Prof. Dr. Irene Bouw
Christian Steck
Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 2

Lineare Algebra

Die Abgabe ist möglich bis spätestens 10 Uhr am 3.11.2014 im Briefkasten vor H3.

»If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.«

— *John von Neumann*

Aufgabe 1 (*Lineare Unabhängigkeit*) (3+3+3+2)

Wir betrachten die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}-3\\3\\-4\end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Ist das System $(v_1, \ldots, v_4)$ linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie alle dreielementigen Teilsysteme von $(v_1, \ldots, v_4)$ welche linear unabhängig sind.

(c) Bestimmen Sie alle dreielementigen Teilsysteme von $(v_1, \ldots, v_4)$ welche ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(d) Sei $w = (3, -6, -2)$. Schreiben Sie w als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2 und v_4.

Aufgabe 2 (*Untervektorräume*) (3+1+1+3+4)

In dieser Aufgabe betrachten wir stets einen Vektorraum V und eine Teilmenge $U \subset V$. In welcher der folgenden Konfigurationen ist U ein Untervektorraum von V? Geben Sie in diesen Fällen auch ein endliches Erzeugendensystem von U an.

(a) Sei $V = \mathbb{R}^m$ und $U = \{(u_1, \ldots, u_m) \in V \mid u_1 = \ldots = u_m\}$.

(b) Sei $V = P_n(\mathbb{R})$ und $U = \{f \in V \mid f(1) = 1\}$.

(c) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in V \mid 3x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 2\}$.

(d) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in V \mid 3x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0\}$.

(e) Sei $V = \mathbb{R}^m$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ in Zeilenstufenform mit r Pivots und $U = \{b \in V \mid \text{Lös}(A, b) \neq \emptyset\}$.

Aufgabe 3 (*Zeige oder Widerlege*) (2+2+3)

Geben Sie für die folgenden Aussagen jeweils entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ eine nichtleere Menge welche (UV2) erfüllt, so ist U bereits ein Untervektorraum.

(b) Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ eine nichtleere Menge welche (UV3) erfüllt, so ist U bereits ein Untervektorraum.

(c) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear unabhängig, dann sind die drei Vektoren

$$v_1 + v_2,\ \ v_1 + 5v_2 + 3v_3,\ \ 4v_1 + v_2 + 2v_3$$

ebenfalls linear unabhängig.

(Σ 30)