Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 29.04.16
Gesamtpunktzahl: 30

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Manfred Sauter
Sommersemester 2016

Übungen zur Linearen Algebra 2: Blatt 2

Die Natur verlieh allen Menschen die Gabe, sich in wichtigen Dingen zu verrechnen.

— Otto Weiß (1849–1915)

Präsenzaufgaben

1. Sei $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^k = a$.

2. Zeige, dass für alle $a \in \mathbb{K}$ durch die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}$, $p \mapsto p(a)$ ein Ringhomomorphismus gegeben ist, also $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$, $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ und $\varphi(1_{\mathbb{K}[t]}) = 1_{\mathbb{K}}$ gilt. Zeige zudem, dass $\mathbb{K}[t]$ nullteilerfrei ist.

3. In der Vorlesung wurde zwischen Polynomen und Polynomfunktionen unterschieden und ein Beispiel gegeben, dass verschiedene Polynome zu derselben Polynomfunktion führen können. Der Identitätssatz (4.6) (und damit als Korollar der Koeffizientenvergleich (4.7)) gilt für Polynome über einem allgemeinen Körper $\mathbb{K}$, und zeigt $p \equiv 0$ als Polynom und damit auch als Polynomfunktion. Wieso widerspricht sich das nicht?

Übungsaufgaben

1. Sei $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring mit Eins. Wir definieren (4+4+2)

$$\mathcal{R}[\![t]\!] := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist eine mit } \mathbb{N}_0 \text{ indizierte Folge in } \mathcal{R}\}$$

und schreiben für ein $f = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{R}[\![t]\!]$ auch

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad \text{oder} \quad f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

wobei t wie schon bei den Polynomen eine formale Variable ist.

(a) Zeige, dass $\mathcal{R}[\![t]\!]$ ein kommutativer Ring mit Eins ist, wenn es mit der komponentenweisen Addition und der Multiplikation

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k\Big) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

wobei $c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \in \mathcal{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sei, versehen wird.

(b) Zeige, dass ein $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ genau dann ein multiplikatives Inverses im Ring $\mathcal{R}[\![t]\!]$ besitzt, wenn dies für a_0 in $\mathcal{R}$ der Fall ist.

(c) Berechne das multiplikative Inverse von $f = 1 - t$ im Ring $\mathcal{R}[\![t]\!]$.

2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann heißt ein nichtkonstantes Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$ irreduzibel, wenn es keine nichtkonstanten Polynome $q, r \in \mathbb{K}[t]$ mit $p = q \cdot r$ gibt. Für $p, q \in \mathbb{K}[t]$ sagen wir q teilt p, falls es ein $g \in \mathbb{K}[t]$ gibt mit $p = q \cdot g$. (2+4+4)

(a) Zeige, dass ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{C}[t]$ immer Grad 1 hat.

(b) Schreibe die Polynome $p_1 = t^2 - 2$, $p_2 = t^2 + 2$, $p_3 = t^4 - 1$ und $p_4 = t^2 + t + 1$ jeweils als Produkt irreduzibler Polynome über den Körpern $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

(c) Seien $p_1, p_2 \in \mathbb{K}[t] \setminus \{0\}$ derart, dass es kein nichtkonstantes Polynom in $\mathbb{K}[t]$ gibt, welches sowohl p_1 als auch p_2 teilt. Zeige, dass es dann $q_1, q_2 \in \mathbb{K}[t]$ gibt mit

$$q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2 = 1 \text{ in } \mathbb{K}[t].$$

3. In dieser Aufgabe betrachten wir Polynome in $\mathbb{C}[t]$ vom Grad höchstens vier. Wir wissen, wie man die Nullstellen eines quadratischen Polynoms bestimmt. Wir zeigen hier, dass es auch eine Formel für Polynome vom Grad 3 und Grad 4 gibt. (5+5)

(a) Zeige zuerst, dass man die Nullstellen eines allgemeinen Polynoms vom Grad 3 bestimmen kann, wenn man die Lösungen der spezielleren Gleichung

$$t^3 + pt + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{C}$ bestimmen kann. Mache nun den Ansatz $t = u + v$ und bestimme dann v in Abhängigkeit von u so, dass die Lösungen der resultierenden Gleichung in u bestimmbar sind. Letztes gelingt, wenn alle Terme außer u^3, v^3 und q verschwinden. Begründe, weshalb damit alle Lösungen der ursprünglichen Gleichung bestimmt werden können.

Beachte: Bei dieser Aufgabe muss man keine geschlossene Lösungsformel angeben, sondern nur ein algebraisches Lösungsverfahren beschreiben!

(b) Analog zum vorigen Aufgabenteil können wir uns für Polynome vom Grad 4 auf eine Gleichung der Form

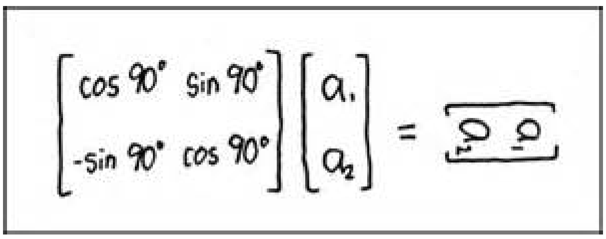
$$t^4 + pt^2 + qt + r = 0$$

mit $p, q, r \in \mathbb{C}$ beschränken. Verwende nun den Ansatz

$$t^4 + pt^2 + qt + r = (t^2 + A)^2 - (Bt + C)^2$$

mit $A, B, C \in \mathbb{C}$ geeignet, um die Lösung obiger Gleichung auf die Lösung von quadratischen und kubischen Gleichungen zurückzuführen.

Es ist ein berühmtes Resultat der Algebra, dass es für allgemeine Polynome vom Grad 5 oder höher keine Lösungsformel basierend auf Wurzeloperationen mehr gibt.
Wer jetzt noch nicht genug vom Rechnen hat, der kann sich mit dem obigen Verfahren an der Lösung der bekannten Leiteraufgaben versuchen, welche zum Beispiel auf folgender Webseite beschrieben sind: `http://www.mathematische-basteleien.de/leiter.htm`



`https://xkcd.com/184/`