Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper

WiSe 2011/2012

Blatt 7 zu **Funktionalanalysis** bis 12.12.

1. Sei X ein Banachraum und $M \subset X$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   i) M ist beschränkt, d.h. $\exists m < \infty \, \forall x \in M : \|x\|_X \leq m$,
   ii) M ist schwach-beschränkt, d.h. $\forall \phi \in X' \, \exists m_\phi \, \forall x \in M : |\phi(x)| \leq m_\phi$.

   Hinweis: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

2. Sei H Prä-Hilbertraum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$ und $x, y \in H$.
   Zeige, $\|x\| := (x|x)^{1/2}$ definiert eine Norm auf H.
   Beweise die Polarisationsformeln:
   $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, bzw. $(x|y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   Beweise die Parallelogrammgleichung: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

3. Sei E ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|$.
   Zeige, dass die Norm genau dann von einem Skalarprodukt induziert wird, wenn sie die Parallelogrammgleichung erfüllt. (Zur Einfachheit beschränke man sich auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.)

   Hinweis: Benutze die Polarisationsformel.

4. Seien X, Y, Z normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.
   Zeige: $(ST)' = T'S'$
   Zeige: $T'' \circ i_X = i_Y \circ T$, wobei $i_X : X \mapsto X''$ bzw. $i_Y : Y \mapsto Y''$ die kanonischen Abbildungen sind.