

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

**PREZENTACE PRO
PŘEDMĚT BMA2**

**Autor textu:
RNDr. Zdeněk Svoboda, CSc.**

Leden 2015

Komplexní inovace studijních programů a zvyšování kvality výuky na FEKT VUT v Brně
OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0193



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvodem

Prezentace předmětu BMA2 je spjata se studijními texty pro tento předmět vytvořenými:

- Matematika 2 autorů Zdeňka Svoboda Jiřího Vítovce

a starší texty

- Matematika 2 autorů Františka Melkese a Martina Řezáče.

Podobné je i členění, které vychází ze stejné osnovy předmětu a základní pojmy a věty mají stejné formulace. Forma prezentace také zohledňuje možnost jejího užití jako podkladu pro samostatnou práci. Zájemci o hlubší porozumění mohou snadno hledat navazující informace a ilustrace v citovaných textech, prezentované postupy jsou v těchto textech detailněji popsány a prezentované příklady se liší od příkladů pouze konkrétním zadáním nikoli typy. To umožňuje ověření postupu prostudováním podobně řešených příkladů. Součástí zmiňovaných textů jsou i cvičení na, kterých je možno ověřit pochopení problematiky. Další možností jak ověřit znalost postupů je dána užitím MAPLETů, které jsou vždy uvedeny na konci tématických celků.

1 Diferenciální počet funkcí více proměnných

Definice 1.1. Nechtě $\emptyset \neq D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Zobrazení $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **reálná funkce n reálných proměnných** a množina $D(f)$ se nazývá **definičním oborem** funkce f . Funkci obvykle zapisujeme ve tvaru $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. V případě funkce dvou proměnných, resp. tří proměnných obvykle preferujeme zápis $z = f(x, y)$, resp. $u = f(x, y, z)$. Množinu $H(f)$ definovanou jako $H(f) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid [x_1, x_2, \dots, x_n] \in D(f)\}$ nazýváme **oborem hodnot** funkce f .

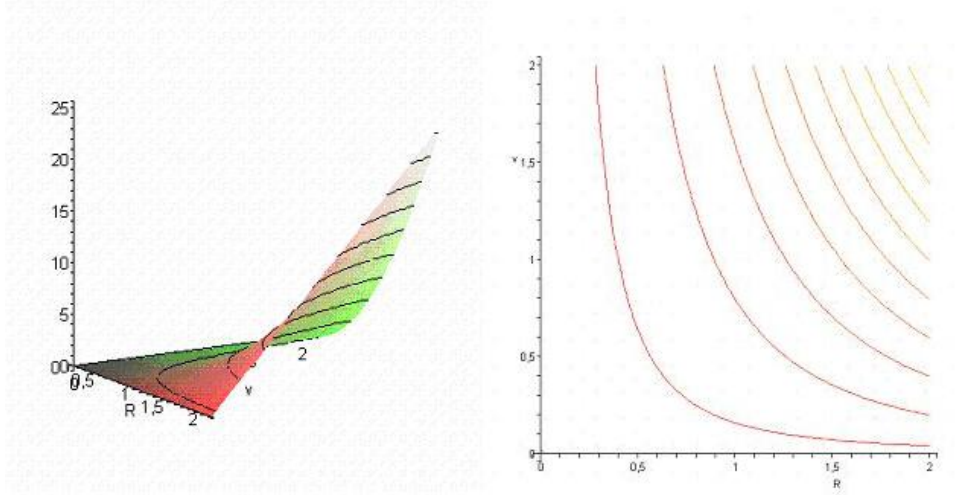
Objem rotačního válce V je funkcí svého poloměru r a výšky v , což zapíšeme jako

$$V = V(r, v) = \pi r^2 v.$$

Grafem funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ je množina všech bodů $[x, y, f(x, y)]$. Pro grafické znázornění funkce $z = f(x, y)$ často využíváme i tzv. **metodu rovinných řezů**. Často se používají **vrstevnice**, což jsou průsečnice grafu funkce f s rovinami $z = c$. Tento název je ve shodě s běžně používaným pojmem v kartografii, kde uvažovanou funkcí je nadmořská výška v závislosti na zeměpisné šířce a délce.

Pro funkce n proměnných lze analogicky definovat tzv. **hladinu funkce** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **na úrovni** $c \in \mathbb{R}$ jako množinu všech bodů $\{[x_1, \dots, x_n] \in D(f) \mid f(x_1, \dots, x_n) = c\}$.

Na následujícím obrázku jsou znázorněny vrstevnice ke zmíněné funkci $V = V(r, v) = \pi r^2 v$



Pomocí m -tice reálných funkcí n reálných proměnných $y = f_i(x_1, \dots, x_n)$, kde $i = 1 \dots m$, pro které platí $D(F) \bigcap_{i=1}^m D(f_i) \neq \emptyset$ definujeme **zobrazení** F z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m předpisem:

$$[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{F} [f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)].$$

Pak řekneme, že **zobrazení** F je určeno funkcemi f_1, \dots, f_m a tyto funkce nazýváme **složkami** **zobrazení**. Poznamenejme, že **zobrazení** z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 , má mnohá využití v geometrii a dá se jím do jisté míry dobře popsat i funkce komplexní proměnné, jak uvidíme později.

Poznámka 1.2. **Zobrazení** F z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 (resp. z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n) si můžeme představit jako „přemísťování“ bodů v rovině \mathbb{R}^2 (resp. v n -rozměrném prostoru \mathbb{R}^n). V takovém to případě nazýváme **zobrazení** F **transformací**.

Často užívaným **zobrazení** z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 je transformace do **polárních souřadnic**, která umožní v rovině \mathbb{R}^2 převést kruh nebo výseč mezikruží na obdélník. Transformace je definována vztahy:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Pro bod roviny $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, značí první složka **zobrazení** $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ vzdálenost bodu $[x, y]$ od počátku soustavy souřadnic. Druhá složka $\varphi(x, y)$ značí úhel, který svírá vektor určený počátečním bodem

$[0, 0]$ a koncovým bodem $[x, y]$ s kladnou částí osy x , a jejím oborem hodnot je tedy interval $\langle 0, 2\pi \rangle$. Úhel φ lze určit ze vztahů:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pro funkce n proměnných, které mají neprázdný průnik svých definičních oborů, zavádíme analogicky jako u funkce jedné reálné proměnné algebraické operace jako sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí a násobení funkce konstantou. Nechť $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $c \in \mathbb{R}$, potom:

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x), & (c \cdot f)(x) &= c \cdot f(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro } x \text{ taková, že } g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Při operaci skládání funkcí n proměnných, resp. zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m je situace podstatně složitější. Situaci popíšeme pro zobrazení a odtud vyplyne, jak je to se skládáním funkcí více proměnných.

Definice 1.3. Nechť $n, m, k \in \mathbb{N}$ a $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ jsou množiny takové, že $Z_2 \subseteq Z_1$. Dále nechť $F : Z_1 \rightarrow Y$ a $G : X \rightarrow Z_2$. Potom zobrazení $F \circ G : X \rightarrow Y$ přiřazující každému bodu $x \in X$ bod $y \in Y$ předpisem

$$y = F \circ G = F(G(x))$$

nazveme **složeným zobrazením**.

Poznámka 1.4. Bod $z \in Z_2$ musí ležet současně v oboru hodnot zobrazení G , které nazýváme **vnitřním**, a v definičním oboru zobrazení F , které nazýváme **vnějším**, což znamená, že počet složek vnitřního zobrazení musí být stejný jako dimenze definičního oboru vnějšího zobrazení.

Příklad 1.5. Složte funkce $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ a $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

Řešení. Oborem hodnot funkce g je zřejmě interval $\langle 1, \infty \rangle$, což je podmnožinou definičního oboru funkce f , jímž je interval $(0, \infty)$. Tedy

$$f \circ g = f(g(x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

□

Metrické vlastnosti \mathbb{R}^n

Při studiu „lokálních“ vlastností funkcí více proměnných je vhodné zavést některé pojmy popisující vlastnosti podmnožin v prostoru \mathbb{R}^n . Základním pojmem je vzdálenost dvou bodů.

Definice 1.6. Nechtě $x = [x_1, \dots, x_n]$, $y = [y_1, \dots, y_n]$ jsou libovolné body prostoru \mathbb{R}^n . Potom číslo

$$v(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

nazýváme **vzdáleností bodů** x a y . Vzdálenost dvou množin $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ definujeme jako

$$\min\{v(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Definice 1.7. Nechť $\varepsilon > 0$. Množinu

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid v(x, x_0) < \varepsilon\}$$

nazýváme ε -okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Množinu

$$P_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < v(x, x_0) < \varepsilon\}$$

nazýváme ε -ryzím nebo ε -prstencovým nebo též ε -redukovaným okolím bodu $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pokud není vzdálenost ε podstatná, budeme symbol ε vynechávat a psát jednoduše $U(x_0)$, resp. $P(x_0)$.

Definice 1.8. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je libovolná množina, $a \in \mathbb{R}^n$ bod v \mathbb{R}^n . Bod a se nazývá:

- (i) **vnitřním bodem** množiny A , jestliže existuje okolí $U(a)$ takové, že $U(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá **vnitřek** množiny A a značí se A° .
- (ii) **bodem uzávěru** množiny A jestliže pro každé okolí $U(a)$ platí $U(a) \cap A \neq \emptyset$. Množina všech bodů uzávěru množiny A se nazývá **uzávěr** množiny A a značí se \bar{A} .
- (iii) **hraničním bodem** množiny A , jestliže v každém okolí $U(a)$ existují body x_1, x_2 takové, že současně platí $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$. Množina všech hraničních bodů množiny A se nazývá **hranice** množiny A a značí se ∂A .

- (iv) **hromadným bodem** množiny A , jestliže každé okolí $U(a)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A . Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá **derivace** množiny A a značí se A' .
- (v) **izolovaným bodem** množiny A , jestliže existuje okolí $U(a)$ takové, že $U(a) \cap A = \{a\}$.

Dále definujeme nejznámější typy množin v \mathbb{R}^n .

Definice 1.9. Nechtě $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou libovolné množiny. Řekneme, že množiny A a B jsou **oddělené** v \mathbb{R}^n pokud $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$. Dále řekneme, že množina A je:

- (i) **otevřená**, pokud obsahuje pouze své vnitřní body, tedy $A^\circ = A$.
- (ii) **uzavřená**, pokud obsahuje pouze body svého uzávěru, tedy $\overline{A} = A$.
- (iii) **komplementem** nebo-li **doplňkem** množiny B , pokud $B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Množinu B pak značíme A^C .

Limita a spojitost funkce

V případě funkcí více proměnných se můžeme do bodu x_0 blížit nekonečně mnoha způsoby, tj. po libovolné křivce. Pokud limita existuje, musí nám (ať se do bodu x_0 blížíme jakkoliv) vycházet vždy stejná hodnota. Již z tohoto pohledu je výpočet limity obtížnější.

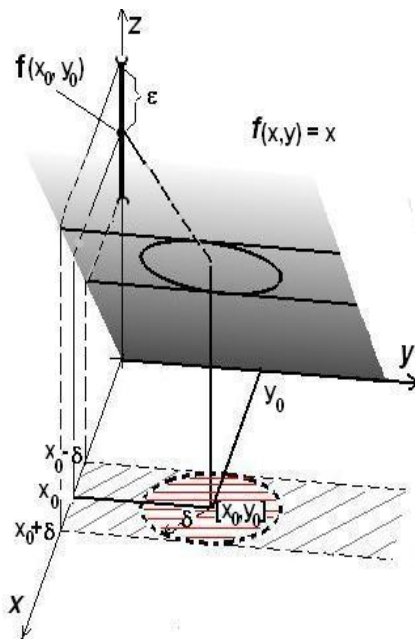
Z výše uvedených důvodů nebudeme při výpočtu limity funkce více proměnných v bodě x_0 požadovat, aby funkce byla definována ve všech bodech nějakého ryzího okolí bodu x_0 . Aby ovšem definice limity v bodě x_0 dávala smysl, budeme v dalším textu, aniž bychom tento fakt stále zdůrazňovali, předpokládat, že **bod x_0 je hromadným (klidně i hraničním) bodem svého definičního oboru.**

Množinu \mathbb{R}^n spolu se všemi jejími nevlastními body budeme označovat symbolem $(\mathbb{R}^*)^n$.

Definice 1.10. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) má v bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ **limitu** L , $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $U(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $P(a)$ bodu a takové, že pro každý bod $x \in P(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in U(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Limita se nazývá **vlastní**, jestliže $L \in \mathbb{R}$, v opačném případě ($L = \pm\infty$) se limita nazývá **nevlastní**. Bod $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ se nazývá **limitní bod**.



Pro zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m se definuje limita analogicky touto m -tice čísel. Z definice limity (podobně jako u funkce jedné proměnné) lze přímo ukázat platnost mnohých tvrzení. Uvedme si ty nejdůležitější, jež budou obdobou těch, která dobře známe z teorie funkce jedné proměnné.

Věta 1.11. Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ nejvýše jednu limitu.

Věta 1.12. Necht' $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce, $a \in (\mathbb{R}^*)^n$. Dále necht' f je ohraničená v nějakém ryzím okolí bodu a . Pokud platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \infty$, pak

$$i \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0, \quad ii \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0.$$

Věta 1.13. Necht' $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ a necht' existují vlastní limity funkcí $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě a . Potom pro algebraické operace s funkcemi platí

$$i \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$ii \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x), \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$iii \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$iv \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ pokud } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0.$$

Spojitost funkce více proměnných je definována analogicky jako u funkce jedné proměnné.

Definice 1.14. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, resp. zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **spojité v bodě** $a \in \mathbb{R}^n$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Poznamenejme, že vzhledem k existenci limity funkce, která je výsledkem algebraických operací s funkcemi majících limitu, platí také, že výsledkem algebraických operací se spojitými funkcemi je spojitá funkce. Pro zobrazení platí následující tvrzení.

Věta 1.15. *Nechť F a G jsou zobrazení. Existuje-li kompozice $F(G(x))$ a $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = b$ a navíc je-li zobrazení F spojitě v bodě b , potom*

$$\lim_{x \rightarrow a} F(G(x)) = F(b).$$

Tato věta spolu s předcházející poznámkou umožňuje tvrdit:

Elementární funkce (jedné i více proměnných) jsou spojitě tam, kde jsou definované, přičemž za elementární funkce považujeme mocninné funkce, exponenciální funkce, goniometrické funkce a všechny funkce k nim inverzní. Dále mezi elementární funkce řadíme všechny funkce, které vznikly z těchto funkcí konečným počtem algebraických operací nebo operací skládání.

Tyto skutečnosti jsou podstatné při stanovení postupu při výpočtu limity u elementárních funkcí, kdy nejdříve zkusíme vypočítat hodnotu funkce (resp. zobrazení) dosazením limitního bodu do předpisu funkce. Pokud tato hodnota existuje, tj. po dosazení obdržíme určitý výraz, je limita rovna této funkční hodnotě.

Příklad 1.16. Vypočtěte limitu

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [1,2,3]} \left[\frac{\sqrt{3x^3 + y^2 - z}}{\operatorname{arctg} \frac{x+z}{2y}}, \operatorname{arccotg} \frac{x+y}{z} \right]$$

zobrazení z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^2 .

Řešení. Přímým dosazením dostáváme

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [1,2,3]} \left[\frac{\sqrt{3x^3 + y^2 - z}}{\operatorname{arctg} \frac{x+z}{2y}}, \operatorname{arccotg} \frac{x+y}{z} \right] = \left[\frac{\sqrt{3(1)^3 + (2)^2 - 3}}{\operatorname{arctg} \frac{1+3}{2 \cdot 2}}, \operatorname{arccotg} \frac{1+2}{3} \right] = \left[\frac{8}{\pi}, \frac{\pi}{4} \right].$$

□

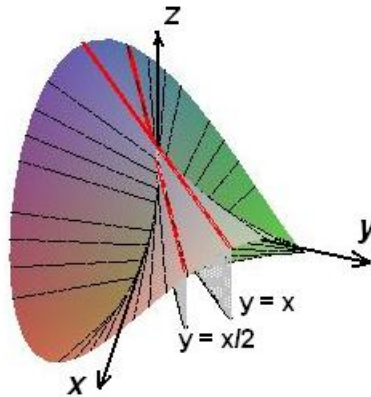
Zobrazení má limitu (je spojitě) právě tehdy, když mají limitu (jsou spojitě) všechny složky tohoto zobrazení. Proto se v dalším zaměříme pouze na výpočet limit funkcí více proměnných. Obecně je jednodušší ukázat neexistenci, obvykle pomocí nalezení dvou cest s různými výsledky, než ukázat existenci limity

Příklad 1.17. Vypočtěte limitu $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Řešení. Vyšetříme všechny limity vzhledem k přímkám procházejícím počátkem mající tvar $y = kx$. Potom platí

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ [x,y] \in [x,kx]}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

To znamená, že hodnota limity v bodě $[0,0]$ vzhledem k přímkám tvaru $y = kx$ závisí na volbě k . Tudíž výsledek limity je pro různá k různý a vyšetřovaná limita neexistuje, viz Obrázek. \square



Příklad 1.18. Rozhodněte, zda funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 1 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

je spojitá v bodě $[0, 0]$.

Řešení. Abychom zjistili spojitost v bodě $[0, 0]$, je nutné (dle Definice 1.14) porovnat funkční hodnotu a limitu funkce f v bodě $[0, 0]$.

Protože se jedná o podíl $\frac{0}{0}$ použijeme transformaci do polárních souřadnic:

$$\frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - \cos^2[r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)]}{[r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)]^2} = \frac{1 - \cos^2(r^2)}{r^4}.$$

U výsledné funkce se limitní přechod $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ nahradí pouze $r \rightarrow 0$. Při výpočtu použijeme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1 - \cos^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2(r^2)}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{4r \sin(r^2) \cos(r^2)}{4r^3} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r^2) \cos(r^2)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sin(r^2)}{r^2} \cdot \lim_{r \rightarrow 0^+} \cos(r^2) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Jelikož platí $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = 1 = f(0, 0)$, funkce je v bodě $[0, 0]$ spojitá. \square

1.1 Parciální derivace, derivace ve směru

Pro funkce více proměnných se zavádí pojem parciální derivace, který využívá pojem derivace funkce jedné proměnné.

Definice 1.19. Parciální derivací funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ podle proměnné x_i rozumíme derivaci funkce jedné proměnné

$$y(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

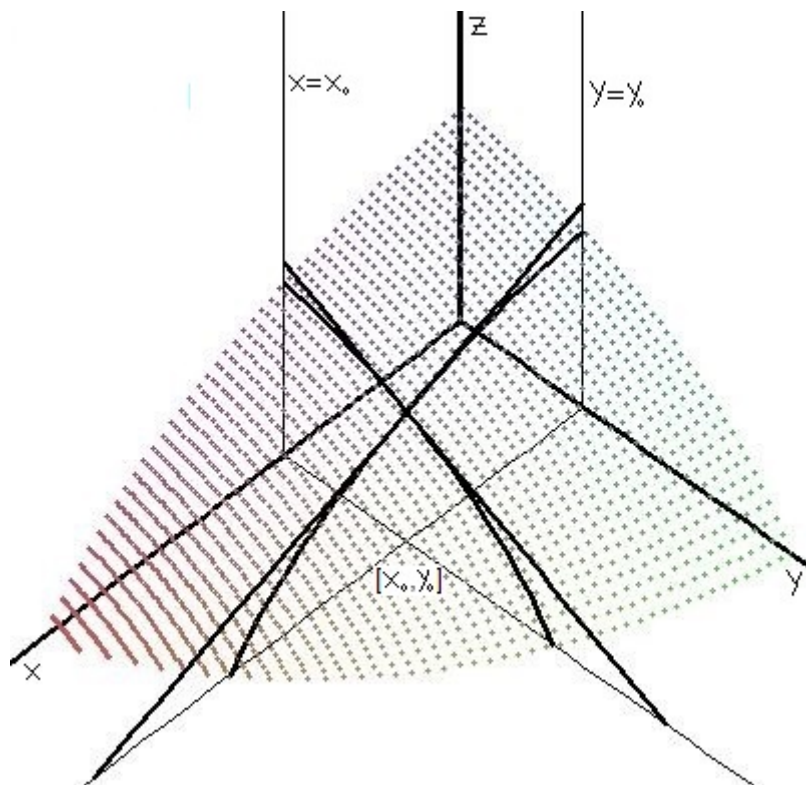
v bodě a_i . Tuto derivaci zapisujeme dvěma možnými způsoby:

$$f'_{x_i}(a) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Je-li navíc tato definována v každém bodě množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$, funkci přiřazující každému bodu této množiny hodnotu této parciální derivace, nazývána parciální derivací funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ podle proměnné x_i , což zapisujeme

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Příklad 1.20. Vypočtěte všechny první parciální derivace funkce

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad \text{v bodě } [1, 1].$$

Řešení. Derivujeme jako složenou funkci, tj.

$$z'_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Odtud $z'_x(1, 1) = -1/2$ a $z'_y(1, 1) = 1/2$. □

Z existence parciálních derivací funkce v bodě neplyne spojitost funkce v tomto bodě.

Definice 1.21. **Derivací funkce** $f(x_1, \dots, x_n)$ **v bodě** $a = [a_1, \dots, a_n]$ **ve směru** $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$ rozumíme derivaci funkce jedné proměnné $y(t) = f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n)$ v bodě $t = 0$ a zapisujeme ji $f'_{\vec{s}}(a)$. To znamená, že

$$f'_{\vec{s}}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + ts_1, \dots, a_n + ts_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}.$$

Volíme-li vektor $\vec{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ tvořený nulami s výjimkou i -té pozice (kde je 1), derivace funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ ve směru je rovna parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$.

Abychom uvedli i souvislost parciálních derivací s derivací ve směru, je vhodné zavést pojem **gradientu** funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$ jako vektor.

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

parciálních derivací podle všech proměnných x_i , pokud existují.

Věta 1.22. *Existuje-li okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_n]$, v němž má funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ spojitě parciální derivace podle všech proměnných x_i , potom pro libovolný vektor $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$ existuje derivace funkce y ve směru \vec{s} a platí:*

$$f'_s(a) = \langle \text{grad } f(a) \cdot \vec{s} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) s_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) s_n.$$

Interpretací derivace ve směru je představa, že funkce f lokálně popisuje nadmořskou výšku zemského povrchu. Postavíme-li se s lyžemi na svah v bodě tak, že lyže se nám při rovnoběžném promítání ve směru osy z promítnou do vektoru (s_1, s_2) , potom podíl rozdílu nadmořských výšek špiček a pat lyží ku délce lyží je roven derivaci funkce f v daném bodě a směru.

Jak jsme již uvedli dříve, lze parciální derivaci chápat jako funkci více proměnných na množině M . Jestliže má funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ na této množině parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$, která má v bodě $a = [a_1, \dots, a_n] \in M$ parciální derivaci podle proměnné x_j , nazveme tuto parciální derivaci parciální derivací

druhého řádu funkce f podle $x_i x_j$, tj.

$$f''_{x_i x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a).$$

Opakováním uvedeného postupu definujeme rekurentně i parciální derivace vyšších řádů. Pro parciální derivace vyšších řádů platí tzv. Schwarzova věta o záměně pořadí derivování.

Věta 1.23 (Schwarzova). *Nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě $a = [a_1, a_2]$ parciální derivace prvního řádu spojitou parciální derivaci f''_{xy} nebo f''_{yx} a druhá existuje. Potom jsou spojitě obě tyto derivace a navíc jsou záměnné, tj. platí*

$$f''_{yx}(a) = f''_{xy}(a).$$

Pro jednoduchý zápis gradientu se používá symbolického vektoru nabla

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

$$\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(a).$$

Dalším důležitým operátorem je tzv. **Laplaceův operátor**, který můžeme symbolicky vyjádřit jako

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Poznamenejme, že s tzv. Laplaceovou rovnicí pro funkci $u(x, y)$, tj. s rovnicí

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

se setkáme později u funkcí komplexní proměnné.

1.2 Užití parciálních derivací

1.2.1 Diferenciál funkce a jeho užití

Diferenciál funkce jedné proměnné v bodě x_0 vnímáme jako nahrazení funkce tečnou v bodě x_0 a jeho existence je rovnocenná existenci derivace v tomto bodě. Situace v případě funkcí více proměnných je komplikovanější, i když z formálního hlediska je význam diferenciálu totožný.

Definice 1.24. Řekneme, že funkce $f(x_1, \dots, x_n)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definovaná v nějakém okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_n]$ je v tomto bodě **diferencovatelná**, jestliže existují konstanty $D_1, \dots, D_n \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{[h_1, \dots, h_n] \rightarrow [0, \dots, 0]} \frac{f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) - (D_1 h_1 + \dots + D_n h_n)}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0$$

Lineární výraz $D_1 h_1 + \dots + D_n h_n$ proměnných h_1, \dots, h_n se nazývá **diferenciál** nebo též **totální diferenciál** funkce f v bodě $[a_1, \dots, a_n]$ a značí se $df(a_1, \dots, a_n)$.

Věta 1.25. *Je-li funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ diferencovatelná v bodě $a = [a_1, \dots, a_n]$, pak je v tomto bodě spojitá. Navíc v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu a platí*

$$(f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a)) = (D_1, \dots, D_n).$$

Poznámka 1.26. Výrazy Přírůstky h_i lze značit jako dx_i .

Při geometrické interpretaci se opět omezíme pouze na funkci dvou proměnných. V tomto případě diferenciál funkce $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ obvykle zapisujeme ve zkrácené podobě

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy .$$

Vyjádříme-li přírůstky $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, $dz = z - z_0$ a dosadíme do výše uvedené rovnice, vznikne nám pro proměnné x, y, z lineární rovnice

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (1.1)$$

která je vzorcem **tečné roviny** k funkci $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$, kde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Příklad 1.27. Napište rovnici tečné roviny a normály (normálové přímky), tj. přímky kolmé k tečné rovině k funkci $f(x, y) = \operatorname{arccotg} \frac{y}{x}$ v bodě $[1, 1, ?]$.

Řešení. Nejdříve vypočteme třetí souřadnici z_0 tečného bodu $z_0 = \operatorname{arccotg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$. Tedy tečný bod má souřadnice $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$. Dále vyuějeme výsledky z příkladu 1.20 a dostáváme $f'_x(1, 1) = -\frac{1}{2}$ a $f'_y(1, 1) = \frac{1}{2}$. Dosazením do vztahu (1.1) dostáváme hledanou rovinu, tj.

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{-1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Normálový vektor tečné roviny $\vec{n} = (1, -1, 2)$ je směrovým vektorem normálové přímky, což spolu se znalostí jednoho bodu normály, tj. bodu $[1, 1, \frac{\pi}{4}]$, umožňuje napsat např. kanonickou rovnici normálové přímky:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{2}.$$

□

Kromě určení tečné roviny je dalším možným využitím diferenciálu **přibližný výpočet funkční hodnoty** $f(b)$ funkce více proměnných $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $b = [b_1, \dots, b_n]$, který je „blízko“ bodu $a = [a_1, \dots, a_n]$, jehož funkční hodnotu známe přesně. Platí totiž $f(b) \doteq f(a) + df(a)$, nebo-li

$$f(b) \doteq f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n) dx_i = f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n) (b_i - a_i).$$

Příklad 1.28. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtete $\sqrt{(1, 02)^2 + (3, 97)^2 + (7, 99)^2}$.

Řešení. K výpočtu využijeme diferenciál funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ v bodě $[1, 4, 8]$ s přírůstky $dx = 0,02$, $dy = -0,03$ a $dz = -0,01$. Platí

$$df(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz$$

a odtud

$$df(1, 4, 8) = \frac{1}{9} dx + \frac{4}{9} dy + \frac{8}{9} dz = \frac{1 \cdot 0,02 - 4 \cdot 0,03 - 8 \cdot 0,01}{9} = -0,02. \Rightarrow$$

$$\sqrt{(1,05)^2 + (3,97)^2 + (8,02)^2} = f(1,05; 3,97; 8,02) \doteq f(1,4,8) + df(1,4,8) = 8,98.$$

□

Dále můžeme využít totálního diferenciálu k **symbolickému odvozování „vzorců“** pro parciální derivování složených funkcí. Uvažujme funkci $f(U) = f(u_1, \dots, u_m)$ m proměnných jako vnější složku a zobrazení tvořené m -ticí vnitřních složek $(\dots, u_i = u_i(x_1, \dots, x_n), \dots) = U(X)$ funkcí n proměnných. Poté $f(U(X)) = f(u_1, \dots, u_m)(x_1, \dots, x_n) = f(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n))$ označuje složenou funkci o n proměnných. Při zavedení symbolického vyjádření parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{df}{dx_i}$, které je analogické s funkcí jedné proměnné, dostáváme:

$$\frac{\partial f(U(X))}{\partial x_i} = \frac{df(U)}{dx_i} = \frac{\dots + \frac{\partial f}{\partial u_j} du_j + \dots}{dx_i} = \dots + \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{du_j}{dx_i} + \dots = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Příklad 1.29. Transformujte Laplaceův operátor $\Delta z = \vec{\nabla}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ do polárních souřadnic.

Řešení. Uvažujme neznámou funkci $z = z(x, y)$ a polární souřadnice ve tvaru dvojice funkcí dvou proměnných $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Inverzní závislost je popsána vztahy: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg \frac{y}{x}$. Začneme pomocným výpočtem, který je přímým použitím vzorce uvedeného výše dostáváme:

$$z'_x = z'_\rho \rho'_x + z'_\varphi \varphi'_x = z'_\rho \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_\varphi \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad z'_y = z'_\rho \rho'_y + z'_\varphi \varphi'_y = z'_\rho \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_\varphi \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Při výpočtu vyšší derivace postupujeme podle definice vyšší derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(z'_\rho \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_\varphi \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial z'_\rho}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_\rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial z'_\varphi}{\partial x} \frac{-y}{x^2 + y^2} + \\ & z'_\varphi \frac{\partial}{\partial x} \frac{-y}{x^2 + y^2} = \left(z''_{\rho\rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z''_{\rho\varphi} \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z'_\rho \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^3} + \\ & \left(z''_{\varphi\rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z''_{\varphi\varphi} \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \frac{-y}{x^2 + y^2} + z'_\varphi \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \\ & z''_{\rho\rho} \frac{x^2}{x^2 + y^2} - z''_{\rho\varphi} \frac{2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + z''_{\varphi\varphi} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + z'_\rho \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + z'_\varphi \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Analogicky dostáváme i parciální derivaci:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{\rho\rho} \frac{y^2}{x^2 + y^2} + z''_{\rho\varphi} \frac{2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + z''_{\varphi\varphi} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + z'_\rho \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} - z'_\varphi \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Po dosazení do Laplaciánu a úpravě ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) dostaneme:

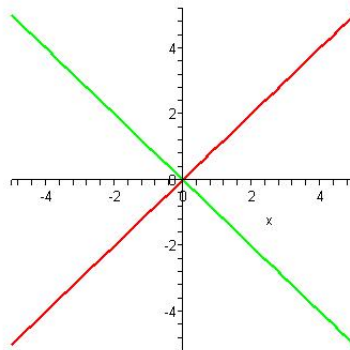
$$z''_{xx} + z''_{yy} = z''_{\rho\rho} + z''_{\varphi\varphi} \frac{1}{x^2+y^2} + z'_\rho \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = z''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} z''_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho} z'_\rho$$

□

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci dvou proměnných $F(x, y)$. Množinou M , definovanou jako $M = \{[x, y] \in D(F) \mid F(x, y) = 0\}$, může být křivkou v rovině \mathbb{R}^2 . případně i funkcí.

Uvažme jednoduchou rovnici $x^2 = y^2$. Řešení této rovnice můžeme popsat pomocí funkcí jedné proměnné, a to dvěma způsoby $y = \pm x$ nebo $y = \pm|x|$. Uvážíme-li toto řešení pouze v okolí nějakého bodu, který je řešením dané rovnice je tato funkce lokálně určena jednoznačně. Toto platí s výjimkou jediného bodu $(0, 0)$. Analogicky pro funkci $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ je křivka M jednotková kružnice se středem v počátku.



Věta 1.30. *Nechť má funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v nějakém okolí bodu $a = [a_1, \dots, a_n]$, pro který platí $f(A) = 0$, spojitě parciální derivace prvního řádu. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0$, potom existuje funkce*

$$x_i = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

taková, že $a_i = g(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ a tato funkce je řešením dané rovnice, tj.

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n) = 0.$$

Navíc má funkce $x_i = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ spojitě parciální derivace prvního řádu v nějakém okolí bodu $[a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n]$ (je spojitá) a platí

$$g'_{x_j} = -\frac{f_{x_j}}{f_{x_i}} \text{ pro } j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n.$$

Uvedené vztahy pro parciální derivace lze odvodit pomocí derivací složené funkce více proměnných. Toto odvození je mnohdy vhodnější než aplikace vzorců. Situaci budeme ilustrovat pro funkci jedné proměnné.

$$(F(x, y(x)))' = F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x))y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}$$

$$(F(x, y(x)))'' = F''_{xx}(x, y(x)) + 2F''_{xy}(x, y(x))y'(x) + F''_{yy}(x, y(x))(y'(x))^2 + F'_y(x, y(x))y''(x) = 0$$

Příklad 1.31. Ukažte, že funkce daná implicitně rovnicí

$$F(x, y) = y^4 + (x^2 - 4)y^3 - 2(x^2 + 2)y^2 - 8x^2y - 16x^2 + 32 = 0 \text{ a bodem } A = [0, 2]$$

má v tomto bodě lokální extrém a určete jej.

Řešení. Nejdříve ověříme, že zadaný bod je řešením rovnice $F(0, 2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 \cdot 2^2 + 32 = 0$. Dále danou rovnicí chápeme tak, že y je funkce proměnné x , tj. $y(x)$, potom ji derivujeme (podle x):

$$y(x)^4 + (x^2 - 4)y(x)^3 - 2(x^2 + 2)y(x)^2 - 8x^2y(x) - 16x^2 + 32 = 0$$

$$4y(x)^3y'(x) + 2xy(x)^3 + 3(x^2 - 4)y(x)^2y'(x) - \\ 4xy(x)^2 - 4(x^2 + 2)y(x)y'(x) - 16xy(x) - 8x^2y'(x) - 32x = 0.$$

Po dosazení $x = 0$, $y(0) = 2$ dostaneme pro $y'(0)$ rovnici: $4 \cdot 2^3 y'(x) + 3(-4)2^2 y'(x) - 4(+2)2y'(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) = 0$. Pro druhou derivaci dané rovnice odvodíme:

$$12y(x)^2y'(x)^2 + 4y(x)^3y''(x) + 2y(x)^3 + 12xy(x)^2y'(x) + 6y(x)y'(x)^2x^2 - 24y(x)y'(x)^2 + \\ 3y(x)^2y''(x)x^2 - 12y(x)^2y''(x) - 4y(x)^2 - 16xy(x)y'(x) - 4y'(x)^2x^2 - \\ 8y'(x)^2 - 4y(x)y''(x)x^2 - 8y(x)y''(x) - 16y(x) - 32xy'(x) - 8x^2y''(x) - 32 = 0$$

Po dosazení $x = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ dostaneme pro $y''(0)$ rovnici:

$$\begin{aligned} 12 \cdot 2^2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 2^3 y''(0) + 2 \cdot 2^3 + 12 \cdot 0 \cdot 2^2 \cdot 0 + 6 \cdot 2 \cdot 0^2 \cdot 0^2 - 24 \cdot 2 \cdot 0^2 + \\ 3 \cdot 2^2 y''(0) \cdot 0^2 - 12 \cdot 2^2 y''(0) - 4 \cdot 2^2 - 16 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0^2 \cdot 0^2 - \\ 8 \cdot 0^2 - 4 \cdot 2 y''(0) \cdot 0^2 - 8 \cdot 2 y''(0) - 16 \cdot 2 - 32 \cdot 0 \cdot 0 - 8 \cdot 0^2 y''(0) - 32 = \\ + 4 \cdot 2^3 y''(0) + 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 y''(0) - 4 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 y''(0) - 16 \cdot 2 - 32 = -32 y''(0) - 64 \Leftrightarrow y''(0) = -2. \end{aligned}$$

Pro funkci danou implicitně platí $y'(0) = 0$ a $y''(0) = -2$, tedy má v tomto bodě lokální maximum. \square

Poznámka 1.32. Podobně je možné ukázat, že všechny derivace vyššího řádu této implicitně dané funkce mají nulové derivace a dosazením do Taylorovy řady je možné určit toto řešení explicitně

$$y = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2} x^2 + \dots = 2 - x^2.$$

Toto je jedna z možností využití derivování funkce dané implicitně.

Další standardně probíranou aplikací je stanovení normálového vektoru k ploše implicitně zadané rovnicí

$$F(x, y, z) = 0.$$

Libovolná křivka $[x(t), y(t), z(t)]$ leží v ploše, jestliže $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Derivováním této rovnice podle t dostáváme:

$$0 = (F(x(t), y(t), z(t)))' = F'_x x' + F'_y Y' + F'_z z' = \langle (F'_x(x, y, z), F'_y(x, y, z), F'_z(x, y, z)) \cdot (x', y', z') \rangle.$$

To znamená, že vektor $\vec{\nabla} F$ je kolmý na libovolný tečný vektor, tedy je normálovým vektorem tečné roviny.

Příklad 1.33. Napište rovnici tečné roviny k ploše zadané implicitně rovnicí

$$(x^2y + z) \exp(x(y + z)) = 0$$

a bodem $A = [1, 1, -1]$.

Řešení. Nejdříve ověříme, bod A je řešením rovnice $F(x, y, z) = (x^2y + z) \exp(x(y + z)) = 0$:

$$F(1, 1, -1) = (1 - 1) \exp(0) = 0$$

Dále vypočteme parciální derivace a sestavíme gradient:

$$\left. \begin{aligned} F'_x &= e^{x(y+z)} (2xy + x^2y^2 + x^2yz + zy + z^2) \\ F'_y &= xe^{x(y+z)} (x + x^2y + z) \\ F'_z &= e^{x(y+z)} (1 + x^3y + xz) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{grad} F(A) = (2, 1, 1)$$

Ze skutečnosti, že normálový vektor je kolmý na každý vektor ležící v rovině (tj. i na vektor $\overrightarrow{AX} = X - A = (x - 1, y - 1, z + 1)$) lze pomocí skalárního součinu, který je pro kolmé vektory roven 0 odvodit rovnici:

$$0 = (x - 1, y - 1, z + 1) \cdot (2, 1, 1) = 2x + y + z - 2.$$

□

Prostorové křivky je možné zadat i jako společné body dvou ploch. Jsou-li tyto zadány implicitně rovnicemi $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ je potom možné určit tečný vektor k této křivce (existuje-li) jako vektorový součin normálových vektorů jednotlivých ploch.

Příklad 1.34. Napište rovnici tečny ke křivce, která je implicitně zadaná jako průsečnice kulové plochy se středem v počátku o poloměru 3 a roviny $x = y$ a bodem $A = [2, 2, 1]$:

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \quad F_2(x, y, z) = x - y = 0.$$

Řešení. Nejdříve ověříme, bod A řeší obě rovnice:

$$F_1(2, 2, 1) = 4 + 4 + 1 - 9 = 0 \quad F_2(2, 2, 1) = 2 - 2 = 0.$$

Dále vypočteme parciální derivace a sestavíme gradienty:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \text{grad } F_1(A) = (4, 4, 2) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{grad } F_2(A) = (1, -1, 0)$$

Dále určíme směrový vektor tečny

$$\vec{s} = (4, 4, 2) \times (1, -1, 0) = (-2, 2, -8)$$

a napíšeme kanonické rovnice přímky

$$\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{-8}.$$

□

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Výpočet parciálních derivací funkce více proměnných.](#)
2. [Určení tečné roviny k funkci dvou proměnných.](#)

2 Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad 2.1 (Motivační). Rychlost chladnutí hmotného bodu je přímo úměrná rozdílu jeho teploty minus teploty okolí. Předpokládejme teplotu bodu 30°C v čase $t = 0$ a čase $t = 30 \text{ min}$ jsme naměřili teplotu 20°C . Teplota okolí je 10°C . V jakém čase klesne teplota hmotného bodu na 15°C ?

Řešení. Označme $T(t)$ teplotu hmotného bodu v čase t . Pro tuto funkci platí rovnice

$$T'(t) = k(T(t) - 10), \text{ navíc platí } T(0) = 30, T(30) = 20,$$

kde k je „materiálová“ konstanta, která bude stanovena později z výše uvedených podmínek. Danou rovnici můžeme „řešit“ tak, že rovnici vydělíme a dostaneme rovnost pro určité integrály:

$$\ln(T(t) - 10) - \ln(30 - 10) = [\ln |T(t) - 10|]_0^t = \int_0^t \frac{T'(t)}{T(t) - 10} dt = \int_0^t k dt = kt \Leftrightarrow T(t) = 10 + 20 \exp(kt).$$

$T(30) = 20$: $20 = 10 + 20 \exp(k30) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \exp(30k) \Leftrightarrow \exp(k) = \sqrt[30]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow T(t) = 10 + 20 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$. Odtud:

$$15 = T(t_2) = 10 + 20 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{30}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2}{30}} \Leftrightarrow t_2 = 60 \text{min.}$$

□

2.0.2 Základní pojmy

Definice 2.2. Obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu nazýváme rovnici, v níž se vyskytuje neznámá funkce jedné proměnné a její derivace až do řádu n . Zapisujeme ji obecně ve tvaru

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

kde F je funkce $n+2$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Tento tvar rovnice nazýváme **nerozřešený vzhledem k nejvyšší derivaci** nebo-li **implicitní**.

Speciálním případem rovnice (2.1) je rovnice, která se dá zapsat ve tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.2)$$

kde f je funkce $n + 1$ proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Tento tvar rovnice nazýváme **rozřešený vzhledem k nejvyšší derivaci** nebo-li **explicitní**.

Příklad 2.3. Určete řešení diferenciální rovnice:

$$y' = 2\sqrt{y}$$

Řešení. I v tomto případě lze modifikovat předchozí postup, tj. odseparovat proměnné a integrovat:

$$1 = \frac{y'}{2\sqrt{y}} \Leftrightarrow \int dx = \int \frac{y' dx}{2\sqrt{y}} = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} \Leftrightarrow x + c = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = (x + c)^2, \text{ kde } x \geq -c.$$

Tedy řešením je funkce dvou proměnných: nezávislé proměnné x a integrační konstanty c . Řešením je také každá konkrétní funkce např. $y = x^2$, $y = (x + 5)^2$. Potom má původní rovnice i jedno řešení „jiného“ typu $y = 0$. \square

Definice 2.4. **Řešením** obyčejné diferenciální rovnice řádu n na intervalu I nazýváme každou n -krát diferencovatelnou funkci na intervalu I , která vyhovuje dané rovnici. **Obecným řešením** obyčejné diferenciální rovnice rozumíme obecný předpis závisející na n různých parametrech c_1, c_2, \dots, c_n , $[c_1, c_2, \dots, c_n] \in M \subseteq \mathbb{R}^n$, kde libovolnou volbou těchto parametrů dostaneme konkrétní řešení, které nazýváme **partikulárním (částečným) řešením**. Řešení diferenciálních rovnic, která nelze získat z obecného řešení žádnou volbou konstant c_1, c_2, \dots, c_n , označujeme jako **singulární (výjimečná)**.

Ne vždy se řešení diferenciální rovnice podaří vyjádřit ve tvaru $y = f(x)$, tj. v **explicitním tvaru**. Často řešení $y(x)$ dostaneme ve tvaru $F(x, y) = 0$, tj. v tzv. **implicitním tvaru**.

Příklad 2.5. Je dán elektrický RL obvod s cívkou o indukci L , ohmickým odporem R a konstantním napětím U . Popište průběh proudu i v závislosti na čase t .

Řešení. Podle prvního Kirchhoffova zákona je součet všech elektromotorických sil v uzavřeném obvodu roven nule a hledaná funkce $i(t)$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$Li'(t) + Ri(t) = U.$$

Řešení výše uvedené rovnice (získané postupem, který uvedeme v dalším odstavci této kapitoly) je

$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R},$$

kde proud i je funkcí času t a $c \in \mathbb{R}$ je libovolná (integrační) konstanta. Tato závislost i na t představuje obecné řešení (tj. popis obecné situace) dané diferenciální rovnice.

Počáteční velikost proudu bývá obvykle známa. V čase $t = 0$ je proud obvykle nulový. Tato podmínka říká, že máme najít funkci $i(t)$ v situaci, kdy $i(0) = 0$. Dosazením zjistíme, že v tomto případě $c = -\frac{U}{R}$, tj. hledaná závislost i na t je potom

$$i(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

a představuje *partikulární řešení* zadané diferenciální rovnice. □

2.1 Diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 2.6. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ je funkce dvou proměnných. Potom **diferenciální rovnici prvního řádu** (rozřešenou vzhledem k první derivaci) nazýváme rovnicí

$$y' = f(x, y). \quad (2.3)$$

Věta 2.7 (Existenční). *Nechť $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Pak má Cauchyho počáteční úloha*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2.4)$$

kde $[x_0, y_0] \in M$, alespoň jedno řešení definované na nějakém otevřeném intervalu $J \subseteq (a, b)$, $x_0 \in J$.

Věta 2.8 (O Existenci a jednoznačnosti řešení). *Nechť $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a v každém bodě množiny M je splněna Lipschitzova podmínka, tj. existuje $L > 0$ tak, že platí*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (2.5)$$

pro každé dva body $[x, y_1], [x, y_2]$ z nějakého okolí bodu $[x_0, y_0]$. Pak pro libovolný bod $[x_0, y_0] \in M$ má Cauchyho počáteční úloha (2.4) právě jedno řešení.

V příkladu 2.3 jsme měli řešení „výjimečné“ řešení $y = 0$, které je tvořeno body kde není jednoznačnost řešení (bodem $[x_0, 0]$ prochází 2 řešení $y = 0$ a $y = (x - x_0)^2$). Pravá strana rovnice z tohoto příkladu ($f(x, y) = \sqrt{y}$) nesplňuje předpoklady věty 2.8, neboť tato má na přímce neohrazenou parciální derivaci podle y .

2.1.1 Separovatelné diferenciální rovnice prvního řádu $y' = f(x)g(y)$.

Definice 2.9. Separovatelnou diferenciální rovnicí prvního řádu nazýváme rovnici, která se dá upravit na tvar

$$y' = f(x)g(y). \quad (2.6)$$

Postup při hledání řešení separovatelné rovnice.

Pokud je rovnice tvaru (2.6) nebo ji lze na tento tvar převést, můžeme postup shrnout do jedné věty: odseparovat proměnné a integrovat. Navíc je možné výraz y' nahradit $\frac{dy}{dx}$ a celou rovnici vynásobit dx . Poté odseparujeme (oddělíme) proměnné včetně dy a dx a integrujeme obě strany rovnice zvlášť.

Příklad 2.10. Řešte separovatelnou diferenciální rovnici $y' = \frac{1 - 2x}{y^3}$.

Řešení. Postupujeme dle návodu:

$$dy = \frac{1 - 2x}{y^3} dx \Leftrightarrow y^3 dy = (1 - 2x) dx \Leftrightarrow \int y^3 dy = \int (1 - 2x) dx \Leftrightarrow \frac{y^4}{4} + C = x - x^2 + K,$$

kde C a K jsou integrační konstanty. Převedením konstanty C na pravou stranu rovnice dostaneme řešení ve tvaru $\frac{y^4}{4} = x - x^2 + K - C$. Označíme-li konstantu $K - C = c$, dostaneme obecné řešení

$$\frac{y^4}{4} = x - x^2 + c.$$

□

Tuto úpravu s konstantami můžeme udělat pokaždé, a proto stačí psát integrační konstantu pouze jednou (obvyčejně ji píšeme na pravou stranu rovnice).

Řešení, která se dostanou při řešení separovatelné rovnice, jsou obvykle v implicitním tvaru, tj. $g(x, y) = 0$. Úpravou se někdy podaří získat explicitní tvar řešení, tj. $y = \varphi(x)$.

Někdy při hledání řešení diferenciální rovnice děláme úpravu, že dělíme celou rovnici výrazem v proměnné y (podobně tomu bylo i v minulém příkladě). Vždy je pak nutné tento výraz položit rovno nule a dořešit vzniklou rovnici. Pokud je jejím řešením funkce $y = \varphi(x)$, musíme se přesvědčit, zda tato funkce není řešením zadané diferenciální rovnice.

Příklad 2.11. Řešte separovatelnou diferenciální rovnici $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

Řešení. Po odseparování a úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Integrací této rovnice dostaneme obecné řešení

$$\arcsin y = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) + c.$$

Nesmíme však zapomenout, že jsme při „odseparovávání“ rovnice provedli úpravu dělení výrazem $\sqrt{1 - y^2}$, který je nulový pro $y = \pm 1$. Jelikož funkce $y = 1$ a $y = -1$ jsou řešením zadané rovnice a nedají se zahrnout do obecného řešení, jsou tyto funkce singulárním řešením zadané rovnice. \square

2.1.2 Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice 2.12. **Lineární diferenciální rovnici prvního řádu** nazýváme rovnicí tvaru

$$y' = f(x)y + g(x). \quad (2.7)$$

Pokud je $g(x) \neq 0$, nazýváme tuto rovnici **nehomogenní**.

Nejčastěji používanou metodou pro nalezení nehomogenního řešení rovnice (2.7), je tzv. **metoda variace konstanty**.

Postup při řešení lineární rovnice metodou variace konstanty.

1. Nejprve metodou separace proměnných najdeme obecné řešení y_h odpovídající homogení rovnice

$$y' = f(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = f(x)dx \Leftrightarrow \ln|y| = c + \int f(x)dx. \text{ Tedy } y_h = cF(x).$$

2. Partikulární řešení lineární rovnice (2.7) předpokládáme ve tvaru $Y = c(x)F(x)$, kde $c(x)$ je neznámá funkce. Po dosazení Y do (2.7) se $c(x)$ odečte; ze vzniklé separovatelné rovnice určíme $c(x)$ a dosadíme

do Y .

3. Obecné řešení (2.7) je ve tvaru součtu $y = y_h + Y$, neboť

$$y' = y'_h + Y' = +f(x)y_h + f(x)Y + g(x) = f(x)y + g(x).$$

Poznamenejme, že krok 2. a 3. lze sloučit tak, že funkci $c(x)$ dosadíme do součinu i s integrační konstantou

Příklad 2.13. Řešte lineární diferenciální rovnici $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

Řešení. Nejdřív vyřešíme homogenní rovnici $y' + 2xy = 0$:

$$y' = -2xy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2xy \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}dy = -2xdx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}dy = \int -2xdx.$$

Integrací poslední rovnice dostaneme $\ln|y| = -x^2 + C$. Potřebujeme vyjádřit y , a proto musíme dál upravit:

$$|y| = e^{-x^2+C} \quad \Leftrightarrow \quad |y| = e^{-x^2}e^C \quad \Leftrightarrow \quad y = ce^{-x^2},$$

kde $c = \pm e^C \cup \{0\}$, tedy $c \in \mathbb{R}$. Nulu můžeme do konstanty c zahrnout, neboť $y = 0$ je řešením homogenní rovnice. Našli jsme tedy obecné řešení

$$y_h = ce^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

lineární homogenní rovnice $y' + 2xy = 0$. Obecné řešení lineární nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru

$$y = c(x)e^{-x^2}.$$

Abychom mohli určit $c(x)$, musíme dosadit y do zadané diferenciální rovnice, a k tomu musíme nejdřív y derivovat.

$$y = c(x)e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = c'(x)e^{-x^2} + c(x)e^{-x^2}(-2x).$$

Po dosazení do nehomogenní rovnice dostaneme podmínku pro $c'(x)$:

$$c'(x)e^{-x^2} + c(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xc(x)e^{-x^2} = e^{-x^2},$$

což je ekvivalentní s $c'(x) = 1$. Z toho integrováním dostaneme, že $c(x) = \int 1 dx = x + c$. Zbývá už jenom dosadit za $c(x)$. Hledané obecné řešení bude

$$y = c(x)e^{-x^2} = (x + c)e^{-x^2} = ce^{-x^2} + xe^{-x^2}.$$

□

Příklad 2.14. Řešte lineární diferenciální rovnici $y' - \frac{xy}{1+x^2} = x$ s počáteční podmínkou $y(0) = 2$.

Řešení. a) *Hledání homogenního řešení:*

$$y' = \frac{xy}{1+x^2} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Odtud integrováním dostaneme $\ln|y| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \ln \sqrt{1+x^2} + C$, tedy

$$y_h = c\sqrt{1+x^2}.$$

b) *Variace konstanty:*

$$y = c(x)\sqrt{1+x^2} \Rightarrow y' = c'(x)\sqrt{1+x^2} + c(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Po dosazení:

$$c'(x)\sqrt{1+x^2} = x \Leftrightarrow c'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow c(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Substituce $1+x^2 = t^2$ vede na

$$c(x) = \sqrt{1+x^2} + c.$$

c) *Obecné řešení dané rovnice:*

$$y = c\sqrt{1+x^2} + x^2 + 1.$$

d) *Partikulární řešení dané rovnice:*

Dosadíme počáteční podmínku: $2 = y(0) = c\sqrt{1} + 1 = c + 1$. Z toho $c = 1$ a hledané partikulární řešení bude

$$y = \sqrt{1 + x^2} + x^2 + 1.$$

□

Řešení lineární rovnice je možné také vyjádřit „vzorcem“.

Věta 2.15. *Nechť funkce f a g jsou spojité na otevřeném intervalu I . Pak obecné řešení lineární diferenciální rovnice (2.7) na I závislé na jedné konstantě c je tvaru*

$$y(x, c) = c e^{\int f(x) dx} + e^{\int f(x) dx} \int \left(g(x) e^{-\int f(x) dx} \right) dx, \quad (2.8)$$

kde každý integrál chápeme jako funkci proměnné x bez aditivní konstanty.

Důsledek 2.16. *Zavedeme-li tzv. **váhovou funkci** $\phi(x, x_0)$ vztahem*

$$\phi(x, x_0) = e^{\int_{x_0}^x f(u) du},$$

můžeme při zachování předpokladů Věty 2.15 tvrdit, že rovnice (2.7) s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ pro $x_0 \in I$ má na I partikulární řešení

$$y = y_0 \phi(x, x_0) + \int_{x_0}^x g(u) \phi(x, u) du.$$

Tato funkce souvisí s tzv. impulsní charakteristikou obvodů.

Poznámka 2.17. Na závěr poznamenejme, že lineární diferenciální rovnice (ať už prvního nebo n -tého řádu, jež budeme studovat v dalším odstavci) neobsahují (na rozdíl od separovatelných rovnic) singulární řešení, tedy každé jejich řešení se dá zahrnout do obecného. Navíc se dá vyjádřit explicitně.

2.2 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Velmi důležitým typem obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů jsou *lineární diferenciální rovnice*.

Definice 2.18. **Lineární diferenciální rovnici n -tého řádu** nazýváme rovnicí

$$L[y] = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (2.9)$$

kde $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ a $f(x)$ jsou funkce, $a_n(x) \neq 0$. Pokud je $f(x) \neq 0$, nazýváme tuto rovnici **nehomogenní**. Pokud položíme $f(x) = 0$, dostaneme rovnici

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (2.10)$$

kterou nazýváme **homogenní** nebo-li **přidruženou homogenní rovnicí** k rovnici (2.9).

Věta 2.19. *Nechť funkce $a_0(x), \dots, a_n(x)$ a $f(x)$ jsou spojité na intervalu I . Pak má počáteční úloha daná rovnicí (2.9) a podmínkami*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad x_0 \in I$$

pro libovolné $x_0 \in I$ právě jedno řešení $y(x)$. Toto řešení existuje na celém intervalu I .

Následující věta, v literatuře často nazývána jako **princip superpozice**, popisuje základní vlastnosti a vztahy mezi řešeními homogenní a nehomogenní rovnice (2.10) a (2.9).

Věta 2.20 (Princip superpozice). *Pro řešení rovnic (2.9) a (2.10) platí následující tvrzení.*

i Nechť je y_i pro $i = 1, 2$ řešením rovnice (2.9) s funkcí $f_i(x)$ na pravé straně. Pro libovolné $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ je funkce $y = c_1y_1 + c_2y_2$ řešením (2.9) s pravou stranou $c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$.

ii Nechť y_1 a y_2 jsou řešeními nehomogenní rovnice (2.10). Potom také funkce $y = c_1y_1 + c_2y_2$ je řešením homogenní rovnice (2.10).

Důkaz. Označme levou stranu rovnice (2.9) pomocí operátoru lineárního $L[y]$, který n -krát diferencovatelné funkci y přiřadí (dosazením) konkrétní funkci. Platí:

$$\begin{aligned} L[y_1] = f_1(x) \text{ a } L[y_2] = f_2(x) &\Rightarrow L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x), \\ L[y_1] = 0 = L[y_2] &\Rightarrow L[c_1y_1 - c_2y_2] = c_1L[y_1] - c_2L[y_2] = 0, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

Poznámka 2.21. Definice lineární nezávislosti funkcí je analogií definice lineární nezávislosti vektorů. To znamená, že funkce y_1, y_2, \dots, y_n jsou **lineárně nezávislé** na intervalu I , pokud pro všechna $x \in I$ platí

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Věta 2.22. *Nechť $a_i(x)$ a jsou spojité funkce na I . Potom obecné řešení homogenní rovnice (2.10) je tvaru*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \quad (2.11)$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty a $y_1(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (2.10), která nazýváme **fundamentální systém řešení** rovnice (2.10). Tento systém tvoří bázi vektorového prostoru dimenze n .

Jak poznat, zda daná n -tice funkcí je lineárně nezávislá a zároveň generuje obecné řešení rovnice (2.10), uvádí následující věta.

Věta 2.23. *Nechť funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou řešeními homogenní diferenciální rovnice (2.10) na intervalu I . Dále necht' $\det(W(x))$ je determinant, tzv. **wronskián**, z následující matice*

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Potom je-li $\det(W(x)) = 0$ pro nějaké $x \in I$, pak $\det(W(x)) = 0$ pro všechna $x \in I$ a funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně závislé a netvoří (negenerují) obecné řešení rovnice (2.10). V opačném případě, tj. je-li $\det(W(x)) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$, pak $\det(W(x)) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a funkce $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ jsou lineárně nezávislé a tvoří (generují) obecné řešení rovnice (2.10).

Věta 2.24. *Nechť Y je jedno libovolné partikulární řešení nehomogenní lineární rovnice (2.9). Dále necht' y_h je obecné řešení k ní přidružené homogenní rovnice (2.10). Potom obecné řešení y rovnice (2.9) má tvar*

$$y = y_h + Y. \quad (2.12)$$

Důkaz. Tato věta je přímým důsledkem principu superpozice a Věty 2.22. Totiž, pokud je y libovolné řešení rovnice (2.9) a Y nějaké konkrétní řešení rovnice (2.9), pak jejich rozdíl je vždy (podle (ii) Věty 2.20) nějaké homogenní řešení rovnice (2.10). Vezmeme-li za toto řešení množinu všech řešení, tj. řešení y_h , pak každé řešení y rovnice (2.9) se dá vyjádřit ve tvaru (2.12). \square

Věta 2.25 (Variace konstant). *Nechť (2.9) je nehomogenní rovnice pro niž platí, že obecné řešení příslušné homogenní rovnice (2.10) je tvaru $y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$. Pak partikulární řešení Y rovnice (2.9) je tvaru $Y = c_1(x)y_1 + \dots + c_n(x)y_n$, kde $c_1(x), \dots, c_n(x)$ jsou libovolné primitivní funkce k funkcím $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$, které vyhovují následující soustavě rovnic*

$$\begin{aligned} c'_1(x)y_1 + \dots + c'_n(x)y_n &= 0, \\ c'_1(x)y'_1 + \dots + c'_n(x)y'_n &= 0, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ c'_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + c'_n(x)y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Příklad 2.26. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x$, známe-li obecné řešení příslušné homogenní rovnice $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$, které je rovno $y_h = c_1x + c_2x^2$.

Řešení. Nejprve určíme partikulární řešení Y zadané rovnice. Podle předchozí věty ho budeme hledat ve tvaru $Y = c_1(x)x + c_2(x)x^2$. Po dosazení do (2.13) dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 &= 0, \\c_1'(x) + c_2'(x)2x &= x,\end{aligned}$$

jejíž řešením jsou funkce $c_1'(x) = -x$ a $c_2'(x) = 1$. Integrací dostáváme např. primitivní funkce $c_1(x) = -\frac{x^2}{2}$ a $c_2(x) = x$. Odtud $Y = -\frac{x^3}{2} + x^3$ a po úpravě $Y = \frac{x^3}{2}$. Podle Věty 2.24 je hledané obecné řešení

$$y = c_1x + c_2x^2 + \frac{x^3}{2}.$$

□

Poznámka 2.27. Podobně jako pro rovnice prvního řádu lze metodu variace konstant popsat jednoduchým vzorcem s využitím pojmu váhové funkce. To je funkce $\Phi(x, s)$ určená podmínkou, že pro každé s je funkce $y(x) = \Phi(x, s)$ řešením homogenní rovnice (2.10) splňující splňující Cauchyho počáteční podmínky $y(s) = y'(s) = \dots = y^{(n-2)}(s) = 0$, $y^{(n-1)}(s) = 1/a_n(s)$. Potom lze partikulární řešení $Y(x)$ rovnice (2.9) podmínku $Y(x_0) = 0$ vyjádřit ve tvaru:

$$Y(x) = \int_{x_0}^x f(s)\Phi(x, s) ds.$$

Ovšem najít obecné řešení homogenní rovnice (2.10) s libovolnými koeficienty $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ stále představuje problém. Proto se v následujícím odstavci omezíme pouze na jednodušší situaci, kdy tyto koeficienty jsou konstantní funkce, tj. ve skutečnosti se na jejich místě vyskytují reálná čísla a_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

2.2.1 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Definice 2.28. Lineární diferenciální rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (2.14)$$

kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, nazýváme **homogenní lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty**.

Předpokládejme řešení rovnice (2.14) ve tvaru $y = \exp(\lambda t)$. Po dosazení této funkce do(2.14) dostáváme rovnici:

$$(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) \exp(\lambda t) = 0.$$

Protože $y = \exp(\lambda t)$ je kladná funkce, zavedeme následující pojem.

Definice 2.29. Nechť je dána rovnice (2.14). Algebraickou rovnici

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (2.15)$$

nazýváme **charakteristickou rovnicí diferenciální rovnice (2.14)**.

Z odvození charakteristické rovnice je zřejmé, že pro každý kořen λ rovnice (2.15) je funkce $y = \exp(\lambda x)$ řešením rovnice (2.14). Situaci komplikuje násobnost kořenů a komplexní kořeny.

Věta 2.30. *Mějme homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty tvaru (2.14) a její charakteristickou rovnici (2.15). Pak platí:*

1. *Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ k -násobný kořen λ charakteristické rovnice, $k \geq 1$, pak funkce $y = \exp(\lambda t)$ je řešením 2.14.*

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda x}$$

jsou řešením a součástí fundamentálního systému rovnice (2.14) .

2. *Je-li $\lambda_{1,2} = a \pm bj$ dvojice komplexně sdružených k -násobných komplexních kořenů charakteristické rovnice, $k \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, pak funkce*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx, \quad y_3 = x e^{ax} \cos bx, \dots, y_{2k-1} = x^{k-1} e^{ax} \cos bx, \\ y_2(x) &= e^{ax} \sin bx, \quad y_4 = x e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

jsou řešením a součástí fundamentálního systému rovnice (2.14).

Poznámka 2.31. Jelikož charakteristická rovnice (2.15) je n -tého řádu, existuje právě n (ne nutně různých) komplexních kořenů. Tomu odpovídá n funkcí fundamentálního systému a množina všech řešení rovnice (2.14) tvoří vektorový prostor dimenze n , což je ve shodě s Větou 2.22. Bází tohoto prostoru jsou například všechna řešení získaná podle návodu Věty 2.30.

Příklad 2.32. Pomocí Věty 2.30 najděte obecné řešení rovnice $y^{(7)} + 5y^{(5)} - 36y''' = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice diferenciální rovnice je $\lambda^7 + 5\lambda^5 - 36\lambda^3 = 0$. Je zřejmé, že jejím trojnásobným kořenem je $\lambda_{1,2,3} = 0$. Zbývající kořeny určíme z rovnice $\lambda^4 + 5\lambda^2 - 36 = 0$. Jedná se o rovnici 4. stupně, ale pro proměnou λ^2 se jedná o rovnici kvadratickou, tedy platí: $\lambda^4 + 5\lambda^2 - 36 = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 9)$. Nyní dořešíme tyto dvě kvadratické rovnice (v komplexním oboru), dostaneme celkem zbývající kořeny $\lambda_{4,5} = \pm 2$, $\lambda_{6,7} = \pm 3j$. Proto podle Věty 2.30 získáváme následující řešení, která tvoří fundamentální systém zadané diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= e^{0x}, & y_2(x) &= xe^{0x}, & y_3(x) &= x^2e^{0x}, \\y_4(x) &= e^{2x}, & y_5(x) &= e^{-2x}, & y_6(x) &= e^{0x} \cos 3x, & y_7(x) &= e^{0x} \sin 3x.\end{aligned}$$

Obecné řešení je pak tvaru

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{2x} + c_5e^{-2x} + c_6 \cos 3x + c_7 \sin 3x.$$

□

Při hledání řešení charakteristické rovnice (podobné té, co je uvedena v Příkladu 2.32) je možné použít metody postupného rozkládání polynomu. V žádném případě se však nejedná o postup jednoduchý. Právě v tom tkví problém při hledání obecného řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Zatímco řešení diferenciální rovnice druhého řádu je jednoduché – řešíme kvadratickou rovnici, je řešení rovnic vyšších řádů komplikovanější

2.2.2 Nehomogenní rovnice s konstantními koeficienty

Definice 2.33. Lineární diferenciální rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (2.16)$$

kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, a $f(x) \neq 0$ je funkce nazýváme **nehomogenní lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty**.

K nalezení obecného řešení rovnice (2.16) je možné použít Větu 2.24. Je však otázka, jakým způsobem hledat partikulární řešení zadané nehomogenní lineární diferenciální rovnice. Univerzální metoda variace konstant přirozeně funguje i pro rovnici s konstantními koeficienty (2.16). Dokonce v případě lineárních rovnic s konstantními koeficienty se zjednoduší i užití vzorce z Poznámky 2.27, protože funkce bude mít tvar $\Phi(x, s) = \tilde{\Phi}(x - s)$. Partikulární řešení je potom dáno vzorcem

$$Y(x) = \int_{x_0}^x \tilde{\Phi}(x - s) g(s) ds.$$

Příklad 2.34. Nalezněte obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice.

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x},$$

Řešení. Nejprve určíme homogenní řešení y_h . Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice je $\lambda^2 + 1 = 0$. Odtud $\lambda_{1,2} = \pm j$ a fundamentální systém této rovnice má tvar $y_1 = \cos x$ a $y_2 = \sin x$. Nyní určíme partikulární řešení Y zadané rovnice dle předchozí poznámky:

Určíme konstanty c_1 , c_2 tak, aby platilo $y(s) = 0$, $y'(s) = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 \cos s + c_2 \sin s = 0 \\ -c_1 \sin s + c_2 \cos s = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin s \\ 1 & \cos s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{vmatrix}} = \frac{-\sin s}{1}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos s & 0 \\ -\sin s & 1 \end{vmatrix}}{1} = \cos s$$

Dostáváme váhovou funkci $\Phi(x, s) = -\sin s \cos x + \cos s \sin x = \sin(x - s)$ a partikulární řešení ($x_0 = \pi/2$ nemůže být $x_0 = 0$, neboť není v tomto bodě pravá strana rovnice definována):

$$\begin{aligned} Y(x) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin(x-s)}{\sin s} ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin x \cotg s - \cos x ds = [-s \cos x + \ln |\sin s| \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^x = \\ &= -x \cos x + \sin x \ln |\sin x| + \frac{\pi}{2} \cos(x) - \ln |\sin(\pi/2) \sin x| = -x \cos x + \sin x \ln |\sin x| + 0 + \frac{\pi}{2} \cos(x). \end{aligned}$$

Podle Věty 2.24 je pak hledané obecné řešení

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + -x \cos x + \sin x \ln |\sin x| + \frac{\pi}{2} \cos(x) = (C_1 - x) \cos x + (C_2 + \ln |\sin x|) \sin x$$

Použitím metody variace konstant by výpočty byly prakticky totožné, proto výpočty nebudeme podrobně provádět. Podle Věty 2.25 ho budeme hledat ve tvaru $Y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$. Po dosazení do vzorce (2.13) dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x &= 0, \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x &= \frac{1}{\sin x}.\end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy (můžeme použít Cramerovo pravidlo) dostáváme $c_1'(x) = -1$ a $c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$. Integrováním dostáváme neznámé funkce $c_1(x) = -x$ a $c_2(x) = \ln |\sin x|$. Celkově dostáváme jiné partikulární řešení $Y = \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$. □

Předvedené dvě metody nejsou jediným způsobem, jak nalézt obecné řešení nehomogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty.

V praxi se často používá tzv. **metoda neurčitých koeficientů**. Tato metoda je sice „uživatelsky přívětivější“, avšak je použitelná pouze pro rovnice (2.16) se speciální pravou stranou. Při řešení využíváme opět Větu 2.24 a obecné řešení hledáme ve tvaru

$$y = y_h + Y.$$

Rozdíl je však ve způsobu hledání partikulárního řešení Y . Nyní popíšeme, jak lze toto řešení metodou neurčitých koeficientů najít. U této metody se předpokládá, že pravá strana rovnice (2.16), to jest funkce

$f(x) = e^{\alpha x}(P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x)$ je v tzv. **speciálním tvaru**. Uvažme, že derivace funkce, která má tvar jako funkce $f(x)$ je funkcí stejného tvaru podobně jako lineární kombinace funkcí tohoto tvaru má stejný tvar jako funkce $f(x)$. Tato úvaha nás opravňuje předpokládat existenci partikulárního řešení ve stejném tvaru jako je funkce $f(x)$. Navíc je třeba uvážit možnou komplikaci a sice je-li dvojice komplexních čísel $\alpha \pm j\beta$ kořenem charakteristické rovnice potom po dosazení funkce $\exp((\alpha \pm j\beta)x)$ do levé strany rovnice dává nulu a ne funkci uvažovaného typu. V takovém případě mluvíme o rezonanci a tuto situaci musíme zohlednit při předpovědi partikulárního řešení.

Věta 2.35. *Nechť je dána lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (2.16) s pravou stranou*

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x),$$

kde $P_n(x)$, resp. $Q_m(x)$ jsou polynomy stupně n , resp. m . Potom existuje partikulární řešení rovnice (2.16)

$$Y(x) = e^{\alpha x}(\tilde{P}_p(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_p(x) \sin \beta x)x^k,$$

kde $\tilde{P}_p(x)$, $\tilde{Q}_p(x)$ jsou vhodné polynomy stupně $p = \max\{m, n\}$ a k je násobnost $\alpha \pm j\beta$ jako kořene charakteristické rovnice. Poznamenejme, že není-li $\alpha \pm j\beta$ kořenem charakteristické rovnice, potom $k = 0$.

Tento tvar obsahující neurčité (reálné) koeficienty dosadíme do dané rovnice (2.16). Porovnáním obou stran rovnice (podobně jako např. při hledání koeficientů u rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky) tyto koeficienty dopočítáme. Některé tvary řešení jsou pro přehlednost uvedeny v tabulce.

Pravá strana $f(x)$	Tvar partikulárního řešení Y
$f(x) = e^{ax} P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom n -tého stupně, $a \in \mathbb{R}$	$Y = e^{ax} x^k Q_n(x)$, a je k -násobný kořen char. rovnice, $Q_n(x)$ je obecný polynom n -tého stupně
$f(x) = e^{ax} (M \cos bx + N \sin bx)$, kde M, N, a, b jsou reálná čísla	$Y = e^{ax} x^k (A \cos bx + B \sin bx)$, $a + bj$ je k -násobný kořen char. rovnice, A, B jsou reálná čísla

Příklad 2.36. Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou:

a) $y'' - 4y = 10e^{3x}$

b) $y'' + 4y = 8x^2 - 32x + 4$

c) $y'' + 2y' - 3y = (4x - 3)e^x$

d) $3y'' - 2y' = 10 \cos 2x$

Řešení. a) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' - 4y = 0$. Máme $\lambda^2 - 4 = 0$. Kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2$ a $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 10e^{3x} = e^{3x} P_0(x).$$

Zde $\alpha = 3$ není kořen charakteristické rovnice ($3 \neq \pm 2$), a proto $k = 0$. Obecný polynom nultého stupně je konstanta, odtud $P_0(x) = A$. Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{3x} x^0 A = Ae^{3x}$$

a musí splňovat rovnici $Y'' - 4Y = 10 e^{3x}$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat a dosadit do zadané rovnice:

$$Y' = 3Ae^{3x}, \quad Y'' = 9Ae^{3x}.$$

Po dosazení dostáváme

$$9Ae^{3x} - 4Ae^{3x} = 10e^{3x}.$$

Rovnici nejdřív vydělíme e^{3x} a dostaneme $9A - 4A = 10$ a odtud $A = 2$. Máme jedno partikulární řešení $Y = 2e^{3x}$ a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = y_h + Y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + 2e^{3x}.$$

b) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 4y = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 4 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ a $y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 8x^2 - 32x + 4 = e^{0x}(8x^2 - 32x + 4) = e^{0x}P_2(x).$$

Zde $\alpha = 0$ není kořen charakteristické rovnice ($0 \neq \pm 2i$), a proto $k = 0$. Obecný polynom druhého stupně je $P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$. Potom partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x}x^0(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C$$

a musí splňovat rovnici $Y'' + 4Y = 8x^2 - 32x + 4$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat:

$$Y' = 2Ax + B, \quad Y'' = 2A.$$

Po dosazení do zadání dostáváme

$$2A + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 8x^2 - 32x + 4.$$

Na obou stranách rovnice jsou polynomy druhého stupně. Aby platila rovnost musí se rovnat koeficienty u jednotlivých mocnin (odtud název metoda neurčitých koeficientů):

$$x^2: \quad 4A = 8,$$

$$x^1: \quad 4B = -32,$$

$$x^0: \quad 2A + 4C = 4.$$

Dostali jsme soustavu rovnic. Po vyřešení máme $A = 2$, $B = -8$, $C = 0$. Získali jsme jedno partikulární řešení nehomogenní rovnice $Y = 2x^2 - 8x$. Potom obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x^2 - 8x.$$

c) Vyřešíme homogenní rovnici $y'' + 2y' - 3y = 0$. Její charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$ a $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = (4x - 3)e^x = e^x P_1(x).$$

Zde $\alpha = 1$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 1$. Obecný polynom prvního stupně je $P_1(x) = Ax + B$ a partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^x x^1 (Ax + B) = e^x (Ax^2 + Bx)$$

a musí splňovat rovnici $Y'' + 2Y' - 3Y = (4x - 3)e^x$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat:

$$Y = e^x (Ax^2 + Bx),$$

$$Y' = e^x (Ax^2 + Bx) + e^x (2Ax + B) = e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B),$$

$$Y'' = e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B) + e^x (2Ax + B + 2A) =$$

$$= e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A) = e^x (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A). \quad \text{Po dosazení}$$

do zadání dostáváme

$$e^x (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A) + 2e^x (Ax^2 + Bx + 2Ax + B) - 3e^x (Ax^2 + Bx) = (4x - 3)e^x.$$

Rovnici nejdřív vydělíme výrazem e^x a dostaneme

$$Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A + 2Ax^2 + 2Bx + 4Ax + 2B - 3Ax^2 - 3Bx = 4x - 3.$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin.

$$x^2: \quad A + 2A - 3A = 0,$$

$$x^1: \quad B + 4A + 2B + 4A - 3B = 4,$$

$$x^0: \quad 2B + 2A + 2B = -3.$$

Dostali jsme soustavu $8A = 4$, $2A + 4B = -3$. Odtud $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$. Partikulární řešení je

$$Y = e^x \left(\frac{x^2}{2} - x \right).$$

Potom obecné řešení bude

$$y = y_h + Y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + e^x \left(\frac{x^2}{2} - x \right).$$

d) Vyřešíme homogenní rovnici $3y'' - 2y' = 0$. Charakteristická rovnice je tvaru $3\lambda^2 - 2\lambda = 0$ a její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ a $y_h = c_1 + c_2 e^{\frac{2}{3}x}$. Pravá strana je tvaru

$$f(x) = 10 \cos 2x = e^{0x} (10 \cos 2x + 0 \sin 2x).$$

Zde $\alpha + i\beta = 0 + 2i$ není kořen charakteristické rovnice, a proto $k = 0$. Partikulární řešení bude mít tvar

$$Y = e^{0x} x^0 (A \cos 2x + B \sin 2x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

a musí splňovat rovnici $3Y'' - 2Y' = 10 \cos 2x$. Nyní musíme Y dvakrát derivovat:

$$Y' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad Y'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Dosadíme do zadání a dostáváme

$$3(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) - 2(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) = 10 \cos 2x,$$

což je ekvivalentní s

$$-12A \cos 2x - 12B \sin 2x + 4A \sin 2x - 4B \cos 2x = 10 \cos 2x.$$

Aby toto platilo, musí se koeficienty při $\cos 2x$ a $\sin 2x$ rovnat na obou stranách rovnice:

$$\cos 2x : \quad -12A - 4B = 10,$$

$$\sin 2x : \quad -12B + 4A = 0.$$

Opět jsme dostali soustavu rovnic: $-12A - 4B = 10$, $A - 3B = 0$.

Odtud $A = -\frac{3}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Partikulární řešení je

$$Y = -\frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice bude

$$y = y_h + Y = c_1 + c_2 e^{\frac{2}{3}x} - \frac{3}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x.$$

□

Na závěr připomeňme, že pomocí principu lze metodou neurčitých koeficientů řešit i složitější pravé strany.

Příklad 2.37. Nalezněte obecné řešení rovnice:

$$y'' - 2y' + y = 4 + 4 \sin 2x - 6 \cos^2 x$$

Řešení. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda = 1$, proto je obecné řešení rovnice homogenní ve tvaru

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Pravou stranu rovnice nejprve upravíme pomocí vztahu $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$$4 + 4 \sin 2x - 6 \cos^2 x = 4 + 4 \sin 2x - 6 \frac{\cos 2x + 1}{2} = 1 + 4 \sin 2x - 3 \cos 2x,$$

která je součtem dvou pravých stran ve speciálním tvaru:

$$f_1(x) = 1 \quad f_2(x) = 4 \sin 2x - 3 \cos 2x.$$

Partikulární řešení můžeme předpovědět ve tvaru součtu odpovídajících partikulárních řešení:

$$Y = A + B \sin 2x + C \cos 2x \Leftrightarrow Y' = 2B \cos 2x - 2C \sin 2x \Leftrightarrow Y'' = -4B \sin 2x - 4C \cos 2x.$$

Po dosazení do rovnice dostáváme

$$A + (-3B - 4C) \cos 2x + (4B - 3C) \sin 2x = 1 - 3 \cos 2x + 4 \sin 2x,$$

z čehož plyne $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$ a $Y = 1 + \cos 2x = \cos^2 x$. Obecné řešení dané rovnice má tvar

$$y = y_h + Y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 2 \cos^2 x.$$

□

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Určení typu diferenciální rovnice.](#)
2. [Ověření, zda je funkce řešením zadané diferenciální rovnice.](#)
3. [Řešení diferenciální rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými.](#)
4. [Řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu.](#)

5. Řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty metodou variace konstant.
6. Řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty metodou neurčitých koeficientů.
7. Nalezení obecného řešení diferenciální rovnice.

3 Funkce komplexní proměnné

3.1 Komplexní čísla

3.1.1 Základní pojmy

Pomocí **imaginární jednotky**¹ j definované vlastností $j^2 = -1$ se rozšíří reálný číselný obor na **čísla komplexní** $z = x + jy$, kde x nazýváme **reálnou částí** $x = \Re z$ a y **imaginární částí** $y = \Im z$ komplexního čísla z . Množinu všech komplexních čísel značíme \mathbb{C} . Pravidla pro sčítání a násobení ukážeme je na příkladě:

$$(4 - j) + 4(1 + 2j) = 8 + 7j \quad (4 - j)(1 + 2j) = 4 - j + 8j - 2j^2 = 4 + 7j + 2 = 6 + 7j.$$

¹Často je zvykem označovat komplexní jednotku písmenem i ; v technické praxi se často používá označování písmenem j .

Číslo $\bar{z} = x - jy$ nazýváme **číslem komplexně sdruženým** k číslu $z = x + jy$. Platí, že $z\bar{z} = x^2 + y^2$ je kladné reálné číslo a pro každé $z = x + jy \in \mathbb{C}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** (nebo také **modul**) $|z|$ vztahem

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Podobně postupujeme při dělení komplexních čísel:

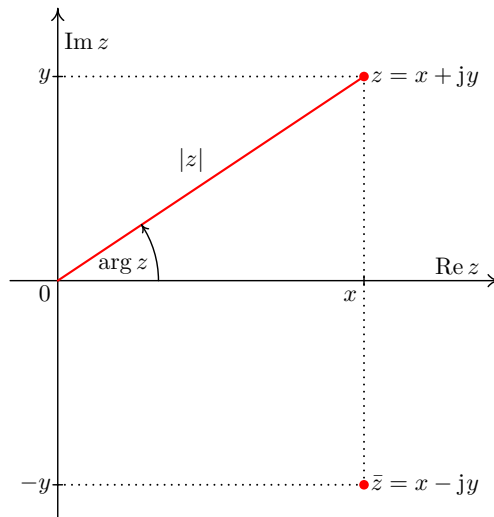
$$\frac{20 - 5j}{2 + j} = \frac{20 - 5j}{2 + j} \frac{2 - j}{2 - j} = \frac{40 - 10j + 20j - 5j^2}{2^2 - j^2} = \frac{45 + 10j}{5} = 9 + 2j$$

Lze snadno ověřit, že pro všechna komplexní čísla $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí rovnosti

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\bar{z}} = z, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Komplexní čísla zobrazujeme jako body v rovině, pak $|z|$ je vzdálenost bodu $z = [x, y]$ od počátku a φ úhel, který svírá průvodič bodu $z = [x, y]$ s kladným směrem reálné osy x a $\varphi = \arg z$ nazýváme **argumentem** komplexního čísla z . Další možností jak vyjádřit komplexní číslo $z = x + jy \neq 0$ je **goniometrický tvar**

$$z = x + jy = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|(\cos \arg z + j \sin \arg z).$$



Goniometrický tvar je vhodný pro geometrickou interpretaci násobení nebo dělení dvou komplexních čísel z_1, z_2 , platí:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| |z_2| & \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} & \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 \end{aligned}$$

Opakovaným užitím při výpočtu n -té mocniny komplexního čísla dostáváme tzv. Moivreovu větu:

$$(|z|(\cos \varphi + j \sin \varphi))^n = |z|^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi). \quad (3.1)$$

Dále zavádíme také **exponenciální tvar** komplexního čísla

$$z = x + jy = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|(\cos \arg z + j \sin \arg z) = |z|e^{j \arg z}.$$

Problematická je nejednoznačnost funkce argument, proto definujeme **hlavní hodnotou argumentu** komplexního čísla z a zapisujeme ji $\text{Arg } z$ jako tu hodnotu φ argumentu $\arg z$, pro kterou platí $-\pi < \varphi \leq \pi$. Situaci ukážeme na určení n -té odmocniny čísla z . Ze vztahu 3.1 a z rovnosti $(\sqrt[n]{z})^n = z$ plyne $n \arg \sqrt[n]{z} = \arg z$, což má za důsledek existenci n různých $\text{Arg}_i \sqrt[n]{z}$, které výše uvedený vztah splňují.

Příklad 3.1. Nalezněte řešení kvadratické rovnice $z^2 - z + 3 + j = 0$.

Postup řešení kvadratické rovnice je stejný i v oboru komplexních čísel jako pro reálná čísla, proto nejdříve vypočteme diskriminant rovnice:

$$D = (-1)^2 - 4j(3 + j) = 1 - 12j - 4j^2 = 5 - 12j$$

Protože $|D| = \sqrt{(5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$ přepíšeme diskriminant do goniometrického tvaru:

$$D = 13 \left(\frac{5}{13} + j \frac{-12}{13} \right), \text{ proto platí } \cos \arg D = \frac{5}{13} \wedge \sin \arg D = \frac{-12}{13}.$$

$$\cos((\arg D)/2) = \pm \sqrt{\frac{1+5/13}{2}} = \pm \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \sin((\arg D)/2) = \mp \sqrt{\frac{1-5/13}{2}} = \mp \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Tedy platí $\sqrt{D} = \sqrt{13} \left(\pm \frac{3}{\sqrt{13}} \mp j \frac{2}{\sqrt{13}} \right) = \pm(3 - 2j)$ a po dosazení do vzorce pro řešení kvadratické rovnice získáme její kořeny:

$$z_{12} = \frac{1 \pm (3 - 2j)}{2j} = \begin{cases} \frac{4-2j}{2j} = -1 - 2j \\ \frac{-2+2j}{2j} = 1 + j \end{cases}.$$

Poznámka 3.2. Hlavní hodnotu argumentu $\text{Arg } z$ je možné vyjádřit takto:

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \pi, & \text{pro } z = x + jy, \text{ kde } x < 0 \text{ a } y = 0, \\ 2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{pro } z = x + jy \neq 0, \text{ jinak.} \end{cases} \quad (3.2)$$

K odvození tohoto vztahu je možné využít analogického postupu pro výpočet druhé odmocniny v předchozím příkladě. Jestliže pro libovolné $z \neq 0$:

$$z = x + jy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + j \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

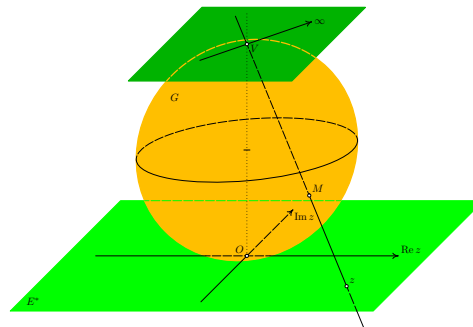
vybereme z druhé odmocniny pouze hodnotu $\widehat{\sqrt{z}}$ takovou, že $\text{Arg } \widehat{\sqrt{z}} \in (-\pi/2, \pi/2)$ dostáváme

$$\cos \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}} > 0 \quad \text{sgn } \sin \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}} = \text{sgn } y.$$

$$\begin{aligned} \text{Arg } z &= 2 \text{Arg } \widehat{\sqrt{z}} = 2 \arctg(\text{tg } \widehat{\sqrt{z}}) = 2 \arctg \frac{\sin \widehat{\sqrt{z}}}{\cos \widehat{\sqrt{z}}} = \\ &= 2 \arctg \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}} = 2 \arctg \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2} + x}} = \\ &= 2 \arctg \sqrt{\frac{(\sqrt{x^2+y^2} - x)(\sqrt{x^2+y^2} + x)}{(\sqrt{x^2+y^2} + x)^2}} = 2 \arctg \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

3.1.2 Rozšíření komplexních čísel o nevlastní bod

Na rozdíl od čísel reálných ($\pm\infty$) množinu komplexních čísel rozšíříme na množinu $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \infty$. Zdůvodnění tohoto postupu můžeme opřít o stereografickou projekci, která zobrazuje body komplexní roviny na body koule jednoznačně pomocí přímek procházejících daným bodem roviny a nejvyšším bodem koule (vrcholem, severním pólem). Při tomto zobrazení zůstane na kouli neobsazený právě tento bod, který ztožníme s ∞ .



To má důsledek, že nově zavádíme operace s ∞ a $z \in \mathbb{C}$ takto:

$$\infty/z = \infty \quad z/\infty = 0 \quad z \pm \infty = \infty \pm z = \infty \quad z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \quad \text{pro } z \neq 0;$$

3.1.3 Množiny komplexních čísel

Nyní zavedeme označení a analytické vyjádření důležitých množin v komplexní rovině:

Otevřeným kruhem $U_\varepsilon(z_0)$ rozumíme množinu všech komplexních čísel z , které mají od bodu z_0 vzdálenost menší než ε tedy: $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$, To jest množina množina $z = x + jy$ pro něž platí:

$$|z - z_0| < \varepsilon \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

Hranicí této množiny je kružnice $K_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$, kterou můžeme ztotožnit s množinou řešení rovnice $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$. Pro dvojici reálných čísel $0 \leq \epsilon < \varepsilon$ množinu $P_{\epsilon\varepsilon}(z_0) = \{w \in \mathbb{C}; \epsilon < |z - z_0| < \varepsilon\}$, nazýváme **prstencem**. V případě volby $\epsilon = 0$ budeme prstencem $P_{0,\varepsilon}(z_0)$ zapisovat pouze symbolem $P_\varepsilon(z_0)$.

Obecnou rovnici přímky $ax + by + c = 0$ můžeme zapsat ve tvaru

$$z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 + \varepsilon = 0,$$

kde $z_0 = \frac{k}{2}(a + jb)$, $\varepsilon = kc$, kde $k \neq 0$ je libovolné reálné číslo. Nahradíme-li rovnost nerovností dostáváme rovnici vymežující polorovinu.

Množiny $U_\varepsilon(z_0)$ a $P_\varepsilon(z_0)$ jsou ε -ovým **okolím** a **ryzím okolím bodu** z_0 . Budeme-li hovořit obecně o okolí budeme používat i označení $U(z_0)$ a $P(z_0)$. Poznamenejme, že zavedeme-li vzdálenost dvou komplexních čísel jako modul jejich rozdílu můžeme používat dříve zavedené pojmy jako otevřená, uzavřená množina dále uzávěr množiny (\bar{A}), hranice množiny (∂A). Množiny A, B nazveme **oddělené**, jestliže platí $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$. Množina se nazývá **souvislá**, jestliže ji nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin. Otevřenou souvislou množinu nazýváme **oblastí**. Komponentou množiny je každá její maximální část. Oblast nazveme **n -násobně souvislou**, jestliže je její komplement tvořen právě n komponentami. Pro $n = 1$ nazýváme oblast **jednoduše souvislou**.

3.2 Posloupnosti, řady, mocninné řady

Protože modul komplexního čísla je analogií absolutní hodnoty čísla reálného, je snadné přenést známé výsledky z reálné analýzy na komplexní čísla $z \in \mathbb{C}$ v případě posloupností, řad a mocninných řad (definice posloupnosti a řady, věty o existenci nejvýše jedné limity posloupnosti, vět o součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou posloupností či řad) a výsledky s absolutní konvergencí modifikujeme nahrazením absolutní hodnoty jeho „rozšířením na \mathbb{C} “ – velikostí, modulem komplexního čísla.

Příklad 3.3. Uvažujme geometrickou řadou s kvocientem $q = z$ a pro $|z| < 1$ konverguje absolutně platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Nyní použijeme goniometrický tvar komplexního čísla $z = r(\cos \alpha + j \sin \alpha)$ a fakt, že reálná resp. imaginární část součtu je součtem reálných resp. imaginárních částí členů řady spolu s goniometrickým tvarem, odvodíme pro $|r| < 1$ součty dvou reálných řad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\alpha + j \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\alpha = \frac{1}{1 - r(\cos \alpha + j \sin \alpha)}.$$

Tedy platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\alpha = \frac{r \sin \alpha}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha} \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\alpha = \frac{1 - r \cos \alpha}{1 + r^2 - 2r \cos \alpha}$$

3.2.1 Mocninné řady

Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ nastane jedna ze tří následujících možností:

1. řada konverguje pouze ve svém středu z_0 ,
2. řada konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$,
3. existuje reálné číslo $0 < r$ (poloměr mocninné řady) takové, že řada konverguje pro všechna z taková, že $|z - z_0| < r$ a diverguje pro všechna z taková, že $|z - z_0| > r$.

Toto číslo r nazýváme poloměr a lze vyjádřit pomocí \limsup , což je největší limita ze všech podposloupností dané posloupnosti:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \quad (3.3)$$

Tuto \limsup lze určit z následujících rovností, přičemž z existence výrazu vlevo plyne existence výrazu vpravo a jejich rovnost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Tyto skutečnosti umožňují rozšířit definici funkcí, které jsou rovny mocninné řadě s poloměrem konvergence ∞ , do komplexního oboru. Ukažme, ale několik aplikací komplexní funkce reálné proměnné.

Definice 3.4. **Funkcí reálné proměnné** rozumíme každé zobrazení $z(t) = x(t) + jy(t)$ podmnožiny reálných čísel do \mathbb{C} . Řekneme, že funkce $z(t)$ je **spojitá** je-li dvojice reálných funkcí spojitá. Řekneme, že funkce $z(t)$ má **derivaci**, jestliže funkce $x(t)$, $y(t)$ mají derivaci a definujeme $z'(t) = x'(t) + jy'(t)$.

- Impedance sériového RL obvodu je funkcí frekvence ω připojeného střídavého napětí $u(t) = \sin \omega t$ podle vztahu $Z(\omega) = R + j\omega L$. Podobně pro sériový RC obvod je impedance funkcí frekvence ω připojeného střídavého napětí $u(t) = \sin \omega t$ definovaná vztahem $Z(\omega) = R + \frac{1}{j\omega C}$.
- Další ukázkou využití funkce reálné proměnné je zavedení komplexní charakteristiky harmonických kmitů, které popisují funkce $F(t) = F \cos(\omega t + \varphi)$ resp $F(t) = F \sin(\omega t + \varphi)$ resp $F(t) = F e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{F} e^{j\omega t}$, kde $\hat{F} = F e^{j\varphi}$ nazýváme komplexní amplitudou, reálné číslo F je amplitudou kmitů a $\varphi = \arg \hat{F}$ se nazývá fázový posun. S využitím exponenciálního tvaru komplexního čísla snadno pro nenulový součet dvou komplexních kmitů lze odvodit, že má komplexní amplitudu ve tvaru součtu komplexních amplitud

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) = \hat{F}_1 e^{j\omega t} + \hat{F}_2 e^{j\omega t} = (\hat{F}_1 + \hat{F}_2) e^{j\omega t} \Rightarrow \hat{F} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2.$$

- Funkce reálné proměnné bývá často interpretována jako pohyb v Gaussově rovině, neboť proměnnou t interpretujeme jako čas a dvojici $[x(t), y(t)]$ jako souřadnice bodu v čase t . Tato interpretace tvoří základ pro zavedení pojmu křivka.

3.3 Funkce komplexní proměnné

Při zavádění inverzních funkcí k funkcím, které nejsou prosté, se v reálném oboru uvažuje pouze jejich zúžení na interval, kde jsou prosté (\cos na $[0, \pi]$, x^2 na $[0, \infty)$, . . .). V komplexním oboru hodnotu inverzní funkce definujeme jako řešení rovnice viz Příklad 3.1.

$$\sqrt{5 - 12j} = \pm(3 - 2j) \Leftrightarrow (\pm(3 - 2j))^2 = 5 - 12j.$$

Nechť nějaký předpis f přiřadí každému komplexnímu číslu $z = x + jy \in G \subseteq \mathbb{S}$ alespoň jedno komplexní číslo $w = u + jv \in \mathbb{S}$, potom je na množině G definována **komplexní funkce komplexní proměnné z** , což zapisujeme vztahem $w = f(z)$. Množina $D(f) = G$ se nazývá **definiční obor** funkce $f(z)$ a množina $Hf = \{w = f(z) \mid z \in Df\}$ je **oborem hodnot** funkce $f(z)$. Pro $Hf \subseteq \mathbb{C}$ se funkce nazývá $f(z)$ **konečná**.

Je-li každému číslu $z \in Df$ přiřazeno právě jedno číslo $w = u + jv \in \mathbb{S}$, je funkce $f(z)$ **jednoznačná** v opačném případě je **mnohoznačná** a **jednoznačnou větví funkce** $f(z)$ nazýváme funkci $\hat{f}(z)$, jestliže $D\hat{f} \subseteq Df$ a $\hat{f}(z) \in f(z)$ pro všechna $z \in D\hat{f}$. Jednoznačnou funkci můžeme ji vyjádřit pomocí dvojice reálných funkcí:

$$w = f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y).$$

Funkci $u(x, y)$ nazýváme **reálná část** funkce $f(z)$ a značíme ji $\Re w$ nebo $\Re f(z)$, funkci $v(x, y)$ nazýváme **imaginární část** funkce $f(z)$ a značíme ji $\Im w$ nebo $\Im f(z)$.

Příkladem dvouznačné funkce je druhá odmocnina \sqrt{z} , kdy každému $z \neq 0$ jsou přiřazeny 2 hodnoty.

Funkci \sqrt{z} můžeme chápat jako sjednocení dvou jednoznačných větví

$$\widehat{\sqrt{z}} = \{[z, w] \mid w^2 = z \wedge \text{Arg } w = \text{Arg } z/2\} \quad \widehat{\sqrt{z}} = \{[z, w] \mid w^2 = z \wedge \text{Arg } w = \text{Arg } z/2 \pm \pi\},$$

kde znaménko před π volíme tak, že je opačné než u $\Im m z$. Obecně je pro přirozené n funkce $\sqrt[n]{z}$ n -značnou funkcí.

Protože kartézský součin $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ má čtyřrozměrný geometrický model vzniká problém s grafickým znázorněním komplexních funkcí. Jedna možnost je použití dvou Gaussových rovin, první obsahující Df prvky označujeme z , druhou na zobrazování funkčních hodnot, označujeme w . Funkce zobrazujem tak, že ke zvolené množině A (bod, křivka, oblast...) ukážeme odpovídající množinu $f(A)$ v rovině w . V případě více množin je můžeme ztotožnit popisky nebo odpovídající množiny spojit šipkami. Tato zobrazení mají pro některé funkce důležité technické aplikace.

Některé jednoduché funkce realizují známá zobrazení rovin. Funkce $f(z) = z + a$ tvoří translaci (posunutí) o vektor $(\Re a, \Im a)$ podobně jako funkce $f(z) = az$ je otočením roviny se středem v počátku o úhel α , kde $|a| = 1$ a $\arg a = \alpha$. Funkce $f(z) = \bar{z}$ tvoří osovou symetrii okolo reálné osy, dále funkce $f(z) = 1/z$ realizuje složení dvou zobrazení a sice kruhovou inverzi v rozšířené rovině \mathbb{S} (vnitřek kruhu se středem v počátku se zobrazí na jeho vnějšek a naopak) s výše zmíněnou osovou symetrií kolem osy $\Re z$. Využití funkce $f(z) = 1/z$ souvisí v elektrotechnice s pojmem admitance [8, str.58] a zobrazuje opět na přímky a kružnice. Složením výše uvedených funkcí můžeme vytvořit lineárně lomenou funkci

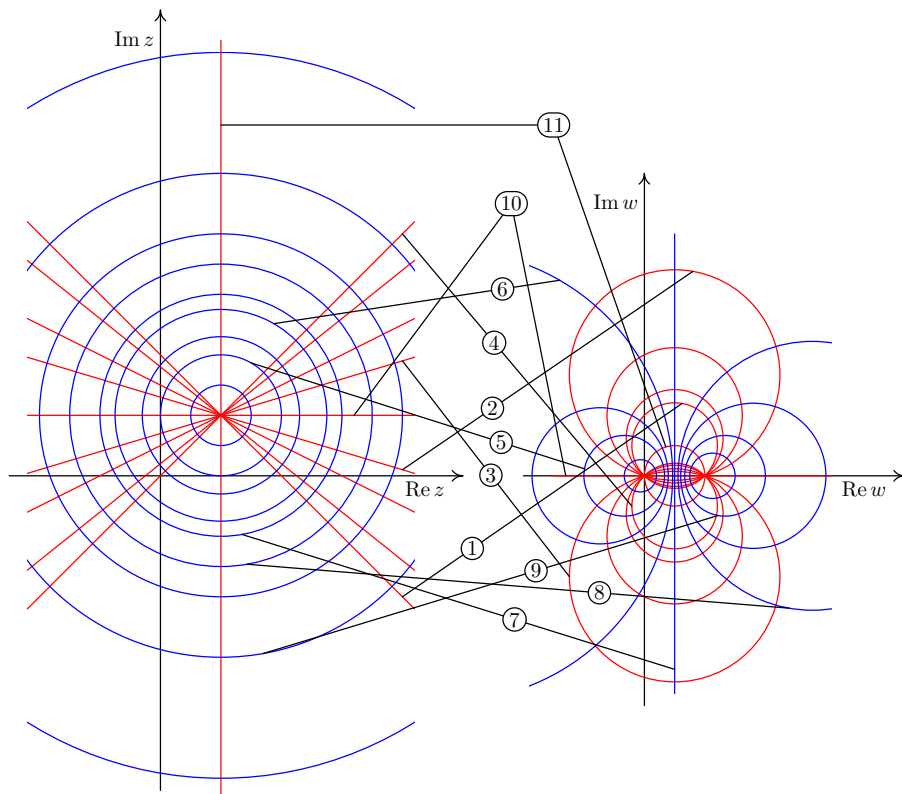
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Tato funkce má značný význam v elektrotechnice, při popisu globálních charakteristik elektrostatických polí viz [8, str.58], proto popíšeme její vlastnosti.

- $f(z)$ je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny \mathbb{S} na sebe ($f(-d/c) = \infty$, $f(\infty) = a/c$).
- Tato funkce zobrazuje množinu všech kružnic a přímek na sebe.
- pro libovolné body z_1, z_2, z_3, z platí
$$\frac{f(z) - f(z_1)}{f(z) - f(z_2)} : \frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_2)} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Při grafickém znázornění funkce $w = u + jv = \frac{z - 1 - j}{z + 1 - j}$, zobrazíme systém přímek procházejících bodem $z_0 = 1 + j$ a systém soustředných kružnic se středem v tomto bodě. Proměnné z a w nahradíme proměnnými proměnou x, y a u, v . Pro přímky $k(x - 1) = y - 1$ dostáváme rovnice kružnic $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4k^2}$ a pro kružnice $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = k^2$ jsou 2 možnosti je to přímka $u = 1/2$ ($k = 2$) a kružnice $\left(u - \frac{k^2}{k^2 - 4}\right)^2 + v^2 = \frac{k^4}{(k^2 - 4)^2}$. ($k \neq 2$).

Následující obrázek ukazuje několik zobrazovaných křivek. Zároveň je obrázek vpravo ve shodě s interpretací elektrického pole dvou opačně nabitých rovnoběžných vláken, v němž modré čáry vyznačují ekvipotenciály a červené silokřivky podobně jako obrázek vlevo lze interpretovat jako pole jednoho nabitého vlákna.



- | | | | |
|---------------|---------------|--------------|------------------|
| 1. $k = -1$ | 4. $k = 1$ | 7. $k = 2$ | 10. $k = 0$ |
| 2. $k = -0,3$ | 5. $k = 1$ | 8. $k = 2,5$ | 11. $k = \infty$ |
| 3. $k = 0,3$ | 6. $k = 1,75$ | 9. $k = 4$ | |

Dále znázorníme jednoznačnou větev funkce \sqrt{z} určenou podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$ v polovině $\Im m z \geq 0$ pro polopřímky $x = k \wedge y > 0$ a přímky $y = l$, kde $k \geq 0$ a l jsou reálné konstanty.

V tomto příkladě můžeme postupovat tak, že určíme reálnou $u = \Re f(z)$ a imaginární $v = \Im f(z)$ část funkce a dosazením $x = k$ resp. $y = l$ dostaneme zobrazení daných přímk. Nejdříve určíme reálnou a ryze imaginární část funkce $f(z)$:

$$f(z) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} + j \operatorname{sgn}(y) \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} = u(x, y) + jv(x, y).$$

Pro proměnné x a konstantní $y = l > 0$ vyhovují funkce u a v rovnici hyperboly $uv = l/2$:

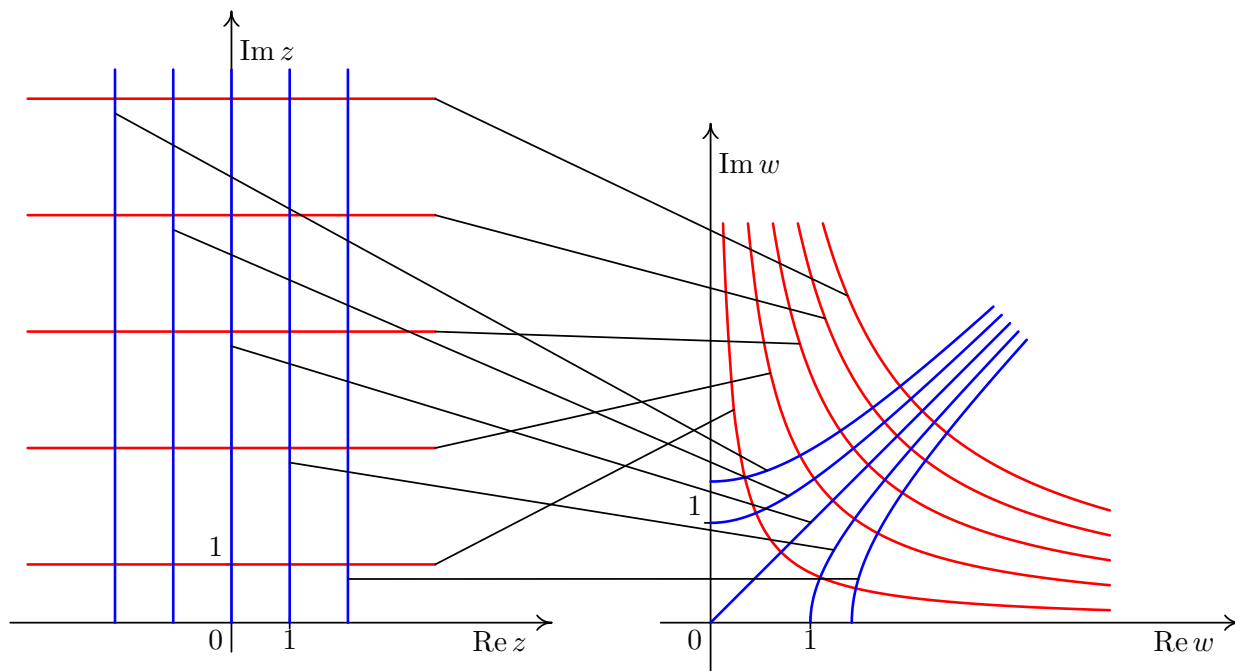
$$uv = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + l^2} + x}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + l^2} - x}{2}} = \frac{\sqrt{x^2 + l^2} - x^2}{2} = \frac{l}{2}.$$

Podobně pro proměnné y a konstantní $x = k$ vyhovují funkce u a v rovnici hyperboly $u^2 - v^2 = k$:

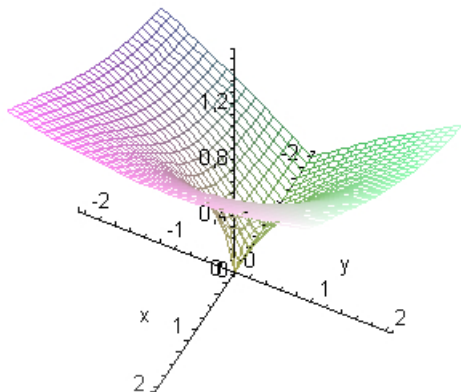
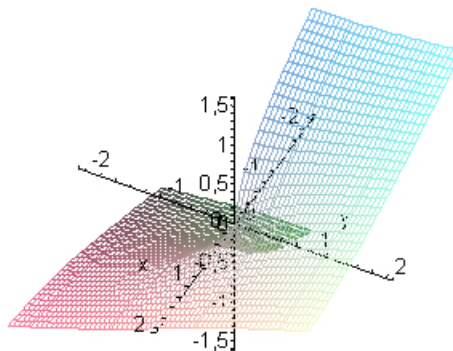
$$u^2 - v^2 = \frac{\sqrt{k^2 + y^2} + k}{2} - \frac{\sqrt{k^2 + y^2} - k}{2} = \frac{\sqrt{k^2 + y^2} - k^2}{2} = \frac{l}{2}.$$

bude-li $x = 0$ a $y > 0$ bude obrazem přímka $u = v$, neboť $u = \sqrt{\frac{\sqrt{y^2}}{2}} = v$.

I v tomto příkladě je obrázek vpravo interpretovat jako ekvipotenciály (modré hyperboly) a siločivky (červené hyperboly) elektrostatického pole dvou na sebe kolmých stěn.



Druhou možností jak zobrazovat funkci komplexní proměnné $f(z) = f(x + jy)$ je dvojice funkcí dvou proměnných $\Re f(x + jy) = u(x, y)$ a $\Im f(x + jy) = v(x, y)$. Z grafu je patrné, že jednoznačná větev funkce \sqrt{z} určená podmínkou $\text{Arg } z = 2 \text{ Arg } \sqrt{z}$ má imaginární část nespojitou na záporné části reálné osy a reálná část není tamtéž diferencovatelná.

u(x,y) reálná část odmocniny**v(x,y) imaginární část odmocniny**

3.4 Limita, spojitost

Dále rozumíme funkcí funkci jednoznačnou a konečnou, nebude-li zdůrazněn opak.

Limitou v hromadném bodě z_0 množiny $Df \subseteq \mathbb{S}$ podobně jako v reálném oboru rozumíme číslo w_0 takové, že ke každému kruhovému okolí $U(w_0)$ existuje alespoň jedno prstencové okolí $P(z_0)$ a platí: $\cap M$ platí:

$$\forall z \in P(z_0) \Rightarrow f(z) \in U(w_0),$$

což zapisujeme $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, podobně uvažujeme-li pouze $z \in P(z_0) \cap M$ definujeme **limitu funkce $f(z)$**

v bodě z_0 limitu vzhledem k množině M $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in M}} f(z) = w_0$

Věta 3.5. *Funkce $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má v bodě $z_0 = x_0 + jy_0$ limitu $u_0 + jv_0$ právě tehdy, když její složky $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají v bodě $[x_0, y_0]$ limitu a pro reálnou část je tato rovna u_0 a pro imaginární část je rovna v_0 .*

Tato věta umožňuje přenést známé věty o limitách funkcí dvou reálných proměnných pro funkce komplexní proměnné, jedná se především o věty jako jsou věty o existenci nejvýše jedné limity součtu, rozdílu, součinu, podílu.

Je-li $w = f(z)$ je komplexní funkce a $z_0 \in Df$, potom řekneme, že funkce $w = f(z)$ je **spojitá v bodě** z_0 , jestliže platí:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

Věta 3.6. *Funkce $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ je spojitá v bodě $z_0 = x_0 + jy_0$ právě tehdy, když její složky $u(x, y)$ a $v(x, y)$ jsou spojitě v bodě $[x_0, y_0]$.*

3.5 Derivace funkce komplexní proměnné

Pojem *derivace funkce komplexní proměnné* se opět zavádí podobně jako v reálném oboru pro funkci jedné reálné proměnné.

Definice 3.7. Nechť je funkce $f(z)$ definována na nějakém okolí $U(z_0)$ bodu z_0 . **Derivací funkce $f(z)$ v bodě z_0** definujeme jako limitu

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \quad (3.4)$$

Derivaci funkce $f(z)$ v bodě z_0 značíme $f'(z_0)$. Existuje-li derivace $f'(z)$ v nějakém okolí $U(z_0)$, pak se funkce nazývá **holomorfní¹ v bodě $f(z_0)$** . Existuje-li derivace $f'(z)$ v každém bodě oblasti G , pak řekneme, že funkce $f(z)$ je **holomorfní** na G .

¹Často se také používá označení *analytická* nebo *regulární*.

Definice derivace je prakticky totožná s definicí v reálném oboru, což vede k mnoha analogiím, např. $(z^n)' = nz^{n-1}$ pro n přirozené, dále platí i stejná pravidla jako v reálném oboru pro derivaci **lineární kombinace funkcí, součinu a podílu** dvou funkcí. Totéž platí také pro **derivování složené funkce** a **funkce inverzní**.

Věta 3.8. *Nechť je dán bod $z_0 = x_0 + jy_0$. Označme $P = [x_0, y_0]$. Funkce $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ má v bodě z_0 derivaci právě tehdy, když*

1. funkce $\Re f(z) = u(x, y)$, $\Im f(z) = v(x, y)$ mají v bodě P totální diferenciál,
2. platí tzv. Cauchy-Riemannovi podmínky¹

$$u'_x(P) = v'_y(P) \quad u'_y(P) = -v'_x(P). \quad (3.5)$$

Funkce $f(z)$ má derivaci v bodě z_0 ve tvaru

$$f'(z_0) = u'_x(P) + jv'_x(P) = v'_y(P) - ju'_y(P). \quad (3.6)$$

Je možné odvodit i další tvary Cauchy-Riemannových podmínek v závislosti na použitém tvaru (goniometrický, exponenciální) závislé a nezávislé proměnné viz [8, str 53.]

¹ někdy jsou také nazývány d'Alambert-Eulerovy podmínky

Příklad 3.9. Ukážeme, že funkce $w = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nemá derivaci, protože v bodě $z \neq 0$ nespĺňuje Cauchy-Riemannovy podmínky a pro $z = 0$ nemá reálná část funkce parciální derivace.

Platí $w = \bar{z} = x - jy$, tj. $u = \Re w = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $v = \Im w = 0$, odtud pro $x \neq 0$ resp. $y \neq 0$ dostaneme:

$$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0 = v'_y, \quad \text{resp.} \quad u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0 = -v'_x.$$

Pro funkci $w = |z|^2$, jejíž zúžení na reálný obor je funkce $y = x^2$, která má reálnou derivaci, existuje derivace pouze v bodě $z = 0$. Pro tuto funkci platí: $w = |z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$ máme $u = \Re w = x^2 + y^2$ a $v = \Im w = 0$. Odtud dostáváme:

$$2x = u'_x = 0 = v'_y \quad \text{a současně} \quad 2y = u'_y = -v'_x = 0.$$

Podmínky (3.5) jsou splněny pouze pro bod $z_0 = 0$.

Geometrický význam Cauchy-Riemannových podmínek a derivace funkce komplexní proměnné lze stručně vysvětlit tak, že tečný vektor obrazu křivky je proti tečnému vektoru křivky otočený o úhel $\arg f'(z_0)$ a poměr jejich délek je dán tzv. koeficientem dilatace $|f'(z_0)|$. Toto nezávisí na volbě křivky. Důsledkem je, že zobrazení realizované holomorfní funkcí $w = f(z)$ zachovává úhly, pod kterými se křivky vzájemně protínají viz Příklady uvedené při zobrazování funkcí, kdy se ortogonální systémy křivek transformují opět na ortogonální systémy (ekvipotenciály a silokřivky).

3.5.1 Holomorfní a harmonické funkce

Má-li funkce $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ derivaci a funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ mají parciální derivace druhého řádu lze užitím Cauchy-Riemannových podmínek a Schwarzovy věty o záměně derivování odvodit, že vyhovují tzv. **Laplaceově rovnici**

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0. \quad (3.7)$$

Funkci $u(x, y)$ se nazývá **harmonická**, jestliže má spojité parciální derivace druhého řádu a vyhovuje rovnici (3.7). O dvojici harmonických funkcí řekneme, že jsou **sdužené harmonické funkce**, jestliže pro ně platí Cauchy-Riemannovy podmínky (3.5) a platí pro ně, že funkce $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ je holomorfní.

K dané harmonické funkci k ní harmonicky sdužená je určená jednoznačně až na aditivní konstantu a lze ji určit pomocí Cauchy-Riemannových podmínek. Postup budeme ilustrovat na příkladě.

Příklad 3.10. Ověřte, že funkce $u(x, y) = e^x \sin y + x^2 + 2xy - y^2 + 4$ je reálnou složkou holomorfní funkce $f(x + jy)$ a najděte ji za podmínky $f(0) = 4 + 3j$.

Řešení. Nejdříve ověříme, že je funkce $u(x, y)$ harmonická:

$$\begin{aligned} u'_x &= e^x \sin y + 2x + 2y & u'_{xx} &= e^x \sin y + 2 \\ u'_y &= e^x \cos y + 2x - 2y & v'_{yy} &= -e^x \sin y - 2. \end{aligned}$$

Platí tedy $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$ a harmonicky sdružená funkce vyhovuje rovnicím

$$v'_x = -u'_y = -e^x \cos y - 2x + 2y \quad v'_y = u'_x = e^x \sin y + 2x + 2y.$$

Integrací první rovnice podle x dostáváme:

$$v = \int (-e^x \cos y - 2x + 2y) dx = -e^x \cos y - x^2 + 2xy + h(y).$$

Funkci $h(y)$ určíme z porovnání derivace získané funkce v podle y s druhou podmínkou:

$$e^x \sin y + 2x + h'(y) = v'_y = e^x \sin y + 2x + 2y \Rightarrow h'(y) = y^2 + c \Rightarrow h(y) = y^2 + c.$$

Dosazením funkce $h(y)$ do v a následně do f dostaneme:

$$f(x + jy) = e^x \sin y + x^2 + 2xy - y^2 + 4 + j(-e^x \cos y - x^2 + 2xy + y^2 + c).$$

Konstantu c určíme z podmínky $f(0) = 4 + j3$:

$$4 + 3j = f(0) = 4 - j + jc \Rightarrow c = 4.$$

Funkci zapíšeme pomocí proměnné $z = x + jy$ (využijeme exponenciální tvar komplexního čísla)

$$f(z) = f(x + jy) = e^x \sin y + x^2 - y^2 + 4 + j(-e^x \cos y - x^2 + 2xy + y^2 + 2) = -je^z + (1 + j)z^2 + 4 + 4j$$

□

Poznámka 3.11. Při hledání této funkce jsme mohli nejdříve integrovat podle y a funkce v by byla určena nejednoznačně až na integrační konstantu $g(x)$ a tu bychom určili analogicky z druhé části Cauchy-Riemannových podmínek. Při určení harmonicky sdružené funkce je možné postupovat i tak, že integrací obou rovnic získáme dva tvary hledané funkce, které obsahují neznámé funkce jedné proměnné. Tyto funkce určíme vzájemným porovnáním. Postup budeme ilustrovat na předchozím příkladu:

$$\begin{aligned}
 -e^x \cos y \underbrace{-x^2}_{g(x)} + 2xy + h(y) + c &= \int -e^x \cos y - 2x + 2y \, dx = u(x, y) \\
 &= \int e^x \cos y + 2x + 2y \, dy = -e^x \cos y + 2xy + \underbrace{y^2}_{h(y)} + g(x) + c
 \end{aligned}$$

Pro holomorfní funkci $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ je možné získat zápis pomocí proměnné z také tak, že do funkcí $u(x, y)$, $v(x, y)$ „dosadíme $x = z$, $y = 0$ resp. $x = 0$, $y = -jz$ “, je-li to možné.

Po zavedení elementárních funkcí je další možností využití tvrzení, že všechny holomorfní funkce s reálnou částí $u(x, y)$ resp. imaginární částí $v(x, y)$ mají tvar

$$f(z) = 2u \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2j} \right) - u(x_0, y_0) + jC \quad \text{resp.} \quad f(z) = 2jv \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2j} \right) - jv(x_0, y_0) + C,$$

kde $z_0 = x_0 + jy_0$ je vhodně zvolený bod a C je reálná konstanta.

3.6 Elementární funkce komplexní proměnné

Polynom a racionálně lomenou funkci definujeme stejně jako v reálném oboru a mají stejné vlastnosti. Chceme definovat i tzv. transcendentní funkce tak, aby v reálném oboru jejich definice byla stejná. Funkce, které mají poloměr konvergence Taylorova rozvoje ∞ lze definovat jako součet mocninné řady, známé z reálné analýzy.

Následující vyjádření uvažujeme pro libovolné $z \in \mathbb{C}$.

Komplexní exponenciální funkci e^z nazýváme funkci

$$e^z = \exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (3.8)$$

Komplexní funkci kosinus nazýváme funkci

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (3.9)$$

Komplexní funkci sinus nazýváme funkci

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (3.10)$$

Tyto funkce je možné vyjádřit pomocí známých reálných funkcí:

$$e^{x+jy} = e^x(\cos y + j \sin y) \quad (3.11)$$

$$\cos(x + jy) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y \quad (3.12)$$

$$\sin(x + jy) = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y. \quad (3.13)$$

Navíc platí kromě známých vzorců z reálné analýzy následující důležité vztahy:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}) \quad \sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}). \quad (3.14)$$

Přes shodnost Taylorova rozvoje mají tyto funkce „jiné“ vlastnosti než v reálném oboru. Např. funkce e^z je periodická s periodou $2\pi j$. Pro hodnoty funkcí $\sin z$ a $\cos z$ samozřejmě neplatí, že nabývají hodnot pouze z intervalu $[-1, 1]$ (pro komplexní čísla nemá smysl mluvit o intervalech)

Komplexní funkcí tangens resp. **komplexní funkcí kotangens** nazýváme funkci

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \text{ kde } \cos z \neq 0. \quad \text{resp.} \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \text{ kde } \sin z \neq 0. \quad (3.15)$$

Komplexní funkcí hyperbolický sinus resp. **komplexní funkcí hyperbolický kosinus** nazýváme funkci

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad \text{resp.} \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad (3.16)$$

Všechny uvedené funkce jsou na svých definičních oborech v \mathbb{C} holomorfní a derivací jsou stejné funkce jako v reálném oboru, hovoříme o tzv. **zákonu permanence pravidel pro derivování funkcí komplexní proměnné**.

Pro mnohoznačné funkce je třeba se omezit pouze na jednoznačné větve.

Z periodičnosti funkce e^z vyplývá, že inverzní funkce nemůže být jednoznačná funkce.

Inverzní funkce k exponenciální funkci e^z se nazývá **logaritmická funkce** $\ln z$. To jest

$$\ln z = \{w \mid w \in \mathbb{C}, e^w = z\}.$$

Tato funkce je nekonečně mnohoznačná a ze vztahu (3.11) lze odvodit hodnotu $\ln z$

$$\ln z = \ln |z| + j \arg z. \quad (3.17)$$

Nahradíme-li v tomto vztahu funkci $\arg z$ funkcí $\text{Arg } z$ dostáváme jednoznačnou funkci $\text{Ln } z$, kterou nazýváme **hlavní větev logaritmické funkce**, resp. **hlavní větev logaritmu** obě funkce Ln i \ln jsou v komplexním oboru definovány pro všechna nenulová čísla $0 \neq z \in \mathbb{C}$ a ve shodě s aritmetikou nevlastního bodu $\ln \infty = \infty$.

Příklad 3.12. Řešme rovnici $\cosh z = -2$ (nemá řešení v oboru reálných čísel). Funkci $\sinh z$ nahradíme podle 3.16 a vzniklou rovnici rovnici pro funkci e^z vyřešíme, vzhledem k e^z je to kvadratická rovnice:

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh z = -2 \Leftrightarrow (e^z)^2 + 4e^z - 1 = 0 \Leftrightarrow e^z = \frac{-4 + \sqrt{4^2 + 4}}{2} = \begin{cases} -2 - \sqrt{5} \\ -2 + \sqrt{5} \end{cases}$$

První kořen kvadratické rovnice jsou záporné reálná čísla, tedy jeho argument je $(2k + 1)\pi$, kde k je celé číslo a jeho velikost je $2 + \sqrt{5}$. Podobně argument druhého (kladného) kořene je $2k\pi$ a jeho velikost je $-2 + \sqrt{5}$. Množina řešení zadané rovnice je sjednocení dvou množin:

$$M_1 = \{\ln(2 + \sqrt{5}) + j(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, M_2 = \{\ln(-2 + \sqrt{5}) + j(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Analogicky lze s využitím vzorců 3.14, 3.16 odvodit i hlavní hodnoty dalších inverzních funkcí:

$$\arcsin z = -j \operatorname{Ln} \left(jz + \sqrt{1 - z^2} \right) \quad \arccos z = -j \operatorname{Ln} \left(jz + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (3.18)$$

$$\operatorname{arctg} z = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + jz}{1 - jz} \quad \operatorname{arccotg} z = \frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - j}{z + j} \quad (3.19)$$

$$\operatorname{arcsinh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right) \quad \operatorname{arccosh} z = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right). \quad (3.20)$$

Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$ jelibovlné, potom **obecnou mocninou** z^α , rozumíme funkci

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}. \quad (3.21)$$

Tato funkce z^α je nekonečně mnohoznačná a její hlavní větev je definována pomocí $\operatorname{Ln} z$.

Příklad 3.13. Určete funkční hodnoty (uvažujte pouze hlavní větve logaritmu).

1. Vypočítáme j^{-j} tak, že podle (3.21) je $j^{-j} = e^{-j \operatorname{Ln} j}$. Protože $\arg j = \frac{\pi}{2}$ a $|j| = 1$, je $\operatorname{Ln} j = \ln 1 + j\frac{\pi}{2}$, tedy po dosazení

$$j^{-j} = e^{-j^2 \frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

2. Vypočítáme $\operatorname{arctg}(-3j)$ tak, že podle (3.19) je $\operatorname{arctg}(-3j) = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+j(-3j)}{1-j(-3j)} = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln}(-2)$, protože $\arg(-2) = \pi$ a $|-2| = 2$, je $\operatorname{Ln}(-2) = \ln 2 + j\pi$, tedy po dosazení

$$\operatorname{arctg}(-3j) = -\frac{j(-\ln 2 + j\pi)}{2} = \frac{\pi}{2} + j\frac{\ln 2}{2}.$$

3. Vypočtete $\operatorname{arctg}(j)$. Uvedená funkční hodnota $\operatorname{arctg}(j)$ není definována, neboť po dosazení podle (3.19) $\operatorname{arctg}(j) = -\frac{j}{2} \ln \frac{1+j^2}{1-j^2} = -\frac{j}{2} \ln 0$, což není definováno.

3.7 Integrál funkce komplexní proměnné

Zavedení určitého integrálu je pro funkci komplexní v komplexní rovině možné nahrazením úsečky (intervalu) jejím spojitým obrazem v komplexní rovině, tj. křivkou. V dalším se omezíme pouze na tzv. rektifikovatelné křivky konečné délky.

Křivkou rozumíme každé spojitě zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Bod $\varphi(a)$ nazýváme **počátečním bodem** křivky a bod $\varphi(b)$ nazýváme **koncovým bodem** křivky φ . Množinu všech bodů křivky $[\varphi] = \{\varphi(t) | t \in [a, b]\}$ nazýváme **grafem** křivky φ .

Nulovost derivace $\varphi'(t)$ může „způsobit“ neexistenci tečny ($\varphi(t) = t - \sin t + j(= 1 - \cos t)$, $t = 0$), ale také nemusí ($\varphi(t) = t + jt^3$, $t = 0$). V geometrii se obvykle křivkou rozumí její graf tj. $[\varphi]$ a nalezení zobrazení funkce $\varphi : D_\varphi \rightarrow \mathbb{C}$ se zadanou množinou $[\varphi]$ nazýváme parametrizací křivky.

Příklad 3.14. Nalezněte různé parametrizace úsečky AB , pro A, B různá komplexní čísla.

Řešení. Ukážeme 4 různé parametrizace z nich poslední je odlišná.

1. $\varphi(t) = A + (B - A)t$, $t \in [0, 1]$
2. $\varphi(t) = A + (B - A) \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$
3. $\varphi(t) = B + (B - A) \cos t$, $t \in [\pi, 3\pi/2]$
4. $\varphi(t) = A + (B - A) \sin^2 t$, $t \in [0, 3\pi/2]$

Podrobnější popis je takový, že první parametrizace (**standardní**) je pohyb rovnoměrný (konstantní derivace), druhý je zpomalený ($\varphi'(\pi/2) = 0$), třetí je zrychlený ($\varphi'(\pi) = 0$) a čtvrtý se liší tím, že pohyb začíná v bodě A a jde do bodu B , potom se vrátí do bodu A a znovu končí v bodě B . \square

Standardní parametrizací kružnice o rovnici $|z - z_0| = r$ je $\varphi(t) = z_0 + re^{jt}$, kde $t \in [0, 2\pi]$. Jedná se o pohyb rovnoměrný kruhový.

Pro dvě křivky $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ takové, že koncový bod první křivky splývá s počátečním bodem druhé křivky, ($\varphi_1(b) = \varphi_2(c)$) definujme jejich **součet** $\varphi_1 + \varphi_2$ jako křivku takovou, že pohyb po křivce φ_1 , který skončí v bodě $\varphi_1(b)$ pokračuje po křivce φ_2 v bodě $\varphi_2(c)$.

Jestliže splývá koncový a počáteční bod křivky $\varphi(a) = \varphi(b)$, nazýváme křivku **uzavřenou**. Křivku nazveme **prostou**, jestliže $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ pro všechny body $t_1, t_2 \in [a, b]$ splňující $0 < |t_1 - t_2| < b - a$. Každou uzavřenou prostou křivku nazýváme **Jordanovou** křivkou.

Věta 3.15. *Nechť φ je Jordanova křivka v \mathbb{C} . Potom platí*

$$\mathbb{S} - [\varphi] = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

kde Ω_1, Ω_2 jsou neprázdné disjunkttní oblasti, jejichž společnou hranicí je graf křivky $[\varphi]$.

Orientace křivky udává směr pohybu je třeba řešit při geometrickém pojetí křivky. Při mnohých aplikacích nezáleží na volbě konkrétního pohybu, ale na jeho grafu $[\varphi]$ např. velikost práce. Orientaci křivky, která není uzavřená popíšeme stanovením počátečního a koncového bodu grafu $[\varphi]$. U Jordanovy křivky

(je uzavřená a rovinu rozděluje na vnějšek a vnitřek) je směr pohybu dán tím, že při pohledu ve směru pohybu máme vnitřek křivky po levé straně (křivku procházíme po směru chodu hodinových ručiček) nebo po pravé straně (křivku procházíme proti směru chodu hodinových ručiček). V prvním případě hovoříme o **kladné orientaci** a ve druhém o **záporné orientaci** křivky.

Nechť je dána křivka $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$ kde $t \in [a, b]$ tedy $(\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C})$. Každému dělení $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ s normou dělení $\nu(D) = \max_{k=1, \dots, n} \{t_k - t_{k-1}\}$ odpovídá lomená čára spolu s její délkou.

Existuje-li konečné suprémum $d(\Gamma)$ množiny délek všech lomených čar, které nazýváme **délka křivky** Γ a křivku φ nazýváme rektifikovatelnou. Speciálním případem rektifikovatelných křivek jsou **hladké křivky** $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$, které mají na celém intervalu $[a, b]$ spojitou nenulovou derivaci Γ' a platí

$$d(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Po **částech hladké orientované křivky** jsou konečným součtem hladkých křivek.

Podobně pro konečnou komplexní funkci $f(z)$, křivku $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ její dělení $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ a množinu bodů $\{\tau_k\}$, splňujících $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ pro $k = 1 \dots n$ definujeme integrální součet

$$\sigma(f(z), \Gamma, D, \{\tau_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\Gamma(\tau_k))(\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})).$$

Existuje-li konečná limita $\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} \sigma(f(z), \Gamma, D, \{\tau_k\})$ uvažovaná pro všechna dělení D a množiny $\{\tau_k\}$. na-

zvedeme ji **integrálem funkce f po křivce Γ** a zapisujeme ji $\int_{\Gamma} f(z)dz$. Křivku Γ nazýváme **integrační cesta**.

Následující věta stanoví podmínky existence integrálu.

Věta 3.16. *Nechť $\Gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $t \in [a, b]$ je rektifikovatelná křivka a funkce $f(z)$ je definovaná, konečná a spojitá na množině $[\Gamma]$. Potom existuje $\int_{\Gamma} f(z)dz$ pro jehož hodnotu platí navíc odhad*

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)|dz \leq \sup_{z \in [\Gamma]} |f(z)|d(\Gamma). \quad (3.22)$$

Jestliže je navíc Γ po částech hladká křivka, platí

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)dt = \int_a^b f(x(t) + jy(t))(x'(t) + jy'(t))dt. \quad (3.23)$$

Definice integrálu má geometrickou povahu a dle 3.23 jeho hodnota závisí na parametrizaci po částech hladké křivky. Pro křivkový integrál platí:

$$\int_{\Gamma} (k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z))dz = k_1 \int_{\Gamma} f_1(z)dz + k_2 \int_{\Gamma} f_2(z)dz \quad (3.24)$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz, \text{ kde } \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (3.25)$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = - \int_{\Gamma_2} f(z) dz \text{ kde } \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ mají opačnou orientaci.} \quad (3.26)$$

O křivkách předpokládejme, že budou po částech hladké, což nebudeme zdůrazňovat.

Příklad 3.17. Vypočtěte následující integrály $\int_{\Gamma} f(z) dz$, je-li dáno:

1. $f(z) = z^n$, kde n je celé číslo a Γ je kružnice se středem 0 o poloměru r kladně orientovaná, např. $z(t) = r(\cos t + j \sin t) = re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení. Ověříme, že křivka $\Gamma : z(t) = r(\cos t + j \sin t) = re^{jt}$ je hladká, výpočtem její derivace $z'(t) = r(-\sin t + j \cos t) = jre^{jt}$ a můžeme tedy požit vzorec (3.23) Celkem tedy získáváme, že

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{njt} j r e^{jt} dt = \int_0^{2\pi} j r^{n+1} e^{(n+1)jt} dt =$$

$$r^{n+1} \int_0^{2\pi} -\sin(n+1)t + j \cos(n+1)t dt =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j[t]_0^{2\pi} = 2j\pi \quad \text{pro } n = -1 \\ \frac{r^{n+1}}{n+1} [\cos(n+1)t + j \sin(n+1)t]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{pro } n \neq -1. \end{array} \right.$$

□

2. $f(z) = e^z$, Γ je úsečka s počátečním bodem $z_1 = 0$ a koncovým bodem $z_2 = 2 + j$.

Řešení. Nejdříve parametrizujeme úsečku podle vzorce $\Gamma(t) = A + (B - A)t$, kde $t \in [0, 1]$, tedy konkrétně

$$\Gamma(t) = 2t + jt, \quad \text{kde } t \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(t) = 2 + j$$

Dosadíme do integrálu:

$$\int_{\Gamma} e^z dz = \int_0^1 e^{2t} (\cos t + j \sin t) (2 + j) dt = \int_0^1 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t + j (2e^{2t} \sin t + e^{2t} \cos t) dt =$$

reálná i imaginární část je součtem dvou integrálů a vždy první z integrálů jsme integrovali metodou per partés a nově získaný integrál se odečetl s zbývajícím integrálem, snadno prověříte derivací

$$= [e^{2t} \cos t + j e^{2t} \sin t]_0^1 = [e^{(2+j)t}]_0^1 = e^{2+j} - 1.$$

□

Poznamenejme, že záměnou počátečního a koncového bodu se změní orientace křivky a tedy znaménko integrálu. V obou případech je integrál roven rozdílu funkčních hodnot primitivní funkce v krajních bodech křivky. Motivací je obecně symbolický výpočet naznačující nezávislost na $\Gamma(t)$, ale jen na hodnotách v koncových bodech.

$$\int_a^b f(\Gamma(t)) \Gamma'(t) dt = [F(\Gamma(t))]_a^b = F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a))$$

Jestliže hodnota integrálu nezávisí na konkrétním grafu křivky, potom integrál pro dvě různé křivky se společným počátečním a koncovým bodem má stejnou hodnotu a integrál přes uzavřenou křivku vzniklou součtem jedné křivky s druhou opačně orientovanou je nulový, což obecně neplatí viz předchozí příklad.

V odstavci 3.1.3 byla definována jednoduše souvislá oblast jejímž příkladem je otevřený kruh $U_\varepsilon(z_0)$ na rozdíl od prstenece $P_\varepsilon(z_0)$. Tento pojem je podstatný pro formulaci tzv. Cauchyho fundamentální věty.

Věta 3.18 (Cauchy). *Nechť je dána funkce $f(z)$, která je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω . Pak pro její integrál po každé uzavřené křivce Γ , která leží v Ω platí*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0. \quad (3.27)$$

Poznamenejme, že „opačné“ tvrzení je předmětem tzv. Morerovy věty:

Věta 3.19. *Nechť $f(z)$ je konečná a spojitá funkce na otevřené množině $M \subseteq \mathbb{C}$. Pak funkce $f(z)$ je holomorfní na množině M právě když, platí 3.27, pro každou Jordanovu křivku Γ , pro niž je $\text{int } \overline{\Gamma} \subset M$.*

Důsledkem Cauchyho je nezávislost na integrační cestě. To znamená, pro holomorfní funkci $f(z)$ v jednoduše souvislé oblasti a dvě libovolné křivky stejným počátečním bodem a koncovým bodem, jejichž grafy leží v této jednoduše souvislé oblasti jsou hodnoty integrálů přes tyto křivky z holomorfní funkce stejné. To umožňuje definovat k holomorfní funkci $f(z)$ v této jednoduše souvislé oblasti Ω funkci

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta \quad (3.28)$$

a nazýváme je **primitivní funkcí** k funkci $f(z)$, neboť platí $F'(z) = f(z)$. Primitivní funkce k funkci $f(z)$ není určena jednoznačně (liší se aditivní konstantou) a platí pro ni analogie Newton-Leibnizovy formule.

Věta 3.20. *Nechť funkce $f(z)$ je spojitá a má primitivní funkci $F(z)$ v jednoduše souvislé oblasti Ω , ve které leží po částech hladká orientovaná křivka Γ s počátečním bodem z_1 a koncovým bodem z_2 , potom platí*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1). \quad (3.29)$$

Pomocí této věty lze zjednodušit výpočet integrálů z holomorfních funkcí, viz Příklad 3.17, 2):

$$\int_{\Gamma} e^z dz = \int_0^{2+j} e^z dz = [e^z]_0^{2+j} = e^{2+j} - 1.$$

Na Příklad 3.17, 1) uvedenou větu pro $n \leq -1$ nelze použít, protože křivka Γ je uzavřená a Cauchyho fundamentální větu nelze použít neboť funkce je v bodě 0 není regulární a navíc tento bod leží uvnitř kružnice Γ . Situaci budeme dále ilustrovat na příkladech.

Příklad 3.21. *Výpočet integrálu komplexní funkce*

Vypočtěte následující integrály $\int_{\Gamma} f(z) dz$, je-li dáno:

1. $f_1(z) = \cos z$, $\Gamma(t) = \pi(2 \cos t + 1 + j2 \sin 2t)$ pro $t = [0, 3\pi/2]$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že funkce $f_1(z) = \cos z$ je na celém oboru \mathbb{C} spojitá a holomorfní a Γ_1 je rektifikovatelná křivka, existuje integrál a můžeme použít Větu 3.20. S využitím zákona permanence pravidel pro derivování funkcí komplexní proměnné dostáváme:

$$\int_{\Gamma_1} \cos z dz = \int_{\Gamma_1(0)}^{\Gamma_1(3\pi/2)} \cos z dz = \left[\sin z \right]_{3\pi}^{\pi} = 0.$$

□

2. $f_2(z) = 1/z$, Γ_2 je úsečka z bodu $z_1 = -1 + j$ do bodu $z_2 = 2 + 2j$ tj. např. $\Gamma(t) = 3t - 1 + j(1 + 2t)$, kde $t \in [0, 1]$.

Řešení. Přestože funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ není holomorfní v bodě 0 můžeme použít Větu 3.20. Zvolíme-li za oblast Ω okolí bodu $3j$ o poloměru 2, platí, že daná křivka patří do Ω a nepatří 0, který je jediný, kde funkce $1/z$ není holomorfní. Můžeme tedy Větu 3.20 v oblasti Ω použít. Musíme však vhodně zvolit primitivní funkci, kterou je logaritmus. Můžeme zvolit hlavní hodnotu $\text{Ln } z$, neboť ta není holomorfní na záporné části reálné osy a tedy v oblasti Ω je holomorfní.

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{-1+j}^{2+2j} \frac{1}{z} dz = \left[\text{Ln } z \right]_{-1+j}^{2+2j} = \ln 2\sqrt{2} + j\frac{\pi}{4} - \left(\ln \sqrt{2} + j\frac{3\pi}{4} \right) = \ln 2 - \frac{j\pi}{2}$$

□

Věta 3.22. *Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní uvnitř uvnitř n -násobně souvislé oblasti Ω a spojitá na jejím uzávěru. Nechť je hranice oblasti Ω tvořena stejně orientovanými Jordanovými křivkami $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$, takovými že křivky $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ leží uvnitř křivky Γ . Potom platí*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\Gamma_i} f(z) dz \quad (3.30)$$

Věta 3.23 (Cauchyho vzorec). *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř Jordanovy křivky Γ a navíc je spojitá a konečná na křivce Γ , která je kladně orientovaná. Potom pro každý bod z , který leží uvnitř křivky Γ platí:*

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j f(z_0). \quad (3.31)$$

Důkaz. Pro libovolný pevně zvolený bod z ležící uvnitř křivky Γ , $z \in D = \text{int}\Gamma$ definujeme funkci $g(\zeta) =$
 $= \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z; \\ f'(z), & \zeta = z \end{cases}$. Neboť funkce $g(\zeta)$ je v oblasti D holomorfní (s případnou výjimkou bodu z kde je spojitá),

lze s využitím Cauchyho integrální věty odvodit $\int_{\Gamma} g(\zeta) d\zeta = 0$. Z čehož plyne tvrzení věty:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi j f(z).$$

Při výpočtu posledního integrálu jsme použili Příklad 3.17 1. pro $n = -1$. □

Splňuje-li funkce $f(z)$ předpoklady Věty 3.23 existují integrály $g_n(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$, pro které je možné odvodit vztah

$$g'_n(z) = \frac{d}{dz} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} \right) d\zeta = \int_{\Gamma} \frac{nf(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = ng_{n+1}(z),$$

který spolu s Větou 3.23 umožňuje obecnější formulaci předchozí věty.

Věta 3.24 (Cauchyho vzorec pro n -tou derivaci). *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř Jordanovy křivky Γ a navíc je spojitá a konečná na křivce Γ , která je kladně orientovaná. Potom pro každý bod z , který leží uvnitř křivky Γ má tato funkce derivace všech řádů a platí:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (3.32)$$

Tyto dvě věty mají významné důsledky

1. Pro funkci **holomorfní** na jednoduše souvislé platí, že má hodnoty ve všech vnitřních bodech oblasti jednoznačně určeny hodnotami funkce na její hranici.
2. Navíc tato **funkce má derivace všech řádů** a je možno očekávat její rozvoj v Taylorovu řadu.

Tato věta spolu s Větou 3.22 umožňuje výpočet integrálů po uzavřených křivkách z funkcí typu $\frac{f(z)}{P(z)}$, kde funkce $f(z)$ je holomorfní a $P(z)$ je polynom, neboť v komplexním oboru lze tento vyjádřit jako součin mocnin lineárních kořenových činitelů. Potom lze integrál po uzavřené křivce nahradit součtem integrálů po křivkách, které budou obsahovat pouze jeden kořen polynomu ve jmenovateli uvažované funkce a který je vnitřním bodem křivky. Tyto integrály lze spočítat pomocí Věty 3.23.

Příklad 3.25. Pomocí Cauchyho vzorce vypočtěte $\int_{\Gamma} \frac{\cosh zdz}{z(z^2 + 4\pi^2)^2}$, je-li Γ kladně orientovaná kružnice se středem $2\pi j$ o poloměru 7.

Řešení. Polynom lze rozložit $z(z^2 + 4\pi^2)^2 = z(z + 2\pi j)^2(z - 2\pi j)^2$. V křivce Γ leží dva kořeny jmenovatele $z = 0$ a $z = 2\pi j$. Můžeme volit dvě křivky Γ_1 jako kružnici se středem v bodě 0 o poloměru $1/2$ a křivku Γ_2 jako kružnici se středem v bodě $2\pi j$ o poloměru 1. Podle Věty 3.22 platí:

$$\int_{\Gamma} \frac{\cosh zdz}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{\cosh zdz}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{\cosh zdz}{z(z^2 + 4\pi^2)^2}.$$

V prvním integrálu je funkcí $f(z)$, která je použita ve Větě 3.23, funkce $f(z) = \frac{\cosh z}{(z^2 + 4\pi^2)^2}$, číslo $z_0 = 0$ a tedy $f(0) = \frac{1}{16\pi^4}$.

V druhém integrálu uijeme Větu 3.24 s tím že, zde dosadíme $f(z) = \frac{\cosh z}{z(z + 2\pi j)^2}$, $n = 1$, $z_0 = 2\pi j$, tedy $f^{(n)} = f'(z) = \frac{\sinh(z)(z^2 + 2\pi j) - \cosh(z)(3z + 2\pi j)}{z^2(z + 2\pi j)^3}$ a $f'(2\pi j) = \frac{-1}{32\pi^4}$. Celkově tedy dostáváme

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{e^z dz}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} = 2\pi j \left(\frac{1}{16\pi^4} - \frac{1}{32\pi^4} \right) = \frac{j}{16\pi^3}.$$

□

3.8 Řady v komplexním oboru a singulární body

Věta 3.26. *Nechť funkce $f(z)$ je holomorfní v bodě z_0 . Pak existuje otevřený kruh $U(z_0, R)$ ($R > 0$) takový, že pro každý bod $z \in K(z_0, R)$ platí:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ kde } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (3.33)$$

a $\Gamma_r = z_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$ je kružnice se středem z_0 o poloměru r , pro který platí $0 < r < R$.

Příklad 3.27. Rozviňte racionálně lomenou funkci $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ v Taylorovu řadu se středem $z_0 = 0$.

Řešení. Danou funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků, které interpretujeme jako součet geometrické řady konvergující pro $|z| < 2$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n.$$

□

Uvedenou funkci je možné vyjádřit jako součet řady i v dalších oblastech komplexní roviny.

$2 < |z| < 3$: první zlomek upravíme $-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$ a celkově dostáváme

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{3} \frac{1}{1-z/3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Poznamenejme, že první geometrická řada konverguje pro $1 < |z|$ a druhá pro $|z| < 2$.

$$3 < |z|: \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-3/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{2^{n-1} + 3^{n-1}}{6^{n-1}} \right) z^n.$$

Pro konečná komplexní čísla $z_0, a_n \in \mathbb{C}$, kde n je celé číslo, nazýváme výraz

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.34)$$

Laurentovou řadou se středu v bodě z_0 a tato **řada konverguje** v bodě z , jestliže konvergují současně obě

řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$. První resp. druhá řada se nazývá **regulární část** resp. **hlavní část** Laurentovy řady a její **součtem** je součet obou jejích částí.

Věta 3.28. *Funkce $f(z)$ je holomorfní na prstenci $P_{rR}(z_0)$ právě, když pro každé z ležící v tomto prstenci, lze $f(z)$ vyjádřit jako součet Laurentovy řady*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (3.35)$$

Pro koeficienty a_n navíc platí:

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad (3.36)$$

kde Γ je libovolná kladně orientovaná kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem \bar{r} takovým, že $r < \bar{r} < R$ a bod z_0 je jejím vnitřním bodem.

3.8.1 Singulární body a jejich klasifikace

Nechť je $f(z)$ holomorfní funkce v prstencovém okolí $P_r(z_0)$ bodu z_0 a současně není holomorfní v bodě z_0 . Potom říkáme, že bod z_0 je **izolovaným singulárním bodem** funkce $f(z)$.

Bod 0 není izolovaným bodem funkce $\ln z$, protože $\ln 0$ neexistuje a není izolovaným bodem jakékoli jednoznačné větve funkce \sqrt{z}

Věta 3.29 (L'Hospitalovo-pravidlo). *Nechť funkce $f(z)$, $g(z)$ jsou holomorfní na prstencovém okolí $P_r(z_0)$ ($r > 0$) a platí $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, potom existují obě následující limity a platí:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (3.37)$$

Klasifikace singulárních bodů

Pro izolovaný singulární bod a jeho Laurentův rozvoj na nějakém ryzím okolí tohoto bodu může nastat jedna ze tří následujících možností

1. Hlavní část Laurentova rozvoje je identicky rovna 0, potom existuje konečná limita $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ a po dodefinování funkční hodnoty $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ je funkce v tomto bodě holomorfní. V tomto případě hovoříme o **odstranitelné singularitě**.
2. Hlavní část Laurentova rozvoje má pouze konečný počet nenulových koeficientů $a_n \neq 0$ a platí $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Singulární bod potom nazýváme **pólem** a absolutní hodnotu nejmenšího indexu nenulového koeficientu hlavní části Laurentova rozvoje se nazývá **řád pólu**.
3. Hlavní část Laurentova rozvoje má pouze konečný počet nenulových koeficientů $a_n \neq 0$ a potom k libovolně zvolenému číslu $L \in \mathbb{S}$ lze nalézt posloupnost $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ takovou, že platí $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$ a současně $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = L$. V tomto případě hovoříme o **podstatné singularitě**.

Příklad 3.30. Pro uvedené funkce určete izolované singulární body a pomocí Laurentova rozvoje proveďte jejich klasifikaci

$$1) f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

Řešení. Funkce $\cos z$ je definována jako řada $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ celkově je Laurentův rozvoj ve

tvary

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n)!}}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-2}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-2}}{(2n)!} + \dots$$

Nejmenší nenulový koeficient (pro $n = 1$) je $a_0 = \frac{1}{2}$, proto je bod $z = 0$ odstranitelnou singularitou. \square

$$2) f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

Řešení. Funkce $\sin z$ je definována jako řada $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n)!}$ celkově je Laurentův rozvoj ve

tvary

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n)!}}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n)!}$$

Nenulový koeficient pro nejmenší index (pro $n = 0$) je $a_{-1} = 1$, proto je bod $z = 0$ pólem řádu 1. \square

$$3) f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

Řešení. Substitucí $t = \frac{1}{z}$ do rozvoje $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ dostaneme Laurentův rozvoj:

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots \quad (3.38)$$

a bod $z = 0$ je podstatnou singularitou. □

Provádět klasifikaci singulárních bodů pomocí Laurentova rozvoje může být náročné (např. pro převrácenou hodnotu funkce z 3.30 2), proto ukážeme i jiný postup, založený na pojmu nulový bod holomorfní funkce a jeho násobnosti.

Řekneme, že bod z_0 je **nulovým bodem** holomorfní funkce $f(z)$ (v nějakém okolí $U(z_0)$), jestliže $f(z_0) = 0$, navíc řekneme, že bod z_0 je **n-násobným** nulovým bodem, jestliže platí

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0. \quad (3.39)$$

Pro bod z_0 , který není nulový zavedeme násobnost 0.

Pomocí Taylorovy řady holomorfní funkce $f(z)$ lze ukázat, že bod $z_0 \in \mathbb{C}$ je n-násobným nulovým bodem holomorfní funkce $f(z)$ právě když, v nějakém okolí $U(z_0)$ lze funkci $f(z)$ vyjádřit ve tvaru

$$f(z) = (z - z_0)^n F(z), \quad (3.40)$$

kde funkce $F(z)$ je holomorfní v bodě z_0 a nenulová. Je-li v nějaké oblasti funkce $f(z)$ podílem holomorfních funkcí tj. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, potom v této oblasti má funkce $f(z)$ singulární body (nejsou podstatnými singularitami) pouze v nulových bodech z_0 funkce $\psi(z)$ a řád pólu stanovíme jako rozdíl násobnosti nulového bodu z_0 funkce $\psi(z)$ minus násobnost nulového bodu z_0 $\varphi(z)$. Je-li tento rozdíl roven 0, je v tomto bodě odstranitelná singularita.

Uvedený postup prověříme na výše uvedeném příkladě 3.30:

Uvažme funkci $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$. Obě funkce mají bod $z = 0$ nulovým bodem. Určíme jejich násobnosti. Pro funkci $\psi(z)$ je násobnost 2 zřejmá. Pro funkci $\varphi(z)$ určíme její derivace $\varphi'(z) = \sin z$ a $\varphi''(z) = \cos z$. Protože platí $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$ má funkce $\varphi(z)$ bod $z = 0$ nulovým bodem násobnosti 2 a tedy uvažovaný rozdíl je 0, což znamená, že bodě $z = 0$ je odstranitelná singularita.

Pro funkci $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ dostáváme v bodě $z = 0$: $\varphi'(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$, $\psi(z) = z^5$ má bod $z = 0$ nulovým bodem násobnosti 5 tedy bod $z = 0$ je pólem násobnosti $5 - 1 = 4$.

3.9 Rezidua a jejich užití

Ze vzorců 3.36 vyplývá, že koeficient $a_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz$ umožňuje určit hodnotu integrálu, proto zavádíme pojem **reziduum** funkce $f(z)$, která je holomorfní v nějakém prstenci bodu z_0 , jako koeficient a_{-1} Laurentovy řady $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ a píšeme $\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$.

Věta 3.31 (reziduová, Cauchy). *Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast neobsahující ∞ a Γ uzavřená kladně orientovaná křivka ležící v této oblasti a vnitřek této množiny označíme $\dot{\Gamma}$. Nechť komplexní funkce $f(z)$ je holomorfní uvnitř oblasti Ω , s případnou s výjimkou konečného počtu bodů z_1, z_2, \dots, z_n z nichž žádný neleží na křivce Γ . Pak platí:*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{z_k \in \dot{\Gamma}} \operatorname{rez}_{z=z_k} f(z). \quad (3.41)$$

Pro efektivní využití této věty uvedeme stanovení rezidua v pólu:

Věta 3.32. *Nechť je dána funkce $f(z)$, která má v bodě z_0 pól řádu m , platí:*

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (3.42)$$

Jedná-li se o pól prvního řádu, pak se daný vzorec zjednoduší:

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z), \quad (3.43)$$

V případě prostých pólů můžeme výpočet reziduí u funkce, která je podílem dvou holomorfních funkcí realizovat pomocí následující věty.

Věta 3.33. *Nechť $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, kde funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ jsou holomorfní v bodě z_0 a platí $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Pak má funkce $f(z)$ v bodě z_0 pól prvního řádu a reziduum lze určit ze vzorce*

$$\operatorname{rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (3.44)$$

Tato věta je důsledkem předchozí věty 3.32 a sice použijeme-li vzorec 3.43 a limitu vypočteme pomocí součinu limit, přičemž platí $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z}{\psi(z)} = \frac{1}{\psi'(z_0)}$.

Příklad 3.34. Vypočtěte rezidua funkce $f(z)$

$$1) \frac{\cosh z}{z(z^2 + 4\pi^2)^2}$$

Řešení. Funkce je ve tvaru podílu holomorfních funkcí, proto jejími singulárními body jsou nulové body funkce ve jmenovateli:

$z = 0$ je pól prvního řádu a $z = \pm 2\pi j$ jsou póly druhého řádu a můžeme použít vzorec 3.42. Pro reziduum $z = 0$ je $m = 0$:

$$\operatorname{rez}_{z=0} \frac{\cosh z}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cosh z}{(z^2 + 4\pi^2)^2} = \frac{1}{16\pi^4},$$

Pro rezidua $z = \pm 2\pi j$ je $m = 2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rez}_{z=\pm 2\pi j} \frac{e^z}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} &= \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi j} \left(\frac{(z \mp 2\pi j)^2 e^z}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi j} \left(\frac{\cosh z}{z(z^2 \pm 2\pi j)} \right)' = \\ &= \lim_{z \rightarrow \pm 2\pi j} \frac{\sinh(z)(z^2 \pm 2\pi j) - \cosh(z)(3z \pm 2\pi j)}{z^2(z \pm 2\pi j)^3} = -\frac{1}{32}\pi^4. \end{aligned}$$

□

$$2) f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

Řešení. Funkce $\sin(z)$ má bod $z = 0$ nulovým bodem řádu 1 a funkce z^5 má bod $z = 0$ nulovým bodem řádu 1, proto ve vzorci 3.42 volíme $z_0 = 0$ je $m = 1$:

$$\operatorname{rez}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(z)}{1} = 1$$

Při výpočtu této limity jsme použili L'Hospitalovo pravidlo.

Poznamenejme, že výsledek je ve shodě s definicí rezidua a Laurentovým rozvojem této funkce viz příklad 3.30 1). □

$$3) f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^4}$$

Řešení. Funkce je ve tvaru podílu holomorfních funkcí, proto jejím singulárním bodem je nulový bod funkce ve jmenovateli $z = 0$, který je pól druhého řádu, neboť $z = 0$ je nulový bod funkce $1 - \cos z$ druhého řádu a nulový bod řádu 4 funkce z^4 a můžeme použít vzorec kde $z_0 = 0$ je $m = 2$:

$$\operatorname{rez}_{z=0} \frac{1 - \cos z}{z^4} = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos z}{z^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z + 2 \cos z - 2}{z^3}$$

Při výpočtu této limity uijeme opakovaně L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z + 2 \cos z - 2}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos z - \sin z}{3z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \sin z}{6z} = 0.$$

□

$$4) f(z) = \cotg z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Řešení. Funkce $\operatorname{tg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ má póly prvního řádu v nulových bodech funkce $\sin z$, které určíme ze vztahu $\sin(x + jy) = \sin x \cosh y - j \cos x \sinh y$ využijeme přitom $\cosh y > 0$, $\sinh y = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \Re \sin(x + jy) = \sin x \cosh y \Rightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ 0 &= \Im \sin(x + jy) = \cos(x) \sinh(y) = (-1)^k \sinh y \Rightarrow \sinh y = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = 0, \end{aligned}$$

Tedy nulové body komplexní funkce $\operatorname{cotg} z$ jsou stejné jako nulové body reálné funkce $\sin x$, tj. $z_k = k\pi$ a funkce $\operatorname{cotg} z$ má spočetně mnoho singulárních pólů prvního řádu. K výpočtu reziduí v těchto pólech je vhodné použít vzorec (3.44):

$$\operatorname{rez}_{z=k\pi} \operatorname{cotg} z = \left. \frac{\cos z}{(\sin z)'} \right|_{z=k\pi} = \frac{\cos(k\pi)}{\cos(k\pi)} = 1.$$

□

Reziduí je možné využít při výpočtu integrálu z funkce komplexní proměnné s izolovanými singulárními body po uzavřené křivce. K tomuto výpočtu použijeme Cauchyho reziduovou větu 3.31. Postup předvedeme na příkladě.

Příklad 3.35. Vypočtěte následující integrály pomocí reziduí podle věty 3.31.

- 1) $\int_{\Gamma} \frac{\cosh zdz}{z(z^2 + 4\pi^2)^2}$, je-li Γ kladně orientovaná kružnice se středem $2\pi j$ o poloměru 7.

Tento integrál je v textu již spočítaný viz příklad 3.25.

Řešení. Podobně jako v citovaném příkladě je třeba určit singulární body funkce $\frac{\cosh zdz}{z(z^2 + 4\pi^2)^2}$ $z = 0$, $z = \pm 2\pi j$. Uvnitř křivky Γ jsou body vyhovující rovnici $|z - 2\pi j| < 7$. Body $z = 0$ a $z = 2\pi j$ jsou uvnitř, neboť $|0 - 2\pi j| = 2 < 3$ a $|2\pi j - 2\pi j| = 0 < 3$, naopak bod $z = -2\pi j$ leží vně kružnice, protože $|-2\pi j - 2\pi j| = 4\pi > 7$. Proto užitím věty 3.31 dostáváme

$$\int_{\Gamma} \frac{\cosh zdz}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} = 2\pi j \left(\operatorname{rez}_{z=0} \frac{\cosh z}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} + \operatorname{rez}_{z=2\pi j} \frac{\cosh z}{z(z^2 + 4\pi^2)^2} \right) = 2\pi j \left(\frac{1}{16\pi^4} - \frac{1}{32\pi^4} \right) = \frac{j}{32\pi^3}.$$

Poznamenejme, že výše uvedená rezidua byla vypočtena v příkladu 3.341). □

- 2) $\int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$, kde je kružnice záporně orientována.

Řešení. I v případě, že křivka je záporně orientována je možné použít větu 3.31 a opačnou orientaci křivky kompenzovat změnou znaménka integrálu. V daném případě má funkce $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ jediný singulární

bod $z = 0$, který je vnitřním bodem křivky. Reziduum v tomto bodě určíme z Laurentova rozvoje (3.38)

v příkladě 3.30 rez $\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1$ a tedy $\int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 2\pi j$ □

3.9.1 Užití reziduí při výpočtu reálných integrálů

Při výpočtu některých určitých integrálů reálné funkce vlastních i nevlastních lze s výhodou využít integrálů funkce komplexní proměnné. Situaci budeme ilustrovat pouze na dvou typech.

Výpočet integrálů typu $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$.

Nechť je funkce $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ je racionální funkcí splňující podmínku $Q(\sin t, \cos t) \neq 0$ pro $t \in [0, 2\pi]$,

která je ekvivalentní s podmínkou $Q(x, y) \neq 0$ pro $x^2 + y^2 = 1$. Integrál $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt$ převedeme substitucí $z = \exp(jt)$ pro, kterou lze s využitím vztahů 3.14 odvodit

$$\sin t = \frac{z - 1/z}{2j} = \frac{z^2 - 1}{2jz} \quad \cos t = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

na integrál $\int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2jz}, \frac{z^2+1}{2z}\right) \frac{dz}{jz}$, který je integrálem z funkce komplexní proměnné přes kladně orientovanou kružnici se středem v počátku o poloměru 1 a který můžeme vyčíslit pomocí Cauchy reziduové věty 3.31. Celkově dostáváme:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2jz}, \frac{z^2+1}{2z}\right) \frac{dz}{jz} = 2\pi \sum_{\substack{z=z_k \\ |z_k|<1}} \operatorname{rez} \frac{1}{z} R\left(\frac{z^2-1}{2jz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)$$

Příklad 3.36. Vypočtěte $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \sin t + 1}$, kde $a \neq \pm 1$.

Řešení. Jmenovatel $a^2 - 2a \cos t + 1$ upravíme na tvar $(a \sin t - 1)^2 + (a \cos t)^2 \neq 0$, neboť $\cos t = 0 \Rightarrow t = \pi/2 + k\pi$ a pro druhý sčítanec platí $a \sin(\pi/2 + k\pi) - 1 = \pm a - 1$. Tedy integrál je vlastní a substitucí dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \sin t + 1} &= \int_{\Gamma} \frac{1}{a^2 - 2a \frac{z^2-1}{2jz} + 1} \frac{dz}{jz} = \int_{\Gamma} \frac{dz}{(a^2+1)jz - a(z^2-1)} = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{dz}{(j-az)(z-aj)} = 2\pi j \sum_{\substack{z=z_k \\ |z_k|<1}} \operatorname{rez} \frac{1}{(1-az)(z-a)}. \end{aligned}$$

Protože funkce $\frac{1}{(j-az)(z-aj)}$ má pouze dva jednoduché póly $aj, j/a$, v nichž se rezidua liší pouze znaménkem:

$$\operatorname{rez}_{z=aj} \frac{1}{(j-az)(z-aj)} = \frac{-j}{1-a^2} \quad \operatorname{rez}_{z=j/a} \frac{1}{a(\frac{j}{a}-z)(z-aj)} = \frac{j}{1-a^2}$$

a uvnitř jednotkové kružnice leží pouze jedno reziduum dostáváme pro $a \neq 0$ (pro $a = 0$ má evidentně integrál hodnotu 2π) hodnotu integrálu:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \sin t + 1} = \frac{2\pi \operatorname{sgn}(a^2 - 1)}{1 - a^2}.$$

□

Výpočet nevlastních integrálů typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Věta 3.37. *Nechť je funkce $f(z)$ holomorfní ve všech bodech komplexní roviny s nezápornou imaginární částí s případnou výjimkou konečného počtu pólů z_1, \dots, z_n a stejnoměrně platí: $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi}} z f(z) = 0$. Potom*

platí

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x)dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{rez}_{z=z_k} f(z).$$

Příklad 3.38. Vypočtěte $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 16}$.

Řešení. Integrál konverguje a integrovaná funkce splňuje předpoklady věty 3.37 tj.

$$1. \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z z^2}{z^4 + 16} = 0.$$

2. Funkce $\frac{z^2}{z^4 + 16}$ je holomorfní s výjimkou prostých pólů, které jsou kořeny rovnice $z^4 + 16 = 0$, tedy $z = \sqrt[4]{-16} = \{z | z^4 = -16\} = \{z | z = 2 \exp(j\varphi), \text{ kde } 4\varphi = \pi\}$. Proto má integrovaná funkce pouze dva póly s kladnou imaginární částí $z_1 = 2 \exp(j\pi/4) = (1 + j)\sqrt{2}$ a $z_2 = \exp(j3\pi/4) = (-1 + j)\sqrt{2}$.

Rezidua v těchto prostých pólech určíme pomocí věty 3.33:

$$\operatorname{rez}_{z=(\pm 1 + j)\sqrt{2}} \frac{z^2}{z^4 + 16} = \left. \frac{z^2}{4z^3} \right|_{z=(\pm 1 + j)\sqrt{2}} = \frac{(1 \pm 2j + j^2)2}{4(\pm 1 + 3j \pm 3j^2 + j^3)2\sqrt{2}} = \frac{\pm 4j}{8\sqrt{2}(\mp 2 + 2j)} = \frac{(\pm 1 - j)\sqrt{2}}{16}.$$

Pomocí věty 3.37 vypočteme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1)dx}{x^4 + 16} = 2\pi j 2 \frac{-j\sqrt{2}}{16} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

□

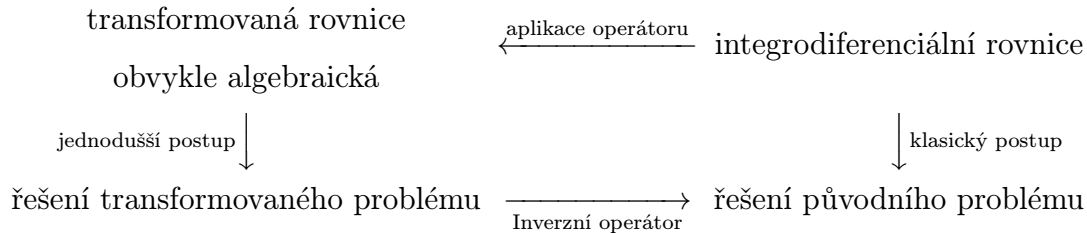
Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Nalezení funkčních hodnot funkcí komplexní proměnné.](#)
2. [Vykreslení grafů v komplexní rovině funkcí zadaných parametricky.](#)
3. [Určení reálné a imaginární části funkcí komplexní proměnné.](#)
4. [Hledání druhé složky holomorfní funkce.](#)
5. [Určení singulárních bodů funkce komplexní proměnné.](#)
6. [Výpočet reziduí v pólech racionálních lomených funkcí komplexní proměnné.](#)
7. [Kreslení integračních cest funkcí komplexní proměnné.](#)

4 Operátorový počet

Zejména v technické praxi je používán tzv. operátorový počet, kdy nějaká matematická úloha, např. integrodiferenciální rovnice, je pomocí operátoru (obvykle integrální transformace) transformována na úlohu, která je z matematického hlediska jednodušší. Tuto přetransformovanou úlohu vyřešíme a pomocí opačného postupu k původnímu operátoru nalezneme řešení původní úlohy.



V rámci tohoto postupu budeme pracovat i s objekty, které popisují „mezí“ situace v technických aplikacích, jako jsou náraz, proudový impuls, pro které je charakteristické předání nenulové energie v prakticky nulovém čase. Tyto jevy nelze popsat pomocí klasických funkcí. V dalším bude probrán nejtýpčtější zástupce tzv. zobecněných funkcí. V dalším se vyhneme abstraktnímu přístupu při zavádění tohoto pojmu. Použijeme postup analogický při možném rozšíření racionálních čísel na čísla reálná. Každá iracionální číslo můžeme ztotožnit s nějakou posloupností čísel racionálních. Nejznámějším příkladem je definice čísla e pomocí limity:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

4.1 Diracova zobecněná funkce $\delta(t)$, zobecněná derivace

Začněme jednodušší otázkou - jak definovat derivaci k funkci, která ji nemá všude definovanou. Jako prototyp nám může sloužit absolutní hodnota $|t|$. Z jistého úhlu pohledu můžeme chápat za tuto derivaci funkci $\operatorname{sgn}(t)$, neboť platí

$$|t| = \int_0^t \sin(u) du.$$

Nyní se zabývejme otázkou, jak postupovat u nespojitých funkcí? Jako prototyp nespojitě funkce uva-

žujme Heavisideovu funkci jednotkového skoku $\eta(t)$, které je definována:

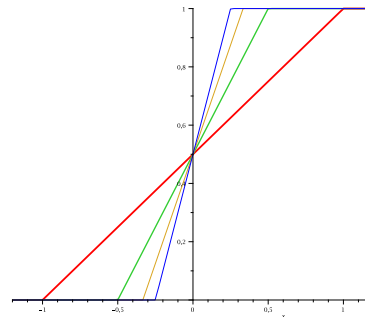
$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{pro } x = 0; \\ 1, & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Tuto Heavisideovu funkci můžeme považovat za limitu spojitých funkcí $F_n(t)$ tj, platí:

$$\eta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t).$$

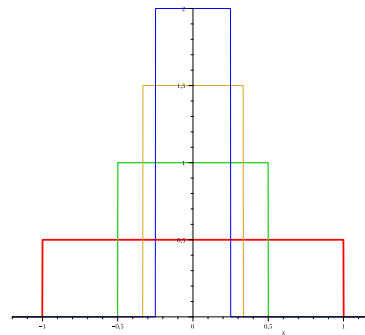
Kde funkce $F_n(t)$ jsou definovány takto:

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < -1/n; \\ \frac{n}{2} \left(t + \frac{1}{n} \right), & \text{pro } -1/n \leq t \leq 1/n; \\ 1, & \text{pro } 1/n \leq t. \end{cases}$$



Funkce $F_n(t)$ jsou spojité a mají a ve výše uvedeném smyslu mají derivaci:

$$F'_n(t) = f_n(t) = \frac{n}{2} \left(\eta\left(t + \frac{1}{n}\right) - \eta\left(t - \frac{1}{n}\right) \right)$$

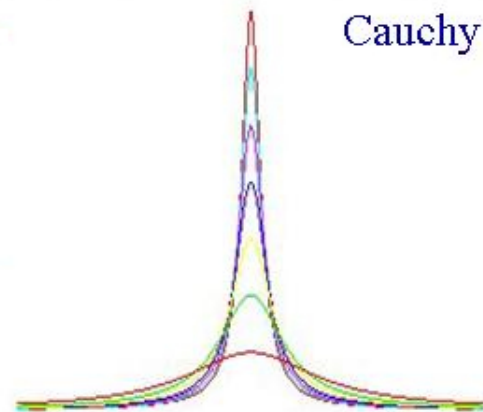
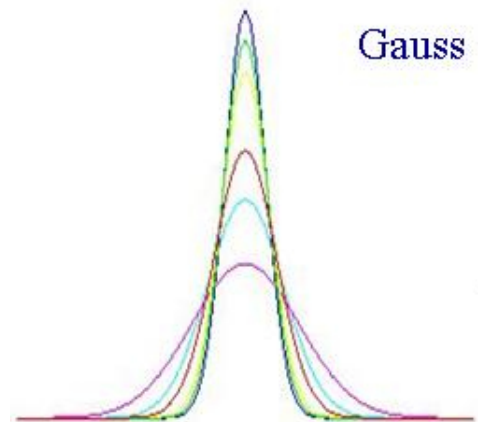
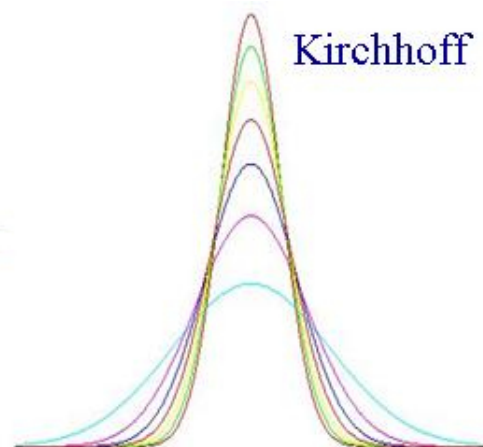
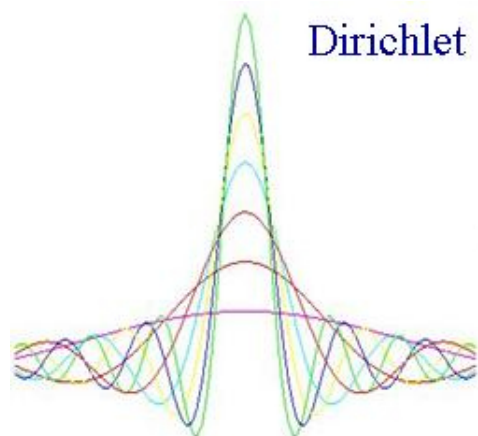


Provedením obvyklého limitního přechodu není možné získat obvyklou funkci.

Motivací je definice iracionálních čísel

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Podobně posloupnost obdélníkových kmitů $f_n(t)$ není jedinou posloupností funkcí, které jsou derivací funkcí majících za limitu Heavisideovu funkci jednotkového skoku. Stručně jsou uvedeny některé z nich:



Jako zobecnění těchto posloupností zavedeme pojem jehlové funkce. Nechť spojitá příp. po částech spojitá funkce $\delta(t, \lambda)$ splňuje:

1. $\delta(t, \lambda) = 0$ pro $|t| > \lambda$;
2. $\delta(t, \lambda) \geq 0$ pro $|t| < \lambda$;
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \lambda) dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} \delta(t, \lambda) dt = 1$,

potom se nazývá **jehlová funkce**. Klasická limita $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \delta(t, \lambda)$ neexistuje, proto uvažujme limitu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt = \begin{cases} f(0), & \text{pro } ab < 0; \\ 0, & \text{pro } ab > 0. \end{cases}$$

Definice 4.1. Zavedme označení

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \delta(t, \lambda) dt = \int_a^b f(t) \delta(t) dt. \quad (4.1)$$

Zde užitý symbol $\delta(t)$ nazýváme **Diracovou distribucí, Diracovým impulsem**. Je tzv. zobecněnou funkcí, charakterizující limitní chování jehlové funkce $\delta(t, \lambda)$ pro $\lambda \rightarrow 0$ a užívá se při výpočtu integrálů.

Pro Diracovu distribuci $\delta(t)$ a spojitou funkci $f(t)$ platí

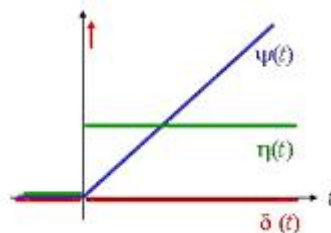
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t_0-t)dt = f(t_0) \quad (4.2)$$

Vztah mezi Diracovým impulsem, Heavisideovou funkcí $\eta(t)$ a tzv. identickou funkcí $\psi(t)$ je dán vztahy:

$$\int_{-\infty}^t \delta(\theta)d\theta = \eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^t \eta(\theta)d\theta = \psi(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}.$$

Diracovu distribuci považujeme za derivaci Heavisideovy funkce jednotkového skoku, podobně jako tuto považujeme za derivaci identické funkce $\psi(t)$. Tj.

$$\psi''(t) = \eta'(t) = \delta(t).$$



Situaci ilustruje obrázek vpravo

Toto je motivací pro zavedení zobecněné derivace funkcí, které jsou po částech spojitě spolu s derivací. Má-li funkce $f(t)$ v t_0 bod nespojitosti prvního druhu, potom platí $f(t) = \psi(t) + (\lim_{t \rightarrow t_0+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t))\eta(t - t_0)$,

kde funkce $\psi(t)$ má v t_0 odstranitelnou nespojitost a je možno ji v bodě t_0 dodefinovat tak, že bude spojitá.

Zobecněnou derivaci $f'_o(t)$ lze potom vyjádřit ve tvaru distribuce

$$f'_o(t) = \psi'(t) + (\lim_{t \rightarrow t_0+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t))\delta(t - t_0), \quad (4.3)$$

kde $\psi'(t)$ je derivací klasickou, pokud tato existuje.

Uvedený postup koresponduje také se zavedením derivace zobecněné $\delta(t)$. Má-li funkce $f(t)$ derivaci $f'(0)$ dostáváme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} dt = \begin{cases} -f'(0) & \text{pro } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } 0 \notin (a, b) \end{cases}$$

Nechť funkce $f(t)$ má $f'(t_0)$ potom zavedeme označení

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta(t_0+h) - \delta(t_0)}{h} dt = \int_a^b f(t) \delta'(t - t_0) dt = -f'(t_0). \quad (4.4)$$

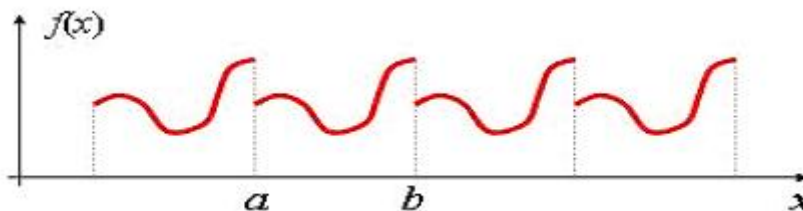
Zde užitý symbol $\delta'(t)$ nazýváme **derivací Diracovy distribuce**. Analogicky zavádíme n -tou derivaci Diracovy distribuce.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b f(t) \frac{\delta^{(n-1)}(t_0+h) - \delta^{(n-1)}(t_0)}{h} dt = \int_a^b f(t) \delta^{(n)}(t - t_0) dt = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(t_0) & \text{pro } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pro } 0 \notin (a, b) \end{cases}. \quad (4.5)$$

4.2 Fourierovy trigonometrické řady

4.2.1 Periodické a harmonické funkce

Řekneme, že funkce $f(x)$ je *periodická s periodou T* , jestliže platí $f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Speciálními



Obr. 4.1: Periodická funkce

periodickými funkcemi jsou harmonické funkce.

Reálná harmonická funkce se nazývá každá reálná funkce, kterou je možné zapsat v tzv. fázovém tvaru

$$f(t) = F \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{kde } -\infty < t < \infty. \quad (4.6)$$

Je zřejmé, že harmonická funkce $f(t)$ je jednoznačně určena trojicí parametrů F , φ a ω , které jsou postupně nazývány **amplituda**, **počáteční fáze** a **frekvence** harmonické funkce.

Dále se budeme zabývat možností vyjádřit periodickou funkci pomocí funkcí harmonických se stejnou periodou. Harmonickou funkci můžeme kromě základního tvaru $f(t) = F \cos(\omega t + \varphi)$ vyjádřit také jako lineární kombinaci funkcí $a_n \cos(\omega t) + b_n \sin(\omega t)$ nebo s využitím Eulerovy identity v komplexním tvaru $c_n \exp(j\omega t) + \bar{c}_n \exp(-j\omega t)$. Lineární kombinace harmonických funkcí jsou základem Fourierových trigonometrických řad. Tyto řady a vzorce jsou spojovány se jménem francouzského matematika a fyzika Josepha Fouriera.

4.2.2 Fourierovy trigonometrické řady

Definice 4.2. Nechť je funkce $f(t)$ integrace schopna na intervalu $[\theta, \theta + T]$. Označíme $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Potom řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \quad (4.7)$$

nazýváme **Fourierovou trigonometrickou řadou** funkce $f(t)$, kde konstanty a_n , b_n jsou určeny vztahy

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (4.8)$$

a nazývají se **koefficienty Fourierovy řady** funkce $f(t)$. Tuto řadu je možné vyjádřit v tzv. **komplexním tvaru Fourierovy řady**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}, \text{ kde } c_n = \frac{1}{T} \int_{\theta}^{\theta+T} f(t) \exp(-j\omega n t) dt. \quad (4.9)$$

nebo tzv. **fázovém tvaru Fourierovy řady**:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega t + \varphi_n), \text{ kde } 2c_{-n} = F_n e^{j\varphi_n} \quad (4.10)$$

Poznámka 4.3. F_n je modul a φ_n je argument komplexního čísla $2c_{-n}$ dále jsou jednotlivé konstanty svázány vztahy

$$\begin{aligned} F_n &= |a_n - jb_n| & \varphi_n &= \text{Arg}(a_n - jb_n) \\ a_n &= F_n \cos \varphi_n & b_n &= -F_n \sin \varphi_n \\ a_n &= c_n + c_{-n} & b_n &= j(c_n - c_{-n}) \\ c_n &= \frac{a_n - jb_n}{2} & c_{-n} &= \frac{a_n + jb_n}{2}. \end{aligned}$$

Součet řady $s(t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{\ln n}$ není Fourierovou řadou žádné integrovatelné funkce na intervalu $[0, 2\pi]$.

Funkci nazýváme **po částech spojitou** na uzavřeném intervalu, je-li možné tento interval rozdělit konečným počtem bodů t_1, t_2, \dots, t_k tak, že na každém z těchto intervalů je spojitá a existují konečné jednostranné limity v bodech t_i pro $i = 1, \dots, k$. Dále funkci nazýváme **po částech monotónní** na uzavřeném intervalu, jestliže je možné tento interval rozdělit konečným počtem bodů tak, že na každém z těchto intervalů je monotónní.

Definice 4.4. Řekneme, že funkce splňuje na uzavřeném intervalu **Dirichletovy podmínky**, jestliže je tomto intervalu počástech spojitá a počástech monotónní.

Věta 4.5. *Nechť funkce $f(t)$ je periodická s periodou T a splňuje Dirichletovy podmínky na libovolném intervalu délky T , potom řada na pravé straně vztahu (4.7) resp. (4.9) resp. (4.10) (kde Fourierovy koeficienty jsou definovány vztahy (4.8) resp. (4.9), resp. (4.10) konverguje pro každé t a její součet je roven*

1. $f(t)$ v každém bodě spojitosti t funkce $f(t)$

2. $\frac{1}{2}(f(t_-) + f(t_+)) = \frac{1}{2} \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} f(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) \right)$ v každém bodě nespojitosti t funkce $f(t)$.

Příklad 4.6. Sestrojte Fourierovu řadu funkce $f(t) = \begin{cases} -t, & \text{pro } t \in [0, \pi); \\ 2\pi - t, & \text{pro } t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$ pro $t \in [0, 2\pi]$, která

má periodu $T = 2\pi$.

Řešení. Pro zjednodušení výpočtu koeficientů platí pro periodické pokračování (dodefinování zadané funkce i do zbývajících intervalů tak a vzniklá funkce byla periodická se zadanou periodou), že v intervalu $[-\pi, \pi)$ je definována jako funkce $f(t) = -t$. Pro tuto funkci v intervalu $[-\pi, \pi)$ volíme konstanty do výše uvedených vzorců: $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$, $\theta = -\pi$. Navíc tento posun upozorní na skutečnost, že zadaná funkce je lichá s výjimkou izolovaných bodů $(2k + 1)\pi$. Toto umožní snadný výpočet koeficientů a_n :

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -t \cos nt \, dt = 0,$$

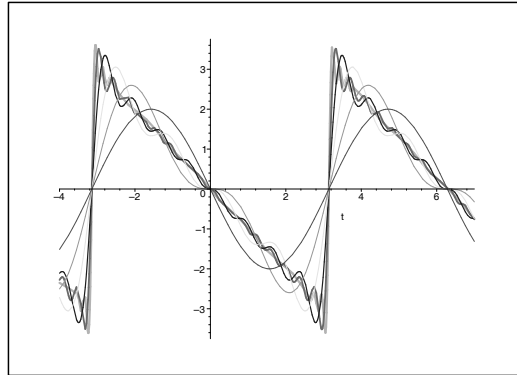
neboť integrovaná funkce je součinem liché a sudé funkce a tedy je lichá. Jak je známo z předmětu BMA1 je integrál z liché funkce na symetrickém intervalu nulový. Povšimněme si, že i při výpočtu koeficientů b_n dojde posunutím intervalu integrace ke zjednodušení, neboť integrujeme pouze v jednom intervalu a nikoli ve dvou:

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -t \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t \cos nt}{n} - \frac{\sin nt}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n 2}{n}$$

Funkce $f(t)$ splňuje Dirichletovy podmínky podle věty (4.5) řada konverguje a platí:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n \sin nt}{n}$$

s výjimkou bodů nespojitosti $(2k + 1)\pi$ kde je součet roven hodnotě π . Na následujícím obrázku jsou zobrazeny částečné součty této řady s postupně 1, 2, 4, 8, 16, 32 sčítanci.



□

Příklad 4.7. Nalezněte komplexní tvar Fourierova rozvoje periodicky se opakujícího obdélníkového signálu, který má šířku 2ε , výšku h a délka periody je T ($T > 2\varepsilon$). Funkci $f(t)$, která vyhovuje zadaným požadavkům, zvolíme tak, aby byla sudá, tj. v intervalu $[-T/2, T/2]$, který má délku T bude signál nenulový pouze v intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Řešení. Pro frekvenci ω platí $\omega = 2\pi/T$:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h e^{-jn\omega t} dt = \frac{h}{-jn\omega T} [e^{-jn\omega t}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{h}{T} \frac{\sin n\omega\varepsilon}{n\omega}$$

Koeficient $c_0 = h\varepsilon/T$ není daným vztahem definován, neboť se jedná o podíl $\frac{0}{0}$. Tato skutečnost bývá zejména v technické literatuře řešena zavedením funkce sinc, která je definována vztahem

$$\operatorname{sinc} t = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & \text{pro } t \neq 0; \\ 1, & \text{pro } t = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

což umožňuje zápis $c_n = \frac{h\varepsilon}{T} \operatorname{sinc}(n\omega\varepsilon)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h\varepsilon}{T} \operatorname{sinc}(n\omega\varepsilon) e^{jn\omega t} = \frac{h\varepsilon}{T} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h\varepsilon}{T} \operatorname{sinc}(n\omega\varepsilon) \cos(\omega t).$$

Řada vpravo je fázový tvar Fourierovy řady. Skutečnost, že funkce $f(t)$ je sudá nám neumožnila určit část koeficientů c_n , ale projevila se díky poznámce 4.3 v tom, že c_n jsou reálné (neboť $b_n = 0$). \square

Příklad 4.8. Rozviňte funkci $\frac{1}{a^2 - 2a \sin t + 1}$, kde $a > 1$ ve Fourierovu řadu.

Řešení. V tomto případě použijeme určité Laurentův rozvoj funkce se středem v počátku konvergující na kružnici $|z| = 1 \Leftrightarrow z = e^{jt}$. Nejdříve vyjádříme zadanou funkci v proměnné t jako komplexní funkci proměnné z , která vznikne z původní substitucí $z = \exp(jt) \Leftrightarrow \sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2j}$. Tento postup využívá souvislosti Fourierova rozvoje v komplexním tvaru a Laurentova rozvoje. Použitím dané substituce dostáváme dostáváme: $f(z) = \frac{1}{a^2 - 2a\frac{z^2-1}{2jz} + 1} = \frac{jz}{(a^2 + 1)jz - a(z^2 - 1)} = \frac{jz}{(j - az)(z - aj)}$, což je funkce, která je na jednotkové kružnici se středem v počátku holomorfní a je tedy možné určit její Laurentův rozvoj rozkladem na součet parciálních zlomků a zpětným dosazením původní proměnné t získáme Fourierovu řadu v komplexním tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{jz}{(j - az)(z - aj)} &= \frac{1}{a^2 - 1} \left(\frac{j}{az - j} + \frac{aj}{aj - z} \right) = \frac{1}{a^2 - 1} \left(\frac{\frac{j}{az}}{1 - \frac{j}{az}} + \frac{1}{1 - \frac{z}{aj}} \right) = \\ &= \frac{1}{a^2 - 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{j}{az} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{aj} \right)^n \right) = \frac{1}{a^2 - 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{z}{j} \right)^n \frac{1}{a^{|n|}} = \frac{1}{a^2 - 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt} \frac{1}{j^n a^{|n|}}. \end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme se vrátili k původní proměnné t , abychom získali standardní tvar Fourierova rozvoje v komplexním tvaru. To znamená $c_n = \frac{j^{-n} a^{-|n|}}{a^2 - 1}$. Jinou možnost vyjádření dané funkce je pomocí Fourierovy

trigonometrické řady kdy využijeme vztahy

$$\cos nt = \frac{e^{jnt} + e^{-jnt}}{2} \quad \sin nt = \frac{e^{jnt} - e^{-jnt}}{2j},$$

které dosadíme do Fourierovy řady v komplexním tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 - 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jnt} \frac{1}{j^n a^{|n|}} &= \frac{1}{a^2 - 1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \left(\frac{e^{jnt}}{j^n} + j^n e^{-jnt} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{a^2 - 1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(j)^{2k}}{a^{2k}} \left(\frac{e^{j2kt}}{j^{4k}} + e^{-j2kt} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(j)^{2k}}{a^{2k-1}} \left(\frac{e^{j(2k-1)t}}{j^{4k-1}} + j^{-1} e^{-j(2k-1)t} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{a^2 - 1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{a^{2k}} \left(\frac{e^{j2kt} + e^{-j2kt}}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{a^{2k-1}} \left(\frac{-e^{j(2k-1)t} + e^{-j(2k-1)t}}{2j} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{a^2 - 1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{a^{2k}} \cos(2kt) + \frac{2(-1)^{k+1}}{a^{2k-1}} \sin((2k-1)t) \right) \end{aligned}$$

Abychom našli i fázový tvar této řady, využijeme identity $\sin \alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$ a tedy argument φ_n užitý ve fázovém tvaru je $\varphi_{2k} = 0, \varphi_{2k-1} = -\pi/2 \Leftrightarrow \varphi_n = ((-1)^n - 1)\pi/4$. Fázový tvar Fourierovy řady je :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}}{a^n} \cos \left(nt + \frac{((-1)^n - 1)}{4} \pi \right),$$

kde užitý symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ značí celou část čísla. □

Poznámka 1. Integrály, které by bylo nutné ve výše uvedeném příkladě vypočítat při přímém použití vzorců 4.8 je v tomto kurzu nelze.

Jestliže funkce $f(t)$ splňuje Dirichletovy podmínky potom pro její Fourierovu řadu platí, že je můžeme integrovat člen po členu a získáme tak, integrál původní funkce. Podobná vlastnost pro derivace obecně neplatí. Ze základních vlastností integrálů platí:

- Fourierova řada sudé resp. liché funkce $f(t)$ je tvořena pouze sudými funkcemi $\cos(n\omega t)$ resp. lichými funkcemi $\sin(n\omega t)$, což znamená $b_n = 0$ resp. $a_n = 0$.
- Je-li navíc funkce $f(t)$ rovna lineární kombinaci funkcí, které jsou obsaženy ve Fourierově trigonometrické řadě, potom její rozvoj je roven výše zmíněné lineární kombinaci.

4.2.3 Rozvoj pouze do sinů resp. cosinů

Z výše uvedeného je patrné že pro funkci definovanou pouze na intervalu $[0, T]$ je možné ji nadefinovat v intervalu $[-T, 0)$ tak, že s případnou výjimkou $t = 0$ bude tato nově definovaná funkce sudá nebo lichá. To

má za následek, že tuto funkci lze rozvinout pouze v řadu kosinů nebo sinů. Bude-li funkce $f(t)$ splňovat na intervalu $[0, T]$ Dirichletovy podmínky, lze ji doplnit v intervalu $[-T, 0]$ v sudou resp. lichou funkci $f_s(t)$ resp. $f_l(t)$, která má periodu $2T$. Potom platí při splnění podmínek věty v bodech spojitosti funkce $f(t)$ platí:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi}{T} t, \quad \text{pro } x \in (0, T), \quad \text{kde } a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{n\pi t}{T} dt$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi}{T} t, \quad \text{pro } x \in (0, T), \quad \text{kde } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{n\pi t}{T} dt$$

Příklad 4.9. Na intervalu $[0, \pi]$ rozviňte do sinů a cosinů funkci $f(t) = \sin t$.

Řešení.

- Při rozvoji do sinů funkci dodefinujeme v lichou funkci to znamená ve funkci $\sin t$ a ta má podle výše uvedených vlastností Fourierův rozvoj ve tvaru lineární kombinace tj. tvar $b_1 = 1$ a $b_n = 0$ pro $1 < n$.
- Pro rozvoj do cosinů je třeba určit integrály:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{2}{\pi} [-\cos t]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Využitím známé trigonometrické relace $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$ postupně vypočteme

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin((n+1)t) - \sin((n-1)t)) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)t)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)t)}{n-1} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos((n+1)\pi) - 1}{n+1} + \frac{\cos((n-1)\pi) - 1}{n-1} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{(-1)^{n+1} - 1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n-1} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n+1)(n-1)} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi(n^2-1)} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2\ell-1)^2} \cos((2\ell-1)t)$$

□

Tato funkce se v technické praxi nazývá dvoucestné usměrnění. Kdybychom chtěli získat rozvoj tzv. jednocestného usměrnění tj funkce $f_1(t) = \max(0, \sin t)$, které lze vyjádřit jako součet sudé funkce (dvoucestné usměrnění) a funkce $\sin t$:

$$f_1(t) = \max(0, \sin t) = |\sin t| + \sin t = \frac{\pi}{2} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2\ell-1)^2} \cos((2\ell-1)t) + \sin t.$$

4.2.4 Grafické znázornění Fourierova rozvoje - Spektrum

Graficky Fourierův rozvoj reprezentujeme pomocí **spektra**, kdy jednu číselnou osu užíváme k vynášení frekvencí $n\omega = \frac{nT}{2\pi}$ a v rovině kolmé na osu frekvencí koeficienty $a_n = F_n \cos \varphi_n$, $b_n = -F_n \sin \varphi_n$ jsou souřadnicemi bodu přiřazeného n -té harmonické složce Fourierova rozvoje. Tato grafická interpretace je ovšem trojrozměrná, proto se používá zobrazení pomocí dvou rovinných zobrazení, kdy se na jednu osu vynášejí frekvence $n\omega = \frac{nT}{2\pi}$ a na druhou koeficient a_n resp. b_n , které znázorníme úsečkou začínající na ose frekvencí a končící v bodě jehož druhá souřadnice je a_n resp. b_n . Druhou možností je vynášet místo dvojice a_n, b_n dvojici F_n, φ_n , hovoříme tak o **spektru modulů** a **spektru argumentů**.

Analogicky s harmonickými funkcemi platí pro spektra funkcí:

1. spektrum součtu je rovno součtu spekter
2. spektrum α násobku funkce je rovno α násobku tohoto spektra
3. posunutá funkce $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ má spektrum modulů stejné jako funkce $f(t)$ a spektrum argumentů je o $n\omega\tau$ menší tj.

$$\varphi_{\varphi_n} = \varphi_n - n\omega\tau$$

4. spektrum funkce se změněným měřítkem $f(mt)$ má periodu T/m a frekvence harmonických složek jsou násobkem $m\omega$, ale koeficienty a_n, b_n a tedy moduly F_n a argumenty φ_n jsou stejné.

4.3 Fourierův integrál

Nyní budeme aplikovat předchozí výsledky na prodlužující se interval komplexního tvaru Fourierova rozvoje periodických funkcí. Podle 4.5 pro funkci $f(t)$ definovanou na intervalu $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, která zde splňuje Dirichletovy podmínky viz. definice 4.4. S využitím věty 4.5 na tomto intervalu dostáváme ve všech bodech spojitosti funkce $f(t)$ rovnost:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega x} dx e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jn\omega(x-t)} dx, \text{ kde } t \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}).$$

Při limitním přechodu $T \rightarrow \infty$ můžeme výše uvedenou sumu interpretovat jako integrální součet funkce

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-jz(x-t)} dx.$$

Formálním provedením limitního přechodu pro periodu $T \rightarrow \infty$ obdržíme **Fourierův integrální vzorec**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jz(x-t)} dx \right) dz. \quad (4.12)$$

Abychom mohli jednoduše formulovat podmínky platnosti výše uvedeného vztahu, řekneme, že funkce $f(t)$ je **absolutně integrovatelná**, jestliže platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Věta 4.10. *Nechť je funkce $f(t)$ absolutně integrovatelná a $f(t)$, $f'(t)$ jsou po částech spojité viz. definice 4.4, potom pravá strana vztahu (4.12) se rovná*

1. $f(t)$ v každém bodě spojitosti t funkce $f(t)$
2. $\frac{1}{2}(f(t_-) + f(t_+)) = \frac{1}{2} \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} f(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) \right)$ v každém bodě nespojitosti t funkce $f(t)$.

Tento Fourierův integrální vzorec, ve kterém je dvojitá integrace rozdělíme a první integrál označíme za obraz funkce $f(t)$ a druhý integrál za zpětné zobrazení. Toto je obsahem Fourierovy transformace.

4.4 Fourierova transformace

Nechť $f(t)$ je funkce reálné proměnné t (reálná nebo komplexní), která je spolu se svojí derivací $f'(t)$ po částech spojitá a navíc je absolutně konvergentní. Potom je pro všechna reálná ω definována funkce

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (4.13)$$

kterou nazýváme **Fourierovým obrazem** (spektrém) funkce $f(t)$. Toto přiřazení se nazývá **Fourierovou transformací**, funkce $f(t)$ jejím předmětem, funkce $F(\omega)$ obrazem Fourierovy transformace.

Druhý vztah, který můžeme vysvětlovat tak, že ze známé funkce $F(j\omega)$ určíme funkci $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (4.14)$$

nazýváme **zpětnou Fourierovou transformací**. Vztah mezi funkcemi $f(t)$ a $F(j\omega)$ stručně zapisujeme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) &= F(j\omega) \\ \mathcal{F}^{-1}(F(j\omega)) &= f(t). \end{aligned}$$

Poznamenejme, že zde použitý zápis $F(j\omega)$ je třeba chápat tak, že se jedná o složenou funkci, kde vnější

složkou je integrál obsahující komplexní proměnnou

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

za kterou dosadíme vnitřní složku $j\omega$. Tato forma zápisu se vyskytuje v literatuře a je zvykem. Tento způsob zápisu není ovšem jednotný, proto poznamenejme, že je možná nalézt i označení $F(\omega)$

Obecně platí, že v případě **sudé funkce** $f(-t) = f(t)$ se výše uvedené integrály 4.13 a 4.14 zjednoduší (využijeme Eulerovu identitu) na tzv. **Fourierovu cosinovou transformaci**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos n\omega t dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos n\omega t d\omega$$

podobně v případě **liché funkce** $f(-t) = -f(t)$ dostáváme tzv. **Fourierovu sinovou transformaci**:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin n\omega t dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sin n\omega t d\omega$$

Aby užívané integrály 4.13 a 4.14 konvergovaly musíme se při použití Fourierovy transformace omezit pouze na určitou skupinu funkcí. Specifikaci určuje Situaci se zabývá následující věta, která stanoví dostatečnou podmínku existence obrazu Fourierovy transformace a také udává „opačnou“ podmínku pro funkci komplexní proměnné, kterou musí splňovat obraz Fourierovy transformace reálné funkce.

Věta 4.11. *Nechť je funkce $f(t)$ absolutně integrovatelná, potom obraz Fourierovy transformace $F(j\omega)$ existuje a je spojitá funkce, pro kterou platí $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(j\omega) = 0$.*

Poznamejme, že se budeme zabývat i funkcemi komplexní proměnné nespňujícími uvedenou podmínku, které budou obrazem zobecněných funkcí např. Diracův impuls viz. níže. Další vlastnosti uspořádáme pro větší přehlednost do tabulky.

Před uvedením věty, která shrne základní vlastnosti Fourierovy transformace uvedme operaci dvou reálných dvou absolutně integrovatelných funkcí jejíž výsledek je nazýván konvoluce.

Definice 4.12. Nechť jsou funkce $f(t)$, $g(t)$ absolutně integrovatelné. Potom funkci definovanou vztahem

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau. \quad (4.15)$$

nazýváme konvolucí funkcí $f(t)$, $g(t)$ a zapisujeme ji $f * g(t)$.

Poznámka 4.13. Poznamenejme, že pro funkce $f(t)$, $g(t)$, které jsou nulové pro záporný argument, je tato definice ve shodě s dříve uvedeným vztahem

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Pro větší přehlednost budeme následující větu zapisovat do tabulky shrnující základní vlastnosti Fourierovy transformace.

Věta 4.14. O předmětech Fourierovy transformace (funkce v tabulce vlevo) předpokládáme, že jsou absolutně integrovatelné. Navíc označme $\mathcal{F} f(t) = F(j\omega)$, případně $\mathcal{F} g(t) = G(j\omega)$.

Věta o	předmět	obraz
<i>linearitě</i>	$a f(t) + b g(t)$	$a F(j\omega) + b G(j\omega)$
<i>podobnosti</i>	$f(rt)$	$\frac{1}{r} F\left(\frac{j\omega}{r}\right)$
<i>posunutí předmětu</i>	$f(t - r)$	$\exp(-jr\omega) F(j\omega)$
<i>posunutí obrazu</i>	$\exp(jrt) f(t)$	$F(j\omega - r)$
<i>derivaci předmětu</i>	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(j\omega)$
<i>derivaci obrazu</i>	$t^n f(t)$	$j^n \frac{d^n F(j\omega)}{d \omega^n}$
<i>integraci předmětu</i>	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(j\omega)}{j\omega}$
<i>konvoluci předmětu</i>	$f(t) * g(t)$	$F(j\omega) G(j\omega)$

Při zavádění Fourierovy transformace pro funkce nesplňující výše uvedené podmínky nebo pro zobecněné funkce postupujeme tak, že uvedenou funkci případně zobecněnou funkci chápeme jako „limitu“ posloupnosti funkcí, které uvedené předpoklady splňují a Fourierův obraz potom chápeme jako limitu obrazů funkcí dané posloupnosti. Takto můžeme nalézt obraz Fourierovy transformace Diracovy distribuce a jejích derivací, ale v těchto konkrétních případech můžeme formálně postupovat i tak, že u Diracovy distribuce využijeme tzv. filtrační vlastnost (4.2):

$$\mathcal{F}\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}. \quad (4.16)$$

Pro derivaci Diracovy delta funkce lze odvodit:

$$\mathcal{F}\delta^{(n)}(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-j\omega t} dt = (j\omega)^n e^{-j\omega t_0}. \quad (4.17)$$

Pro funkci jednotkového skoku můžeme přímým výpočtem získat:

$$\mathcal{F}\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{-j}{\omega} \quad (4.18)$$

Při výpočtu tohoto integrálu je vhodné si uvědomit, že konverguje pouze pro ω s kladnou reálnou částí.

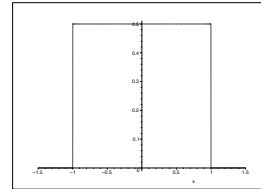
4.5 Užití Fourierovy transformace

Užití některých z uvedených vlastností budeme demonstrovat při výpočtu Fourierova obrazu některých speciálních funkcí (signálů) a při řešení diferenciálních rovnic.

4.5.1 Fourierova transformace některých funkcí

Příklad 4.15.

Nalezněte obraz obdélníkového signálu, který má šířku 2ε , výšku h , který je navíc umístěn tak, aby funkce $f(t)$, která jej popisuje byla sudá, tj. signál bude umístěn v intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$ viz. obrázek vpravo

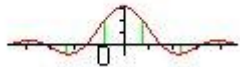
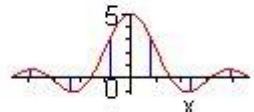
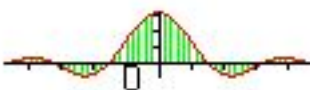
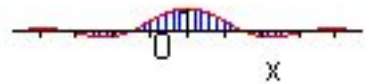




Řešení.

$$\mathcal{F}f(t) = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} he^{-j\omega t} dt = \frac{h}{-jn\omega} [e^{-jn\omega t}]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 2h \frac{\sin n\omega\varepsilon}{n\omega} = 2h\varepsilon \operatorname{sinc}(n\omega\varepsilon).$$

□

Na dané příkladu a příkladu 4.7 je možné ukázat limitní přechod spektra Fourierova rozvoje periodického obdélníkového signálu (s periodou T) viz. ukázka 4.7 v obraz Fourierovy transformace jednoho obdélníkového signálu. Koeficienty c_n Fourierova rozvoje jsou integrály (4.9) jsou děleny periodou T , jež se v limitě „použije“ ve vnějším integrálu ve Fourierově integrálním vzorci a proto zobrazíme modifikované také spektrum bez tohoto dělení. V tabulce jsou zobrazena pouze spektra modulů, protože argumenty jsou nulové. Úhlový kmitočet základní harmonické složky je $\omega = 2\pi/T$.

T	modifikované spektrum	spektrum
4		
16		
64		

Z uvedených spekter je patrné, že pro zvětšující se T roste hustota spekter a pro hodnotu $T = 64$ při zvoleném grafickém znázornění (tloušťka čar) modifikovaného spektra obraz spektra je stejný jako integrál vyjadřující Fourierovu transformaci.

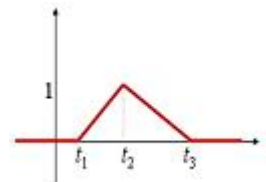
Poznámka 2. Další užití obrazu studovaného sudého obdélníkového impulsu je ověření vzorce pro již dříve uvedený Fourierův obraz Diracova impulsu $\delta(t)$. Tuto Diracovu funkci chápeme jako limitní chování jehlové funkce, za kterou volíme posloupnost obdélníků $\delta(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} (\eta(t - \varepsilon) - \eta(t + \varepsilon))$. Pro stanovení této limity obrazů jednotlivých obdélníkových impulsů dostáváme obraz Diracova impulsu:

$$\mathcal{F} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F} \delta(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{2\varepsilon} \frac{\sin n\omega\varepsilon}{n\omega} = 1$$

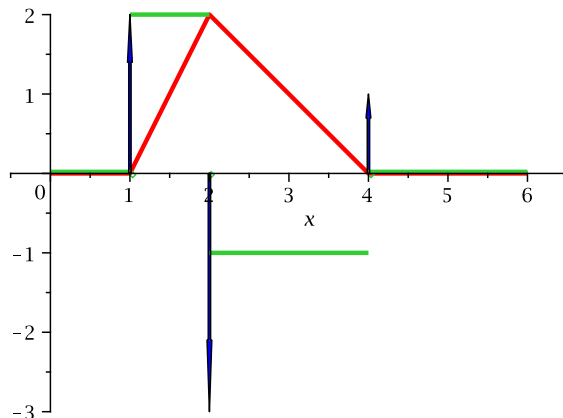
V dalším příkladě s výhodou uijeme Fourierova obrazu Diracova impulsu k nalezení Fourierova obrazu tzv. obecného trojúhelníkového impulsu.

Příklad 4.16. Nalezněte Fourierův obraz obecného trojúhelníkového impulsu $f(t)$ zadaného grafem, který je mimo interval $[t_1, t_3]$ nulový a vrchol trojúhelníka má pro $t = t_2$ ($t_1 < t_2 < t_3$) hodnotu v .

$$f(t) = \begin{cases} (t - t_1)v/(t_2 - t_1), & \text{pro } t_1 \leq t \leq t_2; \\ v - (t - t_2)v/(t_3 - t_2), & \text{pro } t_2 \leq t \leq t_3; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Řešení. K jeho určení využijeme druhé zobecněné derivace této funkce. Znázornění na obrázku je pro $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$, $v = 2$.



$$f''(t) = \frac{v}{t_2 - t_1} \delta(t - t_1) - \left(\frac{v}{t_3 - t_2} + \frac{v}{t_2 - t_1} \right) \delta(t - t_2) + \frac{v}{t_3 - t_2} \delta(t - t_3).$$

Dále použijeme také větu o derivaci předmětu a pro obraz $F(j\omega)$ a dostaneme rovnici

$$-\omega^2 F(j\omega) = \mathcal{F} f_o''(t) = \frac{v((t_3 - t_2)e^{-j\omega t_1} + (t_1 - t_3)e^{-j\omega t_2} + (t_2 - t_1)e^{-j\omega t_3})}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Co po úpravě dává:

$$F(j\omega) = -\frac{v((t_3 - t_2)e^{-j\omega t_1} + (t_1 - t_3)e^{-j\omega t_2} + (t_2 - t_1)e^{-j\omega t_3})}{\omega^2(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Poznamenejme, že pro sudý trojúhelníkový impuls tj, $t_1 = -T$, $t_2 = 0$, $t_3 = T$ lze obraz zapsat jednoduše:

$$F(j\omega) = v \frac{T e^{j\omega T} - 2T + T e^{-j\omega T}}{T^2 \omega^2} = v \frac{2(\cos \omega T - 1)}{T \omega^2} = v T \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 = v T \left(\operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2} \right)^2$$

□

Při hledání obrazů některých signálů se používají i jiné postupy. Například při hledání obrazu funkce $f(t) = e^{-a^2 t^2}$ nalezneme diferenciální rovnici pro obraz této funkce, kterou vyřešíme. Celkově tak dostáváme

$$\mathcal{F} e^{-a^2 t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}.$$

4.5.2 Diferenciální rovnice

Pro řešení počátečních úloh diferenciálních případně integro-diferenciálních rovnic se obvykle používá později probíraná Laplaceova transformace. Proto tento postup naznačíme na známém příkladu z literatury a sice na řešení parciální diferenciální rovnice vedení tepla v nekonečně dlouhé a tenké tyči, kterou ztotožníme s osou x a popisujeme ji pomocí funkce $u(x, t)$, jejíž hodnota udává teplotu v bodě o souřadnici x a v čase t . Tato funkce vyhovuje tzv. počáteční diferenciální úloze:

$$au''_{xx} = u'_t, \quad u(x, 0) = g(x), \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Obraz řešení budeme předpokládat ve tvaru $\mathcal{F}u(x, t) = U(j\omega, t)$ potom s rovnice zobrazí na diferenciální rovnici (proměnné t), kterou vyřešíme ($G(j\omega) = \mathcal{F}g(x)$ je obraz rozložení teplot v čase $t = 0$):

$$a(j\omega)^2 U = \frac{dU}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{U} = -a\omega^2 dt \Rightarrow U(j\omega, t) = G(j\omega) \exp(-a\omega^2 t),$$

Řešení je konvolucí vzoru, který byl odvozen výše:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)}{2\sqrt{\pi t}} g(\xi) d\xi.$$

Použití Fourierovy transformace omezuje prostor funkcí ??, které je možno takto získat. Konkrétní příklad je možné nalézt v [8] (ukázka 7.2). Slovník Fourierovy transformace

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
$t^n e^{-at}$, $a > 0$, $n > 0$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(a+j\omega)^{n+1}}$	$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a} \exp(-a \omega) a > 0$
e^{-at^2} , $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$	$\frac{\sin at}{\sqrt{ t }}$	$j\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{ \omega-a }} - \frac{1}{\sqrt{ \omega+a }} \right)$
te^{-at^2} , $a > 0$	$-j\frac{\sqrt{\pi}\omega}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$	$\frac{\cos at}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{ \omega-a }} + \frac{1}{\sqrt{ \omega+a }} \right)$
$e^{-a t }$, $a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$
$ t e^{-a t }$, $a > 0$	$\frac{2(a^2-\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2}$	$\sin at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{2a} + \frac{\pi}{4}\right)$
$\frac{e^{-a t }}{\sqrt{ t }}$, $a > 0$	$\sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{\omega^2+a^2}+a}{a^2+\omega^2}$	$\cos at^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{2a} - \frac{\pi}{4}\right)$
$\frac{\exp(-a/\sqrt{ t })}{\sqrt{ t }}$, $a > 0$	$\frac{\sqrt{2}(\cos\sqrt{2\pi \omega } - \sin\sqrt{2\pi \omega })}{ \omega }$	$\frac{\sin t}{t}$	$\pi(\eta(\omega+1) - \eta(\omega-1))$

4.6 Laplaceova transformace

Mnoho technických problémů studuje děje, které „začínají“ od nějakého časového okamžiku, např. připojíme elektrický obvod k napětí, spustíme stroj, atd. O takových procesech můžeme předpokládat, že jejich studium začne v čase $t = 0$. Pro studium dějů popsanými integro-diferenciálními rovnicemi používáno tzv. operátorového počtu. Pro jevy tohoto typu je elektrotechnice užívána Laplaceova transformace, která reálné funkci $f(t)$ přiřazuje funkci komplexní tak, že pro $t \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathbb{C}$ konvergentní nevlastní integrál je to funkce:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt, \quad (4.19)$$

Funkci $F(p)$ nazýváme **Laplaceovým obrazem** funkce $f(t)$. Naopak funkci $f(t)$ nazýváme **vzorem** funkce $F(p)$. Zobrazení přiřazující funkci $f(t)$ funkci $F(p)$ nazýváme **Laplaceovou transformací** a zapisujeme $F(p) = \mathcal{L}f(t)$ nebo $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Funkce $f(t) = \exp(t^2)$ nemá Laplaceův obraz, protože integrál diverguje. Proto funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme **předmětem** neboli **originálem** Laplaceovy transformace \mathcal{L} , jestliže splňuje následující tři podmínky

- (i) $f(t)$, $f'(t)$ jsou po částech spojité pro všechna $t \in \mathbb{R}$,
- (ii) $f(t) = 0$ pro $t < 0$,
- (iii) existují kladné konstanty M , t_0 a konstanta $s \in \mathbb{R}$ tak, že platí $|f(t)| \leq M \exp(st)$ pro všechna $t \geq t_0$.
Říkáme, že $f(t)$ je funkcí **ohraničeného růstu s indexem** s .

Předpoklad (ii) je zaveden z důvodu jednoznačnosti zobrazení definovaného Laplaceovou transformací. Elementární funkce, které nesplňují uvedený předpoklad, násobíme Hevisideovou funkcí jednotkového skoku $\eta(t)$. V literatuře je zvykem, že tuto skutečnost často mlčky předpokládáme a nezapisujeme.

Příklad 4.17. Pomocí definice nalezněte Laplaceovy obrazy následujících funkcí

1. funkce jednotkového skoku $\eta(t)$.

Řešení. Ověřit, že integrál definující obraz konverguje. U Hevisideovy funkce snadno ověříme i platnost předpokladu (iii) dané definice, např. volbou konstant $M = 2$, $t_0 = 1$ a $s = 0$. Přímým výpočtem získáme:

$$\mathcal{L}\eta(t) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{\exp(-pt)}{p} \right]_0^u = \frac{1}{p} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-pu)}{p} = \frac{1}{p}.$$

□

2. $\exp(at)\eta(t)$, kde $a \in \mathbb{R}$ je libovolné.

Řešení. Pro ověření předpokladu (iii) stačí volit $M = 1$, $t_0 = 1$ a libovolné reálné $s > a$.

$$\mathcal{L}(\exp(at)\eta(t)) = \int_0^{\infty} \exp(at) \exp(-pt) dt =$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{\exp(-(p-a)t)}{p-a} \right]_0^u = \frac{1}{p-a} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-(p-a)u)}{p-a} = \frac{1}{p-a}.$$

□

3. funkce $t^n \eta(t)$, kde n je celé nezáporné číslo.

Řešení. U této funkce snadno ověříme i platnost předpokladu (iii) dané definice např. volbou konstant $M = 1$, $t_0 = \exp(n)$ a $s = 1$. Nejdříve odvodíme rekurentní vztah:

$$\mathcal{L}(t^n \eta(t)) = \int_0^{\infty} t^n \exp(-pt) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{t^n \exp(-pt)}{p} \right]_0^u +$$

$$\frac{n}{p} \int_0^{\infty} t^{n-1} \exp(-pt) dt = - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-pu)}{p} + \frac{n}{p} \mathcal{L}(t^{n-1} \eta(t)) = \frac{n}{p} \mathcal{L}(t^{n-1} \eta(t)).$$

Pro $n = 0$ dostáváme:

$$\mathcal{L}\eta(t) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{\exp(-pt)}{p} \right]_0^u = \frac{1}{p} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\exp(-pu)}{p} = \frac{1}{p}$$

a užitím rekurentního vztahu celkově dostaneme:

$$\mathcal{L}(t^n \eta(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

□

Podobně jako u Fourierovy transformace shrneme základní vlastnosti do jedné věty, která má podobu tabulky a místo dokazování jednotlivých tvrzení (některá jsou zřejmá) budeme tyto vlastnosti ilustrovat na výpočtu některých důležitých obrazů. Poznamenejme, že pro funkce $f(t)$, $g(t)$, které jsou nulové pro záporný argument (jsou originálem Laplaceovy transformace), je dříve uvedený integrál definující konvoluci modifikován na vztah:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Věta 4.18. Předpokládejme, že platí $F(p) = \mathcal{L}f(t)$, $G(p) = \mathcal{L}g(t)$. Nechť $r > 0$, $\omega \in \mathbb{C}$ jsou konstanty. Dále nechť $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ a $f^{(i)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(i)}(t)$. Potom platí následující tvrzení.

	<i>Tvrzení o</i>	<i>Předmět</i>	<i>Obraz</i>
1.	<i>linearitě</i>	$af(t) + bg(t)$	$aF(p) + bG(p)$
2.	<i>podobnosti</i>	$f(rt)$	$\frac{1}{r}F\left(\frac{p}{r}\right)$
3.	<i>posunutí obrazu</i>	$e^{at}f(t)$	$F(p - a)$
4.	<i>posunutí předmětu vpravo</i>	$f(t - r)\eta(t - r)$	$e^{-rp}F(p)$
5.	<i>posunutí předmětu vlevo</i>	$f(t + r)\eta(t)$	$e^{rp}F(p) - \int_0^r e^{-pt}f(t) dt$
6.	<i>derivaci předmětu</i>	$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
7.	<i>2. derivaci předmětu</i>	$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
8.	<i>3. derivaci předmětu</i>	$f'''(t)$	$p^3F(p) - p^2f(0^+) - pf'(0^+) - f''(0^+)$
9.	<i>n-té derivaci předmětu</i>	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0^+) p^{n-1-i}$
10.	<i>derivaci obrazu</i>	$tf(t)$	$-F'(p)$

<i>Tvrzení o</i>	<i>Předmět</i>	<i>Obraz</i>
11.	<i>derivaci podle parametru α</i>	$f'_\alpha(t, \alpha)$ $F'_\alpha(p, \alpha)$
12.	<i>integraci předmětu</i>	$\int_0^t f(\tau) d\tau$ $\frac{F(p)}{p}$
13.	<i>násobné integraci předmětu</i>	$\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \dots dt_1 dt_1$ $\frac{F(p)}{p^n}$
14.	<i>integraci obrazu</i>	$\frac{f(t)}{t}$ $\int_p^\infty F(z) dz$
15.	<i>konvoluci předmětu</i>	$f(t) * g(t)$ $F(p)G(p)$
16.	<i>Duhamelův vzorec</i>	$f(0^+)g(t) + f'(t) * g(t)$ $pF(p)G(p)$

Příklad 4.19. Odvoďte vztah příkladu 4.17 3. pomocí tvrzení 9. tabulky uvedené v předcházející větě.

Řešení. Obraz funkce $f(t) = t^n$ je možné určit pomocí funkčních hodnot derivací této funkce:

$$f^{(n)}(t) = n!, \quad f^{(i)}(0) = 0 \quad \text{pro } i = 0, \dots, n-1.$$

Užitím tvrzení o n -té derivaci funkce dostáváme:

$$\frac{n!}{p} = \mathcal{L}((t^n)^{(n)}) = p^n \mathcal{L}t^n - \sum_{i=0}^{n-1} (t^n)^{(i)} \Big|_{t=0^+} p^{n-1-i} = p^n \mathcal{L}t^n - 0 \Rightarrow \mathcal{L}t^n = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

□

Příklad 4.20. Pomocí tvrzení uvedených v předcházející tabulce odvoďte Laplaceovy obrazy funkcí $\sin at$, $\cos at$, $t \cos at$.

Řešení. Nejdříve určíme obraz funkce $\cos at$ užitím linearity (1.) a užitím Eulerova vzorce:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \cos at &= \mathcal{L} \frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2} = \frac{\mathcal{L}e^{jat} + \mathcal{L}e^{-jat}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - ja} + \frac{1}{p + ja} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p + ja + (p - ja)}{p^2 + a^2} = \frac{p}{p^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Laplaceův obraz funkce $\sin at$ bychom mohli získat obdobně. Druhou možností je využití předchozího výsledku a tvrzení o derivaci předmětu dostáváme:

$$-a \mathcal{L} \sin at = \mathcal{L}(\cos at)' = p \mathcal{L} \cos at - \cos 0 = p \cdot \frac{p}{p^2 + a^2} - 1 = \frac{-a^2}{p^2 + a^2} \Rightarrow \mathcal{L} \sin at = \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

Derivací obrazu funkce $\sin at$ podle parametru a (11.) odvodíme Laplaceův obraz funkce $t \cos at$:

$$\mathcal{L}(t \cos at) = \mathcal{L} \frac{\partial \sin at}{\partial a} = \frac{\partial \frac{a}{p^2+a^2}}{\partial a} = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}.$$

Stejný výsledek získáme také aplikací derivace obrazu (10.) na obraz funkce $\cos at$:

$$\mathcal{L}(t \cos at) = -\frac{\partial \frac{p}{p^2+a^2}}{\partial p} = -\frac{p^2 + a^2 - p2p}{(p^2 + a^2)^2} = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}.$$

□

Příklad 4.21. Pomocí tvrzení uvedených v předcházející tabulce odvoďte Laplaceovy obrazy funkcí $e^{at} \sinh bt$, $e^{at} \cosh bt$.

Řešení. Nejdříve určíme obraz funkce $\cosh bt$ a $\sinh bt$ užitím linearitu (1.) a definice obou funkcí:

$$\mathcal{L} \cosh bt = \mathcal{L} \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2} = \frac{\mathcal{L}e^{bt} + \mathcal{L}e^{-bt}}{2j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p+b} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+b + (p-b)}{p^2 - b^2} = \frac{p}{p^2 - b^2}.$$

$$\mathcal{L} \sinh bt = \mathcal{L} \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2} = \frac{\mathcal{L}e^{bt} - \mathcal{L}e^{-bt}}{2j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-b} - \frac{1}{p+b} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{p+b - (p-b)}{p^2 - b^2} = \frac{b}{p^2 - b^2}.$$

U obou rovností nyní využijeme posunutí obrazu (3.) a dostáváme:

$$\mathcal{L} e^{at} \sinh bt = \frac{b}{(p-a)^2 - b^2} \qquad \mathcal{L} e^{at} \cosh bt = \frac{p-a}{(p-a)^2 - b^2}.$$

□

Dále ukážeme, že při stanovení obrazu periodického předmětu, přesněji platí $f(t+T) = f(t)$ pro $t > 0$ stačí určit obraz první periody $f_T(t) = f(t) - f(t)\eta(t-T)$ v intervalu $[0, T]$ a mimo tento interval nulovou. Dále označme $\mathcal{L} f(t) = F(p)$, $\mathcal{L} f_T(t) = F_T(p)$. Po aplikaci Laplaceovy transformace na tuto rovnost s využitím tvrzení o posunutí předmětu odvodíme:

$$F(p) = \int_0^T f(t) \exp(-tp) dt + \int_T^\infty f(t) \exp(-tp) dt = F_T(p) + \exp(-Tp)F(p).$$

Po úpravě tohoto vztahu dostáváme:

Věta 4.22 (větu o obrazu periodické funkce). *Nechť funkce $f(t)$ je originálem a navíc je periodická s periodou T . Potom platí*

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - \exp(-Tp)}. \qquad (4.20)$$

Příklad 4.23. Nalezněte Laplaceovy obrazy dvou technicky významných funkcí a sice jednocestného usměrnění $f_1(t) = \max(\sin t, 0)$ a dvoucestného usměrnění $f_2(t) = |\sin t|$.

Řešení. V obou případech je nutné určit Laplaceův obraz funkce

$$f(t) = \eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t,$$

která je nenulová pouze v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\pi \sin t \exp(-pt) dt = \left[-\frac{\exp(-pt)(\cos t + p \sin t)}{p^2 + 1} \right]_0^\pi = \frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}.$$

1. Funkce f_1 má periodu 2π a užitím předchozí věty dostáváme

$$\mathcal{L}f_1 = \frac{\frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}}{1 - \exp(-2\pi p)} = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}$$

2. Funkce f_2 má periodu π a stejný obraz základní periody. Užitím předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f_2 &= \frac{\frac{1 + \exp(-\pi p)}{(p^2 + 1)}}{1 - \exp(-\pi p)} = \frac{1}{(p^2 + 1)} \cdot \frac{1 + \exp(-\pi p)}{1 - \exp(-\pi p)} = \\ &= \frac{1}{(p^2 + 1)} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\pi p}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\pi p}{2}\right)}{\exp\left(\frac{\pi p}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\pi p}{2}\right)} = \frac{1}{(p^2 + 1)} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{\pi p}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi p}{2}\right)} = \frac{1}{(p^2 + 1)} \coth\left(\frac{\pi p}{2}\right). \end{aligned}$$

□

Dalším typem hledaných Laplaceových obrazů jsou obrazy předmětů, které nejsou originálem Laplaceovy transformace, jako je např. Diracova distribuce. Při hledání těchto obrazů postupujeme podobně jako u Fourierovy transformace. Využijeme toho, že takovýto předmět je limitou předmětů, jež jsou originály Laplaceovy transformace. Laplaceovou transformací těchto předmětů dostaneme posloupnost, jejíž limita je obrazem hledaného předmětu. Podobně jako u Fourierovy transformace lze u hledání obrazu Diracova impulsu a jeho derivací využít tzv. filtrační vlastnost tj.

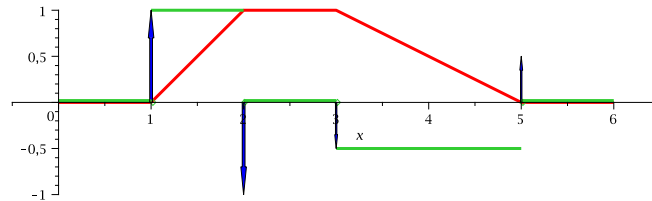
$$\mathcal{L}\delta(t - t_0) = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-pt} dt = e^{-t_0p}, \quad (4.21)$$

$$\mathcal{L}\delta^{(n)}(t - t_0) = \int_0^{\infty} \delta^{(n)}(t - t_0)e^{-pt} dt = (-1)^n (e^{-pt})^{(n)} \Big|_{t=t_0} = p^n e^{-t_0p}. \quad (4.22)$$

Uvedme jednu možnost využití obrazu Diracova impulsu při hledání obrazů některých funkcí. Příkladem může být funkce definovaná pro různé intervaly různým předpisem tak, že zobecněná derivace dostatečně velkého řádu této funkce je ve tvaru lineární kombinace Diracova impulsu a jeho derivací. V těchto případech můžeme Laplaceův obraz určit i bez analytického zápisu této funkce pouze s využitím tvrzení o integraci předmětu a znalosti obrazu zobecněné derivace této funkce.

Příklad 4.24. Nalezněte obraz funkce popisující lichoběžníkový impuls definovaný pomocí funkce f ,

$$f(t) = \begin{cases} t - 1, & \text{pro } t \in \langle 1, 2 \rangle; \\ 1, & \text{pro } t \in \langle 2, 3 \rangle; \\ -t/2 + 5/2, & \text{pro } t \in \langle 3, 5 \rangle; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Řešení. Na obrázku je zobrazen graf funkce f spolu s její první a druhou derivací. Druhá derivace je zobecněnou derivací a je všude nulová kromě lineární kombinací Diracových impulsů:

$$f''(t) = \delta(t - 1) - \delta(t - 2) - \frac{1}{2}\delta(t - 3) + \frac{1}{2}\delta(t - 5).$$

Aplikací Laplaceovy transformace dostáváme rovnici

$$p^2 F(p) = \mathcal{L} f''(t) = e^{-p} - e^{-2p} - \frac{1}{2}e^{-3p} + \frac{1}{2}e^{-5p},$$

odkud jednoduchou úpravou získáme obraz $F(p)$ funkce $f(t)$,

$$F(p) = \frac{2e^{4p} - 2e^{3p} - e^{2p} + 1}{2p^2 e^{5p}}.$$

□

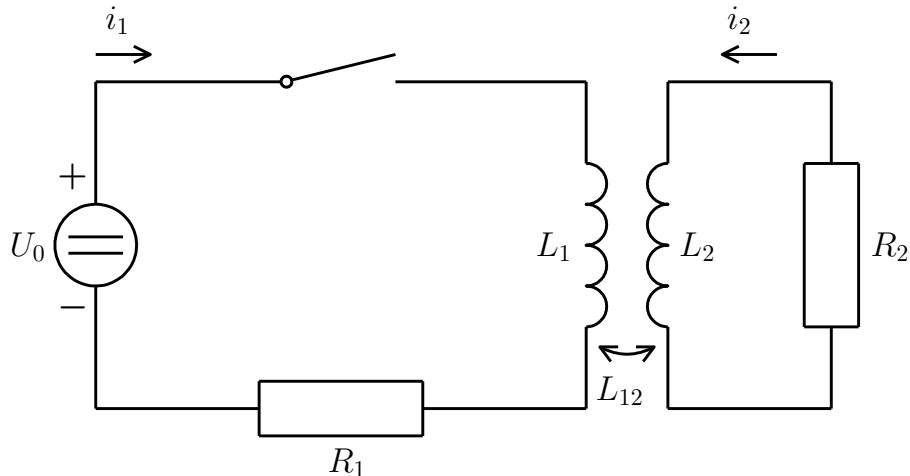
Před „náročnější“ částí věnované inverzní Laplacevě transformaci si jako motivaci Laplaceovou transformací nalezneme řešení následujícího systému diferenciálních rovnic.

Příklad 4.25. Nalezněte neznámé funkce $i_1(t)$, $i_2(t)$ určené počátečními podmínkami $i_1(0) = i_2(0) = 0$ vyhovují systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}i_1'(t) + i_1(t) + \frac{1}{2}i_2'(t) &= \eta(t), \\ \frac{1}{2}i_1'(t) + i_2'(t) + i_2(t) &= 0.\end{aligned}$$

Tato úloha může být interpretována jako nalezení proudů $i_1(t)$, $i_2(t)$ dvou induktivně vázaných obvodů, přičemž jsou indukčně svázány dvě cívky o stejné indukci 1 a induktivní vazba mezi cívkami je $1/2$. Primární obvod (proud je označen $i_1(t)$) je tvořen výše zmíněnými indukčně svázanými cívkami a ohmickým odporem o velikosti 1 a druhý obvod je tvořen kromě indukčně svázaných cívek ještě ohmickým odporem o velikosti 1. V čase $t = 0$ připojíme k primárnímu obvodu napětí mající průběh jednotkového skoku $\eta(t)$.

Počáteční podmínky jsou nulové, což znamená, že v čase $t = 0$ je energie magnetického pole cívek nulová.



Volba konkrétních hodnot je $R_1 = R_0 = L_1 = L_2 = 1$, $l_{12} = 1/2$. Z Laplaceovova obrazu této soustavy,

$$(1 + p)I_1(p) + \frac{p}{2}I_2(p) = \frac{1}{p},$$

$$\frac{p}{2}I_1(p) + (1 + p)I_2(p) = 0,$$

můžeme snadno určit funkce $I_1(p)$, $I_2(p)$ (například užitím Cramerova pravidla):

$$I_1(p) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{p} & \frac{p}{2} \\ 0 & (1+p) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+p) & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & (1+p) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{p}(1+p)}{(1+p)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \frac{4p+4}{p(3p^2+8p+4)}.$$

$$I_2(p) = \frac{\begin{vmatrix} (1+p) & \frac{1}{p} \\ \frac{p}{2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+p) & \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} & (1+p) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{p}{2} \frac{1}{p}}{(1+p)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \frac{-2}{p(3p^2+8p+4)}.$$

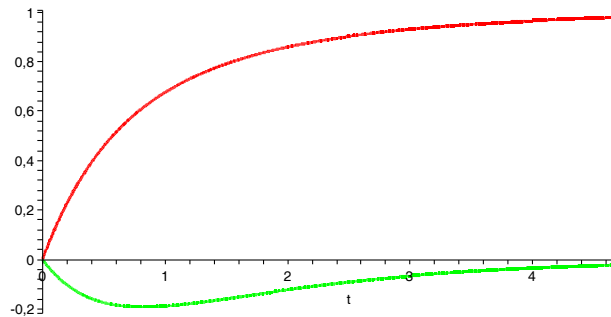
Při hledání proudů $i_1(t)$, $i_2(t)$ zjednodušíme situaci tím, že rozložíme funkci $I_1(p)$ na součet dvou zlomků a zlomky upravíme, tak abychom dostali obrazy z příkladů 4.21 a 4.17.

$$I_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{3p+4}{3p^2+8p+4} = \frac{1}{p} - \frac{p+\frac{4}{3}}{\left(p+\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}, \quad I_2(p) = -\frac{\frac{2}{3}}{\left(p+\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

Nyní ke každému zlomku najdeme vzor.

$$i_1(t) = 1 - \exp\left(-\frac{4}{3}t\right) \cosh\left(\frac{2}{3}t\right) \quad i_2(t) = -\exp\left(-\frac{4}{3}t\right) \sinh\left(\frac{2}{3}t\right).$$

Chování daného obvodu popisují grafy řešení $i_1(t)$, $i_2(t)$.



$$i_1(t) \rightarrow 1, \quad i_2(t) \rightarrow 0$$

Jednoznačnost takto nalezeného řešení je dále v textu řešena ve Větě 4.28. Tento příklad dokládá důležitost inverzní Laplaceovy transformace, jež často je nejobtížnější částí řešení příkladů tohoto typu. Uvedeme vlastnosti obrazů originálu Laplaceovy transformace.

Věta 4.26. *Nechť funkce $F(p)$ je obrazem originálu Laplaceovy transformace, potom platí (tzv. nutné podmínky):*

1. *Existuje číslo ξ_1 tak, že $F(p)$ je regulární funkcí komplexní proměnné v polorovině $\Re p > \xi_1$.*
2. *V polorovině $\Re p \geq \xi_2$, kde $\xi_2 > \xi_1$, platí: $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.*
3. *V oblasti $|p| < k \Re p$, kde $k > 1$, existuje konečná limita $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ ($\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$).*

Poznámka 4.27. Poznamenejme, že budeme pracovat i s funkcemi, které uvedené podmínky nesplňují a nejsou obrazy v klasickém slova smyslu, zejména se jedná o obraz Diracovy funkce. Podmínky uvedené ve větě jsou pouze nutné, ale ne postačující.

Podmínky existence inverzní transformace (její definice) určuje násl. věta.

Věta 4.28. *Nechť vzory $f_1(t)$, $f_2(t)$ mají stejný Laplaceův obraz, tj. $\mathcal{L} f_1(t) = \mathcal{L} f_2(t)$. Potom platí*

$$\int_0^{\infty} |f_1(t) - f_2(t)| dt = 0.$$

4.7 Zpětná Laplaceova transformace

Pro dva originály se stejným obrazem platí, že mohou lišit pouze hodnotami v izolovaných bodech, ve kterých alespoň jeden z nich není spojitý. Proto nazýváme zobrazení, jež funkci komplexní proměnné F , k níž existuje originál Laplaceovy transformace, přiřadí takový originál $f(t)$, který v každém bodě nespojitosti t_0 splňuje

$$f(t_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \right),$$

inverzní Laplaceovu transformací. Tuto skutečnost zapisujeme $\mathcal{L}^{-1}F(p) = f(t)$.

Obdobně postupujeme i u inverzní Laplaceovy transformace Diracovy distribuce a její derivace. Nejjednodušší situace je při hledání vzoru k racionální lomené funkci

Zpětná transformace racionální lomené funkce

Postup je velmi jednoduchý a spočívá v rozkladu racionální lomené funkce (RLF) na součet parciálních zlomků (procvičovalo se v BMA1 při integraci).

V případě kdy se jedná o zlomek se jmenovatelem ve tvaru kvadratického trojčlenu (v reálném oboru nerozložitelném) v první mocnině je vhodné tento zlomek upravit na součet obrazů funkcí \sin a \cos :

$$\frac{Ap + B}{(p + a)^2 + b^2} = \frac{A(p + a)}{(p + a)^2 + b^2} + \frac{B - Aa}{(p + a)^2 + b^2} = A\mathcal{L}e^{-at} \cos bt - \frac{B - Aa}{b}\mathcal{L}e^{-at} \sin bt,$$

přičemž bylo použito tvrzení o posunutí obrazu na výsledky Příkladu 4.20.

Místo uvádění vzorců, které mohou za určitých předpokladů urychlit výpočet (např. polynom ve jmenovateli má jednoduché kořeny), je vhodné upozornit, že v literatuře je možné dohledat rozsáhlé slovníky transformace.

Nutná a postačující podmínka, aby racionální lomená funkce $F(p)$ byla obrazem originálu, je předpoklad, že funkce $F(p)$ je ryze lomená, tj. stupeň polynomu ve jmenovateli je větší než stupeň polynomu v čitateli.

Není-li uvedená funkce ryzí je možné ji vyjádřit ve tvaru součtu polynomu a ryzí racionálně lomené funkce. Polynom má vzor ve tvaru lineární kombinace diracova impulsu a je ho derivací 4.16, 4.17 Celý postup zahrnující rozklad na parciální zlomky budeme ilustrovat na následujícím příkladu.

Příklad 4.29. Vypočtěte $\mathcal{L}^{-1} \frac{p^3 - p^2 + p + 1}{(p - 1)^2 (p^2 + 1)}$.

Řešení. Předpokládaný tvar rozkladu bude

$$\frac{p^3 - p^2 + p + 1}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = \frac{A}{p - 1} + \frac{B}{(p - 1)^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 1}.$$

Po formálním součtu na pravé straně porovnááme čitatele obou zlomků, tj.

$$\frac{p^3 - p^2 + p + 1}{(p^2 + 1)(p - 1)^2} = \frac{A(p - 1)(p^2 + 1) + B(p^2 + 1) + (Cp + D)(p - 1)^2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2}.$$

Rovnice, ze kterých určíme hledané konstanty A , B , C , D , můžeme získat buď porovnáním funkčních hodnot nebo porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné p . První dvě rovnice získáme porovnáním funkčních hodnot pro $p = 1$, $p = 0$, další dvě rovnice porovnáním koeficientů u mocnin p^3 , p , tj.

$$\begin{aligned} 2 &= 2B, \\ 1 &= -A + B + D, \\ 1 &= A + C, \\ 1 &= A + C - 2D. \end{aligned}$$

Tento systém má řešení $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$. Jestliže máme k dispozici rozklad je další výpočet jednoduchý. Obvykle využijeme vzorců pro nalezení předmětů. V tomto případě můžeme využít i výsledků z Příkladu 4.17 a z Příkladu 4.20:

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{p^3 - p^2 + p + 1}{(p^2 + 1)(p - 1)^2} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(p - 1)^2} + \mathcal{L}^{-1} \frac{p}{p^2 + 1} = \eta(t)(te^{-t} - \cos t).$$

□

Uvedené metody lze použít i na funkce, které mají jednotlivé parciální zlomky násobené výrazy typu e^{rp} . Při hledání jejich vzorů využijeme větu o posunutí obrazu (3.).

Integrační tvar inverzní transformace

Integrační tvar Laplaceovy transformace vychází z Fourierova integrálu, protože z faktu, že funkce $f(t)$ má index růstu s_0 , plyne její konvergence. Následující věta popisuje praktický postup.

Věta 4.30. *Nechť funkce $F(p)$ je holomorfní všude s výjimkou izolovaných singularit p_1, \dots, p_n ležících v polorovině $\Re p < s$. Nechť funkce $F(p)$ konverguje stejnoměrně k nule na libovolné posloupnosti kružnic*

$|p| = R_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$. Potom pro konvergentní integrál $\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} |F(p)e^{pt}| dp$ platí

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p)e^{pt} dp = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \operatorname{rez}(F(p) \exp pt) & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Užití této věty je v následujícím příkladu. Pro srovnání určíme pomocí reziduí předmět k funkci z příkladu 4.29.

Příklad 4.31. Určete vzor k funkci $F(p) = \mathcal{L}^{-1} \frac{p^3 - p^2 + p + 1}{(p^2 + 1)(p - 1)^2}$.

Řešení. Tato funkce splňuje předpoklady věty. Má tři singulární body, jeden pól $p_1 = 1$ druhého řádu a dvojici komplexně sdružených pólů $p_{2,3} = \pm j$. Vypočteme jednotlivá rezidua funkce $F(p)e^{pt}$

$$\begin{aligned} \operatorname{rez}_{p=1} \frac{p^3 - p^2 + p + 1}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{(p^3 - p^2 + p + 1)e^{pt}}{(p^2 + 1)} \right)' = \\ &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{(3p^2 - 2p + 1)(p^2 + 1) - (p^3 - p^2 + p + 1)2p}{(p^2 + 1)^2} e^{pt} + \frac{p^3 - p^2 + p + 1}{(p^2 + 1)} e^{pt} t = e^{-t} t, \\ \operatorname{rez}_{p=\pm j} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} e^{pt} &= \lim_{p=\pm j} \frac{2e^{pt}}{(p \pm j)(p + 1)^2} = \frac{2e^{\pm jt}}{(\pm 2j)(\pm 2j)} = -\frac{e^{\pm jt}}{2}, \end{aligned}$$

a dostáváme funkci $f(t)$:

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{(p^2 + 1)(p + 1)^2} = e^{-t}(1 + t) - \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = e^{-t}t - \cos t.$$

□

Poznámka 3. Uvedenou větu lze formulovat i v podstatně silnějším znění [9]. Například může být reziduí nekonečně mnoho a jejich suma je nahrazena nekonečnou řadou, kde rezidua sčítáme podle velikosti jejich modulu. Tamtéž je použití této věty při hledání předmětu, který je T periodický; to jest funkce $F(p)$ je součinem a jeden činitel je zlomek $\frac{1}{1 - e^{-pT}}$. Tento zlomek má nekonečně mnoho jednoduchých pólů. Dále je třeba poznamenat, že předpoklady této věty nejsou splněny ani u jednoduchých funkcí. Například u funkce $R(p)e^{at}$ ($R(p)$ je racionální lomená funkce) postupujeme tak, že nalezneme předmět racionální lomené funkce $R(p)$ a použijeme větu o translaci. Další možností je využít vyjádření předmětu ve tvaru konvoluce.

Dalším „speciálním“ případem je obraz, který je nulový a holomorfní v nekonečnu.

Věta 4.32. 1. *Heavivideova věta o rozkladu.* Nechť lze funkci $F(p)$ pro $|p| > R > 0$ vyjádřit ve tvaru konvergentní řady:

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Potom platí:

$$\mathcal{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

Užitečnost této budeme demonstrovat na následujícím příkladu

Příklad 4.33. Pomocí předchozí věty ukažte, že platí $\mathcal{L} \left(\frac{\sin t}{t} \right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{p}$.

Řešení. Uvedenou rovnost získáme porovnáním rozvoje obou funkcí. Funkce $\sin t$ má Taylorovu řadu se středem v $t_0 = 0$ ve tvaru $\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$ odtud plyne rozvoj funkce

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$$

Taylorovu řadu funkce $\operatorname{arctg} t$ lze získat integrací geometrické řady $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}$. Platí tedy

$$\operatorname{arctg} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} \Leftrightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{p^{2k+1}}.$$

V obou řadách máme $a_n = \begin{cases} 0, & \text{pro sudé } n = 2k; \\ \frac{(-1)^n}{2n+1}, & \text{pro liché } n = 2k+1. \end{cases}$ Funkce arctg je funkcí komplexní a v odvozené rovnosti je brána pouze hlavní větev ve shodě se vzorcem (3.19). \square

Poznamenejme, že uvedený příklad může být vhodnou ukázkou použití Heavisideovy věty v obou směrech, neboť funkce $\frac{\sin t}{t}$ má transcendentní integrál a naopak funkce $\operatorname{arctg} \frac{1}{p}$ má v počátku podstatnou singularitu.

4.8 Souvislost Fourierovy a Laplacevy transformace

Při odvozování integrálního vyjádření inverzní Laplaceovy transformace jsme ukázali, že Laplaceův obraz funkce $f(t)$ je ekvivalentní souboru Fourierových obrazů funkcí $f(t)e^{-st}$, kde $s > s_0$. Z toho plynou některé následující důsledky.

Fourierovy obrazy lze někdy počítat pomocí Laplaceových obrazů, které se snáze počítají, neboť to jsou holomorfní funkce. Je-li funkce $f(t)$ je nulová pro $t < 0$ a obraz Fourierovy transformace existuje, potom je funkce $f(t)$ Laplaceovy a Fourierův obraz dostaneme tak, že v Laplaceovu obrazu za p dosadíme $p = j\omega$:

$$\mathcal{F}f(t) = F(\omega) = \mathcal{L}f(t)|_{p=j\omega}$$

Jestliže naopak je funkce $f(t)$ pro $t < 0$ je nenulová a má obraz Fourierovy transformace, označíme $f^+(t)$ zúžení funkce $f(t)$ na $\langle 0, \infty \rangle$ a $f^-(t) = f(-t)$ pro $t \in \langle 0, \infty \rangle$. Předpokládejme, že navíc jejich Laplaceovy obrazy $F_1(p) = \mathcal{L}f^+(t)$, $F_2(p) = \mathcal{L}f^-(t)$ existují. Potom platí

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(-t)e^{j\omega t} dt = F_1(j\omega) + F_2(-j\omega).$$

Užití této identity umožní v návaznosti na výsledek Příkladu 4.33 určit Fourierův obraz funkce $\frac{\sin t}{t}$.

Uvážíme, že funkce $\frac{\sin t}{t}$ je sudá a dostáváme:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{j\omega} + \operatorname{arctg} \frac{-1}{j\omega}.$$

S použitím vzorce (3.19) dostáváme rovnost

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = -\frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + j\frac{1}{j\omega}}{1 - j\frac{1}{j\omega}} - \frac{j}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + j\frac{-1}{j\omega}}{1 - j\frac{-1}{j\omega}} = -\frac{j}{2} \left(\operatorname{Ln} \frac{\omega + 1}{\omega - 1} + \operatorname{Ln} \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \right).$$

Pro reálnou proměnnou ω nastávají dvě možné varianty

1. $|\omega| > 1$, z čehož plyne $\frac{\omega - 1}{\omega + 1} > 0$ a dané logaritmy jsou reálnými funkcemi, které se vzájemně sečtou na 0, neboť jejich argumenty jsou převrácenými hodnotami.
2. $|\omega| < 1$ z čehož plyne $\frac{\omega - 1}{\omega + 1} < 0$ a pro dané logaritmy platí:

$$\operatorname{Ln} \frac{\omega + 1}{\omega - 1} + \operatorname{Ln} \frac{\omega - 1}{\omega + 1} = \ln \left| \frac{\omega + 1}{\omega - 1} \right| + j\pi + \ln \left| \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \right| + j\pi = 2j\pi,$$

neboť se reálné logaritmy odečtou ze stejného důvodu jako v prvním případě.

Celkově dostáváme funkci, které je nulová pro $t \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$ a v intervalu $(-1, 1)$ rovna $-\frac{j}{2}2j\pi = \pi$:

$$\mathcal{F} \left(\frac{\sin t}{t} \right) = \pi(\eta(\omega + 1) - \eta(\omega - 1)).$$

4.9 Užití Laplaceovy transformace k řešení rovnic

Laplaceova transformace se s výhodou používá k řešení diferenciálních, integro-diferenciálních rovnic a jejich soustav, zejména při hledání řešení Cauchyho počáteční úlohy. Je-li cílem nalezení obecného řešení

integro-diferenciální rovnice, dosadíme za počáteční podmínky obecné konstanty a popsáním postupem získáme obecné řešení.

V následujících ukázkách budeme postupovat od jednodušších příkladů ke složitějším, navíc budeme při hledání předmětu užívat různé možnosti jeho nalezení.

Příklad 4.34. Nalezněte řešení diferenciální rovnice $x''(t) - \int_0^t x(s)ds = 26e^{3t} + 4$ určené počátečními podmínkami $x(0) = 6$, $x'(0) = 12$.

Řešení. Nejdříve nalezneme obraz rovnice:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x''(t) - \mathcal{L} \int_0^t x(s)ds &= \mathcal{L}26e^{3t} + \mathcal{L}4 \\ p^2 X(p) - 6p - 12 - \frac{X(p)}{p} &= \frac{26}{p-3} + \frac{4}{p} = \frac{30p-12}{(p-3)} \\ X(p) \frac{p^3-1}{p} &= \frac{30p-12}{(p-3)} + 6p + 12 = 6 \frac{p^3-p^2-p-2}{(p-3)p} = \frac{(p-2)(p^2+p+1)}{(p-3)p} \\ X(p) &= \frac{6(p-2)(p^2+p+1)}{(p-3)(p^3-1)} = \frac{6(p-2)}{(p-3)(p-1)} \end{aligned}$$

Rovnici vyřešíme vzhledem k $X(p)$ a získanou racionální lomenou funkcí rozložíme na součet parciálních zlomků :

$$X(p) = \frac{6(p-2)}{(p-3)(p-1)} = \frac{3}{p-3} + \frac{3}{p-1}.$$

Předmět nalezneme pomocí vzorce pro obraz funkce t^n spolu s tvrzením o posunutí obrazu:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-3} \left\{ \frac{1}{p-3} + \frac{3}{p-1} \right\} = 3e^{3t} + 3e^t.$$

□

Příklad 4.35. Nalezněte řešení systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_2'' - 2y_1' + y_2' - y_1 &= 2t^2 + 2t + f(t) \\ y_2' - 2y_1 &= t^2, \end{aligned}$$

určené počátečními podmínkami $y_1(0) = 0$, $y_2'(0) = y_2(0) = 0$, kde $f(t)$ je libovolná spojitá funkce splňující $f(0) = 0$.

Řešení. Budeme postupovat analogicky s předcházející ukázkou. Nejdříve určíme obraz systému rovnic ($f(t) \leftrightarrow F(p)$):

$$\begin{aligned} p^2 Y_2 - 2pY_1 + pY_1 + pY_2 - Y_1 &= \frac{4}{p^3} + \frac{2}{p^2} + F(p), \\ pY_2 - 2Y_1 &= \frac{2}{p^3}. \end{aligned}$$

Vzhledem k proměnným Y_1 , Y_2 jsme získali systém dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned}(-2p - 1)Y_1 + Y_2(p^2 + p) &= \frac{4}{p^3} + F(p), \\ -2Y_1 + pY_2 &= \frac{2}{p^3},\end{aligned}$$

jehož řešení můžeme získat pomocí Cramerova pravidla:

$$Y_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{p^3} + \frac{2}{p^2} + F(p) & p(p+1) \\ \frac{2}{p^3} & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2p-1 & p(p+1) \\ -2 & p \end{vmatrix}} = \frac{\frac{4}{p^2} + \frac{2}{p} + pF(p) - \frac{2}{p} - \frac{2}{p^2}}{\underbrace{-2p^2 - p + 2p^2 + 2p}_p} = \frac{2}{p^3} + F(p),$$

$$Y_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2p-1 & \frac{4}{p^3} + \frac{2}{p^2} + F(p) \\ -2 & \frac{2}{p^3} \end{vmatrix}}{p} = \frac{-\frac{4}{p^2} - \frac{2}{p^3} + \frac{8}{p^3} - \frac{4}{p^2} + 2F(p)}{p} = \frac{6}{p^4} + 2\frac{F(p)}{p}.$$

Dále použijeme vzorec pro obraz funkce t^n spolu s tvrzením o integrálu předmětu dostáváme:

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p^3} + \frac{F(p)}{2} \right\} = t^2 + f(t),$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{p^4} + 2 \frac{F(p)}{p} \right\} = t^3 + 2 \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

□

Předmět k obrazu $F(p)/p$, v němž je blíže neurčená funkce, jsme získali podle tvrzení o integraci předmětu. Stejný výsledek bychom získali podle tvrzení o konvoluci předmětů. Funkce $1/p$ má předmět Heavisideovu funkci jednotkového skoku a $F(p)$ funkci $f(t)$. Vyjádření předmětu ve tvaru konvolučního integrálu je postup mnohem využitelnější. V dalším příkladu tohoto obratu využijeme při řešení diferenciální rovnice s periodickou pravou stranou.

Příklad 4.36. Řešte diferenciální rovnici $y' + y = f(t) = \max(\sin t, 0)$ spolu s nulovými počátečními podmínkami $y(0) = 0$.

Řešení. S využitím Příkladu 4.23 získáme snadno Laplaceův obraz rovnice a obraz řešení

$$pY(p) + Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}, \quad Y(p) = \frac{1}{(p + 1)(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}.$$

Funkci $Y(p)$ je možné chápat jako součin dvou funkcí

$$\frac{1}{p + 1} \cdot \frac{1}{(p^2 + 1)(1 - \exp(-\pi p))}$$

se známými předměty. Využitím tvrzení o konvoluci předmětů můžeme řešení formálně vyjádřit ve tvaru konvolučního integrálu:

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \max(\sin \tau, 0) d\tau.$$

Velice často, např. při studiu asymptotického chování řešení rovnice, je vhodnější jiný zápis tohoto řešení ve tvaru součtu periodické a neperiodické složky. Předpokládejme, že takovýto postup je možný a obraz řešení má tvar:

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)(1-\exp(-\pi p))} = \frac{A}{p+1} + \frac{G_{2\pi}(p)}{1-\exp(-2\pi p)},$$

kde druhý sčítanec je obrazem periodické složky. Vzhledem k periodicitě pravé strany $f(t) = \max(\sin t, 0)$ rovnice očekáváme periodu 2π pro tuto periodickou složku řešení. Proto, s využitím tvrzení o obrazu periodické funkce, je obrazem této složky řešení zlomek, který ve jmenovateli obsahuje rozdíl $1 - \exp(-2\pi p)$ a čítec je obrazem jediného impulsu $G_{2\pi}(p)$. Po vynásobení rovnice výrazem $1 - \exp(-2\pi p)$ dostáváme

$$\frac{1}{p+1} \cdot \frac{1 + \exp(-p\pi)}{(p^2+1)} = \frac{A(1 - \exp(-2\pi p))}{(p+1)} + G_{2\pi}(p).$$

Nyní použijeme inverzní transformaci s tím, že druhý činitel součinu vlevo je předmětem jednoho impulsu $f_{2\pi}(t) = \eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t$ a při stanovení předmětu levé strany rovnice využijeme tvrzení o konvoluci předmětů

$$e^{-t} * (\eta(t) \sin t - \eta(t - \pi) \sin t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f_{2\pi}(\tau) d\tau = A (e^{-t} \eta(t) - e^{-(t-2\pi)} \eta(t - 2\pi)) + g_{2\pi}(t).$$

Protože předměty $f_{2\pi}$, $g_{2\pi}$ jsou pro $t > 2\pi$ nulové dostaneme vztah z něhož určíme A :

$$e^{-t} \frac{e^\pi + 1}{2} = e^{-t} \int_0^\pi e^\tau \sin \tau \, d\tau = Ae^{-t}(1 - e^{2\pi}) \Rightarrow A = \frac{-1}{2(\exp(\pi) - 1)}.$$

Po dosazení za A do rovnice získáme vztah, ze kterého určíme na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ periodickou složku řešení $g_{2\pi}(t)$. V intervalu $0 < t < \pi$ platí:

$$g_{2\pi}(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau \, d\tau + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{1}{2} (e^{-t} + \sin t - \cos t) + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{1}{2} \left(\sin t - \cos t + e^{-t} \frac{e^\pi}{e^\pi - 1} \right).$$

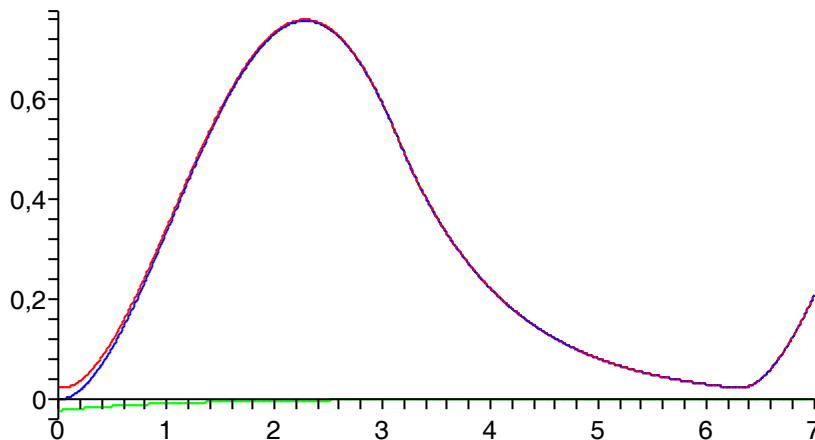
Analogicky dostáváme pro $\pi < t < 2\pi$:

$$g_{2\pi}(t) = \int_0^\pi e^{-(t-\tau)} \sin \tau \, d\tau + \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{(\exp(\pi) - 1)} = \frac{e^{-t}}{2} (e^\pi + 1) + \frac{e^{-t}}{2} \frac{e^\pi}{e^\pi - 1} = \frac{e^{-t}}{2} \frac{e^{2\pi} + e^\pi - 1}{e^\pi - 1}.$$

Řešení $y(t)$ nalezneme ve tvaru součtu

$$y(t) = \frac{1}{2(\exp(\pi) - 1)} e^{-t} + g_{per}(t),$$

kde $g_{per}(t)$ je periodická složka řešení dostatečně popsaná průběhem v základním intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ ($g_{per}(t) = g_{2\pi}(t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$). Vzhledem k tomu, že neperiodická složka $A = \frac{1}{2(\exp(-\pi)-1)}e^{-t}$ nabývá velmi malých hodnot, lze pro dostatečně velká t řešení ztotožnit s periodickou složkou. Toto má i praktický význam. Daná rovnice popisuje tok elektrického proudu v obvodu tvořeném cívku o indukci $L = 1$ a ohmickým odporem $R = 1$, který byl v čase $t = 0$ připojen k jednocestnému usměrněnému napětí. Nalezená periodická složka řešení popisuje potom ustálený stav (**červený graf**), ke kterému se blíží přesné řešení (**modrý graf**), **zelený graf** je neperiodická složka řešení. \square



Poznámka 4. V předcházejícím příkladu byl realizován postup nalezení periodické složky řešení. Podrobněji je tento postup popsán v [9].

V praktických případech často opakovaně řešíme podobné rovnice, kde levá strana je stejná a mění se pouze pravá strana. Budeme-li rovnici interpretovat tak, že její řešení je reakcí nějakého systému na vstup popsaný pravou stranou, je vhodné získat výsledek ve tvaru, kdy je možné pouze dosazovat různé pravé strany. Např. je-li řešením proud v elektrickém obvodu popsaným nějakou lineární integro-diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty $\mathcal{L}(i(t))$ a pravou stranou je nějaké napětí $u(t)$, ke kterému je obvod připojen, znamená to opakovaně řešit rovnici $\mathcal{L}(i(t)) = u(t)$. Z toho plyne, že Laplaceův obraz této rovnice $Y(p)L(p) = U(p)$ má řešení za stejných počátečních podmínek vždy ve tvaru součinu funkcí

$$Y(p) = \frac{1}{L(p)} \cdot U(p).$$

S využitím vlastností konvoluce dvou funkcí $l(t) \leftrightarrow \frac{1}{L(p)}$, $u(t) \leftrightarrow U(p)$ dostáváme řešení

$$i(t) = \int_0^t l(t - \tau)u(\tau)d\tau.$$

Výše uvedená funkce $l(t)$ se v teorii lineárních systémů nazývá **impulsní charakteristika**, protože je tato funkce chápána jako odezva systému na Diracův impuls. Funkce $l(t)$ je totiž Laplaceovým vzorem funkce

$\frac{1}{L(p)}$ a čítec tohoto zlomku je obrazem Diracova impulsu $\delta(t) \leftrightarrow 1$. Stanovit tuto charakteristiku experimentálně je obtížné, neboť se Diracova funkce i přibližně nesnadno aproximuje. Je mnohem jednodušší stanovit charakteristiku $h(t)$ jako reakci systému na Heavisideovu funkci jednotkového skoku:

$$\mathcal{L}(h(t)) = \eta(t) \Leftrightarrow H(p)L(p) = \frac{1}{p}.$$

Tato charakteristika se nazývá **přechodová charakteristika** a umožní s využitím Duhamelova vzorce jiné vyjádření reakce systému $\mathcal{L}(i(t)) = u(t)$ na libovolnou pravou stranu $u(t)$. Platí

$$I(p) = \frac{1}{L(p)}U(p) = p \frac{1}{pL(p)}U(p) = pH(p)U(p)$$

a aplikací zmíněného Duhamelova vzorce dostáváme

$$i(t) = h(t)u(0^+) + h(t) * u'(t) \quad \text{nebo} \quad i(t) = h(0^+)u(t) + h'(t) * u(t).$$

V případě, že se jedné o lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty tj.,

$$\mathcal{L}i(t) = a_n i^{(n)}(t) + a_{n-1} i^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 i'(t) + a_0 i(t),$$

je funkce $L(p)$ charakteristickým polynomem. V tomto případě máme možnost určit předmět $l(t)$ i jinak než jako odezvu na Diracův impuls. Budeme-li uvažovat homogenní systém, tj. systém s nulovou pravou

stranou, a dále konkrétní počáteční úlohu určenou počátečními podmínkami

$$i(0) = 0, \quad i'(0) = 0, \quad \dots, \quad i^{(n-2)}(0) = 0, \quad i^{(n-1)}(0) = 1,$$

dostaneme pro obraz řešení rovnici ve tvaru

$$I(p) = \frac{a_n}{L(p)}.$$

Poslední rovnice je až na násobek a_n obrazem impulsní charakteristiky lineárního systému. Partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice můžeme vyjádřit pomocí konvolučního integrálu, již dříve zavedené váhové funkce. Ta je řešením nehomogenní rovnice (dělená koeficientem a_n) splňující výše uvedené počáteční podmínky.

4.10 Slovník Laplaceovy transformace

Všechny předměty v tabulce jsou násobeny funkcí jednotkového skoku $\eta(t)$ a tuto skutečnost je třeba při práci s tabulkou zohlednit.

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
A	$\frac{A}{p}$	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\cos bt, b \neq 0$	$\frac{p}{p^2+b^2}$	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
$\sin bt, b \neq 0$	$\frac{b}{p^2+b^2}$	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
$\cosh bt, b \neq 0$	$\frac{p}{p^2-b^2}$	$e^{-at} \cosh bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
$\sinh bt, b \neq 0$	$\frac{b}{p^2-b^2}$	$e^{-at} \sinh bt$	$\frac{b}{(p+a)^2-b^2}$

Předmět	Obraz	Předmět	Obraz
$t \cos bt, b \neq 0$	$\frac{p^2 - b^2}{(p^2 + b^2)^2}$	$e^{-at} t \cos bt$	$\frac{(p + a)^2 - b^2}{((p + a)^2 + b^2)^2}$
$t \sin bt, b \neq 0$	$\frac{2bp}{(p^2 + b^2)^2}$	$e^{-at} t \sin bt$	$\frac{2b(p + a)}{((p + a)^2 + b^2)^2}$
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}, b \neq a$	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$	$\frac{e^{at} - \cos bt - \frac{a}{b} \sin bt}{a^2 + b^2}$	$\frac{1}{(p - a)(p^2 + b^2)}$
$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}, b \neq a$	$\frac{p}{(p - a)(p - b)}$	$\frac{ae^{at} - a \cos bt + b \sin bt}{a^2 + b^2}$	$\frac{p}{(p - a)(p^2 + b^2)}$
$(1 + at)e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^2}$	$\frac{a^2 e^{at} + b^2 \cos bt + ab \sin bt}{a^2 + b^2}$	$\frac{p^2}{(p - a)(p^2 + b^2)}$
$\left(t + \frac{at^2}{2}\right) e^{at}$	$\frac{p}{(p - a)^3}$	$\frac{\sin bt - bt \cos bt}{2b^3}$	$\frac{1}{(p^2 + b^2)^2}$

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [Rozvinutí reálné funkce do Fourierovy řady.](#)
2. [Fourierova transformace - hledání obrazu či předmětu k dané funkci.](#)
3. [Laplaceova transformace - hledání obrazu reálné funkce či předmětu komplexní funkce.](#)
4. [Řešení lineární diferenciální rovnice \(až třetího řádu\) s konstantními koeficienty pomocí Laplaceovy transformace.](#)

5 \mathcal{Z} transformace

Analogií integrální transformace je pro posloupnosti \mathcal{Z} transformace. Posloupnosti jsou řešením diferenčních nebo rekurentních rovnic, které se podobně jako pro rovnice integro-diferenciální přetransformují na jednodušší rovnice algebraické. \mathcal{Z} transformace tak tvoří základní nástroj studia diskrétních jevů, signálů atp. .

Uvažujme posloupnost čísel $\{f_n\}$, o níž předpokládáme, že existuje alespoň jedno komplexní číslo $0 \neq z_0 \neq \infty$ takové, že funkční řada

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^n} \quad (5.1)$$

konverguje. Potom řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ je \mathcal{Z} transformovatelná nebo-li **přípustná**. Její součet $F(z)$ je regulární funkce v okolí bodu ∞ a nazýváme ji **obrazem posloupnosti** $\{f_n\}$. Tuto skutečnost zapisujeme

$\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z) \leftrightarrow \{f_n\}$ a k dané posloupnosti $\{f_n\}$ existuje jediný obraz $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z) \leftrightarrow \{f_n\}$ a toto zobrazení nazýváme **Z-transformací**.

Ekvivalentní podmínkou transformovatelnosti posloupnosti je, že posloupnost je \mathcal{Z} transformovatelná právě když je ohraničeného růstu s indexem s , kde s je vhodné číslo, což znamená, že existují konstanty M , s takové, že

$$|f_n| \leq Me^{sn} \text{ pro všechna } n.$$

Příklad 5.1. Snadno vidíme, že posloupnost $\{e^{an}\}$ je ohraničeného růstu s indexem $|a|$, pro libovolné komplexní a . Její obraz nalezneme pomocí součtu geometrické řady.

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{an}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - e^a z^{-1}} = \frac{z}{z - e^a}$$

Pokud bychom tuto posloupnost zapsali ve tvaru $\{\alpha^n\}$ obdrželi bychom výsledek ve tvaru

$$\mathcal{Z}\{\alpha^n\} = \frac{z}{z - \alpha}.$$

Abychom mohli formulovat tvrzení o \mathcal{Z} transformace musíme uvést některé důležité pojmy analogické s pojmy vyskytujícími se ve formulaci podobných vět pro transformace integrální. Důležitým pojmem je konvoluce.

Definice 5.2. Konvolucí posloupností $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ nazýváme posloupnost, kterou značíme $\{f_n * g_n\}$ pro jejíž členy platí vztah

$$f_n * g_n = \sum_{i=0}^n f_{n-i} g_i.$$

Pro přípustné posloupnosti je i jejich konvoluce přípustná posloupnost.

Poznamenejme, že konvoluce posloupností je operace, která je komutativní, distributivní a asociativní.

Příklad 5.3. Spočtěme konvoluci několika jednoduchých posloupností

$\{f_n\}$	$\{g_n\}$	$\{f_n * g_n\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\sum_{i=0}^n 1 = \{n + 1\}$
$\{1\}$	$\{n\}$	$\sum_{i=0}^n i = \{\frac{n}{2}(n + 1)\}$
$\{1\}$	$\{f_n\}$	$\{\sum_{i=0}^n f_i\} = \{s_n\}$ posl. část. součtů
$\{n\}$	$\{f_n\}$	$\{\sum_{i=0}^n (n - i) f_i\} = n(f_n * 1) - (nf_n) * 1$

Pro přirozené číslo k a $\{f_n\}$ řekneme, že posloupnost $\{g_n\} = \{f_{n+k}\}$ vznikla z posloupnosti posunutím o k míst vlevo, jestliže pro její členy g_n platí

$$g_n = f_{n+k} \quad \text{pro} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

O posloupnosti $\{h_n\} = \{f_{n-k}\}$ řekneme, že vznikla z posloupnosti $\{f_n\}$ posunutím o k míst vpravo, jestliže pro její členy h_n platí

$$g_n = \begin{cases} 0, & \text{pro } n=0,1,\dots,k-1; \\ f_{n-k}, & \text{pro } n=k-1,k,\dots \end{cases}$$

Dalším důležitou operací s posloupnostmi vytvoření posloupnosti diferencí k dané posloupnosti. Je-li zadaná posloupnost $\{f_n\}$ potom výraz $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$ nazýváme **první diferencí** a $\{\Delta f_n\}$ **posloupností diferencí**. Diference vyšších řádů definujeme rekurentně pomocí první diference

$$\Delta^k f_n = \Delta(\Delta^{k-1} f_n)$$

a výraz $\Delta^k f_n$ nazýváme **k -tou diferencí** a $\{\Delta^k f_n\}$ **posloupností k -tých diferencí**.

Poznamenejme, že posloupnost diferencí je jako lineární kombinaci posunutých posloupností:

$$\Delta^k y_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_{n+i}. \quad (5.2)$$

Příklad 5.4. Spočtěme diference následující posloupnosti

$$\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \quad f_n = n^2 \quad \text{zadaná posloupnost}$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 16, \dots\} \quad \Delta f_n = 2n + 1 \quad \text{posloupnost prvních diferencí}$$

$$\{2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots\} \quad \Delta^2 f_n = 2 \quad \text{posloupnost druhých diferencí}$$

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\} \quad \Delta^k f_n = 0 \quad \text{posloupnost } k\text{-tých diferencí, kde } k > 2$$

Věta 5.5. Předpokládejme, že posloupnosti $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ jsou ohraničeného růstu. Označme $F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$ a $G(z) = \mathcal{Z}\{g_n\}$, dále $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$ jsou konstanty.

Věta o	předmět	obraz
<i>linearitě</i>	$a\{f_n\} + b\{g_n\}$	$aF(z) + bG(z)$
<i>podobnosti</i>	$\{a^n f_n\}$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$

Věta o	předmět	obraz
<i>posunutí vpravo</i>	$\{f_{n-k}\}$	$z^{-k}F(z)$
	<i>poznámka: posloupnost $\{f_{n-k}\}$ je doplněna nulami</i>	
<i>posunutí</i>	$\{f_{n+k}\}$	$z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f_n}{z^n} \right]$
<i>derivaci obrazu</i>	$\{nf_n\}$	$-zF'(z)$
<i>integraci obrazu</i>	$\left\{ \frac{f_n}{n} \right\}$	$\int_z^\infty \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta$
	<i>poznámka: musí platit $f_0 = 0$, tj. $\{f_n/n\} = \{0, f_1, f_2/2, \dots\}$</i>	
<i>konvoluci předmětu</i>	$\{f_n * g_n\}$	$F(z)G(z)$
<i>diferenci</i>	$\{\Delta^k f_n\}$	$(z-1)^k F(z) - z \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-1-i} \cdot \Delta^i f_0$
	<i>poznámka: posloupnost Δ^k je také přípustná, $\Delta^0 f_n = f_n$</i>	
<i>částečném součtu</i>	$\{s_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^n f_i \right\}$	$\frac{z}{z-1}F(z)$
	<i>poznámka: posloupnost $\{s_n\}$ je také přípustná</i>	

Příklad 5.6. Pomocí výsledku v ukázce 5.1 a věty o linearitě můžeme odvodit následující výsledky.

$$\mathcal{Z}\{\sin \alpha n\} = \frac{\mathcal{Z}\{e^{j\alpha n}\} - \mathcal{Z}\{e^{-j\alpha n}\}}{2j} = \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\alpha}} - \frac{z}{z - e^{-j\alpha}} \right) =$$

$$\frac{1}{2j} \frac{z(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})}{z^2 - z(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) + 1} = \frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z \cos \alpha + 1}$$

Analogicky dostáváme $\mathcal{Z}\{\cos \alpha n\} = \frac{(z - \cos(\alpha))z}{z^2 - 2z \cos(\alpha) + 1}$.

Dále označme $\{a_n\} = \{1\}$, $\{b_n\} = \{(-1)^n\}$, $\{c_n\} = \{j^n\}$, $\{d_n\} = \{(-j)^n\}$, potom platí

posloupnost	kombinace	obraz
$\{e_n\} = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$	$\frac{1}{2}(\{a_n\} + \{b_n\})$	$\frac{z^2}{z^2 - 1}$
$\{f_n\} = \{0, 1, 0, 1, \dots\}$	$\frac{1}{2}(\{a_n\} - \{b_n\})$	$\frac{z}{z^2 - 1}$
$\{g_n\} = \{1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$	$\frac{1}{2}(\{c_n\} + \{d_n\})$	$\frac{z^2}{z^2 + 1}$
$\{h_n\} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots\}$	$\frac{1}{2}(\{c_n\} - \{d_n\})$	$\frac{z}{z^2 + 1}$
$\{1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots\}$	$\frac{1}{4}(\{a_n\} + \{b_n\} + \{c_n\} + \{d_n\})$	$\frac{z^4}{z^4 + 1}$

Příklad 5.7. Na výsledcích předchozího příkladu je možné demonstrovat použití vět o posunutí vpravo i vlevo. Platí vztahy mezi posloupnostmi $\{e_{n-1}\} = \{f_n\} = \{e_{n+1}\}$, současně také platí

$$z^{-1}E(z) = \frac{1}{z} \frac{z^2}{z^2 - 1} = F(z) = z \left(\frac{z^2}{z^2 - 1} - 1 \right) = z(E(z) - 1)$$

Příklad 5.8. Pomocí věty o derivování obrazu postupně určete obrazy posloupností $\{n\}$, $\{n^2\}$, $\{n^3\}$.

Řešení.

$$\mathcal{L}\{n\} = -z(\mathcal{L}\{1\})' = -z \left(\frac{z}{z-1} \right)' = -z \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}. \quad (5.3)$$

$$\mathcal{L}\{n^2\} = -z(\mathcal{L}\{n\})' = -z \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = -z \frac{-z-1}{(z-1)^3} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3} \quad (5.4)$$

$$\mathcal{L}\{n^3\} = -z(\mathcal{L}\{n^2\})' = -z \left(\frac{z^2+z}{(z-1)^3} \right)' = z \frac{z^2+1+4z}{(z-1)^4} = \frac{z(z^2+1+4z)}{(z-1)^4}. \quad (5.5)$$

□

Na konkrétním příkladu si ukážeme jak je možné postupovat různými způsoby při hledání konkrétního obrazu.

Příklad 5.9. Nalezněte obraz posloupnosti $\left\{ \binom{n+1}{2} \right\}$

Řešení. Při řešení ukážeme 3 různé způsoby:

1. Využijeme výsledků Příkladu 5.8 $\mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{(z-1)^2}$ a $\{n^2\} = \frac{z^2+z}{(z-1)^3}$ a součtem obrazů obou posloupností a jeho dělením 2, neboť $\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n)$ dostáváme:

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n+1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z^2+z}{(z-1)^3}\right) = \frac{z^2 - z + z^2 + z}{2(z-1)^3} = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

2. Využijeme skutečnosti $\left\{\binom{n+1}{2}\right\} = \{1\} * \{n\}$ viz Příklad 5.3 a věty o obrazu konvoluce:

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n+1}{2}\right\} = \mathcal{Z}\{1\} \cdot \mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{z-1} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

3. Třetí možností je využít známé skutečnosti $\sum_{i=0}^n i = \binom{n+1}{2}$ a užitím věty částečných součtech:

$$\mathcal{Z}\left\{\binom{n+1}{2}\right\} = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z}\{n\} = \frac{z}{z-1} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

□

Příklad 5.10. Nalezněte obraz dvou posloupností $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{0, 1, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ a $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{0, 1, -\frac{1}{2}, \dots, \frac{(1)^{n+1}}{n}\right\}$ s využitím věty o integraci obrazu.

Řešení. Obě posloupnosti můžeme také zapsat jako posloupnost $\{f_n/n\}$, resp. $\{g_n/n\}$ kde

$$\{f_n\} = \{0, 1, -1, \dots\} \quad F(z) = F\mathcal{L}\{0, 1, -1, 1, \dots\} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{z^n} = \frac{\frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{z+1}$$

$$\{g_n\} = \{0, 1, 1, \dots\} \quad G(z) = \mathcal{L}\{0, 1, 1, 1, \dots\} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}$$

Integraci racionálně lomené funkce $F(\zeta)/\zeta$ resp. $G(\zeta)/\zeta$ provedeme současně pomocí rozkladu na parciální zlomky:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{(\mp 1)^{n+1}}{n}\right\} = \int_z^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta \mp 1)} = \int_z^{\infty} \left(\frac{\pm 1}{\zeta} - \frac{\pm 1}{\zeta \pm 1}\right) d\zeta = \lim_{\zeta_0 \rightarrow \infty} \pm \left(\ln \frac{\zeta_0}{\zeta_0 \pm 1} - \ln \frac{z}{z \pm 1}\right) = -\ln \frac{z}{z \pm 1} = \ln \left(1 \pm \frac{1}{z}\right).$$

□

Věta 5.11. *Nechť $\{f_n\}$ je přípustná tj. $\mathcal{Z}\{f_n\} = F(z)$. Jestliže níže uvedené limity existují, potom platí:*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f_0 \quad \text{počáteční hodnota} \quad (5.6)$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (5.7)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z-1)F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{koncová hodnota} \quad (5.8)$$

Vztah 5.7 nám umožní využít předchozí ukázky k určení součtu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{z \rightarrow 1} \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) = \ln 2.$$

Pro druhou posloupnost z téhož příkladu se jedná o harmonickou řadu, která diverguje. S touto skutečností koresponduje neexistence limity

$$\lim_{z \rightarrow 1} \ln \left(1 - \frac{1}{z} \right)$$

5.1 Souvislost \mathcal{L} a Laplaceovy transformace

Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\}$ je přípustná. Uvažujme zobecněnou funkci

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - n)$$

Vypočteme Laplaceův obraz této zobecněné funkce:

$$\mathcal{L} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L} f_n \delta(t - n) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn}.$$

Tento vztah se nazývá diskrétní Laplaceova transformace a substitucí $e^p = z$ dostáváme obraz \mathcal{L} transformace posloupnosti $\{f_n\}$.

5.2 Zpětná \mathcal{L} transformace

Každá funkce komplexní proměnné $F(z)$, která je v okolí bodu ∞ holomorfní je obrazem vhodné posloupnosti $\{f_n\}$ to jest $\mathcal{L}\{f_n\} = F(z)$, což také zapisujeme:

$$\mathcal{L}^{-1} \{F(z)\} = \{f_n\} \tag{5.9}$$

Protože členy této posloupnosti jsou koeficienty Laurentova rozvoje je toto zobrazení jednoznačné a navíc pro ně platí integrální vzorec:

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} F(z) z^{n-1} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

kde C_ρ je kružnice se středem v počátku o dostatečně velkém poloměru takovém, že všechny případné singularity leží uvnitř této kružnice. Tento postup je poměrně náročný.

Poznámka 5. Při hledání vzoru \mathcal{Z} transformace můžeme využít linearitu zpětné transformace \mathcal{Z}^{-1} , která plyne z linearit \mathcal{Z} transformace.

Situace se výrazně zjednoduší při hledání vzoru pro racionálně lomenou funkci.

5.2.1 Předmět k racionální funkci

Pro obraz \mathcal{Z} transformace ve tvaru racionálně lomené funkce, lze předmět nalézt poměrně jednoduše několika možnostmi

1. rozkladem na parciální zlomky : $\frac{1}{(z - z_0)^k}$, kde $k \in \mathbb{N}$ a z_0 je konečné komplexní číslo. Protože obraz \mathcal{Z} transformace je funkce v okolí ∞ holomorfní, má tato konečnou limitu pro $t \rightarrow \infty$. To

znamená, že pro racionální funkci, která není ryzí, je vyjádření ve tvaru součtu konstanty a parciálních zlomků. Pro parciální zlomek kde $k = 1$ snadno získáme

$$\frac{1}{z - z_0} = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} + \frac{z_0^2}{z^3} + \frac{z_0^3}{z^4} + \dots \quad (5.11)$$

Rozvoj parciálních zlomků $(z - z_0)^{-k}$, kde $2 \leq k \in \mathbb{N}$ můžeme odvodit z rozvoje 5.11, jestliže jej $k - 1$ krát derivujeme. Situaci přesně popisuje následující věta

Věta 5.12. *Je-li $z_0 \neq 0$ platí*

$$\frac{1}{(z - z_0)^k} \leftrightarrow \frac{1}{z^k} + \binom{k}{k-1} \frac{z_0}{z^{k+1}} + \dots + \binom{k-1+n}{k-1} \frac{z_0^n}{z^{k+n}} + \dots \quad (5.12)$$

Tato věta platí i pro $k = 1$ a pravá strana rovnice 5.12 je jenom složitěji zapsaná pravá strana 5.11. Podobně předpoklad $z_0 \neq 0$ není nutný, ale pro $z_0 = 0$ je parciální zlomek přímo Laurentovým rozvojem.

Postup hledání předmětu \mathcal{Z} transformace k racionální funkci lze jednoduše popsat jediným souvětím. Racionálně lomenou funkci vyjádříme ve tvaru součtu konstanty a parciálních zlomků a z linearity \mathcal{Z} transformace získáme předmět jako součet předmětů jednotlivých parciálních zlomků podle známých vzorců. Uvedený postup ukážeme na příkladě.

Příklad 5.13. Nalezněte předmět \mathcal{Z} transformace k funkci

$$\frac{2z^3 - z^2 + z}{(z-1)^2(z+1)}.$$

Řešení. Rozklad racionální funkce má tvar

$$\frac{2z^3 - z^2 + z}{(z-1)^2(z+1)} = 2 - \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

Podle vztahu 5.11 dostáváme

$$\frac{-1}{z+1} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{z^n} + \dots \quad \frac{2}{z-1} = \frac{2}{z} + \frac{2}{z^2} + \dots + \frac{2}{z^n} + \dots$$

a podle vztahu 5.12

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{\binom{2}{1}1}{z^3} + \dots + \frac{\binom{n+1}{1}(1)^n}{z^{n+2}} + \dots$$

a předmět původní racionální funkce je ve tvaru součtu jednotlivých předmětů

$$\frac{2z^3 - z^2 + z}{(z-1)^2(z+1)} = 2 + \frac{-1+2}{z} + \frac{1+2+1}{z^2} + \dots + \frac{(-1)^n + 2 + (n-1)}{z^n}$$

Zápis předmětu \mathcal{Z} transformace k dané funkci lze realizovat i takto

$$\frac{2z^3 - z^2 + z}{(z-1)^2(z+1)} \leftrightarrow \{n+1 + (-1)^n\}.$$

□

2. pomocí reziduí : Je-li funkce $F(z)$ racionálně lomená má konečný počet singularit z_k , které jsou póly nebo odstranitelné singularity a integrál $f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} F(z)z^{n-1}dz$ (C_ρ je kružnice se středem v počátku obsahující všechny singularity) můžeme vyčíslit pomocí reziduí

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_\rho} F(z)z^{n-1}dz = \sum_{z=z_k} \operatorname{rez} F(z)z^{n-1}. \quad (5.13)$$

Postup budeme ilustrovat na předcházejícím zadání.

Příklad 5.14. Nalezněte předmět \mathcal{Z} transformace k funkci

$$\frac{2z^3 - z^2 + z}{(z-1)^2(z+1)}.$$

Řešení. Členy vzoru $\{f_n\}$ k této funkci pro $n > 0$ vyjádříme jako součet

$$\begin{aligned} f_n &= \operatorname{rez}_{z=1} \frac{(2z^3 - z^2 + z)z^{n-1}}{(z-1)^2(z+1)} + \operatorname{rez}_{z=-1} \frac{(2z^3 - z^2 + z)z^{n-1}}{(z-1)^2(z+1)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{2z^{n+2} - z^{n+1} + z^n}{(z+1)} \right)' + \frac{-4 \cdot (-1)^{n-1}}{(-1-1)^2} = \\ &= \lim_{z=1} \frac{z^{n-1} (2z^3 n + z^2 n + 2z^3 + 4z^2 - 2z + n)}{(z+1)^2} + (-1)^n = n+1 + (-1)^n \end{aligned}$$

Pro f_0 platí výpočet

$$\begin{aligned} f_0 &= \operatorname{rez}_{z=-1} \frac{2z^3 - z^2 + z}{z(z-1)^2(z+1)} + \operatorname{rez}_{z=0} \frac{2z^3 - z^2 + z}{z(z-1)^2(z+1)} + \operatorname{rez}_{z=1} \frac{2z^3 - z^2 + z}{z(z-1)^2(z+1)} = \\ &= 1 + 0 + \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{2z^2 - z + 1}{z+1} \right)' = 1 + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2(z^2 + 2z - 1)}{(z+1)^2} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Celkově dostáváme předmět \mathcal{L} transformace k dané funkci ve stejném tvaru

$$\frac{z^2 + 4z - 1}{(z+1)^2(z-1)} \leftrightarrow \{n+1 + (-1)^n\}.$$

□

3. z definice Vyjdeme-li ze vztahu 5.1, je možné získat člen f_n a budeme aplikovat stejný postup jako odvození vzorce pro reziduum také tak, že daný vztah vynásobíme z^{n-1} a n -krát derivujeme. Získáme tak řadu, která začíná výrazem $(-1)^n f_n n! z^{-n-1}$ neboť z na nezáporné celé mocnitéle derivováním zmizely. Vynásobíme-li nyní řadu z^n a provedeme limitní přechod $z \rightarrow \infty$ dostaneme vzorec

$$f_n = (-1)^n \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d^n}{dz^n} [z^{n-1} F(z)].$$

Přestože, odvození tohoto vzorce je jednoduché, jeho užití komplikuje nutnost určit n -tou derivaci racionálně lomené funkce, což je vhodné realizovat ve tvaru rozkladu této funkce ve tvaru součtu polynomu a parciálních zlomků. Nebudeme proto uvádět příklad výpočtu pomocí tohoto v literatuře [8] uváděného vzorce. Místo toho uvedeme další možnost

4. dělení polynomu polynomem nám umožní v mnohých případech určit vzor jak je dokumentováno v následujícím příkladu

Příklad 5.15. Nalezněte předmět \mathcal{Z} transformace k funkci

$$\frac{2z^3 - z^2 + z}{(z - 1)^2(z + 1)}$$

Řešení. $(2z^3 - z^2 + z) : (z^3 - z^2 - z + 1) = 2 + \frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{6}{z^4} + \frac{5}{z^5} + \frac{8}{z^6}$ □

$$\begin{array}{r}
 2z^3 - z^2 + z \\
 \hline
 z^2 + 3z - 2 \\
 \hline
 z^2 - z - 1 + \frac{1}{z} \\
 \hline
 4z - 1 - \frac{1}{z} \\
 \hline
 4z - 4 - \frac{4}{z} + \frac{4}{z^2} \\
 \hline
 3 - \frac{3}{z} - \frac{4}{z^2} \\
 \hline
 3 - \frac{3}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{3}{z^3} \\
 \hline
 \frac{6}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{3}{z^3} \\
 \hline
 \frac{6}{z} - \frac{6}{z^2} - \frac{6}{z^3} + \frac{6}{z^4} \\
 \hline
 \frac{7}{z^2} + \frac{3}{z^3} - \frac{6}{z^4}
 \end{array}$$

Při hledání vzoru \mathcal{L} transformace různými způsoby byl úmyslně volen tentýž obraz, pro možnost porovnání těchto metod. Určování dalších předmětů \mathcal{L} transformace bude dílčí úlohou při využití \mathcal{L} transformace. Dále jsou uvedeny dvě základní možnosti užití \mathcal{L} transformace a sice k řešení diferenční resp. rekurentních rovnic a k určování konečných součtů.

5.3 Řešení diferenčních a rekurentních rovnic

Diferenční a jim ekvivalentní rekurentní rovnice se užívají při popisu diskrétních systémů v různých oblastech a to jak v matematice samé (např. při numerickém řešení diferenciálních rovnic) tak v aplikacích (numerická analýza fyzikálních polí, elektrotechnika, stavebnictví apod.) Za lineární diferenční rovnici s konstantními koeficienty považujeme:

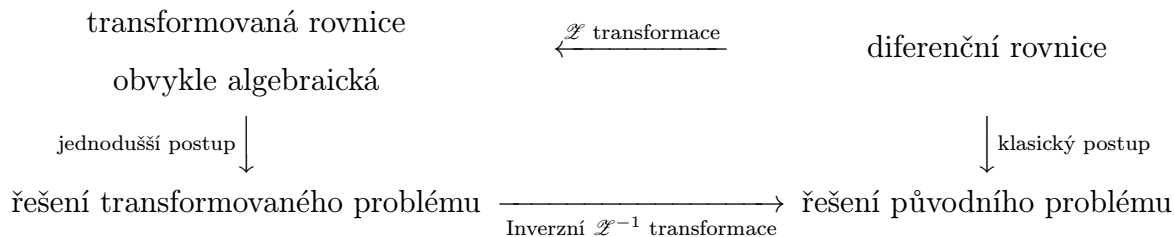
$$a_r \{\Delta^r y_n\} + \dots + a_2 \{\Delta^2 y_n\} + a_0 \{y_n\} = \{f_n\},$$

kde $a \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a navíc

- a_i jsou konečné komplexní konstanty pro $i = 0, \dots, r$, které se nazývají koeficienty rovnice.
- $\{f_n\}$ je zadaná posloupnost komplexních čísel, která se nazývá pravá strana rovnice.
- $\{y_n\}$ je hledaná posloupnost, kde prvních r členů y_0, y_1, \dots, y_{r-1} jsou obvykle zadány jako počáteční hodnoty.

Při hledání řešení postupujeme obvykle následujícím způsobem:

1. Nalezneme obraz diferenční rovnice, který je v případě lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty rovnice algebraická
2. Dosazením počátečních podmínek do této algebraické získáme rovnici, která jedno řešení a nalezneme tak obraz řešení diferenční rovnice.
3. Hledané řešení $\{y_n\}$, potom určíme zpětnou transformací



Příklad 5.16. Řešte diferenční rovnici $\{\Delta^2 y_n\} - 9\{y_n\} = \{1\}$ s počátečními podmínkami $y_0 = 0$, $\Delta y_0 = -1$.

Řešení. Určíme obraz diferenční rovnice $\mathcal{L}\{\Delta^2 y_n\} - 9\mathcal{L}\{y_n\} = \mathcal{L}\{1\}$ označíme-li $\mathcal{L}\{y_n\} = Y(z)$:

$$(z-1)^2 Y(z) - z(z-1)y_0 - z\Delta y_0 - 9Y(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Dosazením počátečních podmínek a vyřešením rovnice získáme obraz řešení:

$$\begin{aligned} (z-1)^2 Y(z) + z - 9Y(z) &= \frac{z}{z-1} \\ Y(z)(z-4)(z+2) &= \frac{z}{z-1} - z = \frac{2z - z^2}{z-1} \\ Y(z) &= \frac{-z(z-2)}{(z-1)(z-4)(z+2)} \end{aligned}$$

K tomuto obrazu řešení nalezneme předmět pomocí reziduí, neboť se jedná o jednoduché póly :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-z(z-2)}{(z-1)(z-4)(z+2)} \right\} &= \operatorname{rez}_{z=1} \frac{-z(z-2)}{(z-1)(z-4)(z+2)} z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=4} \frac{-z^n(z-2)}{(z-1)(z-4)(z+2)} + \\ &\operatorname{rez}_{z=-2} \frac{-z^n(z-2)}{(z-1)(z-4)(z+2)} = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{-z^n(z-2)}{(z-1)(z-4)(z+2)} + \lim_{z \rightarrow 4} \frac{-z^n(z-2)}{(z-1)(z+2)} + \\ &\frac{-(-2)^n(-2-2)}{(-2-1)(-2-4)} = \frac{1}{-3 \cdot 3} + \frac{-2 \cdot 4^n}{3 \cdot 6} + \frac{4(-2)^n}{-3 \cdot -6} = \frac{-1 - 4^n + 2(-2)^n}{9} \end{aligned}$$

□

Druhou možností zápisu závislostí, které popisují diferenční rovnice je tzv. rovnice rekurentní. Dosadíme-li za všechny difference lineární kombinaci členů hledané posloupnosti při využití vztahu

$$\Delta^r y_n = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f_{n+i}.$$

lze každou diferenční rovnici s konstantními koeficienty rovnici můžeme přepsat na rovnici, která má tvar:

$$A_r \{y_{n+r}\} + \cdots + A_2 \{y_{n+2}\} + A_1 \{y_{n+1}\} + A_0 \{y_n\} = \{f_n\}, \quad (5.14)$$

kde $A_r \neq 0 \neq A_0$ a A_i jsou vhodné komplexní konstanty. Vzhledem k tomu, že ze známých počátečních podmínek lze opakovaným použitím tohoto vztahu určit libovolné y_n je tento tvar rovnice nazýván rekurentní rovnicí. Postup naznačíme na rovnici z Příkladu 5.16

Příklad 5.17. Přepište rovnici z Příkladu 5.16, tak aby neobsahovala difference a v tomto tvaru ji řešte.

Řešení. Z ilustrativních důvodů odvodíme druhou diferenci $\Delta^2 y_n$ bez použití výše uvedeného vzorce:

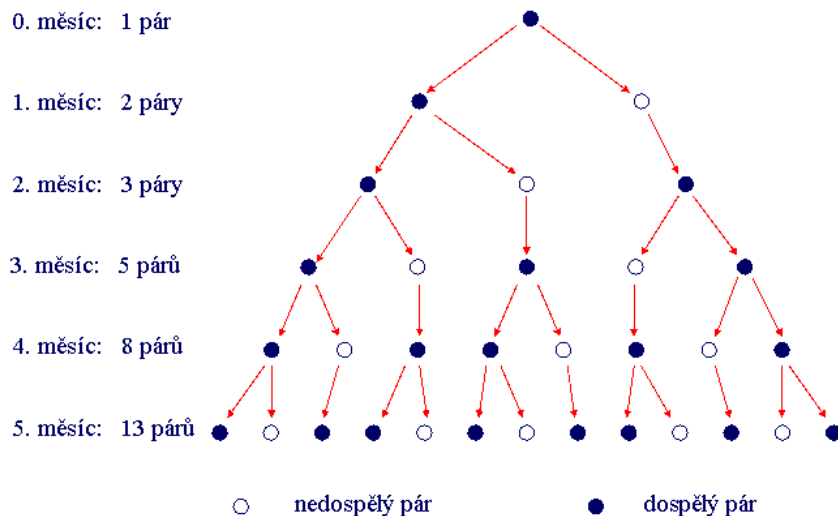
$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = y_{n+2} - y_{n+1} - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Po dosazení do rovnice dostáváme

$$\{y_{n+2}\} - 2\{y_{n+1}\} + \{y_n\} - \{y_n\} = \{y_{n+2}\} - 2\{y_{n+1}\} = 1$$

□

Při hledání řešení rekurentních rovnic postupujeme stejně jako u rovnic diferenčních, to znamená, že nejdříve určíme obraz dané rovnice, který vyřešíme. Potom zpětnou transformací určíme řešení původní rovnice jako vzor řešení obrazu původní rovnice. Situaci budeme ilustrovat na příkladu známé Fibonacciovy posloupnosti. Poprvé byla užita italským matematikem Leonardem z Pisy, známým spíše jako Fibonacci, který žil v letech 1170 až 1240. Problém králíků zveřejnil Leonardo z Pisy již v roce 1202 v knize Liber abaci. Tento problém můžeme formulovat takto: Kolik králíků vzejde po roce z jednoho páru, jestliže každému páru se v období dospělosti, tj. po dvou měsících, narodí jeden nový pár.



Označme y_n počet párů králíků v n -té generaci, přičemž předpokládáme, že žádní králíci neuhynou. Pro zjednodušení budeme králíky rozlišovat na staré (mohou mít potomky) a mladé (nemohou mít potomky) páry. V $(n+2)$ -hé generaci je starých párů jako všech párů v $(n+1)$ -ní generaci tj. y_{n+1} a mladých párů je tolik kolik bylo starých párů $(n+1)$ -ní generaci tj. jako všech párů n -té generaci tj. y_n . Touto úvahou jsme odvodili rovnici $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$. Dále předpokládejme, že začínáme s mladým párem tj. $y_0 = y_1 = 1$.

Příklad 5.18. Nalezněte hodnoty tzv. Fibonacciovy posloupnosti určené rekurentním vztahem $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ a počátečními hodnotami $f_0 = f_1 = 1$.

Nejdříve nalezneme obraz a následně vyřešíme:

$$\begin{aligned} z^2(F(z) - 1 - 1/z) &= z(F(z) - 1) + F(z) \\ F(z) &= \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \end{aligned}$$

Rozkladem na součet „parciálních“ zlomků dostaneme Fibonacciovu posloupnost:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{z_1 z}{z - z_1} - \frac{z_2 z}{z - z_2} \right) \quad \text{kde } z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ f_n &= \frac{z_1 z_1^n - z_2 z_2^n}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

Uvedený výsledek není v příliš praktickém tvaru. Rozvineme proto $n + 1$ mocniny podle binomické věty a v rozdílu obou závorek se odečtou sudé mocniny $\sqrt{5}$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}2^{n+1}} \left[\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \sqrt{5}^i - \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} \sqrt{5}^i \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} 5^k.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Poznámka 6. Poznamenejme, že při obecných počátečních podmínkách $y_0 = \alpha$, $y_1 = \beta$ má obraz řešení dané rekurentní rovnice tvar $F(z) = \frac{y_0 z^2 + (y_1 - y_0)z}{z^2 - z - 1}$, proto rozklad na „parciální“ zlomy obsahuje pouze zlomky se stejnými jmenovateli, proto řešení je ve tvaru vhodné lineární kombinace posloupností uvedených výše a koeficienty této lineární kombinace lze stanovit z počátečních podmínek. Pro zjednodušení doplníme výše uvedenou Fibonacciovu posloupnost členy $f_{-2} = 1$, $f_{-1} = 0$, která je zřejmě také řešením dané rekurentní rovnice a pro lineární kombinaci posunutých posloupností $g_n = \alpha y_{n-2} + \beta y_{n-1}$, platí $g_0 = \alpha$, $g_1 = \beta$. Proto posloupnost $g_n = \alpha y_{n-2} + \beta y_{n-1}$ je řešení s počátečními podmínkami $y_0 = \alpha$, $y_1 = \beta$.

V dalším příkladu si ukážeme možnost řešit rekurentní rovnice, kde řešení je zadáno jinak než pomocí počátečních podmínek.

Příklad 5.19 (Zruinování hazardního hráče). Hráč hraje proti protivníkovi řadu her, kdy vsadí jednu korunu a s pravděpodobností q korunu vyhraje a s pravděpodobností $1 - q$ korunu prohraje. Tato situace se opakuje pokud hráč nezíská předem stanovených N korun nebo neprohraje všech n korun, se kterými do hry vstupoval. Určete pravděpodobnost zruinování hazardního hráče, tj. hra skončí jeho prohrou.

Řešení. Označme f_n pravděpodobnost prohry (zruinování) hráče, který má n korun. V situaci kdy hráč vlastní n korun mohou nastat dvě vzájemně se vylučující možnosti a sice hráč korunu získá tedy pravděpodobnost zruinování je $f_n = qf_{n+1}$ a nebo korunu ztratí a pravděpodobnost zruinování je $f_n = (1 - q)f_{n-1}$. Protože pravděpodobnost vzájemně se vylučujících možností je součtem jednotlivých pravděpodobností dostáváme rovnici

$$f_n = qf_{n+1} + (1 - q)f_{n-1}.$$

Dále ze zadání plyne počáteční podmínka $f_0 = 1$ (hráč prohrál) a $f_N = 0$ (hráč vyhrál). Nejdříve danou rovnici upravíme na tvar analogický s předchozím případem (n nahradíme $n + 1$)

$$f_{n+1} = qf_{n+2} + (1 - q)f_n \Leftrightarrow f_{n+2} - \frac{1}{q}f_{n+1} + \frac{1 - q}{q}f_n = 0.$$

Pro provedení \mathcal{Z} transformace potřebujeme také znalost f_1 . Protože ji neznáme označíme ji $f_1 = \alpha$ s tím, že α dodatečně stanovíme z druhé podmínky ($f_N = 0$). Obraz dané rovnice je ve tvaru

$$z^2(F(z) - 1 - \frac{\alpha}{z}) - \frac{1}{q}z(F(z) - 1) + \frac{1 - q}{q}F(z) = 0.$$

Odtud určíme $F(z)$ a pro $q \neq \frac{1}{2}$ rozklad na „parciální“ zlomky:

$$F(z) = \frac{z^2 + z \left(\alpha - \frac{1}{q} \right)}{z^2 - \frac{z}{q} + \frac{1-q}{q}} = \frac{z^2 + z \left(\alpha - \frac{1}{q} \right)}{\left(z + 1 - \frac{1}{q} \right) (z - 1)} = \frac{z}{z - 1} \frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \frac{z}{z + 1 - \frac{1}{q}} \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1}$$

a řešení dané rekurentní rovnice (v závislosti na α):

$$f_n = \frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \left(\frac{1 - q}{q} \right)^n \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1}$$

Dosazením tohoto řešení do druhé (okrajové) podmínky $f_N = 0$ stanovíme α :

$$\frac{q(\alpha + 1) - 1}{2q - 1} - \left(\frac{1 - q}{q} \right)^N \frac{q(\alpha - 1)}{2q - 1} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{q \left(\frac{1-q}{q} \right)^N + q - 1}{q \left(\left(\frac{1-q}{q} \right)^N - 1 \right)}.$$

Po dosazení do původního vztahu, tak získáme konkrétní pravděpodobnost zruinování hazardního hráče

$$\frac{\left(\frac{1-q}{q} \right)^N - \left(\frac{1-q}{q} \right)^n}{\left(\frac{1-q}{q} \right)^N - 1}.$$

V případě spravedlivé hry $q = 1/2$ má obraz řešení a řešení tvar:

$$F(z) = \frac{z^2 + z(\alpha - 2)}{z^2 - 2z + 1} \Leftrightarrow f_n = 1 + n(\alpha - 1) \Leftrightarrow f_n = \frac{N - n}{N}.$$

Toto řešení je možné získat pomocí reziduí, neboť funkce $F(z)$ má pouze pól $z = 1$.

$$\begin{aligned} f_n &= (z^{n+1} + z^n(\alpha - 2))' \Big|_{z=1} = n + 1 + n(\alpha - 2) \\ 0 = f_N &= N + 1 + N(\alpha - 2) \Leftrightarrow \alpha - 2 = -\frac{N+1}{N} \Leftrightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Situaci budeme ilustrovat pro 3 konkrétní možnosti $n = 5$, $N = 10$, $q_1 = 0,4$, $q_1 = 0,5$, $q_1 = 0,6$, pro které dostaneme 3 pravděpodobnosti

$$p_1 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^1 0 - \left(\frac{3}{2}\right)^5}{\left(\frac{3}{2}\right)^1 0 - 1} = \frac{243}{275} \doteq 0,884 \quad p_2 = \frac{10 - 5}{10} = \frac{1}{2} \quad p_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^1 0 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{\left(\frac{2}{3}\right)^1 0 - 1} = \frac{1}{1025}.$$

Pomocí tohoto řešení můžeme provést analýzu popisované situace v návaznosti na volbu parametru q pro „velká očekávání“ tj. $N \rightarrow \infty$

$$q < \frac{1}{2} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - \left(\frac{1-q}{q}\right)^n}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^N - 1} = 1, \text{ neboť } \frac{1-q}{q} > 1,$$

$$q = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-n}{N} = 1,$$

Tedy při spravedlivé $q = \frac{1}{2}$ a nevýhodné $q < \frac{1}{2}$ hře je velká pravděpodobnost zruinování hazardního hráče při velkém očekávání N . \square

V posledním příkladě ukážeme jak lze postupovat u nehomogenních diferenčních rovnic tj. u rovnic, které mají nenulovou pravou stranu. Popíšeme řešení diskretizace rovnice z Příkladu s obecnou pravou stranou $u(t)$ (tj. diskretizací LR obvodu s obecným napětím).

Příklad 5.20. Nalezněte řešení rovnice

$$i_{n+1} - bi_n = au_n, \text{ kde } i_0 = 0, a, b, u_n \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Obraz dané rovnice má tvar

$$zI - bI = a\mathcal{Z}\{u_n\} \Leftrightarrow I = \frac{a}{b}\mathcal{Z}\{u_n\} = \frac{a}{b} \left(\frac{z}{z-b}\mathcal{Z}\{u_n\} - \mathcal{Z}\{u_n\} \right).$$

Zpětnou transformací s využitím věty o konvoluci dostáváme

$$\{i_n\} = \frac{a}{b} (\{b^0\}^n * \{u_n\} - \{u_n\}) \Leftrightarrow i_n = \frac{a}{b} \left(\sum_{l=0}^n b^{n-l} u_l - u_n \right) = a \sum_{l=1}^n b^{n-l} u_{l-1}$$

V Příkladu 5.23 bude posloupnost $\{i_n\}$ konkretizována pro tzv. sinusové buzení $u_n = \sin n\alpha$. \square

Při řešení diferenčních resp. rekurentních rovnic jsme mlčky předpokládali, že hledaná řešení mají obraz v \mathcal{Z} transformaci tj. jsou přípustné. Obecně to neplatí, ale pokud se jedná o rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou ve tvaru konečné lineární kombinace funkcí tvaru $P(n)q^n \cos \alpha n$ resp. $P(n)q^n \cos \alpha n$, kde $P(n)$ je polynom, je každé řešení této rovnice přípustné.

5.4 Částečné součty

Pomocí \mathcal{Z} transformace můžeme také odvodit součty některých konečných posloupností celých čísel. Využíváme přitom hlavně větu o částečném součtu a větu o derivaci obrazu. Metodiku výpočtu si osvětlíme na následujících příkladech.

Příklad 5.21. Určete součty druhých a třetích mocnin prvních n přirozených čísel (pro „první“ mocniny $\sum_{i=0}^n i = \binom{n+1}{2}$ je všeobecně známo).

Řešení. V Příkladu 5.8 jsme odvodili \mathcal{Z} transformaci posloupností $\{n^2\}$ a $\{n^3\}$, jestliže použijeme větu o částečném součtu pro posloupnost $\{n^2\}$ dostáváme:

$$F(z) = \mathcal{Z} \left\{ \sum_{i=0}^n i^2 \right\} = \frac{z}{z-1} \frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4}.$$

Ve výše uvedeném vztahu jsme použili dříve odvozený obraz 5.4 posloupnosti $\{n^2\}$. Pro nalezení vzoru ve tvaru racionálně lomené funkce použijeme výpočtu pomocí reziduí:

$$\operatorname{rez}_{z=1} F(z)z^{n-1} = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^3 z^{n+2} + z^{n+1}}{\partial z^3} = \frac{1}{6}(n+1)n(n+2+n-1) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6},$$

neboť funkce $F(z)$ má pouze pól čtvrtého řádu pro $z = 1$. Analogicky pro pro posloupnost $\{n^3\}$ využitím 5.5 dostáváme:

$$F(z) = \mathcal{Z} \left\{ \sum_{i=0}^n i^3 \right\} = \frac{z}{z-1} \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4} = \frac{z^2(z^2+4z+1)}{(z-1)^5}.$$

Analogicky s předchozím případem pro hledání vzoru k funkci $F(z)$ použijeme rezidua, protože funkce $F(z)$ má pouze jeden pól $z = 1$ pátého řádu:

$$\begin{aligned} \operatorname{rez}_{z=1} F(z)z^{n-1} &= \frac{1}{4!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^4 z^{n+3} + 4z^{n+2} + z^{n+1}}{\partial z^4} = \\ &= \frac{1}{6}(n+1)n((n+3)(n+2) + 4(n+2)(n-1) + (n-1)(n-2)) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4} \end{aligned}$$

□

Povšimněte si, že jsme porovnáním se součtem prvních n přirozených čísel odvodili jednu z nejdéle známých číselných identit

$$1 + 8 + 27 + \dots n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots n)^2.$$

V dalším příkladu ukážeme jak postupovat v úlohách kdy se nesčítá přes všechna čísla, ale jenom přes vybranou podposloupnost.

Příklad 5.22. Určete součet druhých mocnin prvních n sudých čísel.

Řešení. Určíme obraz obraz posloupností a $\{(2n)^2\} = 4\{n^2\}$ podobně jako v předchozím případě pomocí 5.4:

$$\mathcal{L}\{(2n^2)\} = \frac{4z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

Použijeme větu o částečném součtu a dostaneme

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^n (2k)^2\right\} = \frac{4z^2(z+1)}{(z-1)^4}$$

Nyní pomocí reziduí určíme vzory k funkcím $\frac{4z^2(z+1)}{(z-1)^4}$:

$$\sum_{k=1}^n (2k)^2 = \operatorname{rez}_{z=1} \frac{4z^{n+1}(z+1)}{(z-1)^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 1} 4(z^{n+2} + z^{n+1})''' = \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 1} 4((n+2)(n+1)nz^{n-1} +$$

$$(n+1)n(n-1)z^{n-2}) = \frac{2}{3}(n+1)n(n+2+n-1) = \frac{(n+1)n(2n+1)}{3}$$

□

Poslední příklad bude věnován v praxi využitelným typům sumacím. V návaznosti na Příklad 5.20 se budeme zabývat následující sumou.

Příklad 5.23. Určete součet $1 + q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \dots + q^n \sin n\alpha$.

Řešení. Nejdříve pomocí věty o podobnosti a Příkladu 5.6 určíme:

$$\mathcal{L}\{q^n \sin n\alpha\} = \frac{zq \sin \alpha}{z^2 - 2zq \cos \alpha + q^2}.$$

Pro obraz posloupnosti částečných součtů platí

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^n q^i \sin i\alpha\right\} = \frac{z^2 q \sin \alpha}{(z-1)(z^2 - 2zq \cos \alpha + q^2)}.$$

Kvadratický trojčlen ve jmenovateli má dva komplexně sdružené kořeny $z_{12} = q \exp(\pm j\alpha)$. Funkce \mathcal{L} má tedy tři prosté póly a pomocí reviduí odvodíme

$$\sum_{i=0}^n q^i \sin i\alpha = \operatorname{rez}_{z=z_1} F(z)z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=z_1} F(z)z^{n-1} + \operatorname{rez}_{z=z_1} F(z)z^{n-1} =$$

$$\frac{(z_1)^{n+1}}{2j(z_1 - 1)} - \frac{(z_2)^{n+1}}{2j(z_1 - 2)} + \frac{q \sin \alpha}{q^2 - 2q \cos \alpha + 1} = \frac{q \sin \alpha + q^{n+1}(q \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha)}{q^2 - 2q \cos \alpha + 1}$$

Poznamenejme, že tento výsledek je pro $|q| < 1$ v souladu s dříve odvozeným soutem analogické nekonečné řady, neboť pro $n \rightarrow \infty$ dostaneme stejný výsledek. \square

Maplety

Kliknutím na následující odkazy si lze pomocí mapletů procvičit tato témata:

1. [\$\mathcal{L}\$ transformace - hledání obrazu číselné posloupnosti či předmětu komplexní funkce.](#)
2. [Řešení lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty pomocí \$\mathcal{L}\$ transformace.](#)

Literatura

- [1] Z. DOŠLÁ, O. DOŠLÝ: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*, Masarykova univerzita, Brno 2003.
- [2] Z. DOŠLÁ, O. DOŠLÝ: *Metrické prostory, teorie a příklady*, Masarykova univerzita, Brno 2000.
- [3] S. N. ELAYDI: *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York 1999.
- [4] J. ELIÁŠ, J. HORVÁTH, J. KAJAN: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 3. časť*, Alfa, Bratislava 1972.
- [5] J. ELIÁŠ, J. HORVÁTH, J. KAJAN, R. ŠULKA: *Zbierka úloh z vyššej matematiky, 4. časť*, Alfa, Bratislava 1972.
- [6] J. KALAS, M. RÁB: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno 2001.

-
- [7] J. KUBEN: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vojenská akademie v Brně, Brno 1991.
- [8] F. MELKES, M. ŘEZÁČ: *Matematika 2*, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2003.
- [9] Z. PÍRKO, J. VEIT: *Laplaceova transformace, základy teorie a užití v elektrotechnice*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1970.
- [10] R. SIKORSKI: *Diferenciální a integrální počet, funkce více proměnných, příručka pro vys. školy univerzitního směru*, Academia, Praha 1973.
- [11] M. ŠULISTA: *Základy analýzy v komplexním oboru*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1981.
- [12] J. VESELÝ: *Komplexní analýza pro učitele*, Univerzita Karlova, Karolinum, Praha 2000.