

Acoustique des instruments de musique :
Exercices.

Antoine Chaigne et Jean Kergomard

PLAN DU LIVRE

partie 1. Equations de base et oscillateurs	1
partie 2. Ondes et modes	5
partie 3. Nonlinéarités et auto-oscillations	23
partie 4. Rayonnement et interaction fluide-structure	31

Première partie

Equations de base et oscillateurs

■ Page 24 - Signification physique du coefficient de Poisson

On considère un essai de traction uniaxiale. Avec un modèle “1D” de la barre, l'équation (1.26) fournit $\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E$, ce qui ne permet pas de conclure quant à la signification du coefficient de Poisson. En revanche, si l'on reprend l'essai avec une éprouvette “3D” (voir la figure 0.1 ci-dessous), montrer que l'on trouve, d'après (1.30) : $\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E$, $\varepsilon_{yy} = -\nu\sigma_{xx}/E$, et $\varepsilon_{zz} = -\nu\sigma_{xx}/E$.

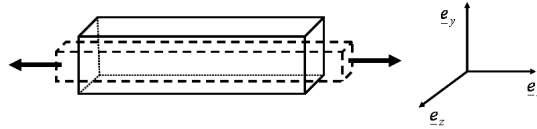


Figure 0.1. Traction d'une barre “3D” et contraction latérale (effet Poisson).

En déduire que le coefficient de Poisson donne une mesure des contractions latérales de l'éprouvette selon les axes \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z sous l'effet de la traction selon \mathbf{e}_x . On appelle “effet Poisson” cette propriété.

Solution : Dans la partie centrale de l'éprouvette représentée sur la figure 0.1, on peut admettre que le champ de contrainte est uniaxial de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{xx} \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x. \quad (0.1)$$

On en déduit, par (1.30)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \underline{\underline{e}}_x \otimes \underline{\underline{e}}_x - \frac{\nu\sigma_{xx}}{E} [\underline{\underline{e}}_y \otimes \underline{\underline{e}}_y + \underline{\underline{e}}_z \otimes \underline{\underline{e}}_z]. \quad (0.2)$$

■ Page 64 Résonateur de Helmholtz

Il est souvent question dans cet ouvrage de résonateurs de Helmholtz : notamment, au chapitre 7, l'embouchure de trompette et l'ocarina (cf page 309). Pour un instrument à cordes pincées comme la guitare ou le luth, ou encore à cordes frottées, un tel résonateur est constitué d'une cavité reliée à l'extérieur par l'intermédiaire d'une ouverture, ou évent (rose, ouïes).

Supposons ici que la table d'harmonie de ces instruments reste immobile (la question d'un modèle d'ensemble est traitée au chapitre 6, cf page 229). Dans ce cas (théorique, bien sûr, car si la table est rigide nous verrons que l'instrument ne peut produire de son audible), l'ensemble cavité + évent peut être convenablement représenté par un résonateur de Helmholtz : dans quelles limites de fréquences cette approximation est-elle valable, selon vous ?

On appliquera cette réponse à une guitare dont la plus grande dimension est de 50 cm, en considérant que la vitesse du son c vaut 340 ms^{-1} .

Montrer que la fréquence de résonance de Helmholtz théorique de ces instruments est donnée par $f_r = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{\ell V}}$ où V est le volume de la cavité, S la surface des ouvertures et ℓ la longueur du col (ou goulot).

Remarque : Expérimentalement, on trouve que la fréquence de résonance est inférieure au résultat théorique calculé ci-dessus. Nous verrons au chapitre 7 que c'est surtout l'estimation de ℓ qui pose problème.

Solution

La longueur d'onde doit être très supérieure aux dimensions de l'instrument, ce qui signifie que le nombre de Helmholtz doit être très inférieur à l'unité (en pratique le cas inférieur à 0,5 est satisfaisant). On trouve alors 108 Hz comme fréquence maximum de validité. La fréquence de Helmholtz est la résonance d'un des deux circuits de la figure 1.26, et on a : $\omega_r = \sqrt{M_a C_a}$, d'où le résultat.

■ Page 81 Équation intégrale

Retrouver la solution intégrale (2.20) par la méthode générale présentée ci-après, qui reste dans le domaine temporel. Pour simplifier les calculs, un peu fastidieux, on fera $\alpha_0 = 0$. Le principe est le suivant : **écrire** l'équation de départ (2.2) pour la variable temps t_0 , la **multiplier** par $g(t|t_0)$, et la **soustraire** de l'équation (2.13) multipliée par $y(t_0)$. On cherche à intégrer de $t_0 = 0$ à $t_0 = t$, ce qui revient à ajouter toutes les solutions impulsionnelles pour les différents instants d'impulsion. Pour cela, **montrer** d'abord en intégrant par parties que :

$$\int_0^t \left[y(t_0) \frac{d^2 g(t|t_0)}{dt_0^2} - g(t|t_0) \frac{d^2 y(t_0)}{dt_0^2} \right] dt_0 = \left[y(t_0) \frac{dg(t|t_0)}{dt_0} - g(t|t_0) \frac{dy(t_0)}{dt_0} \right]_{t_0=0}^{t_0=t}.$$

Pourquoi le crochet de droite s'annule-t-il en $t_0 = t$?

Intégrer la différence des deux équations obtenues ci-dessus. En **déduire** le résultat (2.20) : pour cela on prendra garde au fait que la fonction g est en fait une fonction de $t - t_0$ (cf. éq. 2.14), et donc que $dg/dt = -dg/dt_0$.

Solution

Étant donné les conditions initiales vérifiées par la fonction de Green (nulle ainsi que sa dérivée pour $t < t_0$), la valeur du crochet s'annule en $t_0 = t$. On obtient donc :

$$-y(0) \frac{dg(t|0)}{dt_0} + g(t|0) \frac{dy}{dt_0} [t_0 = 0] = \int_0^t y(t_0) \delta(t - t_0) dt_0 - \frac{1}{M} \int_0^t f(t_0) g(t|t_0) dt_0.$$

La première intégrale vaut $y(t)$, d'où le résultat.

■ Page 84 Facteur de qualité dépendant de la fréquence

On considère l'impédance donnée par l'équation (2.31), réduite par $M\omega_0$. On suppose que le facteur de qualité varie lentement avec la fréquence : $Q_0^{-2}(\omega) = Q_0^{-2}(\omega_0) [1 + Ax + Bx^2]$, où x est la variation relative de fréquence $\omega = \omega_0(1 + x)$. **Montrer** que $|Z|^2$ vaut, au 2e ordre en x ,

$$|Z|^2 = q^2 + Aq^2x + (Bq^2 + 4)x^2 + 0(x^3)$$

si $q^2 = Q_0^{-2}(\omega_0)$, puis **calculer** la dérivée par rapport à x , et **montrer** que le minimum d'impédance est obtenu pour la fréquence correspondant à

$$x = -\frac{Aq^2}{8[1 + Bq^2/4]}.$$

En **déduire** que le décalage relatif de fréquence de résonance est de l'ordre de q^2 ainsi que celui du minimum d'impédance.

Deuxième partie

Ondes et modes

■ Page 111 - Force exercée sur une corde pincée

On veut retrouver le résultat (3.58) comme nous l'avons fait pour un oscillateur à un degré de liberté, en considérant la force exercée jusqu'au lâcher de la corde, en $t = 0$. Montrer que cette force s'écrit

$$f(x, t) = \frac{hTL}{x_0(L - x_0)} H(-t) \delta(x - x_0) .$$

En déduire que la vitesse est, à un facteur près, la fonction de Green du problème, et utiliser l'équation (3.46) pour la calculer. Vérifier que le résultat est le même que celui obtenu par (3.58).

Solution :

- Un simple diagramme de forces montre que le pincement doit équilibrer les forces Th/x_0 et $Th/(L - x_0)$ (au premier ordre) de part et d'autre du point de contact x_0 . Au total, on obtient donc le module $F = ThL/x_0(L - x_0)$. Cette force étant localisée en x_0 , on doit la multiplier par $\delta(x - x_0)$. Elle s'arrête à $t = 0$, d'où multiplication par $H(-t)$.
- D'après (3.25), l'équation des ondes de vitesse sur la corde s'écrit

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -T \frac{hL}{x_0(L - x_0)} \delta(-t) \delta(x - x_0),$$

soit bien à un facteur près la fonction de Green donnée par (3.46).

- L'expression (3.58) s'obtient alors en intégrant cette fonction par rapport au temps, puis en remplaçant $\omega_n = n\pi c/L$, $\Phi_n(x) = \sin k_n x$, $m_n = \rho SL/2$ et $c^2 = T/\rho S$.

■ Page 118 - Orthogonalité dans le cas général d'une corde inhomogène

On considère le cas général de la corde inhomogène de longueur L (équation (3.25) sans terme source), et on se propose de déterminer les propriétés d'orthogonalité des modes propres d'un tel système lorsque l'une des deux extrémités de la corde est supposée fixe et l'autre terminée par une masse M_L . On écrit donc les conditions aux limites du problème :

$$y(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad -T(x) \frac{\partial y}{\partial x} = M_L \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad x = L . \quad (0.3)$$

(1) Montrer que, pour la corde prise isolément, les modes sont orthogonaux par rapport à la raideur mais pas par rapport à la masse, ce qui se traduit par :

$$\mathcal{P}_M(m, n) = \frac{t_n}{\omega_n^2} \delta_{mn} - M_L \Phi_m(L) \Phi_n(L)$$

où

$$t_n = \mathcal{P}_M(n, n) = \int_0^L T(x) \left[\frac{d\Phi_n(x)}{dx} \right]^2 dx .$$

(2) En déduire alors que l'équivalent de la relation (3.38) s'écrit ici :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) &= \frac{1}{t_n} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(x, t)}{\rho(x)S(x)} \right) T(x) \frac{d\Phi_n(x)}{dx} dx \\ &= \frac{1}{t_n} \left[\frac{f(L, t)}{\rho(L)S(L)} M_L \Phi_n(L) + \omega_n^2 \int_0^L f(x, t) \Phi_n(x) dx \right] , \end{aligned}$$

(3) Montrer enfin que les conditions initiales pour $q_n(t)$ s'écrivent :

$$q_n(0) = \frac{\omega_n^2}{t_n} \left[\int_0^L \rho(x) S(x) \Phi_n(x) y(x, 0) dx + M_L \Phi_n(L) y(L, 0) \right],$$

et de même pour $\dot{q}_n(t)$. Montrer aussi que s'il n'y a pas de sources et que la vitesse initiale est nulle,

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t.$$

Indications :

(1) Utiliser les expressions (3.33) et (3.35).

(2) Dériver (3.25) par rapport à x , puis la multiplier par $T(x)d\Phi_n(x)/dx$.

■ Page 125 - Corde soumise à une force mobile

Le but de cet exercice est de montrer l'intérêt de l'approche modale pour résoudre l'équation des cordes vibrantes dans le cas d'un terme source propagatif. Pour fixer les idées, considérons une corde idéale fixée aux deux extrémités et soumise à un terme source de la forme $f(x - vt) = F_0 \delta(x - vt)$, à partir d'un état d'équilibre à $t = 0$. Ceci correspond à la situation pratique d'un effort localisé se déplaçant le long de la corde à la vitesse v (voir Figure 0.2). On peut penser, par exemple, au glissement d'un doigt ou d'un archet sur une corde.

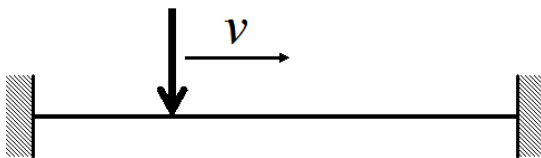


Figure 0.2. Corde soumise à une force mobile.

(1) Montrer que les méthodes décrites dans le chapitre 3 fournissent la projection modale de la force $f_n(t) = F_0 \sin k_n vt$ et l'expression du déplacement généralisé $q_n(t) = \frac{F_0}{m_n \omega_n} \int_0^t \sin k_n v \theta \sin \omega_n(t - \theta) d\theta$. En posant $\Omega_n = k_n v = \omega_n \frac{v}{c}$, en déduire l'expression du déplacement :

$$y(x, t) = F_0 \sum_n \frac{\sin k_n x}{m_n (\omega_n^2 - \Omega_n^2)} \left[\sin \Omega_n t - \frac{v}{c} \sin \omega_n t \right]. \quad (0.4)$$

(2) En déduire que le spectre du déplacement est non seulement composé des fréquences propres ω_n de la corde, mais également de la série Ω_n qui provient du mouvement de la source. Dans le cadre de l'acoustique musicale, il est légitime de supposer $v \ll c$ si bien que les Ω_n correspondent à des fréquences très basses par rapport à la série harmonique de la corde.

Indications :

– La projection de la force mobile sur le mode n s'écrit :

$$\langle F, \Phi_n \rangle = \int_0^L F_0 \delta(x - vt) \sin k_n x dx = F_0 \sin k_n vt.$$

– En conséquence, le déplacement généralisé s'écrit ici, d'après (3.44) :

$$q_n(t) = \frac{F_0}{m_n \omega_n} \int_0^t \sin \Omega_n \theta \sin \omega_n(t - \theta) d\theta,$$

d'où la solution (0.4), après quelques manipulations algébriques.

■ Page 125 - Marteau de piano : effet d'une largeur spatiale dépendant du temps

Dans le cas des structures excitées par impact, on remarque que la surface de contact varie avec le temps. C'est le cas, par exemple, du marteau de piano qui s'écrase progressivement sur la corde au moment de l'attaque. Afin d'illustrer à nouveau l'intérêt de l'approche modale, nous examinons dans un cas simplifié l'influence de cet effet sur l'excitation des modes de corde.

Considérons donc le cas d'une densité linéique de force d'amplitude $F_o/2a$ localisée au point d'excitation $x = x_o$ d'une corde idéale fixée à ses deux extrémités, dont la largeur d'impact augmente linéairement avec le temps pendant une durée τ depuis 0 jusqu'à atteindre une largeur $2a$ avant de décroître de façon similaire de $2a$ à 0 pendant la même durée (voir figure 0.3). En mettant à profit les résultats du

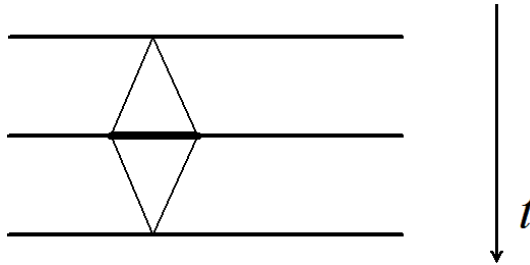


Figure 0.3. Corde soumise à une excitation de largeur variable dans le temps.

chapitre 3, montrer que les forces modales sont données par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{F_o}{2a} \int_{x_o-at/\tau}^{x_o+at/\tau} \sin k_n x \, dx = \frac{F_o}{k_n a} \sin k_n x_o \sin k_n a \frac{t}{\tau} & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{F_o}{2a} \int_{x_o-2a+at/\tau}^{x_o+2a-at/\tau} \sin k_n x \, dx = \frac{F_o}{k_n a} \sin k_n x_o \sin k_n a \left(2 - \frac{t}{\tau}\right) & \text{pour } \tau < t \leq 2\tau. \end{cases} \quad (0.5)$$

Montrer que l'on obtient alors un filtrage passe-bas dépendant du temps, la fréquence de coupure diminuant au fur et à mesure que le marteau de piano s'écrase sur la corde, suivi de l'effet inverse lorsque le marteau quitte la corde.

Indications : Utiliser la même méthode qu'à la page 124, cette fois avec des bornes dépendant du temps pour le calcul de l'intégrale donnant la projection modale de la force.

■ Page 136 - Orthogonalité des modes propres d'une barre libre

En utilisant les résultats présentés au chapitre 3, démontrer l'orthogonalité des modes de vibration d'une barre de longueur L , de section variable, libre aux deux extrémités.

Solution :

– D'après (3.125), on doit avoir pour chaque mode m :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 \Phi_m}{dx^2} \right] = \omega_m^2 \rho S \Phi_m .$$

- Après multiplication par un autre mode Φ_n et intégration sur toute la longueur de la barre, on obtient :

$$\int_0^L \Phi_n \frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 \Phi_m}{dx^2} \right] dx = \Phi_n \frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 \Phi_m}{dx^2} \right] \Big|_0^L - EI \frac{d\Phi_n}{dx} \frac{d^2 \Phi_m}{dx^2} \Big|_0^L + \int_0^L EI \frac{d^2 \Phi_m}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_n}{dx^2} dx . \quad (0.6)$$

- En raison des conditions aux limites libres en $x = 0$ et $x = L$, les deux premiers termes de l'équation (0.6) sont nuls. Il reste

$$\int_0^L EI \frac{d^2 \Phi_m}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_n}{dx^2} dx = \omega_m^2 \int_0^L \rho S \Phi_n \Phi_m dx . \quad (0.7)$$

- Un calcul analogue, en intervertissant les modes n et m fournit :

$$= \omega_n^2 \int_0^L \rho S \Phi_m \Phi_n dx .$$

Par conséquent, on doit avoir $\int_0^L \rho S \Phi_m \Phi_n dx = 0$, ce qui montre l'orthogonalité par rapport à la masse. L'équation (0.7) fournit alors l'orthogonalité par rapport à la raideur $\int_0^L EI \frac{d^2 \Phi_m}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_n}{dx^2} dx = 0$.

On vérifie sur cet exercice qu'il n'est pas nécessaire de connaître explicitement les déformées modales pour démontrer l'orthogonalité.

■ Page 139 - Effet du creusement d'une barre sur ses fréquences propres

L'exemple le plus simple d'une barre de section variable est illustré par la figure 0.4 qui représente une barre creusée uniformément en son milieu. Montrer que la diminution d'épaisseur au centre de la barre permet de contrôler l'écartement entre les fréquences propres du système.

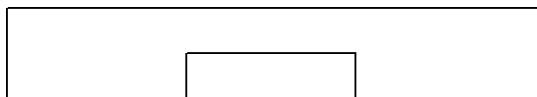


Figure 0.4. Barre creusée.

Indications :

(1) D'un point de vue qualitatif (pour une barre de largeur b), on peut remarquer que le fait de diminuer l'épaisseur $h(x)$ de la barre d'une quantité Δh a pour conséquence de diminuer la masse d'une quantité δM proportionnelle à Δh . La raideur, elle, diminue alors en proportion de Δh^3 . En conséquence, une diminution d'épaisseur conduit à abaisser les fréquences propres de la barre en flexion.

(2) Pour savoir à quel endroit il convient de creuser pour abaisser un mode plutôt qu'un autre, il convient de reprendre les résultats de l'exercice précédent, cette fois avec $m = n$. On voit alors qu'il est possible d'estimer la fréquence propre ω_m à

partir du quotient :

$$\omega_m^2 = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}},$$

$$\text{où } \mathfrak{K} = \int_0^L EI \left(\frac{d^2 \Phi_m}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$\text{et } \mathfrak{M} = \int_0^L \rho S (\Phi_m)^2 dx .$$

On constate qu'on agira d'autant mieux sur l'opérateur de masse \mathfrak{M} que l'on se place au voisinage des maximums de $\Phi_m(x)$. De la même manière, on agira d'autant mieux sur l'opérateur de raideur \mathfrak{K} que l'on creusera au voisinage des maximums de la dérivée seconde de la déformée modale.

(3) Pour une barre de xylophone, on modifie donc de manière substantielle la fréquence du premier mode et, dans une moindre mesure, celle du troisième mode en creusant au centre. Par contre, la fréquence propre du deuxième mode est peu modifiée. On peut ainsi écarter les trois premières fréquences de manière à les rendre quasi-harmoniques, ce qui n'est pas le cas d'une barre de section constante.

■ Page 147 - Densité modale d'une plaque orthotrope

On s'intéresse à présent au cas d'une plaque orthotrope rectangulaire appuyée sur ses bords pour laquelle les fréquences propres sont données par (3.163). Pour simplifier les calculs, on suppose en outre que les constantes de rigidité sont liées par la relation : $D_2 + D_4 = 2\sqrt{D_1 D_3}$.

Montrer alors que l'on obtient pour la plaque orthotrope la même relation que (3.171) pour la densité modale à condition de remplacer D par D_1 et b par $\beta = b \left(\frac{D_1}{D_3} \right)^{1/4}$. En déduire que la souplesse introduite par l'orthotropie conduit, pour une plaque de géométrie équivalente, à augmenter la densité modale par rapport au cas isotrope.

Solution : Compte tenu de l'hypothèse $D_2 + D_4 = 2\sqrt{D_1 D_3}$, les fréquences propres s'écrivent, d'après (3.163) :

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{1}{\rho_p h}} \sqrt{D_1} \left[\frac{m^2}{a^2} + \sqrt{\frac{D_3}{D_1}} \frac{n^2}{b^2} \right]$$

On voit que tout se passe comme si on avait artificiellement multiplié la largeur b de la plaque par le coefficient $\left(\frac{D_1}{D_3} \right)^{1/4}$ par rapport au cas isotrope de module D_1 . D'après (3.170), la densité modale $N(f)$ est proportionnelle à b , et est donc multipliée d'autant.

■ Page 160 Équation de d'Alembert

On veut vérifier que l'expression obtenue en (4.8) pour une impulsion de débit dans un tuyau infini (sans réflexions), ou son équivalent pour une corde, vérifie bien l'équation de d'Alembert (4.23). **Montrer** successivement à partir de (4.8) que :

$$v(x, t) = \frac{1}{2} Y_c f_s [\delta(x - ct - x_s) + \delta(x + ct - x_s)],$$

puis, par intégration, l'expression de $y(x, t)$, puis que $v_0(x) = Y_c f_s \delta(x - x_s)$. Il restera à vérifier l'équation de D'Alembert.

Solution

Dans (4.8), la présence d'une valeur absolue indique qu'il y a en fait deux impulsions ; il suffit d'utiliser les analogies pour trouver le résultat concernant $v(x, t)$. L'intégration donne :

$$y(x, t) = \frac{1}{2c} Y_c f_s [-H(x - ct - x_s) + H(x + ct - x_s)] + y(x, 0).$$

Le premier terme (intégral) de (4.23) donne bien les deux fonctions H ci-dessus, et

$$\frac{1}{2} [y_0(x - ct) + y_0(x + ct)] = \frac{1}{2} [y(x - ct, 0) + y(x + ct, 0)] = y(x, 0).$$

■ Page 165 Équation différentielle vérifiée par l'impédance

Exercice 1. Montrer, en utilisant les équations différentielles d'ordre 1 (1.109) et (1.110), à une dimension sans source, que l'impédance spécifique (rapport pression/vitesse) est solution d'une équation non linéaire d'ordre 1, dite de Riccati : $Z'(x) = A + BZ^2$, dont on trouvera les coefficients. A quoi correspondent les valeurs qui annulent les 2 membres ? **Montrer** que l'intégration de cette équation donne directement la deuxième forme de l'équation (4.29).

Remarque : l'équation de Riccati est d'ordre 1 (l'impédance ne dépend que d'une constante), mais elle est non linéaire.

Solution

On a

$$\frac{dP}{dx} = -j\omega\rho V ; \quad \frac{dV}{dx} = -j\omega\chi_s P.$$

On doit calculer

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{P}{V} \right) = -j\omega\rho + j\omega\chi_s Z^2 \text{ soit } \frac{Z'}{\rho c} = -jk \left[1 - \left(\frac{Z}{\rho c} \right)^2 \right].$$

La dérivée s'annule pour $Z = \pm\rho c$, impédance des ondes progressives (qui est indépendante de x). On ré-obtient l'équation (4.29) en intégrant cette dernière équation, ce qui donne

$$\arg \tanh \left(\frac{Z(x_2)}{\rho c} \right) - \arg \tanh \left(\frac{Z(x_1)}{\rho c} \right) = -jk(x_2 - x_1).$$

Exercice 2. Montrer que si l'impédance est imaginaire pure en un point, elle l'est partout, et **interpréter** le résultat en termes d'intensité acoustique.

Solution

Le résultat est évident à partir de (4.29) ou encore de l'équation de Riccati ci-dessus. En utilisant (1.128), on en déduit qu'en régime harmonique la puissance moyenne par période est nulle en tout point. Au § 3.2, on a vu qu'en régime périodique, la divergence de la puissance moyenne est nulle quand il y a conservation de l'énergie. Ceci confirme que si la puissance moyenne est nulle en un point, elle doit être nulle partout.

■ Page 170 Méthode de la formule de Poisson

1. On veut d'abord démontrer la résultat (4.17). La démonstration n'est pas immédiate. On commence par remarquer que l'équation du haut de la page 161 peut s'écrire plus généralement :

$$\sigma(t) = H(t + \theta) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2n\ell/c)$$

où $\theta < 2\ell/c$, car alors $\delta(t + 2n\ell/c) = 0$ pour tout $n > 0$, et $t > -2\ell/c$, donc pour $t > -\theta > -2\ell/c$. L'équation (4.16) peut donc s'écrire :

$$\sigma(t) = \frac{c}{2\ell} H(t + \theta) \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_n t}.$$

Pour chacune des ondes primaires, on peut choisir un θ égal à leur retard, qui est par définition inférieur à l'aller-retour dans le tuyau. Ainsi pour la première, on peut choisir $\theta = |(x - x_s)/2|$. Il reste donc à calculer pour cette onde $p_{dir}(t) = \delta(t - \theta)$ le produit $p_{dir}(t) * \sigma(t)$. **Montrer** en calculant ce produit de convolution que :

$$\delta(t - \theta) * H(t + \theta) e^{j\omega_n t} = H(t) e^{j\omega_n(t - \theta)} = H(t) e^{j\omega_n t} P_{dir}(\omega_n).$$

Cette méthode démontre le résultat cherché (4.17).

2. Nous cherchons maintenant, grâce à la formule de Poisson, la décomposition modale de la fonction de Green, quand la fonction aller-retour $g_{AR}(t)$ est telle que la réponse est périodique. Prenons un cas très simple (tuyau ouvert-ouvert), $R_0 = R_\ell = -1$, $\eta_0 = \eta_\ell = 0$). En utilisant l'équivalent de l'équation (4.17), **montrer** que :

$$g(x, t|x_s, 0) = \frac{c}{2\ell} H(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{primaires}(x, \omega_n) \exp(j\omega_n t), \quad (0.8)$$

où les ondes primaires sont données par (4.46), avec (4.50) :

$$G_{primaires}(x, \omega_n) = -\frac{2j}{k_n} \sin k_n x \sin k_n x_s.$$

Vérifier, en additionnant les termes d'indice n et $-n$, que l'on retrouve (4.53).

Solution

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - \theta) H(t - \tau + \theta) e^{j\omega_n(t - \tau)} d\tau = H(t) e^{j\omega_n(t - \theta)}$ par définition de $\delta(t - \theta)$.

Par ailleurs, la transformée de Fourier de $\delta(t - \theta)$ est $\exp(-j\omega\theta)$.

2. On utilise les équations (4.20) et (4.21) comme on a utilisé (4.13) et (4.15). Si on ajoute les termes d'indice n et $-n$, on obtient, à $\frac{c}{2\ell} H(t)$ près :

$$-\frac{2j}{k_n} \sin k_n x \sin k_n x_s [\exp(j\omega_n t) - \exp(-j\omega_n t)] = \frac{4}{k_n} \sin k_n x \sin k_n x_s \sin \omega_n t.$$

Ceci est bien le résultat (4.53).

■ Page 173 Réponse impulsionnelle correspondant à l'impédance d'entrée

1. **Montrer** que la réponse impulsionnelle correspondant à l'impédance d'entrée (c.-à-d. la réponse en pression à l'entrée d'un cylindre à une impulsion de débit) dans le cas $\eta_\ell = 0$ s'écrit :

$$p(x, t) = Z_c u_s [\delta(t) - 2\delta(t - 2\ell/c) + 2\delta(t - 4\ell/c) - 2\delta(t - 6\ell/c) + \dots].$$

On utilisera les résultats (4.12) à (4.15). **Interpréter** le résultat.

2. Retrouver ce résultat en décomposant l'équation (4.62), selon ma méthode utilisée pour l'équation (4.38), puis en revenant dans le domaine temporel.

Solution

1. Dans (4.12) et suivantes, on fait $r_0 = 1$, et $r_\ell = -1$. On a donc :

$$\begin{aligned} g_{AR}(t) &= -\delta(t - 2\ell/c); \\ p_{\text{primaires}}(x, t) &= Z_c u_s [\delta(t) - \delta(t - 2\ell/c)], \end{aligned}$$

D'où le résultat. Le premier terme dans la somme correspond à la réponse du tuyau infini, qui se réfléchit en changeant de signe en ℓ , puis double quand elle arrive sur l'entrée (qui est fermée, puisque le déplacement du piston de débit $u_s \delta(t)$, cf page 159, est un échelon et le déplacement se fait en $t = 0$, après quoi le piston est fixe). Et ainsi de suite, l'onde réfléchie à l'entrée rechange de signe au bout ℓ , et re-double à l'entrée, etc.

2. De l'équation 4.62, on écrit :

$$Z/Z_c = j \frac{\sin k\ell}{\cos k\ell} = \frac{1 - \exp(-2jk\ell)}{1 + \exp(-2jk\ell)}$$

Il suffit de développer le dénominateur pour retrouver le résultat, en prenant la TF⁻¹.

■ Page 173 Différentes formules de récurrence pour le modèle de Raman

On veut montrer, pour le modèle de Raman, qu'il existe des cas particuliers où d'autres relations de récurrence existent que celle obtenue en (4.64). On part encore du domaine fréquentiel, en écrivant l'équation (4.38) sous la forme suivante :

$$P(x, x_s) = \frac{1}{2} Z_c U_s \frac{e^{-jk(x-x_s)} [1 + R_\ell e^{-2jk(\ell-x)}] [1 + R_0 e^{-2jkx_s}]}{1 - R_0 R_\ell \exp(-2jk\ell)}.$$

On suppose que :

$$R_0 R_\ell \exp(-2jk\ell) = z^n \text{ avec } z = -R_0 e^{-2jkx_s}. \quad (0.9)$$

On peut alors simplifier par le facteur $(1 - z)$, et alors :

$$[1 + z + z^2 + \dots z^{n-1}] P(x, x_s) = \frac{1}{2} Z_c U_s e^{-jk(x-x_s)} [1 + R_\ell e^{-2jk(\ell-x)}]. \quad (0.10)$$

1. Pour étudier la condition (0.9) permettant cette écriture, on suppose qu'on peut la découpler en :

$$R_\ell = (-1)^n R_0^{n-1} \text{ et } \ell = nx_s.$$

Le tuyau (ou la corde) doit donc être excité à une fraction entière de la longueur. **Vérifier** que les trois cas suivants satisfont ces conditions : i) $R_\ell = R_0 = -1$, n quelconque ; ii) $n = 2$, $R_\ell = R_0$ quelconques ; iii) $n = 1$, $R_\ell = -1$, R_0 quelconque. **Interpréter** les deux premiers cas, en montrant qu'il s'agit respectivement du modèle d'une corde sans pertes aux extrémités, excitée en ℓ/n , et d'une corde excitée en son milieu avec les mêmes réflexions aux deux extrémités (par exemple le modèle de Raman).

2. **Montrer** que dans le cas $x = x_s = \ell_a$, (0.10) s'écrit aussi :

$$[1 + z + z^2 + \dots z^{n-1}] P(x, x_s) = \frac{1}{2} Z_c U_s (1 - z^{n-1}).$$

Montrer que pour le modèle sans pertes, quand $\ell = n\ell_a$, la relation (4.65) s'écrit aussi :

$$v(t) + v(t - 2\ell_a/c) + \dots v(t - 2(n-1)\ell_a/c) = \frac{1}{2} Y_c [f_s(t) - f_s(t - 2(n-1)\ell_a/c)].$$

En déduire que la récurrence est d'un ordre inférieur à celle de l'équation (4.65) mais qu'il y a alors plus de termes.

Solution

1. Si $R_\ell = R_0 = -1$, il n'y a pas de pertes aux extrémités, et la vitesse s'annule aux extrémités. Si $n = 2$, la corde est excitée en $\ell/2$.
2. On a alors $\lambda = 1$, $z = \exp(-2jkx_s)$, et la récurrence s'arrête au terme de retard $2(n-1)\ell_a/c$ au lieu de $2n\ell_a/c = 2\ell/c = \tau$.

■ Page 173 Exemple de série infinie

Vérifier, en $x = L = \ell + \Delta\ell$, et pour $\omega = 0$ que la décomposition modale (4.71) est correcte. On utilisera à cette fin le résultat : $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 + \dots$

Solution

On écrit $k_n L = (2n-1)\pi/2$.

■ Page 198 - Oscillateur viscoélastique

Cet exercice est tiré d'un article de Muller¹. Il concerne les oscillations libres d'un système à un degré de liberté constitué d'une masse et d'un ressort viscoélastique à n paramètres (modèle de Biot) (voir figure 0.5).

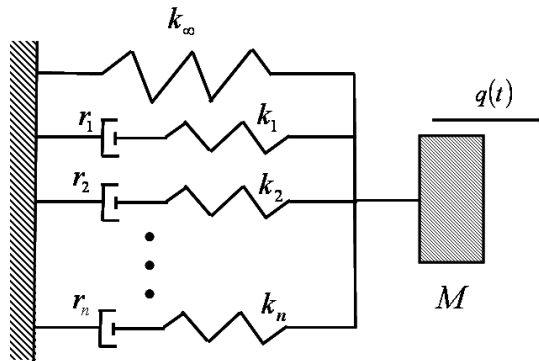


Figure 0.5. Oscillateur viscoélastique. Modèle de Maxwell à n branches.

En utilisant la formulation (5.98), l'équation d'un tel oscillateur s'écrit sous la forme générale suivante :

$$m\ddot{q} + \int_{-\infty}^t k(t-u)\dot{q}(u)du = 0, \quad (0.11)$$

où $k(t)$ est le module de relaxation du ressort viscoélastique.

(1) Montrer, en utilisant la transformée de Laplace que l'équation (0.11) devient :

$$ms^2 + sK(s) = 0, \quad (0.12)$$

où $K(s)$ est la transformée de Laplace de $k(t)$, en admettant que $k(0) = 0$.

¹ P. Muller, Mouvements propres d'un système à 1 D.D.L. avec amortissement viscoélastique, C.R. Académie des sciences, Mécanique, 2005, Vol. 333, pp. 337-342.

(2) On précise à présent $k(t)$ en adoptant un modèle rhéologique dit de “Maxwell” à n branches en parallèle sur un ressort élastique de raideur k_∞ , où chacune des branches est formée d’un ressort et d’un amortisseur (voir la Figure 0.5). Montrer qu’un tel modèle revient à exprimer $k(t)$ sous la forme d’une série (dite de Prony) suivante :

$$k(t) = k_\infty + \sum_{i=1}^n k_i e^{-t/\tau_i}, \quad (0.13)$$

où $k_\infty > 0$, $k_i > 0$ la raideur de la branche i et $\tau_i = r_i/k_i = 1/s_i$ la constante de temps de cette même branche.

(3) En déduire que l’équation (0.12) peut se mettre sous la forme :

$$ms^2 + k_0 \frac{(s+a_1)(s+a_2)\dots(s+a_n)}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_n)} = 0, \quad (0.14)$$

où $k_0 = k_\infty + \sum_{i=1}^n k_i$ et où $\tau_1 < 1/a_1 < \tau_2 < 1/a_2 < \dots < \tau_n < 1/a_n$.

(4) Montrer que le polynôme caractéristique de cette équation admet, en plus des 2 solutions libres usuelles d’un oscillateur visqueux (complexes conjuguées), n autre racines réelles négatives et proposer une méthode graphique pour les déterminer.

Au total, cet exemple montre qu’un oscillateur viscoélastique peut présenter des régimes d’oscillation comprenant des solutions libres non amorties en plus des solutions habituelles de l’oscillateur avec amortissement visqueux simple vues au chapitre 2. Il faut être conscient de ces phénomènes lorsque l’on utilise des matériaux tels que le bois, les fibres de verre, le carbone ou les polymères dans la fabrication des instruments. On voit que les propriétés viscoélastiques affectent les régimes transitoires des structures qui utilisent ces matériaux.

Indications :

(1) Effectuer le changement de variable $v = t - u$ dans (0.11).

(2) La transformée de Laplace de (0.13) s’écrit

$$K(s) = k_\infty + \sum_{i=1}^n k_i \frac{s}{s + 1/\tau_i} \quad (0.15)$$

dont on déduit l’expression (0.14).

(3) Les solutions propres de l’oscillateur sont fournies par les intersections des deux courbes $sK(s) = k_0 \frac{(s+a_1)(s+a_2)\dots(s+a_n)}{(s+s_1)(s+s_2)\dots(s+s_n)}$ et $X(s) = -ms^2$. On trouve au moins n , et au plus $n + 2$, racines réelles négatives à cette équation.

■ Page 193 - Frottement solide

Au chapitre 1, nous avons présenté un exemple d’excitateur (l’archet de violon) qui fait intervenir des phénomènes de frottement solide, à l’origine du mécanisme d’adhérence-glisement. Nous en parlons également au chapitre 11 consacré aux oscillations entretenues de la corde frottée. Nous traitons ici un exemple d’oscillation libre, en montrant de quelle manière un frottement solide agit sur l’évolution temporelle d’un oscillateur.

L’amortissement de Coulomb peut se décrire simplement par une force de frottement appliquée à un solide rigide en situation d’adhérence ou de glissement sur une surface. La figure 0.6 illustre le cas d’un oscillateur à un degré de liberté soumis à un tel frottement.

(1) Soit $\xi(0) = \xi_0$, l’amplitude initiale du déplacement de la masse M . Montrer que le mouvement de celle-ci peut se poursuivre, à la condition que la force de

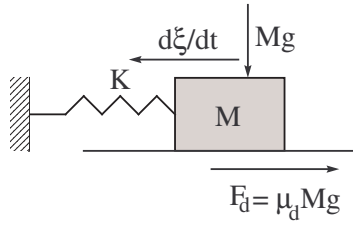


Figure 0.6. Oscillateur à un degré de liberté soumis à un frottement de Coulomb.

rappel $K\xi_0$ soit supérieure à la force de frottement statique $F_s = \mu_s Mg$, où μ_s est le coefficient de frottement statique tel que $0 < \mu_s < 1$.

(2) Une fois que le mouvement a commencé, la masse est soumise à une force de frottement dynamique $F_d = \mu_d Mg$ où $\mu_d < \mu_s$. La direction de cette force est opposée à celle de la vitesse. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + F_d \operatorname{sgn} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) + K\xi = 0 \quad \text{où} \quad \operatorname{sgn} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = \frac{\frac{d\xi}{dt}}{\left| \frac{d\xi}{dt} \right|}. \quad (0.16)$$

(3) Montrer que, au cours de la première partie du mouvement, le déplacement obéit à l'équation :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_o^2 \xi = \omega_o^2 \frac{F_d}{K}, \quad (0.17)$$

avec pour solution :

$$\xi(t) = \left(\xi_o - \frac{F_d}{K} \right) \cos \omega_o t + \frac{F_d}{K} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq t_1 = \frac{\pi}{\omega_o}. \quad (0.18)$$

Montrer que la solution (0.18) reste valable jusqu'au temps t_1 où la vitesse s'annule. Que vaut, à cet instant, le déplacement ?

(4) Si $K\xi_1 > \mu_s Mg$, montrer que l'équation du mouvement devient :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_o^2 \xi = -\omega_o^2 \frac{F_d}{K}, \quad (0.19)$$

qui admet à présent pour solution :

$$\xi(t) = \left(\xi_o - 3 \frac{F_d}{K} \right) \cos \omega_o t - \frac{F_d}{K} \quad \text{pour} \quad t_1 \leq t \leq t_2 = \frac{2\pi}{\omega_o}. \quad (0.20)$$

(5) Montrer qu'au temps $t_2 = \frac{2\pi}{\omega_o}$, le déplacement vaut $\xi(t_2) = \xi_2 = \xi_o - \frac{4F_d}{K}$.

(6) Montrer que l'amplitude décroît linéairement avec le temps. Quelle est l'équation de l'enveloppe ?

(7) Montrer que le mouvement s'arrête brusquement au temps t_n lorsque $\xi(t_n) < \frac{\mu_s F_d}{\mu_d K}$ (voir figure 0.7).

Notons que, contrairement au cas du frottement "visqueux fluide", nous avons ici affaire à un exemple de frottement non linéaire.

Solution :

– Pour la question 3, on trouve que $t_1 = \pi/\omega_o$, et que le déplacement à cet instant vaut $\xi(t_1) = \xi_1 = \frac{2F_d}{K} - \xi_o$.

– A la question 5, on trouve que l'enveloppe s'écrit $\xi_o - \frac{2F_d}{\pi\sqrt{KM}}t$.

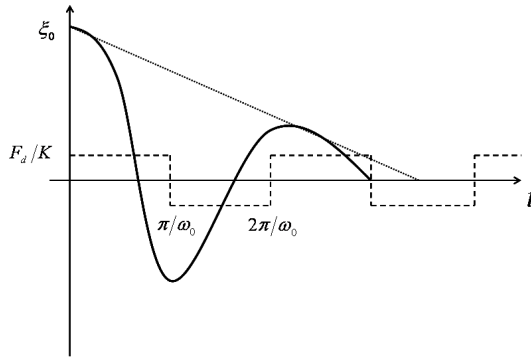


Figure 0.7. Vibration libre d'un oscillateur avec frottement solide^a.

^a D'après R.J. GIBERT : *Vibrations des structures. Interaction avec les fluides. Sources d'excitation aléatoires*. Eyrolles, Paris, 1988.

■ Page 214 Noeuds et ventres de pression dans un tuyau cylindrique

On suppose l'impédance de rayonnement d'un tuyau nulle en $x = \ell$. Montrer que :

$$\frac{P(x)}{U(0)} = Z_c \frac{\sinh \Gamma(\ell - x)}{\cosh \Gamma \ell}.$$

En déduire que le module de la pression, pour un débit d'entrée donné, vaut :

$$|P(x)|^2 = cte [\sinh^2 \alpha(\ell - x) + \sin^2 k(\ell - x)],$$

si on a posé $\Gamma = jk + \alpha$.

Commentaire : le crochet étant compris entre $\sinh^2 \alpha(\ell - x)$ et $\sinh^2 \alpha(\ell - x) + 1$, la pression ne peut pas s'annuler, sauf bien entendu à l'extrémité (par hypothèse). Les minimums de pression (ou noeuds) sont non nuls, au contraire de ce qui se passe quand il n'y a pas de dissipation ($\alpha = 0$).

Solution

Il suffit d'utiliser (5.137) entre x et ℓ , et entre 0 et ℓ . La formule de l'amplitude s'obtient directement.

■ Page 214 Puissance et énergie dans un tuyau cylindrique

1. On veut montrer, en régime sinusoïdal, qu'en première approximation, on peut ignorer les effets visco-thermiques dans l'impédance caractéristique. En intégrant l'équation (5.134) de 0 à ℓ , où ℓ est la longueur du tube, **montrer** la formule :

$$I(0) - I(\ell) = 2c\Re e [\Gamma(z_c \mathcal{E}_c + z_c^{-1} \mathcal{E}_p)] \quad \text{où } z_c = Z_c S / \rho c$$

$$\text{et } \mathcal{E}_p = \int_0^\ell E_p dx \quad \text{avec } E_p = \frac{S}{4\rho c^2} |P|^2 ; \quad \mathcal{E}_c = \int_0^\ell E_c dx \quad \text{avec } E_c = \frac{\rho}{4S} |U|^2.$$

On écrit, à partir de (5.142), au premier ordre des effets visco-thermiques (r_v^{-1}), $z_c = 1 + \beta$, où $\beta = O(r_v^{-1})$, **montrer** alors que

$$I(0) - I(\ell) = 2\alpha c(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c) + 2\Re e [j\omega\beta(\mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p)]. \quad (0.21)$$

2. Dans ces expressions les énergies potentielles et cinétiques peuvent être calculées dans l'approximation sans dissipation, puisque notre démonstration vaut au

premier ordre de celle-ci. **Montrer** que quand il n'y a pas de dissipation :

$$\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_c = \frac{j}{4\omega} \int_0^\ell \frac{d}{dx} (P^*U) dx$$

d'où :

$$\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_c = j [P^*U]_0^\ell / 4\omega = \Im m(P_\ell U_\ell^* - P_0 U_0^*) / 4\omega. \quad (0.22)$$

(pour cela on utilisera le fait que sans pertes $I(0) = I(\ell)$).

À la résonance ou l'anti-résonance, l'une des quantités P_0 ou U_0 est nulle ou très petite ; et nous verrons que dans le cas d'une auto-oscillation, l'impédance d'entrée est réelle, ce qui annule le terme $\Im m(P_0 U_0^*)$.

- Si la condition à la limite ℓ est une impédance nulle (approximation pour un tube ouvert), ou infinie (tube fermé), notre démonstration est achevée pour les archétypes les plus simples d'instruments à vent. Finalement pour les résonances, on peut donc écrire :

$$I(0) - I(\ell) \simeq 2\alpha c (\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c). \quad (0.23)$$

Il n'y a donc plus de termes faisant intervenir β dans ce bilan d'énergie.

- Si on prend en compte l'impédance de rayonnement Z_R en $x = \ell$, la différence $\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_c$ n'est plus tout à fait nulle, mais la partie imaginaire de Z_R étant petite (la correction de longueur est petite devant la longueur d'onde), on peut conserver (0.23).

3. Les calculs précédents permettent d'obtenir un autre résultat intéressant, la comparaison de la puissance dissipée dans les couches limites et de la puissance rayonnée. Pour un tuyau sans pertes, **montrer** d'abord que les densités d'énergie par tranche, en moyenne sur une période, vérifient :

$$\frac{d}{dx} E_p = -\frac{d}{dx} E_c = \frac{\omega}{2c^2} \Im m(P^*U). \quad (0.24)$$

En déduire que la densité d'énergie totale moyenne par tranche est donc indépendante de x dans un cylindre sans pertes.

On peut donc calculer l'énergie totale $\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c$ par exemple à l'extrémité. L'impédance de rayonnement étant petite, **en déduire** que $\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c = \frac{\rho \ell}{4S} |U_\ell|^2 (1 + O(kR)^2)$, et qu'on peut écrire $I(0) \simeq I(\ell) + \frac{1}{2} \alpha \ell Z_c |U_\ell|^2$. **En déduire** que :

$$I(0) \simeq \frac{1}{2} Z_c |U_\ell|^2 \left[\alpha \ell + \frac{1}{4} (kR)^2 \right]. \quad (0.25)$$

4. On admet que la définition du facteur de qualité (§ 4.1.2 du chapitre 2, page 89) est générale. On veut le calculer pour $\omega = \omega_{n0} = c\gamma_n/\ell$, soit $Q_n = \omega_{n0} \mathcal{E} / I(0)$, où \mathcal{E} est l'énergie totale dans le tuyau, $I(0)$ la puissance entrante, et $\gamma_n = (2n-1)\pi/2$. Utilisant (0.25) et les calculs qui précèdent, en supposant que $\Delta\ell = 0$, **montrer** que le résultat pour Q_n est

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{2\alpha_1}{R} \sqrt{\frac{\ell_v \ell}{\gamma_n}} + \frac{1}{2} \frac{(k_n R)^2}{\gamma_n}, \text{ avec } k_n = \frac{\omega_{n0}}{c}.$$

Il s'agit de l'expression donnée avec l'équation (5.180), dans laquelle on écrit $\ell = L$, ce qui revient à ignorer la correction de longueur. On en déduit que les définitions du facteur de qualité coïncident au moins de façon approchée.

Solution

1. Les termes en $\alpha\beta$ sont du second ordre, et $\beta/v_\varphi = \beta/c$ au premier ordre.
2. On part de $d(P^*U)/dx = j\omega\rho|U|^2/S - j\omega S|P|^2/\rho c^2$.
3. On part de $d(|P|^2)/dx = \Re[P^*dP/dx]$, etc. On a donc $d(E_p + E_c)/dx = 0$. À la fin, on utilise $I(\ell) = 1/2|U_\ell|^2 \Re(Z_R)$.
4. Il suffit d'utiliser les résultats obtenus, la valeur de α étant donnée par (5.142).

■ Page 214 Variations de l'argument de l'impédance

Montrer, en ignorant la dispersion ($\Gamma = jk + \alpha$) et le rayonnement, et en utilisant la formule : $\tanh(x + jy) = (\sinh 2x + j \sin 2y)/(\cosh 2x + \cos 2y)$ que l'argument de l'impédance d'entrée peut s'écrire, $\arctan[\sin 2k\ell / \sinh 2\alpha\ell]$.

En **déduire**, en ignorant la variation de α avec la fréquence, que les extremums de l'argument quand la fréquence varie valent $\pm[\pi/2 - \arctan \sinh 2\alpha\ell]$ pour $\omega\ell/c = (2n + 1)\pi/4$. Ce résultat peut être admis aussi pour une lente variation de $\alpha(\omega)$: en **déduire** que les extremums se resserrent quand la fréquence augmente et tendent vers 0 quand la fréquence tend vers l'infini, ce qui est visible sur les figures 4.4 et 4.5 de la page 167.

Solution

Les extremums sont obtenus pour $\sin 2k\ell = \pm 1$, ce qui donne

$$\pm \arctan(1 / \sinh 2\alpha\ell) = \pm [\pi/2 - \arctan \sinh 2\alpha\ell].$$

Quand la fréquence augmente α aussi, comme $\sqrt{\omega}$, et les extremums se resserrent.

■ Page 214 Impédance d'entrée d'un bourdon

Calculer les maximums et minimums d'impédance d'entrée d'un bourdon (tuyau fermé à son extrémité ℓ). Pour cela **écrire** l'équivalent de la formule (5.146).

Solution

$Z_e = Z_c \coth(\Gamma\ell)$, si on ne tient pas compte des effets thermiques sur la paroi fermée (cf note 13 de la page 211). On a alors $|Z_e|_{\max} \simeq Z_c / \tanh(\alpha\ell)$ et $|Z_e|_{\min} \simeq Z_c \tanh(\alpha\ell)$, pour des fréquences égales respectivement à $f_n = nv_\varphi/2\ell$, et $f_n = (2n - 1)v_\varphi/4\ell$.

■ Page 263 Réflexions successives dans un tuyau à cheminée

Montrer que la formule (7.24)

$$P^- = R_1 + T_1 R_L T_2 / (1 - R_2 R_L)$$

est bien la même (attention la dernière expression de cette équation est erronée dans le livre) que celle que l'on obtient directement en partant de la valeur de l'impédance ramenée dans le tuyau 2, et en utilisant dans le tuyau l'équation (4.32), c.-à-d. :

$$P^- = \frac{\sigma^{-1} j \tan k\ell_2 - 1}{\sigma^{-1} j \tan k\ell_2 + 1} \quad \text{où } \sigma = S_2/S_1.$$

Pour cela, on peut utiliser le fait que $R_1 = -R_2$, et $T_1 T_2 = 1 - R_1^2$.

■ Page 263 Terminaisons de type masse et compliance acoustiques

1. On peut retrouver comme cas particulier de tuyau à cheminée le résultat pour le tuyau 1 pourvu une terminaison du type masse acoustique en $x = \ell_1$, équivalente d'une extrémité mobile pour une corde. Supposons que la terminaison soit une masse acoustique : $Z(\ell_1) = j\omega M_a$. On a montré, en utilisant la formule d'impédance ramenée, que tout se passe comme si le tuyau 1 se terminait par une impédance nulle, avec une correction de longueur $\Delta\ell = S_1 M_a / \rho$, à condition que $k\Delta\ell$ soit petit (cf chapitre 4, page 174).

Pour comparer avec le tuyau à cheminée étudié précédemment, **montrer** d'abord que l'équation (7.36) peut s'écrire aussi

$$a_n^2 = \frac{1}{\sin^2 k_n \ell_2 (1 - \sigma^2) + \sigma^2}.$$

Si $k_n \ell_2$ est petit, le tuyau 2, "ouvert" à son extrémité, a une masse $M_a = \rho \ell_2 / S_2$. On a donc $\Delta\ell = \ell_2 / \sigma$. **Montrer** que si $k_n \ell_2$ est petit, la norme donnée par (7.35) s'écrit :

$$2\Lambda_n = S_1 \left[\ell_1 + \frac{\Delta\ell}{1 + k_n^2 \Delta\ell^2 (1 - \sigma^2)} \right].$$

Montrer que si σ^2 est très inférieur à l'unité, quand il n'y a pas de pertes, l'expression (7.32) redonne le résultat (4.72) dans le tuyau 1.

Commentaire : Ceci permet ainsi de retrouver le résultat pour une terminaison massique, en partant d'un problème avec conditions aux limites plus simples, qui assurent l'orthogonalité tant vis-à-vis de la masse que de la raideur⁴.

2. On s'intéresse maintenant au problème dual, où le tuyau 2 a comme condition d'entrée une terminaison de type compliance acoustique, $Y(\ell_1) = -j\omega V / \rho c^2$, où V est un volume, terminaison équivalente à une terminaison massique pour une corde. À la condition que $k_n V / S_2$ soit petit, montrer en utilisant la formule d'impédance ramenée que tout se passe comme si le tuyau 2 se terminait en $x = \ell_1$ par une admittance nulle, avec une correction de longueur $\Delta\ell = V / S_2$.

Pour comparer avec le tuyau à cheminée étudié précédemment, on écrit : $\ell_1 S_1 = V$. Montrer que l'équation (7.32) s'écrit pour le tuyau 2 :

$$P = j\omega \rho c^2 U_s \sum_{n>0} \frac{a_n^2}{\Lambda_n} \frac{\sin k_n(\ell - x) \sin k_n(\ell - x_s)}{\omega_n^2 + j\omega \omega_n \frac{1}{Q_n} - \omega^2}$$

où

$$\frac{2\Lambda_n}{a_n^2} = S_2 \left[\ell_2 + \frac{\Delta\ell}{1 + k_n^2 \Delta\ell^2 (1 - \sigma^2)} \right].$$

Commentaire : dans le cas où σ^2 est très inférieur à l'unité, on pourrait montrer que c'est bien l'analogue du résultat obtenu pour une corde avec terminaison massique, à partir des résultats du chapitre 3 (page 118).

Solution

1. Il suffit d'utiliser l'équation des fréquences propres (7.28), en éliminant $k_n \ell_1$.
2. On part de $Y = -j(S_2 / \rho c) \tan k\Delta\ell$ (attention au signe, quand on ramène l'impédance vers les x positifs), d'où : $Y \simeq -jk\Delta\ell S_2 / \rho c$, et on identifie. Ensuite on utilise directement (7.35) et (7.36) avec $\ell_1 = \sigma\Delta\ell$.

⁴ Ceci n'a pas d'incidence sur le calcul, mais la norme calculée dans le chapitre 4 n'est pas la même que celle utilisée ici, il y a un facteur S_1 entre les deux.

■ Page 292 Étude des matrices de transfert et admittance

On veut démontrer la note du bas de la page 294. On cherche les conditions que doivent remplir les coefficients des matrices admittances et de transfert pour qu'il n'y ait pas de dissipation. Considérons d'abord la matrice admittance définie par (7.113). Pour un signal sinusoïdal $\exp(j\omega t)$, la puissance moyenne entrante dans le biporte (1, 2) s'écrit : $\mathcal{P}_m = \frac{1}{2} [\Re(p_1 u_1^*) + \Re(p_2 \tilde{u}_2^*)]$. Il n'y a pas de dissipation (ni de création) d'énergie si cette quantité est nulle quelles que soient les grandeurs aux extrémités.

Montrer que ceci s'écrit : $\mathcal{P}_m = \Re(Y) |p_1|^2 + \Re(Y') |p_2|^2 + 2\Re(Y_\mu) \Re(p_1 p_2^*) = 0 \forall p_1 \text{ et } p_2$. **En déduire** que tous les éléments de la matrice admittance doivent être imaginaires purs, et que pour la matrice de transfert B doit être imaginaire pur, A et D réels et C imaginaire pur.

Solution

On injecte l'équation (7.113) dans l'expression de \mathcal{P}_m . La conclusion est évidente.

■ Page 318 Étude de la réjection à la résonance

On considère une cheminée fermée branchée sur un tuyau cylindrique, et on ignore l'effet des modes anti-symétriques, ainsi que celui des pertes. On peut donc écrire pour les admittances au raccordement, adimensionnées par l'admittance caractéristique :

$$Y_1 = Y_2 + Y_3 \quad \text{avec} \quad Y_3 = \delta^2 j \tan k\ell$$

où $\ell = h + t_w$. Le coefficient de transmission est $T = 1 + R$ (cf par exemple page 261) : c'est le rapport de la pression incidente dans le tube amont (1) à la pression dans le tube aval (2). On suppose que ce dernier est infini ($Y_2 = 1$). **Montrer** que

$$|T|^2 = \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\delta^2 j \tan k\ell} \right|^2 = \frac{\cos^2 k\ell}{1 + (\delta^2/2 - 1) \sin^2 k\ell}$$

En déduire que T s'annule pour les résonances en quart d'onde de la cheminée, et vaut 1 pour les résonances en demi-onde. Pourquoi la puissance sortant du tube amont est-elle toujours égale à celle du tube aval ?

Commentaire : on a ici un exemple d'"atténuation réactive", la puissance n'étant pas dissipée : la source est empêchée d'émettre de la puissance. Évidemment quand il y a des pertes, la transmission n'est pas tout à fait nulle.

Solution

Le coefficient de réflexion est donné par la formule (4.32). Quand il n'y a pas de pertes, aucune puissance n'entre dans la cheminée quelle que soit la fréquence (admittance imaginaire pure).

Troisième partie

Nonlinéarités et auto-oscillations

■ Page 353 - Equation de Duffing avec amortissement visqueux

(1) Si l'on introduit un amortissement visqueux dans l'équation de Duffing (8.14), montrer que celle-ci s'écrit, sous forme adimensionnée :

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \beta \frac{dy}{d\tau} + y + \eta y^3 = \alpha \cos \gamma \tau . \quad (0.26)$$

(2) Montrer alors que les courbes de réponse sont gouvernées par l'équation :

$$\left[(1 - \gamma^2)A + \frac{3\eta A^3}{4} \right]^2 + \beta^2 A^2 = \alpha^2, \quad (0.27)$$

et que l'on obtient les courbes de réponse de la figure 0.8.

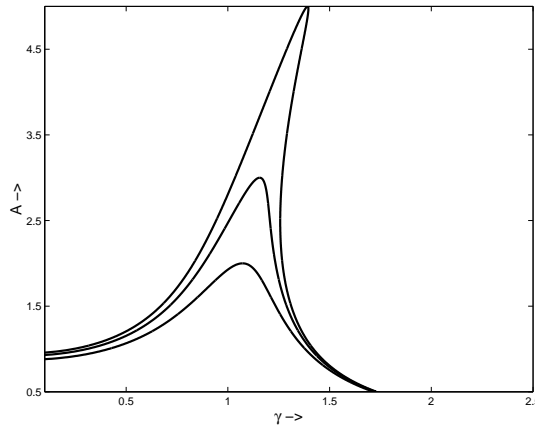


Figure 0.8. Courbes de réponse de l'équation de Duffing amortie.

(3) Montrer que tout oscillateur obéissant à l'équation de Duffing est susceptible de fournir des harmoniques d'ordre supérieur.

Indication : Introduire un terme d'excitation à la fréquence adimensionnée γ et rechercher les conditions d'existence de solutions en 3γ .

■ Page 357 - Couplage transverse-longitudinal dans les cordes vibrantes

Montrer que l'équation qui gouverne le mouvement transversal de la corde s'écrit :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EA \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial y}{\partial x} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} . \quad (0.28)$$

Solution :

– Le bilan des forces sur un élément de corde s'écrit :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] . \quad (0.29)$$

En remplaçant alors $T(x)$ par l'expression (8.50), on trouve immédiatement l'équation recherchée.

■ Page 400 Niveau sonore produit par une valve idéale

a) Considérons une pression acoustique variant en signal carré, entre $-p$ et $+p$. **Montrer** que la pression quadratique moyenne p_{RMS} vaut p . Le niveau en décibel s'exprime sous la forme : $N = 20 \log(p_{RMS}/p_0)$, où $p_0 = 2.10^{-5} Pa$. Supposons d'abord que p soit la pression atmosphérique, c'est-à-dire que la pression totale oscille entre 2 fois la pression atmosphérique (qui vaut $10^5 Pa$) et le vide - hypothèse évidemment invraisemblable ! -, qui nous donnera une valeur limite. **Montrer** (sans calculatrice, en utilisant $\log 2 = 0,3$, $20 \log 2 = 6$) que le résultat est $N = 194 dB$.

b) Supposons à présent que la surpression statique p_m dans la bouche d'un instrumentiste soit de $1/20$ atmosphère, et se transforme en une pression acoustique $\pm p_m$: **en déduire** toujours par un calcul très simple que le résultat est $168 dB$. Une telle valeur n'est pas invraisemblable à l'entrée d'un instrument !

c) Supposons maintenant que $1/20$ d'atmosphère soit la valeur crête d'un signal sinusoïdal. **Montrer** que le niveau est alors de $165 dB$.

d) Supposons enfin que nous revenions à un signal carré $\pm p$, mais de façon approchée, en tronquant les harmoniques élevés, ne conservant que l'harmonique 1, dont l'amplitude vaut alors $4p/\pi$, ce que nous montrons page 430. **Montrer** que le niveau est celui du signal carré, auquel on retranche $20 \log(\pi/2\sqrt{2})$: on utilisera l'approximation $\pi^2 \simeq 10$, et **montrera** que le résultat ne fait qu'un décibel de moins que pour le signal carré.

Solution

a) On calcule $20 \log(10^{10}/2)$, qui vaut 200 décibels, moins 6 décibels.

b) Si on divise par $20 = 10 \times 2$, on enlève 20 dB plus 6 dB, d'où le résultat.

c) Pour un signal sinusoïdal, la valeur efficace (RMS) est égale à la valeur crête divisée par $\sqrt{2}$, soit 3 dB.

d) La valeur RMS du signal sinusoïdal est donc $20 \log(4/(\pi\sqrt{2}))$, d'où le résultat. On peut écrire pour la différence : $20 \log(\pi/2\sqrt{2}) \simeq 10 \log 10 - 9 = 1$ dB.

■ Page 421 Relation entre la solution du problème (transitoire) linéarisé et la fonction de Green

Nous expliquons d'abord pourquoi la pression obtenue par (9.54) n'est autre que la fonction de Green du problème linéarisé : ceci nous permet d'utiliser tout l'arsenal que nous avons développé dans la partie "Ondes et modes", notamment l'emploi de la décomposition modale. Nous vérifierons que le résultat est bien le même en calculant en utilisant la méthode des réflexions successives (chapitre 4). Considérons donc le problème suivant : un tuyau cylindrique sans pertes est excité par une source de débit, placée à l'entrée, qu'il nous faut déterminer. Nous supposons que la pression dans la bouche saute brusquement de la valeur nulle à une valeur finie. Alors le débit est nul pour les temps négatifs (il n'y a pas de différence de pression entre la bouche et le bec : pour $t < 0$, nous employons la formule (9.30) et non (9.55) qui supposerait que p soit petit devant γ). Le débit est donné par $u = F_0 + Ap$ pour les temps positifs, d'où, pour les grandeurs avec dimension : $u = S(\rho c)^{-1}(F_0 + Ap)H(t) = S(\rho c)^{-1}(F_0H(t) + Ap(t))$. En utilisant l'équation d'Euler, on a donc la condition suivante à l'entrée :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{S} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{en } x = 0. \tag{0.30}$$

On doit donc résoudre le problème de l'équation d'onde sans pertes, avec une condition de pression nulle à la sortie, et cette condition de source à l'entrée. Une

telle condition est appelée inhomogène, car elle contient un terme indépendant de l'inconnue : la source du problème est dans la conditions aux limites, et non dans l'équation d'onde. Cependant l'inconnue est tout de même présente dans cette condition.

La solution d'un tel problème est simple à condition que de considérer le débit u comme la somme de deux sources. La source $u_0 = S(\rho c)^{-1}F_0H(t)$ va être traitée comme nous en l'avons l'habitude en la ré-incorporant comme source de l'équation d'onde : on suppose qu'elle est placée en $x = x_s$, puis on fait tendre la position x_s vers l'entrée, comme nous l'avons fait pour calculer l'impédance d'entrée (cf §6.3 du chapitre 4). Nous résolvons donc :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{S} \frac{\partial u_0}{\partial t} \delta(x - x_s) = -\frac{F_0}{c} \delta(t) \delta(x - x_s) \quad (0.31)$$

Nous voyons donc que la pression dans le bec vérifie bien, à un facteur près, la même équation que la fonction de Green de l'équation d'onde, quand on fait tendre la position x_s vers $x = 0$. La pression doit vérifier aussi la condition suivante à l'entrée :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{A}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (0.32)$$

La condition (0.32), avec (0.30), est une condition d'impédance. Rappelons qu'en $x = 0$, l'impédance doit être définie comme $-p/u$, en raison de la convention de définition des impédances (cf chapitre 1, § 3.3.1). L'admittance imposée par cette condition est donc $-AS/\rho c$: elle est réelle, et positive si A est négatif. Dans le cas contraire, elle est négative, ce qui signifie qu'elle est active, et représente une source d'énergie : c'est pourquoi pour A positif, l'oscillation peut croître.

La décomposition modale de la fonction vérifiant (0.31), et les conditions aux limites (0.32) et Dirichlet à la sortie est possible : elle pose quelques difficultés, car il s'agit d'un problème avec terminaison résistive (cf chapitre 5). Les modes obtenus sont des sinusoides exponentiellement croissantes (si A est positif), avec la même croissance pour tous les modes, et des fréquences qui sont exactement les fréquences propres d'un tuyau fermé-ouvert. Ce calcul peut être étendu au cas où il y a amortissement dans la propagation. On montre qu'alors que les fréquences sont modifiées, surtout pour les premiers modes et surtout quand A est grand, et ceci permet de comprendre pourquoi la fréquence instantanée est légèrement supérieure au début du transitoire à ce qu'elle est en régime permanent, où elle est exactement égale à celle du premier mode du tuyau fermé-ouvert, comme nous le verrons au § 4.1. L'effet perceptif reste d'ailleurs à étudier.

Exercice : En utilisant la décomposition en réflexions successives, on peut retrouver le résultat (6.54) à partir de la formule générale (4.20). La réflexion à la sortie est définie par $r_\ell(t) = -\delta(t)$; à l'entrée elle est définie par $r_0(t) = r_0\delta(t)$ avec⁵ $r_0 = (1 + A)/(1 - A)$. **Montrer** que la fonction aller-retour (équation (4.12)) s'écrit :

$$g_{AR}(t) = -\frac{1 + A}{1 - A} \delta(t - 2\ell/c)$$

et la fonction ondes primaires (équation (4.21)), avec $x = x_s = 0$:

$$g_{primaires} = \frac{c}{1 - A} [H(t) - H(t - 2\ell/c)].$$

Comme le terme entre crochet correspond à un créneau $C(t) = 1$ pour $t \in [0, 2\ell/c]$ et $C(t) = 0$ ailleurs, on vérifie avec ces dernières équations que la solution donnée

⁵ On utilise l'équation (4.32), dont la TF inverse est évidente, puisque l'impédance est indépendante de la fréquence : toutefois, prenant en compte la définition de r_0 dans l'équation (4.9), on doit changer le signe de l'équation (4.32). Le lecteur nous excusera pour cette petite complication, mais la réflexion à l'entrée est la réponse en onde aller à une onde retour !

par (9.54) est bien la fonction de Green, au facteur F_0/c près : les différents créneaux se suivent dans le rapport $[-(1+A)/(1-A)]$.

Commentaire : le lecteur aura vu ce qui précède comme un bon exercice d'applications de quelques concepts de base : la complexité des derniers calculs montre bien a contrario l'intérêt de l'emploi de la fonction de réflexion !

Solution

On a pour $x = x_s = 0$: $\frac{c}{2}(1+r_0)[H(t) - H(t - 2\ell/c)]$.

■ Page 424 Stabilité pour le modèle utilisant la fonction non linéaire non simplifiée (9.30)

L'équation (9.62) donne les valeurs des points limites p_∞ . On veut trouver l'équivalent de la condition (9.65). On se limite à l'anche non battante ($\gamma < 1/2$). La dérivée de la fonction $F(p)$ vaut :

$$F'(p) = \frac{\zeta(3\gamma - 3p - 1)}{2\sqrt{\gamma - p}}$$

On trouve que

$$F'(p_\infty) + F'(-p_\infty) = \zeta \frac{2\sqrt{2(1-\gamma)}(1-3\gamma)}{1-2\gamma}.$$

Montrer que cette quantité est toujours négative pour le cas étudié. **En déduire** que la condition cherchée est

$$F'(p_\infty)F'(-p_\infty) > -1.$$

Tous calculs faits, on obtient la condition de stabilité :

$$\zeta^2 < \frac{2(1-2\gamma)}{(3\gamma-1)(5-6\gamma)}$$

Montrer que le membre de droite est positif pour le cas étudié, et qu'il existe donc des valeurs de ζ pour lesquelles le régime oscillant est instable.

Solution

L'existence du régime oscillant implique $\gamma > 1/3$. Donc la quantité $F'(p_\infty) + F'(-p_\infty)$ est négative, puisque $\gamma < 1/2$. La condition (9.64) devient donc $F'(p_\infty)F'(-p_\infty) > -1$. Pour les valeurs étudiées de γ , le membre de droite de la dernière condition est bien positif.

■ Page 428 Exemple de calcul de début de transitoire d'attaque

Comment résoudre l'équation (9.67) linéarisée (B et C nuls) pour des conditions initiales données, afin de connaître le début du transitoire d'attaque? Comme pour l'exercice de la page 421, nous supposons que la pression dans la bouche saute brusquement de la valeur nulle à une valeur finie, et que le débit est donné par : $u = H(t)F_0 + Ap(t)$. Dans ces conditions, l'équation avec source s'écrit simplement :

$$\frac{d^2}{dt^2}p(t) + \frac{2c}{\ell}(Y_{m1} - A)\frac{d}{dt}p(t) + \omega_1^2 p(t) = \frac{2c}{\ell}F_0\delta(t). \quad (0.33)$$

A un facteur près, la solution est donc simplement la fonction de Green de cette équation, que nous connaissons (chapitre 2, équation (2.14)). Pour

$t_0 = 0$, nous avons, si nous supposons un système faiblement amorti ou excité ($|Y_{m1} - A| \ll \omega_1 \ell / c$) :

$$p(t) = \frac{4}{\pi} F_0 H(t) e^{-\alpha_0 t} \sin \omega_1 t \text{ où } \alpha_0 = (Y_{m1} - A)c/\ell. \quad (0.34)$$

Il est intéressant de comparer cette solution, quand $Y_{m1} = 0$, avec le résultat (9.54). Au temps nul, la différence est énorme, puisqu'avec un seul mode, la pression est nulle alors qu'elle est finie avec une infinité de modes : c'est l'infinité de modes qui explique que la pression dans le bec passe brutalement de 0 à une valeur finie (compte-tenu de notre hypothèse de saut brutal de pression dans la bouche). Cependant, en calculant l'expression (0.34) pour les valeurs du temps telles que $\omega_1 t = (2n + 1)\pi/2$, soit $t = (2n + 1)\ell/c$, voisins des maximums d'amplitude, **montrer** que :

$$p(t) = \frac{4}{\pi} F_0 (e^A)^{2n+1} (-1)^n.$$

Montrer que pour A petit, cette équation est la même que (9.54), au facteur $4/\pi$ près (rappelons que $p_0 = F_0/(1 - A)$). Nous verrons que ce facteur vient de la décomposition d'un signal carré en série de Fourier quand on ne conserve qu'un harmonique. Mais nous retrouvons bien l'amplitude, la période, l'alternance de signe, et le seuil $A = 0$.

Montrer enfin, à partir de (9.77), l'équation (9.71).

Solution

On écrit $(1+A)^n/(1-A)^{n+1} \simeq (1+A)^{2n+1} \simeq (e^A)^{2n+1}$. Pour la dernière question, il suffit d'utiliser (9.72), $p(t) = 2P_1 \cos(\omega_1 t)$ si P_1 est réel.

■ Page 430 Décomposition d'un signal carré en une série d'harmoniques

Pour montrer le résultat (9.73), supposons d'abord que l'origine des temps est quelconque : le signal carré $p(t)$ vaut $+p$ pour t compris entre $T_1 - \tau$ et T_1 , où T_1 est quelconque, et $\tau = \pi/\omega_1$ est la demi-période ; et il vaut $-p$ entre T_1 et $T_1 + \tau$. En utilisant la formule

$$P_n = \frac{1}{2\tau} \int_{T_1 - \tau}^{T_1 + \tau} p(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

montrer que $P_n = 2p(n\pi)^{-1} j \exp(-jn\omega_1 T_1)$, pour n impair et $P_n = 0$ pour n pair. **En déduire** que pour que P_1 soit réel, il faut que $T_1 = \tau/2$, et qu'on retrouve alors (9.73).

Remarque : dans le cas général le déphasage des harmoniques impairs dépend de T_1 .

■ Page 432 Équation caractéristique

Vérifier, en calculant les valeurs propres de la matrice \mathbb{M} qu'on retrouve bien les conclusions du § (3.4.1), c.-à-d. les valeurs propres de l'équation (9.68) linéarisée.

■ Page 443 Modèle avec pertes dit “de Raman” en anche battante

Le débit est égal à $2p_\infty/Z_{\max}$ quand l’anche est ouverte : la puissance instantanée entrant par l’anche l’ouverte est donc $2p_\infty^2/Z_{\max}$. La puissance moyenne par période vaut donc la moitié : $I = p_\infty^2/Z_{\max}$. C’est elle qui permet de compenser les pertes dans le tuyau pour conserver un régime périodique. On cherche à retrouver ce résultat dans le domaine fréquentiel. On part de la décomposition de la pression (9.72), avec pour un signal carré la formule (9.73). **Montrer** d’abord que :

$$p(t) = \frac{4}{\pi} p_\infty \sum_{n>0, n \text{ impair}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} \cos n\omega_1 t.$$

Calculer la décomposition du débit (sans oublier la composante continue). Montrer que la puissance moyenne I_n sur une période pour l’harmonique n vaut :

$$I_n = \frac{8p_\infty^2}{Z_{\max}\pi^2} \frac{1}{n^2}.$$

On pourra faire le calcul direct de la moyenne sur une période ou utiliser le résultat général pour les grandeurs complexes associées. Que vaut la puissance moyenne pour la composante continue ? Pourquoi $I = \sum_{n>0} I_n$? Vérifier que $I = p_\infty^2/Z_{\max}$, en utilisant $\sum(1 + 3^{-2} + 5^{-2} + \dots) = \pi^2/8$.

Solution

Pour calculer le débit, on peut soit faire la décomposition de Fourier (9.72) pour le signal carré, soit utilisé que l’admittance pour les harmoniques impairs vaut : $1/Z_{\max}$. Et on a donc : $u(t) = (p_\infty + p(t))/Z_{\max}$. Le calcul de la puissance pour l’harmonique n impair est donné par $\frac{1}{2} |p_n|^2 \Re(Y_n)$ d’où le résultat. La puissance moyenne pour la composante continue est nulle puisque celle de la pression est nulle. La puissance totale est la somme celle des harmoniques, car ils sont orthogonaux. D’où la vérification de la puissance totale.

■ Page 457 Solution sans dynamique d’anche pour une anche en-dehors

Montrer que si on ignore la dynamique d’anche (et les pertes), si on cherche un signal carré vérifiant $F(p) = F(-p)$, la solution s’écrit :

$$p^2 = -(1 + \gamma)(1 + 3\gamma)$$

En déduire la valeur du seuil d’oscillation.

Solution

Pour qu’il y ait une solution, il faut que $\gamma < -1/3$, donc qu’on joue en aspirant.

Quatrième partie

Rayonnement et interaction
fluide-structure

■ Page 553 - Etude temporelle de la mise sous tension d'une enceinte acoustique

Préambule : On rappelle que, parmi les hypothèses de base qui nous ont servi à établir l'équation des ondes, figure l'absence de vorticité. Autrement dit le rotationnel de la vitesse est nul ce qui nous autorise à poser $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \varphi$ où φ est un potentiel scalaire, habituellement désigné "potentiel des vitesses". En conséquence, la pression s'obtient par $p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, et l'on voit que de la connaissance de φ on déduit les expressions de p et \mathbf{v} par simple dérivation (voir la partie 1).

On considère une sphère pulsante animée d'une vitesse $v_s(t)$ à sa periph rie (rayon a).

(1) Montrer que le potentiel des vitesses dans l'espace libre extérieur à la sphère s'écrit sous la forme :

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} F \left(t - \frac{r - a}{c} \right). \quad (0.35)$$

(2) Montrer que la fonction F est gouvernée par l'équation différentielle :

$$\frac{a}{c} F' + F = a^2 v_s. \quad (0.36)$$

(3) En déduire que F s'écrit :

$$F(t) = ac \int_{-\infty}^t e^{-\frac{c}{a}(t-\tau)} v_s(\tau) d\tau. \quad (0.37)$$

(4) On admet qu'une enceinte acoustique puisse être modélisée grossièrement par une sphère pulsante. Montrer que la pression générée au moment de la mise sous tension de cette enceinte s'écrit :

$$p(r, t) = \frac{\rho c a V_0}{r} e^{-\frac{c}{a} \left[t - \frac{r-a}{c} \right]} \quad \text{pour } t > \frac{r-a}{c}, \quad (0.38)$$

où V_0 est la vitesse de la sphère à $t = 0+$.

Indications :

(1) *Ecrire l'équation des ondes en tenant compte de la symétrie sphérique du problème. Retenir la seule onde divergente.*

(2) *De la définition de φ on obtient immédiatement $p = -\rho F'/r$ et $-v = F/r^2 + F'/rc$.*

On écrit ensuite la vitesse en $r = a$.

(3) *Utiliser, par exemple, la méthode de la variation de la constante pour résoudre (0.36).*

(4) *Lorsque la source (enceinte) est soumise à un échelon de vitesse d'amplitude V_0 , l'expression générale (0.37) fournit $F(t) = a^2 V_0 [1 - \exp -\frac{ct}{a}]$ pour $t > 0$, d'où l'expression de p .*

■ Page 560 - Etude temporelle d'une sphère oscillante en régime lentement variable

On considère ici une sphère de rayon a oscillant à vitesse $v_0(t)$ selon l'axe Ox (voir la figure 12.9 du livre).

(1) Montrer que le potentiel des vitesses dans l'espace libre extérieur à la sphère s'écrit :

$$\varphi(r, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r} F \left(t - \frac{r - a}{c} \right) \right], \quad (0.39)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(2) Montrer que F est gouvernée par l'équation différentielle :

$$a^2 F'' + 2ac F' + 2c^2 F = a^3 c^2 v_0. \quad (0.40)$$

(3) En déduire que F s'écrit :

$$F(t) = a^2 c e^{-\frac{ct}{a}} \int_{-\infty}^t \sin \left[\frac{c(t-\tau)}{a} \right] v_0(\tau) e^{\frac{c\tau}{a}} d\tau . \quad (0.41)$$

(4) On note $t_c = a/c$ le *temps caractéristique* associé au rayonnement de la sphère. On admet que le régime d'oscillation de celle-ci est *lentement variable* à la condition :

$$|F'| \ll \left| \frac{F}{\tau} \right| . \quad (0.42)$$

Montrer alors que la pression s'écrit :

$$p(r, \theta, t) = \frac{\rho a^3}{2r} \cos \theta \left[\frac{a}{r} v_0' + t_c v_0'' \right] , \quad (0.43)$$

où $\cos \theta = x/r$.

Indications :

(1) On note que la vitesse radiale s'écrit ici $v_r = v_0 \cos \theta$, avec $\cos \theta = \frac{\partial r}{\partial x} = x/r$. On vérifie alors que tout potentiel de la forme $\varphi = \frac{\partial \varphi_{SP}}{\partial x}$, où φ_{SP} est le potentiel de la sphère pulsante calculé à l'exercice précédent, est solution du problème.

(2) De la définition du potentiel, on tire $\varphi = [F/r^2 + F'/rc] \cos \theta$ et $v_r = \cos \theta (2F/r^3 + 2F'/r^2c + F''/rc^2)$. On écrit ensuite la condition aux limites en $r = a$, soit $v_r = v_0 \cos \theta$.

(3) Comme dans l'exercice précédent, on peut résoudre l'équation différentielle (0.40) par la méthode de la variation de la constante.

(4) La condition de régime "lentement variable" est obtenue ici pour $|F'|/F \ll c/a$, ce qui implique $F'' \ll F'c/a$. On en déduit, dans ce cas, que $F \simeq a^3 v_0/2$, d'où l'on tire l'expression de p .

■ Page 571 - Exemple de calcul de dérivée normale

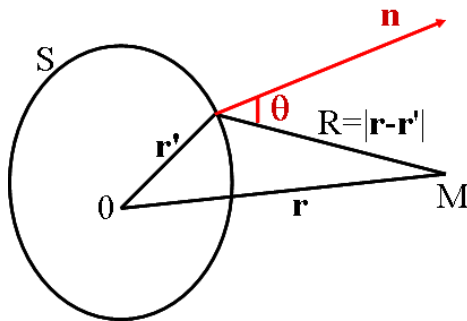


Figure 0.9. Exemple de calcul de dérivée normale.

On se propose de calculer ici la dérivée normale de la fonction de Green en espace libre G . En coordonnées cartésiennes, la distance R entre un point sur la source et un point d'observation s'écrit :

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} . \quad (0.44)$$

On pose $\mathbf{e}_r = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{R}$.

(1) Choisissons arbitrairement la normale \mathbf{n} orientée suivant l'axe des z . Montrer que l'on obtient :

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} \quad (0.45)$$

(2) On a $G = e^{-jkR}/4\pi R$ et $\frac{\partial R}{\partial z} = (z - z')/R = \cos \theta$ où $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r$ (voir la figure 0.9). En déduire :

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -G \left[jk + \frac{1}{R} \right] \cos \theta . \quad (0.46)$$

(3) En comparant ce résultat à l'expression de la pression rayonnée par un dipôle (équation 12.39), vérifier que l'on obtient le produit du moment du dipôle par la dérivée normale de G .

■ Page 600 - Interaction barre-tube

On considère les vibrations longitudinales d'une barre homogène et isotrope de longueur $L=1$ m, de section $S = 10 \text{ cm}^2$, de module d'Young $E=10^9 \text{ N.m}^{-2}$ et de densité $\rho_s=10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Cette barre est encastrée en $x = 0$ et libre en $x = L$ où elle débouche dans un tube infini, conformément à la figure 13.2.

- (1) Calculer les modes propres et les fréquences propres *in vacuo* de cette barre.
- (2) Calculer les masses modales. Soit $R_a = \rho c S$ la résistance de rayonnement. En déduire le coefficient d'amortissement par rayonnement pour le premier mode de la barre supposé isolé.
- (3) Justifier que l'on peut ici faire l'approximation d'amortissements faibles et calculer les fréquences propres pour les systèmes couplés tronqués aux modes 1 et 2. Quels commentaires peut-on faire ?

Indications :

(1) Pour une barre encastrée-libre vibrant longitudinalement, les modes propres sont de la forme $\Phi_n(x) = \sin k_n x$ avec $k_n L = (2n - 1)\pi/2$ pour $n \geq 1$. Les fréquences propres sont données par $f_n = (2n - 1)c/4L$ avec $c = \sqrt{E/\rho_s}$.

(2) D'après (13.4), on obtient $m_n = \rho_s S L/2$, soit la même masse modale pour tous les modes.

(3) D'après (13.8), on obtient $\zeta_1 = \frac{2\rho}{\pi\rho_s}$ soit un coefficient d'amortissement inférieur à 10^{-3} .

(4) Pour un système tronqué à deux modes, on obtient $\zeta_2 = \frac{2\rho}{3\pi\rho_s}$ pour $\omega_2 = 3\omega_1$. Les coefficients de couplage entre modes sont donnés par $C_{12} = C_{21} = \frac{2\rho c}{L\rho_s}$. Les fréquences complexes $\sigma + j\omega$ du système couplé sont données par (13.11). Compte tenu des faibles valeurs des amortissements et des coefficients de couplage, on obtient au premier ordre, pour les parties réelles, $\sigma_1 \simeq -\zeta_1\omega_1$ et $\sigma_2 \simeq -\zeta_2\omega_2$. Pour les parties imaginaires, toujours au premier ordre, on a $\omega \simeq \omega_1$ et $\omega \simeq \omega_2$. Par conséquent, on se trouve dans une situation où il est légitime de traiter les modes comme des systèmes amortis découplés entre eux.

■ Page 616 - Equation de dispersion approchée en fluide léger.

(1) Lorsque ε tend vers zéro (cf. l'équation 13.67), montrer que l'équation de dispersion (13.66) de la plaque couplée au fluide se réduit à

$$(k^2 - \gamma_B^2)(\gamma^4 - k_B^4) = 0 \quad (0.47)$$

où k est le nombre d'onde dans l'air, k_B le nombre d'onde dans la plaque *in vacuo*, et γ_B le nombre d'onde dans la plaque chargée par l'air.

(2) En déduire que (0.47) admet alors 4 racines réelles et deux racines imaginaires pures que l'on déterminera.

(3) En effectuant un calcul approché au premier ordre en ε montrer que, dans le domaine subsonique, le nombre d'onde dans la plaque chargée γ_B est donné par

$$\gamma_B^4 \simeq k_B^4 \left[1 + \frac{\varepsilon\omega_c}{c\sqrt{k_B^2 - k^2}} \right] . \quad (0.48)$$

(4) En déduire le module du rapport γ_B/k_B en fonction des paramètres adimensionnés $\Omega = \omega/\omega_c$ et ε .

Solution :

(1) L'approximation (0.47) revient à négliger le facteur $\varepsilon\omega_c/\omega$ devant l'unité. Elle est valable si $\varepsilon \ll 1$ (fluide léger) et si ω n'est pas trop petit devant ω_c .

(2) On trouve $\gamma_B = \pm k_B$, $\gamma_B = \pm j k_B$ et $\gamma_B = \pm k$.

(3) On trouve

$$\left| \frac{\gamma_B}{k_B} \right| = \left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Omega}(1-\Omega)^{1/2}} \right]^{1/4}. \quad (0.49)$$