Simulación de la propagación de ondas acústicas en flujos potenciales mediante bases de ondas planas

Pablo Gamallo[1], Jeremy Astley[2]

[1]Dpto. Deseño na Enxeñería
Universidade de Vigo

[2]Institute of Sound and Vibration Research
University of Southampton

Índice

Ruido producido por aviones comerciales

Figura: Principales fuentes de ruido en un avión comercial.

Ruido del motor

Figura: Motor de aviación tipo turbofan.

Esquema motor turbofan

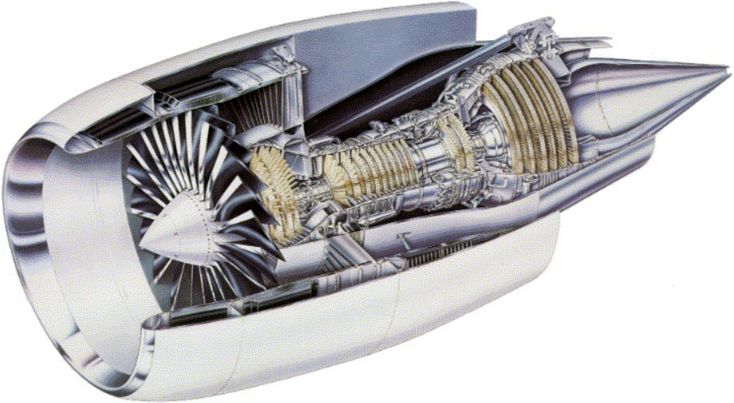
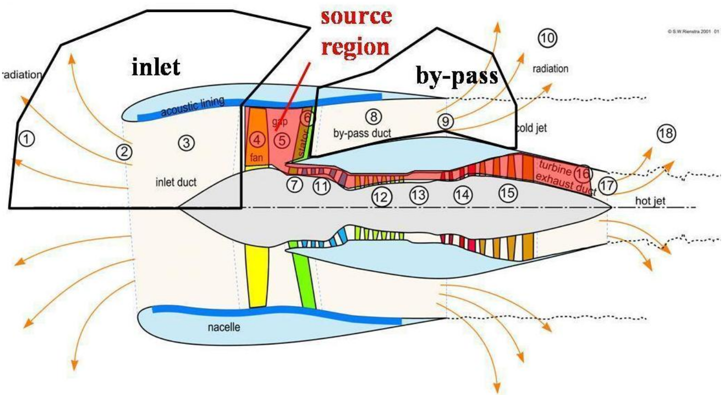


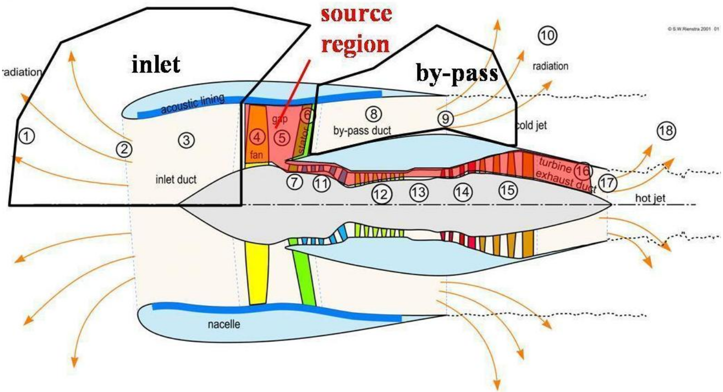
Figura: Esquema de motor de aviación tipo turbofan (vista interior).

Análisis del sonido radiado



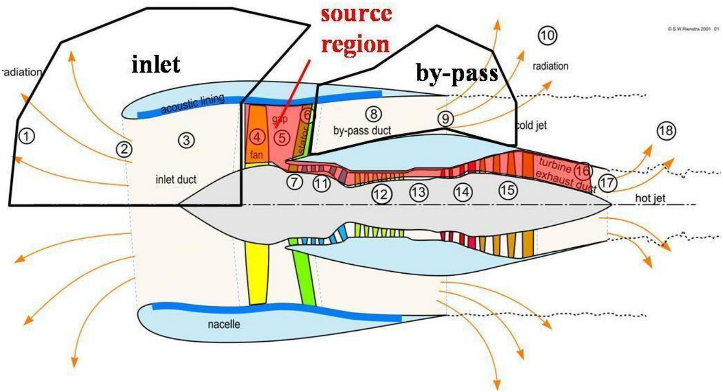
- Simulación de la radiación acústica en motores turbofan
- Propagación acústica a través de flujos estacionarios

Análisis del sonido radiado



- Simulación de la radiación acústica en motores turbofan
- Propagación acústica a través de flujos estacionarios

Análisis del sonido radiado



- Simulación de la radiación acústica en motores turbofan
- Propagación acústica a través de flujos estacionarios

Conceptos previos

- Ecuación de ondas (medio homogéneo sin flujo),

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

c es velocidad de propagación en el medio.

- Régimen armónico: $p(x,t) = p(x)e^{i\omega t}$

Ecuación de Helmholtz

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

Conceptos previos

- Ecuación de ondas (medio homogéneo sin flujo),

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

c es velocidad de propagación en el medio.

- Régimen armónico: $p(x,t) = p(x)e^{i\omega t}$

Ecuación de Helmholtz

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0$$

Algunas definiciones previas

Frecuencia angular ω, frecuencia f y periodo T

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Número de onda y longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Relación de dispersión

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Algunas definiciones previas

Frecuencia angular ω, frecuencia f y periodo T

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Número de onda y longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Relación de dispersión

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Algunas definiciones previas

Frecuencia angular ω, frecuencia f y periodo T

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Número de onda y longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Relación de dispersión

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Modelo matemático

- Flujo: compresible, isoentrópico y potencial
- Flujo total = flujo estacionario + perturbaciones acústicas
- Acústica: perturbaciones armónicas de pequeña amplitud

$$\mathbf{u} \ll \mathbf{u_0}$$

- Linealización entorno al flujo estacionario $\mathbf{u_0}$:

$$\mathbf{u_t} = \mathbf{u_0} + \mathbf{u}$$

Modelo matemático

- Flujo: compresible, isoentrópico y potencial
- Flujo total = flujo estacionario + perturbaciones acústicas
- Acústica: perturbaciones armónicas de pequeña amplitud

$$\mathbf{u} \ll \mathbf{u_0}$$

- Linealización entorno al flujo estacionario $\mathbf{u_0}$:

$$\mathbf{u_t} = \mathbf{u_0} + \mathbf{u}$$

Modelo matemático

- Flujo: compresible, isoentrópico y potencial

- Flujo total = flujo estacionario + perturbaciones acústicas

- Acústica: perturbaciones armónicas de pequeña amplitud

$$\mathbf{u} \ll \mathbf{u_0}$$

- Linealización entorno al flujo estacionario $\mathbf{u_0}$:

$$\mathbf{u_t} = \mathbf{u_0} + \mathbf{u}$$

Modelo matemático

- Flujo: compresible, isoentrópico y potencial

- Flujo total = flujo estacionario + perturbaciones acústicas

- Acústica: perturbaciones armónicas de pequeña amplitud

$$\mathbf{u} \ll \mathbf{u_0}$$

- Linealización entorno al flujo estacionario $\mathbf{u_0}$:

$$\mathbf{u_t} = \mathbf{u_0} + \mathbf{u}$$

Ecuaciones del flujo

Ecuaciones del flujo estacionario

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u_0}) &= 0 \\
\mathbf{u_0} &= \nabla \phi_0 \\
\frac{1}{2}|\mathbf{u_0}|^2 + \frac{K\gamma}{\gamma - 1}\rho_0^{\gamma-1} &= E \\
p_0 &= K\rho_0^{\gamma} \\
c_0^2 &= \gamma \frac{p_0}{\rho_0}
\end{aligned}
$$

Ecuaciones para el campo acústico

- Ecuaciones del campo acústico

$$\begin{aligned} i\omega\rho + \nabla\cdot(\rho_0\nabla\phi + \rho\mathbf{u_0}) &= 0 \\ i\omega\phi + \mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi + \frac{p}{\rho_0} &= 0 \\ p &= c_0^2\rho \end{aligned}$$

Ecuación de ondas convectiva no homogénea

$$\omega^2\frac{\rho_0}{c_0^2}\phi - i\omega\left(\frac{\rho_0\mathbf{u_0}}{c_0^2}\cdot\nabla\phi + \nabla\cdot\left(\frac{\rho_0\mathbf{u_0}}{c_0^2}\phi\right)\right) - \nabla\cdot\left(\left(\frac{\rho_0\mathbf{u_0}}{c_0^2}\cdot\nabla\phi\right)\mathbf{u_0}\right) + \nabla\cdot(\rho_0\nabla\phi) = 0$$

Ecuaciones para el campo acústico

- Ecuaciones del campo acústico

$$\begin{aligned} i\omega\rho + \nabla\cdot(\rho_0\nabla\phi + \rho\mathbf{u_0}) &= 0 \\ i\omega\phi + \mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi + \frac{p}{\rho_0} &= 0 \\ p &= c_0^2\rho \end{aligned}$$

Ecuación de ondas convectiva no homogénea

$$\omega^2\frac{\rho_0}{c_0^2}\phi - i\omega\left(\frac{\rho_0\mathbf{u_0}}{c_0^2}\cdot\nabla\phi + \nabla\cdot\left(\frac{\rho_0\mathbf{u_0}}{c_0^2}\phi\right)\right) - \nabla\cdot\left(\left(\frac{\rho_0\mathbf{u_0}}{c_0^2}\cdot\nabla\phi\right)\mathbf{u_0}\right) + \nabla\cdot(\rho_0\nabla\phi) = 0$$

Condiciones de contorno acústicas

- Pared rígida:

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$$

- Pared 'blanda', forro acústico (condición de Myers):

$$i\omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = \{i\omega + \mathbf{u_0} \cdot \nabla - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u_0})\} \frac{p}{Z}$$

- Admisión: Modos prescritos (dato).

- Salida: Condiciones de no reflexión o radiación.

Requisitos computacionales del MEF

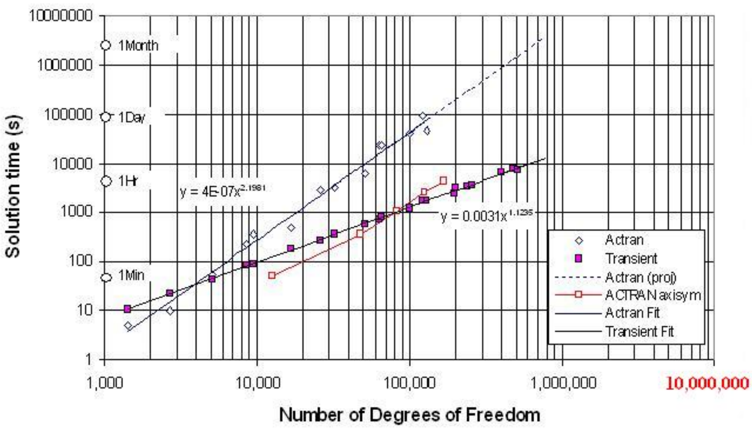
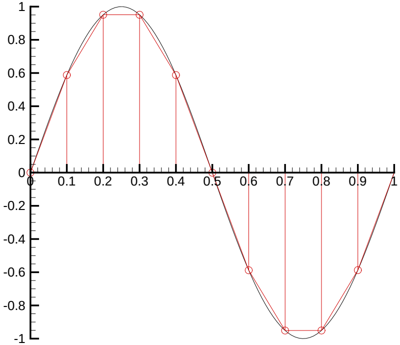


Figura: Requisitos computacionales del MEF (Fuente: J. Hamilton & R.J. Astley).

Propiedades del MEF: Error de Interpolación

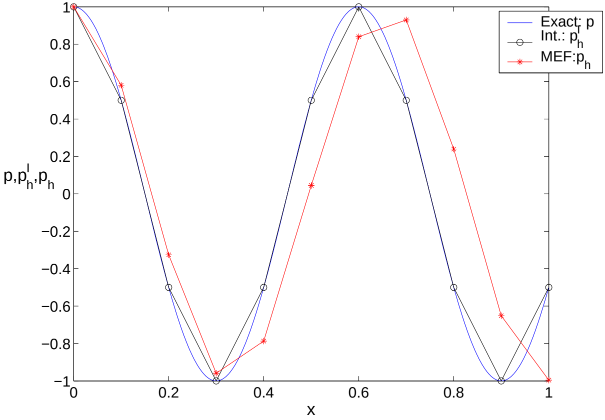
- Para una buena interpolación se requieren 8-10 nodos por longitud de onda:

$$h \approx \frac{\lambda}{10} \Rightarrow kh \approx \frac{2\pi}{10}$$



Propiedades del MEF: Error de Polución

- El error de polución hace que 8-10 nodos por longitud de onda NO sean suficientes cuando $\lambda < L/3$



Ecuación de Helmholtz homogénea

$$\Delta p + k^2 p = 0 \ \text{ en } \Omega, \ + \text{c.c.}$$

- Ondas planas son soluciones:

$$\phi_\theta(x,y) = A\, e^{-i(k_x(\theta)x + k_y(\theta)y)} = A\, e^{-ik(x\cos\theta + y\sin\theta)}, \ \theta \in [0, 2\pi)$$

- Aproximación de p mediante bases de ondas planas:

$$V_n = \left\{ p_n : p_n = \sum_{j=1}^{n} A_j\, e^{-ik(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j)} \right\}$$

Propiedades de la aproximación

Para toda p solución de la ecuación de Helmholtz en Ω

- $p \in H^s(\Omega)$

$$\inf_{p_n \in V_n} \|p - p_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\lambda(s-1)} \|p\|_{H^s(\Omega)}$$

($\lambda\pi$ es el menor ángulo exterior de Ω)

- p analítica:

$$\inf_{p_n \in V_n} \|p - p_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C e^{-\gamma \frac{n}{\ln n}} \|p\|_{L_2(\Omega)}$$

Bases de ondas planas con partición (malla) del dominio

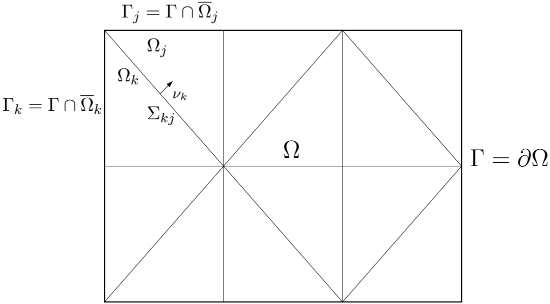
- Métodos de Trefftz:

  1. Funciones de base discontinuas
  2. Problema variacional definido sobre el esqueleto de la malla (aristas en 2D, caras 3D) para imponer condiciones de 'acople' y cond. contorno

- El Método de la Partición de la unidad:

  1. Funciones de base continuas
  2. Formulación variacional 'estándar' (misma que para el MEF)

Métodos de Trefftz



Introduciendo el espacio

$$\mathcal{K}(\Omega) = K(\Omega_1) \oplus \cdots \oplus K(\Omega_{N_e})$$

donde $K(\Omega_j) \subset H^1(\Omega_j)$ es el subespacio de las funciones $\varphi_j \in H^1(\Omega_j)$ satisfaciendo

$$\Delta\varphi_j + \kappa^2\varphi_j = 0 \quad \text{en } \Omega_j.$$

Métodos de Trefftz: Formulación variacional

- Condiciones de acople y de contorno

$$\begin{aligned}
[v]_{\Sigma_{kj}} &:= (v_k - v_j)\big|_{\Sigma_{kj}} \\
\left[\frac{\partial v}{\partial \nu_k}\right]_{\Sigma_{kj}} &:= \left(\frac{\partial v_k}{\partial \nu_k} - \frac{\partial v_j}{\partial \nu_k}\right)\Big|_{\Sigma_{kj}} = \left(\frac{\partial v_k}{\partial \nu_k} + \frac{\partial v_j}{\partial \nu_j}\right)\Big|_{\Sigma_{kj}} \\
B(v) &= g, \quad \text{condiciones contorno}
\end{aligned}$$

- Imposición mediante mínimos cuadrados (hay otras alternativas)

$$J(v) := \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_e}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N_e}\int_{\Sigma_{kj}}\left|\left[\frac{\partial v}{\partial \nu_k}\right]_{\Sigma_{kj}} - i\kappa\,[v]_{\Sigma_{kj}}\right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_e}\int_{\Gamma_k}|B(v)-g|^2\,d\Gamma,$$

$$\begin{aligned}
\langle \delta J(p), v\rangle &= \sum_{k=1}^{N_e}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N_e}\int_{\Sigma_{kj}}\left(\left[\frac{\partial p}{\partial \nu_k}\right]_{\Sigma_{kj}} - i\kappa\,[p]_{\Sigma_{kj}}\right)\overline{\left(\left[\frac{\partial v}{\partial \nu_k}\right]_{\Sigma_{kj}} - i\kappa\,[v]_{\Sigma_{kj}}\right)}\,d\Gamma + \\
&\quad \sum_{k=1}^{N_e}\int_{\Gamma_k}(B(p)-g)\,\overline{B(v)}\,d\Gamma = 0, \quad \forall v \in \mathcal{K}(\Omega)
\end{aligned}$$

Métodos de Trefftz: Discretización

Espacio discreto global

$$\mathcal{K}_{h,n}(\Omega) := K_{h,n_1}(\Omega_1) \oplus \cdots \oplus K_{h,n_{N_e}}(\Omega_{N_e}) \subset \mathcal{K}(\Omega)$$

se construye a partir de espacios discretos locales (en cada elemento)

$$K_{h,n_j}(\Omega_k) := \{\alpha_{j,l}\,\varphi_{j,l} : \ \alpha_{j,l} \in \mathbb{C}, \ l = 1, \ldots, n_j\} \subset K(\Omega_j)$$

donde,

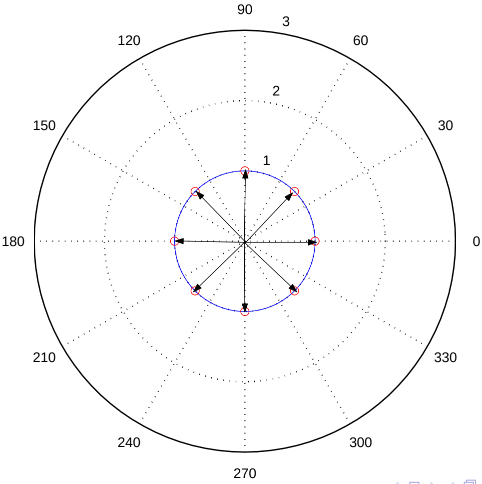
$$\varphi_{j,l} = \begin{cases} e^{i\kappa(x\cos\phi_l + y\sin\phi_l)} & \text{in } \Omega_j \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Cualquier función $v_{h,p} \in \mathcal{K}_{h,p}(\Omega)$ se escribirá

$$v_{h,n} = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{l=1}^{n_j} \alpha_{j,l}\,\varphi_{j,l}$$

Conjunto finito de vectores de onda

- Dado un número de direcciones n_d, consideramos ángulos $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n_d}\}$ equidistantes.



El Método de la Partición de la Unidad

- Introducido por Melenk y Babuška en 1996

- Características principales:

  1. Permite enriquecer el espacio de elementos finitos con funciones de base generales
  2. Comparte con el MEF: formulación variacional y definición local de las funciones de base (da lugar a matrices huecas).
  3. Eligiendo funciones de base *adecuadas* (buenas propiedades de aproximación) se espera reducir notablemente el número de g.d.l.

Ecuación de Helmholtz: Formulación Variacional

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla \bar{\phi}\, dV - \kappa^2 \int_\Omega p\, \bar{\phi}\, dV - i\kappa \left(\frac{1-Q}{1+Q}\right) \int_{\Gamma_R} p\, \bar{\phi}\, d\Gamma =$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} g\, \bar{\phi}\, d\Gamma + \frac{1}{1+Q} \int_{\Gamma_R} g\, \bar{\phi}\, d\Gamma, \ \forall \phi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$$

Discretizaciones (conformes)

Elementos Finitos estándar (MEF)

$$\phi_h(x,y) = \sum_{l=1}^{N_{nodes}} N_l(x,y)\,\phi_l,$$

ϕ_l : valores nodales (g.d.l. del MEF)

Método de la Partición de la Unidad (MPU)

$$\phi_{h,n}(x,y) = \sum_{l=1}^{N_{nodes}} \sum_{j=1}^{n_d(l)} A_l^j \psi_l^j(x,y), \quad \text{donde} \quad \psi_l^j(x,y) = N_l(x,y) e^{-ik(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j)},$$

A_l^j : amplitudes de onda nodales (g.d.l. del MPU)

Discretizaciones (conformes)

Elementos Finitos estándar (MEF)

$$\phi_h(x,y) = \sum_{l=1}^{N_{nodes}} N_l(x,y)\, \phi_l,$$

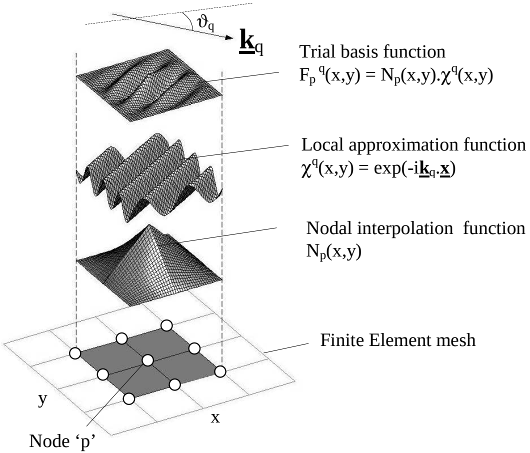
ϕ_l : valores nodales (g.d.l. del MEF)

Método de la Partición de la Unidad (MPU)

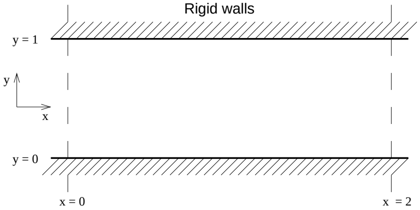
$$\phi_{h,n}(x,y) = \sum_{l=1}^{N_{nodes}} \sum_{j=1}^{n_d(l)} A_l^j \psi_l^j(x,y), \quad \text{donde} \quad \psi_l^j(x,y) = N_l(x,y) e^{-ik(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j)},$$

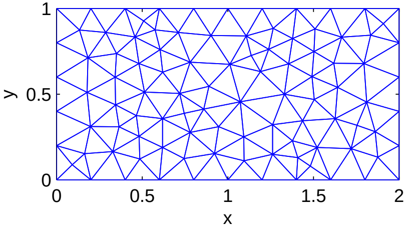
A_l^j : amplitudes de onda nodales (g.d.l. del MPU)

Ejemplo de función de base del MPU



Test numérico: Propagación en conductos

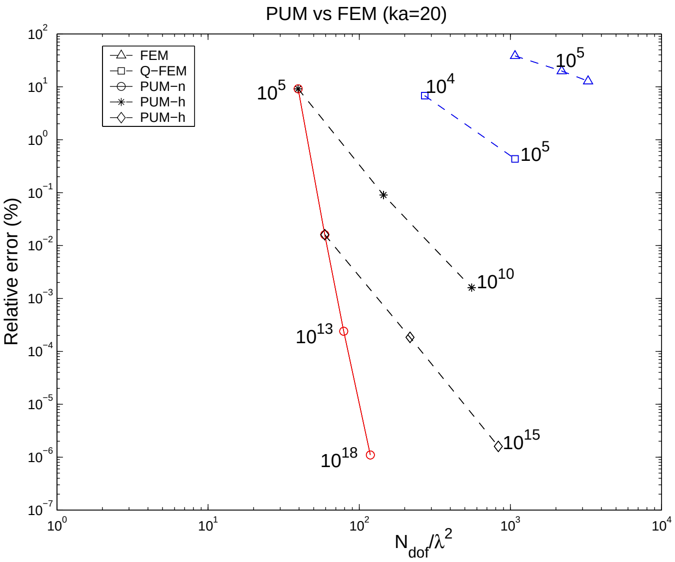




a) Dominio

b) Malla inicial

Estudio de la convergencia del PUM



Ecuación de Helmholtz convectiva no uniforme

Ecuación de ondas convectiva

$$\omega^2 \frac{\rho_0}{c_0^2}\phi - i\omega\left(\frac{\rho_0 \mathbf{u_0}}{c_0^2}\cdot\nabla\phi + \nabla\cdot\left(\frac{\rho_0 \mathbf{u_0}}{c_0^2}\phi\right)\right) -$$
$$\nabla\cdot\left(\left(\frac{\rho_0 \mathbf{u_0}}{c_0^2}\cdot\nabla\phi\right)\mathbf{u_0}\right) + \nabla\cdot(\rho_0\nabla\phi) = 0$$

Funciones para el enriquecimiento local: soluciones 'localmente' exactas

Flujo uniforme 2D

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + (1 - M^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2ikM\frac{\partial \phi}{\partial x} + k^2\phi = 0$$

Ondas planas: $\phi(x,y) = A\, e^{-i(k_x x + k_y y)} = A\, e^{-ik\frac{(x\cos\theta + y\sin\theta)}{1+M\cos\theta}}$

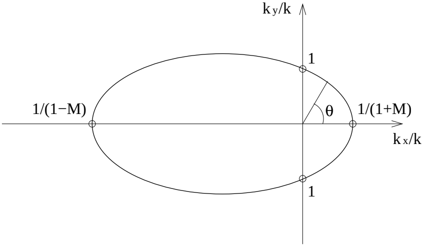


Figura: Lugar geométrico de vectores de onda **k**

Funciones de base del MPU

Elementos Finitos estándar (MEF)

$$\phi_h(x,y) = \sum_{l=1}^{N_{nodes}} N_l(x,y)\,\phi_l,$$

ϕ_l : valores nodales (g.d.l. del MEF)

Método de la Partición de la Unidad (MPU)

$$\phi_h(x,y) = \sum_{l=1}^{N_{nodes}} \sum_{j=1}^{n_d(l)} A_l^j \psi_l^j(x,y), \quad \text{donde} \quad \psi_l^j(x,y) = N_l(x,y) e^{-ik\frac{(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j)}{1+M\cos\theta_j}},$$

A_l^j : amplitudes de onda nodales (g.d.l. del MPU)

Funciones de base del MPU

Elementos Finitos estándar (MEF)

$$\phi_h(x,y) = \sum_{l=1}^{N_{nodes}} N_l(x,y)\, \phi_l,$$

ϕ_l : valores nodales (g.d.l. del MEF)

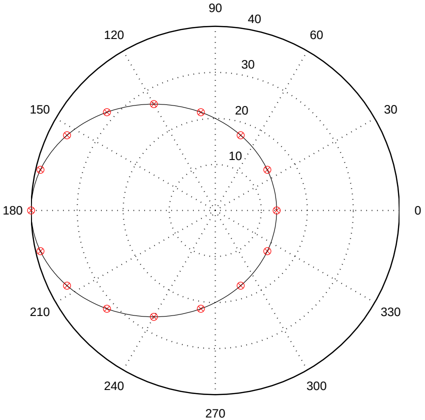
Método de la Partición de la Unidad (MPU)

$$\phi_h(x,y) = \sum_{l=1}^{N_{nodes}} \sum_{j=1}^{n_d(l)} A_l^j \psi_l^j(x,y), \quad \text{donde} \quad \psi_l^j(x,y) = N_l(x,y) e^{-ik\frac{(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j)}{1+M\cos\theta_j}},$$

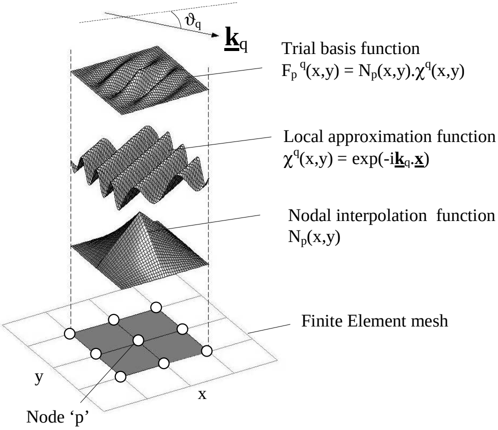
A_l^j : amplitudes de onda nodales (g.d.l. del MPU)

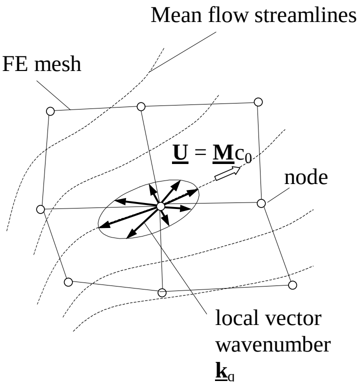
Conjunto finito de vectores de onda

- Dado un número de direcciones n_d, consideramos ángulos $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n_d}\}$ tales que $\left\{\vec{k}(\theta_1), \ldots, \vec{k}(\theta_{n_d})\right\}$ son equidistantes.



Base del MPU





a) Construcción de la base MPU

b) Elipse local de vectores de onda

Ecuaciones discretizadas

Formulación Variacional

▸ Formulación fuerte

$$\int_\Omega \frac{\rho_0}{c_0^2}\left\{c_0^2\nabla\psi\cdot\nabla\phi-(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\psi)(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi)\right\}dV+i\omega\int_\Omega\frac{\rho_0}{c_0^2}\{\psi(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi)-(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\psi)\phi\}\,dV-$$

$$\omega^2\int_\Omega\frac{\rho_0}{c_0^2}\psi\phi\,dV=\int_\Gamma\frac{\rho_0}{c_0^2}\left\{c_0^2\psi\nabla\phi-\mathbf{u_0}\psi(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi)-i\omega\mathbf{u_0}\psi\phi\right\}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Conjunto discreto de funciones test

$$\psi(x,y)\equiv\psi_l^j(x,y),\quad l=1,\ldots,N_{nodes}\ \text{and}\ j=1,\ldots,n_d(l)$$

Sistema de ecuaciones lineales

$$[B(\omega)]\{A\}=\{F(\omega)\}$$

Ecuaciones discretizadas

Formulación Variacional

Formulación fuerte

$$\int_\Omega \frac{\rho_0}{c_0^2}\left\{c_0^2\nabla\psi\cdot\nabla\phi-(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\psi)(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi)\right\}dV+i\omega\int_\Omega\frac{\rho_0}{c_0^2}\left\{\psi(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi)-(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\psi)\phi\right\}dV-\omega^2\int_\Omega\frac{\rho_0}{c_0^2}\psi\phi\,dV=\int_\Gamma\frac{\rho_0}{c_0^2}\left\{c_0^2\psi\nabla\phi-\mathbf{u_0}\psi(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi)-i\omega\mathbf{u_0}\psi\phi\right\}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Conjunto discreto de funciones test

$$\psi(x,y)\equiv\psi_l^j(x,y),\quad l=1,\ldots,N_{nodes}\ \text{ and }\ j=1,\ldots,n_d(l)$$

Sistema de ecuaciones lineales

$$[B(\omega)]\{A\}=\{F(\omega)\}$$

Ecuaciones discretizadas

Formulación Variacional

Formulación fuerte

$$\int_\Omega \frac{\rho_0}{c_0^2}\left\{c_0^2\nabla\psi\cdot\nabla\phi-(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\psi)(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi)\right\}dV+i\omega\int_\Omega \frac{\rho_0}{c_0^2}\{\psi(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi)-(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\psi)\phi\}\,dV-$$

$$\omega^2\int_\Omega \frac{\rho_0}{c_0^2}\psi\phi\,dV=\int_\Gamma \frac{\rho_0}{c_0^2}\left\{c_0^2\psi\nabla\phi-\mathbf{u_0}\psi(\mathbf{u_0}\cdot\nabla\phi)-i\omega\mathbf{u_0}\psi\phi\right\}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Conjunto discreto de funciones test

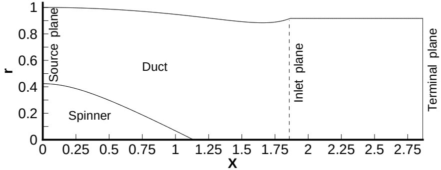
$$\psi(x,y)\equiv\psi_l^j(x,y),\quad l=1,\ldots,N_{nodes}\ \text{ and }\ j=1,\ldots,n_d(l)$$

Sistema de ecuaciones lineales

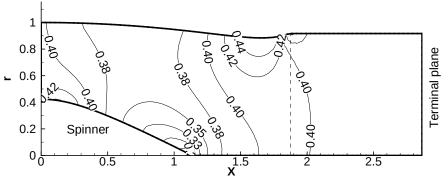
$$[B(\omega)]\{A\}=\{F(\omega)\}$$

Test numérico: Admisión de un motor turbofan tipo

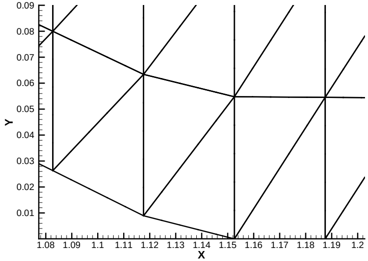
▸ Geometría



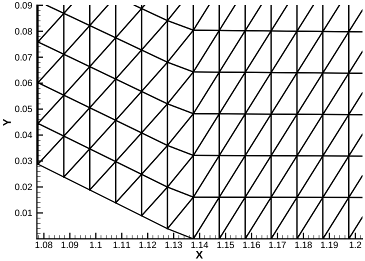
(a) Dominio computacional.



(b) Isolíneas número de Mach.

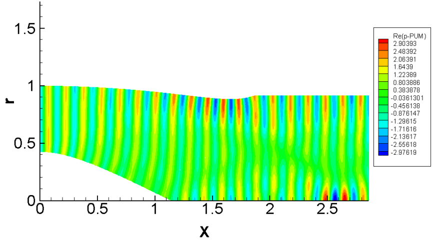


(c) MPU, $h = 0{,}035$.

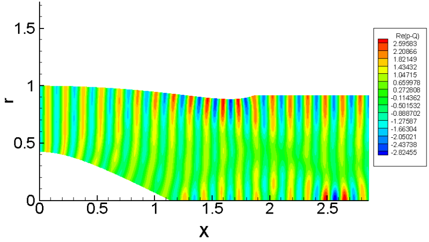


(d) MEF cuadrático, $h = 0{,}01$.

Campo de presión acústica (parte real) para $\omega = 25$

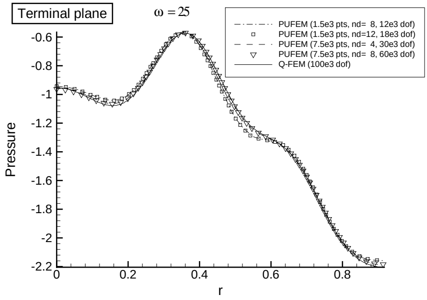


(e) MPU, 12.000 g.d.l (1.500 pts., 8 dir.)

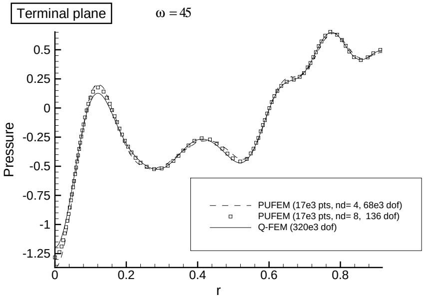


(f) MEF cuadrático, 100.000 d.o.f.

Presión acústica (parte real) en el plano final



(g) $\omega = 25$



(h) $\omega = 45$

Conclusiones

- El estudio realizado indica que el MPU es más eficiente que el el MEF para resolver problemas de propagación acústica de onda corta en flujos irrotacionales.

- En los problemas bidimensionales se observan mejoras muy notables en la eficiencia.

- El mal condicionamiento de los sistemas de ecuaciones resultantes en el MPU limita el margen de mejora.

Conclusiones

- El estudio realizado indica que el MPU es más eficiente que el el MEF para resolver problemas de propagación acústica de onda corta en flujos irrotacionales.
- En los problemas bidimensionales se observan mejoras muy notables en la eficiencia.
- El mal condicionamiento de los sistemas de ecuaciones resultantes en el MPU limita el margen de mejora.

Conclusiones

- El estudio realizado indica que el MPU es más eficiente que el el MEF para resolver problemas de propagación acústica de onda corta en flujos irrotacionales.

- En los problemas bidimensionales se observan mejoras muy notables en la eficiencia.

- El mal condicionamiento de los sistemas de ecuaciones resultantes en el MPU limita el margen de mejora.

Trabajo futuro

- Investigar posibles estrategias para solventar el problema del mal condicionamiento: métodos multimalla, 'refinamiento' adaptativo, etc.

- Hacer un estudio análogo para evaluar la eficiencia del MPU para problemas tridimensionales.

- Comparar el MPU con otros métodos numéricos recientes que también se basan en el uso de bases de ondas planas: UWVF, Métodos Trefftz (LSM), DGM, etc.

Trabajo futuro

- Investigar posibles estrategias para solventar el problema del mal condicionamiento: métodos multimalla, ‘refinamiento’ adaptativo, etc.
- Hacer un estudio análogo para evaluar la eficiencia del MPU para problemas tridimensionales.
- Comparar el MPU con otros métodos numéricos recientes que también se basan en el uso de bases de ondas planas: UWVF, Métodos Trefftz (LSM), DGM, etc.

Trabajo futuro

- Investigar posibles estrategias para solventar el problema del mal condicionamiento: métodos multimalla, ‘refinamiento’ adaptativo, etc.
- Hacer un estudio análogo para evaluar la eficiencia del MPU para problemas tridimensionales.
- Comparar el MPU con otros métodos numéricos recientes que también se basan en el uso de bases de ondas planas: UWVF, Métodos Trefftz (LSM), DGM, etc.