



---

## Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 9 - Hinweise

---

### Hinweis 1:

Den folgenden nützlichen Satz dürfen Sie für die Lösung von Aufgabe 39 – und von nun an auch für alle anderen Übungsaufgaben – verwenden.

**Satz** (Basisauswahlsatz). *Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  und sei  $E \subseteq V$ . Dann gibt es eine Teilmenge  $F$  von  $E$ , welche eine Basis von  $\mathcal{LH}(E)$  ist.*

### Hinweis 2:

Damit die Formel in Aufgabe 40(a) auch im Fall  $n = 1$  Sinn ergibt, muss man die folgende Definition beachten:

**Definition** (Leeres Produkt). Sei  $K$  ein Körper und seien Elemente  $x_j \in K$  gegeben (wobei  $j$  aus irgendeiner Indexmenge stammt). Dann definiert man das *leere Produkt*  $\prod_{j \in \emptyset} x_j$  als 1.

Obige Definition besagt anschaulich: Wann immer man über „gar nichts“ multipliziert, definiert man das Ergebnis dieser Multiplikation als 1. Entsprechend erhält man zum Beispiel  $\prod_{1 \leq j \leq 0} x_j = \prod_{j \in \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 0\}} x_j = \prod_{j \in \emptyset} x_j = 1$ .

*Bemerkung:* Analog zu obiger Definition definiert man die *leere Summe*  $\sum_{j \in \emptyset} x_j$  als 0.

### Hinweis 3:

Aufgabe 40(a) kann man mit verschiedenen Methoden lösen. Man kann die Behauptung direkt nachrechnen (mit Hilfe vollständiger Induktion), was aber sehr aufwendig ist. Eine kürzere und elegantere Lösung können Sie finden, wenn Sie zwar ebenfalls eine Induktion führen, im Induktionsschritt aber den folgenden Satz benutzen:

**Satz** (Identitätssatz für Polynome). *Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und seien  $p(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$  und  $q(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k x^k$  zwei Polynome mit Koeffizienten  $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ .*

*Wenn  $\alpha_n = \beta_n \neq 0$  gilt und wenn es  $n$  verschiedene Zahlen  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  mit  $p(x_k) = q(x_k)$  für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$  gibt, dann gilt bereits  $p(x) = q(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .*

Diesen Satz dürfen Sie von nun an in den Übungen verwenden.