $t^n \eta(t)$ , kde  $n$  je celé nezáporné číslo.

**Řešení.** U této funkce snadno ověříme i platnost předpokladu (iii) dané definice např. volbou konstant  $M = 1$ ,  $t_0 = \exp(n)$  a  $s = 1$ . Nejdříve odvodíme rekurentní vztah:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^n \eta(t)) &= \int_0^{\infty} t^n \exp(-pt) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ -\frac{t^n \exp(-pt)}{p} \right]_0^u + \\ &\frac{n}{p} \int_0^{\infty} t^{n-1} \exp(-pt) dt = - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-pu)}{p} + \frac{n}{p} \mathcal{L}(t^{n-1} \eta(t)) = \frac{n}{p} \mathcal{L}(t^{n-1} \eta(t)). \end{aligned}$$

Využijeme předchozí příklad jako  $\mathcal{L}(t^0 \eta(t)) = 1/p$  a užitím rekurentního vztahu celkově dostaneme:

$$\mathcal{L}(t^n \eta(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

□

**Příklad 5.5.** Nalezněte Laplaceův obraz funkce  $\exp(\omega t) \eta(t)$ , kde  $\omega \in \mathbb{R}$  je libovolné.

**Řešení.** Pro ověření předpokladu (iii) Definice 5.2 stačí volit  $M = 1$ ,  $t_0 = 1$  a  $s = \omega + 1$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\exp(\omega t) \eta(t)) &= \int_0^{\infty} \exp(\omega t) \exp(-pt) dt = \\ &\lim_{u \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\exp(-(p-\omega)t)}{p-\omega} \right]_0^u = \frac{1}{p-\omega} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-(p-\omega)u)}{p-\omega} = \frac{1}{p-\omega}. \end{aligned}$$

□

Poznamenejme, že v posledním příkladu lze za  $\omega$  volit libovolnou komplexní konstantu.

**Věta 5.6.** Předpokládejme, že platí  $F(p) = \mathcal{L}f(t)$ ,  $G(p) = \mathcal{L}g(t)$ . Nechť  $r > 0$ ,  $\omega \in \mathbb{C}$  jsou konstanty. Dále nechť  $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  a  $f^{(i)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(i)}(t)$ . Potom platí následující tvrzení.

Tvrzení o	Předmět	Obraz
<i>linearitě</i>	$af(t) + bg(t)$	$aF(p) + bG(p)$
<i>podobnosti</i>	$f(rt)$	$\frac{1}{r}F\left(\frac{p}{r}\right)$
<i>posunutí předmětu vpravo</i>	$f(t-r)\eta(t-r)$	$e^{-rp}F(p)$
<i>posunutí předmětu vlevo</i>	$f(t+r)\eta(t)$	$e^{rp}F(p) - \int_0^r e^{-pt}f(t) dt$
<i>posunutí obrazu</i>	$e^{\omega t}f(t)$	$F(p-\omega)$
<i>derivaci předmětu</i>	$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
<i>n-té derivaci předmětu</i>	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0^+)p^{n-1-i}$
<i>derivaci obrazu</i>	$tf(t)$	$-F'(p)$
<i>derivaci podle parametru <math>\alpha</math></i>	$f'_\alpha(t, \alpha)$	$F'_\alpha(p, \alpha)$
<i>integraci předmětu</i>	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
<i>integraci obrazu</i>	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(z) dz$
<i>konvoluci předmětu</i>	$f(t) * g(t)$	$F(p)G(p)$
<i>Duhamelův vzorec</i>	$f(0^+)g(t) + f'(t) * g(t)$	$pF(p)G(p)$

Poznamenejme, že pro funkce  $f(t)$ ,  $g(t)$ , které jsou nulové pro záporný argument (jsou originálem Laplaceovy transformace), je dříve uvedený integrál definující konvoluci modifikován na vztah:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

Protože některá tvrzení předcházející věty plynou bezprostředně z vlastností integrálu, zaměříme se v dalším na jejich užití.

**Příklad 5.7.** Výsledky Příkladu 5.4 a Příkladu 5.5 odvoďte pomocí tabulky uvedené v předcházející větě.

**Řešení.** V obou odvozeních budeme postupovat podle různých tvrzení z tabulky.

1. Funkci  $f(t) = t^n$  je možné určit pomocí funkčních hodnot derivací této funkce:

$$f^{(n)}(t) = n!, \quad f^{(i)}(0) = 0 \quad \text{pro } i = 0, \dots, n-1.$$

Užitím tvrzení o  $n$ -té derivaci funkce dostáváme:

$$\frac{n!}{p} = \mathcal{L}((t^n)^{(n)}) = p^n \mathcal{L}t^n - \sum_{i=0}^{n-1} (t^n)^{(i)} \Big|_{t=0^+} p^{n-1-i} = p^n \mathcal{L}t^n - 0 \Rightarrow \mathcal{L}t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

2. Analogicky lze užitím tvrzení o posunutí obrazu Laplaceovy transformace funkce jednotkového skoku  $\eta(t)$  odvodit obraz funkce  $e^{\omega t}$ :

$$\mathcal{L}e^{\omega t} = \mathcal{L}(e^{\omega t} \eta(t)) = \mathcal{L}\eta(p - \omega) = \frac{1}{p - \omega}.$$

□

**Příklad 5.8.** Pomocí tvrzení uvedených v předcházející tabulce odvoďte Laplaceovy obrazy funkcí  $\sin at$ ,  $\cos at$ ,  $t \cos at$ .

**Řešení.** Obraz funkce  $\sin at$  můžeme získat užitím Eulerova vzorce a linearit Laplaceovy transformace z předchozího výsledku:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \sin at &= \mathcal{L} \frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j} = \frac{\mathcal{L}e^{jat} - \mathcal{L}e^{-jat}}{2j} = \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{p - ja} - \frac{1}{p + ja} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{p + ja - (p - ja)}{p^2 + a^2} = \frac{a}{p^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Laplaceův obraz funkce  $\cos at$  bychom mohli získat obdobně. Druhou možností je využití předchozího výsledku a tvrzení o derivaci předmětu dostáváme:

$$a \mathcal{L} \cos at = \mathcal{L}(\sin at)' = p \mathcal{L} \sin at - \sin 0 = p \cdot \frac{a}{p^2 + a^2} - \sin 0 \Rightarrow \mathcal{L} \cos at = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

Derivací podle parametru  $a$  odvodíme Laplaceův obraz funkce  $t \cos at$  z obrazu funkce  $\cos at$ :

$$\mathcal{L}(t \cos at) = \mathcal{L} \frac{\partial \sin at}{\partial a} = \frac{\partial \frac{a}{p^2 + a^2}}{\partial a} = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}.$$

Uvedený výsledek lze také získat jako  $-\frac{\partial \frac{p}{p^2 + a^2}}{\partial p}$  užitím tvrzení o derivaci obrazu. □

V dalším textu se zabýváme podrobněji obrazy periodických předmětů. Připomeňme, že funkce  $f(t)$  je periodická s periodou  $T$ , jestliže platí  $f(t+T) = f(t)$  pro  $t > 0$ . Označme  $f_T(t) = f(t) - f(t)\eta(t-T)$  funkci tvořenou jednou periodou v intervalu  $\langle 0, T \rangle$  a mimo tento interval nulovou. Dále označme  $\mathcal{L}f(t) = F(p)$ ,  $\mathcal{L}f_T(t) = F_T(p)$  a použijme rovnost

$$f(t)\eta(t) = f_T(t) + f(t-T)\eta(t-T).$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace na tuto rovnost s využitím tvrzení o posunutí předmětu odvodíme:

$$F(p) = \int_0^T f(t) \exp(-tp) dt + \int_T^\infty f(t) \exp(-tp) dt = F_T(p) + \exp(-Tp)F(p).$$

Po úpravě tohoto vztahu dostáváme tzv. **větu o obrazu periodické funkce**.

**Věta 5.9.** *Nechť funkce  $f(t)$  je originálem a navíc je periodická s periodou  $T$ . Potom platí*

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - \exp(-Tp)}. \quad (5.2)$$

**Příklad 5.10.** Nalezněte Laplaceovy obrazy dvou technicky významných funkcí a sice jednocestného usměrnění  $f_1(t) = \max(\sin t, 0)$  a dvoucestného usměrnění  $f_2(t) = |\sin t|$ .

**Řešení.** V obou případech je nutné určit Laplaceův obraz funkce

$$f(t) = \eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t,$$

která je nenulová pouze v intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\pi \sin t \exp(-pt) dt = \left[ -\frac{\exp(-pt)(\cos t + p \sin t)}{p^2 + 1} \right]_0^\pi = \frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}.$$

1. Funkce  $f_1$  má periodu  $2\pi$  a užitím předchozí věty dostáváme

$$\mathcal{L}f_1 = \frac{\frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}}{1 - \exp(-2\pi p)} = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}$$

2. Funkce  $f_2$  má periodu  $\pi$  a stejný obraz základní periody. Užitím předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f_2 &= \frac{\frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}}{1 - \exp(-\pi p)} = \frac{1}{(p^2 + 1)} \cdot \frac{1 + \exp(-\pi p)}{1 - \exp(-\pi p)} = \\ &= \frac{1}{(p^2 + 1)} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\pi p}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\pi p}{2}\right)}{\exp\left(\frac{\pi p}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\pi p}{2}\right)} = \frac{1}{(p^2 + 1)} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi p}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi p}{2}\right)} = \frac{1}{(p^2 + 1)} \coth\left(\frac{\pi p}{2}\right). \end{aligned}$$

□

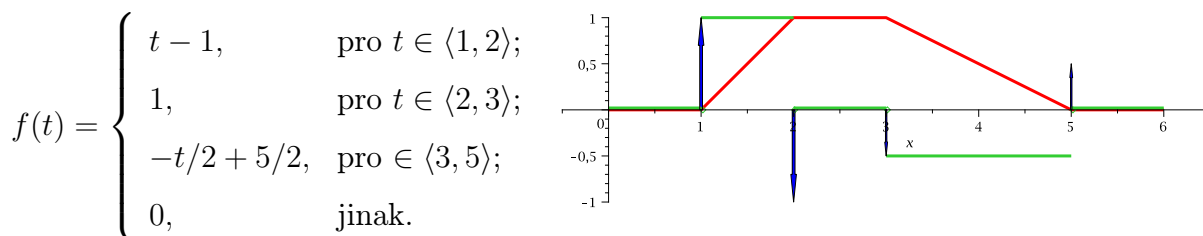
Dalším typem hledaných Laplaceových obrazů jsou obrazy předmětů, které nejsou originálem Laplaceovy transformace, jako je např. Diracova distribuce. Při hledání těchto obrazů postupujeme podobně jako u Fourierovy transformace. Využijeme toho, že takovýto předmět je limitou předmětů, jež jsou originály Laplaceovy transformace. Laplaceovou transformací těchto předmětů dostaneme posloupnost, jejíž limita je obrazem hledaného předmětu. Podobně jako u Fourierovy transformace lze u hledání obrazu Diracova impulsu a jeho derivací využít tzv. filtrační vlastnost, analogicky jako v Příkladě 4.5 b), tj.

$$\mathcal{L}\delta(t - t_0) = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-pt} dt = e^{-t_0p}, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{L}\delta^{(n)}(t - t_0) = \int_0^{\infty} \delta^{(n)}(t - t_0)e^{-pt} dt = (-1)^n (e^{-pt})^{(n)} \Big|_{t=t_0} = p^n e^{-t_0p}. \quad (5.4)$$

Uvedme jednu možnost využití obrazu Diracova impulsu při hledání obrazů některých funkcí. Příkladem může být funkce definovaná pro různé intervaly různým předpisem tak, že zobecněná derivace dostatečně velkého řádu této funkce je ve tvaru lineární kombinace Diracova impulsu a jeho derivací. V těchto případech můžeme Laplaceův obraz určit i bez analytického zápisu této funkce (viz Paragraf 4.1), a to pouze s využitím tvrzení o integraci předmětu a znalosti obrazu zobecněné derivace této funkce. Celý postup budeme ilustrovat na příkladě.

**Příklad 5.11.** Nalezněte obraz funkce popisující lichoběžníkový impuls definovaný pomocí funkce  $f$ ,



**Řešení.** Na obrázku je zobrazen graf funkce  $f$  spolu s její první a druhou derivací. Druhá derivace je zobecněnou derivací a je všude nulová kromě lineární kombinací Diracových impulsů:

$$f''_o(t) = \delta(t - 1) - \delta(t - 2) - \frac{1}{2}\delta(t - 3) + \frac{1}{2}\delta(t - 5).$$

Aplikací Laplaceovy transformace dostáváme rovnici

$$p^2 F(p) = \mathcal{L}f''_o(t) = e^{-p} - e^{-2p} - \frac{1}{2}e^{-3p} + \frac{1}{2}e^{-5p},$$

odkud jednoduchou úpravou získáme obraz  $F(p)$  funkce  $f(t)$ ,

$$F(p) = \frac{2e^{4p} - 2e^{3p} - e^{2p} + 1}{2p^2 e^{5p}}.$$



□

Poznamenejme, že pro obecný lichoběžníkový impuls  $f(t)$  s body změny  $t_1, t_2, t_3, t_4$  a výškou  $v$ , lze analogicky nalézt druhou zobecněnou derivaci

$$f_o''(t) = \frac{v}{t_2 - t_1} \delta(t - t_1) - \frac{v}{t_2 - t_1} \delta(t - t_2) - \frac{v}{t_4 - t_3} \delta(t - t_3) + \frac{v}{t_4 - t_3} \delta(t - t_4)$$

a analogickým postupem s předchozím příkladem získáme Laplaceův obraz

$$F(p) = \frac{\frac{v}{t_2 - t_1} e^{-t_1 p} - \frac{v}{t_2 - t_1} e^{-t_2 p} - \frac{v}{t_4 - t_3} e^{-t_3 p} + \frac{v}{t_4 - t_3} e^{-t_4 p}}{p^2}.$$

Před „technicky náročnější“ pasáží textu, kterou je inverzní Laplaceova transformace, vyřešíme v následujícím příkladě Laplaceovou transformací systém integro-diferenciálních rovnic. K nalezení daného řešení z vypočteného obrazu využijeme již známých výsledků, které byly odvozeny dříve při ilustraci některých vlastností Laplaceovy transformace.

**Příklad 5.12.** Nalezněte neznámou funkci  $i_1(t)$ , která spolu s funkcí  $i_2(t)$  a počátečními podmínkami  $i_1(0) = i_2(0) = 0$  je řešením systému integro-diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} Li_1'(t) + Mi_2'(t) &= \eta(t), \\ Mi_1'(t) + Li_2'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(s) ds &= 0. \end{aligned}$$

Tato úloha může být interpretována jako nalezení proudu  $i_1(t)$  v primárním obvodu dvou induktivně vázaných obvodů, přičemž jsou indukčně svázány dvě cívky o stejné indukci  $L$  a induktivní vazba mezi cívkami je  $M$  ( $M < L$ ). Druhý obvod je tvořen kromě indukčně svázaných cívek ještě kondenzátorem o kapacitě  $C$ . V čase  $t = 0$  připojíme k primárnímu obvodu napětí mající průběh jednotkového skoku  $\eta(t)$ . Počáteční podmínky jsou nulové, což znamená, že v čase  $t = 0$  je energie magnetického pole cívek nulová stejně jako energie elektrického pole kondenzátoru. Poznamenejme, že se jedná pouze o modelovou situaci, neboť nejsou vzaty v úvahu ohmické odpory v systému. Z Laplaceova obrazu této soustavy,

$$\begin{aligned} LpI_1(p) + MpI_2(p) &= \frac{1}{p}, \\ MpI_1(p) + \left( Lp + \frac{1}{Cp} \right) I_2(p) &= 0, \end{aligned}$$

můžeme snadno určit funkci  $I_1(p)$  (například užitím Cramerova pravidla):

$$I_1(p) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{p} & Mp \\ 0 & Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Lp & Mp \\ Mp & Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{p} \left( Lp + \frac{1}{Cp} \right)}{Lp \left( Lp + \frac{1}{Cp} \right) - M^2 p^2} = \frac{CLp^2 + 1}{C(L^2 - M^2)p^2 \left( p^2 + \frac{L}{C(L^2 - M^2)} \right)}.$$

Při hledání proudu  $i_1(t)$  si zjednodušíme situaci tím, že rozložíme funkci  $I_1(p)$  na součet parciálních zlomků, tj.

$$I_1(p) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{M^2}{L} \sqrt{\frac{C}{L(L^2 - M^2)}} \cdot \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \text{kde } a = \sqrt{\frac{L}{C(L^2 - M^2)}}.$$

Nyní ke každému zlomku najdeme vzor. S funkcemi, které mají obraz roven jednotlivým parciálním zlomkům (bez konstant), jsme se seznámili v Příkladu 5.4 a v Příkladu 5.8. Odtud dostáváme

$$i_1(t) = \frac{t}{L} + \frac{M^2}{L} \sqrt{\frac{C}{L(L^2 - M^2)}} \sin at.$$

Jednoznačnost takto nalezeného řešení je dále v textu řešena ve Větě 5.15. Protože v obvodu nebyly vzaty v potaz ohmické odpory není systém stabilní a proud s časem vzrůstá.

Tento příklad dokládá důležitost postupu najít předmět k danému obrazu, tj. důležitost inverzní Laplaceovy transformace. Poznamenejme, že často provedení inverzní transformace je nejobtížnější částí řešení příkladů tohoto typu. Uvedeme proto několik vět, které vymezí nutné podmínky pro funkce komplexní proměnné, jež jsou obrazem originálu Laplaceovy transformace.

**Věta 5.13.** *Nechť funkce  $F(p)$  je obrazem originálu Laplaceovy transformace, potom platí (tzv. nutné podmínky):*

1. *Existuje číslo  $\xi_1$  tak, že  $F(p)$  je regulární funkcí komplexní proměnné v polorovině  $\Re p > \xi_1$ .*
2. *V polorovině  $\Re p \geq \xi_2$ , kde  $\xi_2 > \xi_1$ , platí:  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ .*
3. *V oblasti  $|p| < k \Re p$ , kde  $k > 1$ , existuje konečná limita  $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ .*

**Poznámka 5.14.** Uvedená konečná limita  $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$  má vazbu k funkci  $f(t)$ , pro níž  $\mathcal{L}f(t) = F(p)$ . Existuje-li totiž  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ , potom platí

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

Analogicky je možné ukázat, že existují-li níže uvedené limity, potom platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{\substack{p \rightarrow 0 \\ |p| \leq k \Re p}} pF(p), \quad \text{kde } k > 1 \text{ je konstanta.}$$

Poznamenejme, že budeme pracovat i s funkcemi, které uvedené podmínky nesplňují a nejsou obrazy v klasickém slova smyslu, zejména se jedná o obraz Diracovy funkce. Podmínky uvedené ve větě jsou pouze nutné, ale ne postačující. V literatuře je v této souvislosti často uváděna funkce  $F(p) = \frac{e^{-p}}{\sqrt{p}}$ , která nutné podmínky splňuje, ale není obrazem žádné funkce  $f(t)$ .

## 5.1 Zpětná Laplaceova transformace

Východiskem úvah o zpětné Laplaceově transformaci je Lerchova věta.

**Věta 5.15.** *Nechť vzory  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  mají stejný Laplaceův obraz, tj.  $\mathcal{L}f_1(t) = \mathcal{L}f_2(t)$ . Potom platí*

$$\int_0^{\infty} |f_1(t) - f_2(t)| dt = 0.$$

Pro dva originály (Definice 5.2) se stejným obrazem se tyto předměty mohou lišit pouze hodnotami v izolovaných bodech, ve kterých alespoň jeden z nich není spojitý. Odstraněním této nejednoznačnosti tím, že se dále omezíme na originály, která mají v bodě nespojitosti funkční hodnotu rovnu aritmetickému průměru limit zleva a zprava, můžeme definovat inverzní Laplaceovu transformaci.

**Definice 5.16.** Nechť  $F$  je funkce komplexní proměnné, ke které existuje originál Laplaceovy transformace. Přiřadíme-li k funkci  $F$  originál  $f$  splňující pro každý svůj bod nespojitosti  $t_0$

$$f(t_0) = \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right),$$

potom toto přiřazení nazýváme **inverzní Laplaceovu transformací**. Tuto skutečnost zapisujeme  $\mathcal{L}^{-1}F(p) = f(t)$ .

Obdobně postupujeme i u inverzní Laplaceovy transformace Diracovy distribuce a její derivace.

### 5.1.1 Zpětná transformace racionální lomené funkce

Základní myšlenka je velmi jednoduchá. Vychází z možnosti rozkladu racionální lomené funkce (musí být ryze lomená) na součet parciálních zlomků. To je postup, který by měl každý čtenář znát z integrálního počtu funkcí jedné proměnné. Tato myšlenka je někdy zastřena složitě vypadajícími vzorci, které postup zjednodušují jen ve speciálních případech. Jelikož  $F$  je funkce komplexní proměnné, můžeme využít i rozklad na parciální zlomky v komplexním oboru.

V případě kdy se jedná o zlomek se jmenovatelem ve tvaru kvadratického trojčlenu v první mocnině je vhodné tento zlomek upravit na součet obrazů funkcí  $\sin$  a  $\cos$ :

$$\frac{Ap + B}{(p + a)^2 + b^2} = \frac{A(p + a)}{(p + a)^2 + b^2} + \frac{B - Aa}{(p + a)^2 + b^2} = A\mathcal{L}e^{-at} \cos bt - (B - Aa)\mathcal{L}e^{-at} \sin bt,$$

příčemž bylo použito tvrzení o posunutí obrazu na výsledky Příkladu 5.8.

Místo uvádění vzorců, které mohou za určitých předpokladů urychlit výpočet (např. polynom ve jmenovateli má jednoduché kořeny), je vhodné uvést, že v literatuře je možné dohledat rozsáhlé slovníky transformace.

Nutná a postačující podmínka, aby racionální lomená funkce  $F(p)$  byla obrazem originálu (viz Definice 5.2), je předpoklad, že funkce  $F(p)$  je ryze lomená, tj. stupeň polynomu ve jmenovateli je větší než stupeň polynomu v čitateli.

Celý postup zahrnující rozklad na parciální zlomky budeme ilustrovat na následujícím příkladu.

**Příklad 5.17.** Vypočtěte  $\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}$ .

**Řešení.** Vzhledem k tomu, že kvadratický dvojčlen ve jmenovateli je v první mocnině nebude obtížné provést rozklad na součet parciálních zlomků v reálném oboru. Předpokládaný tvar rozkladu bude

$$\frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \frac{A}{p + 1} + \frac{B}{(p + 1)^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 1}.$$

Po formálním součtu na pravé straně porovnáváme čitatele obou zlomků, tj.

$$\frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \frac{A(p + 1)(p^2 + 1) + B(p^2 + 1) + (Cp + D)(p + 1)^2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}.$$

Rovnice, ze kterých určíme hledané konstanty  $A, B, C, D$ , můžeme získat buď porovnáním funkčních hodnot nebo porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné  $p$ . První dvě rovnice získáme porovnáním funkčních hodnot pro  $p = -1$ ,  $p = 0$ , další dvě rovnice porovnáním koeficientů u mocnin  $p^3, p$ , tj.

$$\begin{aligned} 2 &= 2B, \\ 2 &= A + B + D, \\ 0 &= A + C, \\ 0 &= A + C + 2D. \end{aligned}$$

Tento systém má řešení  $A = 1 = B, C = -1, D = 0$ . Jestliže máme k dispozici rozklad je další výpočet jednoduchý. Obvykle využijeme vzorců pro nalezení předmětů. V tomto případě můžeme využít i výsledků z Příkladu 5.5 a z Příkladu 5.8:

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p + 1} + \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(p + 1)^2} - \mathcal{L}^{-1} \frac{p}{p^2 + 1} = \eta(t)(e^{-t} + te^{-t} - \cos t).$$

□

## 5.1.2 Integrovní tvar inverzní transformace

Při hledání integrovního tvaru Laplaceovy transformace využijeme vlastností Fourierova integrálu. Nechť funkce  $f(t)$  je originálem Laplaceovy transformace s indexem růstu  $s_0$ . Potom pro  $s > s_0$  integrál

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt$$

konverguje a tedy pro funkci  $f(t)e^{-st}$  platí Věta 4.17, jejíž tvrzení v bodech spojitosti funkce  $f(t)e^{-st}$  dává identitu:

$$f(t)e^{-st} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx}e^{-jz(x-t)} dx \right] dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jzt} \left[ \int_0^{\infty} f(x)e^{-(s+jz)x} dx \right] dz.$$

V prvním integrálu (vnitřním) je možné nahradit spodní mez  $-\infty$  nulou neboť, funkce  $f(x)$  je originálem Laplaceovy transformace. Po vynásobení výrazem  $e^{st}$  a provedení substituce ve druhém integrálu (vnějším)  $s + jz = p$ ,  $dz = dp/j$  dostáváme rovnost:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+jz)t} \left[ \int_0^{\infty} f(x)e^{-(s+jz)x} dx \right] dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} e^{pt} \left[ \int_0^{\infty} f(x)e^{-px} dx \right] dp =$$

(integrál podle proměnné  $x$  definuje Laplaceův obraz  $F(p)$  funkce  $f$ )

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \text{přesněji} = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{s-j\omega}^{s+j\omega} F(p)e^{pt} dp.$$

Uvedený nevlastní integrál po přímce  $p = s + j\omega$ , kde  $-\infty < \omega < \infty$  se obvykle vzhledem k technické náročnosti nepočítá přímo, ale pomocí reziduí. V následující větě jsou uvedené úvahy konkretizovány.

**Věta 5.18.** *Nechť funkce  $F(p)$  je holomorfní všude s výjimkou izolovaných singularit  $p_1, \dots, p_n$  ležících v polorovině  $\Re p < s$ . Nechť funkce  $F(p)$  konverguje stejnoměrně k nule na libovolné posloupnosti kružnic  $|p| = R_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ . Potom pro konvergentní*

integrál  $\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} |F(p)e^{pt}| dp$  platí

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \text{rez}(F(p) \exp pt) & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Užití této věty je v následujícím příkladu. Pro srovnání určíme pomocí reziduí předmět k funkci z příkladu 5.17.

**Příklad 5.19.** Určete vzor k funkci  $F(p) = \mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}$ .

**Řešení.** Tato funkce splňuje předpoklady věty. Má tři singulární body, jeden pól  $p_1 = -1$  druhého řádu a dvojici komplexně sdružených pólů  $p_{2,3} = \pm j$ . Vypočteme jednotlivá rezidua funkce  $F(p)e^{pt}$

$$\text{rez}_{p=-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} e^{pt} = \lim_{p \rightarrow -1} \left( \frac{2e^{pt}}{(p^2 + 1)} \right)' = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{2te^{pt}}{(p^2 + 1)} - \frac{4pe^{pt}}{(p^2 + 1)^2} = e^{-t}(1 + t),$$

$$\text{rez}_{p=\pm j} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} e^{pt} = \lim_{p=\pm j} \frac{2e^{pt}}{(p \pm j)(p + 1)^2} = \frac{2e^{\pm jt}}{(\pm 2j)(\pm 2j)} = -\frac{e^{\pm jt}}{2},$$

a dostáváme funkci  $f(t)$ :

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = e^{-t}(1 + t) - \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = e^{-t}(1 + t) - \cos t.$$

□

**Poznámka 8.** Uvedenou větu lze formulovat i v podstatně silnějším znění [9]. Například může být reziduí nekonečně mnoho a jejich suma je nahrazena nekonečnou řadou, kde rezidua sčítáme podle velikosti jejich modulu. Tamtéž je použití této věty při hledání předmětu, který je  $T$  periodický; to jest funkce  $F(p)$  je součinem a jeden činitel je zlomek  $\frac{1}{1 - e^{-pT}}$ . Tento zlomek má nekonečně mnoho jednoduchých pólů. Dále je třeba poznamenat, že předpoklady této věty nejsou splněny ani u jednoduchých funkcí. Například u funkce  $R(p)e^{at}$  ( $R(p)$  je racionální lomená funkce) postupujeme tak, že nalezneme předmět racionální lomené funkce  $R(p)$  a použijeme větu o translaci. Další možností je využít vyjádření předmětu ve tvaru konvoluce.

Dalším „speciálním“ případem je obraz, který je nulový a holomorfní v nekonečnu.

**Věta 5.20.** 1. *Heavivideova věta o rozkladu.* Nechť lze funkci  $F(p)$  pro  $|p| > R > 0$  vyjádřit ve tvaru konvergentní řady:

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Potom platí:

$$\mathcal{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Užitečnost této budeme demonstrovat na následujícím příkladu

**Příklad 5.21.** Pomocí předchozí věty ukažte, že platí  $\mathcal{L} \left( \frac{\sin t}{t} \right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{p}$ .

**Řešení.** Uvedenou rovnost získáme porovnáním rozvoju obou funkcí. Funkce  $\sin t$  má Taylorovu řadu se středem v  $t_0 = 0$  ve tvaru  $\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$  odtud plyne rozvoj funkce

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$$

Taylorovu řadu funkce  $\operatorname{arctg} t$  lze získat integrací geometrické řady  $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}$ .

Platí tedy

$$\operatorname{arctg} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} \Leftrightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{p^{2k+1}}.$$

V obou řadách máme  $a_n = \begin{cases} 0, & \text{pro sudé } n = 2k; \\ \frac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{pro liché } n = 2k + 1. \end{cases}$  Funkce  $\operatorname{arctg}$  je funkcí komplexní a v odvozené rovnosti je brána pouze hlavní větev ve shodě se vzorcem (3.23).  $\square$

Poznamenejme, že uvedený příklad může být vhodnou ukázkou použití Heavisideovy věty v obou směrech, neboť funkce  $\frac{\sin t}{t}$  má transcendentní integrál a naopak funkce  $\operatorname{arctg} \frac{1}{p}$  má v počátku podstatnou singularitu.

## 5.2 Souvislost Fourierovy a Laplaceovy transformace

Při odvozování integrálního vyjádření inverzní Laplaceovy transformace jsme ukázali, že Laplaceův obraz funkce  $f(t)$  je ekvivalentní souboru Fourierových obrazů funkcí  $f(t)e^{-st}$ , kde  $s > s_0$ . Z toho plynou některé následující důsledky.

Fourierovy obrazy lze někdy počítat pomocí Laplaceových obrazů, které se snáze počítají, neboť to jsou holomorfní funkce. Rozlišme dva případy:

1. Funkce  $f(t)$  je nulová pro  $t < 0$  a obraz Fourierovy transformace existuje (je originálem Laplaceovy transformace), potom Fourierův obraz dostaneme tak, že v Laplaceovu obrazu za  $p$  dosadíme  $p = j\omega$ :

$$\mathcal{F} f(t) = F(\omega) = \mathcal{L} f(t)|_{p=j\omega}$$

2. Funkce  $f(t)$  má obraz Fourierovy transformace a pro  $t < 0$  je nenulová. Označme  $f^+(t)$  zúžení funkce  $f(t)$  na  $\langle 0, \infty \rangle$  a  $f^-(t) = f(-t)$  pro  $t \in \langle 0, \infty \rangle$ . Předpokládejme, že jejich Laplaceovy obrazy  $F_1(p) = \mathcal{L} f^+(t)$ ,  $F_2(p) = \mathcal{L} f^-(t)$  existují. Potom platí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(-t)e^{j\omega t} dt = F_1(j\omega) + F_2(-j\omega),$$

Užití této identity umožní v návaznosti na výsledek Příkladu 5.21 určit Fourierův obraz funkce  $\frac{\sin t}{t}$ . Uvážíme, že funkce  $\frac{\sin t}{t}$  je sudá a dostáváme:

$$\mathcal{F} \left( \frac{\sin t}{t} \right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{j\omega} + \operatorname{arctg} \frac{-1}{j\omega}.$$

S použitím vzorce (3.23) dostáváme rovnost

$$\mathcal{F} \left( \frac{\sin t}{t} \right) = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + j\frac{1}{j\omega}}{1 - j\frac{1}{j\omega}} - \frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + j\frac{-1}{j\omega}}{1 - j\frac{-1}{j\omega}} = -\frac{j}{2} \left( \operatorname{Ln} \frac{\omega + 1}{\omega - 1} + \operatorname{Ln} \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \right).$$

Pro reálnou proměnnou  $\omega$  nastávají dvě možné varianty

1.  $|\omega| > 1$ , z čehož plyne  $\frac{w-1}{w+1} > 0$  a dané logaritmy jsou reálnými funkcemi, které se vzájemně sečtou na 0, neboť jejich argumenty jsou převrácenými hodnotami.
2.  $|\omega| < 1$  z čehož plyne  $\frac{w-1}{w+1} < 0$  a pro dané logaritmy platí:

$$\operatorname{Ln} \frac{w+1}{w-1} + \operatorname{Ln} \frac{w-1}{w+1} = \ln \left| \frac{w+1}{w-1} \right| + j\pi + \ln \left| \frac{w-1}{w+1} \right| + j\pi = 2j\pi,$$

neboť se reálné logaritmy odečtou ze stejného důvodu jako v prvním případě.

Celkově dostáváme funkci, které je nulová pro  $t \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$  a v intervalu  $(-1, 1)$  rovna  $-\frac{j}{2}2j\pi = \pi$ :

$$\mathcal{F} \left( \frac{\sin t}{t} \right) = \pi(\eta(\omega+1) - \eta(\omega-1)).$$

### 5.3 Užití Laplaceovy transformace k řešení rovnic

Jak jsme již uvedli v úvodu, je Laplaceova transformace s výhodou používána k řešení diferenciálních, integro-diferenciálních rovnic a jejich soustav. Předností tohoto postupu je, že při jeho užití u rovnic s konstantními koeficienty jsou transformované rovnice algebraickými. Další výhodou je, že při řešení Cauchyho počáteční úlohy není třeba hledat obecné řešení a posléze určovat partikulární řešení na základě počátečních podmínek. Je-li cílem nalezení obecného řešení integro-diferenciální rovnice, dosadíme za počáteční podmínky obecné konstanty a popsáním postupem získáme obecné řešení.

V následujících ukázkách budeme postupovat od jednodušších příkladů ke složitějším, navíc budeme při hledání předmětu užívat různé možnosti jeho nalezení.

**Příklad 5.22.** Nalezněte řešení diferenciální rovnice  $x'' - 2x' = e^t(t^2 + t - 3)$ , určené počátečními podmínkami  $x(0) = 2$ ,  $x'(0) = 2$ .

**Řešení.** Nejdříve nalezneme obraz rovnice:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x'' - 2\mathcal{L}x' &= \mathcal{L}e^{t^2} + \mathcal{L}e^t t - 3\mathcal{L}e^t, \\ p^2 X(p) - 2p - 2 - 2pX(p) + 4 &= \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{3}{p-1}, \\ X(p)(p^2 - 2p) &= \frac{-3p^2 + 7p - 2}{(p-1)^3} + 2p - 2. \end{aligned}$$

Rovnici vyřešíme vzhledem k  $X(p)$  a získanou racionální lomenou funkcí rozložíme na součet parciálních zlomků :

$$X(p) = \frac{2p^3 - 8p^2 + 9p - 1}{(p-1)^3(p-2)} = \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{2}{(p-1)^3}.$$



Předmět nalezneme pomocí vzorce pro obraz funkce  $t^n$  spolu s tvrzením o posunutí obrazu:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{2}{(p-1)^3} \right\} = e^{2t} + e^t(1-t-t^2).$$

□

**Příklad 5.23.** Nalezněte řešení systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} 3y_1' - y_2'' + y_2' - y_1 &= 2t^2 + f(t) \\ y_2' - 3y_1 &= 0, \end{aligned}$$

určené počátečními podmínkami  $y_1(0) = 0$ ,  $y_2'(0) = y_2(0) = 0$ , kde  $f(t)$  je libovolná spojitá funkce.

**Řešení.** Budeme postupovat analogicky s předcházející ukázkou. Nejdříve určíme obraz systému rovnic ( $f(t) \leftrightarrow F(p)$ ):

$$\begin{aligned} 3pY_1 - p^2Y_2 + pY_2 - Y_1 &= \frac{4}{p^3} + F(p), \\ pY_2 - 3Y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k proměnným  $Y_1, Y_2$  jsme získali systém dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} (3p-1)Y_1 + Y_2(p-p^2) &= \frac{4}{p^3} + F(p), \\ -3Y_1 + pY_2 &= 0, \end{aligned}$$

jehož řešení můžeme získat pomocí Cramerova pravidla:

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{p^3} + F(p) & p(1-p) \\ 0 & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p-1 & p(1-p) \\ -3 & p \end{vmatrix}} = \frac{\frac{4}{p^3} + pF(p)}{\underbrace{3p^2 - p + 3p - 3p^2}_{2p}} = \frac{2}{p^3} + \frac{F(p)}{2},$$

$$Y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3p-1 & \frac{4}{p^3} + F(p) \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{2p} = \frac{6}{p^4} + \frac{3F(p)}{2p}.$$

Dále použijeme vzorec pro obraz funkce  $t^n$  spolu s tvrzením o integrálu předmětu dostáváme:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p^3} + \frac{F(p)}{2} \right\} = t^2 + \frac{1}{2}f(t), \\ y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{p^4} + \frac{3F(p)}{2p} \right\} = t^3 + \frac{3}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

□

Předmět k obrazu  $F(p)/p$ , v němž je blíže neurčená funkce, jsme získali podle tvrzení o integraci předmětu. Stejný výsledek bychom získali podle tvrzení o konvoluci předmětů. Funkce  $1/p$  má předmět Heavisideovu funkci jednotkového skoku a  $F(p)$  funkci  $f(t)$ . Vyjádření předmětu ve tvaru konvolučního integrálu je postup mnohem využitelnější. V dalším příkladu tohoto obratu využijeme při řešení diferenciální rovnice s periodickou pravou stranou.

**Příklad 5.24.** Řešte diferenciální rovnici  $y' + y = f(t) = \max(\sin t, 0)$  spolu s nulovými počátečními podmínkami  $y(0) = 0$ .

**Řešení.** S využitím Příkladu 5.10 získáme snadno Laplaceův obraz rovnice

$$pY(p) + Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))},$$

ze které snadno nalezneme obraz řešení,

$$Y(p) = \frac{1}{(p + 1)(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}.$$

Funkci  $Y(p)$  je možné chápat jako součin dvou funkcí

$$\frac{1}{p + 1} \cdot \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}$$

se známými předměty. Využitím tvrzení o konvoluci předmětů můžeme řešení formálně vyjádřit ve tvaru konvolučního integrálu:

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \max(\sin \tau, 0) d\tau.$$

Velice často, např. při studiu asymptotického chování řešení rovnice, je vhodnější jiný zápis tohoto řešení ve tvaru součtu periodické a neperiodické složky. Předpokládejme, že takovýto postup je možný a obraz řešení má tvar:

$$Y(p) = \frac{1}{(p + 1)(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))} = \frac{A}{p + 1} + \frac{G_{2\pi}(p)}{1 - \exp(-2\pi p)},$$

kde druhý sčítanec je obrazem periodické složky. Vzhledem k periodicitě pravé strany  $f(t) = \max(\sin t, 0)$  rovnice očekáváme periodu  $2\pi$  pro tuto periodickou složku řešení. Proto, s využitím tvrzení o obrazu periodické funkce, je obrazem této složky řešení zlomek, který ve jmenovateli obsahuje rozdíl  $1 - \exp(-2\pi p)$  a čítec je obrazem jediného impulsu  $G_{2\pi}(p)$ . Po vynásobení rovnice výrazem  $1 - \exp(-2\pi p)$  dostáváme

$$\frac{1}{p + 1} \cdot \frac{1 + \exp(-p\pi)}{(p^2 + 1)} = \frac{A(1 - \exp(-2\pi p))}{(p + 1)} + G_{2\pi}(p).$$

Nyní použijeme inverzní transformaci s tím, že druhý čítec součinu vlevo je předmětem jednoho impulsu  $f_{2\pi}(t) = \eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t$  a při stanovení předmětu levé strany rovnice využijeme tvrzení o konvoluci předmětů

$$e^{-t} * (\eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f_{2\pi}(\tau) d\tau = A (e^{-t}\eta(t) - e^{-(t-2\pi)}\eta(t - 2\pi)) + g_{2\pi}(t).$$

Protože předměty  $f_{2\pi}$ ,  $g_{2\pi}$  jsou pro  $t > 2\pi$  nulové dostaneme vztah z něhož určíme  $A$ :

$$e^{-t} \frac{e^\pi + 1}{2} = e^{-t} \int_0^\pi e^\tau \sin \tau d\tau = Ae^{-t}(1 - e^{2\pi}) \Rightarrow A = \frac{-1}{2(\exp(\pi) - 1)}.$$

Po dosazení za  $A$  do rovnice získáme vztah, ze kterého určíme na intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  periodickou složku řešení  $g_{2\pi}(t)$ . V intervalu  $0 < t < \pi$  platí:

$$g_{2\pi}(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau d\tau + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin t - \cos t) + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{1}{2} \left( \sin t - \cos t + e^{-t} \frac{e^\pi}{e^\pi - 1} \right).$$

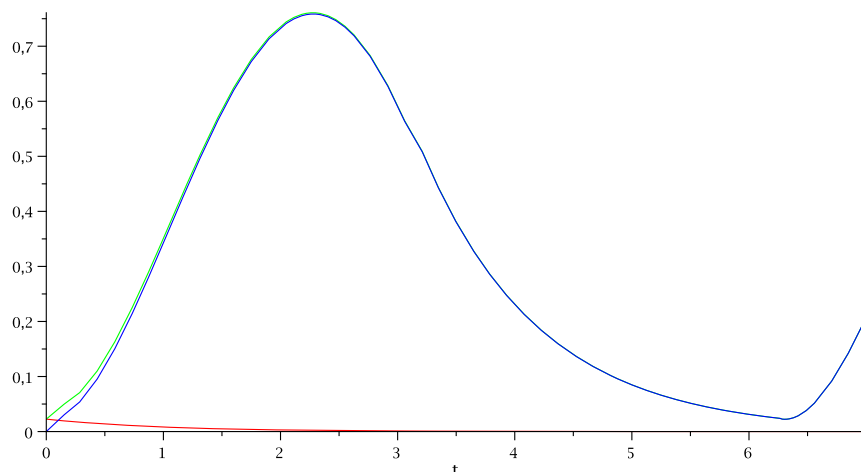
Analogicky dostáváme pro  $\pi < t < 2\pi$ :

$$g_{2\pi}(t) = \int_0^\pi e^{-(t-\tau)} \sin \tau d\tau + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{e^{-t}}{2} (e^\pi + 1) + \frac{e^{-t}}{2} \frac{e^\pi}{e^\pi - 1} = \frac{e^{-t} e^{2\pi} + e^\pi - 1}{2 e^\pi - 1}.$$

Řešení  $y(t)$  nalezneme ve tvaru součtu

$$y(t) = \frac{1}{2(\exp(\pi) - 1)} e^{-t} + g_{per}(t),$$

kde  $g_{per}(t)$  je periodická složka řešení dostatečně popsána průběhem v základním intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  ( $g_{per}(t) = g_{2\pi}(t)$  pro  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ). Vzhledem k tomu, že neperiodická složka  $A = \frac{1}{2(\exp(\pi) - 1)} e^{-t}$  nabývá velmi malých hodnot, lze pro dostatečně velká  $t$  řešení ztotožnit s periodickou složkou. Toto má i praktický význam. Daná rovnice popisuje tok elektrického proudu v obvodu tvořeném cívkou o indukci  $L = 1$  a ohmickým odporem  $R = 1$ , který byl v čase  $t = 0$  připojen k jednocestnému usměrněnému napětí. Nalezená periodická složka řešení popisuje potom ustálený stav.  $\square$



**Poznámka 9.** V předcházejícím příkladu byl realizován postup nalezení periodické složky řešení. Podrobněji je tento postup popsán v [9].

V praktických případech často opakovaně řešíme podobné rovnice, kde levá strana je stejná a mění se pouze pravá strana. Budeme-li rovnici interpretovat tak, že její řešení je reakcí nějakého systému na vstup popsáný pravou stranou, je vhodné získat výsledek ve tvaru, kdy je možné pouze dosazovat různé pravé strany. Např. je-li řešením proud v elektrickém obvodu popsáným nějakou lineární integro-diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty  $\mathcal{L}(i(t))$  a pravou stranou je nějaké napětí  $u(t)$ , ke kterému je obvod připojen, znamená to opakovaně řešit rovnici  $\mathcal{L}(i(t)) = u(t)$ . Z toho plyne, že Laplaceův obraz této rovnice  $Y(p)L(p) = U(p)$  má řešení za stejných počátečních podmínek vždy ve tvaru součinu funkcí

$$Y(p) = \frac{1}{L(p)} \cdot U(p).$$

S využitím vlastností konvoluce dvou funkcí  $l(t) \leftrightarrow \frac{1}{L(p)}$ ,  $u(t) \leftrightarrow U(p)$  dostáváme řešení

$$i(t) = \int_0^t l(t-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Výše uvedená funkce  $l(t)$  se v teorii lineárních systémů nazývá **impulsní charakteristika**, protože je tato funkce chápána jako odezva systému na Diracův impuls. Funkce  $l(t)$  je totiž Laplaceovým vzorem funkce  $\frac{1}{L(p)}$  a čitatel tohoto zlomku je obrazem Diracova impulsu  $\delta(t) \leftrightarrow 1$ . Stanovit tuto charakteristiku experimentálně je obtížné, neboť se Diracova funkce i přibližně neseznamuje. Je mnohem jednodušší stanovit charakteristiku  $h(t)$  jako reakci systému na Heavisideovu funkci jednotkového skoku:

$$\mathcal{L}(h(t)) = \eta(t) \Leftrightarrow H(p)L(p) = \frac{1}{p}.$$

Tato charakteristika se nazývá **přechodová charakteristika** a umožní s využitím Duhamelova vzorce jiné vyjádření reakce systému  $\mathcal{L}(i(t)) = u(t)$  na libovolnou pravou stranu  $u(t)$ . Platí

$$I(p) = \frac{1}{L(p)}U(p) = p \frac{1}{pL(p)}U(p) = pH(p)U(p)$$

a aplikací zmíněného Duhamelova vzorce dostáváme

$$i(t) = h(t)u(0^+) + h(t) * u'(t) \quad \text{nebo} \quad i(t) = h(0^+)u(t) + h'(t) * u(t).$$

V případě, že se jedná o lineární diferenciální rovnici  $n$ -tého řádu s konstantními koeficienty tj.,

$$\mathcal{L}i(t) = a_n i^{(n)}(t) + a_{n-1} i^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 i'(t) + a_0 i(t),$$

je funkce  $L(p)$  charakteristickým polynomem. V tomto případě máme možnost určit předmět  $l(t)$  i jinak než jako odezvu na Diracův impuls. Budeme-li uvažovat homogenní systém, tj. systém s nulovou pravou stranou, a dále konkrétní počáteční úlohu určenou počátečními podmínkami

$$i(0) = 0, \quad i'(0) = 0, \quad \dots, \quad i^{(n-2)}(0) = 0, \quad i^{(n-1)}(0) = 1,$$

dostaneme pro obraz řešení rovnici ve tvaru

$$I(p) = \frac{a_n}{L(p)}.$$

Poslední rovnice je až na násobek  $a_0$  obrazem impulsní charakteristiky lineárního systému. Partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice můžeme vyjádřit pomocí konvolučního integrálu, již dříve zavedené váhové funkce. Ta je řešením nehomogenní rovnice (dělená koeficientem  $a_n$ ) splňující výše uvedené počáteční podmínky.

## 5.4 Slovník Laplaceovy transformace

Všechny předměty v tabulce jsou násobeny funkcí jednotkového skoku  $\eta(t)$  a tuto skutečnost je třeba při práci s tabulkou zohlednit.

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
$A$	$\frac{A}{p}$	$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\cos bt, b \neq 0$	$\frac{p}{p^2+b^2}$	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
$\sin bt, b \neq 0$	$\frac{b}{p^2+b^2}$	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
$\cosh bt, b \neq 0$	$\frac{p}{p^2-b^2}$	$e^{-at} \cosh bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
$\sinh bt, b \neq 0$	$\frac{b}{p^2-b^2}$	$e^{-at} \sinh bt$	$\frac{b}{(p+a)^2-b^2}$
$t \cos bt, b \neq 0$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$	$e^{-at}t \cos bt$	$\frac{(p+a)^2-b^2}{((p+a)^2+b^2)^2}$
$t \sin bt, b \neq 0$	$\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}$	$e^{-at}t \sin bt$	$\frac{2b(p+a)}{((p+a)^2+b^2)^2}$
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}, b \neq a$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{e^{at}-\cos bt-\frac{a}{b}\sin bt}{a^2+b^2}$	$\frac{1}{(p-a)(p^2+b^2)}$
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}, b \neq a$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{ae^{at}-a\cos bt+b\sin bt}{a^2+b^2}$	$\frac{p}{(p-a)(p^2+b^2)}$
$(1+at)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$	$\frac{a^2e^{at}+b^2\cos bt+ab\sin bt}{a^2+b^2}$	$\frac{p^2}{(p-a)(p^2+b^2)}$
$\left(t+\frac{at^2}{2}\right)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^3}$	$\frac{\sin bt-bt\cos bt}{2b^3}$	$\frac{1}{(p^2+b^2)^2}$

## 5.5 Příklady na procvičení

### Cvičení

1. Určete Laplaceův obraz funkce  $f(t)\eta(t)$

a)  $f(t) = 1 - 2 \cos 3t$

b)  $f(t) = te^{-2t}$

c)  $f(t) = \sqrt{t}e^{-t}$

d)  $f(t) = te^t \cos 2t$

2. Načrtněte graf signálu  $f(t)$  a určete jeho Laplaceův obraz:

a)  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ t^2 & \text{pro } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{pro } 1 < t \end{cases}$

b)  $f(t) = \begin{cases} 2t - t^2 & \text{pro } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{pro } t < 0, 2 < t \end{cases}$

c)  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \sin t & \text{pro } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pro } \frac{\pi}{2} < t \end{cases}$

d)  $f(t) = \begin{cases} 2t - 4 & \text{pro } 2 < t < 4 \\ 8 - t & \text{pro } 2 \leq t < 8 \\ 0 & \text{pro } t < 2, 8 < t \end{cases}$

3. Načrtněte graf periodického signálu  $f(t)$  s periodou  $T$  a určete jeho Laplaceův obraz:

a)  $T = 6$

$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 < t < 1 \\ 4t - 4 & \text{pro } 1 \leq t < 2 \\ 6 - t & \text{pro } 2 \leq t < 6 \end{cases}$

b)  $T = 4$

$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{pro } 2 < t < 4 \end{cases}$

4. Určete předmět k Laplaceovu obrazu  $F(p)$

a)  $F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)}$

b)  $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)^2}$

c)  $F(p) = \frac{(p-3)^2}{p(p^2+9)}$

d)  $F(p) = \frac{p^2+1}{p^3+4p^2+13p}$

5. Nalezněte řešení diferenciálních rovnic určených počátečními podmínkami:

a)  $y'' + 5y' + 6y = 12e^t, y(0^+) = y'(0^+) = 1$

b)  $y'' + 4y = \cos t, y(0^+) = 0, y'(0^+) = 0$

c)  $y''' + y' = e^{2t}, y(0^+) = 1, y'(0^+) = -1, y''(0^+) = 2$

d)  $y'' + 3y' + 2y = t + e^{-t}, y(0^+) = y'(0^+) = 0$

6. Nalezněte řešení integrálních a integro-diferenciálních rovnic případně určených počátečními podmínkami:

a)  $y' + 6y + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 0, y(0^+) = 0$

b)  $y' - y - 2 \int_0^t y(\tau) d\tau = \sin t, y(0^+) = 0$

c)  $y(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$

d)  $y'' + y' + y + \int_0^t y(\tau) d\tau = 2, y(0^+) = 2, y'(0^+) = -2$

7. Nalezněte řešení systému diferenciálních a integro-diferenciálních rovnic určených počáteč-

ními podmínkami:

$$\text{a) } \begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2, & y_1(0^+) &= 1, & y_2(0^+) &= 1 \\ y_2' &= 5y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} y_1' &= 7y_1 - 18y_2 + 12e^{-t}, & y_1(0^+) &= 2, & y_2(0^+) &= 1 \\ y_2' &= 3y_1 + 5y_2 + 5e^{-t} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} y_1'' + 7y_2' + 8y_1 &= 0, & y_1(0^+) &= 1, & y_1'(0^+) &= 0, & y_2(0^+) &= 0, & y_2'(0^+) &= 0, \\ y_2'' - y_1' + 2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$y_1' = -2y_1 + y_2'$$

$$\text{b) } \begin{aligned} y_2' &= 2y_1 - 3y_2' + y_3, & y_1(0^+) &= 1, & y_1'(0^+) &= 0, & y_2(0^+) &= 1, & y_3(0^+) &= 0, \\ y_3' &= 2y_2' - 3y_3 \end{aligned}$$

## Výsledky

$$1\text{a) } F(p) = \frac{p^2 - 6p + 9}{p^3 + p}$$

$$1\text{b) } F(p) = \frac{1}{(p+2)^3}$$

$$1\text{c) } F(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(p+1)^{2/3}}$$

$$1\text{d) } F(p) = \frac{p^2 - 2p - 3}{(p^2 - 2p + 5)^2}$$

$$2\text{a) } F(p) = \frac{e^{-p}}{p} \left[ 1 - \frac{1}{2}e^{-p}(3 - e^{-2p}) \right]$$

$$2\text{b) } F(p) = \frac{2}{p^2}(1 - e^{-2p}) - \frac{2}{p^3}(1 + e^{-2p})$$

$$2\text{c) } F(p) = \frac{p + e^{-p\frac{\pi}{2}}}{p(p^2 + 1)}$$

$$2\text{d) } F(p) = \frac{1}{p^2}(2e^{2p} - 3e^{-3p} + e^{-8p})$$

$$3\text{a) } F(p) = \frac{2e^{-p} - 3e^{-2p} + e^{-4p}}{p^2(1 + e^{-6p})}$$

$$3\text{b) } F(p) = \frac{2 - 4pe^{-2p}}{p(1 + e^{-4p})^3}$$

$$4\text{a) } f(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$$

$$4\text{b) } f(t) = t - 2 = e^{-t}(t + 2)$$

$$4\text{c) } f(t) = 1 - 2 \sin 3t$$

$$4\text{d) } f(t) = \frac{1}{13} \left[ 1 + e^{-2t} \left( 12 \cos 3t - \frac{28}{3} \sin 3t \right) \right]$$

$$5\text{a) } f(t) = e^t$$

$$5\text{b) } f(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$$

$$5\text{c) } f(t) = \frac{36 \cos t - 12 \sin t - e^t - 15}{10}$$

$$5\text{d) } f(t) = \frac{3}{4}(e^{-2t} - 1) = te^{-t} + \frac{t}{2}$$



6a)  $f(t) = e^{-3t}(1 - 3t)$

6b)  $f(t) = \frac{1}{2}(\sin t - te^{-t})$

6c)  $f(t) = \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t$

6d)  $f(t) = 2e^{-t}$

7a)  $y_1(t) = e^{2t}(\cos 3t - \sin 3t)$

$y_2(t) = e^{2t}(\cos 3t + 2 \sin 3t)$

7b)  $y_1(t) = -4e^{-2t} + 3e^{-t} + 3e^t$

$y_2(t) = -2e^{-2t} + 2e^t + e^t$

7c)  $y_1(t) = \frac{7}{15} \cos 4t - \frac{8}{15} \cos t$

$y_2(t) = \frac{2}{15} \sin 4t - \frac{8}{15} \sin t$

7d)  $y_1 = \frac{1}{5}(1 - e^{-5t})$        $y_2 = \frac{1}{5}(2 + 3e^{-5t})$        $y_3 = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})$

## Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Laplaceova transformace - hledání obrazu reálné funkce či předmětu komplexní funkce.](#)
2. [Řešení lineární diferenciální rovnice \(až třetího řádu\) s konstantními koeficienty pomocí Laplaceovy transformace.](#)

## 6 $\mathcal{Z}$ transformace

Cílem předchozí kapitoly bylo seznámit čtenáře se základním matematickým aparátem pro popis systémů se spojitým časem. Velice často se zabýváme systémy kdy se studovaná veličina vytváří, případně je měřena, jen v diskrétních časových okamžicích, zpravidla stejně od sebe vzdálených. Takovým příkladem jsou impulsní soustavy. Situaci popisujeme pomocí posloupností, jejíž členy představují hodnoty jisté fyzikální veličiny v daných časových okamžicích. Rovnice popisující vlastnosti těchto diferenčních systémů můžeme řešit analogicky jako ve se spojitým případě pomocí transformace. Touto transformací je  $\mathcal{Z}$  transformace.

**Definice 6.1.** Nechť je dána posloupnost čísel  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Jestliže existuje alespoň jedno komplexní číslo  $0 \neq z \neq \infty$  takové, že funkční řada

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} \quad (6.1)$$

konverguje, potom řekneme, že posloupnost  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  je  $\mathcal{Z}$  transformovatelná neboli **přípustná**. Její součet  $F(z)$  je komplexní regulární funkce definovaná v okolí bodu  $\infty$  a nazýváme ji **obrazem posloupnosti**  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Tuto skutečnost zapisujeme  $\mathcal{Z}\{f_n\}$  nebo též  $F(z) \leftrightarrow \{f_n\}$ . Toto přiřazení je jediné a nazýváme jej **Z-transformací**.

V dalším textu budeme pro jednoduchost indexování posloupnosti vynechávat, tj. symbolem  $\{f_n\}$  budeme rozumět vždy posloupnost  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Poznamenejme, že často bývá posloupnost zapisována pouze pomocí  $n$ -tého členu  $f_n$ , resp. posloupnosti funkčních hodnot  $f(n)$ . Abychom vymezili množinu přípustných posloupností zavedeme pojem index růstu posloupnosti.

**Definice 6.2.** Řekneme, že posloupnost  $\{f_n\}$  je **ohraničeného růstu s indexem  $s$** , jestliže existují konstanty  $M, s$  takové, že

$$|f_n| \leq M e^{sn} \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}_0.$$

**Věta 6.3.** Platí, že posloupnost  $\{f_n\}$  je  $\mathcal{Z}$  transformovatelná, právě když je ohraničeného růstu s indexem  $s$ , kde  $s$  je vhodné číslo.

**Příklad 6.4.** Konstantní posloupnost  $\{1\}$  (posloupnost  $\{1\}$  nazýváme diskrétní jednotkový impuls) je ohraničeného růstu s indexem 0. Její obraz nalezneme pomocí součtu geometrické řady, tj.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

**Příklad 6.5.** Snadno vidíme, že posloupnost  $\{e^{an}\}$  je ohraničeného růstu s indexem  $|a|$ , pro libovolné komplexní  $a$ . Její obraz nalezneme opět pomocí součtu geometrické řady.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{an}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - e^a z^{-1}} = \frac{z}{z - e^a}.$$

Pokud bychom tuto posloupnost zapsali ve tvaru  $\{\alpha^n\}$  obdrželi bychom výsledkem ve tvaru

$$\mathcal{L}\{\alpha^n\} = \frac{z}{z - \alpha}.$$

Než uvedeme větu, která přehledně shrne základní vlastnosti  $\mathcal{L}$  transformace, zavedeme některé důležité pojmy analogické s pojmy vyskytujícími se ve formulaci podobných vět pro transformace integrální. Důležitým pojmem je konvoluce.

**Definice 6.6.** Konvolucí  $\{f_n * g_n\}$  posloupností  $\{f_n\}$ ,  $\{g_n\}$  nazýváme posloupnost, pro jejíž členy platí vztah

$$f_n * g_n = \sum_{i=0}^n f_{n-i} g_i.$$

**Příklad 6.7.** Spočtěme konvoluci několika jednoduchých posloupností

$\{f_n\}$	$\{g_n\}$	$\{f_n * g_n\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\sum_{i=0}^n 1 = \{n+1\}$
$\{1\}$	$\{n\}$	$\sum_{i=0}^n i = \left\{\frac{n}{2}(n+1)\right\}$
$\{1\}$	$\{f_n\}$	$\left\{\sum_{i=0}^n f_i\right\} = \{s_n\}$ posl. část. součtů
$\{n\}$	$\{f_n\}$	$\left\{\sum_{i=0}^n (n-i)f_i\right\} = n(f_n * 1) - (nf_n) * 1$

Poznamenejme, že jsou-li obě posloupnosti přípustné je i jejich konvoluce přípustná posloupnost. Navíc je konvoluce posloupností operací, která je komutativní, distributivní a asociativní.

**Definice 6.8.** Nechť  $k$  je přirozené číslo. O posloupnosti  $\{g_n\} = \{f_{n+k}\}$  řekneme, že vznikla z posloupnosti  $\{f_n\}$  posunutím o  $k$  míst vlevo, jestliže pro její členy  $g_n$  platí

$$g_n = f_{n+k} \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots$$

O posloupnosti  $\{h_n\} = \{f_{n-k}\}$  řekneme, že vznikla z posloupnosti  $\{f_n\}$  posunutím o  $k$  míst vpravo, jestliže pro její členy  $h_n$  platí

$$h_n = \begin{cases} 0, & \text{pro } n = 0, 1, \dots, k-1; \\ f_{n-k}, & \text{pro } n = k, k+1, \dots \end{cases}$$

Další důležitou operací je vytvoření posloupnosti diferencí k dané posloupnosti.

**Definice 6.9.** Nechť je zadaná posloupnost  $\{f_n\}$  potom výraz  $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$  nazýváme **první diferencí** a  $\{\Delta f_n\}$  **posloupností diferencí**. Diference vyšších řádů definujeme rekurentně pomocí první diference

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n)$$

a výraz  $\Delta^k f_n$  nazýváme **k-tou diferencí** a  $\{\Delta^k f_n\}$  **posloupností k-tých diferencí**.

Poznamenejme, že můžeme tedy posloupnost diferencí chápat jako lineární kombinaci posunutých posloupností:

$$\Delta^k y_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_{n+i}. \quad (6.2)$$

Tento vztah lze dokázat matematickou indukcí. Budeme-li považovat posloupnost  $\{f_n\}$  za posloupnost nulových diferencí  $\{\Delta^0 f_n\}$  (tj.  $\Delta^0 f_n = f_n$ ) uvedený vzorec platí pro  $k = 1$ .

Použijeme-li indukční předpoklad pro  $k - 1$  tj.  $\Delta^{k-1} y_n = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} f_{n+i}$ , pro  $k$ -tou diferencí odvodíme

$$\begin{aligned} \Delta^k f_n &= \Delta^{k-1} f_{n+1} - \Delta^{k-1} f_n = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} f_{n+1+i} - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} f_{n+i} \\ &= f_{n+k} + \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} f_{n+1+i} - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} f_{n+i} + (-1)^k f_n = \\ &= f_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k-1}{i-1} f_{n+i} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k-1}{i} f_{n+i} + (-1)^k f_n = \\ &= f_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i} \underbrace{\left( \binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} \right)}_{= \binom{k}{i}} f_{n+i} + (-1)^k f_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_{n+i}. \end{aligned}$$

Diference posloupností jsou obdobou derivací funkcí na intervalu. V následujícím příkladě se s diferencemi seznámíme na konkrétním příkladě.

**Příklad 6.10.** Spočtěme všechny diference posloupnosti  $f_n = n^2$ .

$$\begin{aligned} \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \quad f_n = n^2 & \quad \text{zadaná posloupnost,} \\ \{1, 3, 5, 7, 9, 16, \dots\} \quad \Delta f_n = 2n + 1 & \quad \text{posloupnost prvních diferencí,} \\ \{2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots\} \quad \Delta^2 f_n = 2 & \quad \text{posloupnost druhých diferencí,} \\ \{0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\} \quad \Delta^k f_n = 0 & \quad \text{posloupnost } k\text{-tých diferencí, kde } k > 2. \end{aligned}$$

**Věta 6.11.** Předpokládejme, že posloupnosti  $\{f_n\}$ ,  $\{g_n\}$  jsou ohraničeného růstu. Označme  $F(z) = \mathcal{L}\{f_n\}$  a  $G(z) = \mathcal{L}\{g_n\}$ , dále  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  jsou konstanty. Potom platí

Věta o	Předmět	Obraz
	<i>poznámka</i>	
<i>linearitě</i>	$a\{f_n\} + b\{g_n\}$	$aF(z) + bG(z)$
<i>podobnosti</i>	$\{a^n f_n\}$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
<i>posunutí vpravo</i>	$\{f_{n-k}\}$	$z^{-k}F(z)$
	<i>posloupnost <math>\{f_{n-k}\}</math> je doplněna nulami</i>	
<i>posunutí</i>	$\{f_{n+k}\}$	$z^k \left[ F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_n}{z^n} \right]$
<i>derivaci obrazu</i>	$\{n f_n\}$	$-zF'(z)$
<i>integraci obrazu</i>	$\left\{ \frac{f_n}{n} \right\}$	$\int_z^\infty \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta$
	<i>musí platit <math>f_0 = 0</math>, tj. <math>\{f_n/n\} = \{0, f_1, f_2/2, \dots\}</math></i>	
<i>konvoluci předmětu</i>	$\{f_n * g_n\}$	$F(z)G(z)$
<i>diferenci</i>	$\{\Delta^k f_n\}$	$(z-1)^k F(z) - z \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-1-i} \cdot \Delta^i f_0$
	<i>posloupnost <math>\Delta^k</math> je také přípustná, <math>\Delta^0 f_n = f_n</math></i>	
<i>částečném součtu</i>	$\{s_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^n f_i \right\}$	$\frac{z}{z-1} F(z)$
	<i>posloupnost <math>\{s_n\}</math> je také přípustná</i>	

Na místo provádění důkazů procvičíme použití jednotlivých vět při hledání obrazů přípustných posloupností.

**Příklad 6.12.** Pomocí výsledku v Příkladu 6.5 a věty o linearitě můžeme odvodit následující výsledky.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin \alpha n\} &= \frac{\mathcal{L}\{e^{j\alpha n}\} - \mathcal{L}\{e^{-j\alpha n}\}}{2j} = \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{j\alpha}} - \frac{z}{z - e^{-j\alpha}} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{z(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})}{z^2 - z(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) + 1} = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}. \end{aligned}$$

Analogicky dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos \alpha n\} &= \frac{\mathcal{L}\{e^{j\alpha n}\} + \mathcal{L}\{e^{-j\alpha n}\}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z - e^{j\alpha}} + \frac{z}{z - e^{-j\alpha}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{z^2 - z(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})}{z^2 - z(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) + 1} = \frac{(z - \cos \alpha) z}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}.\end{aligned}$$

Dále označme  $\{a_n\} = \{1\}$ ,  $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$ ,  $\{c_n\} = \{j^n\}$ ,  $\{d_n\} = \{(-j)^n\}$ , potom platí

posloupnost	kombinace	obraz
$\{e_n\} = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$	$\{e_n\} = \frac{1}{2}(\{a_n\} + \{b_n\})$	$\frac{z^2}{z^2 - 1}$
$\{f_n\} = \{0, 1, 0, 1, \dots\}$	$\{f_n\} = \frac{1}{2}(\{a_n\} - \{b_n\})$	$\frac{z}{z^2 - 1}$
$\{g_n\} = \{1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$	$\{g_n\} = \frac{1}{2}(\{c_n\} + \{d_n\})$	$\frac{z^2}{z^2 + 1}$
$\{h_n\} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$	$\{h_n\} = \frac{1}{2}(\{c_n\} - \{d_n\})$	$\frac{z}{z^2 + 1}$
$\{1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots\}$	$\frac{1}{4}(\{a_n\} + \{b_n\} + \{c_n\} + \{d_n\})$	$\frac{z^4}{z^4 + 1}$

**Příklad 6.13.** Na výsledcích předchozího příkladu je možné demonstrovat použití vět o posunutí vpravo i vlevo. Platí vztahy mezi posloupnostmi  $\{e_{n-1}\} = \{f_n\} = \{e_{n+1}\}$ , pro jejich obrazy současně také platí:

$$z^{-1}E(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^2}{z^2 - 1} = F(z) = z \left( \frac{z^2}{z^2 - 1} - 1 \right) = z(E(z) - 1)$$

**Příklad 6.14.** Pomocí věty o derivování obrazu ( $\{nf_n\} \leftrightarrow -zF'(z)$ ) postupně určete obrazy posloupností  $\{n\}$ ,  $\{n^2\}$ ,  $\{n^3\}$ .

**Řešení.**  $\mathcal{L}\{n\} = -z(\mathcal{L}\{1\})' = -z \left( \frac{z}{z-1} \right)' = -z \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$ .

Analogicky dostaneme obraz posloupností  $\{n^2\}$ ,  $\{n^3\}$ :

$$\mathcal{L}\{n^2\} = -z(\mathcal{L}\{n\})' = -z \left( \frac{z}{(z-1)^2} \right)' = -z \frac{-z-1}{(z-1)^3} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}, \quad (6.3)$$

$$\mathcal{L}\{n^3\} = -z(\mathcal{L}\{n^2\})' = -z \left( \frac{z^2+z}{(z-1)^3} \right)' = z \frac{z^2+1+4z}{(z-1)^4} = \frac{z(z^2+1+4z)}{(z-1)^4}. \quad (6.4)$$

□

V následujícím příkladě nalezneme obraz jedné posloupnosti třemi způsoby s využitím různých vět.

**Příklad 6.15.** Nalezněte obraz posloupnosti  $\left\{ \binom{n+1}{2} \right\}$

**Řešení.** 1. Využijeme výsledků Příkladu 6.14  $\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$  a  $\mathcal{Z}\{n^2\} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$ .

Součtem obrazů obou posloupností a jeho dělením 2, neboť  $\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}(n^2+n)$ , dostáváme:

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z^2+z}{(z-1)^3} \right) = \frac{z^2 - z + z^2 + z}{2(z-1)^3} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

2. Využijeme skutečnosti  $\left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \{1\} * \{n\}$  (viz Příklad 6.7) a věty o obrazu konvoluce ( $\{f_n * g_n\} \leftrightarrow F(z)G(z)$ ):

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \mathcal{Z}\{1\} \cdot \mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{z-1} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

3. Třetí možností je využít známé skutečnosti  $\sum_{i=0}^n i = \binom{n+1}{2}$  a užitím věty částečných součtech:

$$\mathcal{Z} \left\{ \binom{n+1}{2} \right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{z-1} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

□

V následujícím příkladě použijeme větu o integraci obrazu.

**Příklad 6.16.** Nalezněte obraz posloupnosti  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ 0, 1, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$ .

**Řešení.** Tuto posloupnost můžeme také zapsat jako posloupnost  $\{f_n/n\}$ , kde je posloupnost  $\{f_n\} = \{0, 1, -1, \dots\}$ . Ve větě o integrálu obrazu položíme  $\{f_n\} = \{0, 1, -1, 1, \dots\}$  a její obraz můžeme získat jako součet geometrické řady:

$$\mathcal{Z}\{0, 1, -1, 1, \dots\} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} = \frac{\frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}.$$

Integraci racionálně lomené funkce  $F(\zeta)/\zeta$  provedeme pomocí rozkladu na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\} &= \int_z^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta+1)} = \int_z^{\infty} \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta+1} \right) d\zeta = \lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} [\text{Ln } \zeta - \\ &\text{Ln}(\zeta+1)]_z^{\zeta_0} = \lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} \left( \text{Ln} \frac{\zeta_0}{\zeta_0+1} - \text{Ln} \frac{z}{z+1} \right) = -\text{Ln} \frac{z}{z+1} = \text{Ln} \left( 1 + \frac{1}{z} \right), \end{aligned}$$

kde  $\text{Ln}$  je hlavní větev logaritmu a navíc platí:

$$\lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} \text{Ln} \frac{\zeta_0}{\zeta_0 + 1} = \text{Ln} \lim_{\frac{1}{\zeta_0} \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\zeta_0}} = \text{Ln} 1 = 0.$$

□

**Věta 6.17.** *Nechť  $\{f_n\}$  je přípustná tj.  $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$ . Jestliže níže uvedené limity existují, potom platí:*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f_0 \quad \text{počáteční hodnota} \quad (6.5)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (6.6)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z-1)F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{koncová hodnota} \quad (6.7)$$

Užitečnost těchto limitních vztahů je mimo jiné dána u vztahu (6.5) možností nahradit předpoklad  $f_0 = 0$  předpokladem na funkci  $F(\infty) = 0$ . Vztah (6.6) nám umožní využít předchozí ukázky k určení součtu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{z \rightarrow 1} \ln \left( 1 + \frac{1}{z} \right) = \ln 2.$$

## 6.1 Souvislost $\mathcal{Z}$ a Laplaceovy transformace

Předpokládejme, že posloupnost  $\{f_n\}$  je přípustná. Uvažujme zobecněnou funkci

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t-n)$$

Vypočteme Laplaceův obraz této zobecněné funkce:

$$\mathcal{L} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t-n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L} f_n \delta(t-n) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn}.$$

Tento vztah se nazývá diskretní Laplaceova transformace a substitucí  $e^p = z$  dostáváme obraz  $\mathcal{Z}$  transformace posloupnosti  $\{f_n\}$ .

## 6.2 Zpětná $\mathcal{Z}$ transformace

Tímto pojmem rozumíme nalezení vhodné posloupnosti  $\{f_n\}$ , která má funkci  $F(z)$  za svůj obraz při  $\mathcal{Z}$  transformaci. Každá funkce komplexní proměnné  $F(z)$ , která je v okolí bodu  $\infty$  holomorfní, je obrazem vhodné posloupnosti  $\{f_n\}$ , to jest  $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$ , což také zapisujeme:

$$\mathcal{Z}^{-1} \{F(z)\} = \{f_n\}. \quad (6.8)$$



Protože členy této posloupnosti jsou koeficienty Laurentova rozvoje je toto zobrazení jednoznačné a navíc pro ně platí integrální vzorec:

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} F(z)z^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

kde  $C_\rho$  je kružnice se středem v počátku o dostatečně velkém poloměru takovém, že všechny případné singularity leží uvnitř této kružnice. Tento postup je poměrně náročný.

**Poznámka 10.** Při hledání vzoru  $\mathcal{L}$  transformace můžeme využít všech vlastností  $\mathcal{L}$  transformace, které jsou přehledně shrnuty ve Větě 6.11. V následujícím paragrafu, věnovanému hledání vzoru pro racionálně lomenou funkci, to bude linearita zpětné transformace  $\mathcal{L}^{-1}$ , která plyne z linearity  $\mathcal{L}$  transformace.

Situace se výrazně zjednoduší při hledání vzoru pro racionálně lomenou funkci.

### 6.2.1 Předmět k racionální funkci

Je-li obrazem  $\mathcal{L}$  transformace racionálně lomená funkce, lze předmět nalézt poměrně jednoduše několika možnostmi.

**1. Rozkladem na parciální zlomky:**  $\frac{1}{(z - z_0)^k}$ , kde  $k \in \mathbb{N}$  a  $z_0$  je konečné komplexní číslo. Přesněji řečeno pro racionální funkci, která není ryzí, je vyjádření ve tvaru součtu konstanty a parciálních zlomků. Pro parciální zlomek kde  $k = 1$  snadno získáme

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} + \frac{z_0^2}{z^3} + \frac{z_0^3}{z^4} + \dots \quad (6.10)$$

Rozvoj parciálních zlomků  $(z - z_0)^{-k}$ , kde  $2 \leq k \in \mathbb{N}$  můžeme odvodit z rozvoje (6.10), jestliže jej  $k - 1$  krát derivujeme. Situaci přesně popisuje následující věta.

**Věta 6.18.** *Je-li  $z_0 \neq 0$  platí*

$$\frac{1}{(z - z_0)^k} = \frac{1}{z^k} + \binom{k}{k-1} \frac{z_0}{z^{k+1}} + \dots + \binom{k-1+n}{k-1} \frac{z_0^n}{z^{k+n}} + \dots, \quad (6.11)$$

což dává předpis pro hledanou posloupnost

$$f_n = 0 \text{ pro } n < k \text{ a } f_{k+n} = \binom{k-1+n}{k-1} \frac{z_0^n}{z^{k+n}} \text{ pro } k \leq n.$$

Poznamenejme, že uvedená věta platí i pro  $k = 1$  a pravá strana rovnice (6.11) je jenom složitěji zapsaná pravá strana (6.10). Podobně případný předpoklad  $z_0 \neq 0$  není nutný, ale pro  $z_0 = 0$  je parciální zlomek přímo Laurentovým rozvojem.

Celkově můžeme postup hledání předmětu  $\mathcal{L}$  transformace k racionální funkci shrnout do jediné věty. Racionálně lomenou funkci vyjádříme ve tvaru součtu konstanty a parciálních zlomků a z linearity  $\mathcal{L}$  transformace získáme předmět jako součet předmětů jednotlivých parciálních zlomků podle známých vzorců. Uvedený postup předvedeme na příkladech.

**Příklad 6.19.** Nalezněte předmět  $\mathcal{Z}$  transformace k funkci

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)}.$$

**Řešení.** Rozklad racionální funkce má tvar

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)} = \frac{1}{z - 1} + \frac{2}{(z + 1)^2}.$$

Podle vztahu (6.10) dostáváme

$$\frac{1}{z - 1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots$$

a podle vztahu (6.11)

$$\frac{2}{(z + 1)^2} = \frac{2}{z^2} + \frac{2\binom{2}{1}(-1)}{z^3} + \dots + \frac{2\binom{n}{n-1}(-1)^{n-2}}{z^{n+1}} + \dots$$

a předmět původní racionální funkce je ve tvaru součtu jednotlivých předmětů

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)} = \frac{1}{z} + \frac{2 + 1}{z^2} + \dots + \frac{1 + 2(n - 1)(-1)^n}{z^n}.$$

Zápis předmětu  $\mathcal{Z}$  transformace k dané funkci lze realizovat i takto

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)} \leftrightarrow \{\delta_{0n} + 1 + 2(n - 1)(-1)^n\},$$

kde  $\delta_{0n}$  je tzv. Kroneckerův symbol. □

**2. Pomocí reziduí:** Je-li funkce  $F(z)$  racionálně lomená má konečný počet singularit  $z_k$ , které jsou póly nebo odstranitelné singularity a výše uvedený integrál můžeme vyčíslit pomocí reziduí

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_p} F(z)z^{n-1}dz = \sum_{z=z_k} \operatorname{rez}_{z=z_k} F(z)z^{n-1}. \quad (6.12)$$

Postup budeme ilustrovat na stejném zadání.

**Příklad 6.20.** Nalezněte předmět  $\mathcal{Z}$  transformace k funkci

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)}$$

**Řešení.** Výpočet členů posloupnosti  $\{f_n\}$  musíme provést dvěma způsoby, neboť funkce obsažená v integrálu  $\int_{C_\rho} F(z)z^{n-1}dz$  má pro  $n > 0$  pouze dva póly  $z = 1$  (prvního řádu) a  $z = -1$  (druhého řádu). Členy vzoru  $\{f_n\}$  k této funkci pro  $n > 0$  vyjádříme jako součet

$$\begin{aligned} f_n &= \operatorname{rez}_{z=-1} \frac{(z^2 + 4z - 1)z^{n-1}}{(z+1)^2(z-1)} + \operatorname{rez}_{z=1} \frac{(z^2 + 4z - 1)z^{n-1}}{(z+1)^2(z-1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left( \frac{(z^2 + 4z - 1)z^{n-1}}{(z-1)} \right)' + \frac{4 \cdot 1^n}{(1+1)^2} \\ &= \lim_{z=-1} \frac{z^{n-2}(nz^3 + (3n-5)z^2 + (2-5n)z + n-1)}{(z-1)^2} + 1 \\ &= (2n-1)(-1)^n + 1 \end{aligned}$$

Pro  $f_0$  platí výpočet

$$\begin{aligned} f_0 &= \operatorname{rez}_{z=-1} \frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z+1)^2(z-1)} + \operatorname{rez}_{z=1} \frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z+1)^2(z-1)} + \operatorname{rez}_{z=0} \frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z+1)^2(z-1)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left( \frac{(z^2 + 4z - 1)}{z(z-1)} \right)' + \frac{4}{(1+1)^2 \cdot 1} + \frac{-1}{-1} = \\ &= \lim_{z=-1} -\frac{5z^2 - 2z + 1}{(z-1)^2 z^2} + 1 - 1 = -\frac{8}{(-2)^2(-1)^2} + 2 = 0 \end{aligned}$$

Celkově dostáváme předmět  $\mathcal{L}$  transformace k dané funkci ve stejném tvaru

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z+1)^2(z-1)} \leftrightarrow \{\delta_{0n} + 1 + 2(n-1)(-1)^n\}.$$

□

**3. Přímo z definice:** Vyjdeme-li ze vztahu (6.1), je možné získat člen  $f_n$  také tak, že daný vztah vynásobíme  $z^{n-1}$  a  $n$ -krát derivujeme. Získáme tak řadu, která začíná výrazem  $(-1)^n f_n n! z^{-n-1}$  neboť  $z$  umocněné na nezáporné celé mocnitéle derivováním zmizely. Vynásobíme-li nyní řadu  $z^n$  a provedeme limitní přechod  $z \rightarrow \infty$  dostaneme vzorec

$$f_n = (-1)^n \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d^n}{dz^n} [z^{n-1} F(z)].$$

Přestože, odvození tohoto vzorce je jednoduché, jeho užití komplikuje nutnost určit  $n$ -tou derivaci racionálně lomené funkce, což je vhodné realizovat ve tvaru rozkladu této funkce ve tvaru součtu polynomu a parciálních zlomků. Nebudeme proto uvádět příklad výpočtu pomocí tohoto v literatuře [8] uváděného vzorce. Místo toho uvedeme další možnost

**4. Dělení polynomu polynomem:** Tento postup nám umožní v mnohých případech určit vzor jak je dokumentováno v následujícím příkladu

**Příklad 6.21.** Nalezněte předmět  $\mathcal{Z}$  transformace k funkci

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z + 1)^2(z - 1)}.$$

**Řešení.**  $(z^2 + 4z - 1) : (z^3 + z^2 - z - 1) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} - \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} - \frac{7}{z^5} + \frac{11}{z^6}$  □

$$\begin{array}{r}
 z^2 \quad +z \quad -1 \quad -\frac{1}{z} \\
 \hline
 \quad 3z \quad \quad \quad +\frac{1}{z} \\
 \quad 3z \quad +3 \quad -\frac{3}{z} \quad -\frac{3}{z^2} \\
 \hline
 \quad \quad -3 \quad +\frac{4}{z} \quad -\frac{3}{z^2} \\
 \quad \quad -3 \quad -\frac{3}{z} \quad -\frac{3}{z^2} \quad +\frac{3}{z^3} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \frac{7}{z} \quad \quad \quad -\frac{3}{z^3} \\
 \quad \quad \quad \frac{7}{z} \quad +\frac{7}{z^2} \quad -\frac{7}{z^3} \quad -\frac{7}{z^4} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad -\frac{7}{z^2} \quad +\frac{4}{z^3} \quad +\frac{7}{z^4} \\
 \quad \quad \quad \quad -\frac{7}{z^2} \quad -\frac{7}{z^3} \quad +\frac{7}{z^4} \quad +\frac{7}{z^5} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \frac{11}{z^3} \quad \quad \quad -\frac{7}{z^5}
 \end{array}$$

Poznamenejme, že při ilustrování různých možností byl úmyslně volen tentýž příklad, aby měl čtenář možnost vzájemným porovnáním zvolit metodu, která mu vyhovuje. Další určování předmětů  $\mathcal{Z}$  transformace bude dílčí úlohou při využití  $\mathcal{Z}$  transformace. V textu jsou uvedeny dvě možnosti užití  $\mathcal{Z}$  transformace. První je k řešení diferenční nebo rekurentních rovnic a druhá možnost je k určování konečných součtů.

## 6.3 Řešení diferenčních a rekurentních rovnic

S diferenčními a rekurentními rovnicemi se setkáváme při popisu diskretních systémů v různých oblastech a to jak v matematice samé (např. při numerickém řešení diferenciálních rovnic, v konstruktivní teorii funkcí, v teorii pravděpodobnosti) tak v aplikacích

(numerická analýza fyzikálních polí, elektrotechnika, stavebnictví apod.) Analogicky s řešením lineárních integro-diferenciálních rovnic užitím Laplaceovy transformace můžeme řešit lineární diferenční rovnice. Za lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty považujeme:

$$a_r \{\Delta^r y_n\} + \cdots + a_2 \{\Delta^2 y_n\} + a_0 \{y_n\} = \{f_n\},$$

kde  $a \neq 0$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  a navíc

- $a_i$  jsou konečné komplexní konstanty pro  $i = 0, \dots, r$ , které se nazývají koeficienty rovnice.
- $\{f_n\}$  je zadaná posloupnost komplexních čísel, která se nazývá pravá strana rovnice.
- $\{y_n\}$  je hledaná posloupnost, kde prvních  $r$  členů  $y_0, y_1, \dots, y_{r-1}$  jsou obvykle zadány jako počáteční hodnoty.

Při hledání řešení postupujeme obvykle následujícím způsobem:

1. Nalezneme obraz diferenční rovnice, který je v případě lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty rovnice algebraická.
2. Dosazením počátečních podmínek do této algebraické získáme rovnici, která jedno řešení a nalezneme tak obraz řešení diferenční rovnice.
3. Hledané řešení  $\{y_n\}$ , potom určíme zpětnou transformací.

**Příklad 6.22.** Řešte diferenční rovnici  $\{\Delta^2 y_n\} - \{y_n\} = \{1\}$  s počátečními podmínkami  $y_0 = 0$ ,  $\Delta y_0 = -1$ .

**Řešení.** Určíme obraz diferenční rovnice  $\mathcal{L}\{\Delta^2 y_n\} - \mathcal{L}\{y_n\} = \mathcal{L}\{1\}$ , přičemž označíme  $\mathcal{L}\{y_n\} = Y(z)$ :

$$(z-1)^2 Y(z) - z(z-1)y_0 - z\Delta y_0 - Y(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Dosazením počátečních podmínek a vyřešením rovnice získáme obraz řešení:

$$\begin{aligned} (z-1)^2 Y(z) + z - Y(z) &= \frac{z}{z-1}, \\ Y(z)(z^2 - 2z) &= \frac{z}{z-1} - z = \frac{2z - z^2}{z-1}, \\ Y(z) &= \frac{1}{1-z}. \end{aligned}$$

K tomuto obrazu řešení nalezneme snadno předmět užitím (6.10):

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{z-1} \right\} = \{-1\}.$$

□

Druhou možností zápisu závislostí, které popisují diferenční rovnice je tzv. rovnice rekurentní. Dosadíme-li za všechny difference lineární kombinaci členů hledané posloupnosti při využití vztahu

$$\Delta^r y_n = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f_{n+i},$$

lze každou diferenční rovnici s konstantními koeficienty přepsat na rovnici, která má tvar:

$$A_r \{y_{n+r}\} + \cdots + A_2 \{y_{n+2}\} + A_1 \{y_{n+1}\} + A_0 \{y_n\} = \{f_n\}, \quad (6.13)$$

kde  $A_r \neq 0 \neq A_0$  a  $A_i$  jsou vhodné komplexní konstanty. Vzhledem k tomu, že ze známých počátečních podmínek lze opakovaným použitím tohoto vztahu určit libovolné  $y_n$  je tento tvar rovnice nazýván rekurentní rovnicí. Postup naznačíme na rovnici z Příkladu 6.22.

**Příklad 6.23.** Přepište rovnici z Příkladu 6.22, tak aby neobsahovala difference.

**Řešení.** Z ilustrativních důvodů odvodíme druhou diferenci  $\Delta^2 y_n$  bez použití výše uvedeného vzorce:

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = y_{n+2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Po dosazení do rovnice dostáváme

$$\{y_{n+2}\} - 2\{y_{n+1}\} + \{y_n\} - \{y_n\} = \{y_{n+2}\} - 2\{y_{n+1}\} = 1.$$

□

Při hledání řešení rekurentních rovnic postupujeme stejně jako u rovnic diferenčních, to znamená, že nejdříve určíme obraz dané rovnice, který vyřešíme. Potom zpětnou transformací určíme řešení původní rovnice jako vzor řešení obrazu původní rovnice. Situaci budeme ilustrovat na příkladu známé Fibonacciovy posloupnosti. Poprvé byla užitá italským matematikem Leonardem z Pisy, známým spíše jako Fibonacci, který žil v letech 1170 až 1240. Problém králíků zveřejnil Leonardo z Pisy již v roce 1202 v knize Liber abaci. Tento problém můžeme formulovat takto: Kolik králíků vzejde po roce z jednoho páru, jestliže každému páru se v období dospělosti, tj. po dvou měsících, narodí jeden nový pár. Označme  $y_n$  počet párů králíků v  $n$ -té generaci, přičemž předpokládáme, že žádní králíci neuhynou. Pro zjednodušení budeme králíky rozlišovat na staré (mohou mít potomky) a mladé (nemohou mít potomky) páry. V  $(n+2)$ . generaci je starých párů jako všech párů v  $(n+1)$ . generaci, tj.  $y_{n+1}$  a mladých párů je zde tolik, kolik bylo starých párů v  $(n+1)$ -ní generaci, tj. jako všech párů  $n$ -té generace, tj.  $y_n$ . Touto úvahou jsme odvodili rovnici  $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$ . Dále předpokládejme, že začínáme s mladým párem tj.  $y_0 = y_1 = 1$ .

**Příklad 6.24.** Nalezněte hodnoty tzv. Fibonacciovy posloupnosti určené rekurentním vztahem  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  a počátečními hodnotami  $f_0 = f_1 = 1$ .

Nejdříve nalezneme obraz a následně vyřešíme:

$$z^2(F(z) - 1 - 1/z) = z(F(z) - 1) + F(z),$$

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

Rozkladem na součet „parciálních“ zlomků dostaneme Fibonacciovu posloupnost:

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left( \frac{z_1 z}{z - z_1} - \frac{z_2 z}{z - z_2} \right), \quad \text{kde } z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$f_n = \frac{z_1 z_1^n - z_2 z_2^n}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Uvedený výsledek není v příliš praktickém tvaru. Rozvineme proto  $n + 1$ . mocniny podle binomické věty a v rozdílu obou závorek se odečtou sudé mocniny  $\sqrt{5}$ :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}2^{n+1}} \left[ \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \sqrt{5}^i - \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} \sqrt{5}^i \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} 5^k,$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$f_n$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

**Poznámka 11.** Poznamenejme, že při obecných počátečních podmínkách  $y_0 = \alpha$ ,  $y_1 = \beta$  má obraz řešení dané rekurentní rovnice tvar

$$F(z) = \frac{y_0 z^2 + (y_1 - y_0)z}{z^2 - z - 1},$$

proto rozklad na „parciální“ zlomky obsahuje pouze zlomky se stejnými jmenovateli. Z toho plyne, že řešení je ve tvaru vhodné lineární kombinace posloupností uvedených výše a koeficienty této lineární kombinace lze stanovit z počátečních podmínek. Pro zjednodušení zápisu doplníme výše uvedenou Fibonacciovu posloupnost členy  $f_{-2} = 1$ ,  $f_{-1} = 0$ , která je zřejmě také řešením dané rekurentní rovnice. Pro lineární kombinaci posunutých posloupností  $g_n = \alpha y_{n-2} + \beta y_{n-1}$ , platí  $g_0 = \alpha$ ,  $g_1 = \beta$ . Proto posloupnost  $g_n = \alpha y_{n-2} + \beta y_{n-1}$  je řešením s počátečními podmínkami  $y_0 = \alpha$ ,  $y_1 = \beta$ .

V dalším příkladu si ukážeme možnost řešit rekurentní rovnice, kde řešení je zadáno jinak než pomocí počátečních podmínek.

**Příklad 6.25 (Zruinování hazardního hráče).** Hráč hraje proti protivníkovi řadu her, kdy vsadí jednu korunu a s pravděpodobností  $q$  korunu vyhraje a s pravděpodobností  $1 - q$  korunu prohraje. Tato situace se opakuje, dokud hráč nezíská předem stanovených  $N$  korun nebo neprohraje všech  $n$  korun, se kterými do hry vstupoval. Určete pravděpodobnost zruinování hazardního hráče, to jest, že hra skončí jeho prohrou.

**Řešení.** Označme  $f_n$  pravděpodobnost prohry (zruinování) hráče, který má  $n$  korun. V situaci kdy hráč vlastní  $n$  korun mohou nastat dvě vzájemně se vylučující možnosti. První, že hráč korunu získá, tedy pravděpodobnost zruinování je  $f_n = qf_{n+1}$ . Druhá, že

korunu ztratí a pravděpodobnost zruinování je  $f_n = (1-q)f_{n-1}$ . Protože pravděpodobnost vzájemně se vylučujících možností je součtem jednotlivých pravděpodobností, dostáváme rovnici

$$f_n = qf_{n+1} + (1-q)f_{n-1}.$$

Dále ze zadání plyne počáteční podmínka  $f_0 = 1$  (hráč prohrál) a  $f_N = 0$  (hráč vyhrál). Nejdříve danou rovnici upravíme na tvar analogický s předchozím případem ( $n$  nahradíme  $n+1$ )

$$f_{n+1} = qf_{n+2} + (1-q)f_n \Leftrightarrow f_{n+2} - \frac{1}{q}f_{n+1} + \frac{1-q}{q}f_n = 0.$$

Pro provedení  $\mathcal{Z}$  transformace potřebujeme také znát  $f_1$ . Protože hodnotu  $f_1$  neznáme, označíme ji jako parametr  $f_1 = \alpha$  s tím, že  $\alpha$  dodatečně stanovíme z druhé podmínky ( $f_N = 0$ ). Obraz dané rovnice je ve tvaru

$$z^2(F(z) - 1 - \frac{\alpha}{z}) - \frac{1}{q}z(F(z) - 1) + \frac{1-q}{q}F(z) = 0.$$

Odtud určíme  $F(z)$  a pro  $q \neq \frac{1}{2}$  rozložíme na „parciální“ zlomky, tj.

$$F(z) = \frac{z^2 + z\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)}{z^2 - \frac{z}{q} + \frac{1-q}{q}} = \frac{z^2 + z\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)}{\left(z + 1 - \frac{1}{q}\right)(z - 1)} = \frac{z}{z - 1} \frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \frac{z}{z + 1 - \frac{1}{q}} \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1}$$

a řešení dané rekurentní rovnice (v závislosti na  $\alpha$ ) pak je

$$f_n = \frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \left(\frac{1-q}{q}\right)^n \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1}.$$

Dosazením tohoto řešení do druhé (okrajové) podmínky  $f_N = 0$  stanovíme  $\alpha$ :

$$\frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{q\left(\frac{1-q}{q}\right)^N + q - 1}{q\left(\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - 1\right)}.$$

Po dosazení do původního vztahu, tak získáme konkrétní pravděpodobnost zruinování hazardního hráče

$$\frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - \left(\frac{1-q}{q}\right)^n}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - 1}.$$

V případě spravedlivé hry  $q = 1/2$  mají obraz řešení a řešení tvary:

$$F(z) = \frac{z^2 + z(\alpha - 2)}{z^2 - 2z + 1} \Leftrightarrow f_n = 1 + n(\alpha - 1) \Leftrightarrow f_n = \frac{N - n}{N}.$$

Toto řešení je možné získat pomocí reziduí, neboť funkce  $F(z)$  má pouze pól  $z = 1$ .

$$f_n = (z^{n+1} + z^n(\alpha - 2))' \Big|_{z=1} = n + 1 + n(\alpha - 2),$$



$$0 = f_N = N + 1 + N(\alpha - 2) \Leftrightarrow \alpha - 2 = -\frac{N+1}{N} \Leftrightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{N}.$$

Situaci budeme ilustrovat pro  $n = 5$ ,  $N = 10$  a tři konkrétní možnosti  $q_1 = 0, 4$ ,  $q_2 = 0, 5$  a  $q_3 = 0, 6$ , pro které dostaneme tři různé pravděpodobnosti

$$p_1 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^5}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1} = \frac{243}{275} \doteq 0,884 \quad p_2 = \frac{10 - 5}{10} = \frac{1}{2} \quad p_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^1 0 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left(\frac{2}{3}\right)^1 0 - 1} = \frac{1}{1025}.$$

Pomocí tohoto řešení můžeme provést analýzu popisované situace v návaznosti na volbu parametru  $q$  pro „velká očekávání“ tj.  $N \rightarrow \infty$ :

$$q < \frac{1}{2} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - \left(\frac{1-q}{q}\right)^n}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - 1} = 1, \text{ neboť } \frac{1-q}{q} > 1,$$

$$q = \frac{1}{2} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-n}{N} = 1.$$

Tedy při spravedlivé  $q = \frac{1}{2}$  a nevýhodné  $q < \frac{1}{2}$  hře je velká pravděpodobnost zruinování hazardního hráče při velkém očekávání  $N$ .  $\square$

V posledním příkladě ukážeme jak lze postupovat u nehomogenních diferenčních rovnic tj. u rovnic, které mají nenulovou pravou stranu. Popíšeme řešení diskretizace rovnice z Příkladu 5.24 s obecnou pravou stranou  $u(t)$  (tj. diskretizací LR obvodu s obecným napětím).

**Příklad 6.26.** Nalezněte řešení rovnice

$$i_{n+1} - bi_n = au_n, \text{ kde } i_0 = 0, a, b, u_n \in \mathbb{R}.$$

**Řešení.** Obraz dané rovnice má tvar

$$zI - bI = a\mathcal{Z}\{u_n\} \Leftrightarrow I = \frac{a}{z-b}\mathcal{Z}\{u_n\} = \frac{a}{b} \left( \frac{z}{z-b}\mathcal{Z}\{u_n\} - \mathcal{Z}\{u_n\} \right).$$

Zpětnou transformací s využitím věty o konvoluci dostáváme

$$\{i_n\} = \frac{a}{b} (\{b^n\} * \{u_n\} - \{u_n\}) \Leftrightarrow i_n = \frac{a}{b} \left( \sum_{l=0}^n b^{n-l} u_l - u_n \right) = a \sum_{l=1}^n b^{n-l} u_{l-1}.$$

V následujícím Příkladu 6.29 bude posloupnost  $\{i_n\}$  konkretizována pro tzv. sinusové buzení  $u_n = \sin n\alpha$ .  $\square$

Při řešení diferenčních resp. rekurentních rovnic jsme mlčky předpokládali, že hledaná řešení mají obraz v  $\mathcal{Z}$  transformaci tj. jsou přípustné. Obecně to neplatí, ale pokud se jedná o rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou ve tvaru konečné lineární kombinace funkcí tvaru  $P(n)q^n \cos \alpha n$ , resp.  $P(n)q^n \sin \alpha n$ , kde  $P(n)$  je polynom, je každé řešení této rovnice přípustné.

## 6.4 Konečné součty

Pomocí  $\mathcal{L}$  transformace můžeme také odvodit součty některých konečných posloupností celých čísel. Využíváme přitom hlavně větu o částečném součtu a větu o derivaci obrazu. Metodiku výpočtu si osvětlíme na následujících příkladech.

**Příklad 6.27.** Určete součty druhých a třetích mocnin prvních  $n$  přirozených čísel (pro „první“ mocniny  $\sum_{i=0}^n i = \binom{n+1}{2}$  je všeobecně známo).

**Řešení.** V Příkladu 6.14 jsme odvodili  $\mathcal{L}$  transformaci posloupností  $\{n^2\}$  a  $\{n^3\}$ , jestliže použijeme větu o částečném součtu pro posloupnost  $\{n^2\}$  dostáváme:

$$F(z) = \mathcal{L} \left\{ \sum_{i=0}^n i^2 \right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{L} \{i^2\} = \frac{z}{z-1} \frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4}.$$

Ve výše uvedeném vztahu jsme použili dříve odvozený obraz (6.3) posloupnosti  $\{n^2\}$ . Pro nalezení vzoru ve tvaru racionálně lomené funkce použijeme výpočtu pomocí reziduí:

$$\operatorname{rez}_{z=1} F(z)z^{n-1} = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^3 z^{n+2} + z^{n+1}}{\partial z^3} = \frac{1}{6}(n+1)n(n+2+n-1) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6},$$

neboť funkce  $F(z)$  má pouze pól čtvrtého řádu pro  $z=1$ . Analogicky pro posloupnost  $\{n^3\}$  využitím (6.4) dostáváme:

$$F(z) = \mathcal{L} \left\{ \sum_{i=0}^n i^3 \right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{L} \{i^3\} = \frac{z}{z-1} \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} = \frac{z^2(z^2+4z+1)}{(z-1)^5}.$$

Analogicky s předchozím případem pro hledání vzoru k funkci  $F(z)$  použijeme rezidua, protože funkce  $F(z)$  má pouze jeden pól  $z=1$  pátého řádu:

$$\begin{aligned} \operatorname{rez}_{z=1} F(z)z^{n-1} &= \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^4 (z^{n+3} + 4z^{n+2} + z^{n+1})}{\partial z^4} = \\ &= \frac{1}{24} \left( (n+3)(n+2)(n+1)n + 4((n+2)(n+1)n(n-1) + (n+1)n(n-1)(n-2)) \right) = \\ &= \frac{1}{24} (n+1)n \left( (n+3)(n+2) + 4(n+2)(n-1) + (n-1)(n-2) \right) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}. \end{aligned}$$

□

Povšimněte si, že jsme porovnáním se součtem prvních  $n$  přirozených čísel odvodili jednu z nejdéle známých číselných identit

$$1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

V dalším příkladu ukážeme jak postupovat v úlohách kdy se nesčítá přes všechna čísla, ale jenom přes vybranou podposloupnost.

**Příklad 6.28.** Určete součet prvních  $n$  lichých čísel a jejich druhých mocnin.

**Řešení.** Motivování Příkladem 6.12 nalezneme postupně obrazy posloupností  $\{(-1)^n n\}$  a  $\{(-1)^n n^2\}$  podobně jako v (6.14):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(-1)^n n\} &= -z \left( \frac{z}{z+1} \right)' = \frac{-z}{(z+1)^2}, \\ \mathcal{L}\{(-1)^n n^2\} &= -z \left( \frac{-z}{(z+1)^2} \right)' = \frac{z-z^2}{(z+1)^3}.\end{aligned}$$

Analogicky s předchozím příkladem odvodíme

$$\begin{aligned}F1(z) &= \mathcal{L} \left\{ \sum_{i=0}^n (-1)^i i \right\} = \frac{z}{z-1} \frac{-z}{(z+1)^2} = \frac{-z^2}{(z-1)(z+1)^2}, \\ F2(z) &= \mathcal{L} \left\{ \sum_{i=0}^n (-1)^i i^2 \right\} = \frac{z}{z-1} \frac{z-z^2}{(z+1)^3} = \frac{-z^2}{(z+1)^3}.\end{aligned}$$

Nyní pomocí reziduí určíme vzory k funkcím  $F1(z)$ ,  $F2(z)$ :

$$\begin{aligned}f1_n &= \operatorname{rez}_{z=1} F1(z) z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=-1} F1(z) z^{n-1} = -\frac{1}{2^2} - \left( \frac{z^{n+1}}{(z-1)} \right)' \Big|_{z=-1} = \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{z^n((n+1)(z-1)-z)}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = \frac{(-1)^n n}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{4},\end{aligned}$$

$$f2_n = \operatorname{rez}_{z=-1} F1(z) z^{n-1} = \frac{1}{2} (-z^{n+1})'' \Big|_{z=-1} = \frac{(n+1)n(-1)^n}{2}.$$

Odvodili jsme tedy vztahy pro součty řad se střídavými znaménky

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i i = \frac{(-1)^n n}{2} + \frac{(-1)^n - 1}{4} \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i i^2 = \frac{(n+1)n(-1)^n}{2}.$$

Dosazením těchto vztahů při substituci  $n = 2n - 1$  do následujících rovností

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^{2n-1} i - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i i \right) \quad \text{resp.} \quad \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^{2n-1} i^2 - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i i^2 \right)$$

dostáváme výsledek:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \frac{1}{2} \left( \frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{(-1)^{2n-1}(2n-1)}{2} + \frac{(-1)^{2n-1}}{4} - \frac{1}{4} \right) = n^2$$

$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{(2(2n-1)+1)(2n-1+1)(2n-1)}{6} - \frac{(2n-1+1)(2n-1)(-1)^{2n-1}}{2} \right) = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

□

Poslední příklad bude věnován v praxi využitelným typům sumacím. V návaznosti na Příklad 6.26 se budeme zabývat následující sumou.

**Příklad 6.29.** Určete součet  $1 + q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha$ .

**Řešení.** Nejdříve pomocí věty o podobnosti a Příkladu 6.12 určíme:

$$\mathcal{Z}\{q^n \sin n\alpha\} = \frac{zq \sin \alpha}{z^2 - 2zq \cos \alpha + q^2}.$$

Pro obraz posloupnosti částečných součtů platí

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{i=0}^n q^i \sin i\alpha\right\} = \frac{z^2 q \sin \alpha}{(z-1)(z^2 - 2zq \cos \alpha + q^2)}.$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má dva komplexně sdružené kořeny  $z_{1,2} = q \exp(\pm j\alpha)$ . Funkce  $\mathcal{Z}$  má tedy tři prosté póly a pomocí reziduí odvodíme

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n q^i \sin i\alpha &= \operatorname{rez}_{z=z_1} F(z)z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=z_2} F(z)z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=z_1} F(z)z^{n-1} = \\ &= \frac{(z_1)^{n+1}}{2j(z_1-1)} - \frac{(z_2)^{n+1}}{2j(z_1-2)} + \frac{q \sin \alpha}{q^2 - 2q \cos \alpha + 1} = \\ &= \frac{q \sin \alpha + q^{n+1}(q \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha)}{q^2 - 2q \cos \alpha + 1}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že tento výsledek je pro  $|q| < 1$  v souladu s dříve odvozeným součtem analogické nekonečné řady, neboť pro  $n \rightarrow \infty$  dostaneme stejný výsledek. □

Závěrem kapitoly ještě uvedeme přehledně několik obrazů elementárních posloupností, přestože většina vztahů byla již v textu odvozena formou příkladů výše.

Číslo vzorce	$f(n), n = 0, 1, 2, \dots$	$\mathcal{Z}\{f(n)\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$
1.	$a^n$	$\frac{z}{z-a}$
3.	$na^n$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
6.	$n^2a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
6.	$\frac{a^n}{n+k}, k \geq 1$	$-\frac{1}{a^k} \text{Ln} \left(1 - \frac{a}{z}\right) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{z^i}{a^i}$
7.	$\cos \omega n$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
8.	$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
7.	$\binom{n}{k}$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$
8.	$\{1, 0, a, 0, a^2, 0, a^3, 0, \dots\}$	$\frac{z^2}{z^2 - a}$
9.	$\{0, a, 0, a^2, 0, a^3, 0, a^4, \dots\}$	$\frac{z}{z^2 - a}$

## 6.5 Příklady na procvičení

### Cvičení

1. Nalezněte obraz při  $\mathcal{Z}$  transformaci posloupnosti:

- |                                                                                                                                 |                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\left\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \dots\right\}$                                       | b) $\left\{\frac{1 + (-1)^n}{2} 3^n\right\}$                                          |
| c) $\left\{0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{32}, 0, \frac{1}{128}, \dots\right\}$                                    | d) $\left\{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) 2^n\right\}$                               |
| e) $\left\{1, 0, \frac{-1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{-1}{729}, 0, \frac{1}{6561}, \dots\right\}$                            | f) $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$                                                     |
| g) $\left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243}, \frac{2}{243}, \frac{7}{2187}, \dots\right\}$ | h) $\left\{1, 1, \frac{-1}{4}, -1, \frac{1}{16}, 1, \frac{-1}{64}, -1, \dots\right\}$ |

2. Nalezněte vzor k obrazu  $F(z)$  při  $\mathcal{Z}$  transformaci, tj  $\mathcal{Z}^{-1}F(z)$  pro  $F(z)$ :

- |                          |                                  |
|--------------------------|----------------------------------|
| a) $\frac{z^2}{z^2 + 4}$ | b) $\frac{6z^2}{(z+1)(z^2 - 4)}$ |
|--------------------------|----------------------------------|

c)  $\frac{16z^2}{z^4 - 16}$

e)  $\frac{18z}{(z-3)^3}$

g)  $\frac{z^3}{(z-3)^2(z^2+1)}$

d)  $\frac{26z^2}{(z^4 - 5z^2 - 36)}$

f)  $\frac{(2-z)2z}{(z+2)^3}$

h)  $\frac{z^3}{(z-3)(z^2-2z-3)}$

3. Určete řešení  $y(n)$  zadané rekurentní rovnice, vyhovující uvedeným počátečním podmínkám, přičemž budeme při jejich zápisu používat dvě v literatuře používané formy :  $y_n$  je rovnocenné s  $y(n)$ .

a)  $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0, y_0 = 2$  a  $y_1 = 5,$

b)  $y(n+2) + 2y(n+1) + y(n) = 0, y(0) = 0$  a  $y(1) = -1,$

c)  $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0, y_0 = 6$  a  $y_1 = 7,$

d)  $y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 49 \cdot 5^n, y(0) = 2$  a  $y(1) = 3,$

e)  $y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 2, y(0) = 0$  a  $y(1) = 1,$

f)  $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = (2n+5)2^{n+1}, y(0) = 0$  a  $y(1) = 2,$

g)  $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0, y_0 = 0$  a  $y_1 = \sqrt{3}.$

4. Určete řešení zadané diferenční rovnice, vyhovující uvedeným počátečním podmínkám

a)  $\Delta^2 y_n - \Delta y_n = 0, y(0) = 1$  a  $\Delta_0 = 1,$

b)  $\Delta^2 y_n - 3\Delta y_n + 2y_0 = 0, y(0) = 0$  a  $\Delta_0 = -1,$

c)  $\Delta^2 y_n - 4\Delta y_n + 4y_0 = 1, y(0) = 1$  a  $\Delta_0 = 2,$

d)  $\Delta^2 y_n - 8\Delta y_n + 16y_0 = 50 \cdot 5^n, y(0) = 0$  a  $\Delta_0 = 5,$

## Výsledky

1. Obrazy jsou postupně

a)  $\frac{z}{2(z^2-1)}$

c)  $\frac{2z}{4z^2-1}$

e)  $\frac{9z^2}{9z^2+1}$

g)  $\frac{3z}{(3z-1)^2}$

b)  $\frac{z^2}{z^2-9}$

d)  $\frac{2z}{z^2+4}$

f)  $-z \ln(1-z^{-1})$

h)  $\frac{z(4z^3+4z+4z^2+1)}{(4z^2+1)(z^2+1)}$

2. Vzory jsou postupně

a)  $\{2^n \cos(1/2 \pi n)\}$

b)  $\{2^n - 3(-2)^n + 2(-1)^n\}$

c)  $\{(-2)^n - 2 \cdot 2^n \cos(1/2 \pi n) + 2^n\}$

d)  $\{-2 \cdot 2^n \cos(1/2 \pi n) + 3^n + (-3)^n\}$

e)  $\{n(n-1)3^n\}$

f)  $\{n^2(-2)^n\}$

g)  $\left\{-\frac{3}{50} \cos(1/2 \pi n) - \frac{2}{25} \sin(1/2 \pi n) + \frac{3}{50} 3^n + \frac{3}{10} n 3^n\right\}$

h)  $\left\{\frac{15}{16} 3^n + \frac{1}{16} (-1)^n + \frac{3}{4} n 3^n\right\}$

3. a)  $y_n = 2^n + 3^n$ , b)  $y(n) = n(-1)^n$ , c)  $y(n) = 2^n + 5$ , d)  $y(n) = (-2)^n + 5^n$ , e)  $y(n) = n^2$ , f)  $y(n) = n^2 2^n$ , g)  $y(n) = 2^n \sin(n\pi/3)$

4. a)  $y_n = 2^n$ , b)  $y_n = 2^n - 3^n$ , c)  $y_n = n 2^n + 1$ , d)  $y_n = n^2 5^n$ .

## Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1.  [\$\mathcal{Z}\$  transformace - hledání obrazu číselné posloupnosti či předmětu komplexní funkce.](#)
2. [Řešení lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty pomocí  \$\mathcal{Z}\$  transformace.](#)

# Literatura

- [1] Z. DOŠLÁ, O. DOŠLÝ: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Masarykova univerzita, Brno 2003.
- [2] Z. DOŠLÁ, O. DOŠLÝ: *Metrické prostory, teorie a příklady*, Masarykova univerzita, Brno 2000.
- [3] S. N. ELAYDI: *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York 1999.
- [4] J. ELIÁŠ, J. HORVÁTH, J. KAJAN: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 3. časť*, Alfa, Bratislava 1972.
- [5] J. ELIÁŠ, J. HORVÁTH, J. KAJAN, R. ŠULKA: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 4. časť*, Alfa, Bratislava 1972.
- [6] J. KALAS, M. RÁB: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno 2001.
- [7] J. KUBEN: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vojenská akademie v Brně, Brno 1991.
- [8] F. MELKES, M. ŘEZÁČ: *Matematika 2*, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2003.
- [9] Z. PÍRKO, J. VEIT: *Laplaceova transformace, základy teorie a užití v elektrotechnice*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1970.
- [10] R. SIKORSKI: *Diferenciální a integrální počet, funkce více proměnných, příručka pro vys. školy universitního směru*, Academia, Praha 1973.
- [11] M. ŠULISTA: *Základy analýzy v komplexním oboru*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1981.
- [12] J. VESELÝ: *Komplexní analýza pro učitele*, Univerzita Karlova, Karolinum, Praha 2000.