Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 6.6.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Stephan Fackler
Sommersemester 2012
Punktzahl: 20

Übungen Hilberträume & Fouriertransformation: Blatt 7

20. *Projektion auf konvexe Menge.* Sei $H = L^2(0, 1; \mathbb{R})$ mit dem kanonischen Skalarprodukt und $C \coloneqq \{f \in L^2(0, 1) : f(x) \geq 0 \text{ f.ü.}\} \subset H$.

(a) Zeige: C ist konvex und abgeschlossen. (3)
Tipp: Eine Folgerung aus dem Vollständigkeitsbeweis der L^p-Räume in der Maßtheorie kann hier nützlich sein! Man kann diese Aufgabe aber auch von Hand lösen.

(b) Bestimme mit Beweis die minimale Projektion P auf C. (4)

21. *Orthogonales Komplement.* Sei $H = L^2(0, 2; \mathbb{R})$ mit dem kanonischen Skalarprodukt.

(a) Zeige: Die Abbildung $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f(x)\, dx$ [sic!] ist in H'. (2)

(b) Bestimme das nach dem Satz von Riesz-Fréchet eindeutige $g \in H$ mit $\varphi(f) = (f|g)$ für alle $f \in H$. (1)

(c) Zeige: $U \coloneqq \{f \in H : \int_0^1 f(x)\, dx = 0\}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H. (1)

(d) Bestimme mit Beweis das orthogonale Komplement von U. (4)

22. *Einheitskugel kompakt?* Sei H ein separabler, unendlichdimensionaler Hilbertraum. Ist die abgeschlossene Einheitskugel $B \coloneqq \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ in H kompakt? (5)

Wiederholung: Eine Teilmenge K eines metrischen Raums (M, d) heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt oder äquivalent jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.