FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

# Funkcionální analýza s aplikacemi ve zpracování signálů

**Autoři textu:**
Doc. RNDr. Vítězslav Veselý, CSc.
Mgr. Pavel Rajmic, Ph.D.

**BRNO 2016**

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vznik těchto skript byl podpořen projektem č. CZ.1.07/2.2.00/28.0096
Evropského sociálního fondu a státním rozpočtem České republiky.

| | |
|---|---|
| Autoři | Doc. RNDr. Vítězslav Veselý, CSc., |
| | Mgr. Pavel Rajmic, Ph.D. |
| Název | Funkcionální analýza s aplikacemi ve zpracování signálů |
| Vydavatel | Vysoké učení technické v Brně |
| | Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií |
| | Ústav telekomunikací |
| | Technická 12, 616 00 Brno |
| Vydání | druhé, opravené a doplněné |
| Rok vydání | 2016 |
| Náklad | elektronicky |
| ISBN | 978-80-214-5186-5 (první vydání) |

Tato publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou.


**Vítězslav Veselý**, Katedra aplikované matematiky a informatiky, Ekonomicko-správní fakulta, Masarykova universita v Brně, Lipová 507/41a, Brno.
Tel. 549 49 8330, email `vesely@econ.muni.cz`

**Pavel Rajmic**, Ústav telekomunikací, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Vysoké učení technické v Brně, Technická 12, Brno.
Tel. 541 146 937, email `rajmic@feec.vutbr.cz`

# Obsah

# SEZNAM OBRÁZKŮ

# SEZNAM ZKRATEK A SYMBOLŮ

## Všeobecné konvence značení

V celém textu jsou používány následující běžné konvence značení.

| Symbol/zkratka | Popis |
|---|---|
| | **Číselné obory** |
| $\mathbb{N}$ | přirozená čísla: $1, 2, 3, \dots$ |
| $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ | nezáporná celá čísla: $0, 1, 2, 3, \dots$ |
| $\mathbb{Z}$ | celá čísla: typicky $i, j, k, m, n$ |
| $\mathbb{Z}_N := \{0, 1, \dots, N-1\}$ | zbytky po dělení celého čísla číslem $N \in \mathbb{N}$ |
| $n \bmod N$ | operace modulo: zbytek po dělení čísla $n \in \mathbb{Z}$ číslem $N \in \mathbb{N}$ |
| $\mathbb{R}$ | reálná čísla: typicky $r, s, t$ |
| $\operatorname{sgn} r := \begin{cases} 1 & \text{pro } r > 0 \\ 0 & \text{pro } r = 0 \\ -1 & \text{pro } r < 0 \end{cases}$ | znaménko čísla $r \in \mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ | nezáporná reálná čísla |
| $\mathbb{R}^- := \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}$ | záporná reálná čísla |
| $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ | rozšířená množina reálných čísel |
| $\mathbb{Q}$ | racionální čísla |
| $\mathbb{C}$ | komplexní čísla, typicky $c, z$ |
| | $\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbb{C}$ |
| $Re\, c$ $(Im\, c)$ | reálná (imaginární) část čísla $c \in \mathbb{C}$ |
| | **Matice a vektory** |
| např. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ | matice rozměru (typu) $m \times n$, $m > 1, n > 1$ (tučně velkými písmeny) |
| např. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ | vektory rozměru $n \times 1$ (standard) nebo $1 \times n$, $n > 1$ (tučně malými písmeny) |
| | **Množiny** |
| $\lvert M \rvert$ | Mohutnost (kardinalita) množiny $M$ |
| $\aleph_0$ | spočetná mohutnost |
| $I$ | obecná (jakákoliv) indexová množina |
| $J$ | nejvýše spočetná indexová množina, obvykle $J = \mathbb{N}$ nebo $J = \mathbb{Z}$ $(J \neq \emptyset)$ |
| $K$ | konečná indexová množina $(K \neq \emptyset)$ |
| $\exp X$ | množina všech podmnožin množiny $X$ |
| | **Funkce** |
| $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n \in J}$ | posloupnosti |
| pro s.v. $n \in J$ | pro skoro všechna $n \in J$ neboli pro všechna $n \in J$ až na konečně mnoho |
| $\sum a_n$, $\sum_{n \in J} a_n$ | sumace řady |
| např. $f, g, h$ | komplexní funkce reálného argumentu ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$), není-li řečeno jinak |
| $f(t)$ | hodnota funkce $f$ v bodě $t \in \mathbb{R}$ (jen pro $n = 1$) |

| | |
|---|---|
| $f(\boldsymbol{t}) := f(t_1, \dots, t_n)$ | hodnota funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$ |
| $\mathrm{supp}(f) := \{\boldsymbol{t} \mid f(\boldsymbol{t}) \neq 0\}$ | nosič funkce $f$ |
| $1_S(\boldsymbol{t}) := \begin{cases} 1 & \text{pro } \boldsymbol{t} \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ | charakteristická funkce podmnožiny $S \subseteq \mathbb{R}^n$ |
| $\delta(t)$ | Diracova „funkce“ jakožto slabá limita funkcionálů v teorii zobecněných funkcí (distribucí): $\delta(t) := \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} 1_{(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})}(t)$, $\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$ |
| $\delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{pro } m = n \\ 0 & \text{pro } m \neq n \end{cases}$ | Kroneckerův symbol $(m, n \in \mathbb{Z})$ |
| | **Lebesgueův integrál** |
| $\int_M f(t)\,dt$ | integrál $f$ na měřitelné množině $M$, kde integrál i měřitelnost je v Lebesgueově smyslu |
| $\int f(t)\,dt := \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt$ | Lebesgueův integrál $f$ na $M = \mathbb{R}$ |
| $\int_M f(t)\,dF(t)$ | Lebesgue-Stieltjesův integrál na $M$ |
| $\int_M f(t)\,d\mu(t)$ | Lebesgueův integrál s obecnou mírou $\mu$ na $M$ |
| s.v. na $M$ | skoro všude na $M$, neboli pro všechna $t \in M$ s výjimkou podmnožiny nulové míry |
| $\operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{t \in M}} f(t)$ | esenciální supremum funkce $f$ na $M$: $$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{t \in M}} f(t) := \inf\{C \mid f \leq C \text{ s.v. na } M\}$$ |
| | **Prostory a jejich prvky** |
| např. $X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2 \dots$ | prostory: neprázdné množiny opatřené nějakou strukturou |
| $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \dots$ | prvky výše uvedených prostorů |
| | **Operátory** |
| např. $T : X \to Y$ | (lineární) operátor neboli zobrazení zachovávající (lineární) strukturu (např. homomorfizmus) |
| $T : X \rightarrowtail Y$ | injektivní operátor (prosté zobrazení) |
| $T : X \twoheadrightarrow Y$ | surjektivní operátor |
| $T : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ | bijektivní operátor (např. izomorfismus) |
| $T^{-1} : Y \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow X$ | inverzní operátor k bijektivnímu operátoru $T$ |
| $T(x)$ nebo stručně $Tx$ | hodnota operátoru $T$ v bodě $x$ |
| $T(M)$ | obraz množiny $M$ v operátoru $T$ |
| $T^{-1}(M)$ | úplný vzor podmnožiny $M \subseteq Y$ v zobrazení $T : X \to Y$; $T^{-1}(M) := \{x \in X \mid Tx \in M\}$ |
| $T^{-1}y := T^{-1}(\{y\})$ | úplný vzor prvku $y \in Y$ |
| $I$, $I_X$ | identický operátor, na $X$ |

**Značení zavedené v textu**

Následuje abecední seznam zkratek a symbolů spolu s odkazem do textu, kde byly zavedeny.

| Značení (abecedně) | Popis | odkaz do textu |
|---|---|---|
| $A_\Phi \leq R_\Phi, S_\Phi \leq B_\phi$ | nejlepší meze framu/Rieszovy báze $\Phi$ | 6.41 |
| $\alpha_T, \beta_T$ ($\alpha_T \leq T \leq \beta_T$) | nejlepší meze (kvadratické formy) operátoru $T$ | 3.41 |
| B-prostor: $B, B_1, B_2, \ldots$ | Banachův prostor | 2.50 |
| $\mathcal{B}(X, Y)$ | prostor ohraničených lineárních operátorů | 3.2 |
| BSV | Banach-Steinhausova věta | 3.14 |
| $C(\mathcal{I})$ | prostor funkcí spojitých na $\mathcal{I}$ | 2.73 |
| DCK | diskrétní cyklická konvoluce | C.28 |
| DFT | diskrétní Fourierova transformace | C.5, C.10, C.12 |
| DLK | diskrétní lineární konvoluce | C.28 |
| $d_X$ | metrika na $X$ | 2.31 |
| $\mathcal{D}(T)$ | definiční obor operátoru $T$ | 2.3 |
| $\dim X$ | dimenze prostoru $X$ | 2.2 |
| $\mathcal{E}$ | přirozená ONB v $\ell^2$ | 2.78 |
| FFT | rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier Tr.) | C.7 |
| FŘ | Fourierova řada | 2.81, C.1 |
| $\gamma(M)$ | hranice množiny $M$ (v topologii) | 2.15 |
| H-prostor: $H, H_1, H_{2,\ldots}$ | Hilbertův prostor | 2.63 |
| $H^2_+, H^2_-$ | Hardyho prostory | 2.101 |
| HBV | Hahn-Banachova věta | 3.10 |
| IMT | věta o inverzním zobrazení (Inverse Mapping Th.) | 3.6 |
| $\mathrm{Int}(M)$ | vnitřek množiny $M$ (v topologii) | 2.15 |
| $K(s, r)$ | otevřená koule o středu $s$ a poloměru $r$ | 2.31 |
| L-izomorfismus | lineární izomorfismus | 2.7 |
| L-(pod)prostor | lineární (vektorový) (pod)prostor | 2.1 |
| $L^p, \ell^p$ | $p$-prostory | 2.73, 2.74, 2.76, B.8 |
| $\widetilde{L}^p_T$ | $p$-prostor $T$-periodických funkcí | 2.105, C.2.1 |
| $\ell_N$ | prostor $N$-periodických posloupností | C.2.2 |
| $\mathcal{L}_\mathbb{F}$ | lineární struktura vektorového prostoru nad $\mathbb{F}$ | 2.1 |
| $\mathcal{L}(M)$ | lineární obal množiny $M$ | 2.1 |
| $\mathcal{L}(X, Y)$ | prostor lineárních operátorů z $X$ do $Y$ | 2.3 |
| M-(pod)prostor | metrický (pod)prostor | 2.31 |
| ML-prostor | metrický lineární prostor | 2.44 |
| NL-prostor | normovaný lineární prostor | 2.47 |
| $\mathcal{N}(T)$ | jádro (nulový prostor) operátoru $T$ (null space) | 2.3 |
| $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$ | otevřené okolí, ryzí (v topologii) | 2.15 |
| OGS | ortogonální systém (množina) | 2.66 |
| OMT | věta o otevřeném zobrazení (Open Mapping Th.) | 3.5 |
| ONS, ONB | ortonormální systém (množina), báze | 2.66 |
| PW-prostor | Paley-Wienerův prostor | 2.96 |
| PI | Parsevalova identita | 6.21, C.1.1 |
| $\mathcal{P}_T$ | prostor $T$-periodizovatelných funkcí | 2.107 |
| RB | Rieszova báze | 6.29 |
| $\mathrm{rect}\,(t)$ | tzv. obdélníková funkce | (C.15) |
| RFV | Riesz-Fischerova věta | 6.21 |
| RVR | Rieszova věta o reprezentaci | 3.12 |

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{R}(T)$ | obor hodnot operátoru $T$ (range space) | 2.3 |
| $\mathcal{R}^\dagger, \mathcal{R}^\dagger_\Phi$ | obor hodnot souřadnicového zobrazení v bázi $\Phi$ | 6.9 |
| $\mathrm{sinc}(t)$ | funkce sinc (sinus cardinalis) | 2.80, C.23 |
| T-(pod)prostor | topologický (pod)prostor | 2.15, 2.22 |
| TF-prostor | prostor funkcí koncentrovaných v čase i frekvenci | 2.92 |
| TL-prostor | topologický lineární prostor | 2.43 |
| TLI | topologický lineární izomorfismus | 2.51 |
| $\mathcal{T}_X$ | topologie na $X$ | 2.15 |
| $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ | nejmenší topologie obsahující $\mathcal{S}$ | 2.19 |
| UI | unitární izomorfismus | 3.76 |
| VS-prostor | prostor s vnitřním součinem | 2.58 |

| Operační symbol | Popis (abecedně) | odkaz do textu |
|---|---|---|
| $\kappa(T)$ | číslo podmíněnosti operátoru $T$ | 5.9 |
| $\widehat{x} := \mathcal{F}^- x$ | Fourierova transformace $x$ (nebo ortogonální projekce $x$ — viz níže) | 2.87, C.12 |
| $\check{x} := \mathcal{F}^+ x$ | zpětná Fourierova transformace $x$ | 2.87, C.12 |
| $X'$, $x' \in X'$ | duální prostor k $X$ spojitých lin. funkcionálů $x'$ | 3.9 |
| $y'$, $\Phi'$ | duální prvek, duální frame/Rieszova báze | 6.50, 6.51 |
| $\diamond$ | fourierovský transformační pár | 2.91 |
| $\times, \prod$ | kartézský součin (nebo korelace — viz níže) | 2.10 |
| $\xrightarrow{d}$ | konvergence dle metriky $d$ | 2.31 |
| $\xrightarrow{sl.}$ | slabá konvergence | 3.16 |
| $\xrightarrow{\mathcal{T}_X}$ | konvergence v topologii na $X$ | 2.30 |
| $*, \circledast$ | konvoluce, periodická | C.15, C.28 |
| $\times, \otimes$ | korelace, periodická | C.15, C.28 |
| $\overset{L}{\simeq}$ | lineární izomorfismus | 2.7 |
| $\overset{L}{\subseteq}$ | lineární podprostor | 2.1 |
| $\mathbb{W}^\pm_N$ | matice operátoru DFT | C.5 |
| $\boldsymbol{T}^*$ | matice (hermitovsky) transponovaná k $\boldsymbol{T}$ | 3.30 |
| $[T]$ | maticová reprezentace operátoru $T$ | 2.13 |
| $\lVert\cdot\rVert, \lVert\cdot\rVert_X$ | norma, na $X$ | 2.47 |
| $T'$, $T^*$ | operátor adjungovaný k $T$ | 3.24, 3.26 |
| $D_s$ | operátor dilatace | 3.1 |
| $L_\Phi$ | operátor diskretizační (Besselův) v bázi/framu $\Phi$ | 6.18 |
| $\mathrm{DFT}^\pm_N$ | operátor diskrétní Fourierovy transformace | C.5 |
| $\mathcal{F}^\pm_1$ | operátor Fourierovy transformace v $L^1$ | 2.84, C.10 |
| $\mathcal{F}, \mathcal{F}^\pm, \mathcal{F}^\pm_2$ | operátor Fourierovy transformace v $L^2$ | 2.87, 3.1, C.12 |
| $S_\Phi$ | operátor framový v bázi/framu $\Phi$ | 6.18 |
| $T_B$ | operátor Fredholmova typu s jádrem $B$ | B.17, 3.7 |
| $f \to \widetilde{f}$ | operátor involuce | 3.1 |
| $f \to \bar{f}$ | operátor konjugace | 3.1 |
| $R_\Phi$ | operátor korelační (Gramův) v bázi/framu $\Phi$ | 6.18 |
| $e_a$ | operátor modulace | 3.1 |
| $P$, $P_H$ | operátor ortogonální projekce, na podprostor $H$ | 3.55 |

| | | |
|---|---|---|
| $T_h := T_h^-$, $\widetilde{T}_h := \widetilde{T}_h^-$ | operátor konvoluce, periodické (s imuplz. odezvou $h$) | C.15, C.28, 3.7 |
| $T_h^+$, $\widetilde{T}_h^+$ | operátor korelace, periodické (s imuplzní odezvou $h$) | C.15, C.28 |
| $T^+$ | operátor Moore-Penroseovy pseudoinverze k $T$ | 5.1 |
| $T^-$ | operátor zobecněné inverze k $T$ | 5.13 |
| $R$ | operátor reflexe | 3.1 |
| $T_\Phi$ | operátor rekonstrukční v bázi/framu $\Phi$ | 6.9, 6.18 |
| $\tau_b$ | operátor translace (posunutí) | 3.1 |
| $\sqrt{T}$ | operátorová odmocnina z $T$ | 3.52 |
| $\perp$ | ortogonalní na, kolmý na | 2.60 |
| $M^\perp$ | ortogonální komplement množiny $M$ | 2.65 |
| $\widehat{x} := P_H x$ | ortogonální projekce $x$ na podprostor $H$ | 3.54, 3.55 |
| $x^\perp := x - P_H x$ | kolmá složka ortogonální projekce $x$ na $H$ | 3.56 |
| $\oplus, \bigoplus$ | ortogonální součet podprostorů | 2.64 |
| $\lVert\cdot\rVert_p$ | $p$-norma | 2.73, 2.74, B.1 |
| $x^+ := T^+ y$, $x^- := T^- y$ | pseudoinverzní řešení rovnice $Tx = y$ | 5.4, 5.13 |
| $\dot{+}, \dot{\sum}$ | přímý součet podprostorů | 2.5, A.5, 2.56 |
| $\dot{T}$ | restrikce operátoru $T$ na $\overline{\mathcal{R}(T^*)}$ | 4.2 |
| $+, \sum$ | součet podprostorů | A.5 |
| $\langle\cdot,\circ\rangle, \langle\cdot,\circ\rangle_X$ | vnitřní (skalární) součin, na $X$ | 2.58 |
| $\{x\}_\Phi$ | posloupnost souřadnic prvku $x$ v bázi $\Phi$ | 6.9 |
| $T_\lambda$ ($R_\lambda := T_\lambda^{-1}$) | spektrální teorie: operátory (rezolventa) | 7 |
| $\sigma(T)$ | spektrum operátoru $T$ | 7.1 |
| $C\sigma(T)$ | spojité spektrum operátoru $T$ | 7.1 |
| $P\sigma(T)$ | bodové spektrum operátoru $T$ | 7.1 |
| $R\sigma(T)$ | reziduální spektrum operátoru $T$ | 7.1 |
| $\mathcal{R}_\lambda, \mathcal{N}_\lambda$ | spektrální teorie: prostory | 7 |
| $\overset{TLI}{\simeq}$ | topologický lineární izomorfismus | 2.51 |
| $\overset{UI}{\simeq}$ | unitární izomorfismus | 3.76 |
| $\overline{M}$ | uzávěr množiny $M$ (v topologii) | 2.15 |
| $\mathrm{Int}(M)$ | vnitřek množiny $M$ (v topologii) | 2.15 |

# 1 ÚVOD

Aparát *funkcionální analýzy* je v současnosti matematickým základem mnoha moderních metod aplikované matematiky, které významným způsobem přispívají k rozvoji celé řady dalších vědních oborů (viz níže). Týká se to především oblasti *zpracování signálů*, která v posledních desetiletích prochází revolučními změnami v přístupu k reprezentaci signálů. Historicky dominantní roli hrála dlouhá léta *Fourierova analýza* spočívající v rozkladu signálu na sinusové kmity z jeho frekvenčního spektra, každý určený svojí amplitudou, frekvencí a fázovým posuvem. Již od roku 1910 bylo ale známo, že sinusový průběh není jediný vhodný stavební blok pro reprezentaci signálu. Pro signály pulzního charakteru se ukázal jako vhodnější rozklad na obdélníkové kmity — tzv. *Haarův systém*. Vzhledem k nedostatečné hladkosti bylo ale jeho použití značně omezeno. Průlom nastal až v 80. letech minulého století s příchodem waveletových technik, kde stavebním blokem je tlumeně oscilující funkce předepsané hladkosti (*vlnka*) určená amplitudou, měřítkem (hraje roli změny frekvence) a posuvem. Signál je rozkládán do tzv. *waveletového spektra*. Haarův systém se tak stal jedním z mnoha speciálních případů waveletových systémů (nejnižší hladkost: vlnka je po částech konstantní funkce).

Klasickou matematickou disciplínou zkoumající funkce (signály) je *matematická analýza*, která je standardní součástí základních kurzů matematiky. Pro ni je typický analytický přístup zaměřený především na lokální popis a chování každé konkrétní funkce určitého typu: spojitost, monotonie (1. derivace), tvarové charakteristiky jako konvexnost nebo konkávnost (2. a vyšší derivace), plocha pod grafem průběhu funkce (určitý integrál) apod. Funkcionální analýza se naopak koncentruje na strukturní charakteristiky společné určité třídě (prostoru) funkcí a zkoumání vztahů mezi nimi (operátory). V tomto textu se omezíme na *lineární funkcionální analýzu*, kam spadá většina aplikací a kde pracujeme s lineárními prostory funkcí a lineárními vztahy mezi nimi. Z tohoto pohledu lze například pohlížet na derivaci jako na lineární zobrazení (operátor) přiřazující funkci $f$ jinou funkci $f'$. Tento odlišný přístup se promítá i do způsobu parametrizace funkce $f$. V matematické analýze konkrétní funkci $f(t)$ typicky zadáváme analytickým předpisem $f(t;\beta_1,\dots,\beta_n)$ pomocí jejích vnitřních parametrů $\beta_1,\dots,\beta_n$, který je obecně nelineární. Naopak lineární funkcionální analýza, vyjadřuje $f$ typicky jako lineární kombinaci $f(t)=\sum_n c_n\psi_n(t)$ v pevně zvoleném systému funkcí generujících prostor, do něhož $f$ strukturně náleží. Funkci $f$ tak získáváme jako obraz $f=S(c)$ v lineárním operátoru $S$ přiřazujícím posloupnosti koeficientů $c:=\{c_n\}$ funkci $f$ (např. vyjádření periodické funkce rozvojem do její Fourierovy řady). Takový operátor $S$ můžeme označit za *syntetizující*, zatímco operátor $T$ hledající k dané funkci příslušné koeficienty $c=T(f)$ můžeme označit za *analytický*. Ten poskytuje vlastně řešení inverzní úlohy (stejně jako $T:=S^{-1}$ řeší soustavu lineárních rovnic s regulární maticí soustavy $S$). Je zřejmé, že vlastnosti operátoru $S$ (resp. generujících funkcí $\psi_n$) determinují jednoznačnost, resp. numerickou stabilitu výpočtu koeficientů $c$.

Pro ilustraci vezměme 1-periodickou funkci $A\cos(2\pi t-\varphi), t\in\mathbb{R}$, která je stavebním kamenem ve Fourierově analýze. Ta je vnitřně nelineárně parametrizována amplitudou $A\in\mathbb{R}$ a fázovým posuvem $0\le\varphi<2\pi$. Jednoduchou úpravou dostáváme dvě alternativní lineární parametrizace (goniometrický a komplexní tvar):

$$A\cos(2\pi t-\varphi)=a\cos(2\pi t)+b\sin(2\pi t)=\bar{c}e^{-i2\pi t}+ce^{i2\pi t},$$

kde $a:=A\cos(\varphi)$, $b=A\sin(\varphi)$ a $c:=\frac{1}{2}(a-i\,b)$.
Transformační vztahy $(A,\varphi)\mapsto(a,b)\mapsto c$ odpovídají přechodu od polárních ke kartézským souřadnicím a případně dále do komplexní roviny. Zpětný přechod k amplitudově-fázovému tvaru je dán vztahy $A=\sqrt{a^2+b^2}$ a $\varphi=\arctan\frac{b}{a}$. Vidíme tedy, že prostor kosinových funkcí $\{A\cos(2\pi t-\varphi)\,|\,A\in\mathbb{R},0\le\varphi<2\pi\}$ je dvourozměrný s bázovými funkcemi $\cos 2\pi t,\sin 2\pi t$.

Zmíníme stručně některé vybrané oblasti aplikací lineární funkcionální analýzy.

**Polynomy** Prostor polynomů stupně nejvýše $n$ je již vnitřně parametrizován lineárně: $p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$ jako lineární kombinace tzv. *homogenních polynomů* $t^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Přesto tato reprezentace není z numerického hlediska nejvýhodnější, protože generátory $t^k$ sice tvoří bázi, ale sousední generátory $t^k, t^{k+1}$ vykazují pro velké hodnoty $k$ (např. na intervalu $[0, 1]$) takřka shodný průběh, tj. jsou „skoro" lineárně závislé. Z hlediska řešení inverzní úlohy (výpočet koeficientů) se tak jedná o špatně podmíněnou úlohu (na diskrétní síti s $n + 1$ uzly je třeba invertovat tzv. Vandermondovu matici, jejíž determinant se blíží k nule s rostoucím $n$). Byly proto navrženy jiné bázové systémy, které jsou vesměs v jistém smyslu ortogonální a těmito neduhy netrpí. Nejběžnější z nich jsou známy pod označením *Jacobiho, Čebyševovy, Legendrovy, Laguerrovy* a *Hermitovy* polynomy. Detaily lze nalézt v elektronických textech `OrthogPolyn.pdf` a `OrthogPolynSlides.pdf`

**Splajny** Prostor po částech polynomických funkcí stupně nejvýše $n$ s předepsanou hladkostí v pevně předepsaných bodech napojení, tzv. uzlech. Původní vnitřní parametrizace je dána souborem koeficientů jednotlivých polynomů spolu s podmínkami na hladkost [AN67]. Pozdější moderní přístupy [BHS93] spočívají v nalezení báze tzv. *B-splajnů* tohoto prostoru umožňující každý splajn vyjádřit jako lineární kombinaci B-splajnů.

**Fourierova řada** `[Heil:kap.13 s.429-454]` Prostor $T$-periodických funkcí s konečnou variací[1] ($T > 1$) lze dle známé *Dirichletovy věty* rozvinout do Fourierovy řady, kde stavebními bloky jsou kosinové funkce $A_n \cos(2\pi nt/T - \varphi_n)$ kmitající na harmonických frekvencích $n = 1, 2, 3, \ldots$, tj. s periodami $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \ldots$. Podobně jako výše lze pak Fourierovu řadu funkce $f(t)$ zapsat v amplitudově-fázovém, goniometrickém nebo komplexním tvaru:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \cos(2\pi nt/T - \varphi_n) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi nt/T}, \end{aligned}$$

kde poslední komplexní tvar je použitelný i pro rozvoj $T$-periodické komplexní funkce a v případě reálné funkce vykazuje symetrii koeficientů $c_{-n} = \bar{c}_n, c_0 = \frac{a_0}{2}$. Fourierovy řady představují klasické téma, takže ke studiu existuje široký výběr vhodných specializovaných studijních textů, např. [Kuf69] nebo novější [Las96].

**Waveletová řada** `[Heil:kap.12 s.351-428]`
Waveletový systém má tvar $\{a^{n/2}\psi(a^n t - kb)\}_{k,n\in\mathbb{Z}}$ pro pevné $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ (základní vlnka) a parametry $a > 1$ (základní měřítko) a $b > 0$ (krok posunutí). Všechny bázové vlnky jsou tak pro každou dvojici $(k, n)$ získány z mateřské vlnky změnou jejího měřítka $a^n$ a posunutím $kb$. Je zřejmá analogie s Fourierovou řadou, kde $\psi(t) = \cos(t)$ (základní vlna), $\frac{2\pi}{T}$ je základní měřítko a $\varphi_k$ posuv v roli $kb$. Existuje velké množství publikací věnovaných teorii waveletů, např. klasická monografie od Ingrid Daubechies [Dau92], která znamenala zásadní přínos zkonstruováním waveletového systému s mnoha dobrými vlastnostmi (s omezeným nosičem aj.). Zajímavou publikaci představuje [Chu92], kde je dokonce popsána konstrukce splajnových waveletů (každá vlnka je splajn). Aplikačně užitečná může být kniha [Teo98].

**Gaborova řada** `[Heil:kap.11 s.301-350]` Systém má tvar $\{e^{i2\pi ant}g(t - kb)\}_{k,n\in\mathbb{Z}}$ pro pevnou (neoscilatorickou) funkci $g \in L^2(\mathbb{R})$ (základní okno) a parametry $a > 0$ (základní frekvence) a $b > 0$ (krok posunutí). Všechny bázové vlnky jsou tak pro každou dvojici $(k, n)$ získány ze základního okna frekvenční modulací o frekvenci $na$ a posunutím $kb$.

[1] Frekvence kmitů nesmí růst nade všechny meze, např. funkce $\sin \frac{1}{t}$ nemá konečnou variaci na $(0, 1]$.

Frekvence oscilací je zde na rozdíl od waveletového systému řízena přímo modulačním členem a nikoli změnou měřítka oscilatorické základní vlnky. K systematickému studiu lze doporučit například [FS98].

**„Framy“ (z angl. „frame“)** `[Heil:kap.8 s.203-246]` *Frame* je systém dále zobecňující výše uvedené přístupy do abstraktnější podoby. Počátky sahají k práci [DS52], nedávné monografie [Chr03, Chr08] jsou vhodné pro ucelené systematické studium. Jedná se o systém, který rovněž generuje celý prostor, ale může být bohatší než báze (obvykle sjednocení několika známých bází) a přitom rovněž umožňující reprezentovat funkci pomocí rozvoje do nekonečné řady, ale nejednoznačně (nekonečně mnoha způsoby). Tato nejednoznačnost samozřejmě přináší numerickou nestabilitu při hledání rozvojů. Je proto třeba doplnit nějaká další omezení. Obvykle vstupuje požadavek najít pro danou funkci (nebo alespoň pro její dobrou aproximaci) rozvoj s co nejmenším počtem nenulových koeficientů, tzv *řídký rozvoj* (z angl. „sparse“). Zvýšená výpočetní náročnost je bohatě kompenzována větší flexibilitou, neboť řídká reprezentace vlastně představuje výběr optimální konečné subbáze pro danou funkci. V poslední době probíhá intenzivní výzkum jednak v teoretické rovině (jak poznat, že funkce má řídkou reprezentaci v daném systému), tak i v rovině algoritmické (jak takový řídký rozvoj nalézt) — viz například starší článek [CDS98], který podnítil další výzkum v této oblasti. Přehledová práce [BDE09] stručně shrnuje aktuální stav, stejně jako monografie [Ela10] detailně popisující celou škálu existujících algoritmů. Existují i adaptivní techniky umožňující přizpůsobit i výběr samotného framového systému pro danou funkci, který by umožnil co nejřidší reprezentaci. K prvnímu seznámení s problematikou framů a řídkých rozvojů jsou vhodné publikace [ŠRV10, HRVŠ11a, HRVŠ11b, RD14], které jsou dostupné ke stažení v elektronické podobě a kde čtenář nalezne další odkazy.

**Diferenciální a integrální rovnice** viz například `[DeMi:kap.5 s.223-278]`.

**Parciální diferenciální rovnice** viz například `[DeMi:kap.6 s.279-336]`.

**Fyzikální aplikace** například užití v kvantové mechanice `[DeMi:kap.7 s.337-416]`.

Ačkoliv funkcionální analýza je matematicky nesnadná oblast, je vhodná i pro studenty Fakulty elektrotechniky a komunikačních technologií VUT v Brně. Aplikační potenciál vidíme zejména v oblasti zpracování signálů a obrazů, především ve výše zmíněných framových rozvojích a řídkých reprezentacích, které v posledních letech zažívají obrovský rozmach v základním matematickém výzkumu i v širokém spektru jejich jejich zejména inženýrských aplikací. Konkrétně je funkcionální analýza vhodná jako doplňující studijní materiál ke kurzům *Analýza signálů a systémů*, *Číslicové zpracování signálů* a dalším mimo obor *Teleinformatika*. Rovněž text slouží jako základ pro pokračování v doktorském studiu ve výše naznačených směrech.

Látka je rozčleněna do sedmi kapitol s cílem podat ucelený výklad základů lineární funkcionální analýzy, který čtenáři usnadní následné studium podle aplikačního zaměření (viz výše). Text je dále doplněn přílohami, kde jsou některé vybrané partie podrobněji rozvedeny. Do přílohy D byly zařazeny rozsáhlejší nebo technicky komplikované důkazy některých tvrzení, včetně interaktivních vazeb do hlavního textu, kde je jejich přesné znění uvedeno. Při prvním čtení je možno je přeskočit a vrátit se k nim až později. Naopak důkazy začleněné do hlavního textu přispívají k porozumění látce a pochopení širších souvislostí. Ty nejjednodušší jsou přenechány za cvičení čtenáři.

Pro usnadnění studia je text na začátku doplněn seznamem použitých symbolů, zkratek a označení.

Na konci je uveden informativní přehled studijních materiálů v členění na základní, podpůrnou a specializovanou literaturu.

# 2 PROSTORY

Reálnými prvky okolního světa jsou body v trojrozměrném prostoru $E_3$ (tzv. **euklidovský prostor**). V tomto prostoru lze zavést vektorovou geometrii: **vektor** udává orientovaný směr od jednoho bodu k jinému.

Není tedy nijak překvapující snaha tyto objekty formálně kvantifikovaně popsat. Zvolíme-li v prostoru pevně nějaký bod (**počátek**) a tři na sebe kolmé směry (**souřadné osy**), je možno každý bod (resp. vektor $\boldsymbol{x}$ směřující od počátku k tomuto bodu) popsat jednoznačně trojicí jeho souřadnic $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]$ (kolmé průměty $\boldsymbol{x}$ na souřadné osy). Každá rovina (resp. přímka), procházející počátkem pak představuje dvojrozměrný (resp. jednorozměrný) euklidovský podprostor $E_2$ (resp. $E_1$) v $E_3$.

Geometrickému sečítání a násobkům vektorů odpovídají příslušné operace s jeho souřadnicemi (sečítání a násobení skalárem po složkách). Tímto způsobem je v množině $E_3$ zavedena lineární struktura — dostáváme matematickou strukturu nazývanou **lineární (vektorový) prostor**.

Euklidovská geometrie však umožňuje také měřit vzdálenost dvou bodů, což vede k pojmům **metrika** a **metrický prostor**. Odtud je odvozena délka vektoru nazývaná **norma** jako vzdálenost jeho koncových bodů. Spolu s konzistentní lineární strukturou tak dostáváme pojem **normovaného lineárního prostoru**.

Z hlediska geometrie už zbývá jen zavést operaci, která umožní spočíst (orientovaný) úhel mezi dvěma vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Tou je operace nazývaná **skalární (vnitřní) součin**: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$. Na vrchol strukturální pyramidy (viz obr. 2.1) se tak dostává **prostor s vnitřním součinem**, též nazývaný **unitární prostor**. Ten představuje strukturu zachycující vyčerpávajícím způsobem všechny podstatné vlastnosti geometrie euklidovského prostoru. Pomocí euklidovské metriky se dostáváme ke strukturálnímu pojmu **euklidovské topologie** zavádějící např. pojmy **otevřená množina** (sjednocení otevřených koulí), **uzavřená množina** (komplement otevřené množiny), spojitost, konvergence aj. Množina opatřená topologickou strukturou se nazývá **topologický prostor**. Přidáme-li k topologickému, resp. metrickému prostoru konzistentním způsobem i lineární strukturu, dostáváme **topologický lineární**, resp. **metrický lineární prostor**.

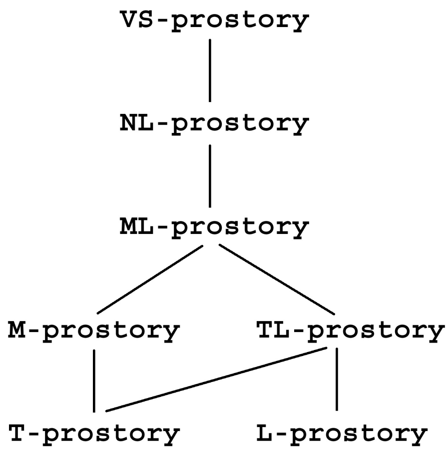
Strukturu prostoru $E_3$ lze dále přirozeným způsobem rozšířit do libovolné konečné dimenze $N \in \mathbb{N}$ na $N$-rozměrný euklidovský prostor $E_N$, jehož prvky jsou uspořádané $N$-tice reálných nebo dokonce komplexních čísel $[x_1, x_2, \ldots, x_N]$. Ukazuje se, že všechny podstatné vlastnosti zůstávají v platnosti.

Kvalitativní změna nastává až přechodem k prostorům nekonečné dimenze: prostor posloupností $\{x_n\}_{n \in J}$, $|J| = \aleph_0$, resp. prostor funkcí $\{f(t)\}_{t \in \mathcal{J}}$ definovaných na vhodném definičním oboru $\mathcal{J}$ (obvykle $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ je interval reálných čísel). V tomto případě je třeba omezit výběr posloupností, resp. funkcí. Obvykle předpokládáme určitý typ absolutní sumovatelnosti, resp. absolutní integrovatelnosti. I tak jsou nekonečně rozměrné prostory natolik bohaté, že některé vlastnosti lze z konečně rozměrného prostoru přenést pouze po přidání dalších omezujících podmínek. Tyto rozdíly budou konkrétně diskutovány v dalším textu.

Výše zmíněné prostory jsou speciálním případem **algebraických struktur** (viz `[ZM1:odst. 2 a 3]`), které představují abstraktní konstrukci umožňující přenášet vybrané strukturní vlastnosti euklidovského prostoru (nejjednodušší je reálná přímka $E_1$) i na množiny sice s jinými prvky ale podobného charakteru. Nepřeneseme-li vlastnosti všechny, ale jen některé, část strukturních rysů reálné přímky ztratíme, některé však zůstanou zachovány (např. výše zmíněné topologické (lineární) nebo metrické (lineární) prostory).

## 2.1 Hierarchie prostorů

Obrázek 2.1 znázorňuje schématicky hierarchii prostorů, které budou vystupovat v dalších úvahách. Vede-li v tomto schématu cesta (po hranách grafu) od nějaké struktury dolů k jiné, pak výše umístěná struktura automaticky vynucuje (pod)strukturu umístěnou níže. Například každý prostor s vnitřním součinem je také normovaným lineárním prostorem, ten metrickým lineárním prostorem, atd.




**Obrázek 2.1**: Schéma hierarchie prostorů

### 2.1.1 Vektorové prostory (lineární prostory, L-prostory)

*Opakování*: `[ZM1:odst.3.1]`

**Definice 2.1** (podrobně viz `[ZM1:definice 3.1]`).
Množina $X$ opatřená níže uvedenou lineární strukturou se nazývá **lineární (vektorový) prostor (L-prostor)** nad polem skalárů $\mathbb{F}$, kde $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

$$X := (X, \mathcal{L}_{\mathbb{F}}) := X(+, \{\alpha_c\}_{c\in\mathbb{C}}), \quad \begin{array}{rcl} (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \text{ (abelovská grupa)}, \\ \alpha_c : x & \longmapsto & cx \text{ (násobení skalárem, distributivní+asociativní)} \end{array}$$

- $0 \neq M \subseteq X$ **(lineárně) nezávislá**
  $\sum_{k\in K} c_k x_k = 0 \Rightarrow c_k = 0 \;\forall\, k \in K, |K| < \infty$
- $0 \neq Y \overset{L}{\subseteq} X$ **(lineární) podprostor (L-podprostor)**
  $y_1, y_2 \in Y \Rightarrow y_1 + y_2 \in Y; y \in Y, c \in \mathbb{C} \Rightarrow cy \in Y$
- **Lineární obal podmnožiny** $M \subseteq X$
  $\mathcal{L}(M) := \bigcap\{Y \mid M \subseteq Y \overset{L}{\subseteq} X\} = \{\sum_{k\in K} c_k x_k \mid c_k \in \mathbb{C}, x_k \in M, |K| < \infty\}$.
  Je-li $X = \mathcal{L}(M)$, říkáme, že $M$ **generuje** $X$
- $0 \neq B \subseteq X$ **báze v** $X$
  = maximální nezávislá podmnožina v $X$
  = minimální podmnožina generující $X$ ($\mathcal{L}(B) = X$)
  = lineárně nezávislá podmnožina generující $X$

**Věta 2.2.** *$m := |B| < \infty$, $B$ báze $\Rightarrow$ všechny báze $X$ mají tutéž mohutnost a* $\dim X := m$ *se nazývá* **(konečnou) dimenzí prostoru** *$X$,*
*$m = \infty \Rightarrow \dim X = \infty$ (***nekonečně-dimenzionální prostor** *$X$).*

**Definice 2.3. (Sdruženě[1]) lineární operátor.** $T : X \to Y$ $(T \in \mathcal{L}(X,Y))$:
$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$, $T(cx) = c\,Tx$ $(T(cx) = \bar{c}\,Tx)$ $\forall\, c \in \mathbb{C}$.
$\mathcal{D}(T) := X \ldots$ **definiční obor** operátoru $T$,
$\mathcal{R}(T) := \{Tx \,|\, x \in X\} \overset{L}{\subseteq} Y \ldots$ **obor hodnot** operátoru $T$ (angl. „range space“),
$\mathcal{N}(T) := T^{-1}\{0\} \overset{L}{\subseteq} X \ldots$ **jádro (nulový prostor)** operátoru $T$ (angl. „null space“).

**Věta 2.4** (Cvičení)**.**
*$T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $Y_1 \overset{L}{\subseteq} Y \Rightarrow T^{-1}(Y_1) \overset{L}{\subseteq} X$ (speciálně i $\mathcal{N}(T)$) je L-podprostor v $X$.*

**Definice 2.5 (Přímý součet $\dot{+}, \dot{\sum}$** dle A.5)**.**
$X = X_1 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$ (nebo $X = \dot{\sum}_{i=1}^{n} X_i$) je **přímý součet L-podprostorů** $X_i \overset{L}{\subseteq} X$, jestliže $X = \mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{n} X_i)$ a $X_i \cap \mathcal{L}(\bigcup_{j \neq i} X_j) = \{0\}$ pro $i = 1, \ldots, n$.

**Věta 2.6** (viz A.7)**.**
*$X = X_1 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n \;\Leftrightarrow\;$ pro každé $x \in X$ $\exists!\, x_i, i = 1, \ldots, n$: $x = x_1 + \cdots + x_n$.*

**Definice 2.7.** $T : X \to Y$ se nazývá **lineární izomorfismus (L-izomorfismus)**, jestliže $T$ je bijektivní lineární operátor. Zřejmě pak $T^{-1} : Y \to X$ je rovněž lineární izomorfismus. Prostory $X, Y$ se nazývají **lineárně izomorfní** ($X \overset{L}{\simeq} Y$), jestliže existuje L-izomorfismus $X \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow Y$.

**Věta 2.8** (Cvičení)**.**
*$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je injektivní (tj. $\mathcal{N}(T) = \{0\}$) $\Rightarrow X \overset{L}{\simeq} \mathcal{R}(T)$.*

<u>Poznámka</u> 2.9. Např. regulární matice $T$ rozměru $n \times n$ představuje lineární izomorfizmus prostorů shodné konečné dimenze $n$. Její jádro je prázdná množina, neboť právě pouze nulový vektor zobrazí na nulový vektor. Pro podrobnější charakterizaci lineárních operátorů v případě prostorů konečné dimenze viz Příklad 4.13.

**Věta 2.10** (viz A.8)**.**
*$X = X_1 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n \overset{L}{\simeq} X_1 \times \cdots \times X_n$ (kartézský součin L-prostorů: sečítání a násobení skalárem po složkách)*

**Věta 2.11.** *$X$ L-prostor,* $\dim X = n \Rightarrow X \overset{L}{\simeq} \mathbb{C}^n$.

*Důkaz.* $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ báze v $X \Rightarrow T(\boldsymbol{\xi}) = \sum_j \xi_j b_j$ je LI z $\mathbb{C}^n \to X$, $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$. □

<u>Poznámka</u> 2.12. V Úvodu jsme viděli, že prostor kosinových funkcí $\{A\cos(2\pi t - \varphi)\}$ má bázi tvořenou funkcemi $\cos 2\pi t, \sin 2\pi t$. Zřejmým lineárním izomorfizmem je v tomto případě vztah mezi tímto dvojrozměrným prostorem a prostorem $\mathbb{R}^2$ souřadnic.

**Důsledek 2.13.**
*Lineární operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$,* $\dim X = n < \infty$, $\dim Y = m < \infty$ *je jednoznačně určen maticí rozměru $m \times n$: $[T] := [\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n] := [\tau_{ij}]$, $\boldsymbol{t}_j = T(b_j) = \sum_{i=1}^{m} \tau_{ij} b'_i$, kde $B = \{b_j\}$ a $B' = \{b'_i\}$ jsou libovolné, ale pevně zvolené báze po řadě v $X$ a $Y$.*

[1] Též nazývaný **antilineární**.

*Důkaz.* $U : \mathbb{C}^n \to X, V : \mathbb{C}^m \to Y$ souřadnicové izomorfismy jako ve větě 2.11 $\Rightarrow [T] = V^{-1}TU : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ je lineární operátor, přičemž $T \longmapsto [T]$ je zřejmě bijekcí $\mathcal{L}(X,Y)$ na $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, kde $x = U\boldsymbol{\xi} = \sum_j \xi_j b_j \Rightarrow y := Tx = TU\boldsymbol{\xi} = \sum_j \xi_j Tb_j = \sum_j \xi_j \boldsymbol{t}_j = \sum_j \xi_j \sum_i \tau_{ij} b'_i = \sum_i (\sum_j \tau_{ij}\xi_j) b'_i \Rightarrow [T]\boldsymbol{\xi} = V^{-1}y = V^{-1}Tx = V^{-1}TU\boldsymbol{\xi}$. □

**Věta 2.14** (**Faktor prostor**: viz A.2 a A.3)**.**
*Každý L-podprostor* $Z \overset{L}{\subseteq} X$ *definuje na* $X$ *kongruenci* $\sim$ $(x_1 \sim x_2 \;\Leftrightarrow\; x_2 - x_1 \in Z)$*, přičemž* $[x] := \{x' \,|\, x' \sim x\}$ *značí třídu kongruence obsahující prvek* $x \in X$*. Pak* $X/Z := \{[x] \,|\, x \in X\}$ *je tzv.* **faktor prostor** $X$ **dle** $Z$*, kde speciálně pro* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *je* $X/T := X/\mathcal{N}(T) = \{T^{-1}(y) \,|\, y \in \mathcal{R}(T)\}$ *a* $X/T \overset{L}{\simeq} \mathcal{R}(T)$*.*

### 2.1.2 Topologické prostory (T-prostory)

*Teorie:* `[Tay:kap.2 s.65-76,86]`, `[KoFo:část II, kap.5 s.105-118]`

**Definice 2.15. Topologickým prostorem (T-prostorem)** nazýváme strukturu $X := (X, \mathcal{T}_X)$, kde $\mathcal{T}_X \subseteq \exp X$ je tzv. **topologie na** $X$ s vlastnostmi:

1° $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$
2° sjednocení libovolného počtu prvků z $\mathcal{T}_X$ je prvkem $\mathcal{T}_X$
3° průnik konečného počtu prvků z $\mathcal{T}_X$ je prvkem $\mathcal{T}_X$

**Otevřená množina** $U \in \mathcal{T}_X$
**Uzavřená množina** $X - U$ (komplement) otevřené množiny $U \in \mathcal{T}_X$
ve 2° a 3° sjednocení a průniky si zamění roli
**Otevřené okolí množiny** $M \subseteq X$ $\;\mathcal{O}(M) \in \mathcal{T}_X : M \subseteq \mathcal{O}(M)$
**Otevřené okolí bodu** $x \in X$ $\;\mathcal{O}(x) := \mathcal{O}(\{x\})$
**Ryzí otevřené okolí bodu** $x \in X$ $\;\mathcal{O}^*(x) := \mathcal{O}(x) - \{x\}$
**Uzávěr množiny** $M \subseteq X$ nejmenší uzavřená podmnožina obsahující $M$ neboli
$\overline{M} := \bigcap\{V \,|\, V$ je uzavřená $: M \subseteq V\}$
**Vnitřek množiny** $M \subseteq X$ největší otevřená množina obsažená v $M$ neboli
$\mathrm{Int}(M) := \bigcup\{U \,|\, U$ je otevřená $: U \subseteq M\}$
**Hranice množiny** $M \subseteq X$ $\;\gamma(M) := \overline{M} - \mathrm{Int}(M)$
**Všude (nikde) hustá podmnožina** $M \subseteq X$ $\;\overline{M} = X$ $(\mathrm{Int}(\overline{M}) = \emptyset)$

**Věta 2.16** (Důkaz D.1)**.**
*(1)* $U$ *je otevřená* $\Leftrightarrow$ $\forall x \in U$ *existuje* $\mathcal{O}(x) \subseteq U$
*(2)* $\mathrm{Int}(X - M) = X - \overline{M}$
*(3)* $\overline{X - M} = X - \mathrm{Int}(M)$
*(4)* $x \in \overline{M} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \mathcal{O}(x)$ *je* $\mathcal{O}(x) \cap M \neq \emptyset$
*(5)* $\gamma(M) = \overline{M} \cap \overline{X - M}$
*(6)* $x \in \gamma(M) \;\Leftrightarrow\; \forall\, \mathcal{O}(x)$*:* $\mathcal{O}(x) \cap M \neq \emptyset$ *a* $\mathcal{O}(x) \cap (X - M) \neq \emptyset$

**Věta 2.17** (Cvičení)**.**
$U \subseteq X$ *je otevřená, resp. uzavřená* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Int}(U) = U$*, resp.* $\overline{U} = U$*.*

**Definice 2.18.** T-prostor $X$ se nazývá **separabilní**, jestliže existuje nejvýše spočetná množina $M \subseteq X$ $(|M| \leq \aleph_0)$: $\overline{M} = X$.

**Definice 2.19** (**Topologie generovaná systémem podmnožin** $\mathcal{S} \subseteq \exp X$**, báze**)**.**
$\mathcal{T}(\mathcal{S}) := \bigcap\{\mathcal{T} \,|\, \mathcal{T} \subseteq \exp X$ je topologie na $X$ (splňuje 1°–3°) $: \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}\}$ neboli nejmenší topologie na $X$ obsahující prvky $\mathcal{S}$ jako otevřené množiny (užili jsme zřejmý fakt, že průnik topologií je topologie).
Systém $\mathcal{S}$ se nazývá **bází topologie** $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ **na** $X$, jestliže má následující vlastnosti:

(i) $x \in X \Rightarrow$ existuje $B \in \mathcal{S} : x \in B$
(ii) $x \in B_1 \cap B_2$ $(B_1, B_2 \in \mathcal{S}) \Rightarrow$ existuje $B \in \mathcal{S} : x \in B, B \subseteq B_1 \cap B_2$.

**Věta 2.20** (Cvičení D.2). *Nechť $\mathcal{S} \subseteq \exp X$, pak*
$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \{\bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} U_{ik} \,|\, U_{ik} \in \mathcal{S},$ *pro každé* $Ia|K_i| < \aleph_0\}$ *neboli každá otevřená množina z* $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ *je buď $X$ nebo nějaké sjednocení konečných průniků množin z $\mathcal{S}$.*
*Je-li $\mathcal{S}$ báze, pak* $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \{\bigcup_{i \in I} U_i \,|\, U_i \in \mathcal{S}$ *pro každé* $I\}$ *neboli každá otevřená množina z $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ je nějakým sjednocením množin z $\mathcal{S}$.*

**Definice 2.21** (**Součinová topologie**).
Na kartézském součinu T-prostorů $X = \prod_{i \in I} X_i$ definujeme součinovou topologii jako topologii generovanou dle vztahu:
$\mathcal{T}_X := \mathcal{T}\{\prod_{i \in I} U_i \,|\, U_i \in \mathcal{T}_{X_i}, U_i = X_i$ pro skoro všechna $i$ (tj. až na konečně mnoho)$\}$.

**Definice 2.22** (**Topologický podprostor** $Y \subseteq X$).
Na $Y$ definujeme tzv. **indukovanou topologii**: $\mathcal{T}_Y := \{Y \cap U \,|\, U \in \mathcal{T}_X\}$.

**Příklad 2.23** (**Euklidovská topologie** na $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$).
Zřejmě množina všech otevřených intervalů $\mathcal{I}$ na $\mathbb{R}$ je báze topologie. Otevřenými množinami v topologii generované touto bází jsou dle 2.20 právě všechna možná sjednocení otevřených intervalů. Podobně bázi příslušné součinové topologie na $\mathbb{R}^n$ tvoří otevřené „kvádry“, neboli všechny kartézské součiny $\mathcal{I}_1 \times \cdots \times \mathcal{I}_n$ otevřených intervalů. Takto získaná topologie na $\mathbb{R}$, resp. na $\mathbb{R}^n$ se nazývá **euklidovská**, stejně jako topologie indukovaná na podmnožiny v $\mathbb{R}^n$ (např. na $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ nebo na $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$).

**Definice 2.24** (**Hausdorffův T-prostor**).
T-prostor $X$ se nazývá **Hausdorffův**, jestliže v něm platí následující axiom oddělitelnosti:
$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists\, \mathcal{O}(x_1), \mathcal{O}(x_2) : \mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) = \emptyset$.

**Definice 2.25.** Zobrazení $T : X \to Y$ (T-prostory) se nazývá **spojité v bodě** $x_0 \in X$, jestliže: $\forall\, \mathcal{O}(T(x_0))\, \exists\, \mathcal{O}(x_0) : T(\mathcal{O}(x_0)) \subseteq \mathcal{O}(T(x_0))$. Zobrazení $T$ se nazývá **spojité**, je-li spojité v každém bodě $x \in X$.

**Věta 2.26.** *Nechť $T : X \to Y$ (T-prostory). Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
*(1) $T$ je spojité*
*(2) $M$ je otevřená v $Y \Rightarrow T^{-1}(M)$ je otevřená v $X$*
*(3) $M$ je uzavřená v $Y \Rightarrow T^{-1}(M)$ je uzavřená v $X$*

*Důkaz.*
(1)⇒(2): Nechť $T$ je spojité (tj. v každém bodě).
a) je-li $T^{-1}(M) = \emptyset \Rightarrow T^{-1}(M)$ je otevřená dle 1°,
b) nechť $T^{-1}(M) \neq \emptyset$ a $x \in T^{-1}(M) \Rightarrow Tx \in M \Rightarrow M = \mathcal{O}(Tx) \Rightarrow \exists\, \mathcal{O}(x) : T(\mathcal{O}(x)) \subseteq M$ $\Rightarrow \mathcal{O}(x) \subseteq T^{-1}(M) \Rightarrow T^{-1}(M)$ je otevřená dle 2.16(1).
(2)⇒(1): Nechť $\mathcal{O}(Tx_0)$ je libovolné okolí, položme $M = \mathcal{O}(Tx_0)$, pak dle (2) je $T^{-1}(\mathcal{O}(Tx_0))$ otevřená obsahující $x_0$, tj. stačí položit $\mathcal{O}(x_0) = T^{-1}(\mathcal{O}(Tx_0))$. Zřejmě $T(\mathcal{O}(x_0)) = \mathcal{O}(Tx_0) = M$.
(3) ⇔ (2): plyne z $T^{-1}(Y - M) = X - T^{-1}(M)$ užitím (2), neboť množina je uzavřená právě když její komplement je otevřená množina. □

**Definice 2.27.** Zobrazení $T : X \to Y$ (T-prostory) se nazývá **otevřené (uzavřené)**, jestliže $T(M)$ je otevřená (uzavřená) množina v $Y$ pro každou otevřenou (uzavřenou) podmnožinu $M \subseteq X$.

**Definice 2.28.** $T$ se nazývá **homeomorfismus (topologický izomorfismus)**, jestliže je bijekcí a $T$ i $T^{-1}$ jsou spojitá zobrazení. T-prostory $X$ a $Y$ se nazývají **homeomorfní** (**topologicky izomorfní**), jestliže existuje homeomorfismus $X$ na $Y$.

**Věta 2.29** (Cvičení)**.**
*Zobrazení $T : X \to Y$ (T-prostory) je homeomorfismus $X$ na $Y$ právě když $T$ je bijektivni spojité a otevřené (resp. uzavřené) zobrazení.*

**Definice 2.30 (Limita, konvergence v topologii).**
Řekneme, že zobrazení $T : X \to Y$ (T-prostory) **má v bodě** $x_0 \in X$ **limitu** $y_0$ **pro** $x \xrightarrow{\mathcal{T}_X} x_0$, jestliže: $\forall\, \mathcal{O}(y_0)\, \exists\, \mathcal{O}^*(x_0) \,:\, T(\mathcal{O}^*(x_0)) \subseteq \mathcal{O}(y_0)$; neboli $Tx \xrightarrow{\mathcal{T}_Y} y_0$ pro $x \xrightarrow{\mathcal{T}_X} x_0$. Analogicky řekneme, že pro posloupnost $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}, y_n \in Y$, **konverguje k** $y_0 \in Y$ a píšeme $y_n \xrightarrow{\mathcal{T}_Y} y_0$ pro $n \to \infty$, jestliže $\forall\, \mathcal{O}(y_0)\, \exists\, N \in \mathbb{N} : y_n \in \mathcal{O}(y_0)$ pro $n > N$ [2].

## 2.1.3 Metrické prostory (M-prostory)

*Opakování*: `[FA1:kap.1]`
*Teorie*: `[Tay:kap.2 s.76-86]`, `[KoFo:část II,kap.1-3 s.66-94]`
Další podrobnosti v příloze B.

**Definice 2.31. Metrickým prostorem (M-prostorem)** nazýváme strukturu $X := (X, d_X)$, kde $d := d_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$ je tzv. **metrika na** $X$ s vlastnostmi:
$1^\circ$ $d(x, y) = d(y, x)$
$2^\circ$ $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$
$3^\circ$ $d(x, y) \ge 0, d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$
**Otevřená koule** $K(x_0, r) := \{x \in X \,|\, d(x, x_0) < r\}$ o poloměru $r > 0$ se středem $x_0$, $\mathcal{K} := \{K(x_0, r) \,|\, x_0 \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$.
**Topologie na** $X$ $\mathcal{K}$ je báze (cvičení) generující topologii na $X$: $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(\mathcal{K})$.
**Konvergence dle metriky** $d$ $x_n \xrightarrow{d} x := d(x_n, x) \to 0$ pro $n \to \infty$, kde ekvivalence s topologickou definicí konvergence 2.30 je zřejmá, tj. stačí psát $x_n \to x$.
**Cauchyovská posloupnost** $\{x_n\} \subseteq X : d(x_n, x_m) \to 0$ pro $m, n \to \infty$.
**Uzavřená koule** $\{x \in X \,|\, d(x, x_0) \le r\}$ je uzávěrem otevřené koule, tj. $\overline{K(x_0, r)}$.
**Metrický podprostor (M-podprostor)** je libovolná neprázdná podmnožina $M \subseteq X$ s restrikcí metriky $d_M := d_X|_{M\times M}$; zřejmě současně je $M$ také T-podprostorem v $X$.

**Věta 2.32.** *Každý M-prostor je Hausdorffův T-prostor.*

*Důkaz.* Dle 2.20 jsou otevřenými množinami právě všechna sjednocení otevřených koulí a $\mathcal{T}_X$ je tedy nejmenší topologie na $X$, v níž každá koule je otevřená. Zbývá ukázat platnost axiomu oddělitelnosti 2.24:
$x \ne y \overset{3^\circ}{\Rightarrow} \rho := d(x, y) > 0$ a $z \in K(x, \frac{\rho}{2}) \cap K(y, \frac{\rho}{2}) \Rightarrow \rho = d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y) < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$, spor. $\square$

**Věta 2.33.** *$M \subseteq X$ (M-prostor) je uzavřená právě když $[x_n \to x, x_n \in M \Rightarrow x \in M]$; neboli $\overline{M}$ dostaneme z $M$ přidáním limit všech konvergentních posloupností $\{x_n\} \subseteq M$, které pak ovšem padnou do $\gamma(M)$, pokud neležely v* $\mathrm{Int}(M)$.

[2] Interval $(N, \infty) \cap \mathbb{N}$ hraje roli ryzího okolí nekonečna v indukované euklidovské topologii na $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^*$ (srov. 2.23).

*Důkaz.*
$\Rightarrow$ sporem: nechť $M$ je uzavřená a předpokládejme, že existuje $\{x_n\} \subseteq M, x_n \to x \notin M$. Pak $x \in X - M$ (otevřená) $\overset{2.16(1)}{\Rightarrow} \exists\, K(x,\varepsilon) \subseteq X - M \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ : pro $n \geq N$ je $d(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow$ $x_n \notin M$ pro $n \geq N$, spor. Tedy $x \in M$.
$\Leftarrow$ sporem: kdyby $M$ nebyla uzavřená, pak $X - M$ by nebyla otevřená, tj. $\exists\, x \in X - M$ : $M \cap K(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset \forall n \in N$, tedy $\exists\, x_n \neq x : x_n \in M, 0 < d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Pak $x_n \to x \notin M$, spor. $\square$

**Věta 2.34.** *Každý M-podprostor separabilního M-prostoru je separabilní.*

*Důkaz.* Nechť $M = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ je nějaká nejvýše spočetná hustá podmnožina separabilního M-prostoru $X$ ($\overline{M} = X$) a $Y \subset X$ jeho M-podprostor. Pak systém koulí $K(x_m, \frac{1}{n})$, $m, n \in \mathbb{N}$, je nejvýše spočetný. Pokud $Y \cap K(x_m, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ zvolme libovolně, ale pevně prvek $y_{m,n} \in Y \cap K(x_m, \frac{1}{n})$. Množina $\{y_{m,n}\} \subset Y$ takto vybraných prvků je zřejmě rovněž nejvýše spočetná. Ukážeme, že je také hustá v $Y$.
Pro libovolné $y \in Y$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_m \in M$ takové, že $y \in K(x_m, \frac{1}{2n})$, neboli $y \in Y \cap K(x_m, \frac{1}{2n})$. Rovněž příslušné $y_{m,2n} \in K(x_m, \frac{1}{2n})$ a podle axiomu 2° dostáváme $d(y, y_{m,2n}) \leq d(y, x_m) + d(x_m, y_{m,2n}) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$. $\square$

**Definice 2.35.** $M \subseteq X$ se nazývá **ohraničená**, jestliže $\exists K \in \mathcal{K} : M \subseteq K$ (vzhledem ke 2° se stačí omezit na $K := K(x_0, r), x_0$ pevné).

**Věta 2.36** (Cvičení).
*$x_n \to x$ v $X$ (M-prostor) $\Rightarrow \{x_n\}$ je cauchyovská.*

**Definice 2.37.** M-prostor $X$ se nazývá **úplný**, jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost je konvergentní.

**Věta 2.38.** *Nechť $Y$ je M-podprostor M-prostoru $X$. Pak platí:*
*(1) $Y$ úplný $\Rightarrow Y$ uzavřený v $X$.*
*(2) $X$ úplný, $Y$ uzavřený $\Rightarrow Y$ úplný.*

*Důkaz.*
(1) $Y \subseteq X$ (M-podprostor). Nechť $Y$ je úplný. Podle 2.33 stačí ukázat, že pro každou posloupnost $Y \ni x_n \to x$ v $X$ je $x \in Y$. Nechť tedy $x_n \to x$, pak dle 2.36 je $\{x_n\}$ cauchyovská v $X$ a tedy i v $Y$, neboť $x_n \in Y$. Pak $x \in Y$, jelikož $Y$ je úplný.
(2) Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská v $Y \Rightarrow \{x_n\}$ je cauchyovská v $X \Rightarrow x_n \to x$ v $X$, neboť $X$ je úplný $\Rightarrow x \in Y$, neboť $Y$ je uzavřený. $\square$

**Věta 2.39** (Heineho definice spojitosti: viz `[DoKu:D.16 s.173]`).
*$T : X \to Y$ (M-prostory) je spojité v $x_0$ právě když $[x_n \to x_0$ v $X \Rightarrow T(x_n) \to T(x_0)$ v $Y]$.*

**Příklad 2.40 (Euklidovská metrika).**
$\mathbb{R}^n$ je úplný M-prostor s tzv. **euklidovskou** metrikou $d(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2}$. Otevřené koule v této metrice představují jinou bázi euklidovské topologie zavedené v 2.23.
Totéž platí i pro $\mathbb{C}^n \overset{L}{\simeq} \mathbb{R}^{2n}$, jelikož $\mathbb{C} \overset{L}{\simeq} \mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou
$|c_1 - c_2| = \sqrt{|Re\, c_1 - Re\, c_2|^2 + |Im\, c_1 - Im\, c_2|^2}$.
Další podrobnosti lze nalézt v příloze B.1.

**Definice 2.41.**
$T : X \to Y$ (M-prostor), $T$ se nazývá **ohraničený**, jestliže $[M \subseteq X$ ohraničená v $X \Rightarrow T(M)$ ohraničená v $Y]$. Vzhledem k 2.35 se stačí omezit na koule $M = K(x_0, r) \in \mathcal{K}$ pro pevně zvolené $x_0$.

**Definice 2.42.** $T : X \to Y$ se nazývá **izometrie**, jestliže $d_X(x_1, x_2) = d_Y(Tx_1, Tx_2)$ pro $\forall\, x_1, x_2 \in X$ (zřejmě $T$ je prosté a spojité, stejně jako $T^{-1}$, takže $T$ je homeomorfismus). $X$ a $Y$ se nazývají **izometrické**, jestliže existuje izometrie $X$ na $Y$.

### 2.1.4 Topologické lineární prostory (TL-prostory)

*Teorie*: `[Tay:odst.3.0,3.3 s.88,126-134]`, `[KoFo:část III,kap.5 s.191-193]`

**Definice 2.43. Topologickým lineárním prostorem (TL-prostorem)** nad $\mathbb{C}$ rozumíme L-prostor $X$ nad $\mathbb{C}$ s topologií $\mathcal{T}_X$ takovou, že
(1) sčítání je spojité zobrazení $X \times X \to X$ vzhledem k součinové topologii na $X \times X$,
(2) násobení skalárem je spojité zobrazení $\mathbb{C} \times X \to X$ vzhledem k součinové topologii na $\mathbb{C} \times X$.

### 2.1.5 Metrické lineární prostory (ML-prostory)

*Teorie*: `[Tay:odst.3.9 s.154-157]`

**Definice 2.44** (viz též přílohu B.9(5))**.**
**Metrickým lineárním prostorem (ML-prostorem)** nad $\mathbb{C}$ rozumíme TL-prostor $X$ nad $\mathbb{C}$ s topologií odvozenou z tzv. **invariantní metriky**[3] $d$, tj. metriky $d$ s vlastností: $d(x_1 + x, x_2 + x) = d(x_1, x_2)$ pro $\forall\, x_1, x_2, x \in X$.

**Lemma 2.45** (Cvičení)**.**
*Metrika $d$ je invariantní* $\Leftrightarrow$ $d(x_1 - x_2, 0) = d(x_1, x_2), \forall\, x_1, x_2 \in X$.

**Definice 2.46.** Úplný ML-prostor se nazývá **Frechetův prostor**.

### 2.1.6 Normované lineární prostory (NL-prostory)

*Opakování*: `[ZM1:odst. 3.6]`, `[FA1:odst.2.2]`
*Teorie*: `[DeMi:kap.1 s.1-36]`,
`[Tay:odst.3.1 s.89-110]`, `[KoFo:část III,kap.3 s.164-167]`

**Definice 2.47. Normovaným lineárním prostorem (NL-prostorem)** nad $\mathbb{C}$ nazýváme strukturu $X := (X, \|\cdot\|_X)$, kde $X$ je L-prostor nad $\mathbb{C}$ a $\|\cdot\| := \|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}^+$ je tzv. **norma na** $X$ s vlastnostmi ($\forall\, c \in \mathbb{C}$ a $x, y \in X$):
1° $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$
2° $\|cx\| = |c|\|x\|$
3° $\|x\| \ge 0$ a $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$
**Metrika a topologie na** $X$ NL-prostor $X$ je dle věty 2.49 ML-prostorem (a tedy současně i TL-prostorem) s invariantní metrikou $d(x, y) := \|x - y\|$.
**Jednotková otevřená koule v** $X$ $K := K(0,1) = \{x \mid \|x\| < 1\}$.
**Jednotková uzavřená koule v** $X$ $\overline{K} = \{x \mid \|x\| \le 1\}$.
**Jednotková kulová plocha v** $X$ $\gamma(K) := \{x \mid \|x\| = 1\}$.
**Konvergence v** $X$ $x_n \to x \;\Leftrightarrow\; d(x, x_n) \to 0 \;\Leftrightarrow\; \|x - x_n\| \to 0$.
**Sumace řad v** $X$ $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \;\Leftrightarrow\; s_N := \sum_{n=1}^{N} x_n \to x$ pro $N \to \infty \;\Leftrightarrow\; \|x - \sum_{n=1}^{N} x_n\| \to 0$ pro $N \to \infty$.

[3]Neboli metriky nezávislé na posunutí.

**Cauchyovská posloupnost** $\{x_n\} \subset X \ \ \|x_n - x_m\| \to 0$ pro $n, m \to \infty$.

**Věta 2.48.** *Nechť $X$ je NL-prostor, pak*
$4^\circ$ $|\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\,| \leq \|\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *pro každé* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$.

*Důkaz.* Pro libovolné $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dostáváme:
$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y} \overset{1^\circ}{\Rightarrow} \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\| \Rightarrow \underline{\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|}$.
Analogicky záměnou role $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$:
$\underline{-(\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|)} = \|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \|(-1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| \overset{2^\circ}{=} \underline{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|}$.
Protože absolutní hodnota rozdílu se od něj liší pouze znaménkem, dostáváme z obou podtržených nerovností:
$|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Dosazením $-\boldsymbol{y}$ místo $\boldsymbol{y}$, pak $\|\pm\boldsymbol{y}\| \overset{2^\circ}{=} \|\boldsymbol{y}\|$ a platí tedy i obdobná nerovnost pro normu součtu:
$|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| = |\|\boldsymbol{x}\| - \|-\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x} - (-\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|$. Dokázali jsme tak levou z obou nerovností.
Pravá nerovnost je vlastně přímo trojúhelníková nerovnost $1^\circ$:
$\|\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\pm\boldsymbol{y}\| \overset{2^\circ}{=} \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$. □

**Věta 2.49.** *Každý NL-prostor je ML-prostorem, přičemž* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *je spojité zobrazení v topologii na* $X$.

*Důkaz.* Invariantnost metriky je zřejmá.
(1) <u>spojitost operací sečítání a násobení skalárem:</u>
Nechť $x_n \to x, y_m \to y$, pak $\|x + y - (x_n + y_m)\| = \|(x - x_n) + (y - y_m)\| \leq \|x - x_n\| + \|y - y_m\| \to 0$.
Nechť $x_n \to x$, pak $\|cx - cx_n\| = \|c(x - x_n)\| = |c|\|x - x_n\| \to 0$.
(2) <u>Spojitost normy</u>:
Nechť $x_n \to x$, pak $|\|x\| - \|x_n\|| \overset{4^\circ}{\leq} \|x - x_n\| \to 0 \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$. □

**Definice 2.50.**
Úplný NL-prostor se nazývá **Banachův prostor (B-prostor)**. Značíme: $B, B_1, B_2$.

**Definice 2.51 (Topologický lineární izomorfismus).**
**Topologickým lineárním izomorfismem (TLI)** nazýváme zobrazení $T : X \to Y$ (NL-prostory), které je homeomorfním lineárním izomorfismem, tj. $T$ je bijekce, kde $T$ i $T^{-1}$ jsou spojitá lineární zobrazení. V takovém případě se NL-prostory $X$ a $Y$ nazývají **topologicky lineárně izomorfní** a píšeme $X \overset{TLI}{\simeq} Y$.

**Příklad 2.52** (viz příklady 2.23 a 2.40)**.**
$\mathbb{C}^n$ je Banachův prostor s **Euklidovskou normou**: $\|\boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2}$, $\dim \mathbb{C}^n = n$.
$T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ je TLI $\Leftrightarrow$ $n = m$ a $T$ je reprezentován regulární maticí (viz 2.13).

**Věta 2.53** (`[Tay:3.12-A s.100]`)**.**
*$X, Y$ NL-prostory,* $\dim X = \dim Y = n < \infty \Rightarrow X \overset{TLI}{\simeq} Y$.

**Důsledek 2.54.** *Každý konečně dimenzionální NL-prostor je úplný (B-prostor).*

*Důkaz.* $\dim X = n \Rightarrow X \overset{TLI}{\simeq} \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n$ úplný $\Rightarrow X$ úplný. □

**Důsledek 2.55.** *$X$ NL-prostor, $Y \subseteq X$ NL-podprostor,* $\dim Y < \infty \Rightarrow Y$ *je úplný (B-podprostor) a zejména také uzavřený dle 2.38(1).*

**Definice 2.56.** (**Přímý součet uzavřených NL-podprostorů**)
Nechť $X_i \subseteq X, i \in I$ jsou uzavřené podprostory NL-prostoru $X$, pak říkáme, že $X$ je **přímý součet NL-podprostorů** $X_i$ a píšeme $X = \dot{\sum}_{i\in I} X_i$, jestliže $X = \overline{\mathcal{L}(\bigcup_{i\in I} X_i)}$ a $X_i \cap \overline{\mathcal{L}(\bigcup_{\substack{j\neq i\\ j\in I}} X_j)} = \{0\}$ (srov. 2.5).

**Definice 2.57** (**Úplná podmnožina uzavřeného NL-podprostoru).**
Podmnožina $M \subseteq Y$ uzavřeného NL-podprostoru $Y \subseteq X$ (NL-prostor) se nazývá **úplná**[4] v $Y$, jestliže $Y = \overline{\mathcal{L}(M)}$, neboli každý prvek z $Y$ je dle 2.33 limitou nějaké posloupnosti konečných lineárních kombinací prvků z $M$.

### 2.1.7 Prostory s vnitřním součinem (VS-prostory)

*Opakování*: `[ZM1:odst. 3.6]`, `[FA1:odst.2.3]`
*Teorie*: `[DeMi:kap.3 s.87-138]`,
`[Tay:odst.3.2 s.110-126]`, `[KoFo:část III,kap.4 s.167-191]`

**Definice 2.58. Prostorem s vnitřním součinem (VS-prostorem**[5]**)** nad $\mathbb{C}$ nazýváme strukturu $X := (X, \langle\cdot,\circ\rangle_X)$, kde $X$ je L-prostor nad $\mathbb{C}$ a $\langle\cdot,\circ\rangle := \langle\cdot,\circ\rangle_X : X\times X \to \mathbb{C}$ je tzv. **vnitřní (skalární) součin na** $X$ s vlastnostmi ($\forall\, c\in\mathbb{C}$ a $x,y,z\in X$):

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\ \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle \\ 2^\circ\ \langle cx,y\rangle = c\langle x,y\rangle \\ 3^\circ\ \langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} \end{array}\right\} \overset{\text{cvičení}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} 1^*\ \langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle \\ 2^*\ \langle x,cy\rangle = \bar{c}\langle x,y\rangle \\ 3^*\ \langle x,x\rangle \in \mathbb{R} \end{array}$$
$$4^\circ\ \langle x,x\rangle \geq 0 \text{ a } \langle x,x\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$$

**Norma, metrika a topologie na** $X$ VS-prostor $X$ je dle `[ZM1:D.35 důsl.3.62]` NL-prostorem (a tedy současně i ML-prostorem a TL-prostorem) s normou $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

**Příklad 2.59.** $\mathbb{C}^n$ je VS-prostor s vnitřním součinem $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle := \sum_{i=1}^n \xi_i\overline{\eta_i}$ a euklidovskou normou $\|\boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i\overline{\xi_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2}$.

**Věta 2.60.** *Další vlastnosti, které jsou důsledkem axiomů 1°–4°:*
5° **Cauchy-Schwarzova nerovnost***:* $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|, \forall\, x,y\in X$, *přičemž rovnost nastane právě když $x,y$ jsou lineárně závislé.*
$cos\varphi := \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|}$, *kde $\varphi$ je úhel, který svírají $x,y$ (ve 2D-prostoru jimi generovaném — viz* `[ZM1:příklad 3.64]`*).*
*Zřejmě $x,y$ jsou* **ortogonální** *($x\perp y$), jestliže $\langle x,y\rangle = 0$.*
*Podmnožiny $R,S\subseteq X$ se nazývají* **ortogonální** *($R\perp S$), jestliže $x\perp y, \forall x\in R, \forall y\in S$.*
6° **Pythagorova věta***:* $x\perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

*Důkaz.*
5° viz `[ZM1:D.34 věty 3.61]`.
6° $\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$. □

**Věta 2.61.** *V každém VS-prostoru $X$ je vnitřní součin $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{C}$ spojitým zobrazením v součinové topologii na $X\times X$.*

*Důkaz.* $x_n\to x,\ y_m\to y \Rightarrow |\langle x,y\rangle - \langle x_n,y_m\rangle| = |\langle x-x_n,y\rangle + \langle x_n,y-y_m\rangle| \leq |\langle x-x_n,y\rangle| + |\langle x_n,y-y_m\rangle| \leq \|x-x_n\|.\|y\| + \|x_n\|.\|y-y_m\| \to 0$. □

[4] Říkáme také, že $M$ generuje $Y$.
[5] Též nazývaný **unitárním prostorem**.

**Věta 2.62** (**Rovnoběžníkový zákon** [FA1:odst.2.7]).
*V NL-prostoru $X$ lze zavést **vnitřní součin** $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tak, že $\langle x,x\rangle = \|x\|^2, \forall x \in X$ právě když v $X$ platí tzv. **rovnoběžníkový zákon** (součet kvadrátů délek úhlopříček rovnoběžníku = součet kvadrátů délek jeho stran):*
*7° $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\ \forall x, y \in X$.*

**Definice 2.63.**
Úplný VS-prostor se nazývá **Hilbertův prostor (H-prostor)**. Značíme $H, H_1, H_2$.

**Definice 2.64.** Nechť VS-prostor $X = \dot{\sum}_{i\in I} X_i$ (přímý součet dle 2.56). Jestliže $X_i \perp X_j$ pro $i \neq j$, říkáme, že $X$ je **ortogonálním součtem** $X_i$. Zapisujeme jako:
$X = \bigoplus_{i\in I} X_i$ nebo $X = \ldots\ X_{i-1} \oplus X_i \oplus \ldots)$.

**Věta 2.65.** *$\emptyset \neq M \subseteq X$ podmnožina $\Rightarrow M^\perp := \{x \in X \,|\, x \perp y\ \forall y \in M\}$ (ortogonální komplement) je uzavřený L-podprostor v $X$ a platí: $\overline{\mathcal{L}(M)}^\perp = M^\perp$.*
*Zejména $X$ H-prostor $\Rightarrow M^\perp$ je H-podprostor.*

*Důkaz.*
a) $M^\perp$ je L-podprostor vzhledem k linearitě $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dle 1° a 2°:
$x, y \in M^\perp, z \in M,\ c \in \mathbb{C} \Rightarrow \langle x,z\rangle = 0, \langle y,z\rangle = 0 \Rightarrow \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle = 0+0 = 0$ a $\langle cx,z\rangle = c\langle x,z\rangle = 0 \Rightarrow x+y \in M^\perp$ a $cx \in M^\perp$.
b) $M^\perp$ je uzavřený vzhledem ke spojitosti $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dle 2.61:
$\{x_n\} \subseteq M^\perp; x_n \to x,\ y \in M \Rightarrow \langle x_n,y\rangle = 0\ \forall n \Rightarrow 0 = \langle x_n,y\rangle \to \langle x,y\rangle \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow x \in M^\perp$.
c) $M \subseteq \overline{\mathcal{L}(M)} \Rightarrow \overline{\mathcal{L}(M)}^\perp \subseteq M^\perp$. Zbývá ukázat i opačnou inkluzi:
$y \in M^\perp \Rightarrow y \perp M \overset{1^*,2^*}{\Rightarrow} y \perp \mathcal{L}(M) \overset{2.61}{\Rightarrow} y \perp \overline{\mathcal{L}(M)} \Rightarrow y \in \overline{\mathcal{L}(M)}^\perp$. □

**Definice 2.66.** Množina $E \subseteq X$ (VS-prostor) se nazývá **ortogonálním, resp. ortonormálním systémem (OGS, resp. ONS)**, jestliže $x \perp y\ \forall x, y \in E, x \neq y$, resp. navíc $\|x\| = 1$ pro $\forall x \in E$. ONS $E$ se nazývá **ortonormální báze**[6] **(ONB)** v $X$, jestliže $X = \overline{\mathcal{L}(E)}$. Nulový vektor je kolmý na každý prvek z $X$, tedy i sám na sebe. Může být prvkem OGS, ale nikoliv ONS.

**Věta 2.67.** *$E \subseteq X$ ONS $\Rightarrow E$ je lineárně nezávislá.*

*Důkaz.* $\sum_{k\in K} c_k e_k = 0,\ |K| < \infty,\ e_k \in E$ navzájem různé $\Rightarrow \langle \sum_{k\in K} c_k e_k, e\rangle = 0$ pro každé $e \in E \Rightarrow \sum_{k\in K} c_k \langle e_k, e\rangle = 0$ pro každé $e \in E \Rightarrow c_j = 0$ pro $e = e_j$ a $j \in K$ libovolné, neboť $\langle e_k, e_j\rangle = \delta_{j,k}$. □

**Věta 2.68** ([FA1:Tvrzení 2.9]).
*Je-li VS-prostor $X$ separabilní, pak každý jeho ONS $E \subseteq X$ je nejvýše spočetný.*

*Důkaz.* $u, v \in E, u \neq v\ \Rightarrow u \perp v, \|u\| = \|v\| = 1 \Rightarrow \|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2$.
$X$ separabilní $\Rightarrow \exists S \subseteq X, |S| \leq \aleph_0 : \overline{S} = X \overset{2.16(4)}{\Rightarrow} K(u, \frac{\sqrt{2}}{3}) \cap S\ \neq \emptyset, K(v, \frac{\sqrt{2}}{3}) \cap S\ \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, s_u, s_v \in S : \|u-s_u\| < \frac{\sqrt{2}}{3}, \|v-s_v\| < \frac{\sqrt{2}}{3}$. Potom $\sqrt{2} = \|u-v\| = \|(u-s_u)+(s_u-s_v)+(s_v-v)\| \leq \|u-s_u\| + \|s_u-s_v\| + \|s_v-v\| < \|s_u-s_v\| + 2\frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} < \|s_u - s_v\| \Rightarrow s_u \neq s_v \Rightarrow u \mapsto s_u$ definuje prosté zobrazení $E \to S \Rightarrow |E| \leq |S| \leq \aleph_0$. □

[6] Dle definice 2.57 je ONB úplný systém, který je navíc ortonormální — o bázích v NL-a VS-prostorech obecně detailně pojednává odst. 6.

**Věta 2.69.** *VS-prostor $X$ je separabilní právě když v $X$ existuje nejvýše spočetná ONB*[7].

*Důkaz.*

$\Rightarrow$: $X$ separabilní $\Rightarrow \exists S \subseteq X, |S| \leq \aleph_0 : \overline{S} = X \Rightarrow \overline{\mathcal{L}(S)} = X$ (totiž $S \subseteq \mathcal{L}(S)$) $\Rightarrow X = \overline{\mathcal{L}(E)}$, kde $E$ je ONS, $|E| \leq |S|$, získaný ortonormalizací z $S$ po nejvýše spočetně mnoha krocích Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu (`[ZM1:věta 3.78][FA1:věta 2.10]`).

$\Leftarrow$: $X = \overline{\mathcal{L}(E)}$, $E$ nejvýše spočetná $\Rightarrow X = \overline{\mathcal{L}(E)}_{\mathbb{Q}}$, kde lineární obal provádíme nad (spočetným) podtělesem $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ tvořeným komplexními čísly s racionální reálnou i imaginární částí. Zřejmě $|\mathcal{L}(E)_{\mathbb{Q}}| \leq \aleph_0$. □

**Důsledek 2.70.** $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{C}^n$ *jsou separabilní H-prostory.*

## 2.2 Kompaktní množiny

*Teorie*: `[Tay:odst.2.2 s.70-71,74-75,78-80,101-103]`, `[KoFo:část II,kap.6 s.118-126]`

**Definice 2.71.**
Podmnožina $M \subseteq X$ ($T-$prostor) se nazývá **kompaktní**, jestliže $M \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{T}} U$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_X \Rightarrow \exists\, \mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, $|\mathcal{T}'| < \infty : M \subseteq \bigcup\limits_{U \in \mathcal{T}'} U$, neboli každé otevřené pokrytí $M$ obsahuje konečné podpokrytí. $M$ se nazývá **relativně kompaktní**[8],jestliže $\overline{M}$ je kompaktní.

**Věta 2.72 (Vlastnosti (relativně) kompaktních množin).**

1° *$X$ Hausdorffův T-prostor, $M \subseteq X$ kompaktní $\Rightarrow$ $M$ je uzavřená.*

2° *Je-li $X$ M-, NL-nebo VS-prostor a $M \subseteq X$, pak platí:*
- *(a) $M$ je kompaktní $\Rightarrow$ $M$ je uzavřená a ohraničená*
- *(b) $M$ je relativně kompaktní $\Rightarrow$ $M$ je ohraničená*
- *(c) $M$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ $M$ je uzavřená a relativně kompaktní*
- *(d) $M$ je relativně kompaktní (kompaktní) $\Leftrightarrow$ každá posloupnost v $M$ obsahuje konvergentní podposloupnost (navíc s limitou v $M$)*
- *(e) $M$ je kompaktní $\Rightarrow$ $M$ je separabilní M-podprostor v $X$*

3° *Je-li $X$ NL-nebo VS-prostor, pak následující výroky jsou ekvivalentní:*
- *(a)* $\dim X < \infty$
- *(b) Jednotková kulová plocha v $X$ je kompaktní*
- *(c) $M \subseteq X$ je kompaktní $\Leftrightarrow$ $M$ je uzavřená a ohraničená*
- *(d) $M \subseteq X$ je relativně kompaktní $\Leftrightarrow$ $M$ je ohraničená*

4° *Je-li $T : X \to Y$ ($T-$prostor) spojité zobrazení, $M$ kompaktní v $X$, pak $T(M)$ je kompaktní v $Y$. Speciálně je-li $X$ M-prostor a $Y = \mathbb{R}$, $M$ kompaktní v $X$, pak $T$ nabývá maxima a minima na $M$*[9].

*Důkaz.*

*1°* viz důkaz `[Tay:2.3-B s.74]`.

*2°* (a) viz `[Tay:2.4-C s.78]`.

[7] Stačí, když existuje nejvýše spočetný úplný systém v $X$, který nemusí být nutně ortonormální — v důkazu vynecháme ortonormalizaci. Zejména tvrzení platí i v NL-prostoru $X$.

[8] Relativně kompaktní podmnožiny v úplných metrických prostorech jsou totožné s tzv. **prekompaktními** množinami. Je třeba upozornit, že ve starší literatuře se místo termínu *kompaktní* používá termín *bikompaktní*, zatímco *kompaktnost* je užita ve smyslu *relativní kompaktnosti*.

[9] Zobecnění Weierstrassovy věty známé z kurzu matematické analýzy.

(b) $M$ je ohraničená, protože její nadmnožina $\overline{M}$ je kompaktní dle definice 2.71 a tedy dle (a) ohraničená.
(c) zřejmé opět užitím (a) a definice 2.71 (cvičení).
(d) viz [Tay:2.4-H s.79] s uvážením 2.33.
(e) viz [Tay:2.4-F s.79].

*3°* (a)⇒(c) je důsledkem [Tay:3.12-D s.101] a 2°(a).
(c)⇒(b) je zřejmé, neboť jednotková kulová plocha je uzavřená a ohraničená.
(b)⇒(a) plyne z [Tay:3.12-F s.102].
(d) ⇔ (c) je zřejmé s uvážením 2°(b)(c) (cvičení).

*4°* viz [Tay:2.2-C s.71]. Je-li $Y = \mathbb{R}$ (s euklidovskou metrikou), pak $T(M)$ je kompaktní v $\mathbb{R} \overset{2°(a)}{\Rightarrow} T(M)$ je v $\mathbb{R}$ uzavřená a ohraničená ⇒ existuje v ní nejmenší a největší prvek (viz též [FA1:věta 1.26]).

□

## 2.3 Příklady NL-prostorů a VS-prostorů

*Opakování*: [ZM1:odst.3.6]
*Teorie*: [Tay:odst.3.11 s.93-108]

V dalším se omezíme pouze na vybrané prostory, které často vystupují v teorii signálů. Existuje ale samozřejmě celá řada dalších, které mohou hrát důležitou roli v jiných oblastech. Např. v teorii splajnů jsou to **Sobolevovy prostory**. Pro další informace odkazujeme na specializovanou literaturu.

### 2.3.1 Prostory $L^p$ a $\ell^p$, $1 \le p \le \infty$ ($p \in \mathbb{R}^*$)

**2.73. Prostory funkcí**[10]

$L^p(\mathcal{J})$ = prostor funkcí absolutně integrovatelných na $\mathcal{J}$ v $p$-té mocnině:
$L^p(\mathcal{J}) := \{f \mid f : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ měřitelné, $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ měřit., $\int_{\mathcal{J}} |f(t)|^p\, dt < \infty\}$ pro $1 \le p < \infty$.
$\|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{J}} |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $f \in L^p(\mathcal{J})$.

$L^\infty(\mathcal{J})$ = prostor funkcí esenciálně ohraničených na měřitelné množině $\mathcal{J}$:
$L^\infty(\mathcal{J}) := \{f \mid f : \mathcal{J} \to \mathbb{C}$ měřitelné, $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ měřitelná, $\operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathcal{J}} |f(t)| < \infty\}$ pro $p = \infty$.
$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathcal{J}} |f(t)|$, $f \in L^\infty$.

$L^p := L^p(\mathbb{R})$ pro $1 \le p \le \infty$.

$C(\mathcal{J})$ = prostor funkcí spojitých a ohraničených na $\mathcal{J}$[11]: $C(\mathcal{J}) \subset L^\infty(\mathcal{J})$ s normou $\|\cdot\|_\infty$.

**2.74. Prostory posloupností** (příloha B.1)

$\ell^p(J)$ = prostor posloupností absolutně sumovatelných na $J$ v $p$-té mocnině:
$\ell^p(J) := \{\xi \mid \xi = \{\xi_n\}_{n\in J}, |J| \le \aleph_0,\ \sum_{n\in J} |\xi_n|^p < \infty\}$ pro $1 \le p < \infty$.
$\|\xi\|_p := \left(\sum_{n\in J} |\xi_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $\xi \in \ell^p(J)$.

[10] Nerozlišujeme mezi funkcemi, které se liší na množině míry 0.
[11] Je-li $\mathcal{J}$ kompaktní, pak každá spojitá funkce nabývá na $\mathcal{J}$ maxima dle 2.72/4° a tedy $C(\mathcal{J})$ je právě prostor všech funkcí spojitých na $\mathcal{J}$.

$\ell^\infty(J)$ = prostor posloupností ohraničených na spočetné množině $J$:
$\ell^\infty(J) := \{\xi \mid \xi = \{\xi_n\}_{n\in J}, |J| \leq \aleph_0, \sup_{n\in J} |\xi_n| < \infty\}$ pro $p = \infty$.
$\|\xi\|_\infty := \sup_{n\in J} |\xi_n|$, $\xi \in \ell^\infty$.

$\ell^p := \ell^p(\mathbb{Z})$ pro $1 \leq p \leq \infty$.

*Označení.* Pro konvergenci dle normy $\|\cdot\|_p$ v $L^p(\mathcal{I})$, resp. v $\ell^p(J)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ budeme nadále občas používat zápis $x_n \xrightarrow{p} x$. Poznamenejme, že $x_n \xrightarrow{2} x$ odpovídá konvergenci v euklidovské metrice, takže si vystačíme se zápisem $x_n \to x$. Podobně $x_n \xrightarrow{\infty} x$ koresponduje se stejnoměrnou konvergencí $x_n \rightrightarrows x$ na $\mathcal{I}$, resp. na $J$ (cvičení).

**Věta 2.75** (`[Tay: s.94-97,100,105-108]`).
*(1) $L^p(\mathcal{I})$ a $\ell^p(J)$ jsou úplné prostory (B-prostory) a separabilní pro $1 \leq p < \infty$.*
*(2) $L^\infty(\mathcal{I})$ a $\ell^\infty(J)$ jsou pouze úplné a $\ell^\infty(J)$ je separabilní jen pokud $|J| < \infty$ (viz též 2.53).*
*(3) $C(\mathcal{I})$ je úplný, ale separabilní jen pokud $\mathcal{I}$ je kompaktní (uzavřená a ohraničená) v $\mathbb{R}$ (např. uzavřený a ohraničený interval).*

*Důkaz.*
(1) a (2): viz `[Tay: s.94-97,105-108]`.
(3) $C(\mathcal{I})$ je uzavřený podprostor v $L^\infty$, protože stejnoměrná limita spojitých a ohraničených funkcí je spojitá a ohraničená funkce. Pak tedy $C(\mathcal{I})$ je úplný dle (2) a 2.38(2) — viz též `[Tay:cv.1(d) s.108]`.
Separabilita plyne například ze známé Weierstrassovy věty, podle které je množina všech polynomů hustá v $C[a,b]$. Pak také spočetná množina polynomů s racionálními koeficienty je hustá v $C[a,b]$, neboť každý polynom s reálnými koeficienty lze aproximovat polynomem s racionálními koeficienty s libovolnou přesností v normě $\|\cdot\|_\infty$. Ještě jinou explicitiní konstrukci spočetné husté podmnožiny tvořené spojitými po částech lineárními funkcemi lze nalézt v `[Tay:cv.2 s.100]`.
□

**2.76. Prostor $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$**
$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$:=$\{f \mid f : \Omega \to \mathbb{C}$ měřitelné na $\Omega$, $\mathcal{I} \in \mathcal{A}$ měřitelná, $\int_{\mathcal{I}} |f(t)|^p \, d\mu(t) < \infty\}$ pro $1 \leq p < \infty$, kde $\|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{I}} |f(t)|^p \, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}$.
Jedná se zobecnění konstrukce z 2.73 a 2.74 s tím, že užíváme Lebesgueův integrál vzhledem k obecné míře $\mu$ pro funkce definované na tzv. *měřitelném prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Pak $L^p(\mathcal{I})$ je speciálním případem, kde $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ je nejmenší $\sigma$-algebra obsahující všechny otevřené intervaly ($\sigma$-algebra *borelovských množin*) a $\mu$ je Lebesgueova míra. Samozřejmě lze vzít i $m$-rozměrné funkce měřitelné na $\Omega = \mathbb{R}^m$. Podobně je speciálním případem i prostor $\ell^p(J)$, kde zvolíme $\Omega = \mathbb{R}$ s tzv. *čítací mírou*, kdy $\mu(\mathcal{I}) = |J \cap \mathcal{I}|$=počet prvků diskrétní množiny $J$ ležících v $\mathcal{I}$.
Jestliže $\mu = P$ je *pravděpodobnostní míra* $(0 \leq P(\mathcal{I}) \leq 1)$, dostáváme prostor $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *náhodných veličin s konečnými p-tými momenty* známý z kurzů pravděpodobnosti a statistiky (obvykle $p = 2$ — prostor *náhodných veličin s konečným rozptylem*). Lze opět zkoumat úplnost a separabilitu těchto prostorů jako ve větě 2.75. Příslušná tvrzení ale silně závisí především na vlastnostech míry $\mu$, popřípadě celého měřitelného prostoru.

**Věta 2.77.**
*p-norma je indukována skalárním součinem pouze v případě $p = 2$ (srov. 2.62), kdy $\langle f, g\rangle = \int_{\mathcal{I}} f(t)\overline{g(t)} \, dt$ v $L^2(\mathcal{I})$, resp. $\langle \xi, \eta\rangle = \sum_{n\in J} \xi_n \bar{\eta}_n$ v $\ell^2(J)$.*
*Zejména tedy $L^2(\mathcal{I})$, resp. $\ell^2(J)$ je separabilní H-prostor[12] představující přirozené zobecnění*

[12]V teorii signálů též nazývaný prostorem analogových, resp. diskrétních signálů **s konečnou energií**.

*konečně-rozměrného euklidovského prostoru, kdy $|J| < \infty$ — viz 2.59 a 2.70.*

**2.78.** Označení. Posloupnost posloupností $\mathcal{E} := \{\varepsilon_n\}_{n\in J}$, $\varepsilon_n := \{\delta_{n,k}\}_{k\in J}$ je zřejmě ONB v $\ell^2(J)$ — tzv. **přirozená (standardní) ortonormální báze**.

**Věta 2.79** (**Hölderova nerovnost** `[Heil:Theorem 1.12 s.10]`, `[Yos: s.32]`).
*$x \in L^p(\mathcal{J})$, $y \in L^q(\mathcal{J})$, resp. $x \in \ell^p(J)$, $y \in \ell^q(J)$, kde $1 \le p, q \le \infty$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (tj. $q = \frac{p}{p-1}$) $\Rightarrow$ $xy \in L^1(\mathcal{J})$, resp. $xy \in \ell^1(J)$ a platí $\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q$, přičemž rovnost[13] nastává právě když existují $0 \le \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \ne 0$, taková, že $\alpha|x|^p = \beta|y|^q$. Pro $p = q = 2$ je jejím důsledkem Cauchy-Schwarzova nerovnost 2.60/5° — cvičení.*

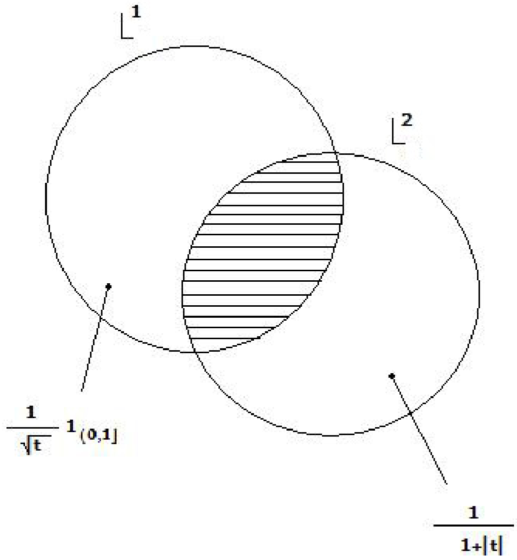
**Věta 2.80** (**Koincidence prostorů** — viz též přílohu B.2).
*(a) $\mu(\mathcal{J}) < \infty$ (Lebesgueova míra), $1 \le p < q \le \infty \Rightarrow L^q(\mathcal{J}) \subseteq L^p(\mathcal{J})$.*
*(b) $\mathcal{J} = \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} 1_{(0,1]} \in L^1 - L^2$ a $\frac{1}{1+|t|} \in L^2 - L^1$ (viz obr. 2.2 a 2.3)[14].*
*Navíc $\overline{L_1 \cap L_2} = L_2$ (uzávěr v normě $\|\cdot\|_2$) a $\overline{L_1 \cap L_2} = L_1$ (uzávěr v normě $\|\cdot\|_1$).*
*(c) $1 \le p < q \le \infty \Rightarrow \ell^p(J) \subseteq \ell^q(J) \subseteq \ell^\infty(J)$, přičemž při $|J| < \infty$ nastane rovnost obou inkluzí (viz 2.53).*

*Důkaz.*
(a) Při $\infty > q > p \ge 1$, $f \in L^q(\mathcal{J})$ lib. $\Rightarrow \|f\|_q^q = \int_{\mathcal{J}} |f(t)|^{p\frac{q}{p}} dt < \infty \Rightarrow |f|^p \in L^{\frac{q}{p}}(\mathcal{J})$.
Přitom $1_{\mathcal{J}} \in L^{\frac{q}{q-p}}(\mathcal{J})$, kde $\frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = 1$, takže užitím Hölderovy nerovnosti
$$\| \|f\| \|_p^p = \| |f|^p \|_1 = \| |f|^p 1_{\mathcal{J}} \|_1 \le \underbrace{\| |f|^p \|_{\frac{q}{p}}}_{\| |f| \|_q^{q\frac{p}{q}} = \|f\|_q^p < \infty} \underbrace{\| 1_{\mathcal{J}} \|_{\frac{q}{q-p}}}_{\mu(\mathcal{J})^{\frac{q-p}{q}} < \infty} < \infty \Rightarrow f \in L^p(\mathcal{J}).$$
V případě $q = \infty$ pro $f \in L^\infty(\mathcal{J})$ lib. existuje $C < \infty$: $|f| < C$ na $\mathcal{J}$. Pak $|f(t)|^p < C^p$ na $\mathcal{J}$ $\Rightarrow \int_{\mathcal{J}} |f(t)|^p \, dt < \int_{\mathcal{J}} C^p \, dt = C^p \mu(\mathcal{J}) < \infty$ a tedy $f \in L^p(\mathcal{J})$.
(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+|t|} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t} dt = 2[ln|1+t|]_0^\infty = \infty \Rightarrow \frac{1}{1+|t|} \notin L^1.$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+|t|}\right)^2 dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt = 2[-\frac{1}{1+t}]_0^\infty = 2 \Rightarrow \frac{1}{1+|t|} \in L^2.$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{\sqrt{t}} 1_{(0,1]}| dt = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} dt = 2[t^{\frac{1}{2}}]_0^1 = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} 1_{(0,1]} \in L^1.$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{\sqrt{t}} 1_{(0,1]}|^2 dt = \int_0^1 \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_0^1 = \infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} 1_{(0,1]} \notin L^2.$$
$\overline{L_1 \cap L_2} = L_2$ a $\overline{L_1 \cap L_2} = L_1$ dle [Las96, s.241].
(c) $|J| < \infty \Rightarrow \ell^p = \mathbb{C}^{|J|}$ pro $\forall p, 1 \le p \le \infty$. Nechť $|J| = \aleph_0$ a $p < \infty$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $J = \mathbb{Z}$. Pak pro $\xi = \{\xi_n\}_{n\in J} \in \ell^p(J)$ libovolné:
$\sum_{n\in J} |\xi_n|^p < \infty \Rightarrow |\xi_n| \to 0$ pro $|n| \to \infty \Rightarrow \exists N \in J : |\xi_n| < 1$ pro $|n| \ge N \overset{q>p}{\Rightarrow} |\xi_n|^q < |\xi_n|^p$ pro $|n| \ge N \Rightarrow \sum_{n\in J, |n|\ge N} |\xi_n|^q < \sum_{n\in J, |n|\ge N} |\xi_n|^p \le \sum_{n\in J} |\xi_n|^p < \infty \Rightarrow \sum_{n\in J} |\xi_n|^q < \infty$, neboť $\{n \,|\, n \in J = Z \;, |n| < N\}$ je konečná, takže $\xi \in \ell^p(J)$. Zřejmě též $\xi \in \ell^\infty(J)$, neboť $\lim_{n\to\infty} |\xi_n| = 0 \Rightarrow \{|\xi_n|\}_{n\in J}$ ohraničená $\Rightarrow \sup_{n\in J} |\xi_n| < \infty$.

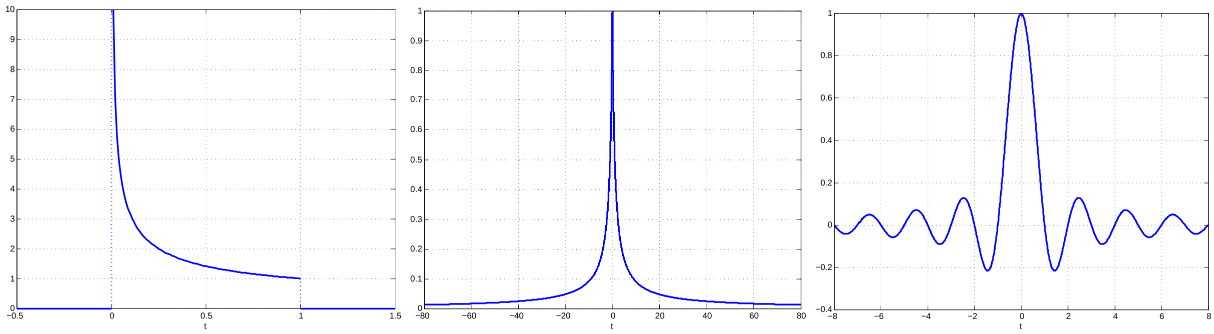
□

[13] Rovnost dostáváme při $\beta \ne 0$ právě když $|y| = (\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{1}{q}} |x|^{\frac{p}{q}} =: C|x|^{p-1}$, resp. duálně v případě $\alpha \ne 0$.

[14] V teorii signálů hraje důležitou roli funkce $\mathrm{sinc}(t) := \frac{\sin(t)}{t}$, pro niž rovněž platí $\mathrm{sinc}(t) \in L^2 - L^1$ (viz `http://planetmath.org/node/37693/`).




**Obrázek 2.2**: Koincidence prostorů $L^1$ a $L^2$



**Obrázek 2.3**: Funkce $\frac{1}{\sqrt{t}}1_{(0,1]} \in L^1 - L^2$, $\frac{1}{1+|t|} \in L^2 - L^1$ a $\mathrm{sinc}(t) \in L^2 - L^1$

**Věta 2.81** (**Fourierova řada (FŘ)** — podrobněji viz odst. C.1, viz také `[Heil:Theorem 13.23 s.450]`).
*Spočetná množina* **komplexních harmonických kmitů** *(T-periodické funkce)*

$$E = \{e_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi kt}{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}} (\cos\frac{2\pi kt}{T} + i \sin\frac{2\pi kt}{T})$$

*tvoří ONB v prostoru $L^2([0,T])$*[15]*, tj. každou $T$-periodickou funkci $x(t) \in L^2([0,T])$ lze rozvinout do tzv.* **Fourierovy řady** *(viz odst. 6.2):*

$$\underline{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x, e_k\rangle \frac{1}{\sqrt{T}}}_{c_k} e^{i\frac{2\pi kt}{T}} = \underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}}},$$

[15] Vzhledem k $T$-periodicitě dokonce v každém prostoru $L^2([a, a+T])$, $a \in \mathbb{R}$, nejčastější volba je $a = 0$ nebo $a = -\frac{T}{2}$.

*kde řada konverguje (bez ohledu na pořadí) dle normy* $\|\cdot\|_2$ *v prostoru* $L^2([0,T])$ *a souřadnice* $x_k$, *resp.* $c_k$ *jsou jednoznačně určeny vztahem*

$$\underline{\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T x(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}\,dt} = \langle x, e_k\rangle = \langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j e_j, e_k\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{\delta_{j,k}} = \underline{x_k =: \sqrt{T}c_k}$$

*Modifikované souřadnice* $c_k := \frac{x_k}{\sqrt{T}} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}\,dt$ *nazýváme* **Fourierovými koeficienty** *funkce* $x(t)$ *(viz vztahy* (C.1)*).*

**Věta 2.82** (Dirichletova věta o bodové konvergenci [Kuf69, Věta 7.17])**.**
*Jestliže* $T$*-periodická funkce* $x(t)$ *má konečnou variaci na* $[0,T]$, *pak její FŘ konverguje bodově k* $x(t)$ *v každém bodě* $t$, *kde je* $x(t)$ *spojitá a k* $\frac{1}{2}(\lim_{t\to 0^-} x(t) + \lim_{t\to 0^+} x(t))$ *v každém bodě nespojitosti (u funkce s konečnou variací je to vždy pouze konečný skok).*

Konkrétní rozvoje periodických signálů je možno nalézt v příloze jako Příklady C.2 a C.3. Viz také příklady fourierovských transformačních párů v Příkladu C.23.

*Poznámka* 2.83. Vzhledem k $T$-periodicitě můžeme ve výše uvedených vztazích integrovat přes interval $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, takže dostáváme

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kt}{T}} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}\,dt\right)e^{i\frac{2\pi kt}{T}}.$$

Limitním přechodem pro $T \to \infty$ diskrétní spektrum frekvencí $\{\frac{k}{T}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ přejde v kontinuální spektrum $\{\gamma\}_{\gamma\in\mathbb{R}}$ a dostáváme

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}\,dt \to \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi\gamma t}\,dt =: \widehat{x}(\gamma),\ x(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{x}(\gamma)e^{i2\pi\gamma t}\,d\gamma.$$

Tyto úvahy vedou přirozeně k pojmu tzv. **Fourierovy transformace** (dopředné $\mathcal{F}^-$ a zpětné $\mathcal{F}^+$) definovaném v 2.84 pro funkce z $L^1$ (při bodové konvergenci FŘ), resp. z $L^2$ (při konvergenci FŘ dle normy).

**Definice 2.84 (Fourierova transformace (FT) v $L^1$).**
Definujeme pro $f \in L^1$:

$$(\mathcal{F}_1^{\pm} f)(\gamma) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\pm i2\pi\gamma t}\,dt \tag{2.1}$$

Tento integrál existuje, neboť $|f(t)e^{\pm i2\pi\gamma t}| = |f(t)| \in L^1$ a zřejmě platí
$(\mathcal{F}_1^{\pm} f)(\gamma) = (\mathcal{F}_1^{\mp} f)(-\gamma)$, $(\mathcal{F}_1^{\pm} f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$.

**Věta 2.85.**
*Pro každé* $f \in L^1$ *je* $\mathcal{F}_1^{\pm} f \in L^\infty$ *stejnoměrně spojitá a platí* $\|\mathcal{F}_1^{\pm} f\|_\infty \le \|f\|_1$.

*Důkaz.* Pro každé $\gamma$ je $|(\mathcal{F}_1^{\pm} f)(\gamma)| \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)e^{\pm i2\pi\gamma t}|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt = \|f\|_1$, takže $\operatorname{ess\,sup}_\gamma |(\mathcal{F}_1^{\pm} f)(\gamma)| \le \|f\|_1$. Důkaz stejnoměrné spojitosti lze nalézt v `[Heil: s.254]` nebo také v [Chu92, s. 25]. □

**Věta 2.86** (**Věta o inverzi pro** $\mathcal{F}_1$ `[Heil:Theorem 9.12 s.256-257]`, [Kuf69, Věta 8.3])**.**
*(1) Pokud* $f, \mathcal{F}_1^{\pm} f \in L^1$, *pak platí* $f(t) = (\mathcal{F}_1^{\mp}(\mathcal{F}_1^{\pm} f))(t)$ *v každém bodě* $t$ *spojitosti* $f$.

(2) *Pokud $f \in L^1$ má konečnou variaci na každé kompaktní podmnožině, pak v každém bodě $t$ platí $\frac{1}{2}(\lim_{t\to 0^-} f(t) + \lim_{t\to 0^+} f(t)) = (\mathcal{F}_1^{\mp}(\mathcal{F}_1^{\pm} f))(t)$, zejména tedy $f(t) = (\mathcal{F}_1^{\mp}(\mathcal{F}_1^{\pm} f))(t)$ v každém bodě spojitosti $f$*[16].

**Definice 2.87** (**Fourierova transformace (FT) v** $L^2$ [Kuf69, kap. 8, odst. 3], [Las96, s. 241]).

Definujeme pro $f \in L^2$:

$$(\mathcal{F}^{\pm} f)(\gamma) := (\mathcal{F}_2^{\pm} f)(\gamma) := \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(t)e^{\pm i2\pi\gamma t}\, dt \text{ v } L^2\text{-konvergenci:}$$

$$\|\mathcal{F}^{\pm} f - \int_{-N}^{N} f(t)e^{\pm i2\pi\gamma t}\, dt\|_2 \to 0 \text{ pro } N \to \infty. \tag{2.2}$$

Značíme $\widehat{f} := \mathcal{F} f := \mathcal{F}^- f$ a $\check{f} := \mathcal{F}^+ f$. Zřejmě opět platí $(\mathcal{F}^{\pm} f)(\gamma) = (\mathcal{F}^{\mp} f)(-\gamma)$. Existence je garantována následující větou.

**Věta 2.88** (**Věta o inverzi pro** $\mathcal{F}_2$ `[Heil:odst.9.4 s.262-264]`[Kuf69, Věta 8.6]).
*$\mathcal{F}^{\pm} : L^2 \to L^2$ je TLI zachovávající $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a tedy i $\|\cdot\|_2$, tj. lineární izometrie $L^2$ na $L^2$ (viz odst. 3.5). Zejména $\mathcal{F}^+$ a $\mathcal{F}^-$ jsou navzájem inverzní spojité lineární operátory, tj. $\mathcal{F}^{\pm}\mathcal{F}^{\mp} = I$ neboli $f(t) = \widehat{\check{f}}(t) = \check{\widehat{f}}(t)$ platí pro skoro všechna $t$.*

**Věta 2.89.**
*$f \in L^2 \Rightarrow \exists \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in L^1 \cap L^2$: $f_n \xrightarrow{2} f$, $\mathcal{F}_1(f_n) \xrightarrow{2} \mathcal{F}_2(f)$ (viz obr. 2.4). Pokud $f \in L^1$, tak podobně $\mathcal{F}_1(f_n) \xrightarrow{\infty} \mathcal{F}_1(f)$ (tj. stejnoměrná konvergence).*

*Důkaz.*
$f_n := 1_{[-n,n]} f$; $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|^2\, dt = \int_{-n}^{n} |f_n(t)|^2\, dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow f_n \in L^2$, $\|f - f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt - \int_{-n}^{n} |f(t)|^2\, dt \to 0$ a také $f_n \in L^2[-n,n] \subseteq L^1[-n,n] \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)| dt = \int_{-n}^{n} |f_n(t)| dt < \infty$.
Celkem $f_n \in L^1 \cap L^2$ a $\mathcal{F}_1(f_n)(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)e^{-i2\pi\gamma t}\, dt = \int_{-n}^{n} f(t)e^{-i2\pi\gamma t}\, dt$, takže pro $f \in L^2$ je $\|\widehat{f} - \mathcal{F}_1(f_n)\|_2 \to 0$ pro $n \to \infty$ dle (2.2), kde konvergence je garantována větou 2.88.
Pro $f \in L^1$ konvergence $\mathcal{F}_1(f_n) \xrightarrow{\infty} \mathcal{F}_1(f)$ plyne z věty 2.85, neboť $\|\mathcal{F}_1(f) - \mathcal{F}_1(f_n)\|_\infty = \|\mathcal{F}_1(f - f_n)\|_\infty \le \|f - f_n\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f|\, dt - \int_{-n}^{n} |f|\, dt \to 0$, kde konvergence vpravo je přímo vlastnost Lebesgueova integrálu. □

**Věta 2.90.**
*Pokud $f \in L^1 \cap L^2$, pak $\mathcal{F}_1^{\pm} f$ a $\mathcal{F}_2^{\pm} f$ se liší nejvýše na množině míry nula, takže není třeba rozlišovat mezi $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_2$ a můžeme psát $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$.*

*Důkaz.*
Zvolme $\varepsilon > 0$ a $N \in \mathbb{N}$ libovolně, ale pevně. Podle 2.89 na intervalu $[-N, N]$ dostáváme pro dosti velké $n$ s uvážením $L^\infty[-N,N] \subseteq L^2[-N,N]$ dle 2.80(a):
$\|\mathcal{F}_2(f)1_{[-N,N]} - \mathcal{F}_1(f_n)1_{[-N,N]}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|\mathcal{F}_1(f)1_{[-N,N]} - \mathcal{F}_1(f_n)1_{[-N,N]}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2N}}$ a odtud majorizací integrandu[17] ve $\|\mathcal{F}_1(f)1_{[-N,N]} - \mathcal{F}_1(f_n)1_{[-N,N]}\|_2 \le \sqrt{2N}\|\mathcal{F}_1(f)1_{[-N,N]} - \mathcal{F}_1(f_n)1_{[-N,N]}\|_\infty < \sqrt{2N}\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2N}} = \frac{\varepsilon}{2}$.
Odtud $\|\mathcal{F}_1(f)1_{[-N,N]} - \mathcal{F}_2(f)1_{[-N,N]}\|_2 \le \|\mathcal{F}_1(f)1_{[-N,N]} - \mathcal{F}_1(f_n)1_{[-N,N]}\|_2 + \|\mathcal{F}_1(f_n)1_{[-N,N]} -$

[16] Funkce má v ohraničeném okolí každého bodu konečnou variaci, takže v něm může být nejvýše konečný skok.

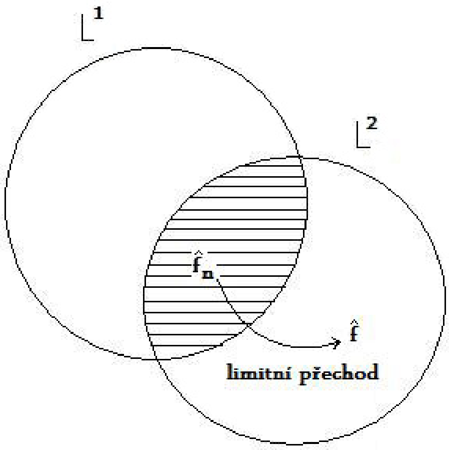
[17] Lze též užít nerovnosti mezi normami dle věty B.16 v příloze ($p = 2$, $q = \infty$, $\mu([-N,N]) = 2N$).

$\mathcal{F}_2(f)1_{[-N,N]}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ pro dosti velká $n$.
Pak $\|\mathcal{F}_1(f)1_{[-N,N]} - \mathcal{F}_2(f)1_{[-N,N]}\|_2 = 0$ a tedy $\mathcal{F}_1(f) = \mathcal{F}_2(f)$ skoro všude na $[-N,N]$ pro každé $N \in \mathbb{N}$. Nechť se $\mathcal{F}_1(f)$ a $\mathcal{F}_2(f)$ liší na $[-N,N]$ na množině $D_N$ nulové míry ($\mu(D_N) = 0$). Je $D_N \subseteq D_{N+1}$. Pak $\mathcal{F}_1(f)$ a $\mathcal{F}_2(f)$ se v $\mathbb{R}$ liší na množině $D = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} D_N$. Ze spojitosti míry vzhledem k množinovým limitám pak platí $\mu(D) = \lim_{N\to\infty} \mu(D_N) = 0$. $\square$

**Definice 2.91** (Fourierovský transformační pár (příklady C.23 v příloze C.2.1))**.**
Nechť $f \in L^1 \cup L^2$, kde $F := \mathcal{F}_i^- f$ a $f = \mathcal{F}_i^+ F$ pro $i = 1$ nebo $i = 2$. Pak říkáme, že $f$ a $F$ tvoří **fourierovský transformační pár v** $L^i$ a píšeme

$$\boxed{f(t) \diamond F(\gamma) \quad (\text{v } L^i)}$$

V takovém případě též říkáme, že $f(t)$ je **inverzní Fourierovou transformací funkce** $F(\gamma)$ **v** $L^i$ (viz věty o inverzi 2.86 a 2.88).




**Obrázek 2.4**: Fourierova transformace v $L^2$: Limitní přechod z $L^1 \cap L^2$ do $L^2$.

## 2.3.2 Funkce koncentrované v čase a frekvenci (TF-prostory)

**Definice 2.92** (**TF-prostor (Time-frequency concentrated functions)**)**.**
TF:= TF($\mathbb{R}$):= $\{f \in L^2 \,|\, \exists C > 0, \varepsilon > 0 : |f(t)| < C(1+|t|)^{-(1+\varepsilon)}; |\widehat{f}(\gamma)| < C(1+|\gamma|)^{-(1+\varepsilon)}$ pro dosti velká $|t|, |\gamma|\}$.
$f \in \text{TF} \;\Leftrightarrow\; f(t)$ i $\widehat{f}(\gamma)$ klesá rychleji než $\frac{1}{t}$ (resp. $\frac{1}{\gamma}$) v čase $t$ i ve frekvenci $\gamma$ při $t \to \pm\infty$, resp. $\gamma \to \pm\infty$.

**Věta 2.93.** *Platí:*

*(1) $TF \subseteq L^1 \cap L^2$ je L-podprostor.*
*(2) $f \in TF \Rightarrow \widehat{f} \in TF$ a $\mathcal{F}^{\pm}|_{TF} : TF \to TF$ je lineární izometrií TF na TF.*
*(3) $f \in TF \Rightarrow f, \widehat{f}$ jsou stejnoměrně spojité.*

*Důkaz.*

(1) TF $\subseteq L^2$ dle definice; je rovněž TF $\subseteq L^1$, neboť $f \in$ TF je v absolutní hodnotě majorizována funkcí $C(1+|t|)^{-(1+\varepsilon)} \in L^1$ (cvičení).

TF je $L$-podprostor:

nechť $f, g \in$ TF; $|f(u)|, |\widehat{f}(u)| < C_1(1+|u|)^{-(1+\varepsilon_1)}$ a $|g(u)|, |\hat{g}(u)| < C_2(1+|u|)^{-(1+\varepsilon_2)}$.
Pak $|cf(u)|, |\widehat{cf}(u)| = |c||\widehat{f}(u)| < |c|C_1(1+|u|)^{-(1+\varepsilon_1)}$
$|f(u)+g(u)| \leq |f(u)| + |g(u)| < 2\max(C_1, C_2)(1+|u|)^{-(1+\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2))}$
Podobně pro $|\widehat{f+g}| = |\widehat{f}+\widehat{g}| \leq |\widehat{f}| + |\widehat{g}|$.

(2) $f \in \mathrm{TF} \Rightarrow |\widehat{f}(\gamma)| < C(1+|t|)^{-(1+\varepsilon)} \in L^1$, $f \in \mathrm{TF} \overset{(1)}{\Longrightarrow} f \in L^2 \overset{2.88}{\Longrightarrow} \widehat{f} \in L^2$ a $|\widehat{\widehat{f}}(t)| = |\check{\widehat{f}}(-t)| = |f(-t)| < C(1+|-t|)^{-(1+\varepsilon)} = |C(1+|t|)|^{-(1+\varepsilon)}$. Celkem $\widehat{f} \in \mathrm{TF} \subseteq L^2$ a $f = \check{\widehat{f}} = \widehat{\check{f}}$, kde $\check{f}(\gamma) = \widehat{f}(-\gamma) \in$ TF, takže $\mathcal{F}^{\pm}|_{\mathrm{TF}}$ je surjekce na TF a tedy izometrie s uvážením 2.88.

(3) $f \in \mathrm{TF} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \widehat{f} \in \mathrm{TF} \overset{(1)}{\Longrightarrow} f, \widehat{f} \in L^1 \overset{2.85}{\Longrightarrow} \widehat{f}$ je stejnoměrně spojitá. Podobně $\widehat{f} \in \mathrm{TF} \Rightarrow \widehat{\widehat{f}}(\gamma) = \check{\widehat{f}}(-\gamma) = f(-\gamma)$ je stejnoměrně spojitá $\Rightarrow f(\gamma)$ je stejnoměrně spojitá. □

*Poznámka* 2.94. Gaussova funkce $e^{-at^2}$ patří mezi TF-funkce.[18] To stačí ukázat jen v jedné z domén, vzhledem k poznámce v příkladu C.23 o Gaussově funkci jakožto pevném bodu Fourierovy transformace. Vyjdeme z definice 2.92 a budeme chtít ukázat, že existují konstanty $C > 0, \varepsilon > 0$ takové, že $|e^{-at^2}| < C\,(1+|t|)^{-(1+\varepsilon)}$. Nerovnost přepíšeme jako $1 < \frac{C(1+|t|)^{-(1+\varepsilon)}}{|e^{-at^2}|}$ a zajímá nás hodnota tohoto podílu při $t \to \pm\infty$. Vzhledem k symetrii $e^{-at^2}$ stačí uvažovat pouze $t \to \infty$. Vychází

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C\,(1+t)^{-(1+\varepsilon)}}{\mathrm{e}^{-at^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{at^2}}{C\,(1+t)^{(1+\varepsilon)}}, \tag{2.3}$$

což je výraz typu „$\frac{\infty}{\infty}$“, proto můžeme pro výpočet limity použít L'Hospitalovo pravidlo, čímž dostaneme

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2ta\mathrm{e}^{at^2}}{C(1+\varepsilon)\,(1+t)^{\varepsilon}}$$

a opětovným použitím L'Hospitalova pravidla

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2a\mathrm{e}^{at^2} + 4t^2a^2\mathrm{e}^{at^2}}{C\varepsilon(1+\varepsilon)\,(1+t)^{\varepsilon-1}}.$$

Odsud již je zřejmé, že volbou $\varepsilon = 1 > 0$ dostaneme v uvedeném podílu ve jmenovateli konečné číslo, takže uvedený zlomek jde k nekonečnu. Také je zřejmé, že ať bude $\varepsilon$ jakékoliv kladné, konečným počtem opakování L'Hospitalova pravidla dojdeme do stavu, kdy jmenovatel je pro dosti velké $t$ menší než jedna, a tedy se celý podíl bude blížit nekonečnu, přičemž tato skutečnost nezávisí na hodnotě $C$. Tedy dokonce jakákoliv $C, \varepsilon$ vyhovují definici.

*Poznámka* 2.95. Obdélníková funkce $\mathrm{rect}\,(t)$ definovaná v (C.15) je koncentrovaná v čase – to je zřejmé přímo z charakteru této funkce. Ve frekvenční oblasti je jejím obrazem funkce $\mathrm{sinc}(\gamma) = \mathcal{F}(\mathrm{rect}\,(t))(\gamma)$, která ovšem koncentrovaná není. To znamená, že obdélníková funkce není TF-koncentrovaná. (A duálně funkce sinc není TF-koncentrovaná.)

Vyjdeme přímo z definice a tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že

$$\exists C > 0, \exists \varepsilon > 0 : \quad |\mathrm{sinc}(\gamma)| < C\,(1+|\gamma|)^{-(1+\varepsilon)}\,. \tag{2.4}$$

[18] Dokonce lepší TF-koncentrace než má Gaussova funkce nelze dosáhnout. Gaussova funkce minimalizuje tzv. Heisenbergovu míru neurčitosti.

Integrací tohoto vztahu dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\text{sinc}(\gamma)| d\gamma < C \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\gamma|)^{-(1+\varepsilon)}\, d\gamma,$$

což je možné vzhledem k sudosti integrandů napsat jako

$$\int_{0}^{\infty} |\text{sinc}(\gamma)| d\gamma < C \int_{0}^{\infty} (1 + \gamma)^{-(1+\varepsilon)}\, d\gamma. \tag{2.5}$$

Pravou stranu nerovnosti vypočítáme jako $C \cdot \left[\frac{(1+\gamma)^{-\varepsilon}}{-\varepsilon}\right]_0^\infty = \frac{C}{\varepsilon}$, což je konečné číslo. Nyní odhadneme levou stranu nerovnosti; sinc je na intervalu $[0, 1)$ kladný a má konečný integrál, jehož hodnotu označme $h$. Výše uvedený integrál tedy rozepíšeme jako:

$$\int_{0}^{\infty} |\text{sinc}(\gamma)| d\gamma = h + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} |\text{sinc}(\gamma)| d\gamma.$$

Ukážeme, že uvedená nekonečná řada diverguje:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} |\text{sinc}(\gamma)| d\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \left|\frac{\sin \pi\gamma}{\pi\gamma}\right| d\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{0}^{1} \left|\frac{\sin \pi(\omega + k)}{\pi(\omega + k)}\right| d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{0}^{1} \left|\frac{\sin \pi\omega}{\pi(\omega + k)}\right| d\omega.$$

Poslední integrand je na intervalu $[0, 1]$ nezáporný a lze jej ohraničit: $\frac{\sin \pi\omega}{\pi(\omega+k)} \geq \frac{\sin \pi\omega}{\pi(1+k)}$. Proto levá strana nerovnosti (2.5) je větší nebo rovna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(1 + k)} \int_{0}^{1} \sin \pi\omega\, d\omega = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + 1},$$

což je harmonická řada, o které je známo, že její součet diverguje. Proto nemohou existovat vhodné konstanty $C, \varepsilon$, tak aby (2.5) bylo splněno.

### 2.3.3 Frekvenčně omezené funkce (Paley-Wienerovy prostory)

**Definice 2.96 (PW-prostor (bandlimited functions)).**
$\text{PW}_\Omega := \{f \in L^2 \,|\, \text{supp}(\widehat{f}) \subseteq [-\Omega, \Omega] \text{ s.v.}, 0 < \Omega < \infty\}$.

**Věta 2.97.** *$PW_\Omega \subset L^2$ je uzavřený L-podprostor (a tedy H-podprostor).*

*Důkaz.*
<u>L-podprostor:</u> $\widehat{cf} = c\widehat{f}$, $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g} \Rightarrow \text{supp}(\widehat{cf})$, $\text{supp}(\widehat{f+g}) \subseteq [-\Omega, \Omega]\ \forall f, g \in \text{PW}_\Omega$.
<u>Uzavřenost:</u> Sporem. Nechť $f_n \to f$, $f_n \in \text{PW}_\Omega$ a předpokládejme, že $\text{supp}(\widehat{f}) \nsubseteq [-\Omega, \Omega]$ skoro všude. Pak $\exists\, \mathcal{I} \subset \text{supp}(\widehat{f}) - [-\Omega, \Omega] : \mu(\mathcal{I}) > 0$, $|\widehat{f}(\gamma)| > 0$ pro $\gamma \in \mathcal{I}$, tj. $\|f - f_n\|_2^2 \overset{(*)}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\gamma) - \widehat{f}_n(\gamma)|^2\, d\gamma \geq \int_{\mathcal{I}} |\widehat{f}(\gamma) - \widehat{f}_n(\gamma)|^2\, d\gamma = \int_{\mathcal{I}} |\widehat{f}(\gamma)|^2\, d\gamma > 0\ \forall n \Rightarrow$ spor s $f_n \to f$. Poznamenejme, že rovnost $(*)$ platí dle 2.88. □

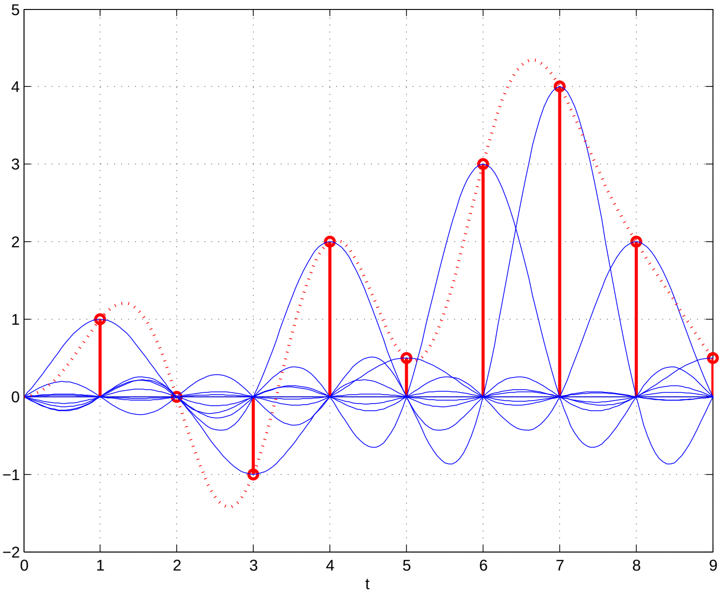
**Příklad 2.98.** Obdélníkový signál rect $(t)$ není prvkem PW-prostoru pro žádné konečné $\Omega$, neboť jak je ukázáno v příkladu C.23, jeho spektrum je funkce sinc s nekonečným frekvenčním nosičem. Obecně jakýkoliv signál, který obsahuje nespojitost, má vždy spektrum s nekonečným nosičem, a proto nemůže být prvkem PW. Ani Gaussova funkce není prvkem PW-prostoru, neboť ona sama i její Fourierova transformace mají nekonečný nosič.

*Poznámka* 2.99. Jakákoliv nenulová funkce, která má kompaktní nosič, nemůže ležet v PW prostoru – konečné $\Omega$ pro ni nemůže existovat.[19] Tedy neexistuje nenulová funkce, která by měla kompaktní nosič zároveň v čase i frekvenci.

*Poznámka* 2.100. Příkladem báze (viz kapitolu 6), dokonce ortonormální (důkaz viz F.4), pro prostor $\mathrm{PW}_\Omega = \mathrm{PW}_{\frac{1}{2}}$ je množina $\{\operatorname{sinc}(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Tento příklad odpovídá funkcím, které neobsahují frekvence vyšší než 1/2. Podle známého „vzorkovacího teorému“ takovou funkci lze beze zbytku rekonstruovat z jejích ekvidistatních vzorků, přičemž vzorky od sebe nesmějí být vzdáleny o více než 1. V rekonstrukční formuli vystupují jako souřadnice přímo vzorky funkce $f$:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\cdot \operatorname{sinc}(t-n). \tag{2.6}$$

Viz obrázek 2.5.




**Obrázek 2.5**: Funkce z prostoru $\mathrm{PW}_{\frac{1}{2}}$ a její vzorky v čase (červeně). Její rekonstrukce pomocí báze $\{\operatorname{sinc}(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (modře odpovídající sčítanci ze vztahu (2.6)). Funkce $\operatorname{sinc}(t)$ je interpolant, má hodnotu nula pro celá čísla vyjma počátku.

### 2.3.4 Hardyho prostory

**Definice 2.101** (**Hardyho prostory $H^2_+$ a $H^2_-$**).
$H^2_+ := H^2_+(\mathbb{R}) := \{f\in L^2 \,|\, \operatorname{supp}(\widehat{f}) \subseteq [0,\infty)\}$
$H^2_- := H^2_-(\mathbb{R}) := \{f\in L^2 \,|\, \operatorname{supp}(\widehat{f}) \subseteq (-\infty,0]\}$.

**Věta 2.102.** *$H^2_+, H^2_- \subseteq L^2$ jsou uzavřené L-podprostory (a tedy H-podprostory) a platí:*

*(a)* $f,g\in H^2_+ \Rightarrow \langle f,g\rangle = \langle \widehat{f},\widehat{g}\rangle = \int\limits_0^\infty \widehat{f}(\gamma)\overline{\widehat{g}(\gamma)}d\gamma,\ \|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2 = \int\limits_0^\infty |\widehat{f}(\gamma)|^2 d\gamma.$

[19] Viz např. jednoduchý argument z
`http://terrytao.wordpress.com/2009/02/18/hardys-uncertainty-principle`.

*(b)* $f, g \in H^2_- \Rightarrow \langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = \int\limits_{-\infty}^{0} \widehat{f}(\gamma)\overline{\widehat{g}(\gamma)}d\gamma,\ \|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{0} |\widehat{f}(\gamma)|^2 d\gamma.$

*(c)* $H^2_+ \perp H^2_-$, *spec.* $H^2_+ \cap H^2_- = \{0\}$.

*Důkaz.* Uzavřenost a zachování lineárních operací se ukazuje analogicky jako v důkazu věty 2.97. Vztahy (a)–(c) jsou důsledkem rovnosti $\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle$, která platí dle 2.88. □

**Důsledek 2.103.** $L^2 = H^2_+ \oplus H^2_-$.

*Důkaz.* $f \in L^2$ lib. $\Rightarrow \widehat{f} = \widehat{f}_+ + \widehat{f}_-$, kde $\widehat{f}_+ = 1_{[0,\infty)}\widehat{f}$, $\widehat{f}_- = 1_{[-\infty,0)}\widehat{f}$. Pak $\widehat{f} = \widehat{f}_+ + \widehat{f}_-$ a dle 2.88 také $f = f_+ + f_-$, kde $f_+ \in H^2_+$, $f_- \in H^2_-$. Tedy $L^2 = \mathcal{L}(H^2_+ \cup H^2_-)$, což spolu s (c) dává $L^2 = H^2_+ \oplus H^2_-$ užitím 2.64 (a 2.56). □

<u>*Poznámka*</u> 2.104. Existuje jedno-jednoznačná korespondence mezi podprostorem reálných funkcí z $L^2$ a prostorem $H^2_+$ (resp. $H^2_-$). Platí totiž $\widehat{f}(-\gamma) = \overline{\widehat{f}(\gamma)}$ a tedy $\widehat{f}(\gamma)$ (a tak i $f$) je jednoznačně určena kladnou (resp. zápornou) částí spektra $\widehat{f}(\gamma)$ pro $\gamma \in [0, \infty)$ (resp. $\gamma \in (-\infty, 0]$).

### 2.3.5 Prostory periodických funkcí v $L^2$

**Definice 2.105 (Prostor $\widetilde{L}^2$ periodických funkcí[20]).**
$\widetilde{L}^2_T := \widetilde{L}^2[a, a+T] := \{g \mid g$ je $T$-periodická, $g\,1_{[a,a+T]} \in L^2\}$, $T > 0, a \in \mathbb{R}$
$\langle g, h\rangle_{\widetilde{L}^2[a,a+T]} := \langle g\,1_{[a,a+T]}, h\,1_{[a,a+T]}\rangle_{L^2}$.

**Věta 2.106.** $\widetilde{L}^2[a, a+T] = \widetilde{L}^2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \overset{LI}{\simeq} L^2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]\ \forall a \in \mathbb{R}$.
*Zejména* $\widetilde{L}^2[a, a+T]$ *je separabilní H-prostor dle 2.75(1).*

*Důkaz.* Zřejmý, neboť integrál $T$-periodické funkce na intervalu délky $T$ nezávisí na volbě jeho počátku $a \in \mathbb{R}$, tedy ani skalární součin a norma nezávisí na $a \in \mathbb{R}$. □

**Definice 2.107 (Prostor $\mathcal{P}_T$ $T$-periodizovatelných funkcí).**

$$\mathcal{P}_T := \{f \in L^2 \mid \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT)}_{T\text{-zperiodičnění } \widetilde{f}} \in \widetilde{L}^2[-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2}]\},\ T > 0, \text{ kde}$$

$\widetilde{f}(t) := \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT) = \lim_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} f(t-nT) \overset{n\rightsquigarrow -n}{=} \lim_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} f(t+nT) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(t+nT)$ konverguje absolutně a stejnoměrně na každé kompaktní (tj. uzavřené a ohraničené) podmnožině v $\mathbb{R}$.

**Věta 2.108.** $\widetilde{L}^2[a, a+T] = \widetilde{L}^2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] = \{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT) \mid f \in \mathcal{P}_T\}\ \forall a \in \mathbb{R}$.

*Důkaz.*
$\supseteq$: platí z definice $\mathcal{P}_T$.
$\subseteq$: $g \in \widetilde{L}^2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \Rightarrow f(t) := 1_{[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]}g(t) \in \mathcal{P}_T$ a $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT) = g(t)$ (skoro všude). Snadno se ukáže, že tato konvergence je na každé kompaktní podmnožině absolutní a stejnoměrná (cvičení). □

[20] Analogicky lze zavést prostor $\widetilde{L}^p_T := \widetilde{L}^p[a, a+T]$ pro $1 \le p \le \infty$ nebo prostor $N$-periodických posloupností $\ell_N$ (viz odst. C.2.1 a C.2.2).

**Věta 2.109.** $\widetilde{f} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT),\ f \in \mathcal{P}_T \Rightarrow \|\widetilde{f} - \sum\limits_{n=-N}^{N} f(t-nT)\|_2 \to 0$ *v* $\widetilde{L}^2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

*Důkaz.* $S_N(t) := \sum\limits_{n=-N}^{N} f(t-nT)$; $S_N(t) \rightrightarrows \widetilde{f}$ na $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N' \in \mathbb{N}$ : pro $N \geq N'$ je $|S_N(t) - \widetilde{f}(t)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{T}}$ pro $\forall t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ a $\|\widetilde{f}(t) - S_N(t)\|^2 = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S_N(t) - \widetilde{f}(t)|^2 dt < \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\varepsilon}{T} dt = \frac{\varepsilon}{T} T = \varepsilon$. Tedy $S_N(t) \to \widetilde{f}(t)$ v $L^2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ a tedy i v $\widetilde{L}^2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ dle 2.105. $\square$

# 3 OPERÁTORY V NL- A VS-PROSTORECH

*Označení.*
Dále v textu symboly $X, X_1, X_2, \ldots; Y, Y_1, Y_2, \ldots$ jsou rezervovány pro označení NL-prostorů, pokud není řečeno jinak.
Podobně $B, B_1, B_2, \ldots$ značí Banachovy prostory.

## 3.1 Spojité lineární operátory

**Věta 3.1.** *Nechť $T : X \to Y$ je (sdruženě) lineární operátor, pak jsou následující výroky ekvivalentní:*
*(1) $T$ je ohraničený (viz 2.41).*
*(2) $\exists C > 0 : \|Tx\| \le C$ pro $\forall x \in X, \|x\| \le 1$ (tj. pro $x \in \overline{K(0,1)}$)*[1].
*(3) $\exists C > 0 : \|Tx\| \le C\|x\|$ pro $\forall x \in X$.*
*(4) $T$ je spojitý.*
*V takovém případě je $\mathcal{N}(T)$ uzavřený podprostor v $X$.*

*Důkaz.*
(1)⇒(2): $\overline{K(0,1)}$ ohr. $\Rightarrow T(\overline{K(0,1)})$ ohr. $\Rightarrow \exists C : \|Tx\| \le C$ pro $\forall x \in \overline{K(0,1)}$.
(2)⇒(1): $K(0,r)$ libovolná koule ($r > 0$), $x \in K(0,r) \Rightarrow \frac{x}{r} \in K(0,1) \Rightarrow$
$C \ge \|T(\frac{x}{r})\| = \frac{1}{r}\|Tx\| \Rightarrow \|Tx\| \le rC \Rightarrow T(K(0,r))$ je ohraničená.
(2) ⇔ (3): (2) a (3) platí pro $x = 0$. Buď $0 \ne x \in X$ libovolný:
⇐: Pokud $\|x\| \le 1$, pak $\|Tx\| \le C\|x\| \le C$.
⇒: $\frac{x}{\|x\|} = 1 \Rightarrow C \ge \|T\frac{x}{\|x\|}\| = \|\frac{1}{\|x\|}Tx\| = \frac{1}{\|x\|}\|Tx\| \Rightarrow \|Tx\| \le C\|x\|$.
(3)⇒(4): $x_n \to x \Rightarrow \|Tx - Tx_n\| = \|T(x - x_n)\| \le C\|x - x_n\| \to 0 \Rightarrow Tx_n \to Tx$.
(4)⇒(2): Sporem: pokud (2) neplatí, pak $\exists \{x_n\}, \|x_n\| \le 1 : \|Tx_n\| > n, \forall n \in \mathbb{N}$. Položme $\xi_n := \frac{x_n}{n}$, je $\|\xi_n\| \to 0$. Pak $\|T\xi_n\| \to 0$, přičemž $\|T\xi_n\| = \frac{1}{n}\|Tx_n\| > \frac{1}{n}n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, což je spor.
Uzavřenost $\mathcal{N}(T)$: $x_n \in \mathcal{N}(T), x_n \to x \Rightarrow 0 = Tx_n \to Tx \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{N}(T)$. □

**Věta 3.2.**
*$\mathcal{B}(X,Y) := \{T : X \to Y \,|\, T$ spojitý (ohr.) lineární operátor$\}$ je NL-prostor, jestliže definujeme pro $T, T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X,Y)$ a $c \in \mathbb{C}$:*
*(a) $(T_1 + T_2)(x) := T_1x + T_2x$; $(cT)(x) := cTx$ (po složkách)*
*(b) $\|T\| := \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup\limits_{0 \ne x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{C \,|\, C > 0 : \|Tx\| \le C\|x\| \;\forall x \in X\}$*[1].
*Zejména platí $\|Tx\| \le \|T\| \;\forall x \in X, \|x\| \le 1$ a $\|Tx\| \le \|T\|\|x\| \;\forall x \in X$.*
*Speciálně $X = \{0\} \Rightarrow T = 0 \Rightarrow \|T\| = 0$, neboť $\|Tx\| \le C\|x\|$ je triviálně splněno pro každé $C > 0$, takže infimum=0.*

*Důkaz.*
(a) Snadno se ověří (cvičení), že zavedením lineárních operací pro operátory po složkách se lineární struktura přenese z prvků na operátory, kde roli nulového operátoru hraje $T = 0 : Tx = 0 \;\forall x \in X$.
(b) Pro operátorovou normu $\|T\|$ není těžké ověřit platnost axiomů normy 1° až 3° z definice 2.47 (cvičení). □

[1] Stačí uvažovat pouze povrch jednotkové koule, tj. pouze $x : \|x\| = 1$, neboť pak pro $x, \|x\| < 1$ je $\|Tx\| < \frac{1}{\|x\|}\|Tx\| = \|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\|$ pro $x \ne 0$ a $\|Tx\| = 0$ pro $x = 0$.

*Poznámka* 3.3. Poznamenejme, že normu ad (b) lze definovat stejným způsobem i pro každý spojitý sdruženě lineární operátor z $X$ do $Y$, přičemž všechny takové operátory opět tvoří NL-prostor.

**Důsledek 3.4.** *Kromě běžných vlastností normy pro operátorovou normu navíc platí: Jestliže* $T_1 \in \mathcal{B}(X,Y)$ *a* $T_2 \in \mathcal{B}(Y,Z)$*, pak* $T_2T_1 \in \mathcal{B}(X,Z)$ *a platí*

$$\|T_2T_1\| \le \|T_2\|\|T_1\|. \tag{3.1}$$

*Důkaz.* $\|T_2T_1x\| \le \|T_2\|\|T_1x\| \le \|T_2\|\|T_1\|\|x\|\ \forall x \in X \Rightarrow \|T_2T_1\| \le \|T_2\|\|T_1\|$. □

**Věta 3.5** (**Věta o otevřeném zobrazení (OMT=Open Mapping Theorem)).**
*Je-li* $T \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ *surjektivní, pak* $T$ *je otevřené (viz 2.27).*

*Důkaz.* Viz `[Heil:Theorem 2.27 s.74]`. □

**Důsledek 3.6** (**Věta o inverzním zobrazení (IMT=Inverse Mapping Theorem)).** *Je-li* $T \in \mathcal{B}(B_1, B_2)$ *bijekce, pak* $T$ *je TLI.*

*Důkaz.*
Dle 3.5 je $T$ lineární, spojitá a otevřená bijekce a tedy TLI s uvážením 2.7 a 2.29. □

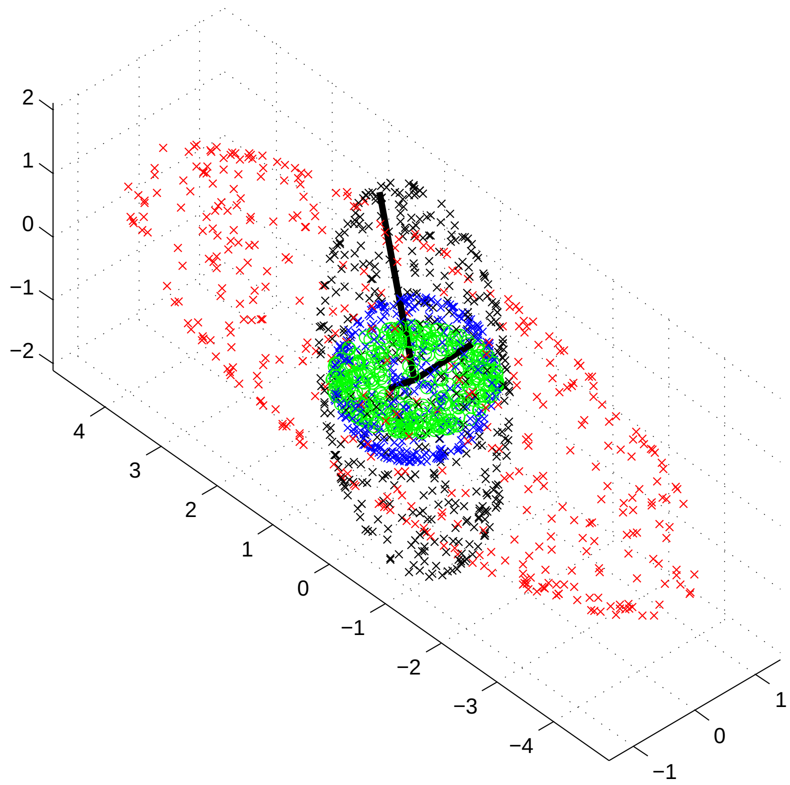
**Příklad 3.7.**

(1) Nechť $Y$ je NL-prostor, $B := \{b_k\}_{k\in K} \subseteq Y$ konečná (a tedy i ohraničená) množina. Pak každý „souřadnicový“ operátor $T_B : \ell^1(K) \to Y$, $T_B(\xi) := \sum_{k\in K} \xi_k b_k$ je ohraničený: $\|T_B\xi\| = \|\sum_{k\in K} \xi_k b_k\| \le \sum_{k\in K} |\xi_k|\|b_k\| \le C \sum_{k\in K} |\xi_k| = C\|\xi\|_1$, kde $C = \max_{k\in K}(\|b_k\|)$. Zřejmě dle 2.11 je $T_B$ lineární izomorfismus právě když $B$ je báze v $Y$. Pak je $T_B$ dokonce TLI dle IMT 3.6, protože konečně-rozměrné prostory jsou dle 2.54 úplné. Podle IMT je navíc identické zobrazení $I : \ell^1(K) \to \ell^p(K)$ také TLI pro každé $1 \le p \le \infty$, takže výše uvedené zůstává v platnosti i pro $T_B : \ell^p(K) \to Y$ při každém $1 \le p \le \infty$. Totiž dokonce dle přílohy B.2 jsou všechny normy konečně-rozměrného NL-prostoru navzájem topologicky ekvivalentní, tj. indukují stejnou (euklidovskou) topologii (a tedy i stejnou konvergenci, spojitost atd.). Bez újmy na obecnosti lze tedy například ztotožnit $\mathbb{C}^n = \ell^2(K)$, jestliže $|K| = n$.

(2) Položme v předchozím $Y = \mathbb{C}^m$ a místo $B$ pišme matici $\boldsymbol{B} := [\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n]$, pak lineární operátor $T_{\boldsymbol{B}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ přejde v maticový operátor $T_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}$ (maticové násobení skutečně realizuje $T_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{\xi}$ jako lineární kombinaci sloupců matice $\boldsymbol{B}$). Podle (1) je tedy každý maticový operátor spojitý. Přitom tento maticový operátor je TLI právě když je matice $\boldsymbol{B}$ regulární (sloupce v $\boldsymbol{B}$ tvoří bázi v $\mathbb{C}^m$). Je-li $\boldsymbol{B}$ pouze sloupcově plné hodnosti při $n < m$, tak $\boldsymbol{B}$ je pouze topologické lineárně izomorfní vnoření, neboli TLI $\mathbb{C}^n$ pouze na $\mathcal{R}(T_{\boldsymbol{B}}) \subset \mathbb{C}^m$.
Toto tvrzení lze užitím 2.13 zevšeobecnit:
**Každé lineární zobrazení mezi NL-prostory konečné dimenze je spojité**.
Jako jednoduché příklady uvádíme několik matic jakožto operátorů $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Tyto operátory aplikujeme na vektory na povrchu jednotkové koule. Operátory jsou pořadě matice

$$\boldsymbol{T}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}_1 = \begin{bmatrix} -0{,}9 & -0{,}6 & 0{,}9 \\ -0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}1 & 1{,}1 & 1{,}8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Výsledky vidíme na obr. 3.1.




**Obrázek 3.1**: Modrou barvou jsou vykresleny vektory na povrchu jednotkové koule. Červeně jsou příslušné vektory po aplikování matice $\boldsymbol{T}_0$. Černá barva znázorňuje vektory po aplikaci matice $\boldsymbol{T}_1$, úsečky zdůrazňují poloosy výsledného elipsoidu. Vektory obarvené zeleně jsou po aplikaci projekčního operátoru $\boldsymbol{T}_2$.

(3) **Operátory Fredholmova typu:** tyto operátory získáme přenesením situace ad (2) do prostoru nekonečné dimenze $\ell^p(J)$ (diskrétní případ pro $|J| \leq \aleph_0$) nebo $L^p(\mathcal{J})$ (spojitý případ[2]). V těchto prostorech jsou sice vzhledem k jejich úplnosti (viz 2.75) všechny $p$-normy opět ekvivalentní dle IMT, přesto platí na volbu $p$ jistá omezení, která zajišťují absolutní sumovatelnost, resp. integrovatelnost zde vystupujících členů. Jako i v jiných situacích důležitou roli opět hraje Hölderova nerovnost 2.79.

- Diskrétní případ: $T_B : \ell^p(J_1) \to \ell^q(J_2)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $B \in \ell^q(J_2 \times J_1)$ a pro

$$\eta := T_B(\xi) \text{ definujeme } \eta_i = \sum_{j \in J_1} b_{ij}\xi_j \text{ pro každé } i \in J_2.$$

- Spojitý případ: $T_B : L^p(\mathcal{J}_1) \to L^q(\mathcal{J}_2)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $B \in L^q(\mathcal{J}_2 \times \mathcal{J}_1)$ a pro

$$y := T_B(x) \text{ definujeme } y(t) = \int_{\mathcal{J}_1} B(t,u)x(u)\,du \text{ pro s.v. } t \in \mathcal{J}_2.$$

Takto zavedené operátory Fredholmova typu jsou spojité (viz přílohu B.3).

(4) **Konvoluční operátory:** představují speciální případ operátorů Fredholmova typu, kde jádro $B$ je určeno jistou posloupností, resp. funkcí $h$ nazývanou v teorii signálů *impulzní*

[2]Přesněji *kontinuální* nebo *integrální* případ.

*odezva*. Konvoluční operátory mají přímou fyzikální interpretaci a ve zpracování signálů vystupují v roli *lineární frekvenční filtrace*. Reprezentují lineární systémy nezávislé na posunutí v čase (LTI systém=Linear Time Invariant System). Rozlišujeme dva typy diskrétních a dva typy spojitých operátorů:

• cyklická konvoluce (periodický diskrétní případ): $T_{\boldsymbol{h}} : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \to \ell^2(\mathbb{Z}_N)$, $N \in \mathbb{N}$ je maticový operátor určený tzv. *cirkulantní maticí* $B = [b_{ij}]$, $b_{ij} = h_{(i-j) \bmod N}$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^N$ a pro

$$\boldsymbol{\eta} := T_{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{\xi}) \text{ definujeme } \eta_i = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} h_{(i-j) \bmod N}\, \xi_j \text{ pro každé } i = 0, \dots, N-1.$$

Tento operátor je spojitý dle (1).

• lineární konvoluce (neperiodický diskrétní případ): $T_h : \ell^p \to \ell^p$, $b_{ij} = h_{i-j}$, $h \in \ell^1$ a pro

$$\eta := T_h(\xi) \text{ definujeme } \eta_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{i-j}\xi_j \text{ pro každé } i \in \mathbb{Z}.$$

• periodická konvoluce (periodický spojitý případ):
$T_h : \widetilde{L}^p[0,T] \to \widetilde{L}^p[0,T]$, $B(t,u) = h(t-u)$, $h \in \widetilde{L}^1[0,T]$ a pro

$$y := T_h(x) \text{ definujeme } y(t) = \frac{1}{T}\int_0^T h(t-u)x(u)\,du \text{ pro každé } t \in [0,T].$$

• neperiodická konvoluce (neperiodický spojitý případ):
$T_h : L^p \to L^p$, $B(t,u) = h(t-u)$, $h \in L^1$ a pro

$$y := T_h(x) \text{ definujeme } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)x(u)\,du \text{ pro každé } t \in \mathbb{R}.$$

Takto zavedené konvoluční operátory jsou spojité (viz přílohu C.2).

**Věta 3.8** (Důkaz D.3 `[Tay:4.1-A s.160]`).
*$\mathcal{B}(X,B)$ je Banachův prostor.*

**Důsledek 3.9.** *$X' := \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$ je B-prostor spojitých (ohraničených) lineárních funkcionálů na $X$, tzv.* **duální prostor k** *$X$. Speciálně $|x'(x)| \le \|x'\|\|x\|$ pro $\forall x \in X, x' \in X'$.*

**Věta 3.10** (**Hahn-Banachova věta (HBV)** o spojitém lineárním rozšíření).
*$Y \subset X$ NL-podprostor v $X, y' \in Y' \Rightarrow \exists x' \in X' : x'(y) = y'(y)\ \forall y \in Y$ a $\|x'\|_{X'} = \|y'\|_{Y'}$.*

*Důkaz.* Viz `[Tay:4.3-A s.181 a 145][KoFo: s.205]` □

**Důsledek 3.11.**
*(1) $\|x\| = \sup_{\|x'\|=1} |x'(x)|$ pro každé $x \in X$.*
*(2) $x \mapsto x''$, kde $x''(x') := x'(x)$ definuje lineární izometrické vnoření $X$ do $X''$ (píšeme $X \mathrel{\widetilde{\subset}} X''$). Pokud $X \simeq X''$, tak prostor $X$ se nazývá* **reflexivní**.

*Důkaz.*
(1) a) $x = 0 \Rightarrow x'(x) = 0$ pro $\forall x' \in X' \Rightarrow \sup_{\|x'\|=1} |x'(0)| = 0 = \|0\|$.

b) $x \neq 0$ : položme v HBV 3.10 $Y := \mathcal{L}(\{x\}) = \{y \,|\, y = \alpha x; \alpha \in \mathbb{C}\}$ a $y'(y) := \alpha\|x\|$ pro $y = \alpha x$.

$y'$ je lineární: $y'(\alpha x+\beta x) = y'((\alpha+\beta)x) = (\alpha+\beta)\|x\| = \alpha\|x\|+\beta\|x\|$ a $y'(\beta(\alpha x)) = y'(\beta\alpha x) = \beta\alpha\|x\| = \beta(\alpha\|x\|)$.
$y'$ je i spojitý: $\|y'\|_{Y'} = \sup\limits_{\|\alpha x\|=1} |y'(\alpha x)| = \sup\limits_{|\alpha|\|x\|=1} |\alpha|\|x\| = 1$. Tedy $y'(x) \in Y'$ lze dle HBV 3.10 rozšířit na $x' \in X'$, přičemž $\|x'\| = 1$ a $|x'(x)| = |y'(x)| = \|x\|$ pro $\alpha = 1 \Rightarrow \sup\limits_{\|x'\|=1} |x'(x)| \geq \|x\|$.
Naopak pro každé $x' \in X'$, $\|x'\| = 1$, je $|x'(x)| \leq \|x'\|\|x\| = \|x\| \Rightarrow \sup\limits_{\|x'\|=1} |x'(x)| \leq \|x\|$.
Z posledních dvou nerovností plyne rovnost.

(2) $x \mapsto x''$ je zřejmě lineární vzhledem k větě 3.2 a
$\|x''\| = \sup\limits_{\|x'\|=1} |x''(x')| = \sup\limits_{\|x'\|=1} \|x'(x)\| \overset{(1)}{=} \|x\|\ \forall x \in X \Rightarrow x \mapsto x''$ je izometrie. □

**Věta 3.12** (**Rieszova věta o reprezentaci (RVR)**).
*Pro* $\forall y' \in \mathcal{B}(H,\mathbb{C})\, \exists!\, y_0 \in H : y'(x) = \langle x, y_0\rangle$ *pro* $x \in H$, *přičemž* $\|y'\| = \|y_0\|$.

*Důkaz.* Pro $y' = 0$ tvrzení platí, neboť $y_0 = 0$ je jediná možná volba: totiž pro $y_0 \neq 0$ by jinak bylo $y'(y_0) = \langle y_0, y_0\rangle = \|y_0\|^2 > 0$. Odtud plyne i jednoznačnost volby $y_0$ pro $y' \neq 0$, neboť jinak by jejich nenulový rozdíl určoval nulový funkcionál.
Pro $y_0 \neq 0$ ukážeme ještě spojitost funkcionálu $y'(\cdot) := \langle \cdot, y_0\rangle$ a rovnost norem $\|y'\| = \|y_0\|$:
$|y'(x)| = |\langle x, y_0\rangle| \overset{2.60/5^\circ}{\leq} \|y_0\|\|x\| \Rightarrow \|y'\| \leq \|y_0\|$. Naopak pro $x_0 = \frac{y_0}{\|y_0\|}$ je $\|x_0\| = 1$ a
$|y'(x_0)| = |\langle x_0, y_0\rangle| = |\langle \frac{y_0}{\|y_0\|}, y_0\rangle| = \frac{1}{\|y_0\|}|\langle y_0, y_0\rangle| = \frac{1}{\|y_0\|}\|y_0\|^2 = \|y_0\| \Rightarrow$
$\|y'\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |y'(x)| \geq \|y_0\|$. Celkem $\|y'\| = \|y_0\|$. Současně jsme ukázali, že $\langle \cdot, y_0\rangle \in H'$. Zbývá ověřit `[Tay:4.81-B,C s.233]`, že každé $y'(\cdot) \in H'$ je tvaru $\langle \cdot, y_0\rangle$, kde $y_0 \in H$. □

**Důsledek 3.13.**
$H \simeq H'$ *(H a H' jsou sdruženě lineárně izometrické)*
$H \simeq H''$ *(H a H" jsou lineárně izometrické).*
*Zejména každý* **Hilbertův prostor je reflexivní**.

*Důkaz.* $y \mapsto y'(\cdot) = \langle \cdot, y\rangle$ je dle RVR 3.12 bijekce zachovávající normu (izometrie), která je sdruženě lineární dle 2.58/2*.
$x \mapsto x''$ dle důsledku HBV 3.11, kde $x''(y') = y'(x) \overset{\text{RVR}}{=} \langle x, y\rangle$, tj. $x''(\cdot) = \langle x, \cdot\rangle$. Tedy $x \mapsto x''(\cdot) = \langle x, \cdot\rangle = \overline{\langle \cdot, x\rangle}$, což je složení dvou sdruženě lineárních bijekcí zachovávajících normu (izometrie) a tedy je lineární izometrií. □

**Věta 3.14** (**Banach-Steinhausova věta (BSV)**: Důkaz D.4).
*Nechť* $T_n \in \mathcal{B}(B,Y)$ *pro* $n = 1,2,\ldots$ *a* $\{T_n x\}$ *je ohraničená posloupnost v* $Y$ *pro každé* $x \in B$. *Pak* $\{\|T_n\|\}$ *je ohraničená.*

**Důsledek 3.15** (1. důsledek BSV[3]).
*Jestliže* $T_n \in \mathcal{B}(B,Y)$, $T_n x \to y := Tx, \forall x \in B$, *pak (dle BSV 3.14) je* $\{\|T_n\|\}$ *ohraničená a navíc* $T \in \mathcal{B}(B,Y)$. *(Bodová limita spojitých lineárních operátorů na Banachově prostoru definuje spojitý lineární operátor.)*

*Důkaz.* Linearita $T$ je zřejmá (limity přenášejí lineární operace).
$T_n x \to Tx, \forall x \in B \Rightarrow \|T_n x - Tx\| \to 0\, \forall x \in B \Rightarrow \{\|T_n x - Tx\|\}$ je ohraničená pro $\forall x \in B \Rightarrow$ $\|T_n x\| \leq \|T_n x - Tx\| + \|Tx\| \leq C(x) + \|Tx\| =: C'(x)\, \forall x \in B \Rightarrow \{\|T_n x\|\}$ je ohraničená $\overset{BSV}{\Rightarrow}$ $\{\|T_n\|\}$ ohraničená, tj. $\exists K : \|T_n\| \leq K \Rightarrow \|T_n x\| \leq K\|x\|\, \forall x \in B \Rightarrow \|Tx\| = \|\lim\limits_{n\to\infty} T_n x\| \overset{2.49}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq K\|x\|\, \forall x \in B \Rightarrow T$ je ohraničený. □

[3] Sám také někdy označován jako Banach-Steinhausova věta.

**Definice 3.16** **(Slabá kovergence).**
Jestliže $x'_n \in B' = \mathcal{B}(B, \mathbb{C})$ a $x'_n(x) \to x'(x)$ pro každé $x \in B$, pak $x' \in \mathcal{B}(B, \mathbb{C})$ dle důsledku BSV 3.15 a říkáme, že posloupnost spojitých lineárních funkcionálů $\{x'_n\}$ konverguje slabě k $x'$ (píšeme $x'_n \xrightarrow{sl.} x'$ v $B'$).
Jestliže $x_n \in X$ a $x'(x_n) \to x'(x)$ pro každé $x' \in X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$[4], pak říkáme, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje slabě k $x$ (píšeme $x_n \xrightarrow{sl.} x$ v $X$).

**Důsledek 3.17** (2. důsledek BSV)**.**
*(1)* $x'_n \xrightarrow{sl.} x'$ *v* $B' \Rightarrow$ *slabá limita* $x'$ *je jediná a* $\{\|x'_n\|\}$ *je ohraničená.*
*(2)* $x_n \xrightarrow{sl.} x$ *v* $X \Rightarrow$ *slabá limita* $x$ *je jediná a* $\{\|x_n\|\}$ *je ohraničená.*

*Důkaz.* Ohraničenost je přímým důsledkem BSV. Jednoznačnost slabé limity:
$x'_n \xrightarrow{sl.} x'$ a $x'_n \xrightarrow{sl.} y' \Rightarrow \forall\, x \in X\ x'_n(x) \to x'(x)$ a $x'_n(x) \to y'(x) \Rightarrow \forall\, x \in X$ je $x'(x) = y'(x)$, neboť každá číselná posloupnost má jedinou limitu $\Rightarrow x' = y'$.
$x_n \xrightarrow{sl.} x$ a $x_n \xrightarrow{sl.} y \Rightarrow \forall\, x' \in X'$ je $x'(x_n) \to x'(x)$ a $x'(x_n) \to x'(y)$ neboli $x''_n(x') \to x''(x')$ a $x''_n(x') \to y''(x')$ dle 3.11(2) $\overset{(1)}{\Rightarrow} x'' = y'' \Rightarrow x = y$, neboť $x \mapsto x''$ je prosté. □

**Věta 3.18** (Bez důkazu — srov. `[Heil:Theorem 2.39 s.82]`)**.**
$x_n \xrightarrow{sl.} x$ *v* $X \Rightarrow x \in \overline{\mathcal{L}(\{x_n\})}$*, neboli existuje posloupnost konečných lineárních kombinací* $\{\sum_{n=1}^{N_m} c_{m,n}x_n\}_m$ *konvergentní k* $x$ *(*$\|\sum_{n=1}^{N_m} c_{m,n}x_n - x\| \to 0$ *pro* $m \to \infty$*).*

**Věta 3.19.** $\ell^p(J)' \simeq \ell^q(J)$ *a* $L^p(\mathcal{J})' \simeq L^q(\mathcal{J})$ *pro* $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Přitom* $\simeq$ *je lineární izometrie a každý spojitý lineární funkcionál* $x' \in \ell^p(J)'$*, resp.* $x' \in L^p(\mathcal{J})'$ *lze právě jedním způsobem vyjádřit ve tvaru*

$$x'(x) = \sum_{j\in J} \xi_j\eta_j \ \textit{pro}\ x = \{\xi_j\}_{j\in J} \in \ell^p(J),\ \textit{kde}\ y = \{\eta_j\}_{j\in J} \in \ell^q(J),\ \textit{resp.}$$

$$x'(x) = \int_{\mathcal{J}} x(t)y(t)\,dt \ \textit{pro}\ x(t) \in L^p(\mathcal{J}),\ \textit{kde}\ y(t) \in L^q(\mathcal{J}).$$

*Důkaz.*
Případ $\ell^p(J)$: $x = \{\xi_j\}_{j\in J} \in \ell^p(J)$ vyjádříme v přirozené bázi $\mathcal{E} = \{\varepsilon\}_{j\in J}$, tj. $x = \sum_{j\in J} \xi_j\varepsilon_j$ v $\ell^p$-konvergenci $\Rightarrow$ pro každé $x' \in \ell^p(J)'$ platí $x'(x) = \sum_{j\in J} \xi_j x'(\varepsilon_j) =: \sum_{j\in J} \xi_j\eta_j$, kde $\eta_j := x'(\varepsilon_j)$.
Každý spojitý funkcionál $x'$ je tedy jednoznačně určen obrazy prvků báze $\mathcal{E}$, tj. posloupností $y := \{\eta_j\}_{j\in J}$. Zvolíme-li $y \in \ell^q(J)$, pak $|x'(x)| \le \sum_{j\in J} |\xi_j\eta_j| = \|xy\|_1 \le \|x\|_p\|y\|_q$ (Hölderova nerovnost), takže $x'$ jí určený je spojitý, tj. $x' \in \ell^p(J)'$.
Dá se ukázat i opak `[Tay:4.32-A s.188]`: každý $x' \in \ell^p(J)'$ je určen posloupností $y \in \ell^q(J)$, přičemž zobrazení $x' \mapsto \{x'(\varepsilon_j)\}_{j\in J}$ je lineární izometrie, tj. $\ell^p(J)' \simeq \ell^q(J)$.
Případ $L^p(\mathcal{J})$:
Analogicky platí `[Tay:cv.7 s.195]`, že $L^p(\mathcal{J})' \simeq L^q(\mathcal{J})$, kde $\sum_{j\in J} \xi_j\eta_j \rightsquigarrow \int_{\mathcal{J}} x(t)y(t)\,dt$. □

**Důsledek 3.20.** *Pro* $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *platí*

$$\|x\|_p = \sup_{\|y\|_q\le 1} |\langle x, y\rangle| = \sup_{\|y\|_q\le 1} \langle |x|, |y|\rangle, \tag{3.3}$$

[4]Neboli $x_n \xrightarrow{sl.} x$ v $X \subseteq X''$ dle důsledku HBV 3.11, přičemž $x' \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$, který je úplný dle 3.8, jak předpokládá BSV.

*kde v souladu s větou 3.19 značíme*[5]*:*
$\langle x, y\rangle := \sum_{j\in J} \xi_j \eta_j$ *pro* $x = \{\xi_j\}_{j\in J} \in \ell^p(J)$ *a* $y = \{\eta_j\}_{j\in J} \in \ell^q(J)$*, resp.*
$\langle x, y\rangle := \int_{\mathcal{J}} x(t)y(t)\,dt$ *pro* $x(t) \in L^p(\mathcal{J})$ *a* $y(t) \in L^q(\mathcal{J})$*.*
*Přitom v případě reálných prostorů identita* (3.3) *platí i s vynecháním absolutních hodnot.*

*Důkaz.* Podle 3.11 a 3.19 můžeme psát $\|x\|_p = \sup\limits_{\|y\|_q\le 1} |\langle x, y\rangle| \le \sup\limits_{\|y\|_q\le 1} \langle |x|, |y|\rangle = \||x|\|_p = \|x\|_p$ vzhledem k tomu, že $|x|$ a $|y|$ rovněž patří do příslušného prostoru a $\|x\|_p = \||x|\|_p$, $\|y\|_q = \||y|\|_q$. V případě reálných prostorů platí $\langle x, y\rangle \le |\langle x, y\rangle|$, takže absolutní hodnotu lze vynechat, neboť menší hodnoty neovlivní dosažené supremum. □

**Příklad 3.21.**
Nalezneme $\|\boldsymbol{x}\|_1$ pro $\boldsymbol{x} = [3, -2]^T$ pomocí 3.20. Duálním indexem k $p = 1$ je $q = \infty$. Tedy $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sup_{\|\boldsymbol{y}\|_\infty\le 1}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sup_{\|\boldsymbol{y}\|_\infty\le 1}(3\eta_1 - 2\eta_2)$. Snadno se určí, že optimálním vektorem je $\boldsymbol{y} = [1, -1]^T$, a $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 5$.

Pro libovolnou reálnou posloupnost $x \in \ell^1$ lze řešení vyjádřit ve tvaru $y = \{\operatorname{sgn} \xi_j\}_{j\in J}$ a podobně pro reálnou funkci $x(t) \in L^1$ je řešením $y(t) = \operatorname{sgn} x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Geometricky $y$ odpovídá volbě vrcholu $n$-dimenzionální krychle ($\infty$-koule dle obr. B.1), který je nejblíže k $x$.

Všimněme si, že optimální $y$ není obecně určeno jednoznačně. Je-li např. $\xi_j = 0$, lze zvolit libovolné $-1 \le \eta_j \le 1$.

**Věta 3.22.** *Jestliže* $x_n \to x$ *v NL-prostoru* $X$*, pak* $x_n \xrightarrow{sl.} x$*.*
*Jestliže* $\dim X =: k < \infty$*, pak* $x_n \xrightarrow{sl.} x \iff x_n \to x$*.*

*Důkaz.* $x_n \to x \Rightarrow x'(x_n) \to x'(x)$ pro $\forall x' \in X' \in \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$, neboť $x'$ je spojitý.
Jestliže $\dim X =: k < \infty$, ukážeme i opak. Bez újmy na obecnosti (viz 2.53) lze předpokládat $X = \ell^2(K)$, $K = \{1, 2, \dots, k\}$. Buď $e_1, \dots, e_k$ ONB v $X$. Pak pro $\forall x\, \exists! \xi_1, \dots, \xi_k : x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_k e_k$, přičemž $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} |\xi_i|^2$ (totiž $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle \sum\limits_i \xi_i e_i, \sum\limits_j \xi_j e_j\rangle = \sum\limits_{i,j} \xi_i \overline{\xi_j} \langle e_i, e_j\rangle \delta_{ij} = \sum\limits_i |\xi_i|^2$).
Definujme pro $i = 1, \dots, k$ lineární zobrazení $f_i : X \to \mathbb{C} : f_i(x) := \xi_i$. Je $x_n \to x, x_n = \xi_1^n e_1 + \dots + \xi_k^n e_k \Leftrightarrow \|x_n - x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i|^2 \to 0$ pro $n \to \infty \iff |f_i(x_n) - f_i(x)| = |\xi_i^n - \xi_i| \to 0$ pro $i = 1, \dots, k$ a $n \to \infty$ $(0 \le |\xi_i^n - \xi_i|^2 \le \sum\limits_i |\xi_i^n - \xi_i|^2) \iff f_i(x_n) \to f_i(x)\, \forall i = 1, \dots, k$ a $n \to \infty$.
Zejména tedy $f_i \in X'$ pro $i = 1, \dots, k$ a $x_n \xrightarrow{sl.} x \Rightarrow f_i(x_n) \to f_i(x)\, \forall i = 1, \dots, k \Rightarrow x_n \to x$. □

**Věta 3.23.**
*Nechť* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$*,* $X, Y$ *NL-prostory. Pak* $x_n \xrightarrow{sl.} x$ *v* $X \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{sl.} Tx$ *v* $Y$*.*

*Důkaz.* $\varphi \in Y'$ lib. $\Rightarrow \varphi T \in X' \Rightarrow \varphi(Tx_n) = (\varphi T)(x_n) \to (\varphi T)(x) = \varphi(Tx)$. Tedy $Tx_n \xrightarrow{sl.} Tx$. □

## 3.2 Adjungované operátory

**Definice 3.24** (obr. 3.2a))**.**
Nechť $X, Y$ jsou NL-prostory a $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Definujeme zobrazení $T' : Y' \to X'$ takto: $T'y' = x'$, kde $x' := y'T$, tj. $x'(x) := y'(Tx)\, \forall x \in X$. Zobrazení $T'$ nazýváme **operátorem adjungovaným k** $T$.

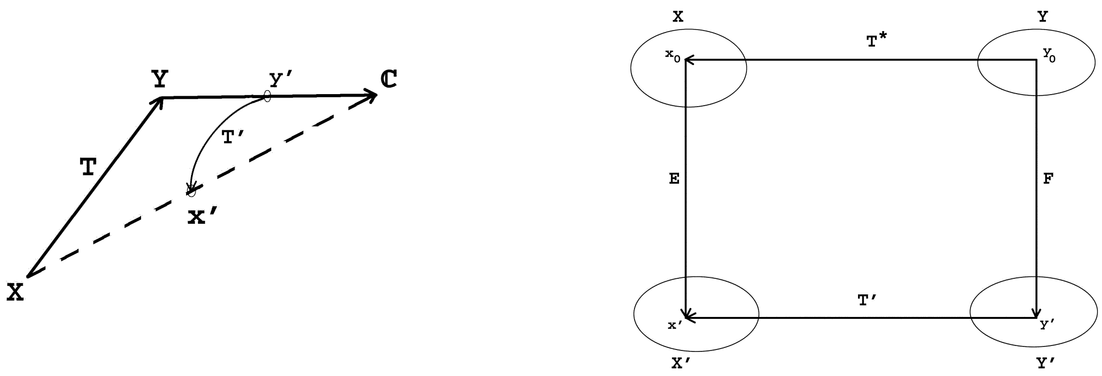
[5]Poznamenejme, že o skutečný skalární součin se jedná pouze v případě $p = q = 2$.

**Věta 3.25.** *$T'$ je spojitý lineární operátor, tj. $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$, a $\|T'\| = \|T\|$.*

*Důkaz.* Linearita je zřejmá.

I. $|x'(x)| = |y'(Tx)| \leq \|y'\| \, \|Tx\| \leq \|y'\| \, \|T\| \, \|x\| \Rightarrow \|T'y'\| = \|x'\| \leq \|T\| \, \|y'\| \Rightarrow T'$ je ohraničený a $\|T'\| \leq \|T\|$.

II. Dle důsledku 3.11(1): $\|y\| = \sup\limits_{\|y'\|=1} |y'(y)| \, \forall y \in Y \Rightarrow \|Tx\| = \sup\limits_{\|y'\|=1} |y'(Tx)| =$
$= \sup\limits_{\|y'\|=1} |(T'y')(x)| \leq \sup\limits_{\|y'\|=1} \|T'y'\| \, \|x\| = \|T'\| \, \|x\| \Rightarrow \|T\| \leq \|T'\|$. □




a) v NL-prostoru b) v H-prostoru

**Obrázek 3.2**: Konstrukce adjungovaného operátoru

**Definice 3.26** (obr. 3.2b)).
Jsou-li $X = H_1$, $Y = H_2$ Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, pak z RVR 3.12 dostáváme $y'(Tx) = \langle Tx, y_0 \rangle = x'(x) =: \langle x, T^* y_0 \rangle$, kde na základě RVR jediné $x_0$ reprezentující $x' = T'(y')$ jsme označili jako $T^* y_0$. Operátor $T^* : H_2 \to H_1$ je rovněž nazýván operátorem adjungovaným k $T$ (nerozlišujeme mezi $T^*$ a $T'$).
Označme $E, F$ sdruženě lineární izometrie pořadě $X$ na $X'$ a $Y$ na $Y'$ dle důsledku RVR 3.13. Pak jedno-jednoznačný vztah $T' \leftrightarrow T^*$ je dán předpisem $T^* = E^{-1} T' F$.

**Věta 3.27.** *$T^*$ je spojitý lineární operátor, tj. $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, a $\|T^*\| = \|T'\| = \|T\|$. Platí $T^{**} = T$.*

*Důkaz.*

I. Pro každé $y_0 \in H_2$: $\|T^* y_0\| = \|x_0\| \overset{\text{RVR}}{=} \|x'\| = \|T'y'\| \leq \|T'\| \, \|y'\| \overset{\text{RVR}}{=} \|T'\| \, \|y_0\| \Rightarrow$ $\|T^*\| \leq \|T'\|$ je ohraničený.

II. Pro každé $y' \in H_2'$: $\|T'y'\| = \|x'\| \overset{\text{RVR}}{=} \|x_0\| = \|T^* y_0\| \leq \|T^*\| \, \|y_0\| \overset{\text{RVR}}{=} \|T^*\| \, \|y'\| \Rightarrow$ $\|T'\| \leq \|T^*\|$.

III. Pro každé $x \in H_1$ a $y \in H_2$: $\langle y, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, y \rangle} = \overline{\langle x, T^* y \rangle} = \langle T^* y, x \rangle = \langle y, T^{**} x \rangle \Rightarrow$ $Tx = T^{**} x$ pro každé $x \in H_1$ (jednoznačnost dle RVR). □

**Věta 3.28.** $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2) \Rightarrow \|T^*T\| \overset{(1)}{=} \|T\|^2 = \|T^*\|^2 \overset{(2)}{=} \|TT^*\|$.

*Důkaz.* Stačí ukázat (1), (2) plyne záměnou $T$ za $T^*$ a užitím $T^{**} = T$.

I. $\|T^*T\| \overset{3.4}{\leq} \|T^*\| \, \|T\| \overset{3.27}{=} \|T\|^2 \overset{3.27}{=} \|T^*\|^2$.

II. $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = |\langle x, T^*Tx\rangle| \overset{2.60}{\leq} \|T^*Tx\| \, \|x\| \leq \|T^*T\| \, \|x\|^2 \Rightarrow$
$\|Tx\| \leq \sqrt{\|T^*T\|} \, \|x\| \Rightarrow \|T\| \leq \sqrt{\|T^*T\|} \Rightarrow \|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. □

**Věta 3.29.**
$I'_X = I_{X'}$ *(identický operátor),* $T_1 \in \mathcal{B}(X_1, X_2), T_2 \in \mathcal{B}(X_2, X_3) \Rightarrow (T_2T_1)' = T'_1T'_2$,
$I^*_H = I_H$ *(identický operátor),* $T_1 \in \mathcal{B}(H_1, H_2), T_2 \in \mathcal{B}(H_2, H_3) \Rightarrow (T_2T_1)^* = T^*_1T^*_2$.

*Důkaz.* Pro $I_X$, resp. $I_H$ je tvrzení zřejmé. Pro složení operátorů dostáváme:
$[(T_2T_1)'x'_3](x) = x'_3(T_2T_1x) = [T'_2x'_3](T_1x) = [T'_1(T'_2x'_3)](x)$. □

**Příklad 3.30.** S uvážením příkladu 3.7(1)(2) lze položit $H_1 = \mathbb{C}^n$ a $H_2 = \mathbb{C}^m$, takže pak $\boldsymbol{T} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ (spojitý maticový operátor) $\Rightarrow \langle \boldsymbol{Tx}, \boldsymbol{y}_0\rangle \overset{2.59}{=} \boldsymbol{y}^*_0\boldsymbol{Tx} = (\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{y}_0)^*\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{y}_0\rangle$, kde $\boldsymbol{T}^* = [\bar{t}_{ji}]$ je matice hermitovsky transponovaná k $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]$.

**Věta 3.31.**
$T : X \to Y$ *je TLI NL-prostorů* $\Rightarrow T' : Y' \to X'$ *je TLI a platí* $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

*Důkaz.* $I_{X'} \overset{3.29}{=} I'_X = (T^{-1}T)' \overset{3.29}{=} T'(T^{-1})', I_{Y'} \overset{3.29}{=} I'_Y = (TT^{-1})' \overset{3.29}{=} (T^{-1})'T' \Rightarrow T'$ je bijekce a $(T')^{-1} = (T^{-1})'$ je rovněž spojitý dle 3.25 neboť $T^{-1}$ je spojitý. □

**Důsledek 3.32.**
$T : H_1 \to H_2$ *je TLI H-prostorů* $\Rightarrow T^* : H_2 \to H_1$ *je TLI a platí* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

## 3.3 Samoadjungované operátory

**Definice 3.33.** Operátor $T \in \mathcal{B}(H, H)$ se nazývá **samoadjungovaný**, jestliže $T^* = T$.

**Věta 3.34.**
*Pro lineární operátor* $T : X \to X$ *(VS-prostory nad* $\mathbb{C}$[6]*) a každé* $x, y \in X$ *platí:*

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\left[\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\right]_1 + i\left[\langle T(x+i\,y), x+i\,y\rangle - \langle T(x-i\,y), x-i\,y\rangle\right]_2\Big\},$$

*kde pro výrazy # v hranatých závorkách platí vztahy*

$$[\#]_1 = 2\big(\langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle\big), \ [\#]_2 = 2i\,\big(\langle Ty, x\rangle - \langle Tx, y\rangle\big). \tag{3.4}$$

*Důkaz (cvičení).*
Nejprve ověříme platnost vztahů pro $[\#]_1$ a $[\#]_2$ a pak jejich dosazením na pravé straně vyjde $\langle Tx, y\rangle$ na levé straně. □

**Důsledek 3.35 (Polarizační identity).**
*Pro lineární operátor* $T : X \to X$ *(VS-prostory) a každé* $x, y \in X$ *platí:*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\left[\|x+i\,y\|^2 - \|x-i\,y\|^2\right]\Big\} \tag{3.5a}$$

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\|Tx+y\|^2 - \|Tx-y\|^2 + i\left[\|Tx+i\,y\|^2 - \|Tx-i\,y\|^2\right]\Big\} \tag{3.5b}$$

*V reálném prostoru platí tytéž vztahy bez imaginární části.*

[6] V reálném prostoru $H$ platí věta 3.34 bez imaginární části jen když $T = T^*$.

*Důkaz.*
(3.5a) je speciálním případem věty 3.34 pro $T = I$. Jelikož $I \overset{3.29}{=} I^*$, tak v reálném případě bez imaginární části, která v (3.4) vypadne podle 3.36(5).
(3.5b) plyne z (3.5a) po záměně $x$ za $Tx$. □

**Věta 3.36.** *Nechť $T \in \mathcal{B}(H,H)$ nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

*(1) $T = T^*$ ($T$ je samoadjungovaný)*
*(2) $\langle Tx, y\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle}$ pro každé $x, y \in H$*
*(„bilineární forma“ $\langle Tx, y\rangle$ je (hermitovsky) symetrická)*

$$\left.\begin{array}{l}\text{(3) } \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \text{ pro každé } x \in H \\ \quad\text{(„kvadratická forma“ } \langle Tx, x\rangle \text{ je reálnou funkcí)} \\ \text{(4) } [\#]_1, [\#]_2 \in \mathbb{R} \text{ pro každé } x, y \in H\end{array}\right\} \text{jen pro } H \text{ nad } \mathbb{C}$$

$$\text{(5) } \langle Tx, y\rangle = \tfrac{1}{4}[\#]_1 \overset{(3.4)}{=} \tfrac{1}{2}(\langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle) \text{ pro každé } x, y \in H \quad \Big\}^{6} \text{ jen pro } H \text{ nad } \mathbb{R}$$

*Důkaz.*
(1) ⇔ (2): $T = T^* \;\Leftrightarrow\; \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle}$ pro každé $x, y \in H$.
(2) ⇒ (3): $\langle Tx, y\rangle \overset{(2)}{=} \overline{\langle Ty, x\rangle}\, \forall x, y \in H \overset{x=y}{\Rightarrow} \langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}\, \forall x \in H$.
(2) ⇒ (5) nad $\mathbb{R}$: $\langle Tx, y\rangle \overset{(2)}{=} \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle Ty, x\rangle \overset{(3.4)}{\Rightarrow} [\#]_1 = 4\langle Tx, y\rangle$.
(5) ⇒ (2) nad $\mathbb{R}$: $\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{2}(\langle Ty, x\rangle + \langle Tx, y\rangle) \Rightarrow \langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle \Rightarrow$ (2).
(3) ⇒ (4) nad $\mathbb{C}$: $\langle T(x \pm y), x \pm y\rangle, \langle T(x \pm i\,y), x \pm i\,y\rangle \in \mathbb{R} \overset{3.34}{\Rightarrow} [\#]_1, [\#]_2 \in \mathbb{R}$.
(4) ⇒ (2) nad $\mathbb{C}$: $\left.\begin{array}{l}[\#]_1 \in \mathbb{R} \\ [\#]_2 \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \overset{3.34}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l}Im\,\langle Ty, x\rangle = -Im\,\langle Tx, y\rangle \\ Re\,\langle Ty, x\rangle = \phantom{-}Re\,\langle Tx, y\rangle\end{array}\right\} \Rightarrow \langle Tx, y\rangle = \overline{\langle Ty, x\rangle}$. □

**Věta 3.37.** *Nechť $T \in \mathcal{B}(H,H)$. Pak*
*(1) pro $H$ nad $\mathbb{C}$ platí: $\langle Tx, x\rangle = 0\ \forall x \in H \Rightarrow T = 0$.*
*(2) pro $H$ nad $\mathbb{R}$ a $T = T^*$ platí: $\langle Tx, x\rangle = 0\ \forall x \in H \Rightarrow T = 0$.*

*Důkaz.* $\langle Tx, x\rangle = 0\, \forall x \in H \overset{(3.4)}{\Rightarrow} [\#]_1 = [\#]_2 = 0\, \forall x, y \in H \Rightarrow \langle Tx, y\rangle = 0\, \forall x, y \in H$ dle 3.34 pro $H$ nad $\mathbb{C}$, resp. dle 3.36(5) pro $H$ nad $\mathbb{R}$. Odtud dostáváme pro $y = Tx$: $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = 0\, \forall x \in H \overset{2.47/3°}{\Rightarrow} Tx = 0\, \forall x \in H \Rightarrow T = 0$. □

**Definice 3.38.** Lineární operátor $T : H \to H$ se nazývá **omezený**[7] **zdola (shora)**, jestliže existuje $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \le \langle Tx, x\rangle$ ($\beta \in \mathbb{R}$: $\langle Tx, x\rangle \le \beta$) pro každé $x \in H$, $\|x\| = 1$. Píšeme $\alpha \le T$ ($T \le \beta$), případně $\alpha < T$ ($T < \beta$), pokud $\alpha < \langle Tx, x\rangle$ ($\langle Tx, x\rangle < \beta$) pro každé $x \in H$, $\|x\| = 1$. Říkáme, že $T$ je **omezený**, pokud je omezený zdola i shora: píšeme $\alpha \le T \le \beta$ (případně s některou z nerovností ostrou).

**Lemma 3.39.**
*Operátor je omezený zdola, resp. zhora právě když existuje $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha\|x\|^2 \le \langle Tx, x\rangle$, resp. existuje $\beta \in \mathbb{R}$: $\langle Tx, x\rangle \le \beta\|x\|^2$, pro každé $x \in H$.*

*Důkaz.* Pro $x = 0$ jsou nerovnosti splněny vždy. Pro všechna $x \neq 0$, pak $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$ dává všechny prvky na povrchu jednotkové koule a $\langle T(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|}\rangle = \langle \frac{1}{\|x\|}Tx, \frac{1}{\|x\|}x\rangle = \frac{1}{\|x\|^2}\langle Tx, x\rangle$. Pak $\alpha \le \langle T(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|}\rangle = \frac{1}{\|x\|^2}\langle Tx, x\rangle$, resp. $\frac{1}{\|x\|^2}\langle Tx, x\rangle = \langle T(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|}\rangle \le \beta$ právě když $\alpha\|x\|^2 \le \langle Tx, x\rangle$, resp. $\langle Tx, x\rangle \le \beta\|x\|^2$, pro každé $x \in H$. □

<u>*Poznámka*</u> 3.40.

[7]Nezaměňovat s pojmem ohraničenosti operátoru.

(1) $H = \{0\} \overset{3.39}{\Rightarrow} \alpha \le T \le \beta$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(2) Pokud $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $H$ nad $\mathbb{C}$, pak $\alpha \le T$, resp. $T \le \beta \Rightarrow$
$\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}\, \forall x \in H \overset{3.36(3)}{\Rightarrow} T = T^*$. Následující věta 3.43 ukazuje, že platí i opak.

**Definice 3.41.**
Pro každý zdola, resp. shora omezený operátor $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $H \ne \{0\}$, značí

$$\alpha_T := \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle = \inf_{0\ne x\in H} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2}, \text{ resp. } \beta_T := \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle = \sup_{0\ne x\in H} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2},$$

**nejlepší dolní, resp. horní mez** operátoru $T$.
Pro $T = 0$ na $H \ne \{0\}$ je zřejmě $\alpha_T = \beta_T = 0$. Pokud $H = \{0\}$, pak na $H$ existuje pouze operátor $T = 0$, takže opět klademe $\alpha_T = \beta_T = 0$ i v souladu s poznámkou 3.40(1).

**Příklad 3.42.**
Podle příkladu 3.30 položíme $H = \mathbb{C}^n$, kdy $\boldsymbol{T} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ je spojitý operátor určený čtvercovou maticí $\boldsymbol{T} = [t_{ij}]$. Tento operátor je samoadjungovaný právě když $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^*$, tj. právě když $\boldsymbol{T}$ je **(hermitovsky) symetrická matice**: $t_{ij} = \bar{t}_{ji}$ (zejména $t_{ii} \in \mathbb{R}$). V dalším se omezíme na komplexní případ. V reálném případě stačí prostor $\mathbb{C}^n$ nahradit prostorem $\mathbb{R}^n$.

Ze základního kurzu lineární algebry `[ZM1:kap. 6]` je známo, že takovou matici lze diagonalizovat přechodem k jiné ONB (rotace spolu s překlápěním souřadných os stávajícího souřadného systému). Tuto novou ONB tvoří právě **vlastní vektory** $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ matice $\boldsymbol{T}$, tj. vektory, pro něž platí $\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j$, kde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, n)$ jsou **vlastní čísla** matice $\boldsymbol{T}$, kdy operátor $\boldsymbol{T}$ vlastní vektory transformuje v poměru čísel $\lambda_j$. Položíme-li $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n]$, pak tato matice je **ortogonální (unitární nad** $\mathbb{C}$ — podrobněji viz dále odst. 3.5), takže platí $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$, neboť na $i, j$-té pozici tohoto součinu je $\langle \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_i\rangle = \delta_{ij}$. Vztahy $\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j$ pro $j = 1, \ldots, n$ lze ekvivalentně vyjádřit maticovou rovnicí $\boldsymbol{T}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}$, kde $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ je diagonální matice s vlastními čísly na diagonále. Odtud ihned dostáváme diagonalizaci matice $\boldsymbol{T}$ ve tvaru $\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}$. Přejdeme-li k souřadnému systému tvořenému sloupci matice $\boldsymbol{U}$, pak pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ platí transformační vztahy $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}$ a $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\eta}$ ($\boldsymbol{\xi}$ a $\boldsymbol{\eta}$ jsou po řadě souřadnice $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ v ONB $\boldsymbol{U}$). Pak $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}$ a tedy $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\xi}$, neboli $\eta_j = \lambda_j \xi_j$. Operátor $\boldsymbol{T}$ je tedy v ONB tvořené vlastními vektory určen diagonální maticí $\boldsymbol{D}$. Pak pro vyjádření kvadratické formy v nových souřadnicích dostáváme:

$$\langle \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \overset{3.30}{=} \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi})^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{\xi} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j \bar{\xi}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\xi_j|^2. \tag{3.6}$$

Dáme-li v levé části místo $\boldsymbol{T}$ jednotkovou matici $\boldsymbol{I}$ ihned dostáváme $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\xi} = \|\boldsymbol{\xi}\|^2$, neboli izometrii jako typickou vlastnost unitárních transformací. Vektory tedy leží na povrchu jednotkové koule $\Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}\| = 1 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{\xi}\| = 1$. Za této podmínky pro $\langle \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{|\lambda_j|^2|\xi_j|^2}{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|\eta_j|^2}{\lambda_j}$ platí $\sum_{j=1}^{n} \frac{|\eta_j|^2}{\lambda_j^2} = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = 1$, takže **geometrickým obrazem jednotkové koule v operátoru $\boldsymbol{T}$ na reálném prostoru** $H = \mathbb{R}^n$ **je $n$-rozměrný elipsoid s hlavními osami ve směru vlastních vektorů a pološířkami** $|\lambda_j|$. Popsané charakterizace jsou vidět na obrázku 3.1.
Uspořádejme vlastní vektory sestupně podle hodnoty vlastních čísel: $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots, \ge \lambda_n$. Pak

$$\lambda_n \|\boldsymbol{x}\|^2 = \lambda_n \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \le \langle \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \overset{(3.6)}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\xi_j|^2 \le \lambda_1 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = \lambda_1 \|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{3.7a}$$

Odtud při $\|x\| = 1$ dostáváme vyjádření nejlepších mezí pomocí vlastních čísel:

$$\beta_{\boldsymbol{T}} = \lambda_1 = \max_{j=1,\dots,n} \lambda_j \text{ a } \alpha_{\boldsymbol{T}} = \lambda_n = \min_{j=1,\dots,n} \lambda_j, \tag{3.7b}$$

neboť těchto mezí je dosaženo po řadě s vektory $\boldsymbol{\xi}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ a $\boldsymbol{\xi}_n = [0, \dots, 0, 1]^T$.

**Věta 3.43** (Důkaz D.5)**.**
*Pokud $T \in \mathcal{B}(H, H)$ a $T = T^*$, pak $T$ je omezený a platí*

$$\|T\| = \max(|\alpha_T|, |\beta_T|) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{|\langle Tx, x\rangle|}{\|x\|^2} \quad \textit{(pro } H \neq \{0\}\textit{)}. \tag{3.8}$$

**Důsledek 3.44.** *Pokud $T \in \mathcal{B}(H, H)$, $\dim H = n$ a $T = T^*$, pak $T$ je omezený a platí $\|T\| = \max\limits_{j=1,\dots,n} |\lambda_j|$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou reálná vlastní čísla matice $[T]$ (viz 2.13), která je (hermitovsky) symetrická.*

*Důkaz.* Označme $\boldsymbol{T} := [T]$. Ověříme nejprve, že $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^*$ a $\|T\| = \|\boldsymbol{T}\|$:
V důkazu věty 2.13 je $m = n$ a tedy při volbě ONB v $H$ jsou souřadnicové izomorfismy shodnými izometriemi $V = U : \mathbb{C}^n \to H$, takže $\boldsymbol{T} = U^{-1}TU$ a pro $U\boldsymbol{x} =: x$ je $\|\boldsymbol{x}\| = \|U\boldsymbol{x}\| = \|x\|$ pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$. Dle polarizační identity (3.5a) zachovává izometrie i skalární součin (viz odst. 3.5). Pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ pak dostáváme:
$\langle \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle U^{-1}TU\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle UU^{-1}TU\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}\rangle = \langle Tx, y\rangle$. Odtud dle 3.36(2) plyne
$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^* \;\Leftrightarrow\; T = T^*$ a $\|\boldsymbol{T}\| \overset{3.43}{=} \sup\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} |\langle \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \overset{3.43}{=} \|T\|$.

Pak při sestupném uspořádání vlastních čísel $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots, \geq \lambda_n$ dostáváme
$\max(|\alpha_T|, |\beta_T|) \overset{(3.8)}{=} \|T\| = \|\boldsymbol{T}\| \overset{(3.8)}{=} \max(|\alpha_{\boldsymbol{T}}|, |\beta_{\boldsymbol{T}}|) \overset{(3.7b)}{=} \max(|\lambda_1|, |\lambda_n|) = \max\limits_{j=1,\dots,n} |\lambda_j|$.
Tvrzení platí i pro $H$ nad $\mathbb{R}$, jestliže souřadnicové izomorfismy konstruujeme mezi $H$ a $\mathbb{R}^n$. V tomto případě je vzhledem k 3.36(5) imaginární část polarizační identity nulová, což ale platí jen při $T = T^*$ (viz poznámku pod čarou). $\square$

**Definice 3.45.** Lineární operátor $T \in \mathcal{B}(H, H)$ se nazývá **pozitivní (kladný)**, jestliže $0 \leq T$, tj. když $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$. Pokud $0 < T$, říkáme, že $T$ je **striktně pozitivní**, tj. $\langle Tx, x\rangle > 0$ pro každé $0 \neq x \in H$. Pro $T, U \in \mathcal{B}(H, H)$, píšeme $T \geq U$, resp. $T > U$, jestliže $T - U \geq 0$, resp. $T - U > 0$. Zejména $T \geq 0$ pro $T = 0$.
Lineární operátor $T \in \mathcal{B}(H, H)$ se nazývá **negativní (záporný)**, resp. **striktně negativní**, jestliže $-T$ je pozitivní, resp. striktně pozitivní.

**Věta 3.46.** *Nechť $T \in \mathcal{B}(H, H)$, $H$ nad $\mathbb{C}$. Pak $T \geq 0 \overset{3.40(2)}{\Rightarrow} T = T^*$.*

**Věta 3.47.** *Nechť $T, U, V, W \in \mathcal{B}(H, H)$. Pak platí:*
*(1) $T \geq U, V \geq W \Rightarrow T + V \geq U + W$*
*(2) $T \geq T$ (reflexivita)*
*(3) $T \geq U, U \geq V \Rightarrow T \geq V$ (tranzitivita)*
*(4) Pro $U, T$ samoadjungované platí $T \geq U, T \leq U \Rightarrow U = T$ (antisymetrie).*
*(5) $T \geq U$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha T \geq \alpha U$ pro $\alpha \geq 0$ a $\alpha T \leq \alpha U$ pro $\alpha \leq 0$.*
*(6) $T \geq 0$ ($T > 0$) TLI na $\mathcal{R}(T) \Rightarrow \mathcal{R}(T)$ je H-prostor, na němž $T^{-1} \geq 0$ ($T^{-1} > 0$).*

*Důkaz.*
(1) $T \geq U, V \geq W \Rightarrow T_1 := T - U \geq 0, T_2 := V - W \geq 0 \Rightarrow \langle (T_1 + T_2)x, x\rangle = \langle T_1x, x\rangle + \langle T_2x, x\rangle \geq 0 \,\forall x \in H \Rightarrow T - U + V - W \geq 0 \Rightarrow T + V \geq U + W$.
(2) $T - T$ je nulový operátor, takže dle definice 3.45 je $T - T \geq 0$ a tedy $T \geq T$.

(3) $T - U \geq 0$ a $U - V \geq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} T - V = (T - U) + (U - V) \geq 0 \Rightarrow T \geq V$.
(4) Pro každé $x \in H$:
$T - U \geq 0 \Rightarrow \langle (T-U)x, x\rangle \geq 0$ a $U - T \geq 0 \Rightarrow \langle (U-T)x, x\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle (T-U)x, x\rangle = \langle -(U-T)x, x\rangle = -\langle (U-T)x, x\rangle \leq 0$. Celkem $\langle (T-U)x, x\rangle = 0\, \forall x \in H$, takže $T = U$, neboť $T - U = 0$ podle 3.37 s uvážením tvrzení 3.46.
(5) Pro každé $x \in H$: $U - T \geq 0 \Rightarrow \langle (U-T)x, x\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle (\alpha T - \alpha U)x, x\rangle = \alpha\langle (T-U)x, x\rangle \geq 0$ pro $\alpha \geq 0$ a $\alpha\langle (T-U)x, x\rangle \leq 0$ pro $\alpha \leq 0$.
(6) TLI zřejmě zachovává úplnost (viz též 4.5 a 2.38), takže $\mathcal{R}(T)$ je rovněž H-prostor. Přitom pro každé $y \in \mathcal{R}(T)$, kde $y = Tx$ platí: $\langle T^{-1}y, y\rangle = \langle T^{-1}Tx, Tx\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle Tx, x\rangle \geq 0$. Jelikož $y \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$, tak pokud $\langle Tx, x\rangle > 0$ pro $x \neq 0$, je také $\langle T^{-1}y, y\rangle > 0$.

□

**Důsledek 3.48.**
*Relace $\geq$ je relací částečného uspořádání samoadjungovaných spojitých operátorů v prostoru $\mathcal{B}(H, H)$.*

**Věta 3.49.**
*Jestliže $T \in \mathcal{B}(H,H), T = T^*, T \geq 0$, pak $T \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \|T\| \leq \beta$. Zejména tak $\beta_T = \|T\|$.*

*Důkaz.* $T \in \mathcal{B}(H,H), T = T^* \overset{3.43}{\Rightarrow} \|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \overset{T\geq 0}{=} \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$. Pak

$$T \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \langle Tx, x\rangle \leq \beta\, \forall x \in H, \|x\| = 1 \;\Leftrightarrow\; \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \|T\| \leq \beta.$$

□

**Věta 3.50.** *Pro $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ jsou $T^*T$ a $TT^*$ samoadjungované pozitivní operátory a platí:*

$$0 \leq T^*T, TT^* \leq \|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \beta_{T^*T} = \beta_{TT^*}.$$

*Důkaz.*
Pro každé $y \in H_2, \|y\| = 1$ je $0 \leq \|T^*y\|^2 = \langle T^*y, T^*y\rangle \overset{3.26}{=} \langle TT^*y, y\rangle \Rightarrow TT^* \geq 0$.
Pro každé $x \in H_1, \|x\| = 1$ je $\langle T^*Tx, x\rangle \overset{3.26}{=} \langle Tx, T^{**}x\rangle \overset{3.27}{=} \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0 \Rightarrow T^*T \geq 0$.
Podle 3.27 a 3.29 je $(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$ a $(TT^*)^* = T^{**}T^* = TT^*$.
Užitím 3.49 na tyto operátory dostáváme
$\beta_{T^*T} = \|T^*T\| \overset{3.28}{=} \|TT^*\| = \beta_{TT^*}$, kde $\|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \|T^*T\|$. □

**Věta 3.51.**
*Nechť $T \in \mathcal{B}(H,H)$. Pak $\alpha \leq T \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \leq T^* \leq \beta$. Zejména tak $\alpha_T = \alpha_{T^*}$ a $\beta_T = \beta_{T^*}$.*

*Důkaz.* Pro každé $x \in H, \|x\| = 1$ je $\langle Tx, x\rangle \overset{3.26}{=} \langle x, T^*x\rangle$ a platí:
$\alpha \leq T \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \leq \langle Tx, x\rangle \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \leq \langle x, T^*x\rangle \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \leq \overline{\langle T^*x, x\rangle} \leq \beta \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \alpha \leq T^* \leq \beta$, neboť $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle \in \mathbb{R}$, takže $\langle x, T^*x\rangle = \overline{\langle x, T^*x\rangle} = \langle T^*x, x\rangle$. □

**Věta 3.52** (`[Heil:Thm.2.18 s.67]`).
*Jestliže $T \in \mathcal{B}(H,H)$ a $T \geq 0$, pak existuje jediné $V \in \mathcal{B}(H,H)$, $V \geq 0$ takové, že $V^2 = T$ (píšeme $V = \sqrt{T}$). Pokud $T = T^*$, pak také $V = V^*$. Operátor $V$ při skládání komutuje s $T$ i s každým jiným operátorem, který komutuje s $T$.*

*Poznámka* 3.53.

(1) Jestliže $T \geq 0$ a $T = T^*$, což dle 3.46 vždy platí v komplexním prostoru $H$, pak je $V = V^*$ a tedy lze v tomto případě každý kladný operátor $T$ psát ve tvaru $T = V^*V = VV^*$ jako ve 3.50. Speciálně pak dle 3.28 platí $\|T\| = \|\sqrt{T}\|^2$, neboli $\|\sqrt{T}\| = \sqrt{\|T\|}$.

(2) Omezme se nyní na $T = T^*$, $T \geq 0$ v prostoru $H$ konečné dimenze. Z 3.44 a jejího důkazu vyplývá, že pro $\boldsymbol{T} := [T]$ je $\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{T} \geq 0$ (kvadratické formy určené operátorem $T$ a maticí $\boldsymbol{T}$ nabývají stejných hodnot). Ze základního kurzu lineární algebry `[ZM1:kap. 6]` je známo, že v příkladu 3.42 platí $\lambda_j \geq 0$ pro pro všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{T}$. Podobně $T > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{T} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_j > 0$ pro všechna $j$. Neboli pro samoadjungované maticové operátory splývají pojmy:
<u>pozitivní maticový operátor $\boldsymbol{T}$ = pozitivně semidefinitní matice $\boldsymbol{T}$</u> a podobně
<u>striktně pozitivní maticový operátor $\boldsymbol{T}$ = pozitivně definitní matice $\boldsymbol{T}$</u>.
Pro $\boldsymbol{T} \geq 0$ je konstrukce matice $\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{T}}$ snadná, když vyjdeme z diagonalizce v příkladu 3.42:

$$\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{D} \Rightarrow \boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}\sqrt{\boldsymbol{D}}\sqrt{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{U}\sqrt{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}\sqrt{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{V}\boldsymbol{V},$$

jestliže položíme $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}\sqrt{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{U}^*$, kde $\sqrt{\boldsymbol{D}} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$.

(3) Tvrzení věty 3.46 neplatí obecně pro reálný prostor $H$ nad $\mathbb{R}$. Jako protipříklad můžeme uvést pozitivní maticový operátor $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určený nesymetrickou maticí $\boldsymbol{T} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Vskutku, pro libovolné $\boldsymbol{x} =: [x_1, x_2]^T$ je $\boldsymbol{T} \geq 0$, neboť

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \\ = x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Odtud ihned pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ dostáváme $\langle \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = x_1^2 + x_2^2 = \langle \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle$, neboli $\langle(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$, kde $\boldsymbol{T} - \boldsymbol{I} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \neq \boldsymbol{0}$. Nalezli jsme tak příklad nenulového maticového operátoru, kde jím určená kvadratická forma je nulová. To potvrzuje, že tvrzení 3.37(1) skutečně obecně pro reálný prostor neplatí bez dodatečného předpokladu samoadjungovanosti, stejně tak neplatí 3.47(4) ani 3.48.
Spočtěme ještě vlastní čísla výše uvedené matice $\boldsymbol{T}$: charakteristický polynom je roven $\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}) = (\lambda - 1)^2 + 1 > 0$ a ten nemá reálné kořeny, takže všechna vlastní čísla jsou komplexní. Pak bez dodatečného předpokladu samoadjungovanosti jako ve (2) nemůžeme ani tvrdit, že matice $\boldsymbol{T} \geq 0$ má nezáporná vlastní čísla. Protože $\boldsymbol{T}$ nemá reálná vlastní čísla, nemůže ani být diagonalizovatelná nad $\mathbb{R}$, přestože nad $\mathbb{C}$ je dokonce unitárně diagonalizovatelná (cvičení).

**Věta 3.54 (Věta o ortogonální projekci v H-prostorech[8]).**
*Nechť $H_1 \subseteq H$ je uzavřený lineární podprostor (tj. H-podprostor dle 2.38(2)). Pak*

*(i) Pro každé $x \in H$ $\exists!\, \widehat{x} \in H_1$: $\|x - \widehat{x}\| = \inf\limits_{y \in H_1} \|x - y\|$.*

*Přitom $\widehat{x}$ je pro každé $x \in H$ jednoznačně určen podmínkou:*

*(ii) $x - \widehat{x} \in H_1^\perp$ ($x - \widehat{x} \perp y$ pro každé $y \in H_1$).*

[8] V případě reálného prostoru $H$ lze větu vyslovit v obecnější podobě jako projekci na uzavřenou konvexní podmnožinu `[DeMi:Thm.39.3 s.122]`, kdy $x - \widehat{x}$ svírá s libovolným $y - \widehat{x} \in H_1$ pravý nebo tupý úhel. Každý podprostor $H_1$ je afinní (s každými dvěma body obsahuje přímku procházející těmito body) a tedy i konvexní (s každými dvěma body obsahuje úsečku spojující tyto body). Pak $x - \widehat{x}$ vždy svírá s každým $y - \widehat{x} \in H_1$ pravý úhel a projekce tak přejde v ortogonální projekci a to dokonce i pro komplexní prostor.

*Důkaz.* Úplný důkaz lze nalézt např. v `[DeMi:Thm.3.9.4 s.123]`. Zde se omezíme jen na ověření jednoznačnosti $\widehat{x}$ splňujícího podmínku (ii):
$x - \widehat{x}_1, x - \widehat{x}_2 \in H_1^\perp \Rightarrow \widehat{x}_2 - \widehat{x}_1 = x - \widehat{x}_1 - (x - \widehat{x}_2) \in H_1 \cap H_1^\perp = \{0\} \Rightarrow \widehat{x}_2 = \widehat{x}_1.$ □

**Definice 3.55.**
Operátor $P_{H_1} : H \to H_1$, kde $P_{H_1}x := \widehat{x}$ se nazývá **operátorem ortogonální projekce** $H$ **na** $H_1$, nebo **ortogonálním projektorem** $H$ **na** $H_1$ (zřejmě $P_{H_1}x \overset{(i)}{=} x$ pro každé $x \in H_1$, takže $P_{H_1}$ je surjektivní).

**Věta 3.56.** *Pro zobrazení $P : H \to \mathcal{R}(P) =: H_1$ (uzavřený podprostor v $H$) jsou ekvivalentní následující výroky:*
*(1) $P = P_{H_1}$, tj. $P$ je operátor ortogonální projekce $H$ na $H_1$.*
*(2) Pro každé $x \in H$ je $x^\perp := x - Px \perp H_1$ (neboli $x^\perp \in H_1^\perp$).*
*(3) $P \in \mathcal{B}(H, H)$, $P^2 = P$ ($P$ je idempotentní) a $P = P^*$ ($P$ je samoadjungovaný).*

*Důkaz.*
(1)⇔(2): plyne dle 3.54(ii) a 3.55.
(2)⇒(3):
a) $P \in \mathcal{B}(H, H)$:
Linearita: pro $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ a $x_1, x_2 \in H$ libovolná dostáváme:
$c_1x_1 + c_2x_2 - (c_1Px_1 + c_2Px_2) = c_1 \underbrace{(x_1 - Px_1)}_{\in H_1^\perp} + c_2 \underbrace{(x_2 - Px_2)}_{\in H_1^\perp} \in H_1^\perp$, což je L-podprostor dle 2.65. Odtud vzhledem k jednoznačnosti ortogonální projekce podle (ii) dostáváme $P(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Px_1 + c_2Px_2$.
Spojitost: Pro každé $x \in H$ je $x = Px + x^\perp, x^\perp \perp Px$, takže dle Pythagorovy věty 2.60/6° platí $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|x^\perp\|^2 \geq \|Px\|^2 \Rightarrow P \in \mathcal{B}(H, H_1)$ a $\|P\| \leq 1$.
b) $P^2 = P$: Pro každé $x \in H$ je
$u := Px \in H_1, Pu \in H_1 \overset{(2)}{\Rightarrow} u - Pu \in H_1 \cap H_1^\perp = \{0\} \Rightarrow Px = u = Pu = P^2x.$
c) $P = P^*$: Pro každé $x \in H$ a $y \in H_1$ je stejně jako v b) $y = Py = \widehat{y}$ a platí: $\langle Px, y\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{y}\rangle = \langle x - x^\perp, \widehat{y}\rangle = \langle x, \widehat{y}\rangle - \underbrace{\langle x^\perp, \widehat{y}\rangle}_{=0} = \langle x, Py\rangle$.

(3)⇒(2): Položme $M := \{x \in H \,|\, Px = x\}$. Je $M \subseteq H_1$. Naopak pro každé $x \in H$ je $Px \in M$, neboť $P^2x = P(Px) = Px$ a tedy $H_1 =: \mathcal{R}(P) \subseteq M$. Pak pro $u \in M = H_1$ a $x \in H$ libovolný dostáváme: $\langle x - Px, u\rangle = \langle x, u\rangle - \langle Px, u\rangle = \langle x, u\rangle - \langle x, P^*u\rangle = \langle x, u\rangle - \langle x, Pu\rangle = \langle x, u\rangle - \langle x, u\rangle = 0$. □

**Důsledek 3.57.** *$P_{H_1}$ je pozitivní operátor ($0 \leq P_{H_1} \leq 1$) a $\|P_{H_1}\| = 1$.*

*Důkaz.*
V důkazu 3.56(2)a) jsme pro $P := P_{H_1}$ ukázali $\|P\| \leq 1$. Pro $x \in H_1$ je $\|Px\| = \|x\|$, takže $\|P\| = 1$. Pak dle 3.50 je $0 \leq P^*P = PP = P \leq \|P\|^2 = 1$. □

**Důsledek 3.58.** *Pro libovolnou podmnožimu $M \subseteq H$ (H-prostor) platí $M^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{L}(M)}$.*

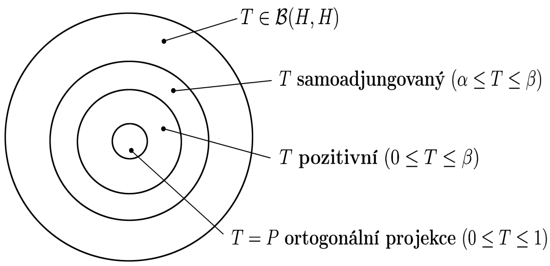
*Důkaz.*
I. Podle 2.65 je $\overline{\mathcal{L}(M)}^\perp = M^\perp$, takže $H_1 := \overline{\mathcal{L}(M)} \subseteq M^{\perp\perp}$.
II. Ukážeme i opačnou inkluzi: $x \in M^{\perp\perp} \overset{3.56(2)}{\Rightarrow} x = \widehat{x} + x^\perp, \widehat{x} \in H_1, x^\perp \perp H_1 \Rightarrow$
$x^\perp \in M^\perp, x^\perp = x - \widehat{x} \in M^{\perp\perp}$ (L-podprostor) $\Rightarrow x^\perp \perp x^\perp \Rightarrow x^\perp = 0 \Rightarrow x = \widehat{x} \Rightarrow$
$x \in H_1 = \overline{\mathcal{L}(M)}$. Tedy $M^{\perp\perp} \subseteq \overline{\mathcal{L}(M)}$. □

**Důsledek 3.59.** *$I_H - P_{H_1} : H \to H_1^{\perp}$ je operátor ortogonální projekce.*

*Důkaz.* Pro $I_H - P_{H_1}$ ověříme 3.56(2): pro každé $x \in H$ je $x - (I_H - P_{H_1})x = x - x + P_{H_1}x = P_{H_1}x \in H_1$, přičemž $H_1^{\perp\perp} \overset{3.58}{=} \overline{\mathcal{L}(H_1)} = \overline{H_1} = H_1$. □

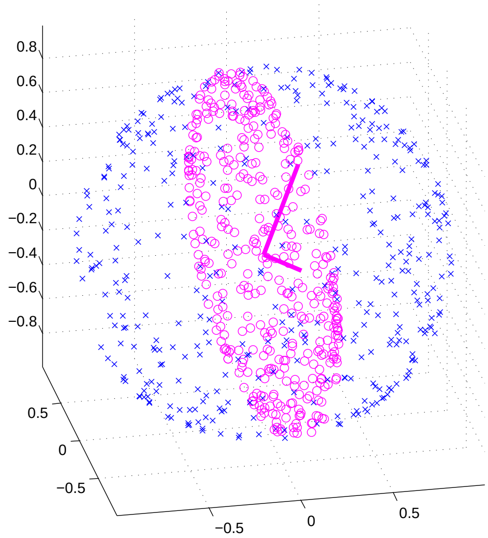
**Důsledek 3.60** (Některé další vlastnosti operátoru ortogonální projekce)**.**
*Nechť $H_1, H_2 \subseteq H$ jsou $H$-podprostory. Pak platí*
*(1) $x \in H_1 \;\Leftrightarrow\; P_{H_1}x = x$.*
*(2) $x \in H_1^{\perp} \;\Leftrightarrow\; P_{H_1}x = 0$.*
*(3) $H_2 \subseteq H_1 \;\Leftrightarrow\; P_{H_2}P_{H_1}x = P_{H_2}x$ pro každé $x \in H$.*

*Důkaz.*
(1) $x \in H_1 \;\Leftrightarrow\; x^{\perp} = x - P_{H_1}x \in H_1 \overset{3.56(2)}{\Leftrightarrow} x^{\perp} \in H_1 \cap H_1^{\perp} \;\Leftrightarrow\; x^{\perp} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = P_{H_1}x$.
(2) $x \in H_1^{\perp} \overset{(1),3.59}{\Leftrightarrow} (I_H - P_{H_1})x = x \;\Leftrightarrow\; x - P_{H_1}x = x \;\Leftrightarrow\; P_{H_1}x = 0$.
(3) $x \in H \Rightarrow x = P_{H_1}x + x^{\perp}, x^{\perp} \in H_1^{\perp} \Rightarrow P_{H_2}x = P_{H_2}P_{H_1}x + P_{H_2}x^{\perp}, x^{\perp} \in H_1^{\perp}$. Pak
$\Rightarrow$: $H_2 \subseteq H_1 \Rightarrow H_1^{\perp} \subseteq H_2^{\perp} \Rightarrow x^{\perp} \in H_2^{\perp} \,\forall x \in H \overset{(2)}{\Rightarrow} P_{H_2}x^{\perp} = 0 \,\forall x \in H \Rightarrow P_{H_2}x = P_{H_2}P_{H_1}x \,\forall x \in H$.
$\Leftarrow$: $P_{H_2}x = P_{H_2}P_{H_1}x \,\forall x \in H_1^{\perp} \subseteq H \overset{(2)}{\Rightarrow} P_{H_2}x = P_{H_2}0 = 0 \,\forall x \in H_1^{\perp} \overset{(2)}{\Rightarrow} x \in H_2^{\perp} \,\forall x \in H_1^{\perp} \Rightarrow H_1^{\perp} \subseteq H_2^{\perp} \Rightarrow H_2 \overset{3.58}{=} H_2^{\perp\perp} \subseteq H_1^{\perp\perp} \overset{3.58}{=} H_1$.
□




**Obrázek 3.3**: Třídy omezených operátorů v $\mathcal{B}(H,H)$ nad $\mathbb{C}$

<u>*Poznámka*</u> 3.61. Chceme-li vytvořit konkrétní maticový projekční operátor, stačí umět charakterizovat podprostor, na nějž má ortogonální projekce proběhnout. Umístíme-li lineárně nezávislé generátory tohoto prostoru do sloupců matice $\boldsymbol{T}$, pak projekční operátor je matice daná explicitně jako $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^*$. Souřadnice výsledného vektoru v bázi $\boldsymbol{T}$ jsou tedy vypočteny jako $(\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^*$. Jsou-li navíc generátory v $\boldsymbol{T}$ ortonormální, projektor je přímo $\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*$. Viz obr. 3.4. Pro hlubší souvislost s pseudoinverzními operátory viz důsledky 5.3 a 5.5.



**Obrázek 3.4**: Projekce povrchu jednotkové koule v prostoru $\mathbb{R}^3$ na podprostor generovaný vektory $[-1\ -1{,}5\ 0{,}7]^T$ a $[-0{,}5\ -0{,}1\ 1{,}2]^T$.

## 3.4 Kompaktní operátory

*Teorie*: `[FA1:odst.5.7]`

**Definice 3.62** (**Kompaktní operátor**).
Lineární operátor $T : X \to Y$ (NL-prostory) se nazývá **kompaktní**, jestliže zobrazuje každou podmnožinu $M \subseteq X$ ohraničenou v $X$ na podmnožinu $T(M) \subseteq Y$ relativně kompaktní v $Y$ (viz 2.71).

**Věta 3.63.**
*Každý kompaktní operátor $T : X \to Y$ (NL-prostory) je spojitý, tj. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.*

*Důkaz.* Je-li $T$ kompaktní, pak $M \subseteq X$ ohraničená v $X \Rightarrow T(M)$ relativně kompaktní v $Y$ $\overset{2.72/2°(b)}{\Rightarrow}$ $T(M)$ je ohraničená v $Y$. Tedy operátor $T$ je ohraničený (viz 2.41), což je dle věty 3.1 ekvivalentní s jeho spojitostí. □

**Věta 3.64.** *Nechť $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ (NL-prostory), pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

*(1) $T$ je kompaktní.*

*(2) Nechť $\{x_n\} \subseteq X$ je posloupnost: $x_n \in \overline{K} := \{x \,|\, \|x\| \le 1\}$. Pak $\{Tx_n\}$ obsahuje podposloupnost konvergentní v $Y$.*

*(3) Nechť $\{x_n\} \subseteq X$ je posloupnost: $x_n \in \gamma(K) := \{x \,|\, \|x\| = 1\}$. Pak $\{Tx_n\}$ obsahuje podposloupnost konvergentní v $Y$.*

*Důkaz.*

(1)⇒(2): $\overline{K}$ ohraničená $\Rightarrow \{x_n\}$ je ohraničená $\Rightarrow \{Tx_n\}$ je relativně kompaktní $\overset{2.72/2°(d)}{\Rightarrow}$ $\{Tx_n\}$ obsahuje konvergentní podposloupnost.

(2)⇒(3): zřejmé, neboť $\gamma(K) \subset \overline{K}$.

(3)⇒(1): Buď $M \subseteq X$ ohraničená a zvolme libovolně $\{y_n\} \subseteq T(M)$, tj. $y_n = Tx'_n$, $x'_n \in M$, kde $\|x'_n\| \le C$. Podle 2.72/2°(d) stačí ukázat, že $\{y_n\}$ obsahuje konvergentní podposloupnost.

Nastanou dva případy:
(i) $y_n = 0$ pro nekonečně mnoho $n = n_k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \{y_{n_k}\}$ je nulová podposloupnost, takže $y_{n_k} \to 0$ pro $k \to \infty$.
(ii) $\exists N \in \mathbb{N}$: $y_n \neq 0$ pro $n \geq N$. Pak $0 < \|x'_n\| \leq C, n \geq N \Rightarrow \exists\{n_k\}$: $\|x'_{n_k}\| \to \alpha \leq C$ pro $k \to \infty$ při $n_k \in \mathbb{N}$ $\big[$ totiž $\{\|x'_n\|\} \subseteq [0, C] \subset \mathbb{R}$, kde $\dim \mathbb{R} = 1$, takže dle 2.72/2°(d) $\{\|x'_n\|\}$ obsahuje konvergentní podposloupnost s limitou v $[0, C]$, neboť $[0, C]$ je uzavřená a ohraničená a tedy kompaktní dle 2.72/3°(c) $\big]$. Pak $x_{n_k} := \frac{x'_{n_k}}{\|x'_{n_k}\|} \in \gamma(K)$, $Tx_{n_k} = \frac{1}{\|x'_{n_k}\|} y_{n_k}$ a dle (3) $\exists\{Tx_{n_{k_l}}\}$, $Tx_{n_{k_l}} \to y$. Pak $y_{n_{k_l}} \to \alpha y$, neboť: $\|y_{n_{k_l}} - \alpha y\| =$
$= \big\| \|x'_{n_{k_l}}\| Tx_{n_{k_l}} - \alpha Tx_{n_{k_l}} + \alpha Tx_{n_{k_l}} - \alpha y \big\| \leq \big| \|x'_{n_{k_l}}\| - \alpha \big| \, \|T\| + |\alpha| \|Tx_{n_{k_l}} - y\| \to 0$, neboť $\big| \|x'_{n_{k_l}}\| - \alpha \big| \to 0$ a $\|Tx_{n_{k_l}} - y\| \to 0$. □

**Věta 3.65.** *$x_n \overset{sl.}{\to} x$ v NL-prostoru $X$, $\{x_n\}$ (relativně) kompaktní $\Rightarrow x_n \to x$.*

*Důkaz.*
Sporem: Nechť existuje $\varepsilon_0 > 0$ a $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ tak, že $\|x_{n_k} - x\| \geq \varepsilon_0$. Je-li $\{x_n\}$ (relativně) kompaktní, pak dle 2.72/2°(d) je také $\{x_{n_k}\}$ (relativně) kompaktní a existuje $\{x_{n_{k_j}}\}$: $x_{n_{k_j}} \to \widetilde{x}$. Pak také $x_{n_{k_j}} \overset{sl.}{\to} \widetilde{x}$ dle 3.22 a $x = \widetilde{x}$, neboť $x_n \overset{sl.}{\to} x \Rightarrow x_{n_{k_j}} \overset{sl.}{\to} x$, přičemž limita je určena jednoznačně dle 3.17(2). Tedy $\|x_{n_{k_j}} - x\| \to 0$, což je spor s $\|x_{n_{k_j}} - x\| \geq \varepsilon_0$. □

**Věta 3.66.** *Kompaktní operátor $T : X \to Y$ (NL-prostory) zobrazuje slabě konvergentní posloupnost v $X$ na konvergentní posloupnost v $Y$.*

*Důkaz.*
$x_n \overset{sl.}{\to} x \overset{3.17(2)}{\Rightarrow} \{x_n\}$ je ohraničená $\overset{3.62}{\Rightarrow} \{Tx_n\}$ je relativně kompaktní. Současně dle 3.23 také $Tx_n \overset{sl.}{\to} Tx$, takže $Tx_n \to Tx$ dle 3.65. □

**Věta 3.67.** *Nechť $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ a $U \in \mathcal{B}(Y, Z)$ (NL-prostory), přičemž alespoň jeden z nich je kompaktní. Pak jejich složení $UT \in \mathcal{B}(X, Z)$ je kompaktní operátor.*

*Důkaz.*
$T$ kompaktní: $M \subseteq X$ ohraničená $\overset{3.62}{\Rightarrow} T(M)$ je relativně kompaktní v $Y \Rightarrow UT(M)$ je relativně kompaktní v $Z$: vskutku, pro libovolnou $\{z_n\} \subseteq UT(M)$ je $z_n = Uy_n$, kde z $\{y_n\} \subseteq T(M)$ lze vybrat $y_{n_k} \to y$, takže $z_{n_k} = Uy_{n_k} \to Uy$ vzhledem ke spojitosti $U$.
$U$ kompaktní: $M \subseteq X$ ohraničená $\overset{3.1/(1)}{\Rightarrow} T(M)$ je ohraničená a tedy dle 3.62 je také $UT(M)$ relativně kompaktní. □

**Věta 3.68.** *Nechť $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\dim Y < \infty$. Pak $T$ je kompaktní*[9].

*Důkaz.* Jestliže $T$ je spojitý, pak $T$ je dle 3.1 ohraničený a zobrazuje tedy ohraničenou podmnožinu v $X$ na ohraničenou podmnožinu v $Y$, která je v prostoru konečné dimenze relativně kompaktní dle 2.72/3°(d). □

**Věta 3.69** (`[FA1:Věta 5.15]`).
*Nechť $T_n \in \mathcal{B}(X, B)$, $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost kompaktních operátorů a $T_n \to T$ v $\mathcal{B}(X, B)$. Pak $T$ je rovněž kompaktní.*

[9] Zejména každý maticový operátor mezi prostory konečné dimenze je kompaktní.

*Poznámka* 3.70.
Kovergují-li $T_n$ k $T$ jen bodově, pak z kompaktnosti $T_n$ obecně neplyne kompaktnost $T$: nechť $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je báze v separabilním prostoru $B$, $\dim B = \infty$ (existuje dle 2.69, např. v $B := \ell^2(\mathbb{N})$), $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$, $T_n x := \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ operátor $T_n$ zobrazuje $x$ do prostoru konečné dimenze $n$, takže je dle 3.68 kompaktní. Přitom $T_n x \to x = Ix$ pro každé $x \in X$, přičemž $I$ na $B$ není kompaktní, neboť $\dim B = \infty$. Totiž každá ohraničená množina by jinak musela být relativně kompaktní, což dle 2.72/3° platí jen v prostoru konečné dimenze.

**Věta 3.71** (`[Tay:5.5-A s.260]`).
*Je-li $T$ kompaktní, pak $\mathcal{R}(T)$ je separabilní prostor.*

**Věta 3.72** (`[Tay:5.5-B s.261]`).
*Nechť $T \in \mathcal{B}(X, B)$. Pak $T$ je kompaktní právě když $T'$ je kompaktní.*

## 3.5 Unitární operátory

**Lemma 3.73.** *Nechť $T : X \to Y$ (NL-prostory) je (sdruženě) lineární operátor. Pak $T$ je izometrie právě když $\|Tx\| = \|x\|$ pro každé $x \in X$ ($T$ zachovává normu).*

*Důkaz.* $T$ je izometrie $\Leftrightarrow$ $d(Tx_1, Tx_2) = d(x_1, x_2)\, \forall x_1, x_2 \in X \overset{2.47}{\Leftrightarrow} \|T(x_1 - x_2)\| = \|Tx_1 - Tx_2\| = \|x_1 - x_2\|\, \forall x_1, x_2 \in X \Leftrightarrow \|Tx\| = \|x\|\, \forall x \in X$. □

**Důsledek 3.74.** *Je-li $T$ (sdruženě) lineární izometrie $X$ na $Y$ (NL-prostory), pak $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ a $T$ je topologický (sdruženě) lineární izomorfismus.*

*Důkaz.*
I. $\underline{T \text{ je prosté (a tedy bijekce)}}$: $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow 0 = \|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\| \Rightarrow 0 = x_1 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.
II. $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|x\| = 1$, takže $T$ je ohraničený (spojitý).
III. $T^{-1}$ je zřejmě rovněž izometrie, takže dle II. $\|T^{-1}\| = 1$. □

**Věta 3.75.** *Nechť $T : X \to Y$ (VS-prostory) je (sdruženě) lineární operátor. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*
*(1) $T$ je izometrie.*
*(2) $\|Tx\| = \|x\|$ pro každé $x \in X$, neboli $T$ zachovává normu.*
*(3) $\langle Tx_1, Tx_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$ ($\langle Tx_1, Tx_2 \rangle = \overline{\langle x_1, x_2 \rangle}$), neboli $T$ zachovává (sdruženě) vnitřní součin.*

*Důkaz.*
(1)⇔(2) plyne z 3.73.
(2)⇒(3) plyne z polarizační identity (3.5a). Pro sdruženě lineární operátor je třeba uvážit, že $T(x \pm iy) = Tx \mp iTy$, takže ve vztahu (3.5a) jeho imaginární část [#] změní znaménko.
(3)⇒(2) je zřejmé, neboť $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\langle Tx, Tx \rangle} = \sqrt{\overline{\langle Tx, Tx \rangle}} = \|Tx\|$. □

**Definice 3.76** (**Unitární operátor**).
(Sdruženě) lineární izometrický operátor $T$ z $H_1$ na $H_2$ (H-prostory) se nazývá **(sdruženě) unitární**. V takovém případě říkáme, že prostory $H_1$ a $H_2$ jsou **(sdruženě) unitárně izomorfní (UI)** a píšeme $H_1 \overset{UI}{\simeq} H_2$.

**Věta 3.77** (Cvičení)**.**
*Složení dvou (sdruženě) unitárních operátorů je unitární operátor. Složení unitárního a sdruženě unitárního operátoru je sdruženě unitární operátor.*

**Věta 3.78.** *Nechť $T : H_1 \to H_2$ (H-prostory) je (sdruženě) lineární operátor. Pak následující výroky 1° až 5° (1* až 4*) jsou ekvivalentní:*

*1° T je unitární*
*2° T je surjekce zachovávající normu*
*3° T je surjekce zachovávající vnitřní součin*
*4° T je spojitá bijekce s vlastností:*
$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^{-1}y\rangle \ \forall x \in H_1, y \in H_2$
*5° T je spojitý a $T^* = T^{-1}$, neboli*
$T^*T = I_{H_1}$ *a* $TT^* = I_{H_2}$

*1* T je sdruženě unitární*
*2* T je surjekce zachovávající normu*
*3* T je surjekce zachovávající sdruženě vnitřní součin*
*4* T je spojitá bijekce s vlastností:*
$\langle Tx, y\rangle = \overline{\langle x, T^{-1}y\rangle} \ \forall x \in H_1, y \in H_2$

*Důkaz.*
1°⇔2°⇔3° (resp. 1*⇔2*⇔3*) je důsledkem 3.75.
3°⇒4°: $\langle x, T^{-1}y\rangle = \langle Tx, TT^{-1}y\rangle = \langle Tx, y\rangle$.
3*⇒4*: $\langle x, T^{-1}y\rangle = \overline{\langle Tx, TT^{-1}y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle}$.
4*⇒3*: stačí ve 4* položit $x = x_1$ a $y = Tx_2$, pak $\langle Tx_1, Tx_2\rangle = \overline{\langle x_1, T^{-1}Tx_2\rangle} = \overline{\langle x_1, x_2\rangle}$.
4°⇒5° je důsledkem jednoznačné existence $T^*$ dle 3.12 (RVR).

$$5°⇒3°: \begin{cases} I = T^*T \Rightarrow \langle x_1, x_2\rangle = \langle x_1, T^*Tx_2\rangle \overset{RVR}{=} \langle Tx_1, Tx_2\rangle \overset{3.75}{\Rightarrow} T \text{ je izometrie,} \\ \mathcal{R}(T) = \mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T^*) = H_2, \text{ takže } T \text{ je surjekce.} \end{cases}$$
□

**Věta 3.79** (**Některé užitečné (sdruženě) unitární operátory $L^2 \to L^2$**)**.**
*Nechť $f(t) \in L^2$ je libovolná funkce; $a, b, s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, pak následující operátory $L^2 \to L^2$ (nad $\mathbb{C}$) definované v tabulce 3.1 jsou*
**a) unitární** *translace $\tau_b$, modulace $e_a$, dilatace $D_s$, reflexe $R$ a Fourierova transformace $\mathcal{F}$;*
**b) sdruženě unitární** *konjugace $^-$ a involuce $^\sim$.*

*Důkaz.* Operátory $\tau_b$, $e_a$, $D_s$ a $R$ jsou zřejmě lineární, konjugace $^-$ sdruženě lineární a zachovávají normu (užitím vhodné substituce).

Postup budeme ilustrovat v nejsložitějším případě operátoru $D_s$ (ostatní za cvičení):

$$\|D_s f\|^2 = |s| \int_{-\infty}^{\infty} |f(st)|^2\, dt \overset{u:=st}{=} \begin{cases} s \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 \frac{du}{s} = \|f\|^2 & \text{pro } s > 0, \\ (-s) \int_{\infty}^{-\infty} |f(u)|^2 \frac{du}{s} = s \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 \frac{du}{s} = \|f\|^2 & \text{pro } s < 0. \end{cases}$$

Surjektivita je zřejmá z tvaru inverzního operátoru, takže pak unitárnost těchto operátorů plyne z 3.78/2°.

Fourierova transformace je unitární v důsledku 2.88, kde $\mathcal{F}^{\mp} = (\mathcal{F}^{\pm})^{-1} \overset{3.78/5°}{=} (\mathcal{F}^{\pm})^*$, nebo přímým výpočtem:

$$\langle \mathcal{F}^{\pm}x, y\rangle = \int \Big( \int x(t) e^{\pm i2\pi\gamma t}\, dt \Big) \overline{y(\gamma)}\, d\gamma \overset{\text{Fub. v.}}{=} \int x(t) \overline{\int e^{\mp i2\pi\gamma t} y(\gamma)\, d\gamma} = \langle x, \mathcal{F}^{\mp}y\rangle.$$

Involuce $^\sim$ je složením unitárního operátoru $R$ a sdruženě unitárního operátoru konjugace a je tedy dle 3.77 také sdruženě unitární. □

**Tabulka 3.1**: Unitární operátory: definice a základní vlastnosti

| Název | definice | inverze | Fourierova transformace |
|---|---|---|---|
| **Translace:** | $(\tau_b f)(t) := f(t-b)$ | $\tau_b^* = \tau_b^{-1} = \tau_{-b}$ | $\widehat{\tau_b f} = e_{-b}\widehat{f}$ |
| **Modulace:** | $(e_a f)(t) := e^{i2\pi a t} f(t)$ | $e_a^* = e_a^{-1} = e_{-a}$ | $\widehat{e_a f} = \tau_a \widehat{f}$ |
| **Dilatace:** | $(D_s f)(t) := \lvert s\rvert^{\frac{1}{2}} f(st)$ | $D_s^* = D_s^{-1} = D_{s^{-1}}$ | $\widehat{D_s f} = D_{s^{-1}}\widehat{f}$ |
| | $\lvert s\rvert > 1 \ldots$ **kontrakce**, | $\lvert s\rvert < 1 \ldots$ **dilatace** | |
| **Reflexe:** | $(Rf)(t) := f(-t)$ | $R^2 = I$, $R^* = R^{-1} = R$ | $\widehat{Rf} = R\widehat{f}$ |
| **Fourierova** | $(\mathcal{F}^{\pm} f)(t) := \int f(u) e^{\pm i2\pi t u}\, du$ | $(\mathcal{F}^{\pm})^* = (\mathcal{F}^{\pm})^{-1} = \mathcal{F}^{\mp}$ | $\widehat{\mathcal{F}^{+} f} = f$, $\widehat{\mathcal{F}^{-} f} = Rf$ |
| **transformace:** | $\widehat{f} := \mathcal{F}^{-} f$; $\check{f} := \mathcal{F}^{+} f$ | | $\widehat{\check{f}} = \underset{\sim}{f}$, $\widehat{\widehat{f}} = Rf$ |
| **Konjugace:** | $f \mapsto \bar{f}$ | $\bar{\bar{f}} = f$ | $\widehat{\bar{f}} = \widehat{f}$ |
| **Involuce:** | $f \mapsto \widetilde{f}$, $\widetilde{f} = \overline{f(-t)} = \overline{Rf}$ | $\widetilde{\widetilde{f}} = f$ | $\widehat{\widetilde{f}} = \overline{\widehat{f}}$ |

**Věta 3.80 (Vlastnosti (sdruženě) unitárních operátorů z věty 3.79).**
*Vlastnosti (sdruženě) unitárních operátorů přehledně shrnuje tabulka 3.1. Jediným netriviálním*[10] *samoadjungovaným operátorem je reflexe $R$, která je současně také jediným netriviálním operátorem zaměnitelným s operátory Fourierovy transformace $\mathcal{F}$, konjugace i involuce, přičemž platí: $\mathcal{F}^{\mp} = R\mathcal{F}^{\pm} = \mathcal{F}^{\pm}R$, $\widetilde{f} = R\bar{f} = \overline{Rf}$ a $\bar{f} = R\widetilde{f} = \widetilde{Rf}$.*

*Důkaz.* Označme $U$ libovolný z unitárních operátorů definovaných v tabulce 3.1 a $f \in L^2$. Vztahy pro $U^{-1}f$ jsou zřejmé. Vztahy pro $\widehat{Uf}$ se ověří přímým výpočtem (cvičení) s vhodnou substitucí nebo jinou úpravou v příslušném integrálu, např.

$$(\widehat{\tau_b f})(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-b) e^{-i2\pi\gamma t}\, dt \overset{u:=t-b}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i2\pi\gamma(u+b)}\, du$$
$$= e^{-i2\pi\gamma b} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i2\pi\gamma u}\, du = e^{-i2\pi\gamma b}\widehat{f}(\gamma) = (e_{-b}\widehat{f})(\gamma).$$

nebo

$$(\widehat{e_a f})(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi a t} f(t) e^{-i2\pi\gamma t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi(\gamma-a)t}\, dt = \widehat{f}(\gamma-a) = (\tau_a \widehat{f})(\gamma).$$

Vlastnosti FT: $(\mathcal{F}^{\pm}\mathcal{F}^{\pm} f)(t) \overset{2.87}{=} (\mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm} f)(-t) = f(-t)$ a speciálně $\widehat{\mathcal{F}^{+} f} = \mathcal{F}^{-}\mathcal{F}^{+} f = f$ a $\widehat{\mathcal{F}^{-} f} = \mathcal{F}^{-}\mathcal{F}^{-} f = Rf$.
Reflexe $R$ je záměnná s FT: dle 2.87 je $\mathcal{F}^{\pm} f = R\mathcal{F}^{\mp} f$ a z předchozího $\mathcal{F}^{\pm}\mathcal{F}^{\pm} f = Rf \Rightarrow \mathcal{F}^{\mp}\mathcal{F}^{\pm}\mathcal{F}^{\pm} f = \mathcal{F}^{\mp} Rf \Rightarrow \mathcal{F}^{\pm} f = \mathcal{F}^{\mp} Rf$.
Vlastnosti konjugace a involuce: konjugace je záměnná s reflexí, neboť složením s ní v libovolném pořadí dostáváme involuci: $\widetilde{f} = R\bar{f} = \overline{Rf}$.
Podobně involuce je záměnná s reflexí, neboť složením s ní v libovolném pořadí dostáváme konjugaci: $\widetilde{Rf} = \overline{RRf} = \bar{f} = RR\bar{f} = R\widetilde{f}$.
Odtud $\widetilde{\widetilde{f}} = \overline{RR\bar{f}} = \bar{\bar{f}} = f$, takže inverzí ke konjugaci, resp. k involuci je týž operátor. □

**Důsledek 3.81.** *Pro každé $f, g \in L^2$ (nad $\mathbb{C}$) platí:*

$$\langle \bar{f}, g\rangle = \overline{\langle f, \bar{g}\rangle} \quad a \quad \langle \widetilde{f}, g\rangle = \overline{\langle f, \widetilde{g}\rangle}.$$

[10] Za netriviální považujeme operátor, jehož parametry neurčují identické zobrazení.

*Důkaz.* Pro konjugaci a involuci platí $\bar{\bar{f}} = f$ a $\tilde{\tilde{f}} = f$, takže inverzí ke konjugaci a involuci je týž operátor a tvrzení pak plyne z 3.78/4*. □

**Důsledek 3.82.**

*(a) Pro reálnou funkci $f \in L^2$ je $\widehat{f}(-\gamma) = \overline{\widehat{f}(\gamma)}$ pro každé $\gamma \in \mathbb{R}$ (symetrie fourierovského spektra)*

*(b) Pro ryze imaginární funkci $f \in L^2$ je $\widehat{f}(-\gamma) = -\overline{\widehat{f}(\gamma)}$ pro každé $\gamma \in \mathbb{R}$ (antisymetrie fourierovského spektra).*

*Důkaz.*
(a) $f$ reálná $\Rightarrow f = \bar{f} \Rightarrow \widehat{f} = \widehat{\bar{f}} = \widetilde{\widehat{f}}$, neboli $\widehat{f}(-\gamma) = \overline{\widehat{f}(\gamma)}$.
(b) $f$ ryze imaginární $\Rightarrow f = -\bar{f} \Rightarrow \widehat{f} = -\widehat{\bar{f}} = -\widetilde{\widehat{f}}$, neboli $\widehat{f}(-\gamma) = -\overline{\widehat{f}(\gamma)}$. □

# 4 INVERZE SPOJITÝCH LINEÁRNÍCH OPERÁTORŮ

## 4.1 Teoretická východiska

**Věta 4.1** (Ortogonální rozklad prostorů určený operátory $T$ a $T^*$ — obr. 4.1)**.**
*Pro $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ platí:*

*(1)* $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T^*)}^\perp$;
$\mathcal{N}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$

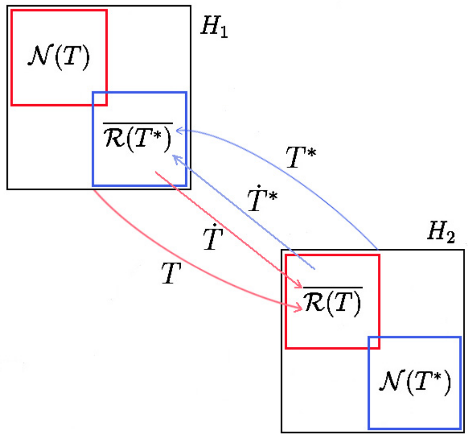
*(2)* $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp$;
$\mathcal{N}(T^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}$

*(3)* $H_1 = \overline{\mathcal{R}(T^*)} \oplus \mathcal{N}(T)$;
$H_2 = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T^*)$

*(4)* $T = T^* \Rightarrow \mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}^\perp$;
$\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{N}(T)^\perp$

*(5)* $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*T)$;
$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{N}(TT^*)$

*(6)* $\overline{\mathcal{R}(T)} = \overline{\mathcal{R}(TT^*)}$;
$\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \overline{\mathcal{R}(T^*T)}$




**Obrázek 4.1**: Rozklad prostorů

*Důkaz.*
(1) $x \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle = 0 \,\forall y \in H_2 \Leftrightarrow \langle x, T^*y\rangle = 0 \,\forall y \in H_2 \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(T^*)^\perp \overset{2.65}{=} \overline{\mathcal{R}(T^*)}^\perp$. Pak 3.58 $\Rightarrow \mathcal{N}(T)^\perp = \mathcal{R}(T^*)^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$.
(2) plyne z (1) záměnou $T$ za $T^*$ s uvážením $T^{**} = T$.
(3) $f \in H_1 \overset{3.56/(2)}{\Rightarrow} f = \widehat{f} + f^\perp, \widehat{f} = P_{\overline{\mathcal{R}(T^*)}} f, f^\perp \in \overline{\mathcal{R}(T^*)}^\perp \overset{(1)}{=} \mathcal{N}(T)$.
(4) plyne z (1) a (2).
(5) $x \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow 0 = \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \Leftrightarrow T^*Tx = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{N}(T^*T)$. Druhá rovnost záměnou $T$ a $T^*$.
(6) $\overline{\mathcal{R}(TT^*)} \overset{(4)}{=} \mathcal{N}(TT^*)^\perp \overset{(5)}{=} \mathcal{N}(T^*)^\perp \overset{(2)}{=} \overline{\mathcal{R}(T)}$. Druhá rovnost záměnou $T$ a $T^*$.

□

**Definice 4.2.** Pro $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ definujeme
$\dot{T} := T|_{\overline{\mathcal{R}(T^*)}} \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{R}(T^*)}, \overline{\mathcal{R}(T)})$ a $(T^*)^{\cdot} := T^*|_{\overline{\mathcal{R}(T)}} \in \mathcal{B}(\overline{\mathcal{R}(T)}, \overline{\mathcal{R}(T^*)})$.

**Věta 4.3.** *Platí:*
*(1)* $(T^*)^{\cdot} = \dot{T}^*$
*(2)* $\mathcal{R}(\dot{T}) = \mathcal{R}(T)$, $\mathcal{R}(\dot{T}^*) = \mathcal{R}(T^*)$, $\mathcal{N}(\dot{T}) = \{0\}$, $\mathcal{N}(\dot{T}^*) = \{0\}$
*(3)* $\|T\| = \|\dot{T}\| = \|\dot{T}^*\| = \|T^*\|$

*Důkaz.* Položme $H := \overline{\mathcal{R}(T)}$, $H^* := \overline{\mathcal{R}(T^*)}$. Pak $H_1 \overset{4.1(3)}{=} H^* \oplus \mathcal{N}(T)$ a $H_2 \overset{4.1(3)}{=} H \oplus \mathcal{N}(T^*)$.
(1) $x \in H^*, y \in H$ lib. $\Rightarrow \langle \dot{T}x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, (T^*)^{\cdot} y\rangle \overset{\text{RVR}}{\Rightarrow} (T^*)^{\cdot} = \dot{T}^*$.
(2) $f = \widehat{f} + f^\perp \in H_1, \widehat{f} = P_{H^*} f \in H^*, f^\perp \in H^{*\perp} = \mathcal{N}(T) \Rightarrow Tf = T\widehat{f} + Tf^\perp = \dot{T}\widehat{f}$. Podobně $\mathcal{R}(\dot{T}^*) = \mathcal{R}(T^*)$.
$\mathcal{N}(\dot{T}) = \mathcal{N}(T) \cap H^* \overset{2.56,2.64}{=} \{0\}$ a podobně $\mathcal{N}(\dot{T}^*) = \mathcal{N}(T^*) \cap H = \{0\}$.

(3) $\|T\| = \|T^*\|$ a $\|\dot{T}\| = \|\dot{T}^*\|$ plyne z 3.27. Stačí ukázat $\|T\| = \|\dot{T}\|$:
pro $\forall f \in H^*$ je $\|\dot{T}f\| = \|Tf\| \leq \|T\|\|f\| \Rightarrow \|\dot{T}\| \leq \|T\|$.
Naopak $\forall f \in H_1 : \|Tf\|^2 \overset{(2)}{=} \|\dot{T}\widehat{f}\|^2 \leq \|\dot{T}\|^2\|\widehat{f}\|^2 \leq \|\dot{T}\|^2(\|\widehat{f}\|^2+\|f^\perp\|^2) \overset{2.60/6^\circ}{=} \|\dot{T}\|^2\|f\|^2 \Rightarrow$
$\|Tf\| \leq \|\dot{T}\|\|f\| \Rightarrow \|T\| \leq \|\dot{T}\|$.

□

**Věta 4.4.**
*Je-li $T : X \to Y$ lineární ($X, Y$ NL-prostory), pak $T^{-1}$ existuje a $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T), X)$ právě když existuje $m > 0 :\ m\|x\| \leq \|Tx\|$ pro každé $x \in X$.*
*V takovém případě pro $T \neq 0$ platí $\|T^{-1}\| = \left(\inf\limits_{0\neq x\in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^{-1} \leq \frac{1}{m}$.*

*Důkaz.*
I. $\Leftarrow$: $Tx = 0 \Rightarrow 0 \leq m\|x\| \leq \|Tx\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$, neboť $m > 0 \Rightarrow x = 0$. Tedy $T$ je prosté, $T^{-1}$ existuje a je zřejmě lineární.
Spojitost: $y \in \mathcal{R}(T) \Rightarrow \exists x = T^{-1}y$. Pak $m\|x\| \leq \|Tx\| \Rightarrow m\|T^{-1}y\| \leq \|TT^{-1}y\| = \|y\| \Rightarrow$
$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\| \Rightarrow \boxed{\|T^{-1}\| \leq \dfrac{1}{m}\ (*)}$

II. $\Rightarrow$: $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T), X) \Rightarrow \|T^{-1}y\| \leq \|T^{-1}\|\|y\|\, \forall y \in \mathcal{R}(T) \Rightarrow$
$\boxed{\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\| \text{ pro } \forall x \in X\ (**)}$
Odtud pro každé $0 < M < \infty$: $\|T^{-1}\| \leq M \Rightarrow \|x\| \leq M\|Tx\| \Rightarrow \frac{1}{M}\|x\| \leq \|Tx\|$ a stačí položit $m := \frac{1}{M}$.

III. Nechť $T \neq 0$ a $T^{-1}$ existuje, pak nutně $X \supset \{0\}$ a pro každé $0 \neq x \in X$: $0 < m\|x\| \leq \|Tx\|$ $\Leftrightarrow\ 0 < m \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$; speciálně lze položit $0 < m := \inf\limits_{0\neq x\in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$, takže dle (*) dostáváme $\|T^{-1}\| \leq \left(\inf\limits_{0\neq x\in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^{-1}$.
Naopak dle (**) je $\frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ pro každé $0 \neq x \in X$, takže $\frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq \inf\limits_{0\neq x\in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \Rightarrow \|T^{-1}\| \geq \left(\inf\limits_{0\neq x\in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^{-1}$.

□

**Důsledek 4.5.** *Nechť $X, Y$ jsou NL-prostory. Pak lineární operátor $T : X \to \mathcal{R}(T) \subseteq Y$ je TLI právě když existují $0 < m \leq M < \infty : m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|\, \forall x \in X$.*
*V takovém případě pro $T \neq 0$ jsou $\frac{1}{\|T^{-1}\|} \geq m$ a $\|T\| \leq M$ nejlepší meze.*
*Pokud je v takovém případě $X$ úplný (B-prostor), pak $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$ je uzavřený.*

*Důkaz.*
I. $T$ je TLI $\Leftrightarrow$ $T$ je spojitý a dle 3.1 existuje $0 < M < \infty : \|Tx\| \leq M\|x\|$ pro každé $x \in X$ a současně $T^{-1}$ existuje a je spojitý, což dle 4.4 nastane právě když existuje $0 < m :\ m\|x\| \leq \|Tx\|$ pro každé $x \in X$, přičemž $\frac{1}{\|T^{-1}\|} \geq m$ dle 4.4 a $\|T\| \leq M$ dle 3.2(b).
II. Je-li $X$ je úplný a $Tx_n \to y$ v $Y \Rightarrow \{Tx_n\}$ je cauchyovská v $\mathcal{R}(T)$ a tedy $0 \leq m\|x_n - x_m\| \leq \|T(x_n - x_m)\| = \|Tx_n - Tx_m\| \to 0$ pro m,n $\to \infty \Rightarrow \|x_n - x_m\| \to 0$ pro m,n $\to \infty \Rightarrow \{x_n\}$ je cauchyovská v úplném prostoru $X \Rightarrow x_n \to x \overset{T \text{ spoj.}}{\Rightarrow} Tx_n \to Tx \Rightarrow Tx = y \Rightarrow y \in \mathcal{R}(T)$. □

**Důsledek 4.6.** *Jestliže $T \in \mathcal{B}(H, H)$, $T = T^*$, pak $0 < m \leq T \leq M \Rightarrow T$ je TLI $H$ na $H$ s ohraničením $m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|$ pro každé $x \in H$*[1].

[1] Jelikož $0 < T$, tak pro $H$ nad $\mathbb{C}$ lze ve 4.6 předpoklad $T = T^*$ vynechat vzhledem k 3.46.

*Důkaz.* Je $H \neq \{0\}$, neboť jinak $T = 0$ a nemůže platit $0 < m \leq T$.
$\|T\| \overset{3.49}{=} \beta_T \leq M \Leftrightarrow \|Tx\| \leq M\|x\|$. Je $0 < m \leq T$, takže pro každé $x \in H$ platí $0 \leq m\|x\|^2 \leq \langle Tx, x\rangle \overset{2.60/5°}{\leq} \|Tx\|\|x\| \Leftrightarrow m\|x\| \leq \|Tx\|$.
Podle 4.5 je pak $T : H \to \mathcal{R}(T) \overset{4.5}{=} \overline{\mathcal{R}(T)}$ TLI. Jelikož $T$ je prosté a $T = T^*$, tak $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*) = \{0\} \overset{4.1(3)}{\Rightarrow} H = \mathcal{R}(T)$ a tedy $T$ je TLI $H$ na $H$. □

*Poznámka* 4.7. Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.
(a) $T : H_1 \to \mathcal{R}(T)$ TLI $\Rightarrow T^*$ surjekce na $H_1$: $T : H_1 \to \mathcal{R}(T)$ je TLI $\overset{4.5}{\Rightarrow} \mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$ a $\mathcal{N}(T) = \{0\} \overset{4.1(3)}{\Rightarrow} H_1 = \overline{\mathcal{R}(T^*)} \Rightarrow \dot{T} = T$ je TLI $\overset{3.32}{\Rightarrow} \dot{T}^* : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{R}(T^*)$ je TLI a $H_1 = \overline{\mathcal{R}(T^*)} \overset{4.3(2)}{=} \overline{\mathcal{R}(\dot{T}^*)} \overset{4.5}{=} \mathcal{R}(\dot{T}^*) \overset{4.3(2)}{=} \mathcal{R}(T^*)$.
(b) $T^*$ surjekce na $H_1 \Rightarrow T : H_1 \to \mathcal{R}(T)$ prosté: $H_1 = \mathcal{R}(T^*) \overset{4.1(3)}{\Rightarrow} \mathcal{N}(T) = \{0\} \Rightarrow T$ je prosté.
Následující věta 4.9 zaručuje, že $T : H_1 \to \mathcal{R}(T)$ je dokonce TLI, tj. $T^{-1}$ je nejen lineární, ale i spojité. Tedy v (b) platí ve skutečnosti i implikace obrácená k (a).

**Věta 4.8** (Důkaz D.6).
*Nechť $X, Y$ jsou NL-prostory a $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Pak $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to X$ existuje a je spojitý právě když $\mathcal{R}(T') = X'$ (adjungovaný operátor $T'$ je surjektivní).*

**Věta 4.9.** *Nechť $H_1, H_2$ jsou H-prostory a $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
(1) *$T : H_1 \to \mathcal{R}(T) \subseteq H_2$ je TLI.*
(2) *$\mathcal{R}(T^*) = H_1$ ($T^*$ je surjekce).*
(3) *$\mathcal{N}(T) = \{0\}$ ($T$ je prosté) a $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{R}(T^*)$.*

*Důkaz.*
(1)⇔(2) je důsledkem 4.8 a 3.26.
[(1)⇒(2) plyne též z 4.7(a) a (2)⇒(1) užitím vět 4.3(2), 3.6 (IMT) a 3.32 - cvičení].
(2)⇒(3): $\mathcal{R}(T^*) = H_1 \overset{4.1(1)}{\Rightarrow} \mathcal{N}(T) = \{0\}$ a $\mathcal{R}(T^*) = H_1$ je uzavřený, neboť $H_1$ je úplný.
(3)⇒(2): $\mathcal{R}(T^*) = \overline{\mathcal{R}(T^*)} \overset{4.1(1)}{=} \mathcal{N}(T)^\perp = \{0\}^\perp = H_1$. □

**Důsledek 4.10.** *Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Pak existují konstanty $0 < m \leq M < \infty$, pro něž jsou následující tvrzení ekvivalentní:*
*1° $T : H_1 \to \mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$ je TLI.*
*2° $m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\| \, \forall x \in H_1$.*
*3° $0 < m^2 \leq T^*T \leq M^2$.*
*4° $m^2\|x\| \leq \|T^*Tx\| \leq M^2\|x\| \, \forall x \in H_1$.*
*5° $T^*T : H_1 \to H_1$ je TLI.*
*1* $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to H_1$ je TLI.*
*2* $\frac{1}{M}\|y\| \leq \|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\| \, \forall y \in \mathcal{R}(T)$.*
*3* $0 < \frac{1}{M^2} \leq (T^{-1})^*T^{-1} \leq \frac{1}{m^2}$.*
*4* $\frac{1}{M^2}\|y\| \leq \|(T^{-1})^*T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m^2}\|y\| \, \forall y \in \mathcal{R}(T)$.*
*5* $(T^{-1})^*T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{R}(T)$ je TLI.*

*Důkaz.* Pro $H_1 = \{0\}$ je splněno triviálně při lib. $0 < m \leq M < \infty$. Nechť $H \neq \{0\}$, pak
1°⇔2° je důsledkem 4.5.
2°⇒3°: $m^2\|x\|^2 \leq \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq M^2\|x\|^2 \, \forall x \in H_1$, tj. $m^2 \leq T^*T \leq M^2$.
3°⇒4° dle 4.6.
4°⇒5°: $T^*T$ je TLI dle 4.5 a $\mathcal{R}(T^*T) = \mathcal{R}((T^*T)^*) = H_1$ dle 4.7(a).
5°⇒1° $T^*T$ je TLI $\Rightarrow H_1 \supseteq \mathcal{R}(T^*) \supseteq \mathcal{R}(T^*T) = H_1 \Rightarrow \mathcal{R}(T^*) = H_1 \Rightarrow$ T je TLI s uvážením implikace 4.9(2)⇒4.9(1).
2°⇔2* je zřejmé, neboť $y = Tx$. Přitom dle 4.5 je $\mathcal{R}(T)$ uzavřený a tedy H-podprostor s uvážením 2.38. Po záměně operátorů $T \rightsquigarrow T^{-1}$ jsou pak ekvivalence 1*⇔2*⇔3*⇔4*⇔5* důsledkem ekvivalencí 1°⇔2°⇔3°⇔4°⇔5°. □

**Důsledek 4.11.**
*Jestliže* $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$, *pak* $0 < m \leq T \leq M < \infty \;\Leftrightarrow\; 0 < \sqrt{m} \leq \sqrt{T} \leq \sqrt{M} < \infty$.
*V takovém případě* $T$ *i* $\sqrt{T}$ *jsou TLI H na H a platí:*
$0 < \frac{1}{M} \leq T^{-1} \leq \frac{1}{m}$, $0 < \frac{1}{\sqrt{M}} \leq \sqrt{T^{-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$ *a* $\sqrt{T^{-1}} = (\sqrt{T})^{-1}$.

*Důkaz.*
$T \geq 0 \overset{3.52}{\Rightarrow} T = \sqrt{T}\sqrt{T} = (\sqrt{T})^*\sqrt{T}$, kde $\sqrt{T} \geq 0 \overset{3.52}{\Rightarrow} \sqrt{T} = \sqrt{\sqrt{T}}\sqrt{\sqrt{T}} = \left(\sqrt{\sqrt{T}}\right)^*\sqrt{\sqrt{T}}$.
Pak užitím ekvivalencí ve 4.10:
$0 < m \leq T \leq M < \infty \overset{3°,2°}{\Leftrightarrow} \sqrt{m}\|x\| \leq \|\sqrt{T}x\| \leq \sqrt{M}\|x\| \,\forall x \in H \Leftrightarrow \sqrt{m}\|x\| \leq \left\|\left(\sqrt{\sqrt{T}}\right)^*\sqrt{\sqrt{T}}x\right\| \leq$
$\sqrt{M}\|x\| \,\forall x \in H \overset{4°,3°}{\Leftrightarrow} 0 < \sqrt{m} \leq \underbrace{\left(\sqrt{\sqrt{T}}\right)^*\sqrt{\sqrt{T}}}_{\sqrt{T}} \leq \sqrt{M}$.

V takovém případě $T$ i $\sqrt{T}$ jsou TLI na základě ekvivalence 3°⇔5°.

Pak $((\sqrt{T})^{-1})^* \overset{3.32}{=} \left((\sqrt{T})^*\right)^{-1} = (\sqrt{T})^{-1} \Rightarrow T^{-1} = (\sqrt{T}\sqrt{T})^{-1} = (\sqrt{T})^{-1}(\sqrt{T})^{-1} = ((\sqrt{T})^{-1})^*(\sqrt{T})^{-1} \overset{4.10/3°,3^*}{\Rightarrow} 0 < \frac{1}{M} \leq T^{-1} \leq \frac{1}{m}$. Analogicky: $0 < \frac{1}{\sqrt{M}} \leq (\sqrt{T})^{-1} \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$.
Pak $T^{-1} = (\sqrt{T})^{-1}(\sqrt{T})^{-1} \Rightarrow (\sqrt{T})^{-1} = \sqrt{T^{-1}}$, neboť $\sqrt{T^{-1}}$ je dle 3.52 určen jednoznačně. □

**Důsledek 4.12.**
*Jestliže* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *a* $\mathcal{R}(T^*)$ *nebo* $\mathcal{R}(T)$ *je uzavřený, pak jsou uzavřené oba prostory* $\mathcal{R}(T)$ *i* $\mathcal{R}(T^*)$ *a* $\dot{T} : \mathcal{R}(T^*) \to \mathcal{R}(T) \overset{4.3}{=} \mathcal{R}(\dot{T})$ *i* $\dot{T}^* : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{R}(T^*) \overset{4.3}{=} \mathcal{R}(\dot{T}^*)$ *jsou TLI.*

*Důkaz.* Užitím 4.3(2) dostáváme:
I. $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{R}(\dot{T}^*)$ uzavřený (H-prostor) $\overset{4.9}{\Rightarrow} \dot{T}$ je TLI a dle 4.5 je $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(\dot{T})$ uzavřený.
II. $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(\dot{T}) = \mathcal{R}(\dot{T}^{**})$ uzavřený (H-prostor) $\overset{4.9}{\Rightarrow} \dot{T}^*$ je TLI a dle 4.5 je $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{R}(\dot{T}^*)$ uzavřený. □

**Příklad 4.13.** Jestliže $H_1 := \mathbb{C}^n$ a $H_2 := \mathbb{C}^m$, pak každý lineární operátor $T : H_1 \to H_2$ je spojitý a je určen maticí $\boldsymbol{T}$ rozměru $m \times n$ (viz příklad 3.7(1)(2)). Zejména každý lineární izomorfismus $T$ je automaticky TLI. Prostory $\mathcal{R}(T) \subseteq \mathbb{C}^m$ a a $\mathcal{R}(T^*) \subseteq \mathbb{C}^n$ mají konečnou dimenzi a jsou tedy vždy uzavřené dle 2.55.

(1) Podle 4.12 je $\mathcal{R}(T) \overset{TLI}{\simeq} \mathcal{R}(T^*)$, což nastane právě když $\dim\mathcal{R}(T) = \dim\mathcal{R}(T^*)$. Jelikož $\dim\mathcal{R}(T)$, resp. $\dim\mathcal{R}(T^*)$ udává po řadě sloupcovou a řádkovou hodnost matice $\boldsymbol{T}$, tak přímým důsledkem 4.12 je tvrzení o shodě sloupcové a řádkové hodnosti matic, známé ze základních kurzů lineární algebry.

(2) $\underline{T \text{ je TLI } H_1 \to \mathcal{R}(T)}$ $\overset{4.9(3)}{\Leftrightarrow} \mathcal{N}(T) = \{0\} \Leftrightarrow$ sloupce matice $\boldsymbol{T}$ jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow$ <u>matice $\boldsymbol{T}$ je sloupcově plné hodnosti</u>.

(3) <u>$T$ je surjektivní $H_1 \to H_2$</u> $\Leftrightarrow$ $H_2 = \mathcal{R}(T)$ $\Leftrightarrow$ $m = \dim H_2 = \dim\mathcal{R}(T) =$ hodnost matice $T$ $\Leftrightarrow$ <u>matice $\boldsymbol{T}$ je řádkově plné hodnosti</u> (řádky $\boldsymbol{T}$ jsou lineárně nezávislé).

(4) <u>$T$ je TLI $H_1 \to H_2$</u> $\Leftrightarrow$ platí (2) a (3) $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{T}$ je řádkově i sloupcově plné hodnosti $\Leftrightarrow$ <u>$\boldsymbol{T}$ je čtvercová regulární</u> (viz též 2.52).

(5) Rozklad 4.1(3) je ekvivalentem známé Frobeniovy věty o řešitelnosti systému lineárních rovnic $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{y}$ a jejích důsledků (viz `[ZM1:Tvrzení 5.2,5.3, s.98-99]`). Jádro $\mathcal{N}(T)$ popisuje právě podprostor všech řešení příslušného homogenního systému ($\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{0}$), jehož dimenze je pak $n - \mathrm{r}(\boldsymbol{T}) = n - \mathrm{r}(\boldsymbol{T}^*)$ užitím A.11. Je-li $\boldsymbol{x}_0$ nějaké partikulární řešení systému $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{y}$, pak množina všech řešení je $\boldsymbol{x}_0 + \mathcal{N}(T)$, což je právě třída rozkladu $\mathbb{C}^n/\mathcal{N}(T)$ obsahující partikulární řešení $\boldsymbol{x}_0$.

## 4.2 Konstrukce inverze

**Věta 4.14.** *$T \in \mathcal{B}(B,B), \|T\| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ konverguje v $\mathcal{B}(B,B)$ a platí:*

*(1) $\mathcal{R}(I-T) = B$, existuje $(I-T)^{-1} \in \mathcal{B}(B,B)$, neboli $I - T : B \to B$ je TLI.*

*(2) $(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.*

*(3) $\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$.*

*Rychlost konvergence řady (2) je přitom nepřímo úměrná velikosti normy $\|T\|$.*

*Důkaz.* $\|T\| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n$ konverguje $\Rightarrow \{\sum_{n=0}^{k} \|T\|^n\}$ je cauchyovská. Pak $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ dle 3.4 $\Rightarrow$ pro libovolné $m > k$ je $\|T^{k+1} + \cdots + T^m\| \leq \|T\|^{k+1} + \cdots + \|T\|^m \Rightarrow$ posloupnost částečných součtů $S_k = \sum_{n=0}^{k} T^n$ je cauchyovská $\Rightarrow \{S_k\}$ je konvergentní v $\mathcal{B}(B,B)$, neboť $\mathcal{B}(B,B)$ je úplný dle 3.8. Položme $S := \lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$, je $S \in \mathcal{B}(B,B)$. Platí $TS = \sum_{n=1}^{\infty} T^n = ST$, neboť $\|TS_k - TS\| = \|T(S_k - S)\| \leq \|T\|\|S_k - S\| \to 0$ a analogicky $\|S_kT - ST\| \to 0$, přičemž $TS_k = S_kT = \sum_{n=1}^{k+1} T^k$. Odtud $(I-T)S = S - TS = I = S - ST = S(I-T) \Rightarrow S = (I-T)^{-1} \in \mathcal{B}(B,B)$ a zejména $\mathcal{R}(I-T) = B$. Dále platí $\|(I-T)^{-1}\| = \|S\| \overset{2.49}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \overset{3.4}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}$ (součet geometrické řady). Analogicky $\|S - S_k\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|T\|^n$, takže rychlost konvergence řady (2) je determinována rychlostí konvergence geometrické řady, která konverguje rychleji s klesající velikostí jejího kvocientu $\|T\|$.

$\square$

**Důsledek 4.15 (Výpočet inverze operátoru $T$ v Banachově prostoru).**
*$T \in \mathcal{B}(B,B), \|I - \lambda T\| < 1, 0 \neq \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (I - \lambda T)^n$ konverguje v $\mathcal{B}(B,B)$ a platí*

*(1') $\mathcal{R}(T) = B$, existuje $T^{-1} \in \mathcal{B}(B,B)$, neboli $T : B \to B$ je TLI.*

*(2') $T^{-1} = \lambda(I + (I - \lambda T) + (I - \lambda T)^2 + \cdots) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (I - \lambda T)^n$*

*(tzv. **Neumannova řada**).*

*(3') $\|T^{-1}\| \leq \frac{|\lambda|}{1-\|I-\lambda T\|}$.*

*Rychlost konvergence řady (2') je přitom nepřímo úměrná velikosti normy $\|I - \lambda T\|$.*

*Důkaz.* Ve 4.14 zaměníme $T$ za $I - \lambda T$. Pak bude $\lambda T$ místo $I - T$, $\frac{1}{\lambda}T^{-1} = (\lambda T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - \lambda T)^n$ a $\frac{1}{|\lambda|}\|T^{-1}\| = \|\frac{1}{\lambda}T^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|I-\lambda T\|}$. $\square$

**Důsledek 4.16 (Výpočet inverze operátoru $T = T^*$ v H-prostoru).**
*Jestliže $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $H \neq \{0\}$, $T = T^*$, kde $\alpha \leq \alpha_T \leq T \leq \beta_T \leq \beta$ dle 3.43, pak $\|I - \lambda T\| = \max(|1 - \lambda\alpha_T|, |1 - \lambda\beta_T|) \leq \max(|1 - \lambda\alpha|, |1 - \lambda\beta|)$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$. Přitom pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ je: $\|I - \lambda T\| < 1 \;\Leftrightarrow\; \lambda > 0, \alpha_T > 0$ nebo $\lambda < 0, \beta_T < 0$ a současně $0 < |\lambda| < \frac{2}{\|T\|} = \frac{2}{\max(|\alpha_T|,|\beta_T|)}$, resp. $0 < |\lambda| < \frac{2}{\max(|\alpha|,|\beta|)} \leq \frac{2}{\max(|\alpha_T|,|\beta_T|)}$.*
*V takovém případě platí 4.15(1') až (3') a $T^{-1}$ se spočte užitím Neumannovy řady.*

*Důkaz.* $I - \lambda T$ je samoadjungovaný, neboť $(I - \lambda T)^* = I^* - \overline{\lambda}T^* = I - \lambda T$ pro $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pak pro $\forall x \in H, \|x\| = 1$ je $\langle (I - \lambda T)x, x\rangle = 1 - \lambda\langle Tx, x\rangle$, přičemž

(a) pro $\lambda \geq 0$: $\alpha \leq \alpha_T \leq \langle Tx, x\rangle \leq \beta_T \leq \beta \;\Leftrightarrow\; 1-\lambda\beta \leq 1-\lambda\beta_T \leq 1-\lambda\langle Tx, x\rangle \leq 1-\lambda\alpha_T \leq 1-\lambda\alpha$.

(b) pro $\lambda < 0$: $\alpha \leq \alpha_T \leq \langle Tx, x\rangle \leq \beta_T \leq \beta \;\Leftrightarrow\; 1-\lambda\alpha \leq 1-\lambda\alpha_T \leq 1-\lambda\langle Tx, x\rangle \leq 1-\lambda\beta_T \leq 1-\lambda\beta$.

Odtud $\|I-\lambda T\| = \max(|1-\lambda\alpha_T|, |1-\lambda\beta_T|) \leq \max(|1-\lambda\alpha|, |1-\lambda\beta|)$, neboť hranice operátoru $I-\lambda T$ (infimum, resp. supremum výrazu $1-\lambda\langle Tx, x\rangle$) korespondují dle (a)(b) s hranicemi operátoru $T$ (infimum nebo supremum výrazu $\langle Tx, x\rangle$ podle znaménka $\lambda$). Pak $\|I-\lambda T\| < 1 \Leftrightarrow |1-\lambda\alpha_T| < 1$ a $|1-\lambda\beta_T| < 1 \;\Leftrightarrow\; 0 < \lambda\alpha_T < 2$ a $0 < \lambda\beta_T < 2$, což nastane právě když $\lambda, \alpha_T, \beta_T$ jsou všechna kladná nebo záporná a současně platí $0 < |\lambda| < \min(\frac{2}{|\alpha_T|}, \frac{2}{|\beta_T|}) = \frac{2}{\max(|\alpha_T|,|\beta_T|)} \overset{3.43}{=} \frac{2}{\|T\|}$. □

**Věta 4.17.**
*Nechť $T \in \mathcal{B}(H, H)$, $T = T^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $T = \alpha I_H$ právě když $\alpha \leq T \leq \alpha^2$.*

*Důkaz.*
1. $H = \{0\}$: $T \in \mathcal{B}(H, H) \Rightarrow 0 = T = I_H \Rightarrow \alpha I_H = 0\,\forall\alpha \in \mathbb{R}$, přičemž $\alpha \leq T \leq \beta$ platí triviálně dle poznámky 3.40(1) pro $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a tedy zejména i pro $\alpha = \beta$.
2. $H \neq \{0\}$: $T = \alpha I_H \;\Leftrightarrow\; T - \alpha I_H = 0 \overset{3.37}{\Leftrightarrow} \forall x \in H$ je $0 = \langle (T-\alpha I_H)x, x\rangle = \langle Tx - \alpha I_H x, x\rangle$ $= \langle Tx, x\rangle - \langle \alpha x, x\rangle \;\Leftrightarrow\; \forall x \in H$ je $\langle Tx, x\rangle = \langle \alpha x, x\rangle = \alpha\langle x, x\rangle = \alpha\|x\|^2 \overset{3.39}{\Leftrightarrow} \alpha \leq T \leq \alpha$. □

*Poznámka* 4.18.
Ze 4.16 plyne:
(1) $T = T^*, \|I-\lambda T\| < 1 \Rightarrow \beta_T \geq T \geq \alpha_T > 0$ nebo $\alpha_T \leq T \leq \beta_T < 0$. Tedy zejména $T$ je buď striktně pozitivní a $\lambda > 0$ nebo striktně negativní a $\lambda < 0$.
(2) Z hlediska co nejrychlejší konvergence řady 4.15(2') je optimální volbou takové $\lambda$, které minimalizuje normu $\|I-\lambda T\| \overset{4.16}{=} \max(|1-\lambda\alpha_T|, |1-\lambda\beta_T|)$. Nechť $\mathcal{I}[\lambda\alpha_T, \lambda\beta_T]$ značí uzavřený interval určený krajními body $\lambda\alpha_T$ a $\lambda\beta_T$, kde $0 < \lambda\alpha_T, \lambda\beta_T < 2$ dle důkazu 4.16. Pak $\|I-\lambda T\|$ je právě vzdálenost hodnoty 1 od nejvzdálenějšího okraje tohoto intervalu, takže bude minimální právě když hodnota 1 bude středem tohoto intervalu, tj. právě když $1 = \frac{\lambda(\alpha_T+\beta_T)}{2}$, neboli právě když $\boxed{\lambda = \dfrac{2}{\alpha_T+\beta_T}}$. Jelikož $\lambda, \alpha_T, \beta_T$ mají stejné znaménko, tak $|\lambda| = \frac{2}{|\alpha_T|+|\beta_T|} < \frac{2}{\max(|\alpha_T|,|\beta_T|)}$ a tedy tato volba je korektní dle 4.16. Pokud $\dim H < \infty$, pak dle 3.42(3.7b) je optimální volbou $\lambda = \frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}$, kde $\lambda_{\min}$ a $\lambda_{\max}$ je po řadě minimální a maximální vlastní číslo matice $[T]$, neboli $\frac{1}{\lambda}$ je průměrná hodnota minimálního a maximálního vlastního čísla matice $[T]$.
(3) Absolutně nejrychlejší konvergence dosáhneme právě když $\|I-\lambda T\| = 0 \;\Leftrightarrow\; T = \frac{1}{\lambda}I \overset{4.17}{\Leftrightarrow} \alpha_T = \beta_T = \frac{1}{\lambda}$, což je v souladu s $\lambda = \frac{2}{\alpha_T+\beta_T}$. V tomto případě totiž v Neumannově řadě 4.15(2') je $(I-\lambda T)^n = 0$ pro každé $n > 0$ a $T^{-1} = \lambda I = \frac{1}{1/\lambda}I^{-1}$ dle očekávání.

[2] V takovém případě $\|x\| = 1 \Rightarrow \|Tx\| = \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| = |\alpha|$, takže operátor zobrazuje jednotkovou kouli na kouli o poloměru $|\alpha|$.

# 5 PSEUDOINVERZE SPOJITÝCH LINEÁRNÍCH OPERÁTORŮ

**Definice 5.1 (Pseudoinverze spojitých lineárních operátorů).**
Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ a $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$. Operátor $T^+ \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ nazýváme (Moore-Penroseovou) **pseudoinverzí operátoru** $T$, jestliže platí:

(I1) $TT^+T = T$
(I2) $T^+TT^+ = T^+$
(I3) $(TT^+)^* = TT^+$ ($TT^+$ je samoadjungovaný)
(I4) $(T^+T)^* = T^+T$ ($T^+T$ je samoadjungovaný)

**Věta 5.2.**
*Jestliže $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ a $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, pak rovněž $\mathcal{R}(T^*) = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$ a $\dot{T}$ i $\dot{T}^*$ jsou TLI a k $T$ existuje právě jedna pseudoinverze $T^+ = \dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)}$, kde $\mathcal{R}(T^+) = \mathcal{R}(\dot{T}^{-1}) = \mathcal{R}(T^*)$ a $\mathcal{N}(T^+) = \mathcal{N}(T^*)$.*

*Důkaz.*
4.12 $\Rightarrow \mathcal{R}(T^*)$ je uzavřený, $\dot{T}$ i $\dot{T}^*$ jsou TLI a $\dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)} \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$. Přitom $\mathcal{R}(T^+) = \mathcal{R}(\dot{T}^{-1}) = \mathcal{R}(T^*)$, neboť $P_{\mathcal{R}(T)}$ je surjekce. Dále $y \in \mathcal{N}(T^+) \;\Leftrightarrow\; 0 = T^+y = \dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)}y \;\Leftrightarrow\; P_{\mathcal{R}(T)}y = 0 \overset{3.60(2)}{\Leftrightarrow} y \in \mathcal{R}(T)^\perp \overset{4.1(2)}{=} \mathcal{N}(T^*)$, takže $\mathcal{N}(T^+) = \mathcal{N}(T^*)$ rovněž platí. Identity (I1)–(I4) ověříme užitím vlastností 3.56 a 3.60 operátoru ortogonální projekce spolu s $\mathcal{R}(\dot{T}) \overset{4.3(2)}{=} \mathcal{R}(T)$:

(I1) $\forall\, x \in H_1$: $TT^+Tx = T\dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)} \underbrace{Tx}_{\in\mathcal{R}(T)} = T\underbrace{\dot{T}^{-1}Tx}_{\in\mathcal{R}(T^*)} = \dot{T}\dot{T}^{-1}Tx = Tx.$

(I2) $\forall\, y \in H_2$: $T^+TT^+y = \dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)}T\underbrace{\dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)}y}_{\in\mathcal{R}(T^*)} = \dot{T}^{-1}P^2_{\mathcal{R}(T)}y \overset{3.56(3)}{=} \dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)}y = T^+y.$

(I3) $TT^+ = T\dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)} = P_{\mathcal{R}(T)}$ je samoadjungovaný dle 3.56(3).
(I4) Pro každé $x \in H_1$: $T^+Tx = \dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)}Tx = \dot{T}^{-1}Tx = \dot{T}^{-1}T(\widehat{x} + x^\perp) = \dot{T}^{-1}\dot{T}\widehat{x} = \widehat{x}$, kde $\widehat{x} = P_{\mathcal{R}(T^*)}x$ a $x^\perp \in \mathcal{N}(T)$ dle 4.1(3) [proto $Tx^\perp = 0$]. Tedy $T^+T = P_{\mathcal{R}(T^*)}$ je opět samoadjungovaný.
<u>Jednoznačnost</u>: Předpokládejme, že $T_1^+$ a $T_2^+$ jsou pseudoinverze k $T$. Pak
$T_1^+ \overset{(I2)}{=} T_1^+TT_1^+ \overset{(I1)}{=} T_1^+TT_2^+TT_1^+ \overset{(I3)}{=} T_1^+(TT_2^+)^*(TT_1^+)^* \overset{3.29}{=} T_1^+(TT_1^+TT_2^+)^* \overset{(I1)}{=} T_1^+(TT_2^+)^* \overset{(I3)}{=} T_1^+TT_2^+ \overset{(I4)}{=} (T_1^+T)^*T_2^+ \overset{(I1)}{=} (T_1^+TT_2^+T)^*T_2^+ \overset{3.29}{=} (T_2^+T)^*(T_1^+T)^*T_2^+ \overset{(I4)}{=} T_2^+TT_1^+TT_2^+ \overset{(I1)}{=} T_2^+TT_2^+ \overset{(I2)}{=} T_2^+.$ □

**Důsledek 5.3.**
*(1) $TT^+ = P_{\mathcal{R}(T)} : H_2 \to \mathcal{R}(T)$, $I - TT^+ = P_{\mathcal{N}(T^*)} : H_2 \to \mathcal{R}(T)^\perp \overset{4.1(2)}{=} \mathcal{N}(T^*)$.*
*(2) $T^+T = P_{\mathcal{R}(T^*)} : H_1 \to \mathcal{R}(T^*)$, $I - T^+T = P_{\mathcal{N}(T)} : H_1 \to \mathcal{R}(T^*)^\perp \overset{4.1(1)}{=} \mathcal{N}(T)$.*
*(3) $T^+ = T^+P_{\mathcal{R}(T)} = P_{\mathcal{R}(T^*)}T^+$, $T = TP_{\mathcal{R}(T^*)} = P_{\mathcal{R}(T)}T$.*
*(4) $T = T^* \Rightarrow TT^+ = T^+T = P_{\mathcal{R}(T)}$, $I - TT^+ = I - T^+T = P_{\mathcal{N}(T)}$ a*
*$T^+ = T^+P_{\mathcal{R}(T)} = P_{\mathcal{R}(T)}T^+$, $T = TP_{\mathcal{R}(T)} = P_{\mathcal{R}(T)}T$.*

*Důkaz.*
<u>(1)(2)</u>: $TT^+ = P_{\mathcal{R}(T)}$ a $T^+T = P_{\mathcal{R}(T^*)}$ bylo již dokázáno při ověřování identit (I3) a (I4) v důkazu věty 5.2. Pro $I - TT^+$ a $I - T^+T$ je tvrzení důsledkem 3.59.
<u>(3)</u>: plyne z (1) a (2) užitím identit (I1) a (I2).
<u>(4)</u>: je důsledkem (1) až (3), neboť při $T = T^*$ je $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T^*)$ a $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$. □

**Důsledek 5.4.** *$x^+ := T^+y = \arg\min_{x\in H_1} \|y - Tx\|$, kde $x^+ \in \mathcal{R}(T^*)$ a $Tx^+ = P_{\mathcal{R}(T)}y$. Přitom $Tx = Tx^+$, $x \neq x^+ \Rightarrow x \notin \mathcal{R}(T^*)$ a $\|x\| > \|x^+\|$, takže $x^+$ je jediné řešení rovnice $Tx = y$ minimalizující normu odchylky od pravé strany, které samo má minimální normu mezi všemi takovými řešeními.*

*Důkaz.* $x^+ = T^+y \in \mathcal{R}(T^+) \overset{5.2}{=} \mathcal{R}(T^*)$ a $Tx^+ = TT^+y \overset{5.3(1)}{=} P_{\mathcal{R}(T)}y =: \widehat{y}$, takže dle věty o ortogonální projekci 3.54(i) je $\|y - \widehat{y}\| = \inf_{z\in\mathcal{R}(T)} \|y - z\| = \inf_{x\in H_1} \|y - Tx\|$.
Nechť $Tx = Tx^+$ pro $x \neq x^+$, pak $T(x - x^+) = 0 \Rightarrow x - x^+ \in \mathcal{N}(T) \perp \mathcal{R}(T^*) \ni x^+$. Odtud $\|x\|^2 = \|(x - x^+) + x^+\|^2 \overset{2.60/6^\circ}{=} \underbrace{\|x - x^+\|^2}_{>0} + \|x^+\|^2 > \|x^+\|^2$. Přitom kdyby $x \in \mathcal{R}(T^*)$, tak by $x - x^+ \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^*) = \{0\} \Rightarrow x = x^+$, takže $x^+$ je jediný takový. □

**Důsledek 5.5 (Některé další odvozené identity pro $T^+$).**
*(I5)* $0^+ = 0^*$, *kde* $0(x) = 0$ *pro každé* $x \in H_1$ *a* $0^*(y) = 0$ *pro každé* $y \in H_2$.
*(I6)* $(T^*)^+ = (T^+)^*$ *a zejména* $T$ *samoadjungovaný* $\Rightarrow T^+$ *samoadjungovaný.*
*(I7)* $T^{++} = T$.
*(I8) Je-li* $T$ *TLI* $H_1$ *na* $H_2$, *pak* $T^+ = T^{-1}$.
*(I9) Je-li* $c \in \mathbb{C}$, *pak* $(cT)^+ = c^+T^+$, *kde* $c^+ = \begin{cases} \frac{1}{c} & \text{pro } c \neq 0, \\ 0 & \text{pro } c = 0. \end{cases}$
*(I10)* $(T^*T)^+ = T^+(T^*)^+$ *a* $(TT^*)^+ = (T^*)^+T^+$ *jsou samoadjungované operátory, přičemž* $\mathcal{R}(T^*T) = \mathcal{R}(T^*)$ *a* $\mathcal{R}(TT^*) = \mathcal{R}(T)$ *jsou uzavřené.*
*(I11)* $T^+ = (T^*T)^+T^* =: R^+T^*$, *kde* $R := T^*T$.
*(I12)* $T^+ = T^*(TT^*)^+ =: T^*S^+$, *kde* $S := TT^*$.

*Důkaz.*
(I5): $5.2 \Rightarrow \mathcal{R}(0^+) = \mathcal{R}(0^*) = \{0\} \Rightarrow 0^+ = 0^*$ je nulový operátor na $H_2$.
(I6): Aplikujme $^*$ na (I1)–(I4) užitím 3.29 a v (I3) a I(4) navíc vztahů $(\#)^{**} \overset{3.27}{=} (\#)$. Pak obdržíme identity (I1)–(I4) pro $T^*$, kde $(T^*)^+ = (T^+)^*$.
(I7): Záměnou role $T^+$ a $T$ v (I1)–(I4) dostaneme identity (I1)–(I4) pro $T^+$, kde $T^{++} = T$.
(I8): Je-li $T : H_1 \to H_2$ TLI, pak $\mathcal{R}(T) = H_2$ a $\mathcal{R}(T^*) \overset{4.9}{=} H_1 \Rightarrow P_{\mathcal{R}(T)} = I$, $\dot{T} = T \Rightarrow T^+ = \dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)} = T^{-1}$.
(I9): Je-li $c = 0$,pak $cT = 0 \overset{(I5)}{\Rightarrow} (cT)^+ = 0^* = 0\dot{T}^+ = c^+T^+$; pokud $c \neq 0$, tak snadno ověříme, že $(cT)^+ = \frac{1}{c}T^+$ splňuje (I1)–(I4) pro $cT$, pokud $T^+$ splňuje (I1)–(I4) pro $T$.
(I10): $\mathcal{R}(T)$ je uzavřený dle definice 5.1, pak taktéž $\mathcal{R}(T^*)$ je uzavřený dle 4.12 a dle 4.1(6) pak platí $\mathcal{R}(T^*T) = \mathcal{R}(T^*)$ i $\mathcal{R}(TT^*) = \mathcal{R}(T)$.
Pak pro $R := T^*T$ je $R^* = R$, takže $\mathcal{R}(R) = \mathcal{R}(R^*) = \mathcal{R}(T^*)$ je uzavřený a $\dot{T}^*\dot{T} = \dot{R} : \mathcal{R}(T^*) = \mathcal{R}(R^*) \twoheadrightarrow \mathcal{R}(R) = \mathcal{R}(T^*)$ je TLI dle 4.12 a pro každé $x \in H_1$ je $R^+x = \dot{R}^{-1}P_{\mathcal{R}(R)}x = \dot{T}^{-1}\underbrace{(\dot{T}^*)^{-1}P_{\mathcal{R}(T^*)}x}_{\in\mathcal{R}(T)} \overset{3.60(1)}{=} \dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)}(\dot{T}^*)^{-1}P_{\mathcal{R}(T^*)}x = T^+(T^*)^+x$.
Pro $S = TT^*$ platí $S^+ = (T^*)^+T^+$ záměnou role $T$ a $T^*$.
Operátory $R^+$ a $S^+$ jsou samoadjungované dle (I6).
(I11) i (I12) jsou přímým důsledkem (I10) a dalších identit takto:
$(T^*T)^+T^* \overset{(I10)}{=} T^+(T^*)^+T^* \overset{(I6)}{=} T^+(T^+)^*T^* \overset{3.29}{=} T^+(TT^+)^* \overset{(I3)}{=} T^+TT^+ \overset{(I2)}{=} T^+$.
$T^*(TT^*)^+ \overset{(I10)}{=} T^*(T^*)^+T^+ \overset{(I6)}{=} T^*(T^+)^*T^+ \overset{3.29}{=} (T^+T)^*T^+ \overset{(I4)}{=} T^+TT^+ \overset{(I2)}{=} T^+$. □

*Poznámka* 5.6. Podívejme se na identitu (I11) optikou regresní analýzy. Základní statistická teorie říká, že jsou-li $\boldsymbol{y}$ pozorování, $\boldsymbol{T}$ je tzv. matice plánu a $\boldsymbol{x}$ regresní koeficienty, vše v reálném oboru, postupně rozměrů $m \times 1$, $m \times n$, $n \times 1$, $m > n$, pak odhad $\widehat{\boldsymbol{x}}$ pro model $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\epsilon}$ metodou nejmenších čtverců vyhovuje soustavě tzv. normálních rovnic

$$(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T})\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{y}. \tag{5.1}$$

To znamená, že obraz vektoru $\boldsymbol{y}$ operátorem $\boldsymbol{T}^T$ je totožný s obrazem vektoru $\boldsymbol{T}\widehat{\boldsymbol{x}}$ stejným operátorem. Pokud $\boldsymbol{T}$ je plné sloupcové hodnosti, pak $(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T})$ je invertovatelná a odhad lze najít přímo jako $\widehat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{y}$. Pokud $\boldsymbol{T}$ je nižší hodnosti, pak je nutné použít vztah $\widehat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T})^{+}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{y}$, což koresponduje s identitou (I11).

Viz také poznámku 3.61, která ukazuje, že $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^T$ je ortogonální projektor na prostor generovaný sloupci matice $\boldsymbol{T}$.

**Důsledek 5.7** (**Některé další odvozené identity pro $R^+$ a $S^+$**).

*(I13)* $SS^+ = S^+S = P_{\mathcal{R}(T)}$ *a* $RR^+ = R^+R = P_{\mathcal{R}(T^*)}$, *přičemž* $\mathcal{R}(S^+) = \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$ *a* $\mathcal{R}(R^+) = \mathcal{R}(R) = \mathcal{R}(T^*)$.

*(I14)* $S = SP_{\mathcal{R}(T)} = P_{\mathcal{R}(T)}S$, $R = RP_{\mathcal{R}(T^*)} = P_{\mathcal{R}(T^*)}R$ *a* $S^+ = S^+P_{\mathcal{R}(T)} = P_{\mathcal{R}(T)}S^+$, $R^+ = R^+P_{\mathcal{R}(T^*)} = P_{\mathcal{R}(T^*)}R^+$.

*(I15)* $(R^+)^* = R^+$ *a* $(S^+)^* = S^+$ *jsou samoadjungované.*

*(I16)* $(T^+)^* = TR^+ = S^+T$.

*Důkaz.*

(I13): $S = S^* \overset{5.3(4)}{\Rightarrow} SS^+ = S^+S = P_{\mathcal{R}(S)} \overset{(I10)}{=} P_{\mathcal{R}(T)}$ a $R = R^* \overset{5.3(4)}{\Rightarrow} RR^+ = R^+R = P_{\mathcal{R}(R)} \overset{(I10)}{=} P_{\mathcal{R}(T^*)}$. Přitom $\mathcal{R}(S^+) \overset{5.2}{=} \mathcal{R}(S^*) = \mathcal{R}(S) \overset{(I10)}{=} \mathcal{R}(T)$ a $\mathcal{R}(R^+) \overset{5.2}{=} \mathcal{R}(R^*) = \mathcal{R}(R) \overset{(I10)}{=} \mathcal{R}(T^*)$.

(I14): plyne z 5.3(4) a dle (I13), kde $\mathcal{R}(S^+) = \mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T)$ a $\mathcal{R}(R^+) = \mathcal{R}(R) = \mathcal{R}(T^*)$.

(I15): $S^+$ a $R^+$ jsou samoadjungované dle (I6).

(I16): Dle identit (I11) a (I12) je $T^+ = R^+T^* = T^*S^+ \overset{3.29}{\Rightarrow} (T^+)^* = T(R^+)^* = (S^+)^*T$, kde $(R^+)^* \overset{(I6)}{=} (R^*)^+ = R^+$ a $(S^+)^* \overset{(I6)}{=} (S^*)^+ = S^+$. □

**Věta 5.8** (**Normy pseudoinverzních operátorů**).

*Nechť* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *a* $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(T)$. *Pak platí:*

*(1)* $\|T^+\| = \|\dot{T}^{-1}\| = \|(T^*)^+\| = \|(\dot{T}^*)^{-1}\|$.

*(2)* $\|S\| = \|R\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$.

*(3)* $\|S^+\| = \|R^+\| = \|T^+\|^2 = \|(T^*)^+\|^2 = \|\dot{T}^{-1}\|^2 = \|(\dot{T}^*)^{-1}\|^2$.

*Důkaz.*

(1) $T^+ \overset{5.2}{=} \dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)} \overset{3.4}{\Rightarrow} \|T^+\| \le \|\dot{T}^{-1}\|\|P_{\mathcal{R}(T)}\| = \|\dot{T}^{-1}\|$, neboť $\|P_{\mathcal{R}(T)}\| = 1$ dle 3.57.

Naopak: pro každé $y \in \mathcal{R}(T) \overset{4.3(2)}{=} \mathcal{R}(\dot{T})$ je $\|\dot{T}^{-1}y\| \overset{3.60(1)}{=} \|\dot{T}^{-1}P_{\mathcal{R}(T)}y\| = \|T^+y\| \le \|T^+\|\|y\|$. Odtud $\|\dot{T}^{-1}\| \le \|T^+\|$ a celkem $\|T^+\| = \|\dot{T}^{-1}\|$.

$\|(T^*)^+\| \overset{(I6)}{=} \|(T^+)^*\| \overset{3.27}{=} \|T^+\| = \|\dot{T}^{-1}\| \overset{3.27}{=} \|(\dot{T}^{-1})^*\| \overset{3.32}{=} \|(\dot{T}^*)^{-1}\|$, protože $\dot{T}$ je TLI dle 4.12.

(2) je důsledkem 3.28.

(3) $\left.\begin{array}{l} S^+ = (TT^*)^+ \overset{(I10)}{=} (T^*)^+T^+ \overset{(I6)}{=} (T^+)^*T^+ \\ R^+ = (T^*T)^+ \overset{(I10)}{=} T^+(T^*)^+ \overset{(I6)}{=} T^+(T^+)^* \end{array}\right\} \overset{3.28}{\Rightarrow} \|S^+\| = \|R^+\| = \|T^+\|^2 = \|(T^+)^*\|^2 \overset{(I6)}{=} \|(T^*)^+\|^2$. Zbývající identity plynou z (1).

□

**Definice 5.9** (**Číslo podmíněnosti operátoru $T$**).

Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ a $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, pak číslo $\kappa(T) := \|T\|\|T^+\|$ nazýváme **číslem podmíněnosti operátoru** $T$.

**Věta 5.10 (Vlastnosti čísla podmíněnosti).**
*Nechť* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *a* $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, *pak platí:*

*(1)* $\kappa(T^*) = \kappa(T) = \kappa(\dot{T}) = \|\dot{T}\|\|\dot{T}^{-1}\| = \kappa(\dot{T}^{-1}) = \kappa(T^+) = \kappa((T^+)^*)$.

*(2)* $\kappa(T) = \sqrt{\frac{\beta_{\dot{R}}}{\alpha_{\dot{R}}}} = \sqrt{\frac{\beta_{\dot{S}}}{\alpha_{\dot{S}}}}$ *a platí* $1 \le \kappa(T) < \infty$.

*Důkaz.* Při důkazu využíváme fakt, že $\dot{T}$ je TLI dle 4.12.

(1) $\kappa(T^+) = \|T^+\|\|T^{++}\| \overset{(I7)}{=} \|T^+\|\|T\| = \kappa(T) \overset{4.3(3)}{=} \|\dot{T}\|\|T^+\| \overset{5.8(1)}{=} \|\dot{T}\|\|\dot{T}^{-1}\| \overset{(I8)}{=} \kappa(\dot{T})$.
Odtud $\|\dot{T}\|\|\dot{T}^{-1}\| = \|\dot{T}^{-1}\|\|(\dot{T}^{-1})^{-1}\| \overset{(I8)}{=} \|\dot{T}^{-1}\|\|(\dot{T}^{-1})^+\| = \kappa(\dot{T}^{-1})$.
$\underline{\kappa(T^*)} = \|T^*\|\|(T^*)^+\| \overset{(I6)}{=} \|T^*\|\|(T^+)^*\| \overset{3.27}{=} \|T\|\|T^+\| = \underline{\kappa(T)}$.
Odtud $\kappa((T^+)^*) = \kappa(T^+)$ po záměně $T \rightsquigarrow T^+$.

(2) Dle 3.50 je $\|\dot{T}\|^2 = \beta_{\dot{R}} = \beta_{\dot{S}}$. Dále platí $\alpha_{\dot{R}} \overset{3.41}{=} \inf_{\|x\|=1} \langle \dot{T}^*\dot{T}x, x\rangle = \inf_{\|x\|=1} \langle \dot{T}x, \dot{T}x\rangle =$ $\inf_{\|x\|=1} \|\dot{T}x\|^2 \overset{4.4}{=} \frac{1}{\|\dot{T}^{-1}\|^2} \overset{3.27}{=} \frac{1}{\|(\dot{T}^{-1})^*\|^2} \overset{3.32}{=} \frac{1}{\|(\dot{T}^*)^{-1}\|^2} \overset{4.4}{=} \inf_{\|x\|=1} \|\dot{T}^*x\|^2 = \inf_{\|x\|=1} \langle \dot{T}^*x, \dot{T}^*x\rangle =$ $\inf_{\|x\|=1} \langle \dot{T}\dot{T}^*x, x\rangle \overset{3.41}{=} \alpha_{\dot{S}}$, takže jsme také dokázali $\|\dot{T}^{-1}\|^2 = \frac{1}{\alpha_{\dot{R}}} = \frac{1}{\alpha_{\dot{S}}}$. Odtud pak $\kappa(T)^2 \overset{(1)}{=}$ $\|\dot{T}\|^2\|\dot{T}^{-1}\|^2 = \frac{\beta_{\dot{R}}}{\alpha_{\dot{R}}} = \frac{\beta_{\dot{S}}}{\alpha_{\dot{S}}}$.

□

**Příklad 5.11.** Situaci budeme ilustrovat na příkladu maticového operátoru $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ určeného maticí $\boldsymbol{T}$ rozměru $m \times n$ o hodnosti $r = \dim \mathcal{R}(\boldsymbol{T}) = \dim \mathcal{R}(\boldsymbol{T}^*)$ (viz též poznámku 4.13):

Ze základního kurzu lineární algebry `[ZM1:kap. 6]` je známo, že takovou matici lze diagonalizovat pomocí tzv. **singulárního rozkladu**[1]. Jedná se o zobecnění postupu popsaného v příkladu 3.42 pro speciální případ $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^*$. Pro obecnou matici $\boldsymbol{T}$ tentokrát existují dvě unitární matice $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$ a $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m]$, kde sloupce $\boldsymbol{U}$ představují vhodnou novou ONB v $\mathbb{C}^n$ a sloupce $\boldsymbol{V}$ (obecně jinou) vhodnou ONB v $\mathbb{C}^m$ tak, že $\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ jsou tvaru $\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_j = \begin{cases} \sigma_j \boldsymbol{v}_j & \text{pro } j = 1, \dots, r \\ \boldsymbol{0} & \text{pro } j = r+1, \dots, n \end{cases}$, $\sigma_j \in \mathbb{R}$, což pro souřadnice v nových bázích $\xi_j$ a $\eta_j$ po řadě vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$ vede opět k diagonalizaci operátoru $\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{V}^*\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{V}^*\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\xi}$, kde $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\min(m,n)})$ je diagonální matice rozměru $m \times n$, jejíž nenulové diagonální prvky jsou kladné a obvykle sestupně uspořádané $\sigma_1 \ge \sigma_2 \dots \ge \sigma_r > 0$. Nazývají se **singulární čísla matice $\boldsymbol{T}$**, neboli platí $\eta_j = \begin{cases} \sigma_j \xi_j & \text{pro } j = 1, \dots, r \\ 0 & \text{pro } j = r+1, \dots, m. \end{cases}$

Z tohoto vyjádření je s uvážením ortogonality $\boldsymbol{u}_i \perp \boldsymbol{u}_j$ a $\boldsymbol{v}_i \perp \boldsymbol{v}_j$ $(i \ne j)$ zřejmé, že
$\mathcal{R}(\boldsymbol{T}) = \mathcal{L}(\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r\})$ dimenze $r$, $\mathcal{R}(\boldsymbol{T})^\perp = \mathcal{L}(\{\boldsymbol{v}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{v}_m\})$ dimenze $m - r$ a
$\mathcal{N}(\boldsymbol{T}) = \mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n\})$ dimenze $n - r$, $\mathcal{N}(\boldsymbol{T})^\perp = \mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r\})$ dimenze $r$.

To vede na ortogonální rozklad prostorů $H_1 := \mathbb{C}^n$ a $H_2 := \mathbb{C}^m$ jako v 4.1(3), kde dimenze se sčítají (viz A.11).

Aplikace [hermitovské] transpozice (operace adjungování), na rovnici $\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{D} \Rightarrow \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{V} = \boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{D}^T$ dává symetrický singulární rozklad pro $\boldsymbol{T}^*$ (záměna rolí $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{V}$) se stejnými singulárními čísly, takže $\mathcal{R}(\boldsymbol{T}^*) = \mathcal{N}(\boldsymbol{T})^\perp$ a $\mathcal{N}(\boldsymbol{T}^*) = \mathcal{R}(\boldsymbol{T})^\perp$ v souladu s 4.1(1)(2). Matice $\dot{\boldsymbol{T}}$ i $\dot{\boldsymbol{T}}^*$ je pak diagonalizována regulární maticí $\dot{\boldsymbol{D}} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ reprezentující po řadě TLI $\mathcal{R}(\boldsymbol{T}^*)$ na $\mathcal{R}(\boldsymbol{T})$, resp. TLI $\mathcal{R}(\boldsymbol{T})$ na $\mathcal{R}(\boldsymbol{T}^*)$ v bázích $\boldsymbol{U}$ na $\mathcal{R}(\boldsymbol{T}^*)$ a $\boldsymbol{V}$ na $\mathcal{R}(\boldsymbol{T})$.

Odtud SVD již snadno vede k diagonalizaci symetrických matic $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}$ a $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*$, kde $\boldsymbol{R} \ge 0$ a $\boldsymbol{S} \ge 0$ dle 3.50:

[1] V anglické terminologii *Singular Value Decomposition (SVD).* Rozklad je platný i nad $\mathbb{R}$, kde diagonalizační matice $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{V}$ jsou reálné.

$\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{V})(\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{T}^*\underbrace{(\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^*)}_{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$ a analogicky po záměně $\boldsymbol{T} \rightsquigarrow \boldsymbol{T}^*$ a $\boldsymbol{U} \rightsquigarrow \boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{D} \rightsquigarrow \boldsymbol{D}^*$ platí také $\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{V}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}$. Jelikož $\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-r)\times})$ a $\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^* = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2, \underbrace{0, \dots, 0}_{(m-r)\times})$, tak $\sigma_j^2$, $j = 1, \dots, r$, jsou právě všechna nenulová vlastní čísla matic $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{S}$. **Obě matice $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{S}$ mají tedy stejná nenulová vlastní čísla** (odpovídající vlastní vektory obecně nikoliv — mohou být z různých prostorů $\mathbb{C}^n \neq \mathbb{C}^m$ při $m \neq n$).

Matice $\dot{\boldsymbol{R}} = \dot{\boldsymbol{T}}^*\dot{\boldsymbol{T}}$ i $\dot{\boldsymbol{S}} = \dot{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{T}}^*$ je diagonalizována po řadě v ONB $\dot{\boldsymbol{U}} := [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r]$ a $\dot{\boldsymbol{V}} := [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r]$ stejnou maticí $\dot{\boldsymbol{D}}^2 := \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2)$. Dle 3.42(3.7b) je pak $\sigma_1^2 = \beta_{\dot{\boldsymbol{R}}} = \beta_{\dot{\boldsymbol{S}}}$ a $\sigma_r^2 = \alpha_{\dot{\boldsymbol{R}}} = \alpha_{\dot{\boldsymbol{S}}}$, takže dle 5.10(2) dostáváme pro číslo podmíněnosti vztah

$$\boxed{\kappa(\boldsymbol{T}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}} \qquad \text{(podíl největšího a nejmenšího singulárního čísla matice } \boldsymbol{T}\text{)} \tag{5.2}$$

známý ze základních kurzů numerických metod.

Poznámka 5.12 (**Problém numerické stability**).
Při hledání řešení inverzní úlohy $Tx = y$ hraje důležitou roli **stabilita**, tj. citlivost nalezeného řešení $x$ na malé odchylky $y$.

Pro **pseudoinverzní řešení** $x = x^+ = T^+y$ podle věty 5.2 a s ohledem na 5.10 je tak problém stability ekvivalentní s problémem stability pro $x = x^+ = \dot{T}^{-1}\widehat{y}$, kde $\dot{T}^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{R}(T^*)$ je TLI. Můžeme proto bez újmy na obecnosti předpokládat, že $T = \dot{T}$ je TLI a $y = \widehat{y}$.

Je nežádoucí, aby malé odchylky $y$ způsobily velké odchylky v nalezeném řešení $x$. V oblasti zpracování signálu to odpovídá případu, kdy signál je degradován šumem. Označme $\widetilde{y}$ aproximaci pravé strany $y$ a $\widetilde{x}$ odpovídající aproximaci řešení $x$. Absolutní, resp. relativní odchylky budeme měřit v normě příslušného prostoru: $E_x := \|\widetilde{x} - x\|$ a $E_y := \|\widetilde{y} - y\|$, resp. $R_x := \frac{E_x}{\|x\|}$ a $R_y := \frac{E_y}{\|y\|}$. Pak

$$\begin{aligned} E_x &= \|T^{-1}(\widetilde{y} - y)\| \leq \|T^{-1}\|\|\widetilde{y} - y\| = \|T^{-1}\|E_y \\ E_y &= \|T(\widetilde{x} - x)\| \leq \|T\|\|\widetilde{x} - x\| = \|T\|E_x \end{aligned}$$

Pro posouzení numerické stability je rozhodující poměr absolutních, resp. relativních odchylek, pro něž předchozí nerovnosti poskytují následující rozmezí:

$$e := \frac{1}{\|T\|} \leq \frac{E_x}{E_y} \leq \|T^{-1}\| =: E, \qquad r := e\frac{\|y\|}{\|x\|} \leq \frac{R_x}{R_y} \leq E\frac{\|y\|}{\|x\|} =: R \tag{5.3}$$

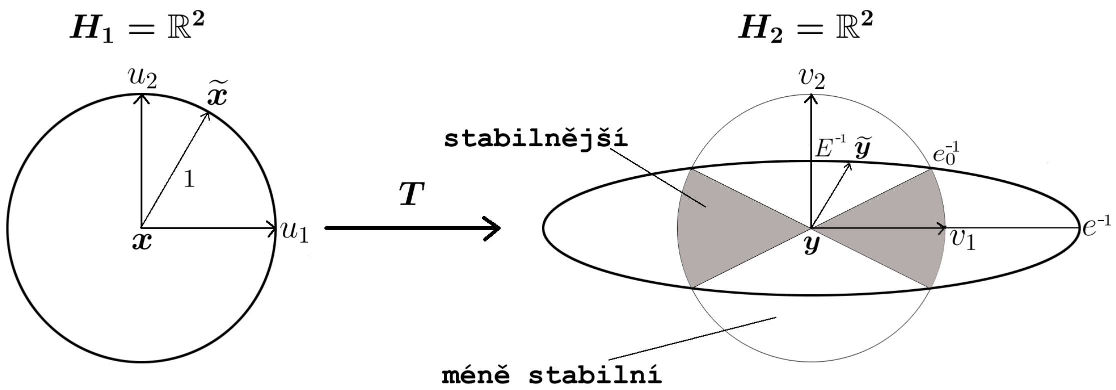
Nestabilita je přímo úměrná poměru těchto mezí $\frac{R}{r} = \frac{E}{e} = \|T\|\|T^{-1}\| \overset{5.10(1)}{=} \kappa(T)$, takže číslo podmíněnosti kvantifikuje tuto nestabilitu v rozmezí $1 \leq \kappa(T) < \infty$.

Neutrální hodnotou je geometrický průměr $e_0 := \sqrt{eE}$, kdy $\frac{e_0}{e} = \frac{E}{e_0} = \sqrt{\kappa(T)}$. Potom intervaly $[e, e_0)$, resp. $(e_0, E]$ udávají po řadě oblast **nižší**, resp. **vyšší citlivosti řešení** na perturbace $y$. Vzhledem k linearitě $T$ můžeme poměr $\frac{E_x}{E_y}$ vyšetřovat pro normalizované hodnoty $E_x = 1$, kdy $\frac{E_x}{E_y} = \frac{1}{E_y}$ a $\widetilde{x}$ leží na povrchu koule $K(x, 1)$.

Obrázek 5.1 ilustruje situaci pro TLI $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diagonalizovaný v souřadných systémech $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$ a $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ maticí $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$ (viz příklad 5.11), která kouli $K(\boldsymbol{x}, 1)$ zobrazuje na elipsoid $T(K(\boldsymbol{x}, 1))$ s délkami poloos $E = \sigma_1 \geq \sigma_2 = e > 0$ a kde $\kappa(T) = 4 \Rightarrow e = \frac{1}{2}e_0$, $E = 2e_0$. V $n$-rozměrném případě se analogicky koule zobrazí na elipsoid s délkami poloos $E = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n = e > 0$. Oblast nižší ($\frac{1}{E_y} < e_0$), resp. vyšší ($\frac{1}{E_y} > e_0$) citlivosti na chyby (nestability) odpovídá odchylkám $\widetilde{y} - y$, kde $\widetilde{y}$ leží vně (v obrázku zvýrazněno šedě), resp. uvnitř koule $K(y, e_0)$. Vidíme, že oblast vyšší stability (šedě) se zmenšuje s rostoucím poměrem $\kappa(T) = \frac{E}{e}$.

Nejvyšší stability tak dosahujeme v případě, kdy číslo podmíněnosti $\kappa(T) = 1$, což splňují právě jen unitární operátory $U$ (viz odst. 3.5) nebo jejich skalární násobky $cU$, $c \neq 0$, kdy $T(K(x,1)) = K(cUx, |c|)$, neboť $E_y = \|cU(\widetilde{x} - x)\| = |c|\|\widetilde{x} - x\| = |c| = \frac{1}{e_0}$ je konstantní pro $\|\widetilde{x} - x\| = 1$. V tomto případě $\frac{E_x}{E_y} = \frac{1}{E_y} = e_0$, takže se operátor vždy chová neutrálně a oblasti vyšší či nižší stability neexistují (prázdné množiny).

Při reálném výpočtu je výsledná stabilita získaného pseudoinverzního řešení ovlivněna i konkrétním algoritmem výpočtu $x^+ = T^+y$ a je proto třeba rozlišovat mezi numerickou nestabilitou operátoru $T$ (resp. $T^+$) determinovanou číslem podmíněnosti $\kappa(T)$ a nestabilitou použitého algoritmu. V případě (pseudo)inverze maticových operátorů menšího rozměru se obvykle používají přímé techniky výpočtu založené na diagonalizaci matice $\boldsymbol{T}$ pomocí SVD, kdy pseudoinverzní operátor je diagonalizován transponovanou maticí $\boldsymbol{D}^T$ s převrácenými hodnotami singulárních čísel na diagonále. Mnohem stabilnější jsou iterační techniky, což je ale na úkor rychlosti: s růstem $\kappa(T)$ se zpomaluje konvergence, ale po dostatečném počtu kroků lze dosáhnout vyhovující přesnosti. **Mezi klasické patří iterační algoritmy založené na Neumannově rozvoji 4.15(2'), které jsou detailně popsány v příloze E včetně diskuze jejich numerické stability**.




**Obrázek 5.1**: Oblasti numerické stability pro operátor $\boldsymbol{T}$, $\kappa(\boldsymbol{T}) = 4$, $e_0 = 1$

<u>Poznámka</u> 5.13 (**Operátory zobecněné inverze**[2] $T^-$).
V případě, kdy $T$ je TLI, je inverzní operátor jediný. **Současné moderní přístupy** proto obrací pozornost k operátorům $T$ s uzavřeným oborem hodnot, které nejsou TLI, tj. $\mathcal{N}(T) \supset \{0\}$, kde rovnice $Tx = y$ má nekonečně mnoho řešení popsaných afinním prostorem $x^+ + \mathcal{N}(T)$, kde kromě pseudoinverzního řešení $x^+$ jakékoliv další dle 5.4 již neleží v prostoru $\mathcal{R}(T^*)$ (v případě systému lineárních rovnic $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{y}$ představuje $\mathcal{N}(\boldsymbol{T})$ množinu řešení homogenního systému ($\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{0}$) a $\boldsymbol{x}^+$ partikulární řešení). Je proto snaha zvolit jiné $x^- \neq x^+$ tak, aby $Tx^- = \widehat{y}$ a příslušný inverzní operátor $x^- = T^-y$ byl mnohem stabilnější než výše popsaný $x^+ = T^+y$. Z této konstrukce je zřejmé, že lze pro $T^-$ garantovat pouze platnost axiomů (I1) a (I2).

Ukazuje se, že stabilitu zásadně zlepšuje řešení úlohy $Tx^- \approx \widehat{y}$, které má ve vhodné bázi separabilního prostoru $H_1$ (viz kapitolu 6) co nejméně nenulových složek $\xi_j$ v souřadnicovém

[2]Též nazývané G-inverze (z angl. „Generalized inverse“).

vyjádření $[x] = \xi$ ($j \in J, |J| \le \aleph_0$), tj. za dodatečné podmínky **minimální (pseudo)normy** $\|\xi^-\|_p$ pro $0 \le p \le 1$. (viz poznámku B.9(6)). Takové řešení se nazývá **řídké**.[3] Ideální řešení představuje pro $p = 0$ výpočetně NP-těžký problém, takže v praxi se používá $0 \ll p \le 1$. Většinou se preferuje volba $p = 1$, která z uvedených jako jediná vede na *konvexní* optimalizační problém, který lze řešit např. pomocí algoritmů lineárního programování, tzv. „**Basis Pursuit**“ (vyhledávání báze).

Ztotožníme-li $H_1 = \ell^2(J)$, pak vlastně v 5.4 $\xi^-$ minimalizuje $\|\xi\|_p$ ($0 < p \le 1$) místo $\xi^+$, které původně minimalizovalo euklidovskou normu $\|\xi\|_2$. Ta sice zajišťuje linearitu a spojitost příslušného inverzního operátoru $T^+$, typicky ale nedává řídké řešení. K lepší stabilitě řídkého řešení přispívá skutečnost, že informace je v něm koncentrována do malého počtu větších hodnot ve srovnání s velkým počtem menších hodnot u neřídkého řešení. Relativní chyby případných nepřesností jsou tak menší než u neřídkého řešení a dochází k menší ztrátě užitečné informace. **Pro operátor $T^-$ nelze na rozdíl od $T^+$ bez dodatečných předpokladů garantovat ani jednoznačnost, ani spojitost a dokonce ani linearitu** (viz problém 5.14).

**Problém 5.14** (Cvičení)**.**
Pro symetrický maticový operátor $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reprezentovaný maticí $\boldsymbol{U} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ řešte užitím 4.1, 5.2 a 5.4 následující úlohy:

(1) Zdůvodněte proč $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(U^*)$ a $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(U^*)$. Tyto prostory najděte a znázorněte je v euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$ spolu se zobrazeními $\boldsymbol{x} \rightsquigarrow \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \rightsquigarrow \dot{U}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \rightsquigarrow P_{\mathcal{N}(U)}\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y} \rightsquigarrow P_{\mathcal{R}(U)}\boldsymbol{y}$ pro vhodně zvolené $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$.

(2) Zkonstruujte $\dot{U}^{-1}$, matici $\boldsymbol{U}^+$ a příslušná zobrazení těmito operátory znázorněte v náčrtu ad (1).

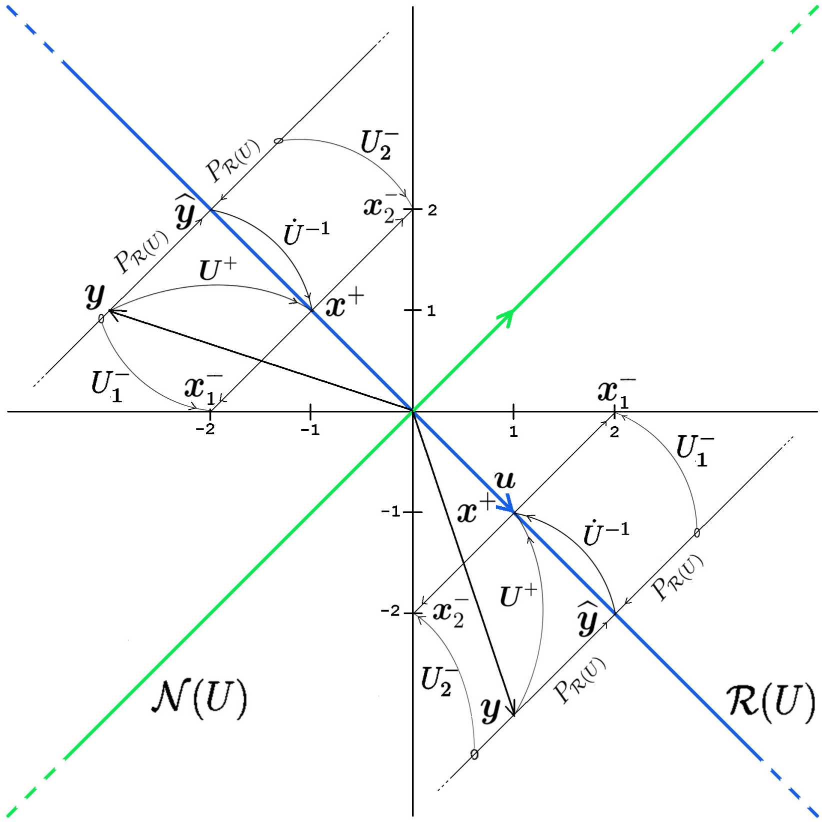
(3) Zkonstruujte čtyři navzájem různé operátory $U_1^-$ až $U_4^-$ poskytující pro $i = 1, 2, 3, 4$ navzájem různá řídká řešení $\boldsymbol{x}_i^- := U_i^-(\boldsymbol{y})$ rovnice $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \widehat{\boldsymbol{y}}$ minimalizující $\|\boldsymbol{x}_i^-\|_0$, s vlastnostmi:
   (a) $U_1^-$ a $U_2^-$ lineární a spojitá,
   (b) $U_3^-$ spojité a nelineární,
   (c) $U_4^-$ nespojité a nelineární.

(4) Předchozí konstrukce zobecněte na nesymetrický operátor $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$, $m \ge 2$, reprezentovaný obecně nesymetrickou maticí $\boldsymbol{U} := [\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{u}]$ rozměru $m \times 2$, kde $\boldsymbol{0} \ne \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ je libovolný pevně zvolený sloupcový vektor.

*Řešení.* (obr. 5.2)
(1,4) Pro $\boldsymbol{u} = [1, -1]^T$ je v (1) matice $\boldsymbol{U}$ symetrická, takže $U = U^* \Rightarrow \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(U^*)$ a $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(U^*)$. Je $\dim \mathcal{R}(U^*) \overset{4.13(1)}{=} 1 = \dim \mathcal{R}(U)$ (hodnost $\boldsymbol{U}$), $\mathcal{R}(U) = \mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}\}) \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{R}(U^*) = \mathcal{L}(\{[1, -1]\}) \subseteq \mathbb{R}^2$ a $\mathcal{N}(U) \overset{4.1}{=} \mathcal{R}(U^*)^\perp \Rightarrow \dim \mathcal{N}(U) = 2 - 1 = 1$ a $\mathcal{N}(U) = \mathcal{L}(\{[1, 1]\})$, neboť $[1, 1] \perp [-1, 1]$.
$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u} + x_2(-\boldsymbol{u}) = (x_1 - x_2)\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}(U)$; $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}(U^*) \Rightarrow \boldsymbol{x} = \xi[1, -1]^T = [\xi, -\xi]^T$, kde $\xi \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \dot{U}([\xi, -\xi]^T) = \boldsymbol{U}[\xi, -\xi]^T = (\xi - (-\xi))\boldsymbol{u} = 2\xi\boldsymbol{u} = \eta\boldsymbol{u}$, kde $\eta := 2\xi$.
$\|[1, 1]\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow P_{\mathcal{N}(U)}\boldsymbol{x} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, [1,1] \rangle}{\|[1,1]\|^2}[1, 1]^T = \frac{1}{2}[x_1 + x_2, x_1 + x_2]^T = \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right]\boldsymbol{x}$.
$\widehat{\boldsymbol{y}} = P_{\mathcal{R}(U)}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}\frac{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\|^2} = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y} \Rightarrow [P_{\mathcal{R}(U)}] = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$, $\widehat{\boldsymbol{y}} = \eta(\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}$, kde $\eta(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}$.
Odtud pro $\boldsymbol{u} = [1, -1]^T$ dostáváme $\|\boldsymbol{u}\|^2 = 2$ a $P_{\mathcal{R}(U)}\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}[1, -1]^T[1, -1]\boldsymbol{y} = \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right]\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}[y_1 - y_2, y_2 - y_1]^T = \eta(\boldsymbol{y})[1, -1]^T$, kde $\eta(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}[1, -1]\boldsymbol{y}$.

(2,4) $\dot{U}(\xi[1, -1]^T) \overset{(1,4)}{=} 2\xi\boldsymbol{u} \Rightarrow \dot{U}^{-1}(\eta\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\eta[1, -1]^T$. Pak
$\boldsymbol{x}^+ := \boldsymbol{U}^+\boldsymbol{y} \overset{5.2}{=} \dot{U}^{-1}(\eta(\boldsymbol{y})\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\eta(\boldsymbol{y})[1, -1]^T \overset{(1,4)}{=} \frac{1}{2\|\boldsymbol{u}\|^2}[1, -1]^T\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{U}^+ = \frac{1}{2\|\boldsymbol{u}\|^2}[1, -1]^T\boldsymbol{u}^T$.

[3] angl. „sparse“




**Obrázek 5.2**: Ilustrace řešení problému 5.14 pro $\boldsymbol{u} = [1, -1]$ a $\eta(\boldsymbol{y}) = \pm 2$

Odtud speciálně pro $\boldsymbol{u} = [1, -1]^T$ máme $\boldsymbol{U}^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ a $\eta(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}[1, -1]\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$.

(3,4)(a) Podle 5.4 a 5.13 zvolíme $[x_{11}, x_{12}]^T := \boldsymbol{x}_1^- := U_1^-(\boldsymbol{y})$ a $[x_{21}, x_{22}]^T := \boldsymbol{x}_2^- := U_2^-(\boldsymbol{y})$ tak, aby $\boldsymbol{x}_1^-, \boldsymbol{x}_2^- \in \boldsymbol{x}^+ + \mathcal{N}(U)$ a současně $x_{12} = 0$ a $x_{21} = 0$ (2 řídká řešení). Podle (1,4) je $\mathcal{N}(U) = \{[\xi, \xi] \mid \xi \in \mathbb{R}\}$, takže musí platit $x_{11} = x_1^+ + \xi$, kde $0 = x_{12} = x_2^+ + \xi$, tj. $x_{11} = x_1^+ - x_2^+$. Analogicky dostaneme $x_{22} = x_2^+ - x_1^+$. Tedy $\boldsymbol{x}_1^- = [x_1^+ - x_2^+, 0]^T$, kde dle (2,4) je $x_1^+ = \frac{1}{2}\eta(\boldsymbol{y})$ a $x_2^+ = -\frac{1}{2}\eta(\boldsymbol{y})$, kde $\eta(\boldsymbol{y}) \overset{(1,4)}{=} \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}$. Odtud jsou hledaná řídká řešení ve tvaru $\boldsymbol{x}_1^- = [\eta(\boldsymbol{y}), 0]^T = \boldsymbol{U}_1^-\boldsymbol{y}$, resp. $\boldsymbol{x}_2^- = [0, -\eta(\boldsymbol{y})]^T = \boldsymbol{U}_2^-\boldsymbol{y}$, kde $\pm\frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}^T$ je po řadě prvním a druhým řádkem matic $\boldsymbol{U}_1^-$ a $\boldsymbol{U}_2^-$, a zbývající řádek je nulový. Oba maticové operátory jsou lineární i spojité a dávají pro $\boldsymbol{y} \not\perp \boldsymbol{u}$ navzájem různá nenulová řídká řešení.

(3,4)(b) Například můžeme definovat $\boldsymbol{x}_3^- := U_3^-(\boldsymbol{y}) =: \begin{cases} \boldsymbol{x}_1^- = [|\eta(\boldsymbol{y})|, 0]^T & \text{pro } \eta(\boldsymbol{y}) \geq 0 \\ \boldsymbol{x}_2^- = [0, |\eta(\boldsymbol{y})|]^T & \text{pro } \eta(\boldsymbol{y}) < 0. \end{cases}$

Tento operátor je spojitý, ale není lineární, neboť $\boldsymbol{y} \rightsquigarrow |\eta(\boldsymbol{y})|$ je spojité, ale nelineární zobrazení: např. pro $\boldsymbol{y} = \pm\boldsymbol{u}$ dostáváme $\eta(\pm\boldsymbol{u}) = \pm 1$, takže s uvážením $\eta(\boldsymbol{0}) = 0$ je $\boldsymbol{0} = U_3^-(\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u})) \neq U_3^-(\boldsymbol{u}) + U_3^-(-\boldsymbol{u}) = [1, 1]^T$.

(3,4)(c) Například můžeme definovat $\boldsymbol{x}_4^- := U_4^-(\boldsymbol{y}) =: \begin{cases} \boldsymbol{x}_1^- = [\eta(\boldsymbol{y}), 0]^T & \text{pro } \eta(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{Q} \\ \boldsymbol{x}_2^- = [0, -\eta(\boldsymbol{y})]^T & \text{pro } \eta(\boldsymbol{y}) \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Jelikož součet racionálního čísla $\eta_1$ a iracionálního čísla $\eta_2$ je iracionální číslo, tak nelinearita $U_4^-$ vyplyne analogicky jako v případě operátoru $U_3^-$, jestliže zvolíme za $\boldsymbol{y}$ prvky $\eta_1\boldsymbol{u}$, $\eta_2\boldsymbol{u}$ a jejich součet. Operátor $U_4^-$ není ale ani spojitý, neboť pro $\eta(\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{0}$ existují disjunktní okolí prvků $\boldsymbol{x}_1^-$ a $\boldsymbol{x}_2^-$, přičemž ale každé ryzí okolí čísla $\eta(\boldsymbol{y})$ má neprázdný průnik s množinou racionálních i iracionálních čísel (husté podmnožiny v $\mathbb{R}$). $\square$

# 6 ÚPLNÉ SYSTÉMY: ORTONORMÁLNÍ BÁZE, RIESZOVY BÁZE A „FRAMES“

Teorie: např. `[Heil:část II s.87-246]`

V této kapitole se budeme zabývat specifickými podmnožinami $\Phi$ Banachova nebo Hilbertova prostoru $X$, které umožňují vyjádřit každý jeho prvek $x \in X$ jako vhodnou nejvýše spočetnou lineární kombinaci prvků z $\Phi$. Tedy množinami, které lineárně generují celý prostor. Nevyužijeme-li topologické struktury na $X$, pak se nabízí zvolit za $\Phi$ libovolný systém generátorů lineárního prostoru $X$ ve smyslu definice 2.1, tj. platí $X = \mathcal{L}(\Phi)$, kdy každý prvek v $X$ je **konečnou lineární kombinací** prvků z $\Phi$. Pokud požadujeme, aby $\Phi$ byla co nejmenší, pak je třeba přidat požadavek na lineární nezávislost prvků množiny $\Phi$ a dostáváme pojem **báze** známý z teorie lineárních prostorů konečné dimenze, která je běžnou součástí základních kurzů lineární algebry. Dostáváme se tak k pojmu *Hamelovy báze* dle následující definice, která připouští i $\dim X = \infty$ (každá konečná podmnožina ve $\Phi$ je lineárně nezávislá).

Řadu příkladů bází a framů pro konečně- i nekonečně dimenzionální prostory, se zaměřením na zpracování signálů, uvádí Příloha F.

**Definice 6.1** (Hamelova báze)**.**
Nechť $X$ je vektorový prostor (nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$), pak $\Phi \subset X$ se nazývá jeho **Hamelovou bází**, jestliže $\Phi$ je lineárně nezávislá a $X = \mathcal{L}(\Phi)$.

*Poznámka* 6.2 (viz `[Heil: s.126-127]`).

(1) V Hamelově bázi má každý prvek $x \in X$ jediné vyjádření v tom smyslu, že existuje (až na pořadí prvků) jednoznačně určená konečná podmnožina $\{\varPhi_1, \ldots, \varPhi_K\} \subset \Phi$ a jednoznačně určené nenulové „skalární souřadnice“ $\xi_1, \ldots, \xi_K$ tak, že $x = \sum\limits_{k \in K} \xi_K \varPhi_k$.

(2) Užitím *Axiomu výběru* se dá ukázat, že v každém vektorovém prostoru existuje Hamelova báze. Dá se dále ukázat, že všechny Hamelovy báze téhož prostoru mají stejnou mohutnost nazývanou *dimenzí prostoru*. Bohužel také platí, že každá Hamelova báze nekonečně rozměrného prostoru je nespočetná, tj. „příliš veliká“ a neexistuje konstruktivní algoritmus pro její nalezení. Východisko z této situace spočívá v zahrnutí topologické struktury, kdy každý prvek může být vyjádřen i jako limita (v normě) vhodné posloupnosti konečných lineárních kombinací, pokud $\Phi$ je *úplný systém generátorů* ve smyslu definice 2.57, neboli $X = \overline{\mathcal{L}(\Phi)}$. Speciálním případem jsou pak *bázové systémy* $\Phi = \{\varPhi_n\}_{n \in J}$ ($|J| \leq \aleph_0$) umožňující vyjádřit $x \in X$ dokonce jen jako limitu posloupnosti částečných součtů nekonečné řady $x = \sum\limits_{n \in J} \xi_n \varPhi_n$.

## 6.1 Úplné systémy a báze

*Označení.*
$X = B$ nadále značí Banachův nebo Hilbertův prostor. Pro posloupnost $\{x_n\}_{n \in J} \subset X$, kde $n \in J$ a $|J| \leq \aleph_0$, značíme $\{x_n\}_{n \in J} =: \{x_n\}$ a podobně $\sum\limits_{n \in J} x_n =: \sum x_n$.

Jelikož $J$ je nejvýše spočetná, lze její prvky pevně uspořádat dle zvoleného indexování přirozenými čísly, tj. $J = \{j_1, j_2, \ldots\}$. Obecně tedy konvergence i součet výše uvedené řady může záviset na volbě tohoto uspořádání. V pevně zvoleném uspořádání pak $x_N := \sum\limits_{k=1}^{N} x_{j_k}$ bude značit $N$-tý částečný součet této řady. Většinou však budeme pracovat s tzv. bezpodmínečně konvergentními řadami, kde konvergence ani součet na volbě uspořádání nezáleží (viz 6.3).

**Definice 6.3 (Bezpodmínečná a absolutní konvergence).**
Nechť $\{x_n\}_{n\in J} \subset X$. Řada $\sum_{n\in J} x_n$ se nazývá
(a) **bezpodmínečně konvergentní**[1], jestliže permutovaná řada $\sum_{n\in J} x_{\pi(n)}$ konverguje v $X$ pro každou permutaci $\pi$ indexové množiny $J$;
(b) **absolutně konvergentní**, jestliže $\sum_{n\in J}\|x_n\| < \infty$.

**Lemma 6.4** (`[Heil:Cor.3.11 s.99]`).
*Jestliže $\sum_{n\in J} x_n$ konverguje bezpodmínečně v B-prostoru $X$, pak její součet nezávisí na uspořádání prvků posloupnosti, tj. $\sum_{n\in J} x_{\pi(n)} = \sum_{n\in J} x_n$ pro každou permutaci $\pi$ indexové množiny $J$.*

**Lemma 6.5** (`[Heil:Lemma 3.3 a 3.5 s.89-90]`, `[Heil:odst.3.6 s.116-123]`).
*Jestliže $\sum_{n\in J} x_n$ konverguje absolutně v B-prostoru $X$, pak zde také konverguje bezpodmínečně. Opačná implikace platí jen, když $\dim X < \infty$, tj. absolutní konvergence je ekvivalentní s bezpodmínečnou konvergencí jen v B-prostorech konečné dimenze.*

Existuje celá řada ekvivalentních podmínek charakterizujících bezpodmínečnou konvergenci (viz například `[Heil:odst.3.3 s.94-100]`).

**Definice 6.6.** Jestliže $\{\Phi_n\}$ je úplná posloupnost v B-prostoru $X$, pak říkáme, že $\{\Phi_n\}$ **generuje** $X$.
(1) Posloupnost $\{\Phi_n\}$ se nazývá **minimální**, jestliže $\forall m \in J$: $\Phi_m \notin \overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\}_{n\neq m})}$.
(2) Posloupnost $\{\Phi_n\}$ se nazývá **exaktní** v $X$, jestliže je úplná v $X$, ale $\{\Phi_n\}_{n\neq m}$ není úplná v $X$ pro žádné $m \in J$ (v takovém případě $\Phi_n \neq 0$ pro každé $n \in J$) — neboli právě když $\{\Phi_n\}$ je minimální a úplná[2] v $X$.
(3) Posloupnost $\{\Phi_n\}$ se nazývá $\omega$-**nezávislá** (spočetně lineárně nezávislá), jestliže $0 = \sum \xi_n\Phi_n \Rightarrow \xi_n = 0$ pro každé $n \in J$.
(4) Posloupnost $\{\Phi_n\}$ se nazývá **(těsně) ohraničená**, jestliže existují $0 < A \leq B < \infty$ tak, že $A \leq \|\Phi_n\| \leq B$ pro každé $n \in J$ $(A = B = \|\Phi_n\|)$. V takovém případě opět $\Phi_n \neq 0$ pro každé $n \in J$.

**Věta 6.7.** *$\{\Phi_n\}$ je úplná v $H$ právě když neexistuje $0 \neq x \in H$: $x \perp \overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\})}$.*

*Důkaz.*
$\Rightarrow$: $x \perp \overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\})} = H \Rightarrow x \perp x \Rightarrow 0 = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \Rightarrow x = 0$.
$\Leftarrow$ sporem: Předpokládejme $\overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\})} =: H_1 \subsetneqq H$, takže existuje $x \in H - H_1$. Položme $\widehat{x} := P_{H_1}x$, kde $P_{H_1} : H \twoheadrightarrow H_1$ je operátor ortogonální projekce dle 3.55. Pak
$x \notin H_1 \overset{3.60(1)}{\Rightarrow} x \neq \widehat{x} \overset{3.56(2)}{\Rightarrow} 0 \neq x - \widehat{x} \perp H_1$, spor. □

**Definice 6.8 (Báze).**
Posloupnost $\Phi := \{\Phi_n\}_{n\in J}$ se nazývá **báze** v B-prostoru $X$, jestliže pro každé $x \in X$ existuje jediná posloupnost „souřadnic“ $\{\xi_n\} := \{\xi_n(x)\}_{n\in J} \subset \mathbb{C}$: $x = \sum\limits_{n\in J} \xi_n(x)\Phi_n =: \sum\limits_{n\in J} \xi_n\Phi_n$.
Báze $\{\Phi_n\}_{n\in J}$ se nazývá **bezpodmínečná (absolutní)**[1], jestliže řada konverguje bezpodmínečně (absolutně) pro každé $x \in X$.

**Definice 6.9.** Pro danou bázi $\Phi$ v B-prostoru $X$ a každé $n \in J$ definuje $x \rightsquigarrow \xi_n(x)$ lineární zobrazení[3] $X \to \mathbb{C}$ (funkcionál). Posloupnost $\{\xi_n(\cdot)\}$ nazýváme **posloupností souřadnicových funkcionálů báze** $\Phi$. Jako $\{x\} := \{x\}_\Phi : X \to \mathbb{C}^J$ označíme příslušné „souřadnicové“

[1] V anglické terminologii *unconditional basis* a *unconditional convergence*.
[2] Neboli minimální posloupnost generující $X$ (srov. 2.1).
[3] Plyne z jednoznačnosti vyjádření a s uvážením spojitosti lineárních operací dle 2.49.

zobrazení přiřazující k $x$ posloupnost jeho souřadnic $\{\xi_n\}$ v bázi $\Phi$: $\{x\}_\Phi := \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$. Toto zobrazení je zřejmě lineární a injektivní, jeho obor hodnot v $\mathbb{C}^J$ označíme $\mathcal{R}^\dagger_\Phi =: \mathcal{R}^\dagger$. Analogicky jako v příkladu 3.7(1) bude $T := T_\Phi : \mathcal{R}^\dagger_\Phi \to X$ značit příslušný inverzní operátor přiřazující k posloupnosti $\xi$ odpovídající prvek $x = \sum \xi_n \Phi_n$. Tento operátor je lineární a bijektivní a budeme jej nazývat **rekonstrukčním**[4] operátorem v bázi $\Phi$.

**Lemma 6.10.** *Je-li $\{\Phi_n\}_{n\in J}$ (shora) ohraničená báze v B-prostoru $X$ ($\|\Phi_n\| \le B$), pak $\ell^1(J) \subseteq \mathcal{R}^\dagger$, $T_\Phi \in \mathcal{B}(\ell^1(J), X)$ a platí $\|T_\Phi(\xi)\| \le B\|\xi\|_1$ pro každé $\xi \in \ell^1(J)$.*

*Důkaz.* Zvolme $\xi \in \ell^1(J)$ libovolně. Ukážeme nejprve konvergenci řady $\sum \xi_n \Phi_n$. Pro $|J| < \infty$ je zřejmá, takže předpokládejme $|J| = \aleph_0$ a tedy bez újmy na obecnosti $J = \mathbb{N}$. Pro každé $N, M \in \mathbb{N}$ ($M > N$) a odpovídající částečné součty $x_N$ a $x_M$ řady $\sum \xi_n \Phi_n$ máme:
$\|x_M - x_N\| = \|\sum\limits_{n=N+1}^{M} \xi_n \Phi_n\| \le \sum\limits_{n=N+1}^{M} |\xi_n| \|\Phi_n\| \le B \sum\limits_{n=N+1}^{M} |\xi_n| \to 0$ pro $N, M \to \infty$, neboť posloupnost částečných součtů číselné řady $\sum |\xi_n|$ je konvergentní a tedy cauchyovská. Pak také $\{x_N\}$ je cauchyovská a konvergentní k $x$ v úplném prostoru $X$, takže $\xi \in \mathcal{R}^\dagger$: $T_\Phi \xi = x = \lim\limits_{N\to\infty} x_N$
$\Rightarrow \|T_\Phi \xi\| = \|\lim\limits_{N\to\infty} x_N\| \overset{2.49}{=} \lim\limits_{N\to\infty} \|x_N\| \le B \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} |\xi_n| = B\|\xi\|$. □

**Definice 6.11 (Schauderova báze).**
Báze B-prostoru $X$ se nazývá jeho **Schauderovou bází**, jestliže všechny její souřadnicové funkcionály jsou spojité.

**Lemma 6.12.** *Nechť $\{\Phi_n\}$ je Schauderova báze v B-prostoru $X$ a $\{x_k\} \subset X$ posloupnost: $x_k \xrightarrow{sl.} x$ v $X$ pro $k \to \infty$. Pak pro každé $n \in J$ je $\xi_n(x_k) \to \xi_n(x)$ pro $k \to \infty$.*

*Důkaz.*
Jelikož $\xi_n(\cdot) \in X'$ pro každé $n \in J$, tak dle 3.16 je $\xi_n(x_k) \to \xi_n(x)$ pro každé $n \in J$. □

**Věta 6.13.** *Každá báze $\{\Phi_n\}$ v B-prostoru $X$ je úplná a $\omega$-nezávislá posloupnost.*

*Důkaz.* $x \in X \Rightarrow x = \sum \xi_n \Phi_n \Rightarrow \|x - \sum\limits_{j=1}^{N} \xi_{n_j} \Phi_{n_j}\| \to 0$, pro $N \to \infty$, kde částečné součty $x_N = \sum\limits_{j=1}^{N} \xi_{n_j} \Phi_{n_j} \in \mathcal{L}(\{\Phi_n\})$, takže $x \in \overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\})}$ dle 2.33, a tedy $X \subseteq \overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\})}$.
Opačná inkluze $\overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\})} \subseteq X$ je zřejmá.
$\omega$-nezávislost: $T_\Phi\{0\} = 0 = \sum \xi_n \Phi_n = T_\Phi \xi \Rightarrow \xi = 0$, neboť souřadnice jsou v bázi určeny jednoznačně. □

**Věta 6.14** ([Sin70, (17.12) na str. 499–500]).
*Nechť $\{\Phi_n\}_{n\in J}$ je úplná v B-prostoru $X$ a $\Phi_n \ne 0$ pro každé $n \in J$. Pak $\{\Phi_n\}$ je bezpodmínečná báze v $X$ právě když existuje $C$, $1 \le C < \infty$, s vlastností:*
*Pro každou konečnou podmnožinu $K \subseteq J$ a libovolné $\xi_n, \eta_n \in \mathbb{C}$ takové, že $|\xi_n| \le |\eta_n|$ pro $n \in K$, platí $\|\sum\limits_{n\in K} \xi_n \Phi_n\| \le C\|\sum\limits_{n\in K} \eta_n \Phi_n\|$.*

Existuje řada dalších ekvivalentních charakterizací bezpodmínečných bází (viz například [Sin70] a `[Heil:odst.6.2 s.108-184]`).

[4] V anglické terminologii *reconstruction operator* nebo *synthesis operator*.

**Věta 6.15.** *Existuje-li v B-prostoru $X$ báze, pak $X$ je separabilní.*

*Důkaz.* Dle 6.13 je každá báze úplná posloupnost v $X$ (tedy nejvýše spočetná úplná podmnožina). Pak $X$ je separabilní dle 2.69 (poznámka pod čarou). □

**Důsledek 6.16.** *V neseparabilních B-prostorech neexistuje báze, zejména neexistuje v prostorech $L^\infty(\mathcal{I})$ a $\ell^\infty(J)$, kde $|J| = \infty$ (viz 2.75(2)).*

**Problém 6.17 (Banachův problém (1932)).**
Banach zformuloval v r. 1932 následující dlouho nevyřešený problém: *Má každý separabilní B-prostor bázi?*
**Negativní odpověď** a příslušný protipříklad zkonstruoval až v r. 1973 Per Enflo, který ukázal, že existuje separabilní a dokonce reflexivní B-prostor, který nemá žádnou bázi.
V separabilním H-prostoru toto negativní tvrzení ztrácí platnost, neboť v něm dle 2.69 vždy existuje ONB, která je bází ve smyslu definice 6.8 (viz dále odst. 6.2).

V dalších odstavcích se omezíme na bezpodmínečné báze $\{\Phi_n\}$ v netriviálních ($H \supset \{0\}$) separabilních H-prostorech, resp. na obecnější úplné systémy (tzv. framy), kde pro každé $x \in H$ existuje $\xi := \{\xi_n\} \in \ell^2(J)$: $x = \sum \xi_n \Phi_n$, přičemž ale posloupnost $\xi := \{\xi_n\}$ nemusí být jediná v případě, kdy $\{\Phi_n\}$ není báze, ale pouze vhodná úplná posloupnost, která si ponechá vlastnost bezpodmínečné konvergence (součet $x$ nezávisí na uspořádání členů posloupnosti $\{\Phi_n\}$). V těchto případech bude typicky $T_\Phi \in \mathcal{B}(\ell^2(J), H)$.

**Definice 6.18 (Frame v H-prostoru a operátory k němu přidružené).**
Nechť $\Phi = \{\Phi_n\}_{n \in J}$ je posloupnost v H-prostoru $H$, $\mathcal{E} := \{\varepsilon_n\}_{n \in J} \subseteq \ell^2(J)$ přirozená ONB v $\ell^2(J)$ (viz 2.78) a $T_\Phi \in \mathcal{B}(\ell^2(J), H)$ surjektivní a takový, že $\Phi_n = T_\Phi(\varepsilon_n)$. Pak $\Phi$ nazýváme **framem**[5] v $H$. K posloupnosti $\Phi$ jsou pak přidruženy následující spojité lineární operátory:
**Rekonstrukční operátor** $T := T_\Phi \in \mathcal{B}(\ell^2(J), H)$

$\boxed{T\xi \overset{(1)}{=} \sum \xi_n \Phi_n \ \ \forall \xi \in \ell^2(J)}$ (srov. 6.9).

**Diskretizační**[6]**(Besselův) operátor** $L := L_\Phi \in \mathcal{B}(H, \ell^2(J))$ $L := T^*$, kde

$\boxed{Ly \overset{(2)}{=} \{\langle y, \Phi_n \rangle\} \, \forall y \in H}$.

**Korelační (Gramův) operátor** $R := R_\Phi \in \mathcal{B}(\ell^2(J), \ell^2(J))$ $R := T^*T = LL^*$, kde

$\boxed{R\xi \overset{(3)}{=} \{ \sum_{n \in J} \overline{\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle} \xi_n \}_{m \in J} \, \forall \xi \in \ell^2(J)}$.

**Framový operátor** $S := S_\Phi \in \mathcal{B}(H, H)$ $S := TT^* = L^*L$, kde

$\boxed{Sy \overset{(4)}{=} \sum_{n \in J} \langle y, \Phi_n \rangle \Phi_n \ \ \forall y \in H}$.

*Důkaz rovností (1) až (4).*

[5] Jelikož neexistuje ustálená česká terminologie, přejímáme anglický výraz *frame*, což by bylo možné volně přeložit jako *kostra* prostoru $H$. Každý frame je zřejmě úplný v $H$, neboť vzhledem k surjektivitě $T$ je každý prvek $x \in H$ součtem řady (1) a tedy limitou posloupnosti jejích částečných součtů (viz též dále větu 6.36).

[6] V anglické terminologii nazývaný též *analysis operator*. Přívlastek *diskretizační* pochází z interpretace v prostorech $H = L^2$, kde $\{\langle y, \Phi_n \rangle\}_n = \{\int y(t)\overline{\Phi_n(t)}\, dt\}_n$ představuje posloupnost diskrétních vzorků funkce (signálu) $y$ vážených funkcemi $\Phi_n(t)$ na rozdíl od klasické diskretizace, kde roli $\Phi_n$ přebírá zobecněná Diracova „funkce“ $\delta$.

(1) $T\xi = T(\sum \xi_n \varepsilon_n) = \sum \xi_n T(\varepsilon_n) = \sum \xi_n \Phi_n$.
(2) $\langle T\xi, y\rangle = \langle \sum \xi_n \Phi_n, y\rangle = \sum \xi_n \langle \Phi_n, y\rangle = \sum \xi_n \overline{\langle y, \Phi_n\rangle} = \langle \xi, Ly\rangle \Rightarrow T^* = L$.
(3) $R\xi = LT\xi \stackrel{(1)}{=} L(\sum \xi_n \Phi_n) = \sum_{n\in J} \xi_n L\Phi_n \stackrel{(2)}{=} \sum_{n\in J} \xi_n \{\langle \Phi_n, \Phi_m\rangle\}_{m\in J} \stackrel{2.58/3°}{=}$
$= \{\sum_{n\in J} \overline{\langle \Phi_m, \Phi_n\rangle} \xi_n\}_{m\in J}$.
(4) $Sy = TLy \stackrel{(2)}{=} T(\{\langle y, \Phi_n\rangle\}) \stackrel{(1)}{=} \sum \langle y, \Phi_n\rangle \Phi_n$.

□

## 6.2 Ortonormální báze

V tomto odstavci ukážeme, že ortonormálními bázemi jsou právě ty framy, jejichž rekonstrukční operátor je unitární.

**Věta 6.19 (Besselova nerovnost).**
*Nechť $E \subset X$ (VS-prostor) je ONS (ortonormální systém). Pro každou $n$-tici jeho navzájem různých prvků $e_1, \ldots, e_n \in E$ ($n \in \mathbb{N}$) platí*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2 \quad \forall x \in X. \tag{6.1a}$$

*Navíc pro každé $x \in X$ je množina $E_x := \{e \in E \,|\, \langle x, e\rangle \ne 0\}$ nejvýše spočetná.*

*Důkaz.* Položme $\xi_i := \langle x, e_i\rangle$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Pak

$$0 \le \langle x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, x - \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\rangle =$$
$$\langle x, x\rangle - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \underbrace{\langle e_i, x\rangle}_{\bar\xi_i} - \sum_{j=1}^{n} \bar\xi_j \underbrace{\langle x, e_j\rangle}_{\xi_j} + \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \bar\xi_j \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\delta_{ij}} =$$
$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$$

dává požadovanou nerovnost (6.1a).

Zřejmě platí $E_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_x(n)$, kde $E_x(n) := \{e \in E \,|\, |\langle x, e\rangle| \ge \frac{1}{n}\}$. Stačí ukázat, že $E_x(n)$ je konečná. Ukážeme, že počet jejích prvků nepřesáhne $n^2\|x\|^2 < \infty$. Vybereme-li totiž v $E_x(n)$ $N$ navzájem různých prvků $e_1, \ldots, e_N$, pak $N\frac{1}{n^2} \le \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow N \le n^2\|x\|^2$. □

**Důsledek 6.20 (Zobecněná Besselova nerovnost).**
*Nechť $E \subset X$ (VS-prostor) je ONS. Pak platí*

$$\sum_{e\in E} |\langle x, e\rangle|^2 := \sum_{e\in E_x} |\langle x, e\rangle|^2 \le \|x\|^2 \quad \forall x \in X, \tag{6.1b}$$

$$\Big|\sum_{e\in E} \langle x, e\rangle \overline{\langle y, e\rangle}\Big| := \Big|\sum_{e\in E_x\cap E_y} \langle x, e\rangle \overline{\langle y, e\rangle}\Big| \le \sum_{e\in E_x\cap E_y} |\langle x, e\rangle \overline{\langle y, e\rangle}| \le \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in X, \tag{6.1c}$$

*kde řady konvergují absolutně a tedy bez ohledu na uspořádání prvků v $E_x$, resp. v $E_x \cap E_y$.*

*Důkaz.*

Nechť $E_x(n)$ jsou konečné množiny z důkazu předchozí věty: $E_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_x(n)$. Pak dle (6.1a) je $\sum_{e\in E_x(n)} |\langle x, e\rangle|^2 \le \|x\|^2$ a $\sum_{e\in E_x} |\langle x, e\rangle|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{e\in E_x(n)} |\langle x, e\rangle|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow$ (6.1b).

Jelikož pro $x, y \in X$ je $E_x \cup E_y$ nejvýše spočetná, lze její prvky uspořádat do posloupnosti $\{e_n\}_{n\in J}$. Pak dle (6.1b) posloupnosti $\xi := \{|\langle x, e_n\rangle|\}_{n\in E_x\cup E_y}$, $\eta := \{|\langle y, e_n\rangle|\}_{n\in E_x\cup E_y}$ náleží do $\ell^2(J)$ a $\|\xi\|^2 \le \|x\|^2$ a $\|\eta\|^2 \le \|y\|^2$. Odtud užitím Cauchy-Schwarzovy nerovnosti 2.60/5° v $\ell^2(J)$ (viz 2.77) dostáváme $|\sum_n \xi_n\bar{\eta}_n| \le \sum_n|\xi_n||\eta_n| \le \|\xi\|\|\eta\| \le \|x\|\|y\|$, což je právě (6.1c) uvážíme-li, že $|\xi_n||\eta_n| \ne 0$ právě pro $e_n \in E_x \cap E_y$. □

**Věta 6.21** (**Riesz-Fischerova věta (RFV)**).
*Nechť $E = \{e_n\}_{n\in J} \subset H$ (H-prostor) je ONS.*
*Pak $\sum_{n\in J} \xi_n e_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n\in J} |\xi_n|^2$.*
*Je-li v takovém případě $x = \sum_{n\in J} \xi_n e_n$, pak platí $\xi_n = \langle x, e_n\rangle$ pro každé $n \in J$.*
*Přitom platí* **Parsevalova identita (PI)***: $\|x\|^2 = \sum_{n\in J} |\xi_n|^2$, neboli v Besselově nerovnosti* (6.1b) *nastává rovnost.*

*Důkaz.*
I. Konvergence: pro $|J| < \aleph_0$ je tvrzení zřejmé. Pro $|J| = \aleph_0$ lze bez újmy na obecnosti předpokládat $J = \mathbb{N}$: Pro částečné součty $s_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ a $m < n$ dostáváme
$\|s_n - s_m\|^2 = \|\sum_{i=m+1}^{n} \xi_i e_i\|^2 = \langle \sum_{i=m+1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{j=m+1}^{n} \xi_j e_j\rangle = \sum_{i,j=m+1}^{n} \xi_i\bar{\xi}_j \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=m+1}^{n} |\xi_i|^2$. Vzhledem k úplnosti $H$ a $\mathbb{R}$ je $\{s_n\}$ konvergentní $\Leftrightarrow$ $\{s_n\}$ je cauchyovská $\Leftrightarrow$ $\left\{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right\}$ je cauchyovská v $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$.

II. $\langle x, e_n\rangle = \langle \sum_{j\in J} \xi_j e_j, e_n\rangle \overset{(*)}{=} \sum_{j\in J} \xi_j \underbrace{\langle e_j, e_n\rangle}_{\delta_{jn}} = \xi_n$. Podobně

$\|x\|^2 = \langle \lim_{n\to\infty} s_n, \lim_{n\to\infty} s_n\rangle \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \langle s_n, s_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\bar{\xi}_j \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2$, kde rovnosti $(*)$ platí vzhledem k linearitě a spojitosti skalárního součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (viz 2.61). □

Poznámka 6.22. Tedy Riesz-Fischerova věta říká, že pokud posloupnost $\{\langle x, e_n\rangle\}_n$ absolutně konverguje, pak tyto skaláry jsou přímo souřadnicemi prvku $x$ v ONS $\{e_n\}$.

**Věta 6.23** (**Charakterizace ortonormálních bází**).
*Nechť $\Phi := \{\Phi_n\}_{n\in J} \subset H$ (H-prostor) je posloupnost v $H$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(1) $\Phi$ je ONB v $H$ ve smyslu definice 2.66.*
*(1a) $\Phi$ je úplný ONS v $H$.*
*(1b) $\Phi$ je maximální ONS v $H$ (v $H$ neexistuje ONS $E \supsetneqq \Phi$).*
*(2) $\Phi$ je báze v $H$ ve smyslu definice 6.8, která je ortonormální.*
*(3) $\Phi$ je frame v $H$, kde $L_\Phi$ je unitární operátor $H \to \ell^2(J)$.*
*(3a) $\|\Phi_n\| = 1$ pro $n \in J$ a pro každé $x \in H$ platí Parsevalova identita ve tvaru:*
$\|L_\phi x\|^2 = \sum_{n\in J} |\langle x, \Phi_n\rangle|^2 \overset{PI}{=} \|x\|^2$.

*(4)* $\Phi$ *je frame v* $H$*, kde* $T_\Phi$ *je unitární operátor* $\ell^2(J) \to H$*.*

*(4a)* $\Phi$ *je úplná v* $H$ *a pro každé* $\xi \in \ell^2(J)$ *platí Parsevalova identita ve tvaru:*
$\|\xi\|^2 = \|T_\Phi\xi\|^2 \overset{PI}{=} \sum\limits_{n\in J} |\langle T_\Phi\xi, \Phi_n\rangle|^2.$

*(5)* $\Phi$ *je frame v* $H$*, kde* $R_\Phi = I_{\ell^2(J)}$ *a* $S_\Phi = I_H$ *jsou identické operátory.*

*V takovém případě* $\mathcal{R}_\Phi^\dagger = \ell^2(J)$ *a pro každé* $x \in H$ *je* $\{x\}_\Phi = \{\langle x, \Phi_n\rangle\}_{n\in J} = L_\Phi x$ *jeho posloupností souřadnic a* $x = \sum\limits_{n\in J} \langle x, \Phi_n\rangle \Phi_n$*.*

*Důkaz.*
$(1) \overset{2.66}{\Leftrightarrow} (1a)$, $(2) \overset{6.13}{\Rightarrow} (1a)$

(1a)$\Leftrightarrow$(1b): $\{\Phi_n\}$ je maximální ONS $\Leftrightarrow$ $\{\Phi_n\}$ je ONS a neexistuje $0 \neq x \perp \Phi_n \;\forall\, n \in J$ ($\|x\| = 1$) $\overset{2.65}{\Leftrightarrow}$ $\{\Phi_n\}$ je ONS a neexistuje $0 \neq x \perp \overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\})}$ $\overset{6.7}{\Leftrightarrow}$ $\{\Phi_n\}$ je úplný ONS.

(1a)$\Rightarrow$(3a) sporem: Jestliže existuje $x \in H$, tak že PI neplatí, pak dle (6.1b) je $\sum |\langle x, \Phi_n\rangle|^2 < \|x\|^2$ a dle RFV 6.21 $y := \sum \langle x, \Phi_n\rangle \Phi_n$ konverguje, $y \neq x$ a $\langle y, \Phi_n\rangle = \langle x, \Phi_n\rangle \;\forall n \in J \Rightarrow \langle y - x, \Phi_n\rangle = 0 \;\forall n \in J \Rightarrow 0 \neq y - x \perp \overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\})} \overset{6.7}{\Rightarrow} \{\Phi_n\}$ není úplný, spor s (1a).

(3a)$\Rightarrow$(2): Nejprve ukážeme, že platnost PI spolu s podmínkou $\|\Phi_n\| = 1 \;\forall\, n \in J$ vynucuje ortonormalitu posloupnosti $\Phi$, kdy stačí v PI postupně položit $x = \Phi_m \;\forall\, m \in J$ (viz dále též důkaz věty 6.47). Pak $\forall\, m \in J$ lze PI psát ve tvaru $1 = \|\Phi_m\|^2 = \sum\limits_{n\in J} |\langle \Phi_m, \Phi_n\rangle|^2 = |\langle \Phi_m, \Phi_m\rangle|^2 + \sum\limits_{m\neq n\in J} |\langle \Phi_m, \Phi_n\rangle|^2 = 1 + \sum\limits_{m\neq n\in J} |\langle \Phi_m, \Phi_n\rangle|^2 \Rightarrow \sum\limits_{m\neq n\in J} |\langle \Phi_m, \Phi_n\rangle|^2 = 0 \Rightarrow \langle \Phi_m, \Phi_n\rangle = 0 \;\forall\, n \in J, n \neq m \Rightarrow \Phi_m \perp \Phi_n \;\forall\, n \in J, n \neq m$.

$\Phi$ je tak ONS, pro nějž můžeme použít RFV: $x \in H \Rightarrow \|x\|^2 = \sum\limits_{n\in J} |\langle x, \Phi_n\rangle|^2$ konverguje $\overset{\text{RFV}}{\Rightarrow}$ $y := \sum\limits_{n\in J} \langle x, \Phi_n\rangle \Phi_n$ konverguje a $\langle x, \Phi_n\rangle = \langle y, \Phi_n\rangle \;\forall n \in J \Rightarrow \langle x - y, \Phi_n\rangle = 0 \;\forall n \in J \overset{PI}{\Rightarrow} \|x - y\|^2 = \sum\limits_{n\in J} |\langle x - y, \Phi_n\rangle|^2 = 0 \Rightarrow x = y$. Tedy každé $x \in H$ lze vyjádřit ve tvaru $\sum\limits_{n\in J} \xi_n \Phi_n$, kde $\xi_n = \langle x, \Phi_n\rangle$ jsou určeny jednoznačně dle RFV a tedy $\{\Phi_n\}$ je báze.

$\xi \in \mathcal{R}_\Phi^\dagger \;\Leftrightarrow\; x = \sum\limits_{n\in J} \xi_n \Phi_n \overset{\text{RFV}}{\Leftrightarrow} \sum\limits_{n\in J} |\xi_n|^2 < \infty \;\Leftrightarrow\; \xi \in \ell^2(J)$ a tedy $\mathcal{R}_\Phi^\dagger = \ell^2(J)$. Přitom dle RFV je $\xi_n = \langle x, \Phi_n\rangle$ pro každé $n \in J$, takže $\{x\}_\Phi = \{\langle x, \Phi_n\rangle\}_{n\in J} \overset{6.18}{=} L_\Phi x$, kde $L_\Phi$ je surjekce na $\ell^2(J)$. Odtud:

(3a)$\Rightarrow$(3): (3a) $\Rightarrow$ pro každé $x \in H$ je $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in J} |\langle x, \Phi_n\rangle|^2 = \|L_\Phi x\|^2$ a $L_\Phi$ je surjektivní $\Rightarrow$ $L_\Phi$ zachovává normu a je surjektivní $\overset{3.78/1^\circ 2^\circ}{\Rightarrow}$ $L_\Phi$ je unitární z $H$ na $\ell^2(J)$.

(3)$\Leftrightarrow$(4): je zřejmé, neboť $L_\Phi$ je unitární z $H$ na $\ell^2(J)$ $\Leftrightarrow$ $T_\Phi = L_\Phi^* \overset{3.78/5^\circ}{=} L_\Phi^{-1}$ je unitární z $\ell^2(J)$ na $H$. Přitom $T_\Phi$ je spojitý a surjektivní, přičemž pro každé $m \in J$ je $T_\Phi \varepsilon_m = \sum \delta_{mn} \Phi_n = \Phi_m$, takže $\Phi$ je frame v $H$ dle definice 6.18. Odtud:

(4)$\Rightarrow$(3a): $T_\Phi$ zachovává normu, takže pro každé $m \in J$ je $\|\Phi_m\| = \|T_\Phi \varepsilon_m\| = \|\varepsilon_m\| = 1$. Současně platí i (3), takže rovněž $L_\Phi$ zachovává normu a tedy pro každé $x \in H$ dostáváme $\|x\|^2 = \|L_\Phi x\|^2 = \sum\limits_{n\in J} |\langle x, \Phi_n\rangle|^2$, což je právě Parsevalova identita v (3a).

(4)$\Leftrightarrow$(4a): $\Phi$ je frame, kde $T_\Phi$ je unitární surjekce $\Leftrightarrow$ $T_\Phi$ je surjekce[7] zachovávající normu (i skalární součin) $\Leftrightarrow$ $\Phi$ je úplná[7] (i ONS) v $H$ a pro každé $\xi \in \ell^2(J)$ platí $\|\xi\|^2 = \|T_\Phi \xi\|^2 \overset{\text{PI}}{=} \sum\limits_{n\in J} |\langle T_\Phi \xi, \Phi_n\rangle|^2$, kde v takovém případě současně platí PI v (3a).

(4)$\Leftrightarrow$(5): dle 3.78/1°5°. □

[7]Unitární $T_\Phi$ je speciálním případem TLI, kdy $\mathcal{R}(T_\Phi)$ je uzavřený a $\mathcal{R}(T_\Phi) = H \;\Leftrightarrow\; H = \overline{\mathcal{L}(\Phi)} \;\Leftrightarrow$ $\Phi$ je úplná v $H$ — viz důkaz ekvivalence (4)$\Leftrightarrow$(4a) ve větě 6.31.

**Důsledek 6.24.**
*Každá ortonormální báze $\{\Phi_n\}$ v $H$ je bezpodmínečná (absolutní jen když $\dim H < \infty$), těsně ohraničená ($A = B = 1$) a exaktní Schauderova báze v $H$.*

*Důkaz.*
Bezpodmínečnost: Pro každé $\xi \in \ell^2(J)$ řada $\sum \xi_n \Phi_n$ konverguje bezpodmínečně v důsledku PI a RFV, neboť $\|x\|^2 = \sum |\xi_n|^2$ ($\xi_n = \langle x, \Phi_n \rangle$), je absolutně konvergentní číselná řada, jejíž součet $\|x\|^2$ nezávisí na pořadí a tedy ani součet $x$.
$\Phi$ je absolutní právě když pro každé $\xi \in \ell^2(J)$ je $\sum \|\xi_n \Phi_n\| = \sum |\xi_n| \|\Phi_n\| = \sum |\xi_n| < \infty$, tj. právě když $\xi \in \ell^1(J)$, neboli právě když $\ell^2(J) = \ell^1(J)$. To ale nastane pouze při $\dim H < \infty$ (viz 2.80(c)), neboť jinak $\ell^2(J) \supsetneqq \ell^1(J)$: například $\{\frac{1}{n}\} \in \ell^2(J) - \ell^1(J)$.
Těsná ohraničenost je zřejmá, neboť $\|\Phi_n\| = 1$ pro každé $n \in J$.
Exaktnost: $\{\Phi_n\}_{n \neq m}$ nemůže být úplná v $H$ pro žádné $m \in J$ podle 6.7, neboť pro každé $n \in J$, $n \neq m$, je $0 \neq \Phi_m \perp \Phi_n$.
$\{\Phi_n\}$ je Schauderova báze, neboť souřadnicové funkcionály $\xi_n(\cdot) = \langle \cdot, \Phi_n \rangle$ jsou spojité dle RVR 3.12. □

**Důsledek 6.25.** *Každý separabilní H-prostor je unitárně izomorfní s $\ell^2(J)$, kde $J$ je nejvýše spočetná indexová množina*[8]*.*
*Zejména každý funkcionální prostor $L^2(\mathcal{I})$ ($\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná) je unitárně izomorfní s $\ell^2$.*

*Důkaz.* Plyne z 2.69 a z 6.23(4). Jelikož $L^2(\mathcal{I})$ je dle 2.75(1) separabilní nekonečné dimenze (existuje spočetná ONB), tak $L^2(\mathcal{I}) \overset{UI}{\simeq} \ell^2(\mathbb{Z}) = \ell^2$. □

**Věta 6.26.** *Unitární operátor $U : H_1 \to H_2$ převádí ONB $\{\Phi_n\}_{n \in J}$ v $H_1$ na ONB $\{U\Phi_n\}_{n \in J}$ v $H_2$. Naopak každá dvojice ONB: $\{\Phi_n\}_{n \in J}$ v $H_1$ a $\{\Psi_n\}_{n \in J}$ v $H_2$ určuje vztahem $\Psi_n := U\Phi_n$ jednoznačně unitární operátor $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$: $Ux = \sum\limits_{n \in J} \langle x, \Phi_n \rangle \Psi_n$, $x \in H_1$.*

*Důkaz.*
I. Dle 6.23(1)(3a) stačí pro $\Psi_n$ ověřit $\|\Psi_n\| = 1$ a platnost PI pro každé $Ux = y \in H_2$:
$\|y\|^2 = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = \sum |\langle x, \Phi_n \rangle|^2 = \sum |\langle Ux, U\Phi_n \rangle|^2 = \sum |\langle y, \Psi_n \rangle|^2$, kde pro $x = \Phi_n$ je $y = \Psi_n$, takže $\|\Psi_n\|^2 = \|\Phi_n\|^2 = 1$.
II. Je-li $x \in H_1$ libovolný, $x \overset{6.23}{=} \sum \langle x, \Phi_n \rangle \Phi_n$, $\Psi_n = U\Phi_n$, pak jediné spojité lineární rozšíření na celý prostor $H_1$ musí být tvaru $Ux := \sum \langle x, \Phi_n \rangle U\Phi_n = \sum \langle x, \Phi_n \rangle \Psi_n$. Pak $U$ je unitární, neboť dle 6.23 je $L_\Psi Ux = \{\langle x, \Phi_n \rangle\} = L_\Phi x \; \forall x \in H_1$, takže $U = L_\Psi^{-1} L_\Phi$ je složením unitárních operátorů a tedy unitární dle 3.77. □

*Poznámka* 6.27.
Pro prostor $L^2(\mathcal{I})$ má tvrzení 6.25 zásadní význam, neboť umožňuje funkce v něm reprezentovat posloupnostmi souřadnic ve vhodné ONB. Pokud pro nějaké $x(t) \in L^2(\mathcal{I})$, $t \in \mathcal{I}$, příslušná nekonečná řada konverguje dostatečně rychle, lze ji nahradit konečným částečným součtem, což otevírá cestu k dobré numerické aproximaci.

Klasickým příkladem je ONB harmonických kmitů, která vede v prostoru $\widetilde{L}^2([0,T])$ na rozvoje prvků do *Fourierovy řady* (viz 2.81 a přílohu C.1). Další podrobnosti lze nalézt v monografii `[Heil:část IV s.429-465]`.

V posledních desetiletích byla nalezena celá řada ortonormálních bázových systémů i pro prostor $L^2(\mathbb{R}) := L^2$, zejména můžeme zmínit *vlnkové* neboli *waveletové* (např. [Dau92], [Chu92]) a *Gaborovy systémy* (např. [FS98]). Další informace v tomto směru lze nalézt kromě přílohy F i v mnoha dalších přehledových monografiích `[Heil:část III s.249-425]`, [Chr03, Chr08].

[8] Jedná se o analogii tvrzení 2.53 v separabilním H-prostoru nekonečné dimenze.

**Příklad 6.28.**

Pokud $|J| = n < \infty$, pak $\ell^2(J) = \mathbb{C}^n$ a $T_\Phi$ je s uvážením příkladu 4.13(4) reprezentován regulární maticí (totiž $T_\Phi$ unitární $\Rightarrow T_\Phi$ je TLI) $\boldsymbol{T}_\Phi := [\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_n]$, jejíž sloupce jsou $n$-rozměrné ortonormální vektory $\boldsymbol{\Phi}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Její řádky odpovídají (komplexně sdruženým) sloupcům rovněž unitární matice $\boldsymbol{T}_\Phi^* = \boldsymbol{T}_\Phi^{-1}$ a jsou tedy také ortonormální.

Tedy v prostorech konečné dimenze vystupují v roli rekonstrukčních operátorů ortonormálních bází právě **unitární matice**, v reálném případě ($\ell^2(J) = \mathbb{R}^n$) obvykle nazývané **ortogonálními maticemi**.

## 6.3 Rieszovy báze

V tomto odstavci se budeme zabývat tzv. Rieszovými bázemi, což jsou právě ty framy, jejichž rekonstrukční operátor je topologický lineární izomorfizmus.

**Definice 6.29 (Rieszova báze).**
Frame $\Phi := \{\Phi_n\}_{n\in J} \subset H$ (H-prostor) se nazývá **Rieszovou bází v** $H$ **(RB)**, jestliže příslušný rekonstrukční operátor $T := T_\Phi : \ell^2(J) \to H$ je TLI.

<u>Poznámka</u> 6.30. S ohledem na 6.26 je RB nejbližší zobecnění ONB ve smyslu topologické ekvivalence — opustíme pouze požadavek izometrie (unitarity).

**Věta 6.31 (Charakterizace Rieszových bází).**
*Nechť* $\Phi := \{\Phi_n\}_{n\in J} \subset H$ *(H-prostor) je posloupnost v* $H$*. Pak existují konstanty* $0 < A \le B < \infty$ *tak, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(1)* $\Phi$ *je Rieszova báze v* $H$.

*(1a)* $\Phi$ *je báze v* $H$*, pro niž* $\mathcal{R}_\Phi^\dagger = \ell^2(J)$.

*(1b)* $\Phi$ *je báze v* $H$*, kde* $\sum_{n\in J} \xi_n \Phi_n$ *konverguje* $\iff \sum_{n\in J} |\xi_n|^2 < \infty$.

*(2)* $\Phi$ *je ohraničená a bezpodmínečná báze v* $H$.

*(3)* $\Phi$ *je frame v* $H$*, kde* $L_\Phi$ *je TLI* $H \to \ell^2(J)$.

*(3a)* $\Phi$ *je* $\omega$*-nezávislá a pro každé* $x \in H$ *platí nerovnosti*[9]*:*
$$A\|x\|^2 \le \|L_\phi x\|^2 \overset{6.18(2)}{=} \sum_{n\in J} |\langle x, \Phi_n\rangle|^2 \le B\|x\|^2.$$

*(4)* $\Phi$ *je frame v* $H$*, kde* $T_\Phi$ *je TLI* $\ell^2(J) \to H$.

*(4a)* $\Phi$ *je úplná v* $H$ *a pro každé* $\xi \in \ell^2(J)$ *platí nerovnosti*[9]*:*
$A\|\xi\|^2 \le \|T_\Phi \xi\|^2 \overset{6.18(1)}{=} \|\sum_{n\in J} \xi_n \Phi_n\|^2 = \sum_{n\in J}\sum_{k\in J} \langle \Phi_n, \Phi_k\rangle \xi_n \bar{\xi}_k \le B\|\xi\|^2$*, kde v případě* $|J| = \aleph_0$ *se stačí omezit pouze na konečné posloupnosti (*$\xi_n = 0$ *pro s.v.* $n \in J$*).*

*(5)* $\Phi$ *je frame v* $H$*, kde* $R_\Phi$ *je TLI z* $\ell^2(J)$ *na* $\ell^2(J)$ *a* $S_\Phi$ *je TLI z* $H$ *na* $H$.

*V takovém případě pro každé* $x \in H$ *je* $\{x\}_\Phi = T_\Phi^{-1} x$ *jeho posloupností souřadnic a platí* $A \le R_\Phi, S_\Phi \le B$.

*Důkaz.*
<u>(1)⇒(1a)</u> zřejmě platí, neboť z definice 6.29 je bijektivní rekonstrukční operátor definován na $\ell^2(J)$, což musí být právě $\mathcal{R}_\Phi^\dagger$, protože dle 6.9 jeho inverze určuje souřadnicové zobrazení.
<u>(1a)⇔(1b)</u>: pro každé $x \in H$ je $x := \sum_{n\in J} \xi_n \Phi_n$ konvergentní $\Leftrightarrow$ $\xi \in \mathcal{R}_\Phi^\dagger$. Podobně $\sum_{n\in J} |\xi_n|^2 < \infty$ $\Leftrightarrow$ $\xi \in \ell^2(J)$. Celkem $\mathcal{R}_\Phi^\dagger = \ell^2(J)$ právě když konvergence $x := \sum_{n\in J} \xi_n \Phi_n$ je ekvivalentní

[9] Rozvolnění Parsevalových identit 6.23(3a),(4a).

s $\sum\limits_{n\in J}|\xi_n|^2<\infty$.

(1a,b)⇒(1): $T_\Phi$ je dle 6.9 lineární bijekce $\mathcal{R}_\Phi^\dagger \overset{(1a)}{=} \ell^2(J)$ na $H$. Pro každé $N\in\mathbb{N}$ označme $T_N(\xi):=\sum\limits_{k=1}^{N}\xi_{n_k}\Phi_{n_k}$ $N$-tý částečný součet. Ten je $\forall N\in\mathbb{N}$ lineární a rovněž spojitý, neboť $\|T_N(\xi)\|\le\sum\limits_{k=1}^{N}\sqrt{|\xi_{n_k}|^2}\|\Phi_{n_k}\|\le\|\xi\|_2(\sum\limits_{k=1}^{N}\|\Phi_{n_k}\|)$. Pak $\forall\xi\in\ell^2(J)$ je $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_{n_k}^2<\infty$ a dle (1b) je řada $T_\Phi\xi$ konvergentní, takže $T_N(\xi)\to T_\Phi\xi\ \forall\xi\in\ell^2(J) \overset{\text{BSV:3.15}}{\Rightarrow} T_\Phi$ je celkem spojitou bijekcí $\ell^2(J)$ na $H$ a tedy TLI dle IMT 3.6. Pak $\Phi$ je Rieszova báze dle definice 6.29.
(1)⇔(4) z definice 6.29.
(4)⇔(3) plyne z 3.32, neboť $L_\Phi=T_\Phi^*$.
(3)⇔(3a): $L_\Phi: H\to\ell^2(J)$ je TLI $\Leftrightarrow$ $L_\Phi: H\to\mathcal{R}(L_\Phi)\overset{4.5}{=}\overline{\mathcal{R}(L_\Phi)}$ je TLI a $\mathcal{R}(L_\Phi)=\ell^2(J)$ (surjekce) $\overset{4.10/1°2°}{\Leftrightarrow}$ existují $A:=m^2<M^2=:B$ takové, že $A\|x\|^2\le\|L_\Phi x\|^2\le B\|x\|^2$ a $\mathcal{R}(L_\Phi)=\ell^2(J)$, kde uzavřený $\mathcal{R}(T_\Phi^*)=\mathcal{R}(L_\Phi)=\ell^2(J)\overset{4.9(2)(3)}{\Leftrightarrow}\mathcal{N}(T_\Phi)=\{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\Phi$ je $\omega$-nezávislá. V takovém případě $A\le S_\Phi\overset{6.18(4)}{=}L_\Phi^*L_\Phi\le B$ dle 4.10/2°3°.
(4)⇔(4a): $T_\Phi:\ell^2(J)\to H$ je TLI $\Leftrightarrow$ $T_\Phi:\ell^2(J)\to\mathcal{R}(T_\Phi)\overset{4.5}{=}\overline{\mathcal{R}(T_\Phi)}$ je TLI a $\mathcal{R}(T_\Phi)=H$ (surjekce) $\overset{4.10/1°2°}{\Leftrightarrow}$ existují $A:=m^2<M^2=:B$ (stejné jako v (3a)) tak, že $A\|\xi\|^2\le\|T_\Phi\xi\|^2\le B\|\xi\|^2$ a $\mathcal{R}(T_\Phi)=H$, kde uzavřený $\mathcal{R}(T_\Phi)=H$ $\Leftrightarrow$ $H=\overline{\mathcal{L}(\Phi)}$ $\Leftrightarrow$ $\Phi$ je úplná v $H$ (cvičení: $\mathcal{R}(T_\Phi)\subseteq\overline{\mathcal{L}(\Phi)}$ a z uzavřenosti $\mathcal{R}(T_\Phi)$ plyne i opačná inkluze). V takovém případě $A\le R_\Phi\overset{6.18(3)}{=}T_\Phi^*T_\Phi\le B$ dle 4.10/2°3°.

Zbývá ukázat, že z platnosti (4a) pro konečné posloupnosti plyne platnost (4a) pro každou posloupnost. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $J=\mathbb{N}$ a omezit se na částečné součty uvedených řad. Pak

$$\begin{array}{ccccc} A\sum\limits_{n=1}^{N}|\xi_n|^2 & \le & \|\sum\limits_{n=1}^{N}\xi_n\Phi_n\|^2 & \le & B\sum\limits_{n=1}^{N}|\xi_n|^2 \\ \downarrow & & \downarrow \text{ spoj. normy } \downarrow & & \downarrow \\ A\|\xi\|^2 & \le & \|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n\Phi_n\|^2 & \le & B\|\xi\|^2 \end{array}$$

(4)⇒(5): $R_\Phi\overset{6.18(3)}{=}L_\Phi T_\Phi$ i $S_\Phi\overset{6.18(4)}{=}T_\Phi L_\Phi$ jsou surjektivní TLI, neboť jsou složením dvou surjektivních TLI dle (4) a z ní plynoucí (3).
(5)⇒(4): $R_\Phi=T_\Phi^*T_\Phi$ je TLI $\ell^2(J)$ na $\ell^2(J)\overset{4.10/1°5°}{\Rightarrow}T_\Phi:\ell^2(J)\to\mathcal{R}(T_\Phi)$ je TLI. Současně $S_\Phi=T_\Phi L_\Phi$ je TLI $H$ na $H\Rightarrow T_\Phi$ je surjekce na $H\Rightarrow T_\Phi$ je TLI z $\ell^2(J)$ na $H$, což je (4).
(1)⇒(2): (1)⇒(1b), takže řada $\sum\limits_{n\in J}\xi_n\Phi_n$ konverguje bezpodmínečně, neboť tato konvergence je ekvivalentní s absolutní (a tedy dle 6.5 bezpodmínečnou) konvergencí číselné řady $\sum\limits_{n\in J}|\xi_n|^2$. Současně (1)⇒(4a), kde pro každé $n\in J$ volbou $\xi=\varepsilon_n$ dostáváme $T_\Phi\xi=\Phi_n$ a $\|\xi\|=1$, takže (4a) přejde v $A\le\|\Phi_n\|^2\le B$ a $\Phi$ je ohraničená.
(2)⇒(1b): viz `[Heil:Thm.7.13(b)(c) s.197-200]`. □

**Důsledek 6.32.** *Každá Rieszova báze $\Phi:=\{\Phi_n\}_{n\in J}$ v $H$ je bezpodmínečná, ohraničená a exaktní Schauderova báze v $H$.*

*Důkaz.*
Ohraničenost a bezpodmínečnost plyne bezprostředně z 6.31(2).
$\Phi$ je Schauderova báze: $\forall x\in H$ dle 6.18(1) a 6.29 je $x=T_\Phi\xi$, kde $\xi(x)=\{x\}_\Phi\in\ell^2(J)$ je jediná, protože $T_\Phi$ je TLI a tedy prosté zobrazení. Proto $\Phi$ je báze, kde $\xi(x)=T_\Phi^{-1}x$, takže pro

každé $n \in J$ je souřadnicový funkcionál $\xi_n(\cdot)$ složením spojitého operátoru $T_\Phi^{-1}$ a souřadnicového funkcionálu $\xi \mapsto \xi_n$ v ONB $\mathcal{E}$, který je rovněž spojitý dle 6.24, neboť ONB je Schauderova báze. Exaktnost: Přirozená ONB $\mathcal{E} = \{\varepsilon\}_{n\in J}$ je dle 6.24 exaktní v $\ell^2(J)$, takže $\Phi$ je rovněž exaktní, neboť $\Phi_n = T_\Phi \varepsilon_n$ a TLI zachovává exaktnost (sporem): Kdyby $\{\Phi_n\}$ nebyla exaktní, pak $H = \overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\}_{n\neq m})}$ pro nějaké $m \in J \Rightarrow$ pro každé $\xi \in \ell^2(J)$ je $T_\Phi \xi = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, kde $x_k \in \mathcal{L}(\{\Phi_n\}_{n\neq m})$ a $\xi = T_\Phi^{-1} T_\Phi \xi = \lim\limits_{k\to\infty} T_\Phi^{-1} x_k$, takže $T_\Phi^{-1} x_k \in \mathcal{L}(\{T_\Phi^{-1}\Phi_n\}_{n\neq m}) = \mathcal{L}(\{\varepsilon_n\}_{n\neq m}) \Rightarrow \xi \in \overline{\mathcal{L}(\{\varepsilon_n\}_{n\neq m})}$. Pak by $\ell^2(J) = \overline{\mathcal{L}(\{\varepsilon_n\}_{n\neq m})}$ a $\mathcal{E}$ by nebyla exaktní, což je ve sporu s 6.24. □

**Důsledek 6.33.** *Každá ortonormální báze v $H$ je Rieszovou bází v $H$. Naopak Rieszova báze $\Phi$ v $H$ je ortonormální bází $\Leftrightarrow$ $T_\Phi$ je unitární $\Leftrightarrow$ $L_\Phi$ je unitární. V takovém případě lze v 6.31 volit $A = B = 1$.*

*Důkaz.*
I. $\Phi$ ONB v $H \overset{6.23(3)}{\Rightarrow} \Phi$ je frame, kde $L_\Phi$ je unitární $\overset{3.74}{\Rightarrow} \Phi$ je frame, kde $L_\Phi$ je TLI $\overset{6.31(3)}{\Rightarrow} \Phi$ je RB v $H$.
II. Naopak opět užitím 6.23(3) a 6.31(3) je RB $\Phi$ ortonormální bází $\Leftrightarrow$ $\Phi$ je frame, kde $L_\Phi$ je unitární $\overset{3.78/5^\circ}{\Leftrightarrow}$ $\Phi$ je frame, kde $L_\Phi^{-1} = L_\Phi^* = T_\Phi$ je unitární. V takovém případě $L_\Phi$ i $T_\Phi$ zachovávají normu dle 3.78/2°, takže v 6.31 lze volit $A = B = 1$. □

**Věta 6.34.** *Topologický lineární izomorfismus $T : H_1 \to H_2$ převádí ONB $E = \{e_n\}_{n\in J}$ v $H_1$ na RB $\{Te_n\}_{n\in J}$ v $H_2$. Naopak každá dvojice: ONB $E = \{e_n\}_{n\in J}$ v $H_1$ a RB $\Phi = \{\Phi_n\}_{n\in J}$ v $H_2$, určuje vztahem $\Phi_n := Te_n$ jednoznačně topologický lineární izomorfismus $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$: $Tx = \sum\limits_{n\in J} \langle x, e_n\rangle \Phi_n$, $x \in H_1$.*

*Důkaz.* Je speciálním případem důkazu dále uvedené obecnější věty 6.44. □

**Příklad 6.35** (Diskrétní a funkcionální aproximace: viz `demolsq.m` pro MATLAB).
Funkcionální přesná: Buď $H := \{\xi_0 + \xi_1 t + \cdots + \xi_n t^n \,|\, \xi_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, n\} \subset L^2([a, b])$ podprostor všech reálných polynomů stupně nejvýše $n$ na intervalu $[a, b]$. Tento prostor je $(n+1)$-dimenzionální a tedy uzavřený H-podprostor. Za jeho (Rieszovu) bázi zvolíme homogenní polynomy $\Phi = \{1, t, \dots, t^n\}$, $\Phi_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Naším cílem je co nejpřesněji aproximovat zvolenou funkci $x(t) \in L^2([a, b])$, tj. hledáme $\xi^+ \in \mathbb{R}^{n+1} = \ell^2(J)$, kde $J = \{0, 1, \dots, n\}$, pomocí pseudoinverzního operátoru $\xi^+ = T_\Phi^+ x$, kde $T_\Phi \xi^+ = P_H x =: \widehat{x}$ minimalizuje kvadratickou chybu $\|x - \widehat{x}\|^2$. Pomocí vztahu $T_\Phi^+ \overset{(I11)}{=} R_\Phi^+ L_\Phi$ lze řešení přenést do $\mathbb{R}^{n+1}$, kde $R_\Phi$ je TLI dle 6.31(5) reprezentovaný dle 4.13(4) regulární maticí $R_\Phi \overset{6.18(3)}{=} [\langle \Phi_i, \Phi_j\rangle] =: [R_{ij}]$ řádu $n+1$, takže $R_\Phi^+ \overset{(I8)}{=} R_\Phi^{-1}$ a $\xi^+ = T_\Phi^+ x = R_\Phi^{-1} x^*$, kde $x^* := L_\Phi x = [\langle x, \Phi_0\rangle, \langle x, \Phi_1\rangle, \dots, \langle x, \Phi_n\rangle]^T$. Zbývá spočíst skalární součiny v $L^2([a, b])$:
$R_{ij} = \langle t^i, t^j\rangle = \int\limits_a^b t^i t^j\, dt = \int\limits_a^b t^{i+j}\, dt = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1}$ a $\langle x, t^j\rangle = \int\limits_a^b x(t) t^j\, dt$ pro $j = 0, 1, \dots, n$.
Funkcionální přibližná: Při řešení praktických úloh bývá $x(t)$ obvykle známa pouze na diskrétní síti $t_i$ (vzorkovaný signál) délky $m+1$: $x_i = x(t_i)$, kde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$. V tomto případě je třeba integrály spočíst přibližně pomocí vhodné kvadraturní formule. Je-li síť ekvidistantní ($\Delta t = t_i - t_{i-1}$ pro $i = 1, \dots, m$), pak nejjednodušší obdélníkové pravidlo dává pro $j = 0, 1, \dots, n$: $\langle x, t^j\rangle = \int\limits_a^b x(t) t^j\, dt \approx \Delta t \sum\limits_{k=1}^m x(t_k) t_k^j \Rightarrow x^* \approx \Delta t \boldsymbol{T}_\Phi^T \boldsymbol{x}$, kde $\boldsymbol{T}_\Phi = [t_k^j]$ je matice diskretizovaných bázových prvků rozměru $(m+1) \times (n+1)$.
Diskrétní (nejméně přesná): Diskretizujeme (zbytečně) bázové funkce i při výpočtu $R_{ij}$: $R_\Phi \approx \Delta t\, \boldsymbol{T}_\Phi^T \boldsymbol{T}_\Phi =: \Delta t\, \boldsymbol{R}_\Phi$, kdy $\xi^+ = R_\Phi^{-1} x^* \approx \boldsymbol{\xi}^+ := \frac{1}{\Delta t} \boldsymbol{R}_\Phi^{-1} \Delta t\, \boldsymbol{T}_\Phi^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}_\Phi^{-1} \boldsymbol{T}_\Phi^T \boldsymbol{x}$ dává běžně používaný vztah pro diskrétní polynomiální aproximaci metodou nejmenších čtverců.

## 6.4 „Framy“ (angl. Frames)

V tomto odstavci se budeme zabývat framy dle definice 6.18.

**Věta 6.36.** *Je-li* $\Phi = \{\Phi_n\}_{n\in J}$ *frame v* $H$*, pak* $\Phi$ *je úplná v* $H$ *a pro každé* $x \in H$ *existuje* $\xi = \{\xi_n\} \in \ell^2(J) : x = \sum \xi_n \Phi_n$*, kde řada konverguje bezpodmínečně.*

*Důkaz.* $\Phi$ frame $\overset{6.18}{\Rightarrow}$ $T_\Phi$ je surjekce $\ell^2(J)$ na $H \Rightarrow$ pro každé $x \in H$ existuje $\xi \in \ell^2(J)$ tak, že $x = T_\Phi \xi$, kde $\xi = \sum \xi_n \varepsilon_n$ konverguje bezpodmínečně v přirozené ONB $\mathcal{E}$, takže také konverguje bezpodmínečně $x = T_\Phi \xi = T_\Phi(\sum \xi_n \varepsilon_n) = \sum \xi_n \Phi_n \in \overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\})}$ pro libovolné $x \in H$, takže $H = \overline{\mathcal{L}(\{\Phi_n\})}$ a $\Phi$ je tedy úplná v $H$. □

<u>*Poznámka*</u> 6.37. Zřejmě frame představuje další zobecnění Rieszovy báze (ta je speciálním případem framu), kde z předpokladu topologické ekvivalence ponecháme pouze spojitost a surjektivitu, což stále ještě dovoluje vyjádřit každé $x \in H$ ve tvaru $x = \sum \xi_n \Phi_n$, kde na rozdíl od RB souřadnicová posloupnost $\xi$ již nemusí existovat jediná a tudíž $\Phi$ nemusí být bází. Frame, který není RB nazveme **superúplným**[10] **systémem v** $H$. Totiž $T_\Phi$ nemusí být prosté, takže ani $\Phi$ nemusí být $\omega$-nezávislý. V porovnání s 6.31(2) lze pro $\xi \in \ell^2(J)$ garantovat bezpodmínečnost a ohraničenost $\Phi$ jen shora: $0 \le \|\Phi_n\| \le B < \infty$.

**Věta 6.38.** *V* $H$ *existuje frame právě když* $H$ *je separabilní.*

*Důkaz.*
I. V $H$ existuje frame $\Phi$ $\overset{6.36}{\Rightarrow}$ $\Phi$ je nejvýše spočetná a úplná $\Rightarrow$ $H$ je separabilní dle 2.69 (viz poznámku pod čarou).
II. $H$ separabilní $\overset{2.69}{\Rightarrow}$ v $H$ existuje nejvýše spočetná ONB, která je speciálním případem framu ($T_\Phi$ unitární dle 6.23(4)). □

**Věta 6.39 (Charakterizace framů).**
*Nechť* $\Phi := \{\Phi_n\}_{n\in J} \subset H$ *(H-prostor) je posloupnost v* $H$*. Pak existují konstanty* $0 < A \le B < \infty$ *tak, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- *(1)* $\Phi$ *je frame v* $H$*.*
- *(2)* $L_\Phi$ *je TLI* $H \to \mathcal{R}(L_\Phi) \subseteq \ell^2(J)$*.*
- *(2a) Pro každé* $x \in H$ *platí nerovnosti:*
  $$A\|x\|^2 \le \|L_\phi x\|^2 \overset{6.18(2)}{=} \sum_{n\in J} |\langle x, \Phi_n\rangle|^2 \le B\|x\|^2.$$
- *(3)* $T_\Phi := L_\Phi^* \in \mathcal{B}(\ell^2(J), H)$ *surjektivní na* $H$*.*
- *(3a)* $\Phi$ *je úplná v* $H$*,* $\sum_{n\in J} |\langle x, \Phi_n\rangle|^2 < \infty \ \forall x \in H$*, a pro každé* $\xi \in \mathcal{N}(T_\Phi)^\perp = \mathcal{R}(L_\Phi)$ *platí nerovnosti:*
  $$A\|\xi\|^2 \le \|T_\Phi \xi\|^2 \overset{6.18(1)}{=} \|\sum_{n\in J} \xi_n \Phi_n\|^2 = \sum_{n\in J}\sum_{k\in J} \langle \Phi_n, \Phi_k\rangle \xi_n \bar{\xi}_k \le B\|\xi\|^2.$$
- *(4)* $S_\Phi$ *je TLI z* $H$ *na* $H$*.*

*V takovém případě pro každé* $x \in H$ *je* $\{x\}_\Phi \overset{5.4}{=} T_\Phi^+ x$ *jeho jedinou posloupností souřadnic ležící v* $\mathcal{N}(T_\Phi)^\perp$ *a platí* $A \le S_\Phi, R_\Phi \le B$*, kde* $R_\Phi : \mathcal{R}(L_\Phi) \to \mathcal{R}(L_\Phi)$ *je TLI.*

[10] Z angl. *overcomplete.*

*Důkaz.* Probíhá analogicky[11] jako důkaz věty 6.31:
(1)⇔(3) je dle definice 6.18.
(3)⇔(2) platí dle 4.9(1)(2) aplikované na operátory $L_\Phi$ a $L_\Phi^* = T_\Phi$.
(2)⇔(4) užitím ekvivalence 1° ⇔ 5° ve větě 4.10, kde $S_\Phi = L_\Phi^* L_\Phi$ a $A = m^2$ a $B = M^2$.
(2)⇔(2a) užitím ekvivalence 1° ⇔ 2° ve větě 4.10, kde $A = m^2$ a $B = M^2$.
(3)⇔(3a): Podle 4.5 platí nerovnosti v (3a) $\forall\, x \in \mathcal{N}(T_\Phi)^\perp \;\Leftrightarrow\; T_\Phi : \mathcal{N}(T_\Phi)^\perp \to \mathcal{R}(T_\Phi)$ je TLI, kde $\mathcal{R}(T_\Phi)$ je uzavřený, neboť $\mathcal{N}(T_\Phi)^\perp$ je uzavřený dle 2.65.
Pokud platí (3), pak je $H = \mathcal{R}(T_\Phi) = \overline{\mathcal{L}(\Phi)}$ (úplnost $\Phi$), $\mathcal{D}(T_\Phi^*) = \mathcal{D}(L_\Phi) = H$ (neboli $\sum\limits_{n\in J} |\langle x, \varPhi_n\rangle|^2 < \infty$ pro každé $x \in H$) a $\dot{T} : \mathcal{N}(T_\Phi)^\perp \overset{4.1(1)}{=} \mathcal{R}(T_\Phi^*) \to \mathcal{R}(T_\Phi) = H$ je TLI dle 4.12. Ukázali jsme tak platnost (3a).
Jestliže naopak platí (3a), pak $T_\Phi : \mathcal{N}(T_\Phi)^\perp \to \mathcal{R}(T_\Phi)$ je TLI, kde $\mathcal{R}(T_\Phi)$ je uzavřený, což spolu s jeho úplností v $H$ dává $H = \mathcal{R}(T_\Phi)$ a tedy surjektivitu $T_\Phi$. Zbývá ukázat $\mathcal{D}(T_\Phi) = \ell^2(J)$. To je důsledkem $\mathcal{D}(L_\Phi) = H$, kdy $L_\Phi \in \mathcal{B}(H, \ell^2(J))$ vzhledem k platnosti $\sum\limits_{n\in J} |\langle x, \varPhi_n\rangle|^2 < \infty\, \forall\, x \in H$, neboť pak $T_\Phi = L_\Phi^* \in \mathcal{B}(\ell^2(J), H)$. □

**Důsledek 6.40.** *Nechť $\Phi = \{\varPhi_n\}_{n\in J}$ je posloupnost v $H$ (H-prostor). Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*
*(1) $\Phi$ je Rieszova báze v $H$.*
*(2) $\Phi$ je frame v $H$, kde $\varPhi_n$, $n \in J$, jsou $\omega$-nezávislé.*
*(3) $\Phi$ je exaktní frame.*

*Důkaz.*
(1)⇔(2) je důsledkem 6.39(2a) a 6.31(3a).
(1)⇒(3) plyne z 6.32.
(3)⇒(2) sporem: Kdyby $\varPhi_n$ nebyly $\omega$-nezávislé, pak $\exists\, m \in J : 0 = \sum \xi_n \varPhi_n$, kde $\xi_m \neq 0 \Rightarrow \exists\, m \in J : \varPhi_m = \sum\limits_{n\neq m} \left(-\frac{\xi_n}{\xi_m}\varPhi_n\right) \Rightarrow \exists\, m \in J : \varPhi_m \in \overline{\mathcal{L}(\{\varPhi_n\}_{n\neq m})}$.
Pak $H \overset{6.36}{=} \overline{\mathcal{L}(\{\varPhi_n\}_n)} \subseteq \overline{\mathcal{L}(\{\varPhi_n\}_{n\neq m})} \subseteq H$, což je spor s exaktností dle definice 6.6(2). □

**Definice 6.41 (Meze framu).**
Čísla $A, B$ z 6.39 a 6.31 nazýváme **mezemi framu** (**dolní mez** $A$, **horní mez** $B$). Frame se nazývá $A$**-těsný**, jestliže $A = B$. Frame, který je 1-těsný se také nazývá **Parsevalův frame**. Vzhledem k nerovnostem $A \leq S_\Phi, R_\Phi \leq B$ jsou **nejlepšími (nejtěsnějšími) mezemi framu** $\Phi$ právě nejlepší meze operátoru $S_\Phi$, resp. $R_\Phi$: $A \leq A_\Phi := \alpha_{S_\Phi} = \alpha_{R_\Phi}$ a $B \geq B_\Phi := \beta_{S_\Phi} = \beta_{R_\Phi}$. Takovým mezím říkáme optimální meze.

**Lemma 6.42** (Výpočet nejlepších mezí framu)**.**

$$A_\Phi = \|S_\Phi^{-1}\|^{-1} = \|R_\Phi^{-1}\|^{-1} = \|L_\Phi^{-1}\|^{-2} = \|T_\Phi^{+}\|^{-2} \tag{6.2a}$$

$$B_\Phi = \|S_\Phi\| = \|R_\Phi\| = \|L_\Phi\|^2 = \|T_\Phi\|^2 \tag{6.2b}$$

*Důkaz.*
Identity (6.2b) plynou z 3.50 a identity (6.2a) navíc s uvážením 4.5, 4.10/3* a 5.8. □

[11] Ve (2a) chybí podmínka na $\omega$-nezávislost, neboť nepožadujeme surjektivitu $L_\Phi$ a naopak v (3a) je navíc podmínka $\sum\limits_{n\in J} |\langle x, \varPhi_n\rangle|^2 < \infty$, která garantuje, že $T_\Phi = L_\Phi^*$ je definován a spojitý na celém prostoru $\ell^2(J)$. Přitom v nerovnostech (3a) se nestačí omezit na konečné podposloupnosti, neboť ty nemusí patřit do $\mathcal{R}(L_\Phi)$.

**Příklad 6.43.**

(a) Těsný frame, který není exaktní: Sjednocení konečného počtu $N \geq 2$ ONB v $H$ je těsný frame, kde $A = B = N$, který není exaktní:
Jestliže $\{e_{m,n}\}_n$ jsou ONB v $H$ pro každé $m = 1, \dots, N$, pak pro každé $x \in H$ je

$$\sum_{m=1}^{N} \sum_{n} |\langle x, e_{m,n}\rangle|^2 \stackrel{\mathrm{PI}}{=} \sum_{m=1}^{N} \|x\|^2 = N\|x\|^2.$$

Po odstranění některého prvku $e_{m,n}$ systém stále obsahuje alespoň jednu kompletní ONB a je tedy úplný v $H$, takže $\{e_{m,n}\}$ není exaktní. Například, je-li $\{e_n\}$ ONB v $H$, pak $\{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \dots\}$ je neexaktní těsný frame s $A = B = 2$.

(b) Exaktní frame, který není těsný: Položme $\Phi = \{a_n e_n\}$, kde $\{e_n\}$ je ONB v $H$ a $0 < A \leq |a_n|^2 \leq B < \infty$, přičemž $\exists\, m \neq n : |a_n| \neq |a_m|$. $\Phi$ je zřejmě exaktní a pro každé $x \in H$ je

$$A\|x\|^2 \stackrel{\mathrm{PI}}{=} A \sum_{n} |\langle x, e_n\rangle|^2 < \underbrace{\sum_{n} |a_n|^2 |\langle x, e_n\rangle|^2)}_{\sum_n |\langle x, a_n e_n\rangle|^2} < B \sum_{n} |\langle x, e_n\rangle|^2 \stackrel{\mathrm{PI}}{=} B\|x\|^2.$$

Například $\{\sqrt{2}e_1, e_2, e_3, \dots\}$ je exaktní, ale nikoliv těsný, neboť $A_\Phi = 1$ a $B_\Phi = 2$.

(c) Frame, který není těsný ani exaktní: Existuje mnoho způsobů, jak vytvářet takové framy. Můžeme například konstruovat nové framy jako sjednocení několika framů typu (a)-(b) nebo (b)-(b). Například $\{a_1e_1, a_2e_1, a_3e_2, \dots\}$, kde $\{e_n\}$ je ONB v $H$, $0 < A \leq |a_n|^2 \leq B < \infty$, $\exists\, m \neq n : |a_n| \neq |a_m|$, není exaktní ani těsný s mezemi $2A < 2B$.

**Věta 6.44.**
*I. Každý operátor $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, který je surjektivní (TLI) převádí ONB $E = \{e_n\}_{n\in J}$ v $H_1$ na frame (RB) $\{Ue_n\}_{n\in J}$ v $H_2$.*
*II. Naopak každá dvojice: ONB $E = \{e_n\}_{n\in J}$ v $H_1$ a frame (RB) $\Phi = \{\varPhi_n\}_{n\in J}$ v $H_2$, určuje vztahem $\varPhi_n := Ue_n$ jednoznačně operátor $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, který je surjektivní (TLI) a $Ux = \sum_{n\in J} \langle x, e_n\rangle \varPhi_n$, $x \in H_1$.*

*Důkaz.*
I. Dle 6.23(4) je $e_n = T_E \varepsilon_n$, kde $T_E : \ell^2(J) \to H_1$ je unitární a tedy dle 3.74 surjektivní a TLI $\Rightarrow Ue_n = UT_E\varepsilon_n$, kde $UT_E$ je složením dvou surjekcí (TLI) a tedy také surjekce (TLI), takže $\{Ue_n\}$ je frame (RB) v $H_2$ dle definice 6.18 (resp. 6.29).
II. Je-li $x \in H_1$ libovolný, $x \stackrel{6.23}{=} \sum \langle x, e_n\rangle e_n$, $\varPhi_n = Ue_n$, pak jediné spojité lineární rozšíření na celý prostor $H_1$ musí být tvaru $Ux := \sum\langle x, e_n\rangle Ue_n = \sum \langle x, e_n\rangle \varPhi_n$. Přitom $U$ je surjekce (TLI), neboť dle 6.23 je $\{\langle x, e_n\rangle\} = L_E x\ \forall\, x \in H_1$, takže $U = T_\Phi L_E$ je opět surjekce (TLI) jakožto složení dvou surjekcí (TLI), neboť $L_E$ je unitární a tedy TLI a surjekce opět dle 3.74. □

**Důsledek 6.45** (Konstrukce (Parsevalova) framu pomocí ortogonální projekce[12]).
*Nechť $P_H \in \mathcal{B}(H_1, H)$ je operátor ortogonální projekce prostoru $H_1$ na podprostor $H \subseteq H_1$. Pak $P_H$ převádí každou RB $\Phi = \{\varPhi_n\}_{n\in J}$ v $H_1$ na frame $\widehat{\Phi} = \{\widehat{\varPhi}_n\}_{n\in J}$ v $H$ a každou ONB $E = \{e_n\}_{n\in J}$ v $H_1$ na Parsevalův frame $\widehat{E} = \{\widehat{e}_n\}_{n\in J}$ v $H$.*

*Důkaz.*
$\Phi$ RB $\stackrel{6.29}{\Rightarrow} T_\Phi \in \mathcal{B}(\ell^2(J), H_1)$ je TLI a $P_H \in \mathcal{B}(H_1, H)$ je surjekce (viz 3.60(1)), takže $\widehat{\varPhi}_n = P_H \varPhi_n$

[12] Dá se dokonce ukázat i opačná implikace: každý (Parsevalův) frame se dá zkonstruovat pomocí operátoru ortogonální projekce — viz text `FR_RB_ONB.pdf`, odst. 4.

$= P_H T_\Phi \varepsilon_n$, kde $\mathcal{E} = \{\varepsilon_n\}_{n\in J}$ je přirozená ONB v $\ell^2(J)$ a složený operátor $P_H T_\Phi \in \mathcal{B}(\ell^2(J), H)$ je také surjekce, takže $\widehat{\Phi} = \{\widehat{\Phi}_n\}_{n\in J}$ je frame v $H$ dle definice 6.18 i dle 6.44(I.).
Pokud je $\Phi = E$ ONB v $H_1$, pak dle 6.23(3a) platí Parsevalova identita $\sum\limits_{n\in J} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2$ pro každé $x \in H_1$. Jestliže $x \in H$, pak $\langle x, e_n\rangle = \langle x, \widehat{e}_n + e_n^\perp\rangle = \langle x, \widehat{e}_n\rangle + \langle x, e_n^\perp\rangle = \langle x, \widehat{e}_n\rangle$, neboť $e_n^\perp \perp x$. Pro $x \in H$ pak Parsevalovu identitu lze psát ve tvaru $\sum\limits_{n\in J} |\langle x, \widehat{e}_n\rangle|^2 = \|x\|^2$ dokazujícím, že $\widehat{E} = \{\widehat{e}_n\}_{n\in J}$ je Parsevalův frame v $H$ (viz definici 6.41). □

**Příklad 6.46** (Matice)**.**
Pokud $|J| = n < \infty$, pak $\ell^2(J) = \mathbb{C}^n$ a rekonstrukční operátor $T_\Phi$ framu (Rieszovy báze) v $\mathbb{C}^m$ je s uvážením příkladu 4.13(4) reprezentován maticí řádkově plné hodnosti (regulární) $\boldsymbol{T}_\Phi := [\boldsymbol{\Phi_1}, \ldots, \boldsymbol{\Phi_n}]$, jejíž sloupce jsou $m$-rozměrné vektory $\boldsymbol{\Phi}_j \in \mathbb{C}^m$ pro $j = 1, \ldots, n$, kde $m \le n$ $(m = n)$.

Tedy v prostorech konečné dimenze vystupují v roli rekonstrukčních operátorů framů (Rieszových bází) právě **matice řádkově plné hodnosti (regulární matice)**.

Přitom RB $\Phi$ je ONB právě když regulární matice $\boldsymbol{T}_\Phi$ je unitární — viz příklad 6.28.

**Věta 6.47.** *Nechť $\Phi = \{\Phi_n\}_{n\in J}$ je posloupnost v $H$ (H-prostor), $A > 0$ reálné číslo. Pak $\{\frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\}_{n\in J}$ je ONB v $H$ právě když $\Phi$ je A-těsný frame v $H$, který je současně těsně ohraničený tak, že $\|\Phi_n\| = \sqrt{A}$ pro každé $n \in J$.*

*Důkaz.*
$\Rightarrow$: $\{\frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\}_{n\in J}$ ONB v $H \overset{6.24}{\Rightarrow} \|\frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\| = 1\ \forall n \in J \Rightarrow \|\Phi_n\| = \sqrt{A}\ \forall n \in J$. Současně dle 6.23 platí PI $\forall x \in H$: $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in J} \big|\langle x, \frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\rangle\big|^2 = \sum\limits_{n\in J} \frac{1}{A}\big|\langle x, \Phi_n\rangle\big|^2 \ \Leftrightarrow\ A\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in J} |\langle x, \Phi_n\rangle|^2\ \forall x \in H \ \Leftrightarrow\ \Phi$ je těsný frame s mezemi $A = B$.
$\Leftarrow$: $\Phi$ těsný frame v $H$ s mezemi $A = B \Rightarrow \forall x \in H$ platí
$A\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in J} |\langle x, \Phi_n\rangle|^2 \ \Leftrightarrow\ \|x\|^2 \overset{(*)}{=} \sum\limits_{n\in J} \big|\langle x, \frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\rangle\big|^2$. Pak speciálně pro $\forall m \in J$ za předpokladu těsné ohraničenosti $\|\Phi_m\| = \sqrt{A}$ dostáváme: $x := \frac{\Phi_m}{\sqrt{A}} \overset{(*)}{\Rightarrow} 1 = \big\|\frac{\Phi_m}{\sqrt{A}}\big\|^2 = \big|\langle \frac{\Phi_m}{\sqrt{A}}, \frac{\Phi_m}{\sqrt{A}}\rangle\big|^2 + \sum\limits_{n\neq m} \big|\langle \frac{\Phi_m}{\sqrt{A}}, \frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\rangle\big|^2$
$\Rightarrow \sum\limits_{n\neq m} \big|\langle \frac{\Phi_m}{\sqrt{A}}, \frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\rangle\big|^2 = 0$ (totiž $\big|\langle \frac{\Phi_m}{\sqrt{A}}, \frac{\Phi_m}{\sqrt{A}}\rangle\big|^2 = \big\|\frac{\Phi_m}{\sqrt{A}}\big\|^4 = 1$) $\Rightarrow \langle \frac{\Phi_m}{\sqrt{A}}, \frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\rangle = 0\ \forall n \in J, n \neq m$.
Celkem tedy $\{\frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\}$ je ONS, neboť $m \in J$ byl libovolně zvolený. Současně $\{\frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\}$ je také úplný, neboť $\{\Phi_n\}$ je úplný dle 6.36. Pak $\{\frac{\Phi_n}{\sqrt{A}}\}$ je ONB dle 6.23(1a). □

**Důsledek 6.48.** *Parsevalův frame $\Phi = \{\Phi_n\}_{n\in J}$ v $H$ (H-prostor) je ONB právě když $\|\Phi_n\| = 1$ pro každé $n \in J$.*

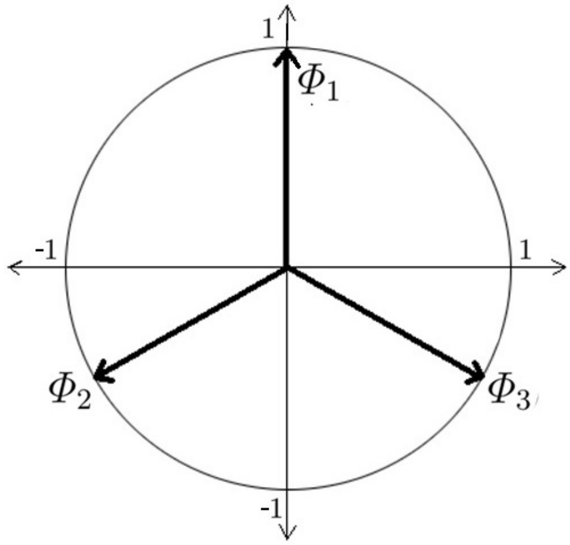
**Příklad 6.49 (Příklad těsného framu v $\mathbb{C}^2$ — viz obr. 6.1).**
Zkonstruujeme těsný frame $(A = B)$ a těsně ohraničený frame v $H = \mathbb{C}^2$, který není ONB:

$$\Phi_1 = [0, 1]$$
$$\Phi_2 = [-\cos 30°, -\sin 30°] = \Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Big]$$
$$\Phi_3 = [\cos 30°, -\sin 30°] = \Big[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\Big]$$

Pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2$, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$ dostáváme:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}|\langle x, \Phi_j\rangle|^2 &= |x_2|^2 + \Big|-x_1\frac{\sqrt{3}}{2} - x_2\frac{1}{2}\Big|^2 + \Big|x_1\frac{\sqrt{3}}{2} - x_2\frac{1}{2}\Big|^2 = \\ &= |x_2|^2 + \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}Re\,x_1 - \frac{1}{2}Re\,x_2\Big)^2 + \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}Im\,x_1 - \frac{1}{2}Im\,x_2\Big)^2 + \\ &\quad + \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}Re\,x_1 - \frac{1}{2}Re\,x_2\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}Im\,x_1 - \frac{1}{2}Im\,x_2\Big)^2 = \\ &= |x_2|^2 + \frac{3}{2}\Big[(Re\,x_1)^2 + (Im\,x_1)^2\Big] + \frac{1}{2}\Big[(Re\,x_2)^2 + (Im\,x_2)^2\Big] = \\ &= \frac{3}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2) = \frac{3}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2.\end{aligned}$$

Tedy $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ je těsný frame v $\mathbb{C}^2$ s mezemi $A = B = \frac{3}{2}$, přičemž $1 = \|\Phi_n\| \neq \sqrt{\frac{3}{2}}$ pro $n = 1, 2, 3$, takže $\Phi$ není ONB v $\mathbb{C}^2$ v souladu s tvrzením 6.47. Po vynásobení rovnosti konstantou $\frac{1}{A} = \frac{2}{3}$ obdržíme $\sum_{j=1}^{3}|\langle x, \sqrt{\frac{2}{3}}\Phi_j\rangle|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$, takže $\{[0, \sqrt{\frac{2}{3}}], [-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}], [\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}]\}$ je Parsevalův frame.




**Obrázek 6.1**: Těsný frame v $\mathbb{R}^2$: tzv. „Mercedes-Benz“ frame

Tabulka 6.1 shrnuje přehledně základní charakteristiky úplných systémů.

## 6.5 Framové reprezentace v Hilbertově prostoru. Princip duality

V tomto odstavci se budeme zabývat problémem hledání (pseudoinverzní) souřadnicové reprezentace prvků H-prostoru v systémech typu frame. Důležitou roli bude hrát konstrukce tzv. (kanonicky) duálního framu, jehož Besselův operátor umožní přímý výpočet souřadnic prvků v původním framu, tj. stejně jednoduše jako v případě ortonormálních bází.

V dalším (I#) značí odkaz na příslušnou identitu pro pseudoinverzní operátory dokázanou v kapitole 5.

**Tabulka 6.1**: Úplné systémy $\Phi = \{\Phi_n\}_{n\in J}$ na $H$: shrnutí hlavních charakteristik ($H^* := \mathcal{R}(L) \subseteq \ell^2(J)$)

| operátor 6.18 | ortonormální báze Věta 6.23 | Rieszova báze Věta 6.31 | frame Věta 6.39 |
|---|---|---|---|
| $T$ | UI: $\ell^2(J) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow H$ (4)(4a) | TLI: $\ell^2(J) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow H$ (4)(4a) | surjekce: $\ell^2(J) \twoheadrightarrow H$ (3)(3a) |
| $L$ | UI: $H \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \ell^2(J)$ (3)(3a) | TLI: $H \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \ell^2(J)$ (3)(3a) | TLI: $H \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow H^*$ (2)(2a) |
| $S$<br>$R$ | $I_H$<br>$I_{\ell^2(J)}$ | TLI: $H \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow H$<br>TLI: $\ell^2(J) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \ell^2(J)$ | TLI: $H \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow H$ |
| | 1-těsný, kde $\|\Phi_n\| = 1$ | | $A$-těsný $\Leftrightarrow$ $S = AI_H$ |
| Důležitá tvrzení užitá v důkazech: 3.32,4.9,4.10,4.12,4.17, 6.21,6.48 | | | |

**Definice 6.50.** Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ (H-prostory) a $S := TT^* \in \mathcal{B}(H_2, H_2)$. Pak Prvek $y' := S^+y$, $y \in H_2$ nazýváme prvkem **(kanonicky) duálním k** $y$, protože umožňuje nalézt $x^+ = T^+y$ přímo pomocí adjungovaného operátoru $T^*$ dle (I12): $x^+ = T^*y'$.

Položíme-li $H_1 := \ell^2(J)$ a $H_2 := H$, můžeme k posloupnosti $\Phi = \{\Phi_n\}_{n\in J} \subset H$ zkonstruovat (kanonicky) duální posloupnost $\Phi' = \{\Phi_n\}_{n\in J}$, která zachovává vlastnosti framu, resp. Rieszovy báze dle následující věty.

**Věta 6.51 (Duální frame [Rieszova báze]).**
*Nechť $\Phi = \{\Phi_n\}_{n\in J}$ je frame [resp. RB] v $H$ s rekonstrukčním operátorem $T_\Phi$. Pak (kanonicky) duální posloupnost $\Phi' = \{\Phi'_n\}_{n\in J}$, kde $\Phi'_n = S^+_\Phi \Phi_n = S^{-1}_\Phi \Phi_n$ $(n \in J)$ je rovněž frame [RB] v $H$ nazývaný* **(kanonicky) duální frame [RB] k $\Phi$ v** *$H$.*

*Důkaz.*
$S_\Phi$ je dle 6.39(4) TLI $H$ na $H$ a $S^+_\Phi \overset{(I8)}{=} S^{-1}_\Phi$ je rovněž TLI $H$ na $H$, takže $\Phi'_n = S^{-1}_\Phi \Phi_n = S^{-1}_\Phi T_\Phi \varepsilon_n$ je frame [RB], neboť $S^{-1}_\Phi T_\Phi$ je surjektivní [TLI], když $T_\Phi$ je surjektivní [TLI]. □

Nadále se budeme zabývat pouze kanonickou dualitou, která je založena na pseudoinverzi, proto přívlastek *kanonický* bude nadále vynechán.

*Označení.*
Nadále pro operátory přidružené k framu $\Phi$ a $\Phi'$ dle definice 6.18 budeme z důvodu zjednodušení a zpřehlednění zápisů používat zjednodušené značení:
$T := T_\Phi, L := L_\Phi, S := S_\Phi, R := R_\Phi$ a $T' := T_{\Phi'}, L' := L_{\Phi'}, S' := S_{\Phi'}, R' := R_{\Phi'}$.

**Důsledek 6.52.** *Za předpokladů věty 6.51 je $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(L')$ a platí*
(1) $T' = S^{-1}T$, $T = ST'$ *(vztahy mezi $T$ a $T'$ pomocí $S$)*
(2) $L' = LS^{-1}$, $L = L'S$ *(vztahy mezi $L$ a $L'$ pomocí $S$)*
(3) $S' = S^{-1}$, $S = (S')^{-1}$ *(vztahy mezi $S$ a $S'$)*

*Důkaz.*
(1) $\forall\, \xi \in \ell^2(J) : T'\xi = \sum_n \Phi'_n \xi_n = \sum_n S^{-1}\Phi_n\xi_n = S^{-1}\sum_n \Phi_n\xi_n = S^{-1}T\xi \Rightarrow$ $T' = S^{-1}T \Rightarrow T = ST'$.
(2) $L' = T'^* \overset{(1)}{=} (S^{-1}T)^* \overset{3.29}{=} T^*(S^{-1})^* \overset{3.32}{=} L(S^*)^{-1} = LS^{-1} \Rightarrow L = L'S$.
(3) $S' = T'L' \overset{(1)(2)}{=} S^{-1}TLS^{-1} = S^{-1}SS^{-1} = S^{-1}I_H = S^{-1} \Rightarrow (S')^{-1} = S$.

Dle (2) je $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(L')$, neboť $S$ je TLI $H$ na $H$. □

**Příklad 6.53.** Na obr. 6.2 vidíme frame $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ v $\mathbb{R}^2$. Konkrétně $\Phi_1 = [1,0]^T$, $\Phi_2 = [0,1]^T$, $\Phi_3 = [1,-1]^T$. Na první pohled je patrné, že vektory $\Phi_1, \Phi_2$ tvoří ortonormální bázi a vektor $\Phi_3$ je jejich lineární kombinací.

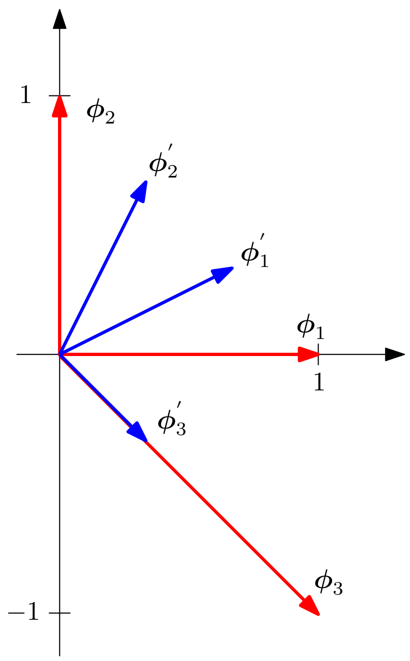
Vektory $\{\Phi'_1, \Phi'_2, \Phi'_3\}$ tvoří k původnímu framu kanonický duální frame. Pro jejich výpočet využijeme vztah (1) z 6.52, tedy budeme hledat kanonický duální frame ve tvaru $\Phi'_i = S^{-1}\Phi_i$. Jestliže vektory $\Phi_i$ umístíme za sebe jako sloupce matice $\boldsymbol{T}_\Phi$, pak framový operátor má podobu matice

$$\boldsymbol{S}_\Phi = \boldsymbol{T}_\Phi \boldsymbol{T}_\Phi^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

jejíž inverze je $\boldsymbol{S}_\Phi^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ a tudíž

$$(\boldsymbol{T}_\Phi)' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tento duální frame je znázorněn na obrázku 6.2.




**Obrázek 6.2**: Příklad jednoduchého framu (červeně) a jeho kanonického duálního framu v $\mathbb{R}^2$ (modře).

**Důsledek 6.54 (Princip duality).**
*Jestliže* $\Phi$ *frame v* $H$*, pak* $\Phi'' = \Phi$.

*Důkaz.* $\Phi''_n = (\Phi'_n)' = (S')^{-1}\Phi'_n = (S')^{-1}S^{-1}\Phi_n \overset{6.52(3)}{=} SS^{-1}\Phi_n = \Phi_n$. □

**Důsledek 6.55.** *Za předpokladů věty 6.51 platí*
*(1)* $T' = TR^+$, $T = T'R$ *(vztahy mezi* $T$ *a* $T'$ *pomocí* $R$*)*
*(2)* $L' = R^+L = T^+$, $L = RL' = T'^+$ *(vztahy mezi* $L$ *a* $L'$ *pomocí* $R$*)*
*(3)* $R' = R^+$, $R = R'^+$ *(vztahy mezi* $R$ *a* $R'$*)*

*Důkaz.* Pomocí identit (I#) z vět 5.1, 5.5 a 5.7 dostáváme:
(2) $L' \overset{6.52(2)}{=} LS^{-1} \overset{(I8)}{=} LS^+ \overset{(I12)}{=} T^+ \overset{(I11)}{=} R^+L$. Odtud
$RL' = RR^+L \overset{(I13)}{=} P_{\mathcal{R}(L)}L = L$.
(1) $T' = L'^* \overset{(2)}{=} (R^+L)^* = L^*(R^+)^* \overset{(I6)}{=} T(R^*)^+ = TR^+$. Odtud
$T = L^* \overset{(2)}{=} (RL')^* = L'^*R^* = T'R$.
(3) $R' = L'L'^* = L'T' \overset{(1)(2)}{=} R^+LTR^+ = R^+RR^+ \overset{(I2)}{=} R^+ \Rightarrow$
$R \overset{(I7)}{=} R^{++} = R'^+ \Rightarrow T'^+ \overset{(I11)}{=} R'^+L' = RL' \overset{(2)}{=} L$.

□

**Věta 6.56 (Číselné charakteristiky při dualitě).**
*Frame* $\Phi$ *v* $H$ *má (nejlepší) meze* $A \leq B$ *právě když jeho duální frame* $\Phi'$ *má (nejlepší) meze* $A' \leq B'$, *kde* $A' = \frac{1}{B}$ *a* $B' = \frac{1}{A}$. *Zejména platí, že frame* $\Phi$ *je těsný s mezemi* $A = B$ *právě když duální frame je těsný s mezemi* $\frac{1}{A} = \frac{1}{B}$. *Pro výpočet nejlepších mezí platí vztahy*
*(1)* $\|T\|^2 = \|L\|^2 = \|S\| = \|R\| = B_\Phi = \frac{1}{A_{\Phi'}} = \|R'^+\| = \|S'^{-1}\| = \|L'^{-1}\|^2$.
*(2)* $\|T'\|^2 = \|L'\|^2 = \|S'\| = \|R'\| = B_{\Phi'} = \frac{1}{A_\Phi} = \|R^+\| = \|S^{-1}\| = \|L^{-1}\|^2$.

*Důkaz.*
$0 < A \leq A_\Phi \overset{6.41}{=} \alpha_S \leq S \leq \beta_S \overset{6.41}{=} B_\Phi \leq B < \infty \overset{4.11}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{1}{B} \leq \frac{1}{B_\Phi} = \frac{1}{\beta_S} \leq S' = S^{-1} \leq \frac{1}{\alpha_S} = \frac{1}{A_\Phi} \leq \frac{1}{A} < \infty$.
Navzájem duální vztahy (1) a (2) jsou pak důsledkem identit (6.2a) a (6.2b). □

**Věta 6.57 (Věta o reprezentaci v Hilbertově (pod)prostoru).**
*Jestliže* $\Phi = \{\varPhi_n\}_{n\in J}$ *je frame v* $H \subseteq H_1$, *pak* $P_H = TL' = T'L$ *a tedy pro každé* $x \in H_1$ *platí*

$$\widehat{x} = \sum_{n\in J} \langle x, \varPhi'_n\rangle \varPhi_n = \sum_{n\in J} \langle x, \varPhi_n\rangle \varPhi'_n. \tag{6.3a}$$

*Důkaz.* $TL' \overset{6.55(2)}{=} TT^+ \overset{5.3(1)}{=} P_H \overset{5.3(1)}{=} T'T'^+ \overset{6.55(2)}{=} T'L$. □

**Důsledek 6.58 (Reprezentace pomocí těsného framu).**
*Jestliže je v předchozí větě frame* $\Phi$ *těsný s mezemi* $A = B$, *pak pro každé* $x \in H_1$ *platí*

$$\widehat{x} = \frac{1}{A} \sum_{n\in J} \langle x, \varPhi_n\rangle \varPhi_n = A \sum_{n\in J} \langle x, \varPhi'_n\rangle \varPhi'_n. \tag{6.3b}$$

*Důkaz.* Podle 4.17 je frame těsný s mezemi $\alpha_S = A = B = \beta_S \Leftrightarrow S = AI_H \Leftrightarrow S^{-1} = \frac{1}{A}I_H$. Pak (6.3b) plyne z (6.3a), neboť $\langle x, \varPhi'_n\rangle = \langle x, S^{-1}\varPhi_n\rangle = \langle x, \frac{1}{A}\varPhi_n\rangle = \frac{1}{A}\langle x, \varPhi_n\rangle$. Podobně duální rozvoj dostaneme pro $S'^{-1} \overset{6.52(3)}{=} S = AI_H$ s uvážením 6.54. □

**Tedy těsné framy poskytují zároveň nadbytečnost i jednoduchý výpočet souřadnic.**

**Věta 6.59.** *Rieszova báze $\Phi$ v $H$ je ONB právě když $\Phi' = \Phi$.*

*Důkaz.*
$\Rightarrow$: RB $\Phi$ je ONB $\overset{6.23(5)}{\Rightarrow}$ $S = I_H \Rightarrow S^{-1} = I_H$, takže $\mathit{\Phi}'_n = S^{-1}\mathit{\Phi}_n = \mathit{\Phi}_n\ \forall\, n \in J$ a tedy $\Phi = \Phi'$.
$\Leftarrow$: $\Phi' = \Phi \Rightarrow L = L'$ a $T = T' \Rightarrow L \overset{6.52(2)}{=} LS$ a $L \overset{6.55(2)}{=} RL \Rightarrow I_H = L^{-1}L = L^{-1}LS = S$ a $I_{\ell^2(J)} = LL^{-1} = RLL^{-1} = R \overset{6.23(5)}{\Rightarrow} \Phi$ je ONB.
V takovém případě $A_\Phi = \alpha_S = 1 = \beta_S = B_\Phi$. □

**Definice 6.60** (**Biortogonalita).**
Posloupnosti $\{\mathit{\Phi}_n\}_{n\in J}$, $\{\mathit{\Psi}_n\}_{n\in J} \subset H$ se nazývají **biortogonální**, jestliže $\langle \mathit{\Phi}_m, \mathit{\Psi}_n\rangle = \delta_{mn}$.

**Věta 6.61.** *Je-li $\Phi$ RB v $H$, pak duální RB $\Phi'$ je jediná posloupnost biortogonální k $\Phi$.*

*Důkaz.* Dle 6.31 jsou $T$ a $L = T^*$ TLI a pro $\forall\, m, n \in J$ dostáváme $\langle \mathit{\Phi}_m, \mathit{\Phi}'_n\rangle = \langle T\varepsilon_m, T'\varepsilon_n\rangle \overset{6.52(1)}{=} \langle \varepsilon_m, T^*S^{-1}T\varepsilon_n\rangle = \langle \varepsilon_m, L(TL)^{-1}T\varepsilon_n\rangle = \langle \varepsilon_m, LL^{-1}T^{-1}T\varepsilon_n\rangle = \langle \varepsilon_m, \varepsilon_n\rangle = \delta_{mn}$.
Jednoznačnost: Nechť $\Psi = \{\mathit{\Psi}\}_n$ je posloupnost biortogonální k $\Phi$ v $H$, pak $\forall\, m \in J$ je $\mathit{\Psi}_m \overset{(6.3a)}{=} \sum\limits_{n\in J} \langle \mathit{\Psi}_m, \mathit{\Phi}_n\rangle \mathit{\Phi}'_n = \sum\limits_{n\in J} \delta_{mn}\mathit{\Phi}'_n = \mathit{\Phi}'_m$. □

**Věta 6.62.** *Nechť $\Phi = \{\mathit{\Phi}_n\}_{n\in J}$ je frame v $H$ a $\Phi' = \{\mathit{\Phi}'_n\}_{n\in J}$ jeho duální frame. Pak platí*
*(1) $\Phi$ je RB $\Leftrightarrow$ $\Phi$ a $\Phi'$ jsou biortogonální.*
*(2) $\Phi$ je ONB $\Leftrightarrow$ $\Phi = \Phi'$ a $\|\mathit{\Phi}_n\| = 1$ pro každé $n \in J$.*

*Důkaz.* $\Phi$ frame v $H \overset{6.39(4)}{\Rightarrow} S : H \to H$ je TLI $\overset{4.11}{\Rightarrow} \sqrt{S} : H \to H$ je TLI a $(\sqrt{S})^* = \sqrt{S}$ dle 3.52.
Dále $\mathit{\Phi}'_n = S^{-1}\mathit{\Phi}_n$ a $\mathit{\Phi}_n = S\mathit{\Phi}'_n$ dle 6.51. Pak
(1)
$\Rightarrow$: plyne z 6.61.
$\Leftarrow$: $\Phi$ a $\Phi'$ biortogonální $\Rightarrow \forall\, n, m \in J$: $\delta_{nm} = \langle \mathit{\Phi}_n, \mathit{\Phi}'_m\rangle = \langle S\mathit{\Phi}'_n, \mathit{\Phi}'_m\rangle = \langle \sqrt{S}\sqrt{S}\mathit{\Phi}'_n, \mathit{\Phi}'_m\rangle = \langle \sqrt{S}\mathit{\Phi}'_n, (\sqrt{S})^*\mathit{\Phi}'_m\rangle = \langle \sqrt{S}\mathit{\Phi}'_n, \sqrt{S}\mathit{\Phi}'_m\rangle \Rightarrow E := \{e_n\}_{n\in J}$, kde $e_n := \sqrt{S}\mathit{\Phi}'_n = \sqrt{S}(\sqrt{S}\sqrt{S})^{-1}\mathit{\Phi}_n = (\sqrt{S})^{-1}\mathit{\Phi}_n$, je ONS v $H$. Odtud $\mathit{\Phi}_n = \sqrt{S}e_n$, kde $\sqrt{S}$ je TLI, takže $\Phi$ bude RB, jestliže ukážeme, že $E$ je ONB. K tomu stačí dle 6.23(1a) ověřit úplnost $E$ v $H$: $x \in H$ libovolný $\Rightarrow \sqrt{S}x \in H$ a $\sqrt{S}x \overset{(6.3a)}{=} \sum\limits_{n\in J} \langle \sqrt{S}x, \mathit{\Phi}'_n\rangle \mathit{\Phi}_n \Rightarrow x = \sum\limits_{n\in J} \langle \sqrt{S}x, \mathit{\Phi}'_n\rangle (\sqrt{S})^{-1}\mathit{\Phi}_n = \sum\limits_{n\in J} \langle \sqrt{S}x, \mathit{\Phi}'_n\rangle e_n = \sum\limits_{n\in J} \langle x, \sqrt{S}\mathit{\Phi}'_n\rangle e_n = \sum\limits_{n\in J} \langle x, e_n\rangle e_n \Rightarrow x \in \overline{\mathcal{L}(E)}$.
(2)
$\Rightarrow$: $\Phi$ ONB $\Rightarrow \|\mathit{\Phi}_n\| = 1\ \forall\, n \in J$ a současně $\Phi$ je RB dle 6.33, přičemž $\mathit{\Phi}'_n = \mathit{\Phi}_n$ dle 6.59.
$\Leftarrow$: $\Phi = \Phi' \overset{(6.3a)}{\Rightarrow} \forall\, x \in H$: $x = \sum\limits_{n\in J} \langle x, \mathit{\Phi}_n\rangle \mathit{\Phi}_n \overset{6.18(4)}{\Rightarrow} x = Sx\ \forall\, x \in H \Rightarrow S = I_H \Rightarrow \|Lx\|^2 = \langle Lx, Lx\rangle = \langle L^*Lx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2\ \forall\, x \in H \overset{6.41}{\Rightarrow} \Phi$ je 1-těsný (Parsevalův) frame.
Současně je $\|\mathit{\Phi}_n\| = 1\ \forall\, n \in J$, takže $\Phi$ je ONB dle 6.48. □

*Poznámka* 6.63 (Konstrukce duálního framu pomocí $R^+$).
Konstrukce duálního framu $\Phi'$ k $\Phi$ z jeho definice 6.51, tj. pomocí $S^+$, není z výpočetního hlediska praktická, protože $S$ i $S^+$ operují na abstraktním prostoru $H$. Uvedeme jiný přístup založený na korelačním operátoru $R$ a jeho pseudoinverzi $R^+$, které operují na diskrétním prostoru $\ell^2(J)$. Operátor $R$ je popsán Gramovou maticí $\boldsymbol{R} = [r_{kn}]_{k,n\in J}$, kde $r_{kn} = \overline{\langle \mathit{\Phi}_k, \mathit{\Phi}_n\rangle}$ (viz 6.18(3)). Ta má obecně spočetný rozměr — konečný jen v případě $|J| < \infty$:

$$\mathit{\Phi}'_n = T'\varepsilon_n \overset{6.55(1)}{=} TR^+\varepsilon_n \overset{6.18(3)}{=} T\{r^+_{mn}\}_{m\in J} = \sum_{m\in J} r^+_{mn}\mathit{\Phi}_m, \text{ kde } R^+ = \boldsymbol{R} = [r^+_{mn}]_{m,n\in J}.$$

Tedy $n$-tý sloupec matice $\boldsymbol{R}^+$ udává posloupnost souřadnic pro $\mathit{\Phi}'_n$ ve framu $\Phi$, neboli $\{\mathit{\Phi}'_n\}_\Phi = \{r^+_{mn}\}_{m\in J}$. Nalezení $\boldsymbol{R}^+$ je pro menší rozměry snadné (např. v MATLABu pomocí procedury `pinv`). Jelikož $\boldsymbol{R}$ je (hermitovsky) symetrická, využívají algoritmy obvykle rozkladu $\boldsymbol{R}$ na vlastní vektory a vlastní čísla nebo skeletního rozkladu (viz `[ZM1:Věta4.22]`), který lze nalézt pomocí Gaussovy eliminace. Při vyšších rozměrech vzniká riziko numerické nestability a je vhodnější použít iterační techniky, které jsou obvykle vůči šíření zaokrouhlovacích chyb robustnější (viz např. v příloze E větu E.3 a její důsledek E.5). Jako cvičení spočtěte výše uvedenou metodou duální frame z Příkladu 6.53, neboli ukažte, že je tvořen právě sloupci matice $\boldsymbol{T}\boldsymbol{R}^{+}$.

Další příklady framů lze nalézt v Příloze F.

# 7 SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA OPERÁTORŮ

*Teorie*: `[Tay:kap.5-6 s.241-271,311-344]`, `[DeMi:odst.4.9-10 s.172-192]`

*Označení.*
$\{0\} \neq X =$ NL-prostor nad $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ (případně $\mathbb{F} = \mathbb{R}$).
$T : X \to X$ lineární operátor (většinou spojitý, tj. $T \in \mathcal{B}(X, X)$)
$T_\lambda := T - \lambda I$ pro každé $\lambda \in \mathbb{F}$
$\mathcal{R}_\lambda := \mathcal{R}(T_\lambda) \ldots$ obor hodnot operátoru $T_\lambda$
$\mathcal{N}_\lambda := \mathcal{N}(T_\lambda) \ldots$ jádro operátoru $T_\lambda$

**Definice 7.1.** Jestliže $X = \overline{\mathcal{R}}_\lambda$ a existuje $T_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}_\lambda, X)$, pak $R_\lambda := T_\lambda^{-1}$ nazýváme **rezolventou operátoru** $T$ a číslo $\lambda$ nazýváme **regulárním prvkem operátoru** $T$ (píšeme $\lambda \in \rho(T)$), v opačném případě se $\lambda$ nazývá **prvkem spektra operátoru** $T$ (píšeme $\lambda \in \sigma(T)$). Zřejmě $\sigma(T) = \mathbb{F} - \rho(T)$. Spektrum $\sigma(T)$ se rozpadá na 3 části: $\sigma(T) = C\sigma(T) \dot\cup P\sigma(T) \dot\cup R\sigma(T)$, kde

$C\sigma(T)$ = **spojité spektrum**: $\lambda \in C\sigma(T) \ \Leftrightarrow\ X = \overline{\mathcal{R}}_\lambda$, $T_\lambda^{-1}$ existuje a není spojitý;
$P\sigma(T)$ = **bodové spektrum:** $\lambda \in P\sigma(T) \ \Leftrightarrow\ T_\lambda^{-1}$ **neexistuje** $\Leftrightarrow\ \mathcal{N}_\lambda \supsetneqq \{0\}$,
$\lambda$ je tzv. **vlastní číslo operátoru** $T$,
$0 \neq x \in \mathcal{N}_\lambda$ je tzv. **vlastní prvek** (vektor, funkce) operátoru $T$ příslušný k $\lambda$, tj. $0 = T_\lambda x = (Tx - \lambda x) \ \Leftrightarrow\ Tx = \lambda x$;
$R\sigma(T)$ = $\sigma(T) - C\sigma(T) - P\sigma(T)$ je tzv. **reziduální spektrum** operátoru $T$, zřejmě $\lambda \in R\sigma(T) \ \Leftrightarrow\ \overline{\mathcal{R}}_\lambda \subsetneqq X$ a $T_\lambda^{-1}$ existuje (spojitý nebo nespojitý).

Jestliže $\sigma(T) = P\sigma(T)$, tak říkáme, že $T$ je operátor s **čistě bodovým spektrem.**

*Poznámka* 7.2.
(1) $\underline{\dim \mathcal{R}_\lambda < \infty} \Rightarrow C\sigma(T) = \emptyset$, neboť každý lineární operátor na $\mathcal{R}_\lambda$ ($\overset{2.55}{=} \overline{\mathcal{R}_\lambda}$) je spojitý.
(2) $\underline{\dim X < \infty} \Rightarrow \dim \mathcal{R}_\lambda < \infty \overset{(1)}{\Rightarrow} C\sigma(T) = \emptyset$ a $\overline{\mathcal{R}_\lambda} = \mathcal{R}_\lambda \Rightarrow R\sigma(T) = \emptyset$, neboť $\dim \mathcal{R}_\lambda = \dim X$ ($T_\lambda$ je lineární izomorfismus $X$ na $\mathcal{R}_\lambda$).
Tedy celkem $\sigma(T) = P\sigma(T)$, tj. každý lineární operátor $T : X \to X$ má **čistě bodové spektrum**. Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, může nabývat $\sigma(T) = P\sigma(T) = \emptyset$ v případě, že matice $[T]$ nemá reálná vlastní čísla.
(3) $\underline{X = B \text{ úplný}, \lambda \in \rho(T)} \Rightarrow X \overset{7.1}{=} \overline{\mathcal{R}_\lambda}$ a $T_\lambda$, $R_\lambda$ jsou vzájemně inverzní lineární izomorfismy mezi $B$ a $\mathcal{R}_\lambda$, kde $R_\lambda$ je spojitý. Pokud je navíc i $T$ spojitý, pak $T_\lambda$ je rovněž spojitý, takže celkem $T_\lambda$ a $\mathcal{R}_\lambda$ jsou vzájemně inverzní TLI $X$ na $X$, neboť $\mathcal{R}_\lambda$ je uzavřený dle 4.5.

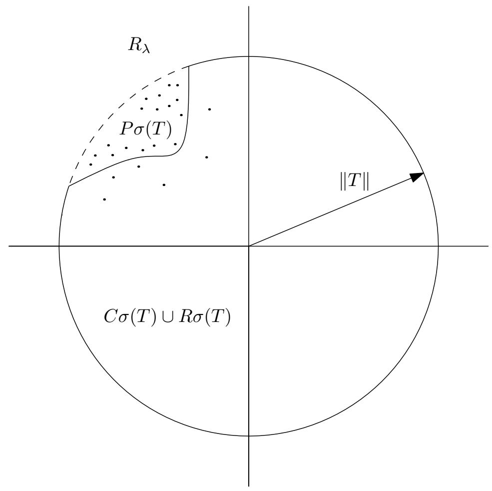
**Věta 7.3** (viz obr. 7.1)**.**
$T \in \mathcal{B}(B, B)$, $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$ *a* $R_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{1}{\lambda}T + \frac{1}{\lambda^2}T^2 + \ldots\right)$.

*Důkaz.* $|\lambda| > \|T\| \geq 0 \Rightarrow \|\frac{1}{\lambda}T\| < 1 \overset{4.14}{\Rightarrow} \left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)$ je TLI $\Rightarrow -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right) = (T - \lambda I) = T_\lambda$ je TLI $\Rightarrow R_\lambda = T_\lambda^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}T\right)^{-1} \overset{4.14(2)}{=} -\frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{1}{\lambda}T + \frac{1}{\lambda^2}T^2 + \ldots\right)$. □

**Důsledek 7.4** (viz obr. 7.1)**.**
$\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|$.

**Věta 7.5.** $T \in \mathcal{B}(B, B), \lambda \in \rho(T), |\Delta\lambda| < \frac{1}{\|R_\lambda\|} \Rightarrow \lambda + \Delta\lambda \in \rho(T)$.

*Důkaz.* $T_{\lambda+\Delta\lambda} = T_\lambda - (T_\lambda - T_{\lambda+\Delta\lambda}) = T_\lambda - (T - \lambda I - (T - (\lambda + \Delta\lambda)I)) = T_\lambda - \Delta\lambda I = T_\lambda(I - \Delta\lambda T_\lambda^{-1}) = T_\lambda(I - \Delta\lambda\mathcal{R}_\lambda)$, kde $|\Delta\lambda\mathcal{R}_\lambda| = |\Delta\lambda|\|\mathcal{R}_\lambda\| < 1 \overset{4.14}{\Longrightarrow} I - \Delta\lambda\mathcal{R}_\lambda$ je TLI $B$ na $B$. Pak $T_\lambda$ je s uvážením poznámky 7.2(3) rovněž TLI $B$ na $B$. Celkem $T_{\lambda+\Delta\lambda}$ je tak složením dvou TLI a tedy rovněž TLI $B$ na $B$, takže $\lambda + \Delta\lambda \in \rho(T)$. □




**Obrázek 7.1**: Ilustrace rozložení hodnot spektra operátoru $T$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

**Důsledek 7.6.** *$T \in \mathcal{B}(B, B) \Rightarrow \rho(T)$ je otevřená a $\sigma(T)$ uzavřená podmnožina v $\mathbb{F}$.*

**Věta 7.7.**
*Jestliže $T, U \in \mathcal{L}(X, X)$ a $U$ je L-izomorfismus $X$ na $X$, pak $P\sigma(T) = P\sigma(UTU^{-1})$.*

*Důkaz.* $\lambda \in P\sigma(T) \Rightarrow \exists\, 0 \neq x \in \mathcal{N}_\lambda : Tx = \lambda x \Rightarrow UTU^{-1}(Ux) = UTx = U\lambda x = \lambda Ux \Rightarrow \lambda \in P\sigma(UTU^{-1})$, neboť $Ux \neq 0$. Protože $T = U^{-1}(UTU^{-1})U$, platí i opačná inkluze zaměníme-li roli $U$ a $U^{-1}$. $\square$

**Příklad 7.8** (viz `[DeMi:Example 4.9.3 s.180-181]`).
Uvažujme $B = C[a, b]$ s normou $\|\cdot\|_\infty$, tj. $\|x(t)\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Při pevném $u \in B$ definujeme $(Tx)(t) = u(t) \cdot x(t)$, zřejmě $T \in \mathcal{B}(B, B)$, neboť $\|Tx\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |u(t)x(t)| \leq \max_{t\in[a,b]} |u(t)| \max_{t\in[a,b]} |x(t)| = \|u\|_\infty \|x\|_\infty$, kde $\|u\|_\infty = \|T\|$ při volbě $x \equiv 1$.
Pak $T_\lambda x = Tx - \lambda x = u(t) \cdot x(t) - \lambda x(t) = (u(t) - \lambda)x(t)$.
Přitom $T_\lambda^{-1}$ existuje $\Leftrightarrow$ $u(t) - \lambda \neq 0 \,\forall\, t \in [a, b]$ $\Leftrightarrow$ $\lambda \in \mathbb{R} - [\min_{t\in[a,b]}(u(t)), \max_{t\in[a,b]}(u(t))]$.
V takovém případě $T_\lambda$ i $T_\lambda^{-1} : T_\lambda^{-1} x = \frac{1}{u(t)-\lambda} x(t)$ jsou spojité z týchž důvodů jako $T$ a dokonce TLI na $B$ vzhledem k $u(t) - \lambda \neq 0$ na $[a, b]$.
Tedy $\sigma(T) = [\min_{t\in[a,b]}(u(t)), \max_{t\in[a,b]}(u(t))]$ a $\rho(T) = \mathbb{R} - \sigma(T)$, přičemž platí:
$u^{-1}\{c\} = [\alpha, \beta] \subseteq [a, b], \alpha < \beta \Rightarrow \lambda = c \in P\sigma(T)$ je vlastní hodnota,
$u^{-1}\{c\} = \{\alpha\}, \alpha \in [a, b] \Rightarrow \lambda = c \in R\sigma(T)$, neboť $(T_c x)(\alpha) = 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{R}_c} \subsetneq C[a, b]$,
$C\sigma(T) = \emptyset$, neboť pokud $T_\lambda^{-1}$ existuje, tak je spojitý.

**Příklad 7.9** (viz `[DeMi:Example 4.9.4 s.185-186]`).

Vlastní čísla diskrétních konvolučních operátorů DCK $\widetilde{T}_h$ a DLK $T_h$ z odst. C.2.2 s impulzní odezvou $h$ jsou dle C.34 a C.36 dány hodnotami jejich diskrétní Fourierovy transformace $\widehat{h}(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ a příslušné prvky $e^{i2\pi\gamma k}$ fourierovské báze odpovídajícími vlastními prvky (v případě DCK vlastními vektory získanými jejich diskretizací $\gamma = \frac{n}{N}$, $n = 0, \ldots, N - 1$).

Analogická tvrzení lze vyslovit pro periodické a neperiodické integrální konvoluční operátory z odst. C.2.1 (cvičení).

## 7.1 Spektrální teorie samoadjungovaných operátorů v H-prostorech

Jedná se o zobecnění klasické spektrální teorie symetrických ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$), resp. hermitovsky symetrických ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) matic z H-prostoru $\mathbb{R}^n$, resp. $\mathbb{C}^n$ konečné dimenze na samoadjungované operátory definované na H-prostorech obecně nekonečné dimenze. Matice vždy určují kompaktní operátor dle 3.68, takže právě kompaktní samoadjungované operátory se ukážou mít čistě bodové (nejvýše spočetné) spektrum v souladu s analogií v poznámce 7.2(2).

**Věta 7.10.** *$T \in \mathcal{B}(H,H), T = T^* \Rightarrow P\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.*

*Důkaz.* $\lambda \in P\sigma(T)$; $Tu = \lambda u,\ u \neq 0 \Rightarrow \lambda \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\neq 0} = \langle \lambda u, u\rangle = \langle Tu,u\rangle = \langle u,Tu\rangle = \langle u,\lambda u\rangle = \overline{\lambda}$
$\langle u,u\rangle \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. □

**Věta 7.11.** *$T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T$ je unitární, $\lambda \in P\sigma(T) \Rightarrow |\lambda| = 1$.*

*Důkaz.* $\lambda \in P\sigma(T)$, $Tu = \lambda u$, $u \neq 0 \overset{3.78(3^\circ)}{\Rightarrow} |\lambda|^2\|u\|^2 = \lambda\overline{\lambda}\langle u,u\rangle = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \langle Tu,Tu\rangle = \langle u,u\rangle = \|u\|^2$, kde $\|u\|^2 \neq 0 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$. □

**Věta 7.12.**
*$T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$ nebo $T$ unitární $\Rightarrow \mathcal{N}_{\lambda_1} \perp \mathcal{N}_{\lambda_2}$ pro libovolné $\lambda_1, \lambda_2 \in P\sigma(T)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou ortogonální).*

*Důkaz.* Nechť $Tu_1 = \lambda_1 u_1$, $Tu_2 = \lambda_2 u_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Pak
I. $\underline{T = T^*} \overset{7.10}{\Rightarrow} \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1\langle u_1,u_2\rangle = \langle \lambda_1 u_1, u_2\rangle = \langle Tu_1,u_2\rangle = \langle u_1,Tu_2\rangle = \langle u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \lambda_2\langle u_1,u_2\rangle \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}\langle u_1,u_2\rangle = 0 \Rightarrow \langle u_1,u_2\rangle = 0 \Rightarrow u_1 \perp u_2$.
II. $\underline{T \text{ je unitární}} \overset{7.11}{\Rightarrow} |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \Rightarrow \lambda_1\overline{\lambda}_2 \neq 1$, neboť jinak $\lambda_2 = \underbrace{\lambda_1\overline{\lambda}_2}_{1}\lambda_2 = \lambda_1|\lambda_2|^2 = \lambda_1$, spor s předpokladem $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Pak $\underline{\lambda_1\overline{\lambda}_2\langle u_1,u_2\rangle} = \langle \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \langle Tu_1, Tu_2\rangle \overset{3.78(3^\circ)}{=} \langle u_1,u_2\rangle \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1\overline{\lambda}_2 - 1)}_{\neq 0}\langle u_1,u_2\rangle = 0 \Rightarrow \langle u_1,u_2\rangle = 0 \Rightarrow u_1 \perp u_2$. □

**Věta 7.13.** *$T \in \mathcal{B}(H,H) \Rightarrow T_\lambda \in \mathcal{B}(H,H)$ a $(T_\lambda)^* = T^*_{\overline{\lambda}}$ pro každé $\lambda \in \mathbb{F}$.*

*Důkaz.* $T_\lambda = T - \lambda I \in \mathcal{B}(H,H)$, neboť $T, I \in \mathcal{B}(H,H)$ a $\mathcal{B}(H,H)$ je dle 3.2 lineární podprostor. Pak pro každé $x, y \in H$ platí: $\langle T_\lambda x, y\rangle = \langle Tx - \lambda x, y\rangle = \langle Tx,y\rangle - \lambda\langle x,y\rangle = \langle x, T^*y\rangle - \overline{\overline{\lambda}}\langle x,y\rangle = \langle x, T^*y - \overline{\lambda}y\rangle = \langle x, (T^* - \overline{\lambda}I)y\rangle = \langle x, T^*_{\overline{\lambda}}y\rangle \overset{3.26}{\Rightarrow} (T_\lambda)^* = T^*_{\overline{\lambda}}$. □

**Důsledek 7.14.**
*(1) $T \in \mathcal{B}(H,H) \Rightarrow H = \overline{\mathcal{R}}_\lambda \oplus \mathcal{N}(T^*_{\overline{\lambda}})$ pro každé $\lambda \in \mathbb{F}$.*
*(2) $T \in \mathcal{B}(H,H), T = T^* \Rightarrow H = \overline{\mathcal{R}}_\lambda \oplus \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ pro každé $\lambda \in \mathbb{F}$.*
*(3) $T \in \mathcal{B}(H,H), T = T^* \Rightarrow H = \overline{\mathcal{R}}_\lambda \oplus \mathcal{N}_\lambda$ pro každé $\lambda \in P\sigma(T)$.*

*Důkaz.*
(1) $H \overset{4.1(3)}{=} \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} \oplus \mathcal{N}((T_\lambda)^*) \overset{7.13}{=} \overline{\mathcal{R}}_\lambda \oplus \mathcal{N}(T^*_{\overline{\lambda}})\ \forall\, \lambda \in \mathbb{F}$.
(2) $T = T^* \Rightarrow T^*_{\overline{\lambda}} = T_{\overline{\lambda}} \Rightarrow \mathcal{N}(T^*_{\overline{\lambda}}) = \mathcal{N}(T_{\overline{\lambda}}) = \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \overset{(1)}{\Rightarrow} H = \overline{\mathcal{R}_\lambda} \oplus \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}\ \forall\, \lambda \in \mathbb{F}$.
(3) $T = T^*, \lambda \in P\sigma(T) \overset{7.10}{\Rightarrow} \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda \Rightarrow \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} = \mathcal{N}_\lambda \overset{(2)}{\Rightarrow} H = \overline{\mathcal{R}}_\lambda \oplus \mathcal{N}_\lambda$.

$\square$

**Věta 7.15.**
*Pro $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$, je $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \exists m > 0 : \|T_\lambda x\| \geq m\|x\|$ pro každé $x \in H$.*

*Důkaz.*
$\Rightarrow$: $\lambda \in \rho(T) \overset{7.1}{\Rightarrow}$ existuje $T_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}_\lambda, H) \overset{4.4}{\Rightarrow} \exists\, m > 0 : \|T_\lambda x\| \geq m\|x\| \,\forall\, x \in H$.
$\Leftarrow$: $\exists\, m > 0 : \|T_\lambda x\| \geq m\|x\| \,\forall\, x \in H \overset{4.5}{\Rightarrow} T_\lambda$ je TLI z $H$ na $\mathcal{R}_\lambda = \overline{\mathcal{R}_\lambda}$, protože $T_\lambda \in \mathcal{B}(H,H)$ podle 7.13. Dále je $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}} = \{0\}$, neboť v opačném případě $\exists\, x \neq 0$: $0 = T_{\overline{\lambda}} x = (T - \overline{\lambda} I)x \Rightarrow Tx = \overline{\lambda} x \Rightarrow \overline{\lambda} \in P\sigma(T) \overset{7.10}{\Rightarrow} \lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 = T_\lambda x \Rightarrow x \in \mathcal{N}_\lambda = \{0\}$, spor.
Tedy $\mathcal{N}_{\overline{\lambda}} = \{0\}$ a $H = \overline{\mathcal{R}}_\lambda$ dle 7.14(2) $\overset{7.1}{\Rightarrow} \lambda \in \rho(T)$. $\square$

**Důsledek 7.16.** *Pro $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$, platí:*
*(1) $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \exists\, 0 \neq x_n \in H$ a $m_n > 0, m_n \to 0 : \|T_\lambda x_n\| \leq m_n \|x_n\|$ $(n \to \infty)$.*
*(2) $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \exists\, x_n \in H$ a $\|x_n\| = 1 : \|T_\lambda x_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$.*

*Důkaz.* Pro $n \to \infty$ dostáváme:
(1) $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \lambda \notin \rho(T) \overset{7.15}{\Leftrightarrow} \forall\, m_n > 0, m_n \to 0\ \exists\, 0 \neq x_n \in H$: $\|T_\lambda x_n\| < m_n \|x_n\|$.
(2) $\Rightarrow$: $\lambda \in \sigma(T) \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 \leq \left\|T_\lambda(\frac{x_n}{\|x_n\|})\right\| = \frac{1}{\|x_n\|}\|T_\lambda x_n\| \overset{(1)}{\leq} m_n \to 0 \Rightarrow \left\|T_\lambda(\frac{x_n}{\|x_n\|})\right\| \to 0$.

$\Leftarrow$: $\exists x_n \in H$, $\|x_n\| = 1$: $m_n := \|T_\lambda x_n\| \to 0 \Rightarrow \|T_\lambda x_n\| = m_n \|x_n\| \overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda \in \sigma(T)$. $\square$

**Věta 7.17.** *$T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^* \Rightarrow \lambda = \alpha + i\beta \in \rho(T)$ pro $\beta \neq 0$.*

*Důkaz.* Pro libovolné $x \in H$ platí:

$$\langle T_\lambda x, x\rangle = \langle (T - \lambda I)x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\|x\|^2.$$
$$\langle x, T_\lambda x\rangle = \overline{\langle T_\lambda x, x\rangle} = \underbrace{\overline{\langle Tx, x\rangle}}_{\in \mathbb{R} \text{ dle } 3.36} - \overline{\lambda}\|x\|^2 = \langle Tx, x\rangle - \overline{\lambda}\|x\|^2.$$

Odtud: $\langle x, T_\lambda x\rangle - \langle T_\lambda x, x\rangle = (\lambda - \overline{\lambda})\|x\|^2 = 2i\beta\|x\|^2 \Rightarrow 2|\beta|\|x\|^2 = |\langle x, T_\lambda x\rangle - \langle T_\lambda x, x\rangle| \leq |\langle x, T_\lambda x\rangle| + |\langle T_\lambda x, x\rangle| \overset{2.60(5^\circ)}{\leq} 2\|x\| \cdot \|T_\lambda x\| \Rightarrow \|T_\lambda x\| \geq |\beta|\|x\| \overset{7.15}{\Rightarrow} \lambda \in \rho(T)$. $\square$

**Věta 7.18** (Důkaz D.7)**.**
*Pro $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$ platí $\sigma(T) \subseteq [m, M]$, kde $m = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$, $M = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$ a $m, M \in \sigma(T)$.*

**Definice 7.19.** Nechť $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$. H-podprostor $L \subseteq H$ se nazývá **invariantní vzhledem k** $T$, jestliže $T(L) \subseteq L$ (tj. $Tx \in L$ pro každé $x \in L$).
Označíme $T^L : L \to L$ restrikci $T$ na $L$, neboli $T^L x = Tx$ pro každé $x \in L$.

**Příklad 7.20.**
Nechť $\lambda \in P\sigma(T)$. Pak $\mathcal{N}_\lambda$ je uzavřený dle 3.1 $\overset{2.38}{\Rightarrow} \mathcal{N}_\lambda$ je H-podprostor. $\mathcal{N}_\lambda$ je invariantní vzhledem k $T$, neboť pro $x \in \mathcal{N}_\lambda$ je $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0$, neboli $Tx = \lambda x \in \mathcal{N}_\lambda$.

**Věta 7.21.** *$T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$ a $L \subseteq H$ invariantní vzhledem k $T \Rightarrow L^\perp$ je invariantní vzhledem k $T$.*

*Důkaz.* $x \in L^\perp \Leftrightarrow \forall\, y \in L$ je $\langle x, y\rangle = 0$; současně $L$ invariantní $\Rightarrow Ty \in L$, $\forall\, y \in L$. Pak $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0$, kde $Ty \in L$ a tedy $Tx \in L^\perp$. $\square$

**Důsledek 7.22.** *$T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$, $\lambda \in P\sigma(T) \Rightarrow \mathcal{N}_\lambda$, $\overline{\mathcal{R}}_\lambda$ jsou vzájemně ortogonální komplementy v $H$ invariantní k $T$.*

*Důkaz.* Dle 7.14(3) jsou $\mathcal{N}_\lambda \perp \overline{\mathcal{R}}_\lambda$ navzájem ortogonální komplementy v $H$. Invariantnost je pak přímým důsledkem 7.20 a 7.21. □

**Věta 7.23.** *Nechť $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$ a $L, M \subseteq H$ jsou nějaké vzájemně ortogonální komplementy v $H$ invariantní k $T$. Pak $\sigma(T) = \sigma(T^L) \cup \sigma(T^M)$.*

*Důkaz.*
$\supseteq$: $\lambda \in \sigma(T^L) \cup \sigma(T^M) \Rightarrow \lambda \in \sigma(T^L)$ nebo $\lambda \in \sigma(T^M)$. Nechť například $\lambda \in \sigma(T^L)$, pak dle 7.16(2) existuje $\{x_n\} \subseteq L$, $\|x_n\| = 1$: $\|T^L_\lambda x_n\| \to 0$. Protože $T^L_\lambda x_n = T_\lambda x_n$ je také $\lambda \in \sigma(T)$ opět užitím 7.16(2).
$\subseteq$: $\lambda \notin \sigma(T^L) \cup \sigma(T^M) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(T^L)$ & $\lambda \notin \sigma(T^M) \overset{7.15}{\Rightarrow} \exists\, m_1, m_2 > 0$ taková, že pro $m = \min(m_1, m_2)$ platí $\|T_\lambda y\| = \|T^L_\lambda y\| \geq m_1\|y\| \geq m\|y\|$ $\forall\, y \in L$ a $\|T_\lambda z\| = \|T^M_\lambda z\| \geq m_2\|z\| \geq m\|z\|$ $\forall\, z \in M$. Pro $\forall\, x \in H$ je $x = y + z$, kde $y \in L$, $z \in M$ (tj. $y \perp z$). Pak $\|x\| \overset{2.60(6^\circ)}{=} (\|y\|^2 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \|T_\lambda x\| = \|\underbrace{T_\lambda y}_{\in L} + \underbrace{T_\lambda z}_{\in M}\| \overset{2.60(6^\circ)}{=} (\|T_\lambda y\|^2 + \|T_\lambda z\|^2)^{\frac{1}{2}} \geq (m^2\|y\|^2 + m^2\|z\|^2)^{\frac{1}{2}} = m(\|y\|^2 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}} = m\|x\|$ a tedy $\lambda \notin \sigma(T)$ opět dle 7.15. Proto $\sigma(T) \subseteq \sigma(T^L) \cup \sigma(T^M)$. □

**Věta 7.24.**
*Nechť $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$. Položme $\mathcal{N} := \overline{\mathcal{L}(\bigcup_{\lambda \in P\sigma(T)} \mathcal{N}_\lambda)}$ rovno uzávěru lineárního obalu všech podprostorů $\mathcal{N}_\lambda$, $\lambda \in P\sigma(T)$ a $G := \mathcal{N}^\perp$. Pak $\mathcal{N} = \bigoplus_{\lambda \in P\sigma(T)} \mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}$ a $G$ jsou invariantní, $H = \mathcal{N} \oplus G$ a $\sigma(T) = \sigma(T^\mathcal{N}) \cup \sigma(T^G)$.*
*Jestliže $H = \mathcal{N}$, tak říkáme, že $T$* **je diagonalizovatelný***.*

*Důkaz.* $\mathcal{N}$ je ortogonálním součtem podprostorů $\mathcal{N}_\lambda$ dle 7.12 s uvážením 2.64. $H = \mathcal{N} \oplus G$ dle věty o ortogonální projekci 3.54 a $\sigma(T^\mathcal{N}) \cup \sigma(T^G)$ dle 7.21 a 7.23, neboť $\mathcal{N}$ je invariantní s uvážením 7.20. □

**Věta 7.25.** *Nechť $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $H$ separabilní a $T = T^*$ digonalizovatelný ($H = \mathcal{N}$). Pak v $H$ existuje úplný nejvýše spočetný ortonormální systém vlastních prvků $e_n$ příslušný vlastním číslům $\lambda_n$ ($Te_n = \lambda_n e_n$) a pro každé $x \in H$ platí:*
*(1) $x = \sum_n c_n e_n$, kde $c_n = \langle x, e_n \rangle$, neboli $I = \sum_n P_n$ (bodově), kde $P_n$ je operátor ortogonální projekce $H$ na $\mathcal{L}(\{e_n\})$.*
*(2) $Tx = \sum_n \lambda_n c_n e_n$, neboli $T = \sum_n \lambda_n P_n$ (bodově)*
*(3) $\langle Tx, x \rangle = \sum_n \lambda_n |c_n|^2$ (absolutní konvergence).*

*Důkaz.*
$H$ separabilní $\overset{2.34}{\Rightarrow} \mathcal{N}_\lambda \subseteq H$ separabilní $\forall\, \lambda \in P\sigma(T) \overset{2.69}{\Rightarrow}$ v $\mathcal{N}_\lambda$ existuje ONB $E_\lambda$, $|E_\lambda| \leq \aleph_0$. Pak $\underline{E = \bigcup_\lambda E_\lambda \text{ je nejvýše spočetná ONB v } H}$:
• $\underline{\text{ortogonalita}}$ je zřejmá, neboť dle $\underline{7.12}$ je $\mathcal{N}_{\lambda_1} \perp \mathcal{N}_{\lambda_2}$ pro $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$ pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
• $\underline{E \text{ je úplný v } H}$: $\mathcal{N}_\lambda = \overline{\mathcal{L}(E_\lambda)} \subseteq \overline{\mathcal{L}(E)}\, \forall\, \lambda \Rightarrow \bigcup_\lambda \mathcal{N}_\lambda \subseteq \overline{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow H = \mathcal{N} = \overline{\mathcal{L}(\bigcup_\lambda \mathcal{N}_\lambda)} \subseteq \overline{\mathcal{L}(E)} \subseteq H \Rightarrow H = \overline{\mathcal{L}(E)}$.
• $\underline{|E| \leq \aleph_0}$, tj. $E =: \{e_n\}_{n=1}^\infty$, neboť $H$ je separabilní (viz. 2.69).
Pak

(1) $x = \sum_n \underbrace{\langle x, e_n\rangle e_n}_{=:P_n x} = \sum_n c_n e_n \Rightarrow I = \sum_n P_n$ (bodově), kde $P_n$ je operátor ortogonální projekce na $\mathcal{L}(\{e_n\})$.

(2) $Tx = T(\sum_n c_n e_n) = \sum_n c_n T e_n = \sum_n c_n \lambda_n e_n = \sum_n \lambda_n P_n(x)$.

Tedy $T = \sum \lambda_n P_n$ (bodově).

(3) $\infty > \|x\|^2 = \langle \sum_n c_n e_n, \sum_m c_m e_m\rangle = \sum_{n,m} c_n \bar{c}_m \underbrace{\langle e_n, e_m\rangle}_{\delta_{n,m}} = \sum_n |c_n|^2$.

Je $|\lambda_n| \le \|T\|$ dle 7.4 $\Rightarrow \sum_n |\lambda_n||c_n|^2 \le \|T\| \sum_n |c_n|^2 < \infty \Rightarrow \sum_n \lambda_n |c_n|^2$ konverguje absolutně a platí: $\langle Tx, x\rangle = \langle \sum_n c_n \lambda_n e_n, x\rangle = \sum_n \lambda_n \langle c_n e_n, \sum_m c_m e_m\rangle = \sum_n \lambda_n \sum_m c_n \bar{c}_m \underbrace{\langle e_n, e_m\rangle}_{\delta_{n,m}} = \sum_n \lambda_n c_n \bar{c}_n = \sum_n \lambda_n |c_n|^2$. □

<u>*Poznámka*</u> 7.26.
Je-li $H$ konečně dimenzionální, pak je separabilní, tj. $H = \mathbb{C}^n$ nebo $H = \mathbb{R}^n$ až na unitární izomorfismus (viz. 6.25), a výsledky věty 7.25 jsou dobře známé (`[ZM1:kap.6]`).

**Věta 7.27.**
*Nechť $\lambda_n$ jsou vlastní hodnoty z předešlé věty. Pokud $\lambda \notin \overline{\{\lambda_n\}}$, pak $\lambda \in \rho(T)$ a rezolventa je určena vztahem $R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} P_n$ (bodová konvergence).*

*Důkaz.*
$\lambda \notin \overline{\{\lambda_n\}} \Rightarrow \exists\, m > 0$: $|\lambda - \lambda_n| > m \,\forall n$.
Pak $T_\lambda x = (T - \lambda I)x = \sum_n (\lambda_n P_n)x - \lambda \sum_n P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda) P_n x$ a odtud vzhledem k $\langle P_n x, P_m x\rangle = \delta_{n,m} \|P_n x\|^2$ dostáváme užitím 7.25(1)(2):

$$\|T_\lambda x\| = \langle \sum_n (\lambda_n - \lambda) P_n x, \sum_m (\lambda_m - \lambda) P_m x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{n,m} (\lambda_n - \lambda)\overline{(\lambda_m - \lambda)} \langle P_n x, P_m x\rangle\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left[\sum_n |\lambda_n - \lambda|^2 \|P_n x\|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_n \underbrace{|\lambda_n - \lambda|^2}_{>m^2} \|c_n e_n\|^2\right]^{\frac{1}{2}} > m \left[\sum_n |c_n|^2 \underbrace{\|e_n\|^2}_{1}\right]^{\frac{1}{2}} = m\|x\|.$$

Tedy $\lambda \in \rho(T)$ dle 7.15.
$R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} P_n$ je inverzní k $T_\lambda$, neboť platí:

$$R_\lambda T_\lambda x = \left(\sum_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda} P_n \Big(\sum_m (\lambda_m - \lambda) P_m x\Big)\right) = \sum_{n,m} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} (\lambda_m - \lambda) P_n P_m x \overset{3.60(2)}{=}$$

$$= \sum_{n,m} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} (\lambda_m - \lambda) \delta_{n,m} P_n P_m x = \sum_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda} (\lambda_n - \lambda) P_n^2 x \overset{3.56(3^\circ)}{=} \sum_n P_n x \overset{7.25(1)}{=} Ix = x.$$

□

**Věta 7.28.** *$T \in \mathcal{B}(H, H)$, $T = T^*$ kompaktní, $0 \ne \lambda \in \sigma(T) \Rightarrow \lambda \in P\sigma(T)$.*

*Důkaz.*
$0 \ne \lambda \in \sigma(T) \overset{7.16(2)}{\Rightarrow} \exists \{x_n\} \subseteq H$, $\|x_n\| = 1$: $\|T_\lambda x_n\| \to 0$, tj. položíme-li $y_n := T_\lambda x_n = (Tx_n - \lambda x_n)$, je $\|y_n\| \to 0$ (neboli $y_n \to 0$) a $x_n = \frac{1}{\lambda}(Tx_n - y_n)$.
Dle 3.64(3°) z $Tx_n$ lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{Tx_{n_k}\}$.
Pak $x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(Tx_{n_k} - y_{n_k})$ konverguje rovněž: nechť $x_{n_k} \to x$, pak $Tx_{n_k} \to Tx$, $y_{n_k} \to 0$ a $x = \frac{1}{\lambda} Tx$, tj. $Tx = \lambda x$, kde $x \ne 0$, neboť $\|x_{n_k}\| = 1$, $x_{n_k} \to x \Rightarrow \|x_{n_k}\| \to \|x\| \Rightarrow \|x\| = 1$. Tedy $x$ je vlastní prvek příslušný k $\lambda$ a tudíž $\lambda \in P\sigma(T)$. □

**Věta 7.29.** *$T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$ kompaktní $\Rightarrow P\sigma(T) \neq \emptyset$.*

*Důkaz.* Dle 7.18 je $m = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle, M = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \in \sigma(T)$.
Pokud $m \neq 0$, resp. $M \neq 0$, tak dle 7.28 $m \in P\sigma(T)$ nebo $M \in P\sigma(T)$.
Pokud $m = M = 0$, tak $\|T\| \overset{3.43}{=} 0 \Rightarrow T = 0$ a $\lambda = 0$ je vlastní hodnota, neboť $H \supsetneqq \{0\}$ (v definici předpokládáme totiž $H$ netriviální), takže $Tx = 0\,x$ pro $\forall x \neq 0$ a tedy $0 \in P\sigma(T)$. ☐

**Lemma 7.30.**
*$T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$ kompaktní a $\{0\} \subsetneqq L$ H-podprostor v $H$ invariantní k $T \Rightarrow$ v $L$ existuje vlastní prvek $T$.*

*Důkaz.* $T$ kompaktní $\Rightarrow T^L$ kompaktní. Dle 7.29 má $T^L$ vlastní hodnotu $\lambda$ a příslušný vlastní prvek $0 \neq x \in L$. Pak $\lambda \in \sigma(T^L) \subseteq \sigma(T)$ dle 7.23 a tedy $\lambda$ je též vlastní hodnotou $T$ užitím 7.28, pokud $\lambda \neq 0$. Pokud $\lambda = 0$, tak $Tx = T^L x = 0\,x = 0$ a tedy $\lambda = 0$ je vlastní hodnota $T$. ☐

**Věta 7.31.** *$T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$ kompaktní $\Rightarrow T$ je diagonalizovatelný ($H = \mathcal{N}$).*

*Důkaz.*
Ortogonální komplement $G$ uzávěru lineárního obalu $\mathcal{N}$ všech vlastních prvků je nulový podprostor, neboť v opačném případě by dle 7.30 musel v $G$ existovat vlastní prvek $x \neq 0$, který ale současně leží v $\mathcal{N}$, tj. $x \in \mathcal{N} \cap G = \{0\}$, spor. Dle 7.24 je $H = \mathcal{N} \oplus G = \mathcal{N}$. ☐

**Věta 7.32.** *$T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$ kompaktní $\Rightarrow P\sigma(T)$ je nejvýše spočetná a pokud není konečná, tak má právě jeden hromadný bod $\lambda = 0$.*

*Důkaz.*
I. $P\sigma(T)$ má nejvýše jeden hromadný bod $\lambda = 0$ (sporem): Kdyby existoval hromadný bod $\lambda \neq 0$, pak by existovala posloupnost $\{\lambda_n\} \subseteq P\sigma(T)$, $\lambda_n \neq \lambda_m$ pro $m \neq n$:
$|\lambda_n| \geq C > 0$ a pro odpovídající vlastní prvky $x_n$, $\|x_n\| = 1$ by bylo

$$\|Tx_n - Tx_m\|^2 = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\|^2 = \langle \lambda_n x_n - \lambda_m x_m, \lambda_n x_n - \lambda_m x_m\rangle =$$
$$|\lambda_n|^2 \underbrace{\|x_n\|^2}_{1} + |\lambda_m|^2 \underbrace{\|x_m\|^2}_{1} - \lambda_m \overline{\lambda_n} \underbrace{\langle x_m, x_n\rangle}_{=0} - \lambda_n \overline{\lambda_m} \underbrace{\langle x_n, x_m\rangle}_{=0} \geq 2C^2 \text{ pro } n \neq m.$$

Pak ovšem z $Tx_n$ nelze vybrat konvergentní posloupnost (nebyla by cauchyovská), což je spor s kompaktností $T$.

II. $P\sigma(T)$ je nejvýše spočetná: pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $P_\sigma^{(n)}(T) := \{\lambda \in P\sigma(T) \,|\, |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}$ je konečná (i prázdná). Kdyby totiž byla nekonečná, tak by obsahovala posloupnost $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\lambda_k \neq \lambda_m$ pro $k \neq m$, z níž lze vybrat konvergentní podposloupnost[1] dle Bolzano-Weirstrasseovy věty, neboť $\{\lambda_k\} \subseteq \sigma(T)$ je dle 7.18 ohraničená. Její limita $L$ by byla nenulovým hromadným bodem $P\sigma(T)$ [totiž $|L| \geq \frac{1}{n}$], což není možné. Pak $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_\sigma^{(n)}(T) = P\sigma(T) - \{0\}$ a tedy i $P\sigma(T)$ je nejvýše spočetná. Pokud $P\sigma(T)$ není konečná, tak 0 musí být jejím hromadným bodem, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ musí existovat $\frac{1}{n} > |\lambda| \in P\sigma(T)$. ☐

**Věta 7.33.** *$T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$ kompaktní, $0 \neq \lambda \in P\sigma(T) \Rightarrow \dim \mathcal{N}_\lambda < \infty$.*

*Důkaz.*
Sporem: $\dim \mathcal{N}_\lambda = \infty \Rightarrow$ v $\mathcal{N}_\lambda$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ lineárně nezávislých prvků, kterou lze (neukončeným) Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem (viz. `[ZM1:věta 3.78]` a důkaz

[1]Také je důsledkem uzavřenosti a ohraničenosti $P\sigma(T)$ — viz. 7.6 a 7.18 a 2.72(2°d),(3°c)

věty 2.69) převést na ortonormální množinu $\{e_n\} \subseteq \mathcal{N}_\lambda$, $\|e_n\| = 1$, $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ pro $n \neq m$. Pak pro $n \neq m$ je $\|Te_n - Te_m\|^2 = \|\lambda e_n - \lambda e_m\|^2 = |\lambda|^2 \|e_n - e_m\|^2 \overset{2.60(6°)}{=} |\lambda|^2(\underbrace{\|e_n\|^2}_{1} + \underbrace{\|-e_m\|^2}_{1}) = 2|\lambda|^2 > 0 \Rightarrow$ z $Te_n$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost (nebyla by cauchyovská), což je spor s kompaktností $T$ (viz. 3.64(3°)). □

**Věta 7.34** (Hilbert-Schmidtova věta).
*Je-li $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$ kompaktní, pak v $H$ existuje nejvýše spočetný ortonormální systém $\{e_n\}$ vlastních prvků příslušný nenulovým (reálným) vlastním číslům $\lambda_n$ takový, že každý prvek $x \in H$ má jediné vyjádření ve tvaru*
*(1) $x = \sum_n c_n e_n + v$, kde $c_n = \langle x, e_n\rangle$ a $Tv = 0$, a dále platí:*
*(2) $Tx = \sum_n \lambda_n c_n e_n$ a*
*(3) $\langle Tx, x\rangle = \sum_n \lambda_n |c_n|^2$.*
*Pokud $\{\lambda_n\}$ je nekonečná a uspořádaná sestupně dle velikosti (tj. $|\lambda_n|$ neklesající), pak $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.*

*Důkaz.* Dle 7.31 je $H = \mathcal{N} \overset{7.24}{=} \bigoplus\limits_{\lambda \in P\sigma} \mathcal{N}_\lambda = \bigoplus\limits_{0\neq\lambda\in P\sigma} \mathcal{N}_\lambda \oplus \mathcal{N}(T)$, kde buď $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ v případě, že $0 \notin P\sigma(T)$ (v takovém případě je $T = T_0$ prosté dle 7.1) nebo $0 \in P\sigma(T)$, což nastane $\Leftrightarrow$ $\exists\, 0 \neq x \in H$: $Tx = 0\,x = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(T) \supsetneqq \{0\}$.
$H' := \bigoplus\limits_{0\neq\lambda\in P\sigma} \mathcal{N}_\lambda$ je separabilní dle 7.32 a 7.33, neboť v $H'$ lze zkonstruovat spočetnou ONB $\{e_n\}$ stejně jako jako v důkazu věty 7.25 jakožto nejvýše spočetné sjednocení konečných ONB $E_\lambda$ prostorů $\mathcal{N}_\lambda$ (viz. též 2.69). Pak $x = x' + v$, kde $Tv = 0$ (neboli $v \in \mathcal{N}(T)$) a $Tx = Tx' + Tv = Tx'$ i $\langle Tx, x\rangle = \langle Tx', x' + v\rangle = \langle Tx', x'\rangle + \langle Tx', v\rangle \overset{(*)}{=} \langle Tx', x'\rangle$ splňuje uvedené vztahy (1)–(3) dle věty 7.25, uvážíme-li, že $c_n = \langle x' + v, e_n\rangle = \langle x', e_n\rangle + \underbrace{\langle v, e_n\rangle}_{0}$. Výše uvedená rovnost (*) je důsledkem $\langle Tx', v\rangle = 0$ dle 4.1(3).
Pokud je $P\sigma(T)$ nekonečná, pak ji lze dle 7.32 uspořádat do posloupnosti, jejímž jediným hromadným bodem je 0, což při sestupném uspořádání dle velikosti je ekvivalentní s $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. □

# A FAKTOR PROSTORY A PŘÍMÝ SOUČET VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

**Věta A.1.**
*Nechť* $(V, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ *je vektorový prostor a* $\sim$ *nějaká relace ekvivalence na* $V$ *a* $\overline{V} := V/\sim$ *příslušný rozklad na* $V$*. Pak relace* $\sim$ *je kongruence na* $(V, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ *ve smyslu definice* `[ZM1:2.42]` *právě když pro* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}'_2 \in V$ *platí implikace:*
*(1)* $\boldsymbol{x}_1 \sim \boldsymbol{x}'_1, \boldsymbol{x}_2 \sim \boldsymbol{x}'_2 \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \sim \boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{x}'_2$,
*(2)* $\alpha \in \mathbb{F}$, $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}' \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x} \sim \alpha\boldsymbol{x}'$.
*V takovém případě třída* $\overline{\mathbf{0}} \in \overline{V}$ *obsahující nulový prvek je vektorovým podprostorem ve* $V$*.*

**Důsledek A.2.**
*Každý vektorový podprostor* $W$ *vektorového prostoru* $(V, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ *určuje kongruenci* $\overset{W}{\sim}$ *na* $V$ *s vlastností* $W = \overline{\mathbf{0}}$ *a naopak dle A.1. Příslušný faktor prostor* $(\overline{V}, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ *tvořený odpovídajícími třídami rozkladu pak značíme jako* $V/W$ *a nazýváme jej* **faktor prostorem** $V$ **modulo (podle)** $W$*. Každá jeho třída obsahující vektor* $\boldsymbol{x}$ *je jednoznačně určena podprostorem* $W$ *ve tvaru* $\overline{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} \,|\, \boldsymbol{w} \in W\}$*. Místo* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *pak píšeme* $\boldsymbol{x} + W$*. Zejména samotný podprostor* $W = \mathbf{0} + W$ *tvoří třídu obsahující nulový vektor* $\mathbf{0}$*.*
*Přitom platí* $\boldsymbol{x} \overset{W}{\sim} \boldsymbol{y} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in W$*. V takovém případě říkáme, že vektory* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{y}$ *jsou* **kongruentní modulo** $W$*.*
*Pro příslušné kanonické lineární zobrazení* $V \to V/W$ *z věty* `[ZM1:2.43]`*,* $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} + W$*, pak tedy platí:*
$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + W = (\boldsymbol{x} + W) + (\boldsymbol{y} + W)$, $(-\boldsymbol{x}) + W = -(\boldsymbol{x} + W)$, $\mathbf{0} \mapsto W$,
$(\alpha\boldsymbol{x}) + W = \alpha(\boldsymbol{x} + W)$ *pro každé* $\alpha \in \mathbb{F}$.

**Důsledek A.3.**
*Je-li* $T : (V_1, \mathcal{L}_{\mathbb{F}}) \to (V_2, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ *lineární zobrazení a* $V_1/\overset{T}{\sim}$ *příslušný kanonický rozklad dle definice* `[ZM1:2.40]`*, pak* $V_1/\overset{T}{\sim} \;=\; V_1/\mathcal{N}(T)$*.*

<u>*Poznámka*</u> A.4.
Podobně každá faktor grupa $V/W$ grupy $(V, +, 0)$ je určena nějakou podgrupou $W$ ve $V$. Stačí vlastnost (2) ve větě A.1 nahradit vlastností: $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}' \Rightarrow -\boldsymbol{x} \sim -\boldsymbol{x}'$.
Příkladem je grupa $(\mathbb{Z}_N, \oplus, 0)$, která je izomorfní s faktor grupou grupy $(\mathbb{Z}, +, 0)$ podle podgrupy $N\mathbb{Z} := \{Nk \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. Píšeme pak $\mathbb{Z}_N \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Pak

$$a \overset{N\mathbb{Z}}{\sim} b \;\Leftrightarrow\; b - a \in N\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; b - a = Nk \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; N|(b-a),$$

což přesně odpovídá kongruenci z příkladu `[ZM1:2.62(2)]`.

**Definice A.5.**
Nechť $\{(W_i, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})\}_{i\in I}$ je systém vektorových podprostorů vektorového prostoru $(V, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$. Pak podprostor $W := \mathcal{L}(\bigcup_{i\in I} W_i)$ nazýváme **součtem vektorových podprostorů** $W_i$**,** $i \in I$ a píšeme $W = \sum_{i\in I} W_i$.
Jestliže navíc platí $W_i \cap \mathcal{L}(\bigcup_{j\in I, j\neq i} W_j) = \{\mathbf{0}\}$ pro každé $i \in I$, pak součet nazýváme **přímým součtem vektorových podprostorů** $W_i$**,** $i \in I$ a píšeme $W = \dot{\sum}_{i\in I} W_i$.
Speciálně v případě součtu dvou, resp. konečného počtu ($n \geq 2$) podprostorů píšeme $W = W_1 + W_2$, resp. $W = W_1 + \cdots + W_n$. Podobně v případě přímého součtu dvou[1], resp. konečného počtu ($n \geq 2$) podprostorů píšeme $W = W_1 \dot{+} W_2$, resp. $W = W_1 \dot{+} \cdots \dot{+} W_n$.

[1]Dodatečná podmínka je v tomto případě tvaru $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

<u>*Poznámka*</u> A.6.
Součet ani přímý součet podprostorů zřejmě nezávisí na pořadí a uzávorkování sčítanců a jsou to tedy komutativní a asociativní operace.

**Věta A.7.** *Pro podprostory z předchozí definice platí:*

*(1)* $W = \sum_{i\in I} W_i$ *právě když*
$W = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \boldsymbol{x} = \sum_{j\in J} \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_j \in W_j, J \subseteq I, |J| < \infty\}$.

*(2)* $W = W_1 + \cdots + W_n$ *právě když*
$W = \{\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n \mid \boldsymbol{x}_i \in W_i, i = 1, \ldots, n\}$.

*(3)* $W = \dot{\sum}_{i\in I} W_i$ *právě když*
$W = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \boldsymbol{x} = \sum_{j\in J} \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_j \in W_j, J \subseteq I, |J| < \infty\}$, *kde vyjádření každého vektoru* $\boldsymbol{x} \in W$ *ve tvaru součtu* $\boldsymbol{x} = \sum_{j\in J} \boldsymbol{x}_j$ *je jediné až na pořadí a počet nulových sčítanců* $\boldsymbol{x}_j$.

*(4)* $W = W_1 \dot{+} \cdots \dot{+} W_n$ *právě když*
$W = \{\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n \mid \boldsymbol{x}_i \in W_i, i = 1, \ldots, n\}$, *kde vyjádření* $\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n$ *každého vektoru je až na pořadí sčítanců jediné.*

**Důsledek A.8.**
$W = W_1 \dot{+} \cdots \dot{+} W_n$ *právě když* $W \simeq W_1 \times \cdots \times W_n$.

**Věta A.9** (`[Šik:V3.43 s.32]`).
*Ke každému podprostoru* $W$ *vektorového prostoru* $(V, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ *existuje (obecně ne jediný) podprostor* $W'$ *ve* $V$ *tak, že* $V = W \dot{+} W'$ *a* $\dim V = \dim W + \dim W'$. *Podprostor* $W'$ *se nazývá* **přímý doplněk** $W$ **ve** $V$.

**Věta A.10** (`[Šik:V3.44 s.33]`).
*Nechť* $(V, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ *je vektorový prostor a* $V = W_1 \dot{+} W_2$, *pak* $V/W_1 \simeq W_2$ *a každá třída rozkladu* $V/W_1$ *obsahuje právě jeden prvek z* $W_2$ *(podobně po záměně role* $W_1$ *a* $W_2$*).*

**Věta A.11** (`[Šik:V3.45 s.33]`).
*Nechť* $(V, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ *je vektorový prostor a* $V = W_1 \dot{+} W_2$, *pak* $\dim V = \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

**Věta A.12** (`[Šik:V3.46 s.33]`).
*Nechť* $(V, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ *je vektorový prostor a* $W_1$ *a* $W_2$ *jeho podprostory, pak* $\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

**Příklad A.13.**

(1) Nechť $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ je nějaký vektor, pak $W := \mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}\}) = \{\xi\boldsymbol{u} \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ je jednorozměrný vektorový podprostor v $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ generovaný vektorem $\boldsymbol{u}$. Tento podprostor je v Euklidovské rovině s pevně zvoleným počátkem reprezentován přímkou procházející tímto počátkem ve směru vektoru $\boldsymbol{u}$. Pak rozklad $\mathbb{R}^2/W$ dle A.2 je tvořen všemi přímkami rovnoběžnými s $W$.

(2) Nechť $W_1$ a $W_2$ jsou dva různé jednorozměrné vektorové podprostory jako v (1) reprezentované dvěma přímkami procházejícími počátkem v různých směrech $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$. Pak $\mathbb{R}^2 = W_1 \dot{+} W_2$, neboť $W_1 \cap W_2 = \{[0, 0]\}$ a $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(W_1 \cup W_2) = \mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\})$, neboť $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ jsou zřejmě nezávislé a tudíž tvoří bázi v $\mathbb{R}^2$. Dle A.11 podle očekávání platí $2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim W_1 + \dim W_2 = 1 + 1$.

(3) Nechť $W_1$ a $W_2$ jsou dva různé dvourozměrné podprostory v $(\mathbb{R}^3, \mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ reprezentované různými rovinami procházejícími počátkem Eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^3$. Zřejmě $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ a dle A.12 platí $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim \mathbb{R}^3 = 2 + 2 - 3 = 1$. Podle očekávání je tedy průnikem těchto rovin nějaká přímka procházející počátkem a

součet $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ tedy nemůže být přímým součtem. Toho lze dosáhnout jen když $W_1$ je přímka a $W_2$ rovina (nebo naopak), kdy
$\dim(W_1 \cap W_2) = 1 + 2 - 3 = 0$, tj. $W_1 \cap W_2 = \{[0, 0, 0]\}$.

**Definice A.14.** Nechť $W$ je vektorový podprostor vektorového prostoru $(V, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ a $P : V \twoheadrightarrow W$ lineární operátor s vlastností: $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ pro každé $\boldsymbol{x} \in W$. Pak $P$ se nazývá **projekční**. $P$ je zřejmě surjektivní a $P^2 = P$, tj. $P(P\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x}$ pro každé $\boldsymbol{x} \in V$ (tzv. vlastnost **idempotence**).

**Věta A.15.** *Nechť $(V, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$ je vektorový prostor a $V = W_1 \dot{+} W_2$. Definujme zobrazení $P_1 : V \to W_1$ takto: $P_1(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}_1$ je onen dle věty A.7(4) jednoznačně určený prvek z vyjádření $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$. Pak $P_1$ je projekční operátor nazývaný* **operátorem rovnoběžné**[2] **projekce na podprostor** *$W_1$, přičemž $\mathcal{N}(P_1) = W_2$ a $V/\overset{P_1}{\sim} = V/W_2$.*

[2]Rozumí se rovnoběžně s podprostorem $W_2$.

# B METRIKY, NORMY A OPERÁTORY

## B.1 $p$-metriky a $p$-normy

<u>*Poznámka*</u> B.1. Nadále pro $x \geq 0$ klademe $x^0 = \lim\limits_{p\to 0^+} x^p = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$.

**Lemma B.2.** *Pro $0 \leq p < 1$ a libovolná $a, b \in \mathbb{C}$ platí*

$$|a+b|^p \leq |a|^p + |b|^p, \tag{B.1a}$$

*přičemž rovnost nastane pouze v případě $a = 0$ nebo $b = 0$.*

*Důkaz.* Je-li $a = 0$ nebo $b = 0$, pak tvrzení zřejmě platí a obě strany nerovnosti se rovnají s uvážením poznámky B.1 v případě $p = 0$. Nechť $a \neq 0$ a $b \neq 0$. Pak

$$|a+b|^p \leq (|a|+|b|)^p = (|a|+|b|)(|a|+|b|)^{p-1} = \\ |a|(\underbrace{|a|+|b|}_{>|a|})^{p-1} + |b|(\underbrace{|a|+|b|}_{>|b|})^{p-1} < |a||a|^{p-1} + |b||b|^{p-1} = |a|^p + |b|^p,$$

neboť mocninná funkce $x^{p-1}$ je pro $p - 1 < 0$ a $x > 0$ klesající. $\square$

**Důsledek B.3.** *Pro $0 \leq p < 1$ a libovolná $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p + \sum_{i=1}^{n} |b_i|^p, \tag{B.1b}$$

*přičemž rovnost nastane právě když pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a_i = 0$ nebo $b_i = 0$.*

**Lemma B.4.** *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $1 \leq p < \infty$ platí*

$$\lim_{p\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \max_{i=1,\ldots,n} |x|_i. \tag{B.2a}$$

*Důkaz.* Je-li $x_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, n$, pak na obou stranách je nulová hodnota a rovnost platí. Nechť $x_i \neq 0$ pro nějaké $i$, pak $m := \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x|_i > 0$ a

$$\lim_{p\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty} \Big(m^p \sum_{i=1}^{n} \Big|\frac{x_i}{m}\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = m \lim_{p\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big|\frac{x_i}{m}\Big|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = m \cdot 1 = m.$$

Vskutku: $\left|\frac{x_i}{m}\right| \leq 1$, takže pro $s(p) := \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\frac{x_i}{m}\right|^p$ platí $1 \leq s(p) \leq n$ a tudíž

$\lim\limits_{p\to\infty} s(p)^{\frac{1}{p}} = \lim\limits_{p\to\infty} e^{\frac{1}{p}\ln s(p)} = e^0 = 1.$ $\square$

**Věta B.5 (Minkovského nerovnost).**
*Pro $1 \leq p < \infty$ a libovolná $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{B.2b}$$

*přičemž pro $p \to \infty$ přejde tato nerovnost v nerovnost*

$$\max_{i=1,\ldots,n} |a_i + b_i| \leq \max_{i=1,\ldots,n} |a_i| + \max_{i=1,\ldots,n} |b_i|. \tag{B.2c}$$

*Důkaz.* Pro $p = 1$ je nerovnost (B.2b) zřejmá a pro $p > 1$ se dokazuje pomocí Hölderovy nerovnosti 2.79. Důkaz obou nerovností lze nalézt například v monografii `[KoFo: s.66-72]` nebo `[Heil:Thm.1.13 s.11]`. Nerovnost (B.2c) plyne z (B.2b) limitním přechodem pro $p \to \infty$ užitím (B.2a). □

**Věta B.6.** *Pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, vztahy*

$$\varrho_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p & \text{pro } 0 \le p < 1 \quad \text{(B.3a)} \\ \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } 1 \le p < \infty \quad \text{(B.3b)} \\ \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| & \text{pro } p = \infty \quad \text{(B.3c)} \end{cases}$$

*definují na $\mathbb{C}^n$ nezápornou funkci $\varrho_p$, která je* **invariantní metrikou, tzv. $p$-metrika**.

*Důkaz.* Axiomy symetrie 1° a totožnosti 3° pro metriku dle definice 2.31 jsou zřejmé, trojúhelníková nerovnost 2° $\varrho_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \le \varrho_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \varrho_p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ je důsledkem nerovností (B.1b), (B.2b) a (B.2c), jestliže položíme $a_i := x_i - y_i, b_i := y_i - z_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Invariantnost $\varrho_p(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ je rovněž zřejmá, neboť $x_i + z_i - (y_i + z_i) = x_i - y_i$ pro $i = 1, \dots, n$. □

**Důsledek B.7.** *Pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, a $0 \le p \le \infty$ označme $\|\boldsymbol{x}\|_p := \varrho_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ jako vzdálenost $\boldsymbol{x}$ od počátku $\boldsymbol{0}$. Pak $\|\cdot\|_p$ má následující vlastnosti ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $c \in \mathbb{C}$):*
*(1)* $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p = \varrho_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varrho_p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|_p$.
*(2)* $\|\boldsymbol{x}\|_p = \|-\boldsymbol{x}\|_p \ge 0$.
*(3)* $\|\boldsymbol{x}\|_0 = |\{i \,|\, x_i \ne 0, i = 1, \dots, n\}|$ *= počet nenulových složek v $\boldsymbol{x}$.*
*(4)* $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
*(5)* $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \le \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p$.
*(6)* $\|c\boldsymbol{x}\|_p = |c|\|\boldsymbol{x}\|_p$ *pro* $1 \le p \le \infty$.
*Zejména je $\|\cdot\|_p$ normou pro $1 \le p \le \infty$ a platí $\|\cdot\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|\cdot\|_p$.*

*Důkaz.*
(1) plyne z invariantnosti a symetrie metriky $\varrho_p$:

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_p = \varrho_p(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{0}) = \varrho_p(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{0} + \boldsymbol{y}) = \varrho_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \varrho_p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\|_p.$$

(2) je důsledkem (1) při $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.
(3) $\|\boldsymbol{x}\|_0 = \varrho_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \overset{\text{(B.3a)}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^0 \overset{B.1}{=} |\{i \,|\, x_i \ne 0, i = 1, \dots, n\}|$.
(4) plyne z axiomu totožnosti pro metriku: $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0 \;\Leftrightarrow\; \varrho_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
(5) je důsledkem (B.1b), (B.2b) a (B.2c) nebo trojúhelníkové nerovnosti pro metriky:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_p \overset{(1)}{=} \varrho_p(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y}) \le \varrho_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) + \varrho_p(\boldsymbol{0}, -\boldsymbol{y}) \overset{(1)}{=} \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p.$$

(6) $\underline{1 \le p < \infty}$: $\|c\boldsymbol{x}\|_p \overset{\text{(B.3b)}}{=} \big(\sum\limits_{i=1}^{n} |cx_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} = \big(|c|^p \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} = |c|\big(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} = |c|\|\boldsymbol{x}\|_p$.

$\underline{p = \infty}$: $\|c\boldsymbol{x}\|_\infty \overset{\text{(B.3c)}}{=} \max\limits_{i=1,\dots,n} |cx_i| = \max\limits_{i=1,\dots,n} |c||x_i| = |c| \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i| = |c|\|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

$\|\cdot\|_p$ je pro $1 \le p \le \infty$ normou, neboť (4)–(6) jsou spolu s (2) právě axiomy normy dle definice 2.47. Limitní přechod $\lim\limits_{p\to\infty} \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty$ je důsledkem (B.2a). □

**Důsledek B.8.** *Prostor posloupností $\ell^p(J)$ zavedený v 2.74 je NL-prostorem jen pro $1 \le p \le \infty$. Pro $0 \le p < 1$ je pouze ML-prostorem s metrikou $\varrho_p(\xi, \eta) := \sum_{n\in J} |\xi_n - \eta_n|^p$, $\xi, \eta \in \ell^p(J)$. Přitom $\varrho_p(\cdot,\cdot) : \ell^p(J) \times \ell^p(J) \to \mathbb{R}$ i $\|\cdot\|_p : \ell^p(J) \to \mathbb{R}$ jsou spojitá zobrazení.*

*Důkaz.* Všechny axiomy metriky, resp. normy jsou splněny triviálně, kromě trojúhelníkové nerovnosti. Pokud $|J| = n$, můžeme bez újmy na obecnosti ztotožnit $\ell^p(J)$ s množinou $\mathbb{C}^n$ opatřenou $p$-metrikou, resp. $p$-normou, takže trojúhelníková nerovnost platí dle věty B.6, resp. dle jejího důsledku B.7(5). Pokud $|J| = \aleph_0$, můžeme analogicky ztotožnit $\ell^p(J)$ s $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (nekonečné součty nezávisí na pořadí vzhledem k absolutní konvergenci nekonečných řad). Pak po limitním přechodu $n \to \infty$ zůstanou všechny (ne)rovnosti (B.2a)–(B.2c) a (B.3a)–(B.3c) v platnosti ($\max\limits_{i=1,\dots,n} \# \to \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \#$ pro $n \to \infty$), stejně jako tvrzení důsledku B.7.

Pro $0 \le p < 1$ je $\ell^p(J)$ pouze metrickým lineárním prostorem (viz B.9(1)), protože vzhledem k B.7(1),(2),(4),(5) lze důkaz spojitosti operací sečítání a násobení skalárem vést zcela shodně jako v důkazu věty 2.49, stejně jako důkaz spojitosti $\varrho_p$ i $\|\cdot\|_p$. □

<u>*Poznámka*</u> B.9.

(1) Pro $0 \le p < 1$ místo B.7(6) platí $\|c\boldsymbol{x}\|_p = |c|^p \|\boldsymbol{x}\|_p$, takže $\|\cdot\|_p$ není normou.
(2) Trojúhelníkové nerovnosti (B.1a) a (B.1b) platí i pro $p = 1$, neboť přejdou v nerovnost (B.2b).
(3) Trojúhelníková nerovnost (B.1a) a tedy ani (B.1b) obecně neplatí pro $p > 1$: například $|1 + 1|^2 = 2^2 = 4 > |1|^2 + |1|^2 = 2$.
(4) Trojúhelníková nerovnost (B.2b) platí i pro $0 < p < 1$ jen v případě $n = 1$, kdy přejde v $|a_1 + b_1| \le |a_1| + |b_1|$. Pro $n > 1$ obecně neplatí: například při $n = 2$ pro $a_1 = a_2 = 16$, $b_1 = b_2 = 9$ a $p = \frac{1}{2}$ dostáváme $\left[(16+9)^{\frac{1}{2}} + (16+9)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = 100 > \left[16^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \left[9^{\frac{1}{2}}\right]^2 = 16+9 = 25$. Vztah (B.3b) pro $0 < p < 1$ neurčuje proto metriku a ani normu jako v B.7.
(5) Definujeme-li v libovolném metrickém lineárním prostoru (odst. 2.1.5) s invariantní metrikou $\varrho$ funkci $\|x\| := \varrho(x, 0)$, pak vlastnosti B.7(1),(2),(4),(5) zůstávají v platnosti, neboť při jejich důkazu byly využity pouze vlastnosti invariantní metriky. Obdobně dostáváme spojitost $\varrho$ a $\|\cdot\|$ stejně jako v B.8 (viz B.1).
(6) „Pseudonorma“ $\|\cdot\|_0$ z B.7(3) hraje důležitou roli při hledání tzv. **řídkých řešení** nedourčeného systému lineárních rovnic (více proměnných než rovnic): mezi nekonečně mnoha řešeními nedourčeného systému lineárních rovnic $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{b}$ s řádkově plnou hodností matice soustavy $\boldsymbol{T}$ hledáme řešení minimalizující $\|\boldsymbol{x}\|_0$, tj. s nejmenším počtem nenulových složek. Výzkum problematiky hledání řídkých řešení zažívá v současnosti prudký rozvoj [BDE09, Ela10], neboť má obrovský aplikační potenciál (pro podrobnější seznámení viz [HRVŠ11a, HRVŠ11b]).

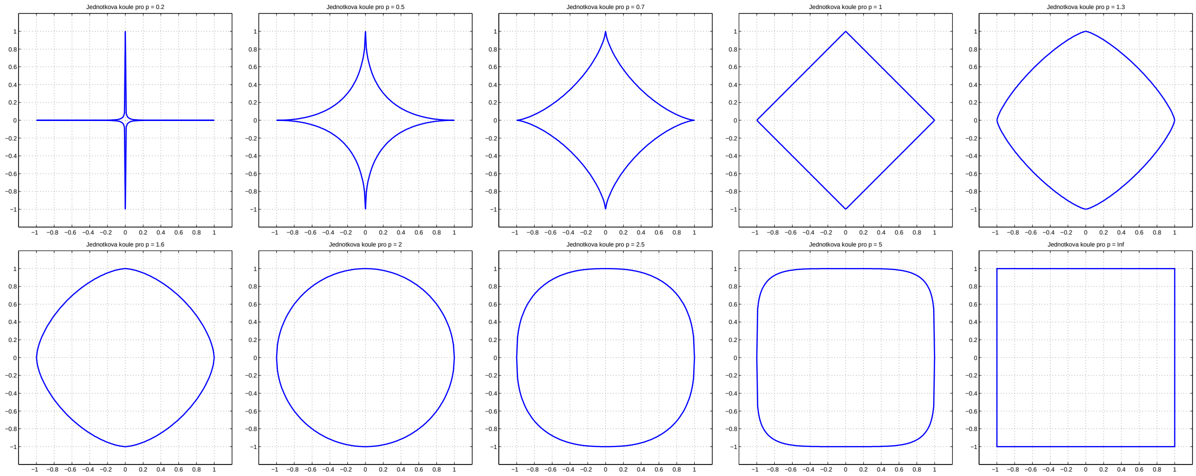
## B.2 Ekvivalentní metriky a normy

**Definice B.10.** Nechť $X$ je M-prostor, resp. NL-prostor vzhledem ke dvěma metrikám $d$ a $\varrho$, resp. normám $\|\cdot\|$ a $\sharp \cdot \sharp$. Tyto metriky, resp. normy se nazývají **ekvivalentní**[1], jestliže na $X$ indukují stejnou topologii, neboli když identické zobrazení $I : (X, d) \to (X, \varrho)$, resp. $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \sharp \cdot \sharp)$ je TLI.

V dalším se omezíme pouze na vyšetřování ekvivalentních norem.

**Věta B.11.** *Dvě normy $\|\cdot\|$ a $\sharp \cdot \sharp$ na NL-prostoru $X$ jsou ekvivalentní právě když existují konstanty $0 < m < M$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $m\|x\| \le \sharp x \sharp \le M\|x\|$.*

[1] Přesněji **topologicky ekvivalentní.**




**Obrázek B.1**: Jednotkové koule v $p$-metrikách pro $p = 0, 2, \dots, 1, \dots, 2, \dots, \infty$.

*Důkaz.* Podle definice jsou obě normy ekvivalentní právě když $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \sharp \cdot \sharp)$ je TLI, neboli právě když $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \sharp \cdot \sharp)$ i inverzní $I : (X, (X, \sharp \cdot \sharp) \to (X, \|\cdot\|)$ jsou spojitá, tj. právě když dle 3.1(3) existují $C_1, C_2 > 0$: $\sharp x \sharp = \sharp I x \sharp \le C_1 \|x\|$ a současně $\|x\| = \|Ix\| \le C_2 \sharp x \sharp$. Stačí položit $M := C_1$ a $m := \frac{1}{C_2}$. □

Poznámka B.12. Je-li v předchozí větě $X$ úplný vzhledem k oběma normám, pak k jejich ekvivalenci dle IMT 3.6 stačí, když je splněna jedna z nerovností, neboli když existuje $C > 0$: $\sharp x \sharp \le C\|x\|$ nebo $\|x\| \le C \sharp x \sharp$ ($I$ je bijekce spojitá alespoň v jednom směru).

**Věta B.13** (`[Heil:Thm.1.8 s.6]`).
*Každé dvě normy v NL-prostoru $X$ konečné dimenze jsou ekvivalentní.*

*Důkaz.* Podle 2.53 existuje TLI $T : (X, \|\cdot\|) \rightarrowtail (X, \sharp \cdot \sharp)$. Pak $T^{-1}$ je také TLI a tedy rovněž identické zobrazení $I = T^{-1}T$ je TLI a dle definice B.10 jsou tedy obě normy ekvivalentní. □

V dalším se zaměříme na ekvivalenci $p$-norem pro různá $p$ v prostorech $\ell^p(J)$ a $L^p(\mathfrak{I})$ v situacích dle věty 2.80.

**Věta B.14.** *Pro každé $x \in \ell^p(J)$, $|J| \le \aleph_0$, a libovolné $p, q$ $(1 \le p \le q \le \infty)$ platí $\|x\|_\infty \le \|x\|_q \le \|x\|_p$.*

*Důkaz.*
Podle 2.80(c) je $x \in \ell^p(J) \subseteq \ell^q(J) \subseteq \ell^\infty(J)$ a $M := \sup\limits_{j \in J} |x_j| < \infty$ a $|\frac{x_j}{M}| \le 1$ pro každé $j \in J$.
Pak $1 \le y_1 := \sum\limits_{j \in J} |\frac{x_j}{M}|^q \le \sum\limits_{j \in J} |\frac{x_j}{M}|^p =: y_2 \Rightarrow \sqrt[q]{y_1} \le \sqrt[q]{y_2} \le \sqrt[p]{y_2}$ a dostáváme:

$$\|x\|_\infty = \sup_{j \in J} |x_j| = \sqrt[q]{(\sup_{j \in J} |x_j|)^q} = \sqrt[q]{\sup_{j \in J} |x_j|^q} \le \sqrt[q]{\sum_{j \in J} |x_j|^q} = \|x\|_q = \sqrt[q]{\sum_{j \in J} M^q \left|\frac{x_j}{M}\right|^q} =$$
$$= M \sqrt[q]{\sum_{j \in J} \left|\frac{x_j}{M}\right|^q} \le M \sqrt[p]{\sum_{j \in J} \left|\frac{x_j}{M}\right|^p} = \sqrt[p]{\sum_{j \in J} M^p \left|\frac{x_j}{M}\right|^p} = \sqrt[p]{\sum_{j \in J} |x_j|^p} = \|x\|_p.$$

□

**Důsledek B.15.**
*Pro každé $x \in \mathbb{C}^N$ a libovolné $p, q$ $(1 \le p \le q \le \infty)$ platí*

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_q \le \|x\|_p \le \|x\|_1 \le N^{\frac{q-1}{q}}\|x\|_q \le N\|x\|_q.$$

*Všechny $p$-normy na $\mathbb{C}^N$ jsou proto ekvivalentní (viz 2.80(c), B.11 a B.13).*

*Důkaz.* Pro $|J| = N \in \mathbb{N}$ lze bez újmy na obecnosti předpokládat $\ell^p(J) = \mathbb{C}^N$ pro každé $1 \le p \le \infty$. Pak pro každé $x \in \mathbb{C}^N$ prvé dvě nerovnosti zleva platí dle B.14.
Záměnou $p \rightsquigarrow q$ a $1 \rightsquigarrow p$ odtud dostáváme také $\|x\|_p \le \|x\|_1$.
Zbývající nerovnosti ukážeme užitím Hölderovy nerovnosti 2.79 pro dvojici indexů $q$ a $q' = \frac{q}{q-1}$ $(q' = 1$ pro $q = \infty)$, a dvojici prvků $x \in \ell^q(J)$, $\mathbf{1} = [1, \dots, 1] \in \ell^{q'}(J)$. Pak
$\|x\|_1 = \|x \cdot \mathbf{1}\|_1 \le \|x\|_q \|\mathbf{1}\|_{q'} = \sqrt[q']{N}\|x\|_q = N^{\frac{q-1}{q}}\|x\|_q \le N\|x\|_q.$ □

**Věta B.16.** *Pro každé $x \in L^q(\mathcal{I})$, $0 < \mu(\mathcal{I}) < \infty$, a libovolné $p, q$ $(1 \le p \le q \le \infty)$ platí*

$$\mu(\mathcal{I})^{\frac{1-p}{p}}\|x\|_1 \le \|x\|_p \le \mu(\mathcal{I})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|x\|_q.$$

*Důkaz.* Podle věty 2.80(a) je $x \in L^q(\mathcal{I}) \subseteq L^p(\mathcal{I}) \subseteq L^1(\mathcal{I})$ a na základě jejího důkazu dostáváme opět užitím Hölderovy nerovnosti: $\|x\|_p^p \le \|x\|_q^p\, \mu(\mathcal{I})^{\frac{q-p}{q}}$ a tedy $\|x\|_p \le \|x\|_q\, \mu(\mathcal{I})^{\frac{q-p}{pq}}$, kde $\frac{q-p}{qp} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Odtud $\frac{q-p}{pq} \to \frac{1}{p}$ pro $q \to \infty$, takže nerovnosti platí i pro $q = \infty$ (viz důkaz 2.80(a), kde položíme $C = \|f\|_\infty$).
Záměnou $1 \rightsquigarrow p$ a $p \rightsquigarrow q$ obdržíme $\|x\|_1 \le \mu(\mathcal{I})^{\frac{p-1}{p}}\|x\|_p$ a odtud $\mu(\mathcal{I})^{\frac{1-p}{p}}\|x\|_1 \le \|x\|_p$. □

## B.3 Operátory Fredholmova typu

V příkladech 3.7(1)(2) jsme ukázali, že každý lineární operátor $T$ mezi konečně dimenzionálními NL-prostory je spojitý a dá se reprezentovat maticovým operátorem $\boldsymbol{T} := [T]$ vztahem $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{Tx}$ při pevně zvolených bázích v obou prostorech (viz 2.13).

Vzniká přirozená otázka, zda toto tvrzení lze zobecnit i pro případ, kdy některý z prostorů je nekonečné dimenze. Ukazuje se, že obecně nikoliv, ale jen při splnění dodatečných podmínek dle následujících vět. V návaznosti na příklad 3.7(3) tvrzení zobecníme dle definice B.17 na lineární operátory mezi prostory posloupností $T : \ell^p(J_1) \to \ell^q(J_2)$, jejichž indexové množiny $J_1, J_2$ jsou nejvýše spočetné, resp. na integrální operátory mezi prostory funkcí $L^p(\mathcal{I}_1) \to L^q(\mathcal{I}_2)$ definovaných na měřitelných množinách $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$.

**Definice B.17.** Nechť $1 \le p, q \le \infty$. Pak diskrétním, resp. integrálním operátorem **Fredholmova typu** rozumíme operátor $T_B$ definovaný následovně:
**Diskrétní případ** $T_B : \ell^p(J_1) \to \ell^q(J_2)$, kde $B \in \ell^q(J_2 \times J_1)$, pak $y := T_B(x)$ definujeme vztahem $y_i = \sum\limits_{j \in J_1} b_{ij}x_j$, pokud řada konverguje v $\ell^p(J_1)\, \forall\, i \in J_2$.
**Integrální případ** $T_B : L^p(\mathcal{I}_1) \to L^q(\mathcal{I}_2)$, kde $B \in L^q(\mathcal{I}_2 \times \mathcal{I}_1)$, pak $y := T_B(x)$ definujeme vztahem $y(t) = \int\limits_{\mathcal{I}_1} B(t,u)x(u)\, du$, pokud integrál existuje a je konečný pro s.v. $t \in \mathcal{I}_2$.

Funkci $B$ nazýváme **jádrem operátoru** $T_B$. Operátor $T_B$ se nazývá **Fredholmův**, jestliže je ohraničený s uzavřeným oborem hodnot $\mathcal{R}(T_B)$ a $\dim \mathcal{N}(T_B) < \infty$ i $\dim \mathcal{N}(T_B') < \infty$.

**Věta B.18.** *Jestliže $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pak operátor $T_B$ z definice B.17 je ohraničený a platí $\|T_B x\|_q \le \|B\|_q \|x\|_p$. V takovém případě*
$y_i = \sum\limits_{j \in J_1} b_{ij}x_j \in \ell^q(J_2)$ *a řada konverguje absolutně (a tedy bez ohledu na pořadí) pro každé*

*$i \in J_2$, resp.*
*$y(t) = \int\limits_{\mathcal{I}_1} B(t,u)x(u)\,du \in L^q(\mathcal{I}_2)$, kde integrál konverguje absolutně a je konečný pro skoro všechna $t \in \mathcal{I}_2$.*

*Důkaz.*
Diskrétní případ: Pro pevné $i \in J_2$ je $\sum\limits_{j\in J_1} |b_{ij}|^q \leq \sum\limits_{i\in J_2, j\in J_1} |b_{ij}|^q < \infty \Rightarrow \{b_{ij}\}_{j\in J_1} \in \ell^q(J_2)$, takže užitím Hölderovy nerovnosti 2.79 dostáváme
$|y_i| = |\sum\limits_{j\in J_1} b_{ij}x_j| \leq \sum\limits_{j\in J_1} |b_{ij}x_j| \leq (\sum\limits_{j\in J_1} |b_{ij}|^q)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p < \infty$, takže řada konverguje absolutně. Pak z nerovnosti
$|y_i|^q \leq (\sum\limits_{j\in J_1} |b_{ij}|^q)\|x\|_p^q \Rightarrow \|y\|_q^q = \sum\limits_{i\in J_2} |y_i|^q \leq \Big(\sum\limits_{i\in J_2} (\sum\limits_{j\in J_1} |b_{ij}|^q)\Big)\|x\|_p^q = (\sum\limits_{i\in J_2, j\in J_1} |b_{ij}|^q)\|x\|_p^q$ dostáváme $\|T_B x\|_q = \|y\|_q \leq (\sum\limits_{i\in J_2, j\in J_1} |b_{ij}|^q)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p = \|B\|_q \|x\|_p$, takže $T_B$ je ohraničený.
Integrální případ: Dle Fubiniho věty (F.V.) $\int\limits_{\mathcal{I}_2\times\mathcal{I}_1} |B(t,u)|^q\,du < \infty \Rightarrow \int\limits_{\mathcal{I}_1} |B(t,u)|^q\,du < \infty$ pro s.v. $t \in \mathcal{I}_2$ a tedy $B(t,u) \in L^q(\mathcal{I}_2)$ pro s.v. $t \in \mathcal{I}_2$, takže opět užitím Hölderovy nerovnosti 2.79 dostáváme pro s.v. $t \in \mathcal{I}_2$:
$|y(t)| = |\int\limits_{\mathcal{I}_1} B(t,u)x(u)\,du| \leq \int\limits_{\mathcal{I}_1} |B(t,u)x(u)|\,du \leq (\int\limits_{\mathcal{I}_1} |B(t,u)|^q\,du)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p < \infty$, takže integrál konverguje absolutně. Dále analogicky jako v diskrétním případě
$\|y\|_q^q = \int\limits_{\mathcal{I}_2} |y(t)|^q\,dt \leq \Big(\int\limits_{\mathcal{I}_2} (\int\limits_{\mathcal{I}_1} |B(t,u)|^q\,du)\,dt\Big)\|x\|_p^q \overset{F.V.}{=} (\iint\limits_{\mathcal{I}_2\times\mathcal{I}_1} |B(t,u)|^q\,dt\,du)\|x\|_p^q = \|B\|_q^q \|x\|_p^q$. $\square$

*Poznámka* B.19.

(1) Operátory Fredholmova typu hrají důležitou roli v teorii Fredholmových integrálních rovnic tvaru $T_B x = y$, neboli $\int_{\mathcal{I}_1} B(t,u)x(u)\,du = y(t)$, kde k dané funkci $y(t) \in L^q(\mathcal{I}_2)$ na pravé straně hledáme řešení $x(u) \in L^p(\mathcal{I}_1)$. Jedná se vlastně o zobecnění úlohy nalézt řešení $\boldsymbol{x}$ systému lineárních rovnic $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{y}$.
V případě Fredholmova operátoru je analogicky jako v příkladu 4.13(5) prostorem všech řešení homogenní rovnice ($y = 0$) konečně-rozměrné jádro $\mathcal{N}(T_B)$ a řešení pro pravou stranu $y$ existuje ($y \in \mathcal{R}(T_B)$) právě když splňuje $e_j'(y) = 0$ pro konečně mnoho spojitých bázových funkcionálů $e_j' \in \mathcal{N}(T_B') \subset L^q(\mathcal{I}_2)' \overset{3.19}{=} L^p(\mathcal{I}_2)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ pro $1 \leq q < \infty$, neboli právě když splňuje konečně mnoho lineárních podmínek $\int_{\mathcal{I}_2} y(t)e_j(t)\,dt = 0$. Pro $p = q = 2$ jsou $L^2(\mathcal{I}_1)$ i $L^2(\mathcal{I}_2)$ H-prostory (věta 2.77) a $\langle y, \overline{e}_j\rangle = \int_{\mathcal{I}_2} y(t)e_j(t)\,dt = 0\,\forall j$ je ekvivalentní s $y \in \mathcal{N}(T_B^*)^\perp \overset{4.1}{=} \overline{\mathcal{R}(T_B)} = \mathcal{R}(T_B)$.

(2) Speciálním případem operátorů Fredholmova typu jsou **konvoluční operátory** $T_h$, jejichž jádro je tvaru $B(t,u) = h(t-u)$. Tyto operátory realizují lineární filtry. Určující funkce $h$ se nazývá **impulzní odezvou** a její Fourierova transformace **přenosovou funkcí** lineárního filtru. Podrobněji bude o těchto operátorech a jejich vlastnostech pojednáno v příloze C.2.

# C FOURIEROVA ŘADA A FOURIEROVA TRANSFORMACE

Tato příloha doplňuje a rozšiřuje informace z části 2.3.1.

## C.1 Fourierova řada

*Komplexní harmonické kmity:*

$$E = \{e_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\frac{2\pi k t}{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i\omega_k t} = \frac{1}{\sqrt{T}} (\cos\omega_k t + i \sin\omega_k t),$$

kde pro $k \neq 0$ značí

| | | |
|---|---|---|
| $f_k = \frac{\lvert k\rvert}{T}$ | ... | frekvenci $\lvert k\rvert$-ho harmonického kmitu s periodou $\frac{T}{\lvert k\rvert}$, |
| $\omega_k = 2\pi f_k$ | ... | jeho úhlovou rychlost. |

*E je ortonormální systém v $L^2([0,T])$:*

$$\langle e_j, e_k\rangle = \int_0^T e_j(t)\overline{e_k(t)}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi(j-k)t}{T}}\, dt = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad j = k \\ 0 & \text{pro} \quad j \neq k \end{cases}$$

*E je dokonce úplný (báze) v $L^2([0,T])$:*
*(bez důkazu, viz např. [Kuf69, Věta 3.15] nebo* `[Heil:Thm. 13.23 s.450]`*)*

$$x(t) \in L^2([0,T]) \text{ libovolná a } T\text{-periodická} \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e_k(t),$$

kde řada konverguje (bez ohledu na pořadí) dle normy $\|\cdot\|_2$ v prostoru $L^2([0,T])$ a souřadnice $x_k$ jsou jednoznačně určeny vztahem

$$\underline{\langle x, e_k\rangle} = \langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j e_j, e_k\rangle = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{\delta_{j,k}} = \underline{x_k}.$$

*Komplexní tvar rozvoje do Fourierovy řady:*

$$\begin{aligned} \underline{x(t)} \quad &= \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle x, e_k\rangle \frac{1}{\sqrt{T}}}_{c_k(x)} e^{i\omega_k t} = \underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{i\omega_k t}}, \\ &\text{kde} \\ \underline{c_k := c_k(x)} \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{T}}\langle x, e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T x(t)\frac{1}{\sqrt{T}} e^{-i\omega_k t}\, dt = \underline{\frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-i\omega_k t}\, dt}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

| | | |
|---|---|---|
| $c_k$ | ... | $k$-tý **komplexní Fourierův koeficient funkce** $x$, |
| $c_0$ | ... | **střední hodnota (stejnosměrná složka) funkce** $x$, |
| $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ | ... | **komplexní fourierovské spektrum funkce** $x$, |
| $x_k(t)$ | $:=$ | $c_k e^{i\omega_k t} + c_{-k} e^{-i\omega_k t},\ k \geq 1$ |
| | ... | $k$**-tá harmonická komponenta funkce** $x$ **o frekvenci** $f_k$. |

Dirichletova věta 2.82 říkala, že za poměrně měkkých podmínek Fourierova řada funkce $x$ konverguje bodově k $x$, s výjimkou bodů nespojitosti. Nyní uvádíme její přímý důsledek.

**Důsledek C.1.** *Je-li $T$-periodická funkce $x(t)$ po částech spojitá a po částech monotonní na $[0,T]$, pak má konečnou variaci a její FŘ konverguje bodově k $x(t)$ v každém bodě $t$, kde je $x(t)$ spojitá a k $\frac{1}{2}(\lim_{t\to 0^+} x(t) + \lim_{t\to 0^-} x(t))$ v každém bodě nespojitosti (u funkce po částech spojité je to vždy pouze konečný skok).*

**Je-li $x(t)$ reálná funkce, lze (C.1) upravit na další dva ekvivalentní tvary:**
Zřejmě $c_{-k} = \overline{c_k}$. Označíme-li

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k);\ a_k, b_k \in \mathbb{R},\ \text{pro } k = 0, 1, \dots \tag{C.2}$$

pak $c_0 = \frac{a_0}{2} \in \mathbb{R},\ b_0 = 0$ a dostáváme

*Goniometrický tvar Fourierovy řady:*

$$\begin{aligned}
\underline{x(t)} &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{i\omega_k t} + \underbrace{c_{-k}e^{-i\omega_k t}}_{\overline{c_k e^{i\omega_k t}}}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}(c_k e^{i\omega_k t}) = \\
&= \underline{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t)},
\end{aligned} \tag{C.3}$$

kde

$$\begin{aligned}
\underline{a_k} &= 2\mathrm{Re}(c_k) = \underline{\tfrac{2}{T}\textstyle\int_0^T x(t)\cos\omega_k t\, dt} \\
\underline{b_k} &= -2\mathrm{Im}(c_k) = \underline{\tfrac{2}{T}\textstyle\int_0^T x(t)\sin\omega_k t\, dt}
\end{aligned} \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots$$

Položíme-li $a_k = A_k \cos\varphi_k$ a $b_k = A_k \sin\varphi_k$, dostaneme

*Amplitudově-fázový tvar Fourierovy řady:*

$$\underline{x(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\cos\varphi_k \cos\omega_k t + \sin\varphi_k \sin\omega_k t) = \underline{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k \cos(\omega_k t - \varphi_k)}_{x_k(t)}}. \tag{C.4}$$

kde

$$\begin{aligned}
A_k &= 2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \\
\varphi_k &= \arctan\frac{b_k}{a_k} \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots.
\end{aligned}$$

| | | |
|---|---|---|
| $A_k$ | ... | **amplituda $k$-té harmonické složky funkce $x$,** |
| $\varphi_k$ | ... | **fázový posuv $k$-té harmonické složky funkce $x$ $(-\pi < \varphi_k \le \pi)$,** |
| $c_0 = \frac{a_0}{2}$ | ... | **střední hodnota (stejnosměrná složka) funkce $x$,** |
| $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ | ... | **amplitudové spektrum funkce $x$,** |
| $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ | ... | **fázové spektrum funkce $x$.** |

**Příklad C.2** (Výpočet Fourierovy řady spojité funkce)**.** Nechť je dána periodická funkce $f$, která vznikne jednocestným usměrněním funkce $\cos(t)$, tedy

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{pro } t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \\ 0 & \text{pro ostatní } t. \end{cases} \tag{C.5}$$

Jeho Fourierovy koeficienty získáme pomocí výše uvedených vztahů. Vzhledem k faktu, že $f$ je reálná sudá funkce, jsou koeficienty $c_k$ reálné: $c_0 = \frac{1}{\pi}$, pro sudá $k$ platí $c_k = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{k}{2}-1}}{k^2-1}$ a jediný nenulový koeficient pro $k$ lichá je $c_1 = \frac{1}{4}$. Pro vyšší přehlednost použijeme převodu (C.2) z komplexního na goniometrický tvar, zde $a_k = 2c_k$. Výslednou Fourierovu řadu je pak možno zapsat jako

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{2}{3\pi}\cos 2t - \frac{2}{15\pi}\cos 4t + \frac{2}{35\pi}\cos 6t - \dots.$$

Původní funkci $f$ a částečné součty její Fourierovy řady je možné vidět na obr. C.1.

**Příklad C.3** (Výpočet Fourierovy řady nespojité funkce)**.** Nechť je dána $T$-periodická funkce $f$, tzv. pilový signál $f(t) = \alpha t$ pro $t \in [0, T)$. Jeho Fourierovy koeficienty získáme obdobně jako výše a Fourierova řada pro $f$ má tvar

$$f(t) = \frac{\alpha T}{2} - \frac{\alpha T}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{2k\pi t}{T}\right).$$

Tedy příspěvek harmonických funkcí k výslednému součtu klesá s jejich frekvencí hyperbolicky, $\frac{1}{k}$. Původní funkci $f$ a částečné součty její Fourierovy řady je možné vidět na obr. C.2.

Fourierova řada konverguje bodově k $f$ na intervalu $(0, T)$ a v bodech nespojistosti $t = \mathbb{Z}T$ k hodnotě $\frac{\alpha T}{2}$ dle Dirichletovy věty 2.82.

Všimněme si, že rychlost konvergence řady (aniž bychom ji formálně definovali) je výrazně nižší než tomu bylo u předchozího příkladu. Tento jev lze snadno vysvětlit: skok lze špatně modelovat pomocí harmonických funkcí. U příkladu C.2 byla konvergence rychlejší, protože $f$ tam měla pouze nespojitost v první derivaci.

## C.1.1 Parsevalova identita (PI)

Nechť $x \in L^2([0, T])$ (tj. s konečnou energií na intervalu $[0, T]$) je $T$-periodická, potom

$$\begin{aligned} \|x\|_2^2 &= \int_0^T |x(t)|^2\,dt = \langle x, x\rangle = \Big\langle \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j\sqrt{T}\underbrace{\frac{e^{i\omega_j t}}{\sqrt{T}}}_{e_j(t)}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\sqrt{T}\underbrace{\frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{T}}}_{e_k(t)}\Big\rangle \\ &= T\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_j\overline{c_k}\underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{\delta_{j,k}} = T\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2. \end{aligned}$$

Odtud pak dostáváme:

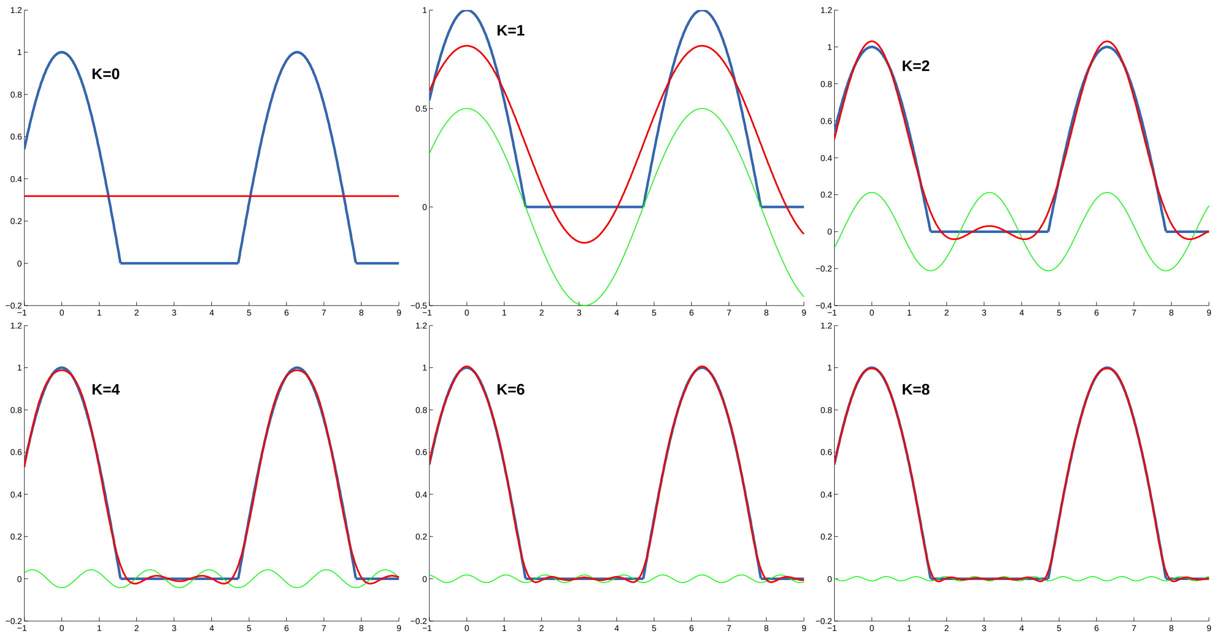
*Komplexní tvar Parsevalovy identity:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt}_{\text{střední výkon na }[0,T]} < \infty \Rightarrow \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_2. \tag{C.6}$$

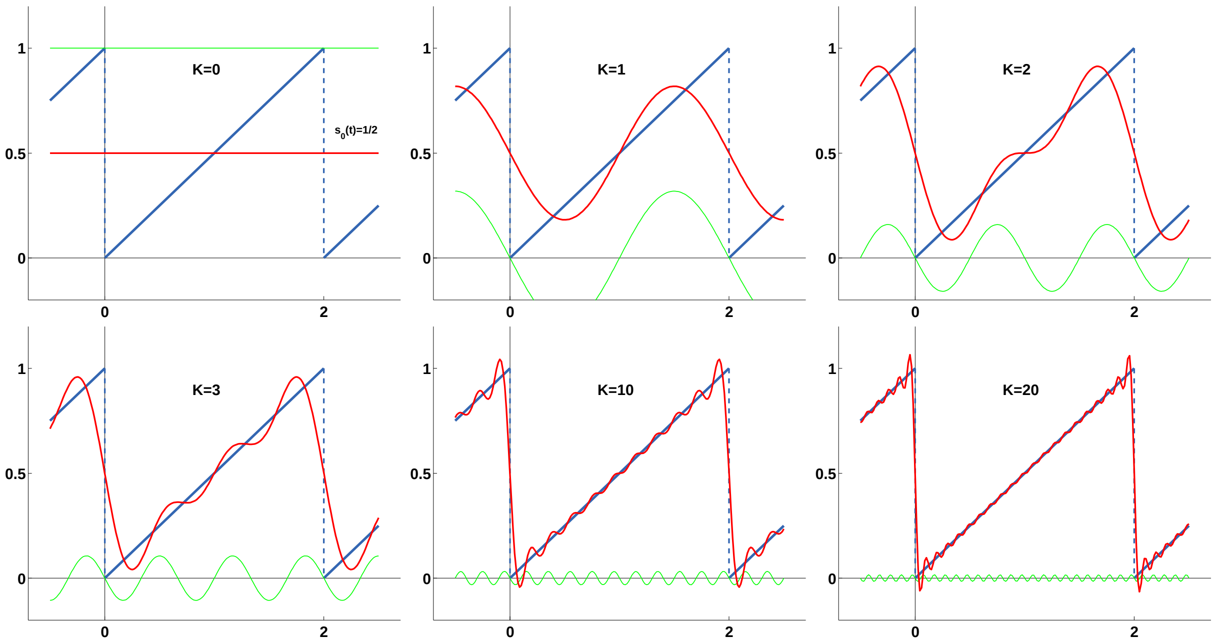
**Speciálně:**

$|c_0|^2$ ... **střední výkon stejnosměrné složky**,

$\frac{1}{T}\int_0^T |x_k(t)|^2\,dt = |c_{-k}|^2 + |c_k|^2$ ... **střední výkon $k$-té harmonické složky**.




**Obrázek C.1**: Ukázky součtů prvních $K$ harmonických složek usměrněného kosinu. Modře výchozí funkce $f$, červeně částečné součty, zeleně přínos $K$-té složky do součtu.




**Obrázek C.2**: Ukázky součtů prvních $K$ harmonických složek pilové funkce pro parametry $\alpha = 1/2$, $T = 2$. Modře výchozí funkce $f$, červeně částečné součty, zeleně přínos $K$-té složky do součtu.

*Poznámka* C.4. V elektrotechnice se odmocnina ze středního výkonu nazývá **efektivní hodnota** periodického signálu.

*Amplitudový tvar Parsevalovy identity (x reálná):*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{(|c_{-k}|^2+|c_k|^2)}_{2|c_k|^2=A_k^2/2} = \underline{\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}A_k^2} = \underline{\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt}. \tag{C.7}$$

**Speciálně:**

$$\begin{aligned}
\frac{a_0^2}{4}\ & \dots\ \textbf{střední výkon stejnosměrné složky},\\
\frac{A_k^2}{2}\ & \dots\ \textbf{střední výkon } k\textbf{-té harmonické složky},\\
\{2|c_k|^2\}_{k\in\mathbb{N}} &= \left\{\frac{A_k^2}{2}\right\}_{k=1}^{\infty} \qquad\qquad (\mathrm{C.8})\\
& \dots\ \textbf{výkonová spektrální hustota},\\
\{2T|c_k|^2\}_{k\in\mathbb{N}} &= \left\{\frac{TA_k^2}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}\\
& \dots\ \textbf{energetická spektrální hustota}.
\end{aligned}$$

## C.1.2 Diskretizace Fourierovy řady

Vypočteme hodnoty rozvoje $x(t)$ do její komplexní FŘ (C.1) pouze na rovnoměrné diskrétní síti $N$ subintervalů: $T = N\Delta t,\ x_n = x(n\Delta t), n \in \mathbb{Z}$.

Obdržíme

$$\underline{x_n} \overset{(C.1)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{N\Delta t}n\Delta t} = \sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \overbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{k+mN}\right)}^{\widehat{c}_k} e^{i\frac{2\pi(k+mN)n}{N}} = \underline{\sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}}}. \tag{C.9}$$

kde $[\cdot]$ značí celou část hodnoty.

Platí

| | |
|---|---|
| $\widehat{c}_k \approx c_k,$ | neboť $\lvert c_k\rvert \to 0$ pro $k \to \pm\infty$, |
| $\widehat{c}_k = c_k,$ | pokud $c_k = 0$ pro $\lvert k\rvert \geq \frac{N}{2}$ (FŘ je konečná: $f_{max} \leq \frac{N}{2}\frac{1}{T}$ udává konečný frekvenční obsah $x(t)$), |
| $\{\widehat{c}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ | je $N$-periodická posloupnost ($\widehat{c}_k = \widehat{c}_{k+mN},\ m \in \mathbb{Z}$). |

*Po úpravě:*

$$\underline{x_n} = \sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{-1} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}} = \underline{\sum_{k=0}^{N-1} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}}}, \tag{C.10}$$

kde první ze sum jsme upravili záměnou sčítacího indexu $r = k + N$ na tvar:

$$\sum_{k=-\left[\frac{N-1}{2}\right]}^{-1} \widehat{c}_k e^{i\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{r=-\left[\frac{N-1}{2}\right]+N}^{N-1} \widehat{c}_{r-N} e^{i\frac{2\pi(r-N)n}{N}} = \sum_{r=\left[\frac{N}{2}\right]+1}^{N-1} \widehat{c}_r e^{i\frac{2\pi rn}{N}}$$

s využitím vztahů

$-\left[\frac{N-1}{2}\right] + N = \left[\frac{N}{2}\right] + 1$ a $\widehat{c}_r = \widehat{c}_{r-N}$ pro $r = \left[\frac{N}{2}\right] + 1, \dots, N-1$ ($N$-periodicita).

Označíme-li $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]^T$ vzorky $x(t)$ na její jedné periodě a $\widehat{\boldsymbol{c}} = [\widehat{c}_0, \widehat{c}_1, \dots, \widehat{c}_{N-1}]^T$ odhady Fourierových koeficientů, pak (C.10) určuje tzv. **operátor diskrétní Fourierovy transformace ($\boldsymbol{x} = \mathrm{DFT}_N^+(\widehat{\boldsymbol{c}})$)** dle následující definice.

**Definice C.5** (Diskrétní Fourierova transformace (DFT))**.**
$\mathrm{DFT}_N^{\pm} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ je lineární operátor $\boldsymbol{X} = \mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{x}$ určený maticí $N \times N$:
$\mathbb{W}_N^{\pm} = \left[W_N^{kn}\right]_{0\le k,n\le N-1}$, kde $W_N = e^{\pm i\frac{2\pi}{N}} = \cos\frac{2\pi}{N} \pm i\sin\frac{2\pi}{N}$ je $N$-tá primitivní odmocnina z 1, tj. $W_N^N = 1$, ale $W_N^k \ne 1$ pro $k = 1, \dots, N-1$. Tedy

$$\boldsymbol{X} = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]^T, \quad \text{kde } X_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm i\frac{2\pi kn}{N}} x_n \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{C.11}$$

Zřejmě $\mathbb{W}_N^{\pm}$ je symetrická matice a $(\mathbb{W}_N^{\pm})^* = \mathbb{W}_N^{\mp}$.

**Věta C.6** (Věta o inverzi)**.**
*Platí* $\mathbb{W}_N^{\pm}\mathbb{W}_N^{\mp} = \mathbb{W}_N^{\pm}(\mathbb{W}_N^{\pm})^* = NI_N$ *a tedy* $(\mathbb{W}_N^{\pm})^{-1} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}$ *a* $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{W}_N^{\pm}$ *je unitární matice.*

*Důkaz.* Označme $A := [a_{r,s}] = \mathbb{W}_N^{\pm}\mathbb{W}_N^{\mp}$, pak

$$a_{r,s} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{rn} W_N^{-ns} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(r-s)} = \sum_{n=0}^{N-1} q^n, \ \ q = W_N^{r-s}.$$

Odtud

$$a_{r,s} = \begin{cases} N & \text{pro} \quad r = s \\ \frac{q^N-1}{q-1} = 0 & \text{pro} \quad r \ne s \end{cases},$$

neboť $q^N = W_N^{N(r-s)} = 1$ a $q \ne 1$ pro $r \ne s$ v důsledku $0 < |r-s| \le N-1$. □

*<u>Poznámka</u>* C.7. V systému MATLAB jsou operátory $\mathrm{DFT}_N^{\pm}$ realizovány pomocí algoritmu tzv. **rychlé Fourierovy transformace** implementovaných v procedurách `fft` a `ifft` takto:

$$\underline{\boldsymbol{X}} = \mathbb{W}_N^- \boldsymbol{x} = \mathrm{DFT}_N^-(\boldsymbol{x}) = \underline{\mathtt{fft}(\boldsymbol{x})}$$

a

$$\underline{\boldsymbol{x}} = (\mathbb{W}_N^-)^{-1}\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^+\boldsymbol{X} = \frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N^+(\boldsymbol{X}) = \underline{\mathtt{ifft}(\boldsymbol{X})}.$$

**Důsledek C.8.** *Podle (C.10), věty C.6 a poznámky C.7 platí*

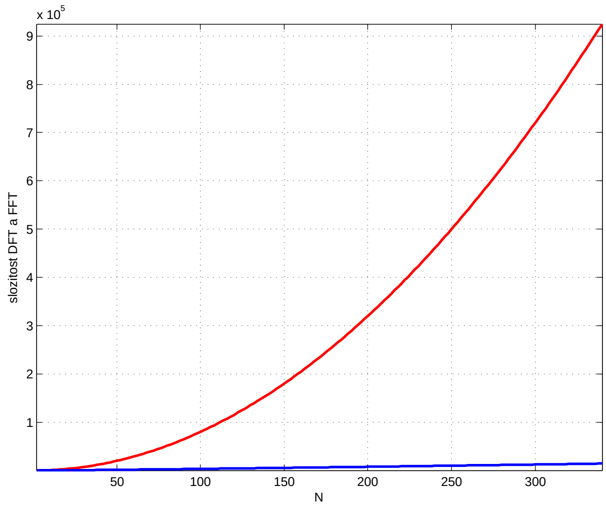
$$\underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{W}_N^+\widehat{\boldsymbol{c}} = \mathrm{DFT}_N^+(\widehat{\boldsymbol{c}}) = \underline{N\mathtt{ifft}(\widehat{\boldsymbol{c}})},$$

$$\underline{\widehat{\boldsymbol{c}}} = (\mathbb{W}_N^+)^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^-\boldsymbol{x} = \underline{\frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N^-(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\mathtt{fft}(\boldsymbol{x})}.$$

*Poznámka* C.9. Zatímco výpočetní složitost DFT je kvadratická, řádově $N^2$, složitost FFT pro posloupnosti, kde délka $N$ je mocninou dvou, je řádově $N \log_2 N$. Tedy pro vyšší $N$ dochází k obrovské úspoře výpočetního výkonu.

Pro dokreslení uvádíme grafy složitostí na obr. C.3. Vycházíme z toho, že pro komplexní signál $\boldsymbol{x}$ lze jeho DFT dle (C.11) vypočítat pomocí $8N^2$ operací (reálných součinů a součtů). FFT signálu vyžaduje $\alpha N \log_2 N$ operací, přičemž velikost $\alpha$ záleží na konkrétní platformě a implementaci; zde pracujeme s $\alpha = 6$.

Způsob, jak urychlit výpočet, objevil již C. F. Gauss na začátku 19. století (!) a vychází z faktu, že určité operace se v DFT provádějí několikrát, a tato redundance roste s $N$.




**Obrázek C.3**: Srovnání růstu složitosti DFT (červeně) a FFT (modře) pro rostoucí délku signálu, $N$. Evidentně FFT je výrazně efektivnější. Např. již pro $N = 256$ je úspora přibližně padesátinásobná.

## C.1.3 Diskrétní Fourierova transformace posloupností

Operátor diskrétní Fourierovy transformace lze zavést i pro posloupnosti z $\ell^1$ a $\ell^2$ analogicky jako v případě integrální Fourierovy transformace funkcí z $L^1$ a $L^2$ (viz definice 2.84 a 2.87). Příslušný integrál stačí aproximovat sumačním vztahem:

$$(\mathcal{F}_1^{\pm} x)(\gamma) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N\Delta t}^{N\Delta t} x(t) e^{\pm i2\pi\gamma t}\, dt \approx \lim_{N\to\infty} \Delta t \sum_{n=-N}^{N} x(n\Delta t) e^{\pm i2\pi\gamma n\Delta t} =$$

$$\Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) e^{\pm i2\pi\gamma n\Delta t}.$$

Pro jednotkový diskretizační krok $\Delta t = 1$ tento vztah vede k níže uvedeným definicím *diskrétní Fourierovy transformace* posloupnosti $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $x_n := x(n\Delta t)$.

**Definice C.10 (Diskrétní Fourierova transformace (DFT) v $\ell^1$).**
Definujeme pro $x \in \ell^1$, $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$:

$$(\mathcal{F}_1^{\pm} x)(\gamma) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{\pm i2\pi\gamma n}$$

Tato suma konverguje absolutně a stejnoměrně, neboť $|x_n e^{\pm i2\pi\gamma n}| = |x_n| \in \ell^1$ a zřejmě platí $(\mathcal{F}_1^{\pm}x)(\gamma) = (\mathcal{F}_1^{\mp}x)(-\gamma)$, $(\mathcal{F}_1^{\pm}x)(0) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x_n$.

**Věta C.11.**
*Pro každé $x \in \ell^1$ je $\mathcal{F}_1^{\pm}x \in \widetilde{L}^{\infty}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ stejnoměrně spojitá 1-periodická funkce a platí $\|\mathcal{F}_1^{\pm}x\|_\infty \leq \|x\|_1$.*

*Důkaz.* Pro každé $\gamma$ je
$|(\mathcal{F}_1^{\pm}x)(\gamma)| \leq \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |x_n e^{\pm i2\pi\gamma n}| = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1$, takže $\sup\limits_{\gamma} |(\mathcal{F}_1^{\pm}x)(\gamma)| \leq \|x\|_1$.
Přitom $(\mathcal{F}_1^{\pm}x)(\gamma)$ je 1-periodická a spojitá, neboť je součtem stejnoměrně konvergentní řady spojitých 1-periodických funkcí $x_n e^{\pm i2\pi\gamma n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Pak dle Cantor-Heineho věty je $(\mathcal{F}_1^{\pm}x)(\gamma)$ stejnoměrně spojitá na uzavřeném intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a tedy všude, protože je 1-periodická. □

**Definice C.12 (Diskrétní Fourierova transformace (DFT) v $\ell^2$).**
Definujeme pro $x \in \ell^2$, $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$:

$$(\mathcal{F}^{\pm}x)(\gamma) := (\mathcal{F}_2^{\pm}x)(\gamma) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} x_n e^{\pm i2\pi\gamma n} \text{ v } L^2\text{-konvergenci:}$$
$$\|\mathcal{F}^{\pm}x - \sum_{n=-N}^{N} x_n e^{\pm i2\pi\gamma n}\|_2 \to 0 \text{ pro } N \to \infty. \tag{C.12}$$

Značíme $\widehat{x} := \mathcal{F}x := \mathcal{F}^{-}x$ a $\check{x} := \mathcal{F}^{+}x$. Zřejmě opět platí $(\mathcal{F}^{\pm}x)(\gamma) = (\mathcal{F}^{\mp}x)(-\gamma)$. Existence je garantována následující větou.

**Věta C.13 (Věta o inverzi pro DFT $\mathcal{F}_1$ a $\mathcal{F}_2$).**
*$\mathcal{F}_2^{\pm} : \ell^2 \to \widetilde{L}^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ je TLI zachovávající $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a tedy i $\|\cdot\|_2$, tj. unitární izomorfismus $\ell^2$ na $\widetilde{L}^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (viz odst. 3.5), přičemž $(\mathcal{F}_2^{\pm})^{-1}(\widehat{x}) = \{c_{\pm n}(\widehat{x})\}_{n=-\infty}^{\infty}$, kde*
*$x_n = c_{\pm n}(\widehat{x}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{x}(\gamma) e^{\mp i2\pi n\gamma}\, d\gamma$ je $(\pm n)$-tý Fourierův koeficient 1-periodické funkce $\widehat{x}$.*

*Přitom pro $x \in \ell^1 \overset{2.80(c)}{\subseteq} \ell^2$ je $\mathcal{F}_1^{\pm}(x) = \mathcal{F}_2^{\pm}(x)$, takže na $\ell^2$ operátory $\mathcal{F}_1^{\pm}$ a $\mathcal{F}_2^{\pm}$ splývají ($\mathcal{F}_1^{\pm} = \mathcal{F}_2^{\pm}|_{\ell^1} = \mathcal{F}^{\pm}|_{\ell^1}$) a zejména $x = (\mathcal{F}_2^{\pm})^{-1}\mathcal{F}_1^{\pm}x$ pro každé $x \in \ell^1$.*

*Důkaz.* Posloupnost $E = \{e_n(\gamma)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $e_n(\gamma) = e^{i2\pi n\gamma}$ je úplný ortonormální systém v $\widetilde{L}^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (viz odst. C.1 pro $T = 1$) a tedy ortonormální báze dle věty 6.23, kde rekonstrukční operátor $T_E x := \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x_n e_n = \widehat{x}$ ($L^2$-konvergence částečných součtů) je unitární $\ell^2$ na $\widetilde{L}^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (viz též RFV 6.21) a $x_n = \langle \widehat{x}, e_n\rangle = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{x}(\gamma)\overline{e_n(\gamma)}\, d\gamma = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{x}(\gamma) e^{-2\pi n\gamma}\, d\gamma$. Tvrzení je tak dokázáno pro $\mathcal{F}_2^{+}$ a pro $\mathcal{F}_2^{-}$ platí po záměně $\gamma$ za $-\gamma$.

Pro každé $x \in \ell^1 \subseteq \ell^2$ je dle C.11 $\mathcal{F}_1^{\pm}x \in \widetilde{L}^{\infty}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \overset{2.80(a)}{\subseteq} \widetilde{L}^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, přičemž stejnoměrná konvergence částečných součtů řady $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{\pm i2\pi\gamma n}$ je ekvivalentní s $L^{\infty}$-konvergencí v prostoru $\widetilde{L}^{\infty}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (viz 2.74), která implikuje $L^2$-konvergenci v $\widetilde{L}^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ užitím nerovnosti norem z věty B.16 pro $p = 2$, $q = \infty$ a $\mathcal{I} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$: $\|\cdot\|_2 \leq \mu(\mathcal{I})^{\frac{1}{2}}\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_\infty$. Tedy $\mathcal{F}_1^{\pm}x = \mathcal{F}_2^{\pm}x$. □

# C.2 Konvoluční operátory

Konvoluční operátory jsou speciálním případem operátorů Fredholmova typu z odst. B.3, jejichž jádro je tvaru $B(t,u) = h(t-u)$, resp. $B(t,u) = h(t+u)$. Tedy zejména je jádro $B$ neměnné v čase. Takové operátory hrají důležitou roli v teorii signálů, neboť realizují lineární filtry[1] s **impulzní odezvou** $h$. Její fourierovské spektrum se nazývá **frekvenční charakteristikou** (obecněji též **přenosovou funkcí** nebo **systémovou funkcí**) lineárního filtru.[2]

## C.2.1 Integrální konvoluční operátory

Nejprve se budeme zabývat integrálními operátory mezi prostory funkcí z $L^p$ (neperiodický případ), nebo $T$-periodickými funkcemi z prostorů $\widetilde{L}^p[a, a+T]$, $1 \leq p \leq \infty$ (definice 2.105), kde $T > 0$ a na volbě počátku periody $a \in \mathbb{R}$ nezáleží (ani při integraci přes tento interval — viz C.14). Proto bez újmy na obecnosti nadále většinou předpokládáme $a = 0$ nebo $a = -\frac{T}{2}$ a píšeme stručně $\widetilde{L}^p_T := \widetilde{L}^p[a, a+T]$.

Poznamenejme, že na těchto prostorech jsou operátory z tabulky 3.1 dle 3.76 lineárními izometriemi (unitární pro $p = q = 2$) a proto v dalším textu bude již bez bližšího vysvětlení užívána stejná konvence pro jejich symbolické označení.

**Lemma C.14.** *Nechť $b \in \mathbb{R}$ je libovolné, pak*

*(1) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-b)\,dt$ pro každé $x \in L^1$ a analogicky $\int_0^T x(t)\,dt = \int_0^T x(t-b)\,dt$ pro každé $x \in \widetilde{L}^1_T$.*

*(2) V obou případech platí shodně: $\|x\|_1^{\frac{1}{p}} = \|x^{\frac{1}{p}}\|_p = \|\tau_b x^{\frac{1}{p}}\|_p = \|\tau_b x\|_1^{\frac{1}{p}}$ pro $1 \leq p \leq \infty$.*

*Důkaz.*
(1) V integrálu provedeme substituci $u := t-b$, $du = dt$, takže dostaneme $\int_{-\infty}^{\infty} x(t-b)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,du$, resp. $\int_0^T x(t-b)\,dt = \int_{-b}^{T-b} x(u)\,du =: I$, kde vzhledem k $T$-periodicitě $x$ můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $0 \leq b < T$. Pak $0 \in [-b, T-b]$, $\int_{-b}^{0} x(u)\,du = \int_{T-b}^{T} x(u)\,du$ v důsledku $x(u) = x(u+T)$, takže $I = \int_{-b}^{0} x(u)\,du + \int_0^{T-b} x(u)\,du = \int_0^{T-b} x(u)\,du + \int_{T-b}^{T} x(u)\,du$ $= \int_0^T x(u)\,du$.
(2) Pro $p = \infty$ tvrzení platí, neboť všechny členy nabývají hodnoty 1. Pro $p < \infty$ dostáváme: $\|x\|_1^{\frac{1}{p}} = (\int |x|\,dt)^{\frac{1}{p}} = (\int (|x|^{\frac{1}{p}})^p\,dt)^{\frac{1}{p}} = (\int (|x^{\frac{1}{p}}|)^p\,dt)^{\frac{1}{p}} = \|x^{\frac{1}{p}}\|_p$ a další rovnosti podobně pro $\tau_b x$ s uvážením (1). □

**Definice C.15 (Integrální konvoluce a korelace).**
Jestliže níže uvedené integrály existují a jsou konečné pro s.v. $t \in \mathbb{R}$, pak

(1) pro $h \in \widetilde{L}^q_T$ a $x \in \widetilde{L}^p_T$ $T$-periodickou funkci $y(t)$ definovanou po řadě vztahy ($a \in \mathbb{R}$)

$$y(t) := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T} h(t-u)x(u)\,du \overset{3}{=} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(u)x(t-u)\,du = \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} h(u)x(t-u)\,du \quad \text{(C.13a)}$$

[1] Každý takový filtr odpovídá tzv. LTI-systému (z angl. LTI=Linear Time Invariant).

[2] Je omezením Laplaceovy transformace na přímku v $s$-rovině, $s = i\gamma$, resp. v diskrétním případě omezením z-transformace na jednotkovou kružnici, $|z| = 1$

nazýváme **periodickou konvolucí** funkcí $h$ a $x$, a zkráceně píšeme $y = h \circledast x$;

$$y(t) := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T}\overline{h(u-t)}x(u)\,du \overset{3}{=} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{h(u)}x(t+u)\,du = \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} \overline{h(u)}x(t+u)\,du \qquad \text{(C.13b)}$$

nazýváme **periodickou korelací** funkcí $h$ a $x$, a zkráceně píšeme $y = h \otimes x$.

(2) pro $h \in L^q$ a $x \in L^p$ funkci $y(t)$ definovanou po řadě vztahy

$$y(t) := \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)x(u)\,du \overset{3}{=} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)\,du \qquad \text{(C.14a)}$$

nazýváme **(neperiodickou) konvolucí** funkcí $h$ a $x$, a zkráceně píšeme $y = h * x$;

$$y(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(u-t)}x(u)\,du \overset{3}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(u)}x(t+u)\,du \qquad \text{(C.14b)}$$

nazýváme **(neperiodickou) korelací** funkcí $h$ a $x$, a zkráceně píšeme $y = h \times x$.

Pokud $h = x$, pak odpovídající $y$ nazýváme (periodickou/neperiodickou) **autokonvolucí**, resp. **autokorelací** funkce $x$.
Pro pevné $h$ operátor $\widetilde{T}_h := \widetilde{T}_h^- : x \mapsto h \circledast x$, resp. $T_h := T_h^- := x \mapsto h * x$ je operátorem Fredholmova typu s jádrem $H(t,u) = \frac{1}{T}h(t-u)$, resp. $H(t,u) = h(t-u)$ nazývaný (periodickým, resp. neperiodickým) **konvolučním operátorem** stejně jako operátor $\widetilde{T}_h^+ : x \mapsto h \otimes x$, resp. $T_h^+ := x \mapsto h \times x$ s jádrem $H(t,u) = \frac{1}{T}\overline{h(u-t)} = \frac{1}{T}\widetilde{h}(t-u)$, resp. $H(t,u) = \overline{h(u-t)} = \widetilde{h}(t-u)$, nazývaný (periodickým, resp. neperiodickým) **korelačním operátorem**, kde $\widetilde{h}(t) := \overline{h(-t)} = \overline{Rh}(t) = R\overline{h}(t)$ značí operátor involuce jako v tabulce 3.1.

**Věta C.16 (Základní vlastnosti konvoluce).**
*Nechť $h, g \in \widetilde{L}_T^q$, $x, y \in \widetilde{L}_T^p$ pro periodický případ, resp. $h, g \in L^q$, $x, y \in L^p$ pro neperiodický případ a nechť $b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ jsou libovolné konstanty. Pak platí následující identity, kde z existence výrazu na jedné straně plyne existence výrazu i na druhé straně:*

1° *Linearita:* $\alpha h \circledast x = \alpha(h \circledast x)$, $h \circledast \alpha x = \alpha(h \circledast x)$;
$\alpha h * x = \alpha(h * x)$, $h * \alpha x = \alpha(h * x)$ — *Bilinearita,*

2° *Distributivita:* $(h+g) \circledast x = h \circledast x + g \circledast x$, $h \circledast (x+y) = h \circledast x + h \circledast y$; — *linearita* $\widetilde{T}_h, T_h$
$(h+g) * x = h * x + g * x$, $h * (x+y) = h * x + h * y$

3° *Komutativita:* $x \circledast h = h \circledast x$;
$x * h = h * x$

4° *Asociativita:* $h \circledast (g \circledast y) = (h \circledast g) \circledast y$ *a* $T_h T_g = T_{h \circledast g}$;
$h * (g * y) = (h * g) * y$ *a* $T_h T_g = T_{h * g}$

5° *Nezávislost na posunutí:* $\tau_b h \circledast x = \tau_b(h \circledast x) = h \circledast \tau_b x$ *a* $\tau_b \widetilde{T}_h = \widetilde{T}_h \tau_b$;
$\tau_b h * x = \tau_b(h * x) = h * \tau_b x$ *a* $\tau_b T_h = T_h \tau_b$,
*takže* $\widetilde{T}_h$ *i* $T_h$ *jsou při skládání zaměnitelné s* $\tau_b$

6° *Zachování unitárních operátorů reflexe, konjugace a involuce:*
$R(h \circledast x) = Rh \circledast Rx$, $\overline{h \circledast x} = \overline{h} \circledast \overline{x}$, $\widetilde{h \circledast x} = \widetilde{h} \circledast \widetilde{x}$;
$R(h * x) = Rh * Rx$, $\overline{h * x} = \overline{h} * \overline{x}$, $\widetilde{h * x} = \widetilde{h} * \widetilde{x}$

[3] Rovnost platí po substituci $t - u \rightsquigarrow u$, resp. $u - t \rightsquigarrow u$ — viz též C.16[3°] a C.17[0°].

*Důkaz.* (Detailně jako cvičení)

- *Bilinearita* je důsledkem bilinearity integrálních vztahů (C.13a) a (C.14a).
- *Komutativita:* v příslušných integrálech užitím substituce $\tau := t - u$, $du = -d\tau$.
- *Asociativita*: v příslušných integrálech užitím Fubiniho věty a komutativity, např. pro periodický případ: $h \circledast (g \circledast y) \overset{3^\circ}{=} h \circledast (y \circledast g) \overset{F.V.}{=} y \circledast (h \circledast g) \overset{3^\circ}{=} (h \circledast g) \circledast y$.
- *Nezávislost na posunutí:* rovnost vpravo je zřejmá a rovnost vlevo je důsledek komutativity.
- *Zachování R, konjugace a involuce*: pro $R$ ověříme provedením substituce $\tau := -u$, $du = -d\tau$ v příslušných integrálech; pro konjugaci je zřejmé a involuce je jejich složením.

$\square$

**Důsledek C.17 (Základní vlastnosti korelace).**
*Za předpokladů předchozí věty platí následující identity, kde z existence výrazu na jedné straně plyne existence výrazu i na druhé straně:*

0° *Vztah mezi konvolucí a korelací:* $h \otimes x = \widetilde{h} \circledast x$ a $\widetilde{T}_h^+ = \widetilde{T}_{\widetilde{h}}$;
$h \times x = \widetilde{h} * x$ a $T_h^+ = T_{\widetilde{h}}$

1° *Linearita:* $\alpha h \otimes x = \overline{\alpha}(h \otimes x)$, $h \otimes \alpha x = \alpha(h \otimes x)$;
$\alpha h \times x = \overline{\alpha}(h \times x)$, $h \times \alpha x = \alpha(h \times x)$

2° *Distributivita:* $(h+g) \otimes x = h \otimes x + g \otimes x$, $h \otimes (x+y) = h \otimes x + h \otimes y$;
$(h+g) \times x = h \times x + g \times x$, $h \times (x+y) = h \times x + h \times y$

(1°, 2°: *Bilinearita, linearita* $\widetilde{T}_h^+, T_h^+$)

3° *Komutativita:* $x \otimes h = \widetilde{h \otimes x}$;
$x \times h = \widetilde{h \times x}$

4° *Asociativita:* $h \otimes (g \otimes y) = (\widetilde{h} \otimes g) \otimes y$ a $\widetilde{T}_h^+ \widetilde{T}_g^+ = \widetilde{T}^+_{\widetilde{h} \otimes g}$;
$h \times (g \times y) = (\widetilde{h} \times g) \times y$ a $T_h^+ T_g^+ = T^+_{\widetilde{h} \times g}$

5° *Nezávislost na posunutí:* $\tau_{-b} h \otimes x = \tau_b(h \otimes x) = h \otimes \tau_b x$ a $\tau_b \widetilde{T}_h^+ = \widetilde{T}_h^+ \tau_b$;
$\tau_{-b} h \times x = \tau_b(h \times x) = h \times \tau_b x$ a $\tau_b T_h^+ = T_h^+ \tau_b$,
*takže* $\widetilde{T}_h$ *i* $T_h$ *jsou při skládání zaměnitelné s* $\tau_b$

6° *Zachování unitárních operátorů reflexe, konjugace a involuce:*
$R(h \otimes x) = \overline{x} \otimes \overline{h}$, $\overline{h \otimes x} = \overline{h} \otimes \overline{x}$, $\widetilde{h \otimes x} \overset{3^\circ}{=} x \otimes h$;
$R(h \otimes x) = \overline{x} \otimes \overline{h}$, $\overline{h \otimes x} = \overline{h} \otimes \overline{x}$, $\widetilde{h \otimes x} \overset{3^\circ}{=} x \otimes h$

*Důkaz.* (Detailně jako cvičení)
0° plyne po substituci $\tau := -u$, $du = -d\tau$ v integrálech (C.13b) a (C.14b).
Platnost identit 1°–6° snadno ověříme jejich převedením na odpovídající identity pro konvoluci pomocí transformačního vztahu 0° a s případným využitím vlastností operátoru involuce (sdružená linearita, idempotence aj.) – viz tabulku 3.1 a větu 3.80.

$\square$

**Věta C.18 (Ohraničenost konvolučního a korelačního operátoru).**
*Pro libovolné* $1 \le p \le \infty$ *platí:*

(1) *Jestliže* $h \in \widetilde{L}^1_T$, *pak* $h \circledast x \in \widetilde{L}^p_T$ *pro každé* $x \in \widetilde{L}^p_T$ *a platí*
$\|h \circledast x\|_p, \|h \otimes x\|_p \le \frac{1}{T}\|h\|_1 \|x\|_p$. *V takovém případě* $\widetilde{T}_h, \widetilde{T}_h^+ \in \mathcal{B}(\widetilde{L}^p_T, \widetilde{L}^p_T)$.

(2) *Jestliže* $h \in L^1$, *pak* $h * x \in L^p$ *pro každé* $x \in L^p$ *a platí*
$\|h * x\|_p, \|h \times x\|_p \le \|h\|_1 \|x\|_p$. *V takovém případě* $T_h, T_h^+ \in \mathcal{B}(L^p, L^p)$.

*Důkaz.* Položíme pro
(1) periodický případ: $\mathcal{I} := [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, $\mathfrak{L}^p := \widetilde{L}^p_T$ pro $1 \le p \le \infty$ a $y := T(h \circledast x)$.
(2) neperiodický případ: $\mathcal{I} := (-\infty, \infty)$, $\mathfrak{L}^p := L^p$ pro $1 \le p \le \infty$ a $y := h * x$.

Vzhledem k C.17[0°] je jádrem korelačního operátoru funkce $\widetilde{h}$, která je absolutně integrovatelná na $\mathcal{I}$ stejně jako $h$. Stačí proto tvrzení dokázat jen pro konvoluční operátor.

Nechť $q$ je duální index k $p$ splňující $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$. Pak $y(t)=\int_{\mathcal{I}} h(u)x(t-u)\,du=\int_{\mathcal{I}} h(u)^{\frac{1}{q}}h(u)^{\frac{1}{p}}x(t-u)\,du=\int_{\mathcal{I}} B(t,u)h(u)^{\frac{1}{q}}\,du$, kde jsme položili $B(t,u):=h(u)^{\frac{1}{p}}x(t-u)$. Pro pevně zvolené $h$ a $x$ lze tedy v souladu s definicí B.17 psát $y=T_B(h(u)^{\frac{1}{q}})$, kde $h(u)^{\frac{1}{q}}\in\mathfrak{L}^q$ podle C.14(2) i pro $p=\infty$, kdy $q=1$. Ukážeme, že $B\in\mathfrak{L}^p(\mathcal{I}\times\mathcal{I})$:

a) $\underline{p=\infty}$: $B(t,u)=x(t-u)$ a $\|B\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{t,u\in\mathcal{I}}|x(t-u)|=\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{I}}|x(\tau)|=\|x\|_\infty<\infty$.

b) $\underline{p<\infty}$: $B(t,u)=h(u)^{\frac{1}{p}}x(t-u)\Rightarrow\iint_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}|B(t,u)|^p\,dt\,du=\iint_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}|h(u)||x(t-u)|^p\,dt\,du\overset{F.V}{=}\int_{\mathcal{I}}|h(u)|(\int_{\mathcal{I}}|x(t-u)|^p\,dt)\,du\overset{C.14(1)}{=}(\int_{\mathcal{I}}|h(u)|\,du)(\int_{\mathcal{I}}|x(t)|^p\,dt)=\|h\|_1\|x\|_p^p<\infty$.

Tedy celkem $\|B\|_p=\|h\|_1^{\frac{1}{p}}\|x\|_p$ a $T_B$ je tak operátorem Fredholmova typu, $T_B:\mathfrak{L}^q\to\mathfrak{L}^p$ a podle B.18 dostáváme pro $y=T_B(h^{\frac{1}{q}})$:
$\|y\|_p\le\|h^{\frac{1}{q}}\|_q\|h\|_1^{\frac{1}{p}}\|x\|_p\overset{C.14(2)}{=}\|h\|_1^{\frac{1}{q}}\|h\|_1^{\frac{1}{p}}\|x\|_p=\|h\|_1\|x\|_p$ a tvrzení pro periodický i neperiodický případ je tak dokázáno. □

**Důsledek C.19.**
*Pro každé $x\in\widetilde{L}_T^p$ a $h\in\widetilde{L}_T^q$, $1\le p,q\le\infty$ libovolná, je $(h\circledast x),(h\otimes x)\in\widetilde{L}_T^p$ a také $h,x,(h\circledast x),(h\otimes x)\in\widetilde{L}_T^1$. Přitom platí nerovnosti:*

$\|h\circledast x\|_p,\|h\otimes x\|_p\le T^{-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p=\frac{1}{\sqrt[q]{T}}\|h\|_q\|x\|_p$, *speciálně:*

$\|h\circledast x\|_1,\|h\otimes x\|_1\le\frac{1}{T}\|h\|_1\|x\|_1$ *pro* $p=q=1$ *a*

$\|h\circledast x\|_2,\|h\otimes x\|_2\le\frac{1}{\sqrt{T}}\|h\|_2\|x\|_2$ *pro* $p=q=2$*;*

$\|h\circledast x\|_1,\|h\otimes x\|_1\le T^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p$, *speciálně:*

$\|h\circledast x\|_1,\|h\otimes x\|_1\le\|h\|_q\|x\|_p$ *pro duální indexy* $p,q$: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *a*

$\|h\circledast x\|_1,\|h\otimes x\|_1\le\|h\|_2\|x\|_2$ *pro* $p=q=2$*.*

*Důkaz.*
Podle 2.80(a) máme $h,x,(h\circledast x),(h\otimes x)\in\widetilde{L}_T^1$, neboť $\widetilde{L}_T^p,\widetilde{L}_T^q\subseteq\widetilde{L}_T^1$ a $\mu([0,T])=T<\infty$. Pak užitím B.16 nerovnost $T^{\frac{1-q}{q}}\|h\|_1\le\|h\|_q\Rightarrow\|h\|_1\le T^{\frac{q-1}{q}}\|h\|_q=T^{1-\frac{1}{q}}\|h\|_q\overset{C.18(1)}{\Rightarrow}$
$\|h\circledast x\|_p\le\frac{1}{T}T^{1-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p=T^{-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p$.
Analogicky lze navíc zdola omezit i levou stranu $\|h\circledast x\|_p$, takže celkem dostáváme
$\|h\circledast x\|_1\le T^{1-\frac{1}{p}}\|h\circledast x\|_p\le T^{1-\frac{1}{p}}T^{-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p=T^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p$.
Stejné nerovnosti platí i pro $\|h\otimes x\|_p\overset{[0^\circ]}{=}\|\widetilde{h}\circledast x\|_p$, neboť $\|h\|_q=\|\widetilde{h}\|_q$. □

**Věta C.20 (Věta o konvoluci a korelaci v $\widetilde{L}^1$ a $L^1$).**

*(1) Jestliže $h,x\in\widetilde{L}_T^1$, potom $(h\circledast x),(h\otimes x)\in\widetilde{L}_T^1$ a pro každé $k\in\mathbb{Z}$ platí*

$$\boxed{c_k(h\circledast x)=c_k(h)\cdot c_k(x)}\ a\ \boxed{c_k(h\otimes x)=\overline{c_k(h)}\cdot c_k(x)},$$

*kde $c_k(\#)$ značí $k$-tý Fourierův koeficient příslušné funkce — viz 2.81 a* (C.1)*.*

*(2) Jestliže $h,x\in L^1$, potom $(h*x),(h\times x)\in L^1$ a platí*

$$\boxed{\mathcal{F}_1(h*x)=\mathcal{F}_1(h)\cdot\mathcal{F}_1(x)}\ a\ \boxed{\mathcal{F}_1(h\times x)=\overline{\mathcal{F}_1(h)}\cdot\mathcal{F}_1(x)},$$

*kde $\mathcal{F}_1$ značí operátor Fourierovy transformace na $L^1$ dle definice 2.84.*

*Důkaz.* Dokážeme tvrzení nejprve pro periodickou konvoluci (1), kdy $h \circledast x \in \widetilde{L}^1_T$ dle C.19:

$$c_k(h \circledast x) = \frac{1}{T}\int_0^T \Big(\frac{1}{T}\int_0^T h(u)x(t-u)\,du\Big)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}\,dt =$$
$$\frac{1}{T^2}\int_0^T \Big(\int_0^T x(t-u)e^{-i\frac{2\pi kt}{T}}\,dt\Big)h(u)\,du \overset{\tau:=t-u}{\underset{d\tau=dt}{=}} \frac{1}{T^2}\int_0^T \Big(\int_{-u}^{T-u} x(\tau)e^{-i\frac{2\pi k(u+\tau)}{T}}\,d\tau\Big)h(u)\,du =$$
$$\frac{1}{T^2}\int_0^T \Big(\int_0^T x(\tau)e^{-i\frac{2\pi k\tau}{T}}\,d\tau\Big)h(u)e^{-i\frac{2\pi ku}{T}}\,du = \Big(\frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)e^{-i\frac{2\pi k\tau}{T}}\,d\tau\Big)\Big(\frac{1}{T}\int_0^T h(u)e^{-i\frac{2\pi ku}{T}}\,du\Big).$$

Výše jsme mohli použít Fubiniho větu vzhledem k tomu, že všechny funkce v integrálech jsou absolutně integrovatelné.
V neperiodickém případě (2) stačí zaměnit integrační obor $[0,T]$ za $(-\infty,\infty)$.
Tvrzení pro korelaci je důsledkem 0° v C.17, kdy $c_k(\widetilde{h}) = \overline{c_k(h)}$ a $\mathcal{F}(\widetilde{h}) = \overline{\mathcal{F}(h)}$ dle tabulky 3.1. □

**Důsledek C.21 (Věta o konvoluci a korelaci v $L^2$).**
*Jestliže $h \in L^1, x \in L^2$, potom $(h * x), (h \times x) \in L^2$ a platí*

$$\boxed{\mathcal{F}_2(h * x) = \mathcal{F}_1(h)\cdot\mathcal{F}_2(x)} \ \text{a}\ \boxed{\mathcal{F}_2(h \times x) = \overline{\mathcal{F}_1(h)}\cdot\mathcal{F}_2(x)},$$

*kde $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ značí operátory Fourierovy transformace po řadě na $L^1, L^2$ dle definic 2.84 a 2.87.*

*Důkaz.* Opět stačí tvrzení dokázat jen pro konvoluci.
Podle 2.89 existuje pro $x \in L^2$ posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in L^1 \cap L^2$: $x_n \xrightarrow{2} x$, $\mathcal{F}_1(x_n) \xrightarrow{2} \mathcal{F}_2(x)$ pro $n \to \infty$. Pak také $h * x_n \in L^1 \cap L^2$ dle C.18(2) pro $p = 1, 2$ a dostáváme
$\mathcal{F}_2(h * x_n) \overset{2.90}{=} \mathcal{F}_1(h * x_n) \overset{C.20(2)}{=} \mathcal{F}_1(h)\cdot\mathcal{F}_1(x_n)$, kde $\mathcal{F}_1(h) \in L^\infty$ dle 2.85.
Odtud $\|\mathcal{F}_1(h)\cdot\mathcal{F}_2(x) - \mathcal{F}_1(h)\cdot\mathcal{F}_1(x_n)\|_2 \le \|\mathcal{F}_1(h)\|_\infty\|\mathcal{F}_2(x) - \mathcal{F}_1(x_n)\|_2 \to 0$ pro $n \to \infty \Rightarrow$ $\mathcal{F}_1(h)\cdot\mathcal{F}_1(x_n) \xrightarrow{2} \mathcal{F}_1(h)\cdot\mathcal{F}_2(x)$ pro $n \to \infty$. Současně také $\mathcal{F}_2(h * x_n) = \mathcal{F}_2 T_h(x_n) \xrightarrow{2} \mathcal{F}_2 T_h(x) = \mathcal{F}_2(h * x)$, neboť $T_h$ i $\mathcal{F}_2$ jsou spojité operátory na $L^2$. Celkem tak $\mathcal{F}_2(h * x) = \mathcal{F}_1(h)\cdot\mathcal{F}_2(x)$. □

Poznámka C.22 (Lineární filtr).

(1) Vztahy pro korelaci (C.13b) a (C.14b) představují operace integrálního váženého klouzavého průměru neboli *lineárního filtru*, kdy $y(t)$ představuje pro každé $t \in \mathbb{R}$ vážený průměr hodnot $x(t+u)$ z okolí bodu $t$, kde $x(t)$ je zpravidla analogový signál s konečnou energií, tj. z $L^2$ nebo z $\widetilde{L}^2_T$. Váhová funkce $h$ se nazývá *impulzní odezvou filtru* a $H := \mathcal{F}_1(h)$ jeho *frekvenční (přenosovou) charakteristikou*. Frekvenční charakteristika dle C.20 nebo C.21 udává, jak filtr modifikuje jednotlivé sinusové komponenty ve spektru $\mathcal{F}_i(x)$ signálu $x$ $(i \in \{1,2\})$.
Frekvenční charakteristika *vyhlazovacích filtrů* vysokofrekvenční (šumové) složky potlačuje, takže $|H(\gamma)| < 1$ a $|H(\gamma)| \to 0$ pro $|\gamma| \to \infty$.
Vzhledem k C.17[0°] lze filtraci samozřejmě realizovat i pomocí konvoluce, kde roli impulzní odezvy hraje zrcadlově otočená funkce $\widetilde{h}$.

(2) Pokud $x \in \widetilde{L}^1_T$, resp. $x \in L^1$, pak dle C.20 pro autokorelaci platí $c_k(x \otimes x) = |c_k(x)|^2$, resp. $\mathcal{F}_1(x \times x) = |\mathcal{F}_1(x)|^2$. Vidíme tak, že fourierovským spektrem periodické autokorelace je *diskrétní výkonová spektrální hustota* $\{|c_k(x)|^2\}_{k=-\infty}^{\infty}$, v případě neperiodické korelace pak *(kontinuální) výkonová spektrální hustota* $|\mathcal{F}_1(x)(\gamma)|^2$ pro $\gamma \in \mathbb{R}$.

**Příklad C.23** (Příklady fourierovských transformačních párů)**.**
Za příklady byly zvoleny některé symetrické funkce $f(t)$ vystupující často ve fyzikální spektroskopii v roli spektrálních čar (např. v Mössbauerově spektroskopii) a jejich konvoluce (integrální

distribuce spektrálních čar). Jak bývá v těchto oblastech zvykem, tak za základní šířkový parametr vezmeme šířku $\Gamma > 0$ spektrální čáry v polovině její výšky (FWHM=Full Width at Half-Maximum), kdy $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(0)$ pro $\Gamma = 1$, takže pro $f(\frac{t}{\Gamma})$ je FWHM=$\Gamma$.

(1) Obdélníkový puls rect $(t)$: Obdélníkový puls je funkce z $L^1 \cap L^2$ definovaná vztahem

$$\operatorname{rect}(t) := \begin{cases} 1 & \text{pro } |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{pro } |t| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pro } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}, \tag{C.15}$$

pro niž dostáváme fourierovské transformační páry

$$\boxed{\operatorname{rect}(t) \diamond \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma} =: \operatorname{sinc}(\gamma)} \text{ a } \boxed{\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\Gamma}\right) \diamond \Gamma \operatorname{sinc}(\Gamma\gamma) = \frac{\sin(\pi\Gamma\gamma)}{\pi\gamma}} \quad \text{v } L^2.$$

Funkce $\operatorname{sinc}(t) \in L^2 - L^1$ se nazývá *Dirichletovo jádro* a je vykreslená na obr. 2.3— viz též poznámku pod čarou u 2.80.

(2) Trojúhelníkový puls $\Delta(t)$: Trojúhelníkový puls je funkce z $L^1 \cap L^2$ definovaná autokonvolučním vztahem $\Delta(t) := (\operatorname{rect} * \operatorname{rect})(t) = 1_{[-1,1]}(t)(1-|t|)$, pro niž dostáváme fourierovské transformační páry

$$\boxed{\Delta(t) \diamond \operatorname{sinc}^2(\gamma) = \frac{\sin^2(\pi\gamma)}{\pi^2\gamma^2}} \text{ a } \boxed{\Delta\Big(\frac{t}{\Gamma}\Big) \diamond \Gamma \operatorname{sinc}^2(\Gamma\gamma) = \frac{\sin^2(\pi\Gamma\gamma)}{\Gamma\pi^2\gamma^2}} \quad \text{v } L^1 \text{ a } L^2,$$

kde $\operatorname{sinc}^2(\gamma) \in L^1 \cap L^2$ (cvičení).
Rekurzivní konvolucí obdélníkových pulzů lze generovat tzv. B-splajn funkce vyšších řádů. B-splajny jsou funkce s vynikajícími vlastnostmi, používané v řadě oborů.

(3) Lorentzova funkce $\ell(t)$: *Lorentzova funkce* je funkce z $L^1 \cap L^2$ definovaná vztahem $\ell(t) := \frac{1}{1+4t^2}$, pro niž dostáváme fourierovské transformační páry

$$\boxed{\ell(t) \diamond \frac{\pi}{2}e^{-\pi|\gamma|}} \text{ a } \boxed{\ell\Big(\frac{t}{\Gamma}\Big) \diamond \frac{\pi}{2}\Gamma e^{-\pi\Gamma|\gamma|}} \quad \text{v } L^1 \text{ a } L^2,$$

kde $e^{-\pi|\gamma|} \in L^1 \cap L^2$ (cvičení).

(3') Konvoluce Lorentzových funkcí: Konvolucí dvou Lorentzových funkcí je opět Lorentzova funkce, přičemž šířky se sečítají:

$$\boxed{\ell\Big(\frac{t}{\Gamma_1}\Big) * \ell\Big(\frac{t}{\Gamma_2}\Big) = \frac{\pi}{2}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma}\ell\Big(\frac{t}{\Gamma}\Big), \text{ kde } \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2}.$$

(4) Gaussova funkce $g(t)$: *Gaussova funkce* je funkce z $L^1 \cap L^2$ definovaná vztahem $g(t) := e^{-\eta t^2}$, $\eta := 4\ln 2$, pro niž dostáváme fourierovské transformační páry

$$\boxed{g(t) \diamond \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}g\Big(\frac{\pi}{\eta}\gamma\Big) = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}e^{-\frac{\pi^2\gamma^2}{\eta}}} \text{ a } \boxed{g\Big(\frac{t}{\Gamma}\Big) \diamond \Gamma\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}e^{-\frac{\pi^2\Gamma^2\gamma^2}{\eta}}} \quad \text{v } L^1 \text{ a } L^2,$$

Pro vhodně zvolené měřítko dostáváme dokonce

$$\boxed{e^{-\pi t^2} \diamond e^{-\pi\gamma^2}}$$

kde triviálně $e^{-\pi\gamma^2} \in L^1 \cap L^2$, neboť je pevným bodem (a jedním z vlastních vektorů) Fourierovy transformace, viz také Příklad 7.9. V důsledku toho také $g(t) \in L^1 \cap L^2$.

(4') Konvoluce Gaussových funkcí: Konvolucí dvou Gaussových funkcí je opět Gaussova funkce, přičemž šířky se sečítají podle Pythagorovy věty:

$$\boxed{g\Big(\frac{t}{\Gamma_1}\Big) * g\Big(\frac{t}{\Gamma_2}\Big) = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma}g\Big(\frac{t}{\Gamma}\Big), \text{ kde } \Gamma = \sqrt{\Gamma_1^2+\Gamma_2^2}.}$$

*Důkaz.* Všechny uvažované funkce $f$ jsou reálné a sudé ($f = \overline{f}$ a $f = Rf \Rightarrow f = \widetilde{f}$). Totéž pak platí i pro jejich Fourierovy transformace $\widehat{f}$ dle tabulky 3.1 (vlastnosti reflexe, konjugace a involuce) stejně jako pro konvoluce s uvážením C.16[6°]. Z tohoto důvodu stačí všechny vztahy dokazovat jen pro $t, \gamma \geq 0$.
Také stačí všude odvodit fourierovské transformační páry pouze pro funkce $f$ s jednotkovou šířkou, neboť pak užitím dilatačního operátoru z tabulky 3.1 dostáváme:

$$\underline{f \diamond \widehat{f}} \;\Leftrightarrow\; D_{\Gamma^{-1}}f \diamond D_\Gamma \widehat{f} \;\Leftrightarrow\; \Gamma^{-\frac{1}{2}}f\Big(\frac{t}{\Gamma}\Big) \diamond \Gamma^{\frac{1}{2}}\widehat{f}(\Gamma\gamma) \;\Leftrightarrow\; \underline{f\Big(\frac{t}{\Gamma}\Big) \diamond \Gamma\widehat{f}(\Gamma\gamma)}. \tag{C.16}$$

Fourierovu transformaci některých z funkcí lze triviálně odvodit pomocí věty C.20 a důsledku C.21.

(1) $(\mathcal{F}^-\mathrm{rect}\,)(\gamma) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{2\pi\gamma t}{T}}\,dt = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi\gamma t)\,dt = 2\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\cos(2\pi\gamma t)\,dt = 2\cdot\frac{1}{2\pi\gamma}\big[\sin(2\pi\gamma t)\big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma}$.

(2) Pro $0 \leq t$ dostáváme: $\Delta(t) = (\mathrm{rect}\, * \,\mathrm{rect}\,)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(u)\cdot 1_{[-\frac{1}{2}+t,\frac{1}{2}+t]}(u)\,du = 1_{[0,1]}(t)\int\limits_{-\frac{1}{2}+t}^{\frac{1}{2}} 1\,dt = 1_{[0,1]}(t)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t) = 1_{[0,1]}(t)(1-t) \Rightarrow \Delta(t) = 1_{[-1,1]}(t)(1-|t|)$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$, neboť $\Delta(t)$ je sudá funkce.

(3) Jelikož výpočet integrálu $\mathcal{F}^-(\ell)$ je obtížný, spočteme místo něj integrál zpětné transformace: $\mathcal{F}^+(\frac{\pi}{2}e^{-\pi|\gamma|})(t) = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi|\gamma|}e^{i2\pi\gamma t}\,d\gamma = \frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\pi\gamma}(e^{i2\pi\gamma t}+e^{-i2\pi\gamma t})\,d\gamma = \frac{\pi}{2}\big[\frac{e^{-\pi\gamma}e^{i2\pi\gamma t}}{-\pi(1-i2t)}\big]_0^\infty + \frac{\pi}{2}\big[\frac{e^{-\pi\gamma}e^{-i2\pi\gamma t}}{-\pi(1+i2t)}\big]_0^\infty = \frac{1}{2}\big[0-\frac{1}{-(1-i2t)}\big] + \frac{1}{2}\big[0-\frac{1}{-(1+i2t)}\big] = \frac{1}{2}\frac{1+2it+1-2it}{1+4t^2} = \frac{1}{1+4t^2} = \ell(t) \in L^2$ dle věty 2.88. Zřejmě také $\ell(t) \in L^1$ (cvičení), takže celkem $\ell \in L^1 \cap L^2$ a $\mathcal{F}^-(\ell)(\gamma) = \frac{\pi}{2}e^{-\pi|\gamma|}$ užitím kterékoli z vět o inverzi 2.86 i 2.88.

(3') Podle C.20(2) a C.21 je $\ell(\frac{t}{\Gamma_1}) * \ell(\frac{t}{\Gamma_2}) \in L^1\cap L^2$ a dostáváme transformační páry: $\ell(\frac{t}{\Gamma_1}) * \ell(\frac{t}{\Gamma_2}) \diamond \widehat{\ell(\frac{t}{\Gamma_1})}\cdot\widehat{\ell(\frac{t}{\Gamma_2})} = \frac{\pi}{2}\Gamma_1 e^{-\pi\Gamma_1|\gamma|}\cdot\frac{\pi}{2}\Gamma_2 e^{-\pi\Gamma_2|\gamma|} = \frac{\pi}{2}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma}\cdot\frac{\pi}{2}\Gamma e^{-\pi\Gamma|\gamma|} = \frac{\pi}{2}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma}\widehat{\ell(\frac{t}{\Gamma})} \in L^1\cap L^2 \Rightarrow \ell(\frac{t}{\Gamma_1}) * \ell(\frac{t}{\Gamma_2}) = \frac{\pi}{2}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma}\ell(t)$.

(4) Ukážeme nejprve, že $I := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt = 1$, tj. zejména $e^{-\pi t^2} \in L^1$ — dokonce $e^{-\pi t^2} \in L^p$ pro každé $1 \leq p \leq \infty$, neboť $|e^{-\pi t^2}|^p = e^{-p\pi t^2} \in L^1$. Odtud užitím Fubiniho věty $I^2 = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt\Big)\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2}\,du\Big) \overset{F.V.}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t^2+u^2)}\,dt\,du$. Při přechodu k polárním souřadnicím $t := \rho\cos\varphi, u := \rho\sin\varphi$ je příslušný Jakobián roven $\det J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial\rho} & \frac{\partial t}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial\rho} & \frac{\partial u}{\partial\varphi}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$, takže $I^2 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\pi\rho^2}\rho\,d\rho\,d\phi = 2\pi\int\limits_0^{\infty} e^{-\pi\rho^2}\rho\,d\rho \underset{du:=2\pi\rho d\rho}{\overset{u:=\pi\rho^2}{=}} \big[-e^{-u}\big]\ [0+e^0] = 1$. Položme pro každé $x \in \mathbb{R}$: $h(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}e^{-2\pi xt}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t^2+2xt)}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi[(t+x)^2-x^2]}\,dt =$

$e^{\pi x^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+x)^2}\, dt \overset{u:=t+x}{=} e^{\pi x^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2}\, du = e^{\pi x^2}$. Protože $e^{-\pi z^2}$ je analytická funkce na $\mathbb{C}$ splývající pro $z = x \in \mathbb{R}$ s $h(x)$, mají obě funkce i stejné jednoznačně určené analytické rozšíření na $\mathbb{C}$, tedy zejména i pro $z = i\gamma$: $(\mathcal{F}^- e^{-\pi t^2})(\gamma) = h(i\gamma) = e^{\pi(i\gamma)^2} = e^{-\pi\gamma^2}$ $\Rightarrow e^{-\pi t^2} \diamond e^{-\pi\gamma^2}$.

Přitom užitím dilatačního operátoru z tabulky 3.1 dostáváme $g(t) = e^{-\pi\left(\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}t\right)^2} = s^{-\frac{1}{2}} D_s(e^{-\pi t^2})$ s dilatačním parametrem $s = \sqrt{\frac{\eta}{\pi}}$ a $\widehat{g}(\gamma) = s^{-\frac{1}{2}} D_{s^{-1}} e^{-\pi\gamma^2} = s^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi(\gamma s^{-1})^2} = s^{-1} e^{-\pi\gamma^2 s^{-2}}$ $= \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} e^{-\pi\gamma^2\frac{\pi}{\eta}} = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} e^{-\eta\left(\gamma\frac{\pi}{\eta}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} g\left(\frac{\pi}{\eta}\gamma\right)$.

(4') se dokazuje analogicky jako (3') — cvičení.

□

Vzhledem k duálnímu charakteru času a frekvence lze očekávat, že výše uvedené věty o konvoluci a korelaci C.20, C.21 a C.22 budou platit také „naopak“, což vzhledem k unitaritě $\mathcal{F}_2$ je v C.20,C.21 a C.22 splněno automaticky. Následující věta formuluje obdobné tvrzení pro případ, ze obě konvolutované funkce $h$ a $x$ jsou z $L^2$.

**Věta C.24** (**„Obrácená“ věta o konvoluci a korelaci v $L^2$**).
*Jestliže $h, x \in L^2$, potom $\mathcal{F}_2^{\pm}(h) \cdot \mathcal{F}_2^{\pm}(x) \in L^1$ a existují*

$$\boxed{h * x = \mathcal{F}_1^{\mp}\left[\mathcal{F}_2^{\pm}(h) \cdot \mathcal{F}_2^{\pm}(x)\right] \in L^\infty} \quad a \quad \boxed{h \times x = \mathcal{F}_1^{\mp}\left[\mathcal{F}_2^{\pm}(h) \cdot \overline{\mathcal{F}_2^{\pm}(x)}\right] \in L^\infty.}$$

*Důkaz.* Omezíme se opět pouze na konvoluci. Platí

$$\begin{aligned}(h * x)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)\, ds = \langle x(\cdot), \overline{h(-(\cdot - t))}\rangle = \langle x(\cdot), \tau_t \widetilde{h}\rangle \overset{3.78}{=} \langle \mathcal{F}_2^{\pm}(x), \mathcal{F}_2^{\pm}(\tau_t \widetilde{h})\rangle \\ &\overset{3.1}{=} \langle \mathcal{F}_2^{\pm}(x), e_{\pm t}\mathcal{F}_2^{\pm}(\widetilde{h})\rangle \overset{3.1}{=} \langle \mathcal{F}_2^{\pm}(x), e_{\pm t}\overline{\mathcal{F}_2^{\pm}(h)}\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2^{\pm}(x)(\gamma)\, \overline{e^{\pm i2\pi t\gamma}\overline{\mathcal{F}_2^{\pm}(h)(\gamma)}}\, d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_2^{\pm}(x)(\gamma)\, \mathcal{F}_2^{\pm}(h)(\gamma)\, e^{\mp i2\pi t\gamma}\, d\gamma.\end{aligned}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a proto $\mathcal{F}_2^{\pm}(h) \cdot \mathcal{F}_2^{\pm}(x) \in L^1$. Poslední vztah je Fourierovou transformací tohoto součinu v $L^1$ a díky větě 2.85 je tvrzení dokázáno (dokonce $h * x$, $h \times x$ jsou stejnoměrně spojité). □

<u>Poznámka</u> C.25. Podobně jako v předchozích tvrzeních je nutné pečlivě rozlišovat prostory, do kterých funkce patří. Obecně nelze garantovat více než $\mathcal{F}_2^{\pm}(h) \cdot \mathcal{F}_2^{\pm}(x) \in L^1$ a stejnoměrnou spojitost $h * x$.

Uveďme zajímavý příklad: Nechť $\mathcal{F}^-(x)(\gamma) = \mathcal{F}^-(h)(\gamma) = 1_{(0,1]}\gamma^{-1/4} \in L^1 \cap L^2$. Součin $\mathcal{F}^-(x)(\gamma)\, \mathcal{F}^-(h)(\gamma)$ je $v(\gamma) := 1_{(0,1]}\gamma^{-1/2} \in L^1 - L^2$ (viz 2.80). Konvoluce $h * x = \mathcal{F}_1^+(v)(t)$ však nepatří ani do $L^1$, ani do $L^2$! Kdyby totiž $h * x \in L^2$, pak dle věty 2.88, resp. 3.79(a) musí i $\mathcal{F}_2^+(h * x) = v(\gamma) \in L^2$, což je spor. Kdyby $h * x \in L^1$, pak dle věty 2.86(1) o inverzi v $L^1$ musí $\mathcal{F}_1^+(h * x)$ být shodná s $v(\gamma)$ ve všech bodech spojitosti, tj. na $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, což je ovšem v protikladu stejnoměrné spojitosti $\mathcal{F}_1^+(h * x)$ podle věty 2.85.

**Problém C.26** (Cvičení).
Ověřte použitím věty C.24 ortonormalitu systému $\{\mathrm{sinc}(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.
Nástin postupu: Chce se dokázat $\langle \mathrm{sinc}(t-\ell), \mathrm{sinc}(t-k)\rangle = \delta_{\ell k}$. Vyjádříme skalární součin jako integrál a ukážeme, že jde o hodnotu korelace dvou funkcí sinc v bodě 0. Funkce sinc patří do $L^2$ a tudíž aplikujeme uvedenou větu s využitím faktu, že Fourierovým obrazem sinc je obdélníková funkce rect a naopak. Vyjde $\mathrm{sinc}(\ell - k) = \delta_{\ell k}$.

### C.2.2 Diskrétní konvoluční operátory

V tomto odstavci se budeme zabývat diskrétními konvolucemi, které vznikají diskretizací příslušné integrální konvoluce pomocí vhodné kvadraturní formule. Například při použití složeného lichoběžníkového pravidla na ekvidistantní síti s krokem $\Delta t > 0$ aproximujeme integrál periodické konvoluce sumačním vztahem, kde $T = N\Delta t$, $N \in \mathbb{N}$:

$$(h \circledast x)(n\Delta t) = \frac{1}{T}\int_0^T h(u)x(n\Delta t - u)\,du \approx$$

$$\frac{1}{N\Delta t}\Delta t\Big(\frac{1}{2}h(0)x(n\Delta t) + \sum_{k=1}^{N-1} h(k\Delta t)x(n\Delta t - k\Delta t) + \frac{1}{2}h(N\Delta t)x(n\Delta t - N\Delta t)\Big) =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} h(k\Delta t)x\big((n-k)\Delta t\big),$$

kde jsme vzhledem k periodicitě použili $h(0) = h(N\Delta t)$ a $x(n\Delta t) = x(n\Delta t - N\Delta t)$.

Položíme-li $h_n := h(n\Delta t)$ a $x_n := x(n\Delta t)$ pak tento vztah vede k níže uvedené definici *diskrétní periodické (cyklické) konvoluce* dvou $N$-periodických posloupností $h := \{h_n\}_{-\infty}^{\infty}$ a $x := \{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$ (píšeme $h, x \in \ell_N$). Vzhledem k $N$-periodicitě je stačí reprezentovat vektory $\boldsymbol{h} := [h_0, \dots, h_{N-1}]$ a $\boldsymbol{x} := [x_0, \dots, x_{N-1}]$ a rozdíl indexů $n - k$ nahradit rozdílem modulo $N$ zapsaným ve tvaru $(n-k) \bmod N \in \mathbb{Z}_N$.

Analogicky integrál nepriodické konvoluce aproximujeme sumačním vztahem:

$$(h * x)(n\Delta t) = \lim_{N\to\infty}\int_{-N\Delta t}^{N\Delta t} h(u)x(n\Delta t - u)\,du \approx \lim_{N\to\infty}\Delta t\sum_{k=-N}^{N} h(k\Delta t)x(n\Delta t - k\Delta t) =$$

$$\Delta t\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k\Delta t)x\big((n-k)\Delta t\big).$$

Pro jednotkový diskretizační krok $\Delta t = 1$ tento vztah opět vede k níže uvedené definici *diskrétní lineární konvoluce* dvou tentokrát neperiodických posloupností $\{h_n\}_{-\infty}^{\infty}$ a $\{x_n\}_{-\infty}^{\infty}$.

**Lemma C.27.** *Nechť $b \in \mathbb{Z}$ a $N \in \mathbb{N}$ jsou libovolné, pak*

*(1) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-b}$ pro každé $x \in \ell^1$, $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, a analogicky $\sum_{n=0}^{N-1} x_n = \sum_{n=0}^{N-1} x_{n-b}$ pro každou $N$-periodickou posloupnost $x$.*

*(2) V obou případech platí shodně: $\|x\|_1^{\frac{1}{p}} = \|x^{\frac{1}{p}}\|_p = \|\tau_b x^{\frac{1}{p}}\|_p = \|\tau_b x\|_1^{\frac{1}{p}}$ pro $1 \le p \le \infty$.*

*Důkaz.*
(1) V sumě provedeme substituci $u := n - b$, takže dostaneme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-b} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} x_u$, resp. $\sum_{n=0}^{N-1} x_{n-b} = \sum_{u=-b}^{N-1-b} x_u =: S$, kde vzhledem k N-periodicitě $x$ můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $0 \le b \le N-1$. Pak $-b \le 0 \le N-1-b$, $\sum_{u=-b}^{-1} x_u = \sum_{u=N-b}^{N-1} x_u$ v důsledku $x_u = x_{u+N}$, takže $S = \sum_{u=-b}^{-1} x_u + \sum_{u=0}^{N-1-b} x_u = \sum_{u=0}^{N-1-b} x_u + \sum_{u=N-b}^{N-1} x_u = \sum_{u=0}^{N} x_u$.
(2) Pro $p = \infty$ tvrzení platí, neboť všechny členy nabývají hodnoty 1. Pro $p < \infty$ dostáváme: $\|x\|_1^{\frac{1}{p}} = (\sum_n |x_n|)^{\frac{1}{p}} = (\sum_n (|x_n|^{\frac{1}{p}})^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_n |x_n^{\frac{1}{p}}|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x^{\frac{1}{p}}\|_p$ a další rovnosti podobně pro $\tau_b x$ s uvážením (1). □

**Definice C.28 (Diskrétní konvoluce a korelace).**
Nechť v dalším $h := \{h_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $x := \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ a $y := \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ jsou posloupnosti z $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

(1) Jestliže $h$ a $x$ jsou $N$-periodické posloupnosti určené vektory $\boldsymbol{h} = [h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}]$ a $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]$, pak $N$-periodickou posloupnost $y$ určenou vektorem $\boldsymbol{y} = [y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}]$ definovanou po řadě vztahy ($a \in \mathbb{Z}$)

$$y_n := \frac{1}{N} \sum_{k=a}^{a+N-1} h_k x_{n-k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k x_{n-k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k x_{(n-k) \bmod N} \tag{C.17a}$$

nazýváme **diskrétní cyklickou konvolucí (DCK)** posloupností $h$ a $x$ (vektorů $\boldsymbol{h}$ a $\boldsymbol{x}$), a zkráceně píšeme $y = h \circledast x$ ($\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} \circledast \boldsymbol{x}$);

$$y_n := \frac{1}{N} \sum_{k=a}^{a+N-1} \overline{h}_k x_{n+k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{h}_k x_{n+k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{h}_k x_{(n+k) \bmod N} \tag{C.17b}$$

nazýváme **diskrétní cyklickou korelací** posloupností $h$ a $x$ (vektorů $\boldsymbol{h}$ a $\boldsymbol{x}$), a zkráceně píšeme $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h} \otimes \boldsymbol{x}$.

(2) Jestliže níže uvedené součty existují a jsou konečné pro každé $n \in \mathbb{Z}$, pak pro $h \in \ell^q$ a $x \in \ell^p$ posloupnost $y = \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ definovanou po řadě vztahy

$$y_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} \tag{C.18a}$$

nazýváme **diskrétní lineární konvolucí (DLK)** posloupností $h$ a $x$, a zkráceně píšeme $y = h * x$;

$$y_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h}_k x_{n+k} \tag{C.18b}$$

nazýváme **diskrétní lineární korelací** posloupností $h$ a $x$, a zkráceně píšeme $y = h \times x$.

Pokud $h = x$, pak odpovídající $y$ nazýváme diskrétní (cyklickou/lineární) **autokonvolucí**, resp. **autokorelací** funkce $x$.
Pro pevné $h$ operátor $\widetilde{T}_h := \widetilde{T}_h^- : x \mapsto h \circledast x$, resp. $T_h := T_h^- := x \mapsto h * x$ nazýváme diskrétním (cyklickým, resp. lineárním) **konvolučním operátorem s jádrem** $h$ a operátor $\widetilde{T}_h^+ : x \mapsto h \otimes x$, resp. $T_h^+ := x \mapsto h \times x$ diskrétním (cyklickým, resp. lineárním) **korelačním operátorem s jádrem** $h$.

**Věta C.29** (**Základní vlastnosti diskrétní konvoluce a korelace**).
*Pro operace $\circledast$, $*$, $\otimes$, $\times$ diskrétní konvoluce a korelace posloupností z $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ zůstávají v platnosti všechna tvrzení zformulovaná v C.16 a C.17.*

*Důkaz.* (Cvičení)
Postup je analogický jako v důkazu C.16 a C.17, kde $T$ nahradíme $N$ a integrály odpovídajícími sumami. □

**Věta C.30 (Ohraničenost diskrétního konvolučního a korelačního operátoru).** *Pro libovolné $1 \le p \le \infty$ platí:*

*(1) Jestliže $h \in \ell_N$, pak $h \circledast x \in \ell_N$ pro každé $x \in \ell_N$ a platí*
*$\|h \circledast x\|_p, \|h \otimes x\|_p \le \frac{1}{N}\|h\|_1\|x\|_p$. V takovém případě $\widetilde{T}_h, \widetilde{T}_h^+ \in \mathcal{B}(\ell_N, \ell_N)$.*

*(2) Jestliže $h \in \ell^1$, pak $h * x \in \ell^p$ pro každé $x \in \ell^p$ a platí*
*$\|h * x\|_p, \|h \times x\|_p \le \|h\|_1\|x\|_p$. V takovém případě $T_h, T_h^+ \in \mathcal{B}(\ell^p, \ell^p)$.*

*Důkaz.* Analogicky jako v důkazu věty C.18 položíme pro
(1) periodický případ: $J := \mathbb{Z}_N$, $\mathfrak{L}^p := \ell_N$ pro $1 \le p \le \infty$ a $y := N(h \circledast x)$.
(2) neperiodický případ: $J := \mathbb{Z}$, $\mathfrak{L}^p := \ell^p$ pro $1 \le p \le \infty$ a $y := h * x$.

Vzhledem k C.29 a C.17[0°] je jádrem korelačního operátoru funkce $\widetilde{h}$, která je absolutně sumovatelná na $J$ stejně jako $h$. Stačí proto tvrzení dokázat jen pro konvoluční operátor.

Nechť $q$ je duální index k $p$ splňující $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Pak $y_n = \sum_J h_k x_{n-k} = \sum_J h_k^{\frac{1}{q}} h_k^{\frac{1}{p}} x_{n-k} = \sum_J b_{n,k} h_k^{\frac{1}{q}}$, kde jsme položili $b_{n,k} := h_k^{\frac{1}{p}} x_{n-k}$, $B := \{b_{n,k}\}_{n,k\in\mathbb{Z}}$. Pro pevně zvolené $h$ a $x$ lze tedy v souladu s definicí B.17 psát $y = T_B(h_k^{\frac{1}{q}})$, kde $h_k^{\frac{1}{q}} \in \mathfrak{L}^q$ podle C.27(2) i pro $p = \infty$, kdy $q = 1$. Ukážeme, že $B \in \mathfrak{L}^p(J \times J)$:
a) $p = \infty$: $b_{n,k} = x_{n-k}$ a $\|B\|_\infty = \sup_{n,k\in J}|x_{n-k}| = \sup_{m\in J}|x_m| = \|x\|_\infty < \infty$.
b) $p < \infty$: $b_{n,k} = h_k^{\frac{1}{p}} x_{n-k} \Rightarrow \sum\limits_{n\in J}\sum\limits_{k\in J}|b_{n,k}|^p = \sum\limits_{n\in J}\sum\limits_{k\in J}|h_k||x_{n-k}|^p \overset{F.V.}{=} \sum\limits_{k\in J}|h_k|(\sum\limits_{n\in J}|x_{n-k}|^p) \overset{C.27(1)}{=} (\sum\limits_{k\in J}|h_k|)(\sum\limits_{n\in J}|x_n|^p) = \|h\|_1\|x\|_p^p < \infty$.
Tedy celkem $\|B\|_p = \|h\|_1^{\frac{1}{p}}\|x\|_p$ a $T_B$ je tak operátorem Fredholmova typu, $T_B : \mathfrak{L}^q \to \mathfrak{L}^p$ a podle B.18 dostáváme pro $y = T_B(h^{\frac{1}{q}})$:
$\|y\|_p \le \|h^{\frac{1}{q}}\|_q\|h\|_1^{\frac{1}{p}}\|x\|_p \overset{C.27(2)}{=} \|h\|_1^{\frac{1}{q}}\|h\|_1^{\frac{1}{p}}\|x\|_p = \|h\|_1\|x\|_p$ a tvrzení pro periodický i neperiodický případ je tak dokázáno. □

**Důsledek C.31.**
*Pro $h, x \in \ell_N$ libovolné, je $(h \circledast x), (h \otimes x) \in \ell_N$ a pro libovolné $1 \le p, q \le \infty$ platí nerovnosti:*
$\|h \circledast x\|_p, \|h \otimes x\|_p \le N^{-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p = \frac{1}{\sqrt[q]{N}}\|h\|_q\|x\|_p$, *speciálně:*
$\|h \circledast x\|_1, \|h \otimes x\|_1 \le \frac{1}{N}\|h\|_1\|x\|_1$ *pro* $p = q = 1$ *a*
$\|h \circledast x\|_2, \|h \otimes x\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{N}}\|h\|_2\|x\|_2$ *pro* $p = q = 2$;
$\|h \circledast x\|_1, \|h \otimes x\|_1 \le N^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p$, *speciálně:*
$\|h \circledast x\|_1, \|h \otimes x\|_1 \le \|h\|_q\|x\|_p$ *pro duální indexy* $p, q :$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *a*
$\|h \circledast x\|_1, \|h \otimes x\|_1 \le \|h\|_2\|x\|_2$ *pro* $p = q = 2$.

*Důkaz.*
Podle B.15 nerovnost $\|h\|_1 \le N^{\frac{q-1}{q}}\|h\|_q = N^{1-\frac{1}{q}}\|h\|_q \overset{C.30(1)}{\Rightarrow}$
$\|h \circledast x\|_p \le \frac{1}{N}N^{1-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p = N^{-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p$.
Analogicky lze navíc zdola omezit i levou stranu $\|h \circledast x\|_p$, takže celkem dostáváme
$\|h \circledast x\|_1 \le N^{1-\frac{1}{p}}\|h \circledast x\|_p \le N^{1-\frac{1}{p}}N^{-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p = N^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|h\|_q\|x\|_p$.
Stejné nerovnosti platí i pro $\|h \otimes x\|_p \overset{[0°]}{=} \|\widetilde{h} \circledast x\|_p$, neboť $\|h\|_q = \|\widetilde{h}\|_q$. □

**Věta C.32 (Věta o diskrétní konvoluci a korelaci v $\ell_N$ a $\ell^1$).**
*(1) Jestliže $h, x \in \ell_N$, potom $(h \circledast x), (h \otimes x) \in \ell_N$ a pro každé $k \in \mathbb{Z}_N$ platí*

$$\boxed{\widehat{c}_k(h \circledast x) = \widehat{c}_k(h) \cdot \widehat{c}_k(x)} \text{ a } \boxed{\widehat{c}_k(h \otimes x) = \overline{\widehat{c}_k(h)} \cdot \widehat{c}_k(x)},$$

*kde $\widehat{c}_k(\#)$ značí $k$-tý diskrétní Fourierův koeficient vektoru $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]$ — viz definici C.5 a tvrzení C.8.*

*(2) Jestliže $h, x \in \ell^1$, potom $(h * x), (h \times x) \in \ell^1$ a platí*

$$\boxed{\mathcal{F}_1(h * x) = \mathcal{F}_1(h) \cdot \mathcal{F}_1(x)} \text{ a } \boxed{\mathcal{F}_1(h \times x) = \overline{\mathcal{F}_1(h)} \cdot \mathcal{F}_1(x)},$$

*kde $\mathcal{F}_1$ značí operátor diskrétní Fourierovy transformace na $\ell^1$ dle definice C.10.*

*Důkaz.*
Dokážeme tvrzení nejprve pro diskrétní periodickou konvoluci (1), kdy je $h \circledast x \in \ell_N$ dle C.30(1):

$$\widehat{c}_k(h \circledast x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Big( \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h_m x_{n-m} \Big) e^{-i\frac{2\pi kn}{N}} =$$

$$\frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \Big( \sum_{n=0}^{N-1} x_{n-m} e^{-i\frac{2\pi kn}{N}} \Big) h_m \overset{r:=n-m}{=} \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \Big( \sum_{r=-m}^{N-1-m} x_r e^{-i\frac{2\pi k(m+r)}{N}} \Big) h_m =$$

$$\frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \Big( \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i\frac{2\pi kr}{N}} \Big) h_m e^{-i\frac{2\pi km}{N}} = \Big( \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h_m e^{-i\frac{2\pi km}{N}} \Big) \Big( \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i\frac{2\pi kr}{N}} \Big) = \widehat{c}_k(h) \cdot \widehat{c}_k(x).$$

V neperiodickém případě (2) je opět $h * x \in \ell^p$ dle C.30(2) a vztah

$$\mathcal{F}_1(h * x)(\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big( \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m x_{n-m} \Big) e^{-i2\pi\gamma n} = \cdots = \mathcal{F}_1(h)(\gamma) \cdot \mathcal{F}_1(x)(\gamma)$$

pak stačí upravovat analogicky jako výše se záměnou rozsahu sumace $\mathbb{Z}_N$ za $\mathbb{Z}$ a $e^{-i\frac{2\pi k\#}{N}}$ za $e^{-i2\pi\gamma\#}$ s uvážením absolutní sumovatelnosti uvažovaných řad, která umožňuje jejich roznásobení v libovolném pořadí. □

**Důsledek C.33.**
*Pro vektory $\boldsymbol{h} = [h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}]$, $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}] \in \mathbb{C}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ platí*

$$\mathbb{W}_N^{\pm}(\boldsymbol{h} \circledast \boldsymbol{x}) = \mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{h} \circ \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{x} \tag{C.19a}$$

$$\mathbb{W}_N^{\pm}\widetilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{x} = \operatorname{diag}(\mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{h})\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{x} \tag{C.19b}$$

$$\boldsymbol{h} \circledast \boldsymbol{x} = \mathbb{W}_N^{\mp}\Big(\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{h} \circ \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{x}\Big), \tag{C.19c}$$

*kde $\circ$ značí součin vektorů po složkách (tzv. Hadamardův součin), $\mathbb{W}_N^{\pm}$ je čtvercová matice $DFT_N^{\pm}$ z definice C.5 a $\widetilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{h}} := [\widetilde{T}_h]$ je čtvercová matice řádu $N$ reprezentující DCK. Tato matice je* **cirkulantní maticí** *(speciální případ tzv.* **Toeplitzovy matice***, jejíž 1. sloupec i 1. řádek je určen vektorem $\boldsymbol{h}$):*

$$\widetilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{h}} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & \ldots & h_1 \\ h_1 & h_0 & \ldots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \ldots & h_0 \end{bmatrix}. \tag{C.20}$$

*Důkaz.* Tvrzení nejprve ukážeme pro $\mathbb{W}_N^-$, kdy dle C.8 je $\widehat{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^-\boldsymbol{x}$, takže rovnosti C.32(1) lze pro všechna $k = 0, 1, \ldots, N-1$ přepsat vektorově do tvaru $\frac{1}{N}W_N^-(\boldsymbol{h} \circledast \boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}W_N^-\boldsymbol{h} \circ \frac{1}{N}W_N^-\boldsymbol{x}$, což odpovídá rovnostem (C.19a) a (C.19b). Po vynásobení rovnosti (C.19a) inverzní maticí $(W_N^-)^{-1} \overset{C.6}{=} \frac{1}{N}W_N^+$ obdržíme (C.19c). Tvrzení pro $\mathbb{W}_N^+$ plyne ze symetrie $\widehat{c}_{(N-k)_N}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^+\boldsymbol{x}$ pro $k = 0, 1, \ldots, N-1$ (cvičení). □

**Důsledek C.34** (Vlastní vektory a vlastní čísla DCK matice $\widetilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{h}}$).
*Pro $k = 0, 1, \ldots, N-1$ je $(\pm k)$-tý diskrétní Fourierův koeficient $\widehat{c}_k(\boldsymbol{h})$ vlastním číslem cirkulantní DCK matice $\widetilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{h}}$ z* (C.20) *a $|k|$-tý řádek/sloupec $\frac{1}{N}[1, e^{\pm i\frac{2\pi k}{N}}, e^{\pm i\frac{2\pi k2}{N}}, \ldots, e^{\pm i\frac{2\pi k(N-1)}{N}}]$ symetrické matice $\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\pm}$ jeho příslušným vlastním vektorem.*

*Důkaz.* Jestliže vynásobíme rovnici (C.19b) zleva maticí $(\mathbb{W}_N^{\pm})^{-1} \overset{C.6}{=} \frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}$, dostaneme $\widetilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}\right) \operatorname{diag}(\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{h})\mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{x}$, odkud po dosazení sloupců matice $\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}$ postupně za $\boldsymbol{x}$ obdržíme: $\widetilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{h}}\left(\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}\right) = \left(\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}\right) \operatorname{diag}(\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{h})\mathbb{W}_N^{\pm}\left(\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}\right) = \left(\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\mp}\right) \operatorname{diag}(\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{h})$, kde $\operatorname{diag}(\frac{1}{N}\mathbb{W}_N^{\pm}\boldsymbol{h})$ $= \operatorname{diag}(\widehat{c}_0(\boldsymbol{h}), \widehat{c}_{\mp 1}(\boldsymbol{h}), \ldots, \widehat{c}_{\mp(N-1)}(\boldsymbol{h}))$, což bylo dokázat.
[Alternativně lze též užít postup z důkazu tvrzení C.36] □

**Věta C.35 (Věta o diskrétní konvoluci a korelaci v $\ell^2$).**
*Jestliže $h \in \ell^1, x \in \ell^2$, potom $(h * x), (h \times x) \in \ell^2$ a platí*

$$\boxed{\mathcal{F}_2(h * x) = \mathcal{F}_1(h) \cdot \mathcal{F}_2(x) = \mathcal{F}_2(h) \cdot \mathcal{F}_2(x)} \text{ a } \boxed{\mathcal{F}_2(h \times x) = \overline{\mathcal{F}_1(h)} \cdot \mathcal{F}_2(x) = \overline{\mathcal{F}_2(h)} \cdot \mathcal{F}_2(x)},$$

*kde $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ značí operátory diskrétní Fourierovy transformace po řadě na $\ell^1, \ell^2$ dle definic C.10 a C.12.*

*Důkaz.* Opět stačí tvrzení dokázat jen pro konvoluci, kdy je $h * x \in \ell^2$ dle C.30(2):
Posloupnost $s_N = \{1_{[-N,N]}x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^1 \subseteq \ell^2$ a jejím součtem je $N$-tý částečný součet $\sum\limits_{n=-N}^{N} x_n$, takže $s_N \xrightarrow{2} x$ pro $N \to \infty$ a $\mathcal{F}_1(s_N) \xrightarrow{2} \mathcal{F}_2(x)$ pro $N \to \infty$ z definice (C.12).

Pak také $h * s_N \in \ell^1 \subseteq \ell^2$ dle C.30(2) a dostáváme
$\mathcal{F}_2(h * s_N) \overset{C.13}{=} \mathcal{F}_1(h * s_N) \overset{C.32(2)}{=} \mathcal{F}_1(h) \cdot \mathcal{F}_1(s_N)$, kde $\mathcal{F}_1(h) \in \ell^\infty$ dle C.11.
Odtud $\|\mathcal{F}_1(h) \cdot \mathcal{F}_2(x) - \mathcal{F}_1(h) \cdot \mathcal{F}_1(s_N)\|_2 \leq \|\mathcal{F}_1(h)\|_\infty \|\mathcal{F}_2(x) - \mathcal{F}_1(s_N)\|_2 \to 0$ pro $N \to \infty \Rightarrow$ $\mathcal{F}_1(h) \cdot \mathcal{F}_1(s_N) \xrightarrow{2} \mathcal{F}_1(h) \cdot \mathcal{F}_2(x)$ pro $N \to \infty$. Současně také $\mathcal{F}_2(h * s_N) = \mathcal{F}_2 T_h(s_N) \xrightarrow{2} \mathcal{F}_2 T_h(x)$ $= \mathcal{F}_2(h * x)$, neboť $T_h$ i $\mathcal{F}_2$ jsou spojité operátory na $\ell^2$. Celkem tak $\mathcal{F}_2(h * x) = \mathcal{F}_1(h) \cdot \mathcal{F}_2(x)$ $\overset{C.13}{=} \mathcal{F}_2(h) \cdot \mathcal{F}_2(x)$. □

**Důsledek C.36** (Vlastní posloupnosti a vlastní čísla DLK operátoru $T_h$).
*Jestliže $h \in \ell^1$, pak pro každé $\gamma \in \mathbb{R}$ je $\widehat{h}(\gamma)$ vlastním číslem DLK operátoru $T_h$ a $e_\gamma := \{e^{i2\pi\gamma k}\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^\infty$ jeho příslušnou vlastní posloupností.*

*Důkaz.* Zřejmě $e_\gamma \in \ell^\infty$, neboť $|e^{i2\pi\gamma k}| = 1$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Podle C.30(2) existuje $T_h(e_\gamma) =$

$$\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{i2\pi\gamma(n-k)}\right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \left\{e^{i2\pi\gamma n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i2\pi\gamma k}\right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \widehat{h}(\gamma)\left\{e^{i2\pi\gamma n}\right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \widehat{h}(\gamma)e_\gamma.$$

□

*Poznámka* C.37. Tedy je zřejmé, že konvoluční i korelační operátory zobrazují harmonické posloupnosti na harmonické posloupnosti (funkce) *o stejné frekvenci*, přičemž amplituda a fáze se může změnit. To přesně koresponduje s LTI systémy — kmitočtovými filtry — používanými v elektrotechnice.

**Příklad C.38.** Demonstrujme nyní účinek lineárního filtru na signál; matematicky tedy výsledek konvoluce dvou posloupností.

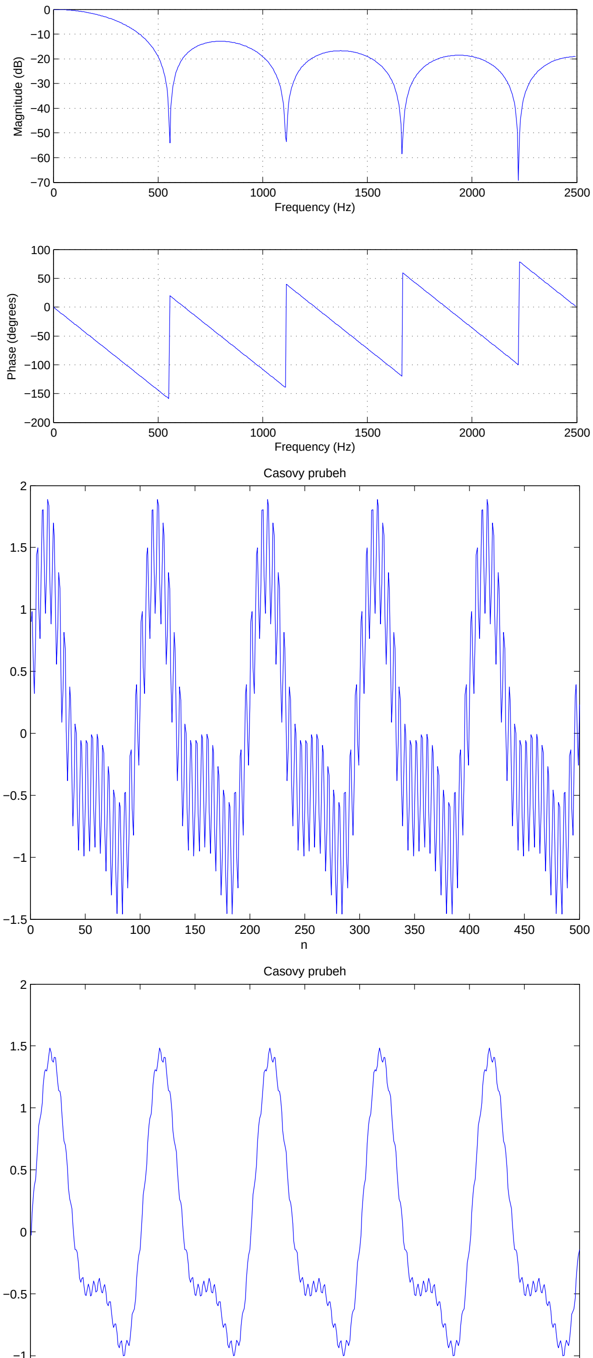
Signál $\boldsymbol{x} \in \ell_{500}$ je součtem tří kosinových kmitů o frekvencích postupně 50, 100 a 1 000 Hz, resp. amplitudách 1, 1/2 a 1/2. Tento signál je navzorkován frekvencí 5 000 Hz. Jako filtr bereme $\boldsymbol{h} \in \ell_{500}$, který má na začátku devětkrát stejnou hodnotu 1/9 a zbytek hodnot do délky 500 je doplněn nulami — proto lze hádat, že filtr bude klouzavým aritmetickým průměrem. Vypočítáme cyklickou konvoluci $\boldsymbol{h} \circledast \boldsymbol{x}$. Viz obrázek C.4 a jeho popisek. Pro úplnost, konvoluce byla počítána s využitím věty C.32, resp. důsledku C.33, tj. násobením spektrálních koeficientů a použitím algoritmu FFT.

Viz také další teorii ke konvolučním operátorům v Příkladu 3.7.

*Poznámka* C.39. Výpočet cyklické konvoluce (C.17a) vyžaduje řádově $N^2$ operací. Předchozí věty však otevírají možnost rychlejšího výpočtu: Vezměme vztah (C.19c) — cyklickou konvoluci lze podle něj spočítat pomocí dvou dopředných a jedné zpětné DFT (využitím algoritmu FFT jsou všechny o složitosti řádově $N \log N$) a násobení spektrálních vektorů po složkách (složitost $N$). Dohromady složitost této *rychlé konvoluce* je zřejmě $N \log N$, což je výrazné zrychlení (viz poznámku C.9). Je vhodné poznamenat, že pro příliš krátké posloupnosti $\boldsymbol{h}$ a $\boldsymbol{x}$ je režie FFT příliš vysoká, takže se tento způsob nevyplatí.

Uvedený rychlý algoritmus lze použít pro DCK, ve zpracování signálů však častěji potřebujeme počítat nikoliv DCK, nýbrž DLK. Pokud je nicméně alespoň jedna z posloupností konečné délky (kratší oproti signálu $\boldsymbol{x}$ bývá obvykle filtr $\boldsymbol{h}$) či zpracováváme signál po konečných úsecích, je možné uplatnit rychlou konvoluci i zde, když se i $\boldsymbol{x}$ prodlouží nulovými hodnotami na dostatečnou délku, která zajistí, že periodizace (vlastní DCK), nechtěně neovlivní správně vypočtené hodnoty výsledné posloupnosti.

V oblasti zpracování signálů to má souvislost s tzv. overlap-add algoritmem pro postupnou filtraci dlouhého signálu po kratších úsecích.




**Obrázek C.4**: Nahoře frekvenční charakteristika (modulová a fázová) filtru. Uprostřed vstupní signál. Dole výsledek filtrace — jejich cyklické konvoluce. Je evidentní, že filtr potlačuje vyšší frekvence v signálu. To potvrzuje i horní graf, kde lze vyčíst, že nejrychleji kmitající složka (1 000 Hz) bude potlačena o 20 dB, zatímco oba pomalejší kmity (50 a 100 Hz) zůstávají prakticky nedotčeny (změna pod úrovní půl dB). Také fáze harmonických složek jsou filtrací ovlivněny, avšak to je v těchto vyobrazeních nezřetelné. Jednotku dB, decibel, definujeme jako logaritmus poměru dvou veličin. Zde v kontextu dvou amplitud, je to $20 \log_{10} \frac{A_1}{A_0}$; tedy $-20$ dB odpovídá útlumu na desetinu.

# D DŮKAZY VYBRANÝCH TVRZENÍ

**D.1. Důkaz věty 2.16**:

(1) $\Rightarrow$: pro $x \in U$ položíme $\mathcal{O}(x) = U$

$\Leftarrow$: $U = \bigcup_{x \in U} \{\mathcal{O}(x) \,|\, \mathcal{O}(x) \subseteq U\} \overset{2^\circ}{\Rightarrow} U$ je otevřená.

(2-3) $X - \overline{M} \subseteq X - M$ otevřená $\Rightarrow \underline{X - \overline{M} \subseteq \mathrm{Int}(X - M)}$.

$X - \mathrm{Int}(M) \supseteq X - M$, $X - \mathrm{Int}(M)$ uzavřená $\Rightarrow \underline{\overline{X - M} \subseteq X - \mathrm{Int}(M)}$.

Po záměně $M$ za $X - M$ dostáváme i opačné inkluze:

$X - \overline{X - M} \subseteq \mathrm{Int}(X - (X - M)) = \mathrm{Int}(M) \Rightarrow \underline{\overline{X - M} \supseteq X - \mathrm{Int}(M)}$ a

$\overline{X - (X - M)} \subseteq X - \mathrm{Int}(X - M) \Rightarrow \overline{M} \subseteq X - \mathrm{Int}(X - M) \Rightarrow \underline{X - \overline{M} \supseteq \mathrm{Int}(X - M)}$.

(4) $x \in \overline{M} \;\Leftrightarrow\; x \notin X - \overline{M}$ otevřená $\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ neexistuje $\mathcal{O}(x) \subseteq X - \overline{M} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \mathcal{O}(x)$ je $\mathcal{O}(x) \cap M \neq \emptyset$.

(5) $\gamma(M) = \overline{M} - \mathrm{Int}(M) = \overline{M} \cap (X - \mathrm{Int}(M)) \overset{(3)}{=} \overline{M} \cap \overline{X - M}$.

(6) $x \in \gamma(M) \overset{(5)}{=} \overline{M} \cap \overline{X - M} \;\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\; \forall\, \mathcal{O}(x)$ je $\mathcal{O}(x) \cap M \neq \emptyset$ a $\mathcal{O}(x) \cap X - M \neq \emptyset$.

□

**D.2. Důkaz věty 2.20**:

Jako cvičení ukažte následující tvrzení:

(a) $\mathcal{T}(\mathcal{S}) \supseteq \{\bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} U_{ik} \,|\, U_{ik} \in \mathcal{S}, |K_i| < \aleph_0\}$

(totiž $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{S}) \Rightarrow$ každá množina vpravo musí ležet i vlevo dle 1° až 3°).

(b) $\mathcal{T}(\mathcal{S}) \subseteq \{\bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} U_{ik} \,|\, U_{ik} \in \mathcal{S}, |K_i| < \aleph_0\}$

(užitím asociativního a distributivního zákona pro sjednocení a průniky množin `[ZM1:Věty 1.16-1.19]` ukažte, že systém množin $\{\bigcup_{i \in I} \bigcap_{k \in K_i} U_{ik} \,|\, U_{ik} \in \mathcal{S}, |K_i| < \aleph_0\}$ je topologií na $X$, tj. má vlastnosti 1° až 3°).

(c) Je-li $\mathcal{S}$ báze, stačí ukázat navíc implikace:

- (i) $\Rightarrow\; X \in \{\bigcup_{i \in I} U_i \,|\, U_i \in \mathcal{S}\}$
- (ii) $\Rightarrow\; U_i := \bigcap_{k \in K_i} U_{ik} = \bigcup_{x \in U_i} \mathcal{O}(x)$, kde $\mathcal{O}(x) \in \mathcal{S}$
  (úplnou indukcí vzhledem ke $|K_i| < \aleph_0$). □

**D.3. Důkaz věty 3.8**:

$\mathcal{B}(X, B)$ je NL-prostor dle 3.2. Zbývá tedy ukázat, že je úplný. Nechť $\{T_n\}$ je cauchyovská v $\mathcal{B}(X, B)$, tj. $\|T_m - T_n\| \to 0$ pro $m, n \to \infty \Rightarrow \forall x \in X$ a $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$:

$$\|T_m x - T_n x\| = \|(T_m - T_n)x\| \leq \|T_m - T_n\| \|x\| < \varepsilon \|x\| \text{ pro } m, n \geq N. \qquad (*)$$

Pak pro $\forall x \in X$ je $\|T_n x\|$ cauchyovská v $B \Rightarrow \forall x \in X$ je $\|T_n x\|$ konvergentní v $B$. Nechť $T$ je zobrazení $X \to B$ přiřazující každému $x \in X$ odpovídající limitu $Tx := \lim_{n \to \infty} T_n x$. Z linearity $T_n$ a limity vidíme, že <u>T je lineární</u>.

<u>T je také spojitý</u>: Podle `[ZM1:odst.3.6(N4)]` $|\|T_m\| - \|T_n\|| \leq \|T_m - T_n\| \to 0$ pro $m, n \to \infty \Rightarrow \|T_n\|$ cauchyovská $\Rightarrow \|T_n\|$ konvergentní v $\mathbb{R} \Rightarrow \|T_n\|$ ohraničená v $\mathbb{R} \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq M \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow \|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in X$, neboť $\|T_n x\| \to \|Tx\|$ (spojitost normy).

<u>$T_n \to T$?</u> $x \in X \Rightarrow T_n x \to Tx \Rightarrow T_m x - T_n x \to T_m x - Tx$ (spojitost k lineárním operacím) $\Rightarrow \|T_m x - T_n x\| \to \|T_m x - Tx\|$ (spojitost normy) $\Rightarrow \|(T_m - T)x\| = \|T_m x - Tx\| \overset{(*)}{\leq} \varepsilon \|x\|$ pro $m \geq N \Rightarrow \|T_m - T\| \leq \varepsilon$ pro $m \geq N \Rightarrow T_m \to T$ pro $m \to \infty$ v $\mathcal{B}(X, B)$. □

**D.4. Důkaz věty 3.14**:

Sporem. Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Ukážeme, že v každé uzavřené kouli existuje bod $x$ takový, že $\{\|T_n x\|\}$ je neohraničená, což bude ve sporu s předpokladem.

(1) Buď $\overline{K}(x_0,\varepsilon) \subseteq B$ lib. a připusťme, že $\|T_n x\| \le C$ pro $\forall x \in \overline{K}(x_0,\epsilon)$. Pro lib. $y \in B$ je $x := \frac{\varepsilon}{\|y\|} y + x_0 \in \overline{K}(x_0,\varepsilon)$. Je tedy $\|T_n x\| \le C$, takže $\frac{\varepsilon}{\|y\|}\|T_n y\| - \|T_n x_0\| \le \left| \frac{\varepsilon}{\|y\|}\|T_n y\| - \|T_n x_0\| \right| \le \left\| \frac{\varepsilon}{\|y\|} T_n y + T_n x_0 \right\| = \|T_n x\| \le C$. Odtud $\|T_n y\| \le \frac{C + \|T_n x_0\|}{\varepsilon}\|y\| \Rightarrow \|T_n\| \le \frac{2C}{\varepsilon}$ je ohraničená, spor.

(2) V každé uzavřené kouli tedy skutečně existuje $x$: $\{\|T_n x\|\}$ neohraničená. Sestrojíme nerostoucí posloupnost koulí $\overline{K}_1 \supseteq \overline{K}_2 \supseteq \dots$ s poloměry $r_n \downarrow 0$. Kouli $\overline{K}_1(x_0, r_1)$ zvolíme libovolně a v ní prvek $x_1$ tak, že $\|T_{n_1} x_1\| > 1$ pro nějaké $n_1$. Ze spojitosti $T_{n_1}$ a normy plyne existence $\overline{K}_2(x_1,r_2) \subseteq \overline{K}_1 : \|T_{n_1} x\| > 1,\ \forall x \in \overline{K}_2, r_2 < \frac{1}{2}$. V $\overline{K}_2$ existuje podobně $x_2 : \|T_{n_2} x_2\| > 2$, atd. Zkonstruovali jsme tedy posloupnost $\{x_n\} : x_n \in \overline{K}_N$ pro $N \ge n$, tj. $\|x_n - x_m\| \le 2r_N < \frac{2}{N}$ pro $n,m \ge N$, takže $\{x_n\}$ je cauchyovská v $B$ a tudíž $x_n \to x \in B$, kde $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n$ a tedy $\|T_{n_K} x\| > K$, což je spor s ohraničeností $\{T_n x\}$. □

**D.5. Důkaz věty 3.43**:

Pro $T = 0$ (tedy i vždy v případě $H = \{0\}$) tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy nadále $H \ne \{0\}$ a $T \ne 0$.

I. $\|x\| = 1 \Rightarrow |\langle Tx, x\rangle| \le \|Tx\|\|x\| \le \|T\|\|x\|^2 = \|T\| \Rightarrow C := \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle| \le \|T\|$.

II. Opačnou nerovnost $\|T\| \le C$ ověříme užitím 3.34 a 3.36. Pro $x \in H, \|x\| = 1$, libovolné, ale pevné položme $\lambda := \sqrt{\|Tx\|}$ a $u := \begin{cases} \frac{1}{\lambda} Tx & \text{pro } \lambda \ne 0, \text{ neboli pro } Tx \ne 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.

Pak

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T(\lambda x), u\rangle \overset{3.34}{=} \frac{1}{4}\Big\{ \big[\langle T(\lambda x + u), \lambda x + u\rangle - \langle T(\lambda x - u), \lambda x - u\rangle\big]_1 + i\,[\#]_2 \Big\},$$

kde $[\#]_1, [\#]_2 \in \mathbb{R}$ dle 3.36, neboť $T = T^*$. Pak $\|Tx\|^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow [\#]_2 = 0$. Poznamenejme, že vzhledem k 3.36(5) je tento závěr platný i v případě, že $H$ je prostorem nad $\mathbb{R}$.

Protože dle I. je $|\langle Tz, z\rangle| \le C$ pro každé $z \in H, \|z\| = 1$, tak $\pm\langle Tz, z\rangle \le |\langle Tz, z\rangle| \le C\|z\|^2$ pro každé $z \in H$ a dostáváme pro $z = \lambda x + u$, resp. pro $z = \lambda x - u$:

$$\|Tx\|^2 \le \frac{1}{4}\Big\{ C\|\lambda x + u\|^2 + C\|\lambda x - u\|^2 \Big\} = \frac{1}{4} C \Big\{ \langle \lambda x + u, \lambda x + u\rangle + \langle \lambda x - u, \lambda x - u\rangle \Big\} = \frac{1}{2} C (\|\lambda x\|^2 + \underbrace{\|u\|^2}_{\|Tx\|}) = \frac{1}{2} C (\underbrace{\lambda^2}_{\|Tx\|} \|x\|^2 + \|Tx\|) \overset{\|x\|=1}{=} C\|Tx\|.$$

Odtud $\|Tx\| \le C$, což platí i při $Tx = 0$, neboť $0 \le C$. Pak $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| \le C$. □

**D.6. Důkaz věty 4.8**:

$\Rightarrow$: Buď $x' \in X'$ libovolný pevně zvolený. Pak pro $y \in \mathcal{R}(T)$ definuje $\dot{y}'(y) := x'(T^{-1}y)$ spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{R}(T)$, který lze dle HBV 3.10 rozšířit na $y' \in Y'$. Pak pro každé $x \in X$ je $y := Tx \in \mathcal{R}(T)$ a tedy $y'(Tx) = \dot{y}'(Tx) = x'(T^{-1}Tx) = x'(x)\,\forall x \in X \Rightarrow T'(y') = x'$. Tedy $T'$ je surjekce $Y' \to X'$.

$\Leftarrow$: Nechť $\mathcal{R}(T') = X'$. Kdyby $X = \{0\}$, pak $T = 0$ a $T^{-1} = 0$ existuje. Nechť $X \supset \{0\}$. Kdyby neexistoval spojitý $T^{-1}$, pak dle 4.4 neexistuje $m > 0$: $m < \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\,\forall x \ne 0$. Lze tedy sestrojit posloupnost $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$: $\|Tx_n\| \to 0$. Položme $\alpha_n := \max(\|Tx_n\|^{\frac{1}{2}}, n^{-\frac{1}{2}})$, $u_n := \frac{x_n}{\alpha_n}$.

Pak $\boxed{\|u_n\| = \frac{1}{\alpha_n} \to \infty}$.

Dále platí $\|Tu_n\| \le \|Tx_n\|^{\frac{1}{2}}$: vskutku

(a) Pro $Tx_n = 0$ je $Tu_n = \frac{1}{\alpha_n} Tx_n = 0$ a $\|Tu_n\| = 0 = \|Tx_n\|^{\frac{1}{2}}$,

(b) Pro $Tx_n \neq 0$ je $\|Tu_n\| = \frac{1}{\alpha_n}\|Tx_n\| \leq \frac{1}{\|Tx_n\|^{\frac{1}{2}}}\|Tx_n\| = \|Tx_n\|^{\frac{1}{2}}$.

Pak $\|Tu_n\| \leq \|Tx_n\|^{\frac{1}{2}} \to 0 \Rightarrow \|Tu_n\| \to 0 \Rightarrow \forall y' \in Y'$ je $|y'(Tu_n)| \leq \|y'\|\|Tu_n\| \to 0$. $\mathcal{R}(T') = X' \Rightarrow \forall x' \in X\, \exists y' \in Y'$: $x' = T'y'$, tj. $x'(u_n) = y'(Tu_n) \to 0$ pro $\forall x' \in X' \Rightarrow u_n \xrightarrow{sl.} 0 \overset{3.17}{\Rightarrow} \{\|u_n\|\}$ je ohraničená, spor s $\|u_n\| \to \infty$. □

**D.7. Důkaz věty 7.18**:
I. $\underline{\sigma(T) \subseteq [m, M]}$: Je $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ dle 7.17. Tvrzení dokážeme sporem.

Kdyby $\lambda \begin{array}{cc} > & M \\ < & m \end{array}$, tak $\lambda = \begin{array}{c} M+d \\ m-d \end{array}$ pro $d > 0$ a

$\langle T_\lambda x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \begin{array}{cc} \leq & M\langle x,x\rangle - \lambda\langle x,x\rangle \\ \geq & m\langle x,x\rangle - \lambda\langle x,x\rangle \end{array} = \begin{array}{cc} - & d\|x\|^2 \\ & d\|x\|^2 \end{array}$ pro $x \neq 0$.

Odtud $|\langle T_\lambda x, x\rangle| \geq d\|x\|^2$. Současně dle Schwarzovy nerovnosti 2.60(5°) platí také $|\langle T_\lambda x, x\rangle| \leq \|T_\lambda x\|\,\|x\|$, takže celkem $\|T_\lambda x\|\,\|x\| \geq d\|x\|^2$ a tedy $\|T_\lambda x\| \geq d\|x\|$ (tato nerovnost zřejmě platí i pro $x = 0$) $\overset{7.15}{\Rightarrow} \lambda \in \rho(T)$, spor.

II. $\underline{M \in \sigma(T)}$:

$\underline{(a)\ 0 \leq m \leq M}$ dle 3.43 je $M = \|T\|$, kde

$M = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle \Rightarrow \exists\,\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$: $\langle Tx_n, x_n\rangle = M - \delta_n$, $\delta_n \to 0$.

Dále $\|Tx_n\| \leq \|T\|\,\|x_n\| = \|T\| = M$ a odtud

$$\begin{aligned}\|T_M x_n\|^2 &= \|Tx_n - Mx_n\|^2 = \langle Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n\rangle = \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2M\langle Tx_n, x_n\rangle + M^2\|x_n\|^2 \leq M^2 - 2M(M-\delta_n) + M^2 = \\ &= 2M\delta_n \to 0.\end{aligned}$$

Dle 7.16(2) je tak $M \in \sigma(T)$.

$\underline{(b)\ m \leq M}$ libovolné $\Rightarrow$

$$\inf_{\|x\|=1} \langle T_m x, x\rangle = \inf_{\|x\|=1} (\langle Tx, x\rangle - m\overbrace{\langle x, x\rangle}^{=1}) = m - m = 0,$$

$$\sup_{\|x\|=1} \langle T_m x, x\rangle = \sup_{\|x\|=1} (\langle Tx, x\rangle - m\overbrace{\langle x, x\rangle}^{=1}) = M - m,$$

takže dle (a) $M - m \in \sigma(T_m) \overset{7.16(2)}{\Rightarrow} \exists\{x_n\}, \|x_n\| = 1$: $\|(T - mI - (M-m)I)x_n\| \to 0$, tj. $\|(T - MI)x_n\| \to 0$, tj. $\|T_M x_n\| \to 0 \overset{7.16(2)}{\Rightarrow} M \in \sigma(T)$.

III. $\underline{m \in \sigma(T)}$: $-M = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle -Tx, x\rangle$, $-m = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle -Tx, x\rangle \overset{II.}{\Rightarrow} -m \in \sigma(-T)$, neboť $(-T)^* = -T^* = -T \overset{7.16(2)}{\Rightarrow} \exists\,\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$: $\|(-T - (-m)I)x_n\| = \|(T - mI)x_n\| \to 0 \Rightarrow \|T_m x_n\| \to 0 \overset{7.16(2)}{\Rightarrow} m \in \sigma(T)$. □

# E ALGORITMY INVERZE A PSEUDOINVERZE OPERÁTORŮ

**Lemma E.1.** *Nechť $T \in \mathcal{B}(H,H)$, $T = T^*$, $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$. Pak $\dot{T} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{R}(T)$ je TLI a $x_n := (I_{\mathcal{R}(T)} - \lambda\dot{T})^n x = (I_H - \lambda T)^n x \in \mathcal{R}(T)$ pro $\forall\, x \in \mathcal{R}(T)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ a libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$.*

*Důkaz.* $\dot{T}$ je TLI dle 4.12. Nechť $x \in \mathcal{R}(T)$ je libovolný. Tvrzení dokážeme úplnou indukcí vzhledem k $n$:

- $\underline{n=0}$: $(I_{\mathcal{R}(T)} - \lambda\dot{T})^0 x = I_{\mathcal{R}(T)} x = x = (I_H - \lambda T)^0 x \in \mathcal{R}(T)$.
- $\underline{n>0}$: Jelikož dle indukčního předpokladu je $x_{n-1} = (I_{\mathcal{R}(T)} - \lambda\dot{T})^{n-1} x = (I_H - \lambda T)^{n-1} x \in \mathcal{R}(T)$, dostáváme:

$$\begin{aligned}(I_{\mathcal{R}(T)} - \lambda\dot{T})^n x &= (I_{\mathcal{R}(T)} - \lambda\dot{T})(I_{\mathcal{R}(T)} - \lambda\dot{T})^{n-1} x = (I_{\mathcal{R}(T)} - \lambda\dot{T}) x_{n-1} = x_{n-1} - \lambda\dot{T} x_{n-1}\\ &= I_H x_{n-1} - \lambda T x_{n-1} = (I_H - \lambda T) x_{n-1} = (I_H - \lambda T)(I_H - \lambda T)^{n-1} x\\ &= (I_H - \lambda T)^n x,\end{aligned}$$

  kde $(I_H - \lambda T)^n x \in \mathcal{R}(T)$, neboť $x_{n-1} - \lambda\dot{T} x_{n-1} \in \mathcal{R}(T)$.

□

**Věta E.2** (Iterační konstrukce $T^+$ pomocí $R$)**.**
*Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, $R = T^*T$ a $\lambda \in \mathbb{R}$: $0 < \lambda < \frac{2}{\|R\|} = \frac{2}{\|T\|^2}$. Pak*

$$R^+ x = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \big[(I_{H_1} - \lambda R)^n P_{\mathcal{R}(T^*)} x\big]\ \forall\, x \in H_1 \quad a \quad T^+ y = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \big[(I_{H_1} - \lambda R)^n T^* y\big]\ \forall\, y \in H_2.$$

*Pokud $T$ není TLI, tak $\|I_{H_1} - \lambda R\| = 1$ a $\sum_{n=0}^{\infty} (I_{H_1} - \lambda R)^n$ diverguje v $\mathcal{B}(H_1, H_1)$.*

*Důkaz.*
Pro $\mathcal{R}(T^*) = \{0\}$ tvrzení platí triviálně. Nechť dále $\mathcal{R}(T^*) \neq \{0\}$ a tedy i $H_1 \supset \{0\}$.
$R \in \mathcal{B}(H_1, H_1)$, $R = R^*$ a $\mathcal{R}(R) \overset{(I10)}{=} \mathcal{R}(T^*)$ je uzavřený dle 4.12, tj. H-podprostor v $H_1$. Pak pro každé $x \in H_1$ dostáváme

$$\begin{aligned}R^+ x &\overset{5.2}{=} \dot{R}^{-1} P_{\mathcal{R}(R)} x \overset{4.16,4.15(2')}{=} \Big[\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (I_{\mathcal{R}(R)} - \lambda\dot{R})^n\Big] \widehat{x} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \big[(I_{\mathcal{R}(R)} - \lambda\dot{R})^n \widehat{x}\big]\\ &\overset{E.1}{=} \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \big[(I_{H_1} - \lambda R)^n \widehat{x}\big] = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \big[(I_{H_1} - \lambda R)^n P_{\mathcal{R}(T^*)} x\big],\end{aligned}$$

neboť $0 < \lambda < \frac{2}{\|R\|} \overset{4.3(3)}{=} \frac{2}{\|\dot{R}\|}$, $\dot{R} = \dot{T}^*\dot{T}$ je TLI dle 5.2 a tedy $0 < m^2 \leq \alpha_{\dot{R}} \leq \dot{R} \leq \beta_{\dot{R}} \leq M^2$ dle 4.10/3°. Odtud pro každé $y \in H_2$ dostáváme

$$T^+ y \overset{(I11)}{=} R^+ T^* y = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \big[(I_{H_1} - \lambda R)^n P_{\mathcal{R}(T^*)} T^* y\big] = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \big[(I_{H_1} - \lambda R)^n T^* y\big].$$

V případě, že $T$ není TLI, pak s uvážením 4.10/1°, 3°, 5° ani $R = T^*T$ nemůže být TLI a zejména $\alpha_R = 0$ (totiž $\alpha_R \geq 0$ platí vždy, ale ostrá nerovnost nikoli). Pak ovšem nemůže $\sum_{n=0}^{\infty} (I_{H_1} - \lambda R)^n$ konvergovat v $\mathcal{B}(H_1, H_1)$, neboť jinak by $T$ byl TLI dle 4.15(1'), což je spor. Současně máme dle 4.16:
$\|I_{H_1} - \lambda R\| = \max(|1 - \lambda\alpha_R|, |1 - \lambda\beta_R|) = \max(1, |1 - \lambda\|R\||) = 1$, neboť $0 < \lambda\|R\| < 2$. □

**Věta E.3** (Iterační konstrukce $T^+$ pomocí $R^2$).
*Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, $R = T^*T$ a $\lambda \in \mathbb{R}$: $0 < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{\|R\|} = \frac{\sqrt{2}}{\|T\|^2}$. Pak*

$$R^+x = \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} [(I_{H_1} - (\lambda R)^2)^n Rx] \ \forall x \in H_1 \quad a \quad T^+y = \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} [(I_{H_1} - (\lambda R)^2)^n RT^*y] \ \forall y \in H_2.$$

*Pokud $T$ není TLI, tak $\|I_{H_1} - (\lambda R)^2\| = 1$ a $\sum_{n=0}^{\infty}(I_{H_1} - (\lambda R)^2)^n$ diverguje v $\mathcal{B}(H_1, H_1)$.*

*Důkaz.*
Pro $\mathcal{R}(T^*) = \{0\}$ tvrzení platí triviálně. Nechť dále $\mathcal{R}(T^*) \neq \{0\}$ a tedy i $H_1 \supset \{0\}$.
$R \in \mathcal{B}(H_1, H_1)$, $R = R^*$ a $\mathcal{R}(T^*) \overset{(I10)}{=} \mathcal{R}(R) \overset{4.3(2)}{=} \mathcal{R}(\dot{R}) = \mathcal{R}(\dot{R}^2)$ je uzavřený dle 4.12, tj. H-podprostor v $H_1$. Pak

$$\begin{aligned} R^+ &\overset{5.2}{=} \dot{R}^{-1}P_{\mathcal{R}(R)} \overset{(I10)}{=} \dot{R}^{-1}P_{\mathcal{R}(T^*)} = \dot{R}^{-1}\dot{R}^{-1}\dot{R}P_{\mathcal{R}(T^*)} = (\dot{R}^2)^{-1}\dot{R}P_{\mathcal{R}(T^*)} = (\dot{R}^2)^{-1}RP_{\mathcal{R}(T^*)} \\ &\overset{(I14)}{=} (\dot{R}^2)^{-1}R. \end{aligned}$$

a odtud pro každé $x \in H_1$ dostáváme s uvážením $\dot{R}^2 = (R^2)^{\cdot}$:

$$\begin{aligned} R^+x &= (\dot{R}^2)^{-1}Rx \overset{4.16, 4.15(2')}{=} \Big[\lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty}(I_{\mathcal{R}(T^*)} - \lambda^2\dot{R}^2)^n\Big]Rx = \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty}[(I_{\mathcal{R}(T^*)} - \lambda^2\dot{R}^2)^n Rx] \\ &\overset{E.1}{=} \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty}[(I_{H_1} - (\lambda R)^2)^n Rx], \end{aligned}$$

neboť $\dot{R} = \dot{T}^*\dot{T}$ je samoadjungovaný, $0 < \lambda^2 < \frac{2}{\|T\|^4} \overset{5.8(2)}{=} \frac{2}{\|R\|^2} \overset{4.3(3)}{=} \frac{2}{\|\dot{R}\|^2} \overset{3.28}{=} \frac{2}{\|\dot{R}^*\dot{R}\|} = \frac{2}{\|\dot{R}^2\|}$, $\dot{R}^2 = \dot{R}^*\dot{R}$ je TLI dle 5.2 a tedy $0 < m \leq \alpha_{\dot{R}^2} \leq \dot{R}^2 \leq \beta_{\dot{R}^2} \leq M$ dle 4.10/3°. Odtud pro každé $y \in H_2$ dostáváme

$$T^+y \overset{(I11)}{=} R^+T^*y = \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty}[(I_{H_1} - (\lambda R)^2)^n RT^*y].$$

V případě, že $T$ není TLI, pak s uvážením 4.10/1°, 3°, 5° ani $R = T^*T$ a ze stejných důvodů ani $R^2 = R^*R$ nemůže být TLI a zejména $\alpha_{R^2} = 0$ (totiž $\alpha_{R^2} \geq 0$ platí vždy, ale ostrá nerovnost nikoli). Pak ovšem nemůže $\sum_{n=0}^{\infty}(I_{H_1} - \lambda^2R^2)^n$ konvergovat v $\mathcal{B}(H_1, H_1)$, neboť jinak by $R^2$ byl TLI dle 4.15(1'), což je spor. Současně máme dle 4.16:
$\|I_{H_1} - \lambda^2R^2\| = \max(|1 - \lambda^2\alpha_{R^2}|, |1 - \lambda^2\beta_{R^2}|) = \max(1, |1 - \lambda^2\|R^2\||) = 1$, neboť $0 < \lambda^2\|R^2\| = \lambda^2\|R\|^2 < 2$. □

**Důsledek E.4** (věty E.2: algoritmus pro $T^+y$ a $\widehat{y} = P_{\mathcal{R}(T)}y$ pomocí $R$).
*Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, $0 < A \leq \dot{R} \leq B$ a $y \in H_2$ libovolný. Označíme-li $R_\lambda := I_{H_1} - \lambda R$, pak pro $0 < \lambda < \frac{2}{B}$ spočteme:*
1° **(počáteční krok)**
$x_1 = \lambda T^*y \in \mathcal{R}(T^*)$
2° **(iterační kroky)**
$x_{n+1} = x_1 + R_\lambda x_n = x_n + x_1 - \lambda Rx_n \in \mathcal{R}(T^*)$ *pro* $n = 1, 2, \ldots$
3° **(závěrečný krok po poslední provedené iteraci)**
$y_{n+1} = Tx_{n+1} \in \mathcal{R}(T)$
*Pak je*

$$\begin{aligned} 0 < &A \leq \alpha_{\dot{R}} \overset{4.5, 4.6}{=} \frac{1}{\|\dot{R}^{-1}\|} \overset{5.8(1)}{=} \frac{1}{\|R^+\|} \overset{5.8(3)}{=} \frac{1}{\|T^+\|^2}, \\ \infty > &B \geq \beta_{\dot{R}} \overset{3.49}{=} \|\dot{R}\| \overset{4.3(3)}{=} \|R\| \overset{5.8(2)}{=} \|T\|^2, \end{aligned}$$

$$r_\lambda := \|I_{\mathcal{R}(T^*)} - \lambda\dot{R}\|_{\mathcal{R}(T^*)} < 1$$

*a platí:*

(a) $x_n \xrightarrow{H_1} x_0 := T^+y \overset{(I11)}{=} R^+T^*y$

$y_n \xrightarrow{H_2} \widehat{y} := P_{\mathcal{R}(T)}y \overset{5.3(1)}{=} TT^+y = Tx_0$ *(nejlepší aproximace y v* $\mathcal{R}(T)$*)*

(b) $\|x_n - x_0\| \leq r_\lambda^n \|x_0\|$ $\quad$ *(*$x_0 \neq 0 \Rightarrow$ *relativní chyba* $\frac{\|x_n - x_0\|}{\|x_0\|} \leq r_\lambda^n$*)*

$\|y_n - \widehat{y}\| \leq \sqrt{\frac{B}{A}}\, r_\lambda^n \|\widehat{y}\|$ $\quad$ *(*$\widehat{y} \neq 0 \Rightarrow$ *relativní chyba* $\frac{\|y_n - \widehat{y}\|}{\|\widehat{y}\|} \leq \sqrt{\frac{B}{A}}\, r_\lambda^n$*),*

*kde* $\sqrt{\frac{B}{A}} \geq \sqrt{\frac{\beta_{\dot{R}}}{\alpha_{\dot{R}}}} = \sqrt{\|R\|\|R^+\|} \overset{5.8}{=} \|T\|\|T^+\| \overset{4.3,5.8}{=} \|\dot{T}\|\|\dot{T}^{-1}\| \overset{5.10}{=}$ `číslo podmíněnosti` $\kappa(\dot{T})$ `operátoru` $\dot{T}$ `(`$\geq 1$`)`

(c) $\|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{A}\, r_\lambda^n \|T^*y\|$

$\|y_n - \widehat{y}\| \leq \frac{\sqrt{B}}{A}\, r_\lambda^n \|T^*y\|$

*Přitom speciálně pro* $\lambda = \frac{2}{A+B}$ *je* $r_\lambda \leq \frac{B-A}{A+B} = \frac{d}{2+d}$*, kde* $d = \frac{B}{A} - 1 \geq \frac{\beta_{\dot{R}}}{\alpha_{\dot{R}}} - 1 =$ *odchylka kvadrátu čísla podmíněnosti operátoru* $\dot{T}$ *(resp. čísla podmíněnosti operátoru* $\dot{R}$ *dle 4.11, neboť* $\dot{R}^*\dot{R} = \dot{R}^2$*) od nejlepší možné hodnoty 1 (* $\Leftrightarrow$ $A = \alpha_{\dot{R}} = \beta_{\dot{R}} = B$*), kdy* $\lambda = \frac{1}{A}$*,* $r_\lambda = 0$ *a* $\dot{R} = A\ I_{\mathcal{R}(T^*)}$*.*

*Důkaz.* Je $0 < \lambda < \frac{2}{B} \leq \frac{2}{\|R\|}$ a lze tedy užít větu E.2.

I. (a) $x_n := \lambda \sum_{k=0}^{n-1}[R_\lambda^k T^*y] \xrightarrow{H_1} x_0$ pro $n = 1, 2, \ldots$ dle E.2, což spolu se spojitostí $T$ dává také $y_n := Tx_n \xrightarrow{H_2} Tx_0 = \widehat{y}$. Přitom je $x_1 = \lambda R_\lambda^0 T^*y = \lambda T^*y$ (viz 1°) a $R_\lambda x_n = \lambda \sum_{k=1}^{n}[R_\lambda^k T^*y] = x_{n+1} - \lambda R_\lambda^0 T^*y = x_{n+1} - x_1$ (viz 2°).

(b) $x_0 - x_n = \lambda \sum_{k \geq n}[R_\lambda^k T^*y] = R_\lambda^n(\lambda \sum_{k=0}^{\infty}[R_\lambda^k T^*y]) \overset{E.2}{=} R_\lambda^n x_0 = (I_{\mathcal{R}(T^*)} - \lambda\dot{R})^n x_0$, neboť $x_0 \in \mathcal{R}(T^*)$ dle 5.4. Odtud

$$\|x_n - x_0\| \leq \|(I_{\mathcal{R}(T^*)} - \lambda\dot{R})^n\|\|x_0\| \overset{3.4}{\leq} \|(I_{\mathcal{R}(T^*)} - \lambda\dot{R})\|^n\|x_0\| = r_\lambda^n\|x_0\| \quad \text{a}$$

$$\begin{aligned}\|y_n - \widehat{y}\| &\overset{(a)}{=} \|T(x_n) - T(x_0)\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\|\|x_n - x_0\| \leq \sqrt{B} r_\lambda^n \|x_0\| \\ &= \sqrt{B} r_\lambda^n \|P_{\mathcal{R}(T^*)}x_0\| \overset{5.3(1)}{=} \sqrt{B} r_\lambda^n \|T^+Tx_0\| = \sqrt{B} r_\lambda^n \|T^+\widehat{y}\| \leq \sqrt{B} r_\lambda^n \|T^+\|\|\widehat{y}\| \\ &\leq \sqrt{B} r_\lambda^n \frac{1}{\sqrt{A}}\|\widehat{y}\|.\end{aligned}$$

(c) $x_0 = T^+y \overset{(I11)}{=} R^+T^*y \Rightarrow \|x_0\| \leq \|R^+\|\|T^*y\| \leq \frac{1}{A}\|T^*y\| \Rightarrow$

$\|x_n - x_0\| \overset{(b)}{\leq} r_\lambda^n\|x_0\| \leq \frac{1}{A} r_\lambda^n \|T^*y\|$ a $\|y_n - \widehat{y}\| \leq \sqrt{B} r_\lambda^n \|x_0\| \leq \frac{\sqrt{B}}{A} r_\lambda^n \|T^*y\|$.

II. $\dot{R} = \dot{T}^*\dot{T} : \mathcal{R}(T^*) \to \mathcal{R}(T^*)$, $\dot{R}^* = \dot{R}$ a $\lambda = \frac{2}{A+B} \overset{4.18(2)}{\Rightarrow}$

$$r_\lambda = \|I_{\mathcal{R}(T^*)} - \lambda\dot{R}\|_{\mathcal{R}(T^*)} \leq \frac{B-A}{A+B} = \frac{A(\frac{B}{A} - 1)}{A(\frac{B}{A} - 1 + 2)} = \frac{d}{d+2}.$$

Speciálně $A = B \Rightarrow \lambda = \frac{2}{2A} = \frac{1}{A}$, $r_\lambda = 0 \Rightarrow I_{\mathcal{R}(T^*)} - \frac{1}{A}\dot{R} = 0 \Rightarrow \dot{R} = AI_{\mathcal{R}(T^*)}$ (viz též 4.17).

□

**Důsledek E.5** (věty E.3: algoritmus pro $R^+\widetilde{x}$, $T^+y$ a $\widehat{y} = P_{\mathcal{R}(T)}y$ pomocí $R^2$)**.**
*Nechť* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*,* $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$*,* $0 < A \leq \dot{R} \leq B$ *a* $\widetilde{x} \in H_1$*,* $y \in H_2$ *libovolné. Označíme-li* $R_\lambda := I_{H_1} - (\lambda R)^2$*, pak pro* $0 < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{B}$ *spočteme:*

1° **(počáteční krok)**

$x_1 = \lambda^2 R\widetilde{x} \in \mathcal{R}(T^*)$*, např.* $\widetilde{x} \approx T^*y$

2° **(iterační kroky)**
$x_{n+1} = x_1 + R_\lambda x_n = x_n + x_1 - \lambda^2 R^2 x_n \in \mathcal{R}(T^*)$ *pro* $n = 1, 2, \dots$
3° **(závěrečný krok po poslední provedené iteraci)**
$y_{n+1} = Tx_{n+1} \in \mathcal{R}(T)$
*Pak je*

$$0 < A \leq \alpha_{\dot{R}} \overset{4.5,4.6}{=} \frac{1}{\|\dot{R}^{-1}\|} \overset{5.8(1)}{=} \frac{1}{\|R^+\|} \overset{5.8(3)}{=} \frac{1}{\|T^+\|^2},$$
$$\infty > B \geq \beta_{\dot{R}} \overset{3.49}{=} \|\dot{R}\| \overset{4.3(3)}{=} \|R\| \overset{5.8(2)}{=} \|T\|^2,$$

$$r_\lambda := \|I_{\mathcal{R}(T^*)} - (\lambda\dot{R})^2\|_{\mathcal{R}(T^*)} < 1$$

*a platí:*

(a) $x_n \xrightarrow{H_1} \widetilde{x}_0 := R^+\widetilde{x} \overset{(I14)}{=} R^+\widehat{\widetilde{x}} \approx R^+T^*y \overset{(I11)}{=} T^+y =: x_0$, *kde* $\widehat{\widetilde{x}} = P_{\mathcal{R}(T^*)}\widetilde{x}$
$y_n \xrightarrow{H_2} \widetilde{y}_0 := T\widetilde{x}_0 \approx Tx_0 = TT^+y \overset{5.3(1)}{=} P_{\mathcal{R}(T)}y = \widehat{y}$ *(nejlepší aproximace* $y$ *v* $\mathcal{R}(T)$*)*

(b) $\|x_n - \widetilde{x}_0\| \leq r_\lambda^n \|\widetilde{x}_0\|$ ($\widetilde{x}_0 \neq 0 \Rightarrow$ *relativní chyba* $\frac{\|x_n - \widetilde{x}_0\|}{\|\widetilde{x}_0\|} \leq r_\lambda^n$*)*
$\|y_n - \widetilde{y}_0\| \leq \sqrt{\frac{B}{A}}\, r_\lambda^n \|\widetilde{y}_0\|$ ($\widetilde{y}_0 \neq 0 \Rightarrow$ *relativní chyba* $\frac{\|y_n - \widetilde{y}_0\|}{\|\widetilde{y}_0\|} \leq \sqrt{\frac{B}{A}}\, r_\lambda^n$*),*
*kde* $\sqrt{\frac{B}{A}} \geq \sqrt{\frac{\beta_{\dot{R}}}{\alpha_{\dot{R}}}} =$ `číslo podmíněnosti operátoru` $\dot{T}$ $(\geq 1)$ *jako v E.4(b)*

(c) $\|x_n - \widetilde{x}_0\| \leq \frac{1}{A}\, r_\lambda^n \|\widetilde{x}\|$
$\|y_n - \widetilde{y}_0\| \leq \frac{\sqrt{B}}{A}\, r_\lambda^n \|\widetilde{x}\|$

*Přitom speciálně pro* $\lambda = \sqrt{\frac{2}{A^2+B^2}}$ *je* $r_\lambda \leq \frac{B^2-A^2}{A^2+B^2} = \frac{d}{2+d}$*, kde* $d = \left(\frac{B}{A}\right)^2 - 1 \geq \left(\frac{\beta_{\dot{R}}}{\alpha_{\dot{R}}}\right)^2 - 1 =$ *odchylka 4. mocniny čísla podmíněnosti operátoru* $\dot{T}$ *(resp. kvadrátu čísla podmíněnosti operátoru* $\dot{R}$*) od nejlepší možné hodnoty 1 (* $\Leftrightarrow$ $A = \alpha_{\dot{R}} = \beta_{\dot{R}} = B$*), kdy* $\lambda = \frac{1}{A}$*,* $r_\lambda = 0$ *a* $\dot{R} = A\, I_{\mathcal{R}(T^*)}$.

*Důkaz.* Je $0 < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{B} \leq \frac{\sqrt{2}}{\|R\|}$ a lze tedy užít větu E.3.

I. Analogicky jako v důkazu E.4 při záměnách $\lambda \rightsquigarrow \lambda^2$, $T^*y \rightsquigarrow R\widetilde{x}$, $x_0 \rightsquigarrow \widetilde{x}_0$ a $\widehat{y} \rightsquigarrow \widetilde{y}_0$ dostáváme 1° až 3°, kde:
   (a) $x_n := \lambda^2 \sum_{k=0}^{n-1} [R_\lambda^k R\widetilde{x}] \xrightarrow{H_1} R^+\widetilde{x} =: \widetilde{x}_0$ pro $n = 1, 2, \dots$ dle E.3 a
   $y_n := Tx_n \xrightarrow{H_2} T\widetilde{x}_0 = \widetilde{y}_0$.
   (b) $\widetilde{x}_0 - x_n = R_\lambda^n \widetilde{x}_0 = (I_{\mathcal{R}(T^*)} - (\lambda\dot{R})^2)^n \widetilde{x}_0$, neboť $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{R}(R^+) \overset{5.2}{=} \mathcal{R}(R^*) = \mathcal{R}(R) \overset{(I10)}{=} \mathcal{R}(T^*)$. Odtud opět dostáváme $\|x_n - \widetilde{x}_0\| \leq r_\lambda^n \|\widetilde{x}_0\|$ a $\|y_n - \widetilde{y}_0\| \leq \|T\|\|x_n - \widetilde{x}_0\| \leq \sqrt{B} r_\lambda^n \|\widetilde{x}_0\| = \sqrt{B} r_\lambda^n \|P_{\mathcal{R}(T^*)}\widetilde{x}_0\| = \sqrt{B} r_\lambda^n \|T^+T\widetilde{x}_0\| \leq \sqrt{B} r_\lambda^n \frac{1}{\sqrt{A}} \|\widetilde{y}_0\|$.
   (c) $\widetilde{x}_0 = R^+\widetilde{x} \Rightarrow \|\widetilde{x}_0\| \leq \|R^+\|\|\widetilde{x}\| \leq \frac{1}{A}\|\widetilde{x}\| \overset{(b)}{\Rightarrow} \|x_n - \widetilde{x}_0\| \leq \frac{1}{A} r_\lambda^n \|\widetilde{x}\|$ a $\|y_n - \widetilde{y}_0\| \leq \sqrt{B} r_\lambda^n \|\widetilde{x}_0\| \leq \frac{\sqrt{B}}{A} r_\lambda^n \|\widetilde{x}\|$.

II. Postupujeme opět jako v důkazu E.4/II. se záměnami:
$\lambda \rightsquigarrow \lambda^2$, $\dot{R} \rightsquigarrow \dot{R}^2$, $\alpha_{\dot{R}} \rightsquigarrow \alpha_{\dot{R}^2} \overset{4.11}{=} \alpha_{\dot{R}}^2$, $\beta_{\dot{R}} \rightsquigarrow \beta_{\dot{R}^2} \overset{4.11}{=} \beta_{\dot{R}}^2$, $A \rightsquigarrow A^2$ a $B \rightsquigarrow B^2$. Pak $\lambda = \sqrt{\frac{2}{A^2+B^2}} \rightsquigarrow \lambda^2 = \frac{2}{A^2+B^2} \Rightarrow r_\lambda \leq \frac{B^2-A^2}{A^2+B^2} = \frac{d}{2+d}$, kde $d = \left(\frac{B}{A}\right)^2 - 1$.
Speciálně $A = B \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{2}{2A^2}} = \frac{1}{A}$, $r_\lambda = 0 \Rightarrow I_{\mathcal{R}(T^*)} - (\frac{1}{A}\dot{R})^2 = 0 \Rightarrow$
$\dot{R}^2 = A^2 I_{\mathcal{R}(T^*)}$.

□

*Poznámka* E.6.

(1) Matice:
V 5.11 jsme ukázali, že $\alpha_{\dot{R}}$ je minimální a $\beta_{\dot{R}}$ maximální vlastní číslo matice $\dot{R}$. Navíc příklad 3.42 ukazuje, že $\alpha_{\dot{R}}$ je také minimální kladné (nenulové) vlastní číslo matice $R$ a $\beta_{\dot{R}}$ jeho maximální vlastní číslo.
Pak tedy $[A, B]$ představuje interval, v němž leží všechna nenulová (a tedy kladná) vlastní čísla matice $R$, resp. $[\sqrt{A}, \sqrt{B}]$ je obdobný interval obsahující všechna singulární čísla matice $T$.
Pokud takový interval nalezneme, umožní nám to při speciální volbě $\lambda$ (viz E.4 a E.5) vyjádřit horní odhady chyb v (b) a (c) pouze pomocí těchto mezí $A, B$.

(2) Případ $A = B$:
$A = B \overset{4.17}{\Rightarrow} \dot{R} = A\, I_{\mathcal{R}(T^*)}$, tj. $\dot{R}$ je **dilatace** (při $A > 1$), **kontrakce** (při $A < 1$), resp. **identita** (při $A = 1$).
V takovém případě dostáváme
- v algoritmu E.4: $\lambda = \frac{2}{A+B} = \frac{1}{A} \;\Rightarrow\; r_\lambda = 0 \;\Rightarrow\; I_{\mathcal{R}(T^*)} - \frac{1}{A} A I_{\mathcal{R}(T^*)} = 0 \;\Rightarrow\; R_\lambda x = 0\ \forall\, x \in \mathcal{R}(T^*) \;\Rightarrow\; x_n = x_1$ pro každé $n = 1, 2, \ldots \overset{(a)}{\Rightarrow} T^+ y = x_0 = x_1 = \frac{1}{A} T^* y$ a $\widehat{y} = \frac{1}{A} T T^* y = \frac{1}{A} S y$.
- v algoritmu E.5: $\lambda^2 = \frac{2}{A^2+B^2} = \frac{1}{A^2} \;\Rightarrow\; r_\lambda = 0 \;\Rightarrow\; I_{\mathcal{R}(T^*)} - \frac{1}{A^2} A^2 I_{\mathcal{R}(T^*)} = 0 \;\Rightarrow\; R_\lambda x = 0\ \forall\, x \in \mathcal{R}(T^*) \;\Rightarrow\; x_n = x_1$ pro každé $n = 1, 2, \ldots \overset{(a)}{\Rightarrow} R^+ \widetilde{x} = \widetilde{x}_0 = x_1 = \frac{1}{A^2} R \widetilde{x} = \frac{1}{A^2} \dot{R} \widetilde{x} = \frac{1}{A} \widetilde{x}$ a $\widetilde{y}_0 = \frac{1}{A} T \widetilde{x}$.

Stejné výsledky obdržíme přímo užitím explicitního vyjádření pseudoinverze dle 5.2, kde
$$R^+ = \dot{R}^{-1} P_{\mathcal{R}(T^*)} = \frac{1}{A} I_{\mathcal{R}(T^*)} P_{\mathcal{R}(T^*)} = \frac{1}{A} P_{\mathcal{R}(T^*)} \;\Rightarrow\; \begin{cases} T^+ y = R^+ T^* y = \frac{1}{A} T^* y & \text{pro E.4} \\ \widetilde{x}_0 = R^+ \widetilde{x} = \frac{1}{A} \widetilde{x} & \text{pro E.5} \end{cases}$$

(3) Numerická stabilita:

**a) Stabilita versus rychlost konvergence posloupnosti** $\{x_n\}$

Jak ilustruje poznámka 5.12, problém stability posloupnosti $\{x_n\}$ spočívá v udržení jejích prvků $x_n$ v prostoru $\mathcal{R}(T^*)$ – jinak dochází ke ztrátě konvergence. Z tohoto pohledu vychází algoritmus E.5 na bázi věty E.3 numericky stabilnější než algoritmus E.4 na bázi věty E.2. Děje se tak ale na úkor rychlosti konvergence. Totiž při optimální volbě $A = \alpha_{\dot{R}}$, $B = \beta_{\dot{R}}$ a $\lambda = \sqrt{\frac{2}{A^2+B^2}}$ v algoritmu E.5, resp. $\lambda = \frac{2}{A+B}$ v algoritmu E.4, nabývá $r_\lambda \overset{4.18(2)}{=} \frac{d}{2+d}$ větší hodnoty pro algoritmus E.5 než pro algoritmus E.4, neboť $\frac{d}{2+d}$ je rostoucí funkce vzhledem k $d$ a $\left(\frac{B}{A}\right)^2 - 1 > \frac{B}{A} - 1$.
V (a) až (c) tedy $r_\lambda^n$ klesá pomaleji v algoritmu E.5 než v algoritmu E.4, a tudíž k dosažení srovnatelné přesnosti je třeba u algoritmu E.5 většího počtu iterací než u algoritmu E.4.

**b) Problém stability se netýká posloupnosti** $\{y_n\}$

$H_1 \overset{4.1(3)}{=} \mathcal{R}(T^*) \oplus \mathcal{N}(T) \;\Rightarrow\;$ každá třída $T^{-1}y = \{x \,|\, Tx = y\}$, $y \in \mathcal{R}(T)$, faktor prostoru $H_1/\mathcal{N}(T)$ obsahuje právě jeden prvek $x_0 \in \mathcal{R}(T^*)$, přičemž platí $x_0 = P_{\mathcal{R}(T^*)} x\ \forall\, x \in T^{-1} y$. Přitom $x_0 = T^+ y$ dle 5.4. Jestliže v E.4 použijeme místo $T^* y$ libovolný prvek $\widetilde{x} \in H_1$, pak $y_n = T x_n$ vždy konverguje k $T\widetilde{x}$, zatímco posloupnost $\{x_n\}$ konverguje pouze, když $\widetilde{x} \in \mathcal{R}(T^*)$:
Vskutku, je-li $y \in H_2$ nějaký prvek, pro nějž $T^* y = P_{\mathcal{R}(T^*)} \widetilde{x}$, pak pro $\widetilde{x}_1 = \lambda \widetilde{x}$ je $P_{\mathcal{R}(T^*)} \widetilde{x}_1 = \lambda T^* y = x_1$ a totéž platí indukcí dle $n$ pro $\forall\, n \in \mathbb{N}$, neboť $P_{\mathcal{R}(T^*)} R = R = R P_{\mathcal{R}(T^*)}$ dle (I14). Pak totiž $P_{\mathcal{R}(T^*)} \widetilde{x}_{n+1} = P_{\mathcal{R}(T^*)} \widetilde{x}_n + P_{\mathcal{R}(T^*)} \widetilde{x}_1 + \lambda P_{\mathcal{R}(T^*)} R \widetilde{x}_n = x_n + x_1 + \lambda R x_n = x_{n+1}$.
Tedy prvky posloupnosti $\{\widetilde{x}_n\}$ zůstávají v týchž kongruenčních třídách jako prvky

konvergentní posloupnosti $\{x_n\}$ a tudíž $T\widetilde{x}_n = Tx_n = y_n \to \widehat{y}$.
Zejména tedy $x_n$ v každém případě aproximuje nějaké MNČ-řešení rovnice $Tx = y$, i když ne nutně řešení $x_0 = T^+y$ s minimální normou. Samotná numericky spočtená aproximace $x_n$ nemusí být dobrá, i když dává dobrou aproximaci $y_n = Tx_n$ pro $\widehat{y}$ (kvalita závisí na čísle podmíněnosti operátoru $T$ – viz 5.10, 5.11).

**Věta E.7** (Iterační konstrukce $T^+$ pomocí $S$)**.**
*Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, $S = TT^*$ a $\lambda \in \mathbb{R}$: $0 < \lambda < \frac{2}{\|S\|} = \frac{2}{\|T\|^2}$. Pak*

$$y' := S^+y = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} [(I_{H_2} - \lambda S)^n P_{\mathcal{R}(T)} y] \quad a \quad T^+y \overset{(I12)}{=} T^*S^+y = T^*y' \ \forall\, y \in H_2.$$

*Pokud $T^*$ není TLI, tak $\|I_{H_2} - \lambda S\| = 1$ a $\sum_{n=0}^{\infty}(I_{H_2} - \lambda S)^n$ diverguje v $\mathcal{B}(H_2, H_2)$.*

*Důkaz.* $S = TT^* = (T^*)^*T^*$, $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)} \overset{4.12}{\Rightarrow} \mathcal{R}(T^*) = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$, $\|S\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$ dle 5.8(2). Tedy $S^+y$ lze spočíst pomocí věty E.2, kde zaměníme roli $T$ a $T^*$, $R$ a $S$, $H_1$ a $H_2$, a místo $x$ píšeme $y$. □

**Věta E.8** (Iterační konstrukce $T^+$ pomocí $S^2$)**.**
*Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, $S = TT^*$ a $\lambda \in \mathbb{R}$: $0 < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{\|S\|} = \frac{\sqrt{2}}{\|T\|^2}$. Pak*

$$y' := S^+y = \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} [(I_{H_2} - (\lambda S)^2)^n S y] \quad a \quad T^+y = T^*y' \ \forall\, y \in H_2.$$

*Pokud $T^*$ není TLI, tak $\|I_{H_2} - (\lambda S)^2\| = 1$ a $\sum_{n=0}^{\infty}(I_{H_2} - (\lambda S)^2)^n$ diverguje v $\mathcal{B}(H_2, H_2)$.*

*Důkaz.* $S^+y$ spočteme pomocí věty E.3, kde opět zaměníme roli $T$ a $T^*$, $R$ a $S$, $H_1$ a $H_2$, a místo $x$ píšeme $y$. □

**Důsledek E.9** (věty E.7: algoritmus pro $y'$ a $\widehat{y} = P_{\mathcal{R}(T)}y$ pomocí $S$)**.**
*Nechť $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, $0 < A \le \dot{S} \le B$ a $y_0 \in \mathcal{R}(T)$, resp. $y_0 = Sy$, $y \in H_2$ je libovolný. Označíme-li $S_\lambda := I_{H_2} - \lambda S$, pak pro $0 < \lambda < \frac{2}{B}$ spočteme:*
$1^\circ$ **(počáteční krok)**
$y_1 = \lambda y_0$, *resp.* $y_1 = \lambda S y$, $y_1 \in \mathcal{R}(T)$
$2^\circ$ **(iterační kroky)**
$y_{n+1} = y_1 + S_\lambda y_n = y_n + y_1 - \lambda S\ y_n \in \mathcal{R}(T)$ *pro* $n = 1, 2, \ldots$
*Pak je*

$$0 < A \le \alpha_{\dot{S}} \overset{4.5,4.6}{=} \frac{1}{\|\dot{S}^{-1}\|} \overset{5.8(1)}{=} \frac{1}{\|S^+\|} \overset{5.8(3)}{=} \frac{1}{\|T^+\|^2},$$
$$\infty > B \ge \beta_{\dot{S}} \overset{3.49}{=} \|\dot{S}\| \overset{4.3(3)}{=} \|S\| \overset{5.8(2)}{=} \|T\|^2,$$
$$s_\lambda := \|I_{\mathcal{R}(T)} - \lambda\dot{S}\|_{\mathcal{R}(T)} < 1$$

*a platí:*

(a) $y_n \xrightarrow{H_2} y_0' = S^+y_0$, *resp.* $y_n \xrightarrow{H_2} S^+S\ y \overset{(I13)}{=} P_{\mathcal{R}(T)}y = \widehat{y}$ *(nejlepší aproximace $y$ v $\mathcal{R}(T)$)*

(b) $\|y_n - y_0'\| \le s_\lambda^n \|y_0'\|$ $\quad$ *($y_0' \ne 0 \Rightarrow$ relativní chyba $\frac{\|y_n - y_0'\|}{\|y_0'\|} \le s_\lambda^n$), resp.*
$\|y_n - \widehat{y}\| \le s_\lambda^n \|\widehat{y}\|$ $\quad$ *($\widehat{y} \ne 0 \Rightarrow$ relativní chyba $\frac{\|y_n - \widehat{y}\|}{\|\widehat{y}\|} \le s_\lambda^n$)*

(c) $\|y_n - y_0'\| \le \frac{1}{A} s_\lambda^n \|y_0\|$, *resp.* $\|y_n - \widehat{y}\| \le \frac{1}{A} s_\lambda^n \|Sy\| \le \frac{B}{A} s_\lambda^n \|y\|$, *kde* $\frac{B}{A} \ge \frac{\beta_{\dot{S}}}{\alpha_{\dot{S}}} =$ `číslo podmíněnosti operátoru` $\dot{S}$ *neboli* `kvadrát čísla podmíněnosti operátoru` $\dot{T}$.

*Přitom speciálně pro* $\lambda = \frac{2}{A+B}$ *je* $s_\lambda \leq \frac{B-A}{A+B} = \frac{d}{2+d}$, *kde* $d = \frac{B}{A} - 1 \geq \frac{\beta_{\dot S}}{\alpha_{\dot S}} - 1 =$ *odchylka kvadrátu čísla podmíněnosti operátoru* $\dot T$ *(resp. čísla podmíněnosti operátoru* $\dot S$*) od nejlepší možné hodnoty* 1 *(* $\Leftrightarrow$ $A = \alpha_{\dot S} = \beta_{\dot S} = B$*), kdy* $\lambda = \frac{1}{A}$, $s_\lambda = 0$ *a* $\dot S = A\ I_{\mathcal{R}(T)}$.

*Důkaz.* Postupujeme duálně k důkazu E.4 se záměnami: $T \rightsquigarrow T^*$, $R \rightsquigarrow S$, $H_1 \leftrightsquigarrow H_2$, $R_\lambda \rightsquigarrow S_\lambda$, $r_\lambda \rightsquigarrow s_\lambda$, $T^*y \rightsquigarrow y_0$ (resp. $Sy$), $x_n \rightsquigarrow y_n$ při užití věty E.7 místo věty E.2, kde $y \rightsquigarrow y_0 \in \mathcal{R}(T) \Rightarrow P_{\mathcal{R}(T)}y_0 = y_0$.

I. (a) $y_n := \lambda \sum_{k=0}^{n-1}[S_\lambda^k y_0] \xrightarrow{H_2} S^+y_0 = y_0'$ $(= S^+Sy = \widehat{y}$ pro $y_0 = Sy)$. Přitom je $y_1 = \lambda y_0$ (viz 1°) a $S_\lambda y_n = \lambda \sum_{k=1}^{n}[S_\lambda^k y_0] = y_{n+1} - \lambda S_\lambda^0 y_0 = y_{n+1} - y_1$ (viz 2°).

(b) $y_0' - y_n = \lambda \sum_{k\geq n}[S_\lambda^k y_0] = S_\lambda^n(\lambda \sum_{k=0}^{\infty}[S_\lambda^k y_0]) = S_\lambda^n y_0' = (I_{\mathcal{R}(T)} - \lambda \dot S)^n y_0'$, neboť dle 5.4
$y_0' \in \mathcal{R}(S^*) = \mathcal{R}(S) \overset{(I10)}{=} \mathcal{R}(T)$. Dále postupujeme jako v důkazu E.4 I.(b).

(c) $y_0' = S^+y_0 \Rightarrow \|y_0'\| \leq \|S^+\|\|y_0\| \leq \frac{1}{A}\|y_0\| \Rightarrow$ (c) užitím (b).

II. Postupujeme opět analogicky k důkazu E.4 II. Poznamenejme jen, že
$\sqrt{\frac{\beta_{\dot S}}{\alpha_{\dot S}}} \overset{5.10}{=} \|\dot T^*\|\|\dot T^{*-1}\| \overset{3.32}{=} \|\dot T^*\|\|(\dot T^{-1})^*\| \overset{3.27}{=} \|\dot T\|\|\dot T^{-1}\|$ je číslo podmíněnosti nejen operátoru $\dot T^*$, ale i $\dot T$.

□

**Důsledek E.10** (věty E.8: algoritmus pro $y'$, $T^+y$ a $\widehat{y} = P_{\mathcal{R}(T)}y$ pomocí $S^2$)**.**
*Nechť* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)}$, $0 < A \leq \dot S \leq B$ *a* $y \in H_2$ *je libovolný. Označíme-li* $S_\lambda := I_{H_2} - (\lambda S)^2$, *pak pro* $0 < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{B}$ *spočteme:*

1° **(počáteční krok)**

$y_1 = \lambda^2 Sy \overset{(I14)}{=} \lambda^2 S\ \widehat{y} \in \mathcal{R}(T)$

2° **(iterační kroky)**

$y_{n+1} = y_1 + S_\lambda y_n = y_n + y_1 - \lambda^2 S^2 y_n \in \mathcal{R}(T)$ *pro* $n = 1, 2, \ldots$

3° **(závěrečné kroky po poslední provedené iteraci)**

$x_{n+1} = T^* y_{n+1} \in \mathcal{R}(T^*)$

$\widehat{y}_{n+1} = Tx_{n+1} \in \mathcal{R}(T)$

*Pak je*

$$0 < A \leq \alpha_{\dot S} \overset{4.5,4.6}{=} \frac{1}{\|\dot S^{-1}\|} \overset{5.8(1)}{=} \frac{1}{\|S^+\|} \overset{5.8(3)}{=} \frac{1}{\|T^+\|^2},$$

$$\infty > B \geq \beta_{\dot S} \overset{3.49}{=} \|\dot S\| \overset{4.3(3)}{=} \|S\| \overset{5.8(2)}{=} \|T\|^2,$$

$$s_\lambda := \|I_{\mathcal{R}(T)} - (\lambda \dot S)^2\|_{\mathcal{R}(T)} < 1$$

*a platí:*

*(a)* $y_n \xrightarrow{H_2} y' = S^+y$

$x_n \xrightarrow{H_1} x_0 := T^+y \overset{(I12)}{=} T^*y'$

$\widehat{y}_n \xrightarrow{H_2} Tx_0 = TT^+y \overset{5.3(1)}{=} \widehat{y}$ *(nejlepší aproximace* $y$ *v* $\mathcal{R}(T)$*)*

*(b)* $\|y_n - y'\| \leq s_\lambda^n \|y'\|$ $\quad$ *(*$y' \neq 0 \Rightarrow$ *relativní chyba* $\frac{\|y_n - y'\|}{\|y'\|} \leq s_\lambda^n$*)*

$\|x_n - x_0\| \leq \sqrt{\frac{B}{A}} s_\lambda^n \|x_0\|$ $\quad$ *(*$x_0 \neq 0 \Rightarrow$ *relativní chyba* $\frac{\|x_n - x_0\|}{\|x_0\|} \leq \sqrt{\frac{B}{A}}\, s_\lambda^n$*)*

$\|\widehat{y}_n - \widehat{y}\| \leq \frac{B}{A} s_\lambda^n \|\widehat{y}\|$ $\quad$ *(*$\widehat{y} \neq 0 \Rightarrow$ *relativní chyba* $\frac{\|\widehat{y}_n - \widehat{y}\|}{\|\widehat{y}\|} \leq \frac{B}{A} s_\lambda^n$*), kde*

$\sqrt{\frac{B}{A}} \geq \sqrt{\frac{\beta_{\dot S}}{\alpha_{\dot S}}} =$ `číslo podmíněnosti operátoru` $\dot T$ *jako v E.9(c).*

*(c)* $\|y_n - y'\| \leq \frac{1}{A} s_\lambda^n \|\widehat{y}\| \leq \frac{1}{A} s_\lambda^n \|y\|$

$\|x_n - x_0\| \leq \frac{\sqrt{B}}{A} s_\lambda^n \|\widehat{y}\| \leq \frac{\sqrt{B}}{A} s_\lambda^n \|y\|$

$\|\widehat{y}_n - \widehat{y}\| \leq \frac{B}{A} s_\lambda^n \|\widehat{y}\| \leq \frac{B}{A} s_\lambda^n \|y\|$

*Přitom speciálně pro* $\lambda = \sqrt{\frac{2}{A^2+B^2}}$ *je* $s_\lambda \leq \frac{B^2-A^2}{A^2+B^2} = \frac{d}{2+d}$, *kde* $d = \left(\frac{B}{A}\right)^2 - 1 \geq \left(\frac{\beta_{\dot S}}{\alpha_{\dot S}}\right) - 1 =$ *odchylka 4. mocniny čísla podmíněnosti operátoru* $\dot T$ *(resp. kvadrátu čísla podmíněnosti operátoru* $\dot S$*) od nejlepší možné hodnoty* 1 *(* $\Leftrightarrow$ $A = \alpha_{\dot S} = \beta_{\dot S} = B$*), kdy* $\lambda = \frac{1}{A}$, $s_\lambda = 0$ *a* $\dot S = A\ I_{\mathcal{R}(T)}$.

*Důkaz.* Postupujeme analogicky k důkazu E.5, kde místo věty E.3 aplikujeme větu E.8:

I. (a) $y_n := \lambda^2 \sum_{k=0}^{n-1} [S_\lambda^k S y] \xrightarrow{H_2} S^+ y = y' \;\Rightarrow\; x_n = T^* y_n \to T^* y' \overset{(I12)}{=} T^+ y =: x_0 \;\Rightarrow$ $\widehat{y}_n = T x_n \to T T^+ y \overset{5.3(1)}{=} P_{\mathcal{R}(T)} y = \widehat{y}.$

(b) $y' - y_n = S_\lambda^n y' = (I_{\mathcal{R}(T)} - (\lambda \dot S)^2)^n y'$, neboť $y' \in \mathcal{R}(S^+) \overset{5.2}{=} \mathcal{R}(S^*) = \mathcal{R}(S) \overset{(I10)}{=} \mathcal{R}(T)$. Odtud opět dostáváme

$$\|y_n - y'\| \leq s_\lambda^n \|y'\| \;\Rightarrow$$

$$\|x_n - x_0\| = \|T^*(y_n - y')\| \leq \|T^*\| \|y_n - y'\| \leq \sqrt{B}\, s_\lambda^n \|y'\| = \sqrt{B}\, s_\lambda^n \|(TT^*)^+ y\| \overset{(I10),(I6)}{=}$$
$$= \sqrt{B}\, s_\lambda^n \|(T^+)^* T^+ y\| \leq \sqrt{B}\, s_\lambda^n \|T^+\| \|x_0\| \leq \sqrt{B}\, s_\lambda^n \frac{1}{\sqrt{A}} \|x_0\| \;\Rightarrow$$

$$\|\widehat{y}_n - \widehat{y}\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\| \|x_n - x_0\| \leq \sqrt{B} \sqrt{\frac{B}{A}}\, s_\lambda^n \|x_0\| = \frac{B}{\sqrt{A}}\, s_\lambda^n \|T^+ \widehat{y}\|$$
$$\leq \frac{B}{\sqrt{A}}\, s_\lambda^n \|T^+\| \|\widehat{y}\| \leq \frac{B}{A}\, s_\lambda^n \|\widehat{y}\|,$$

kde jsme použili $x_0 = T^+ y \overset{(I2)}{=} T^+ T T^+ y \overset{5.3(1)}{=} T^+ P_{\mathcal{R}(T)} y = T^+ \widehat{y}$.

(c) $y' = S^+ y \overset{(I14)}{=} S^+ \widehat{y} \;\Rightarrow\; \|y'\| \leq \|S^+\| \|\widehat{y}\| \leq \frac{1}{A} \|\widehat{y}\|$
$x_0 = T^+ y = T^+ \widehat{y} \;\Rightarrow\; \|x_0\| \leq \|T^+\| \|\widehat{y}\| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \|\widehat{y}\|$
$\|\widehat{y}\| = \|P_{\mathcal{R}(T)} y\| \leq \|P_{\mathcal{R}(T)}\| \|y\| \overset{3.57}{=} \|y\|$.
Dosazením těchto nerovností po řadě do nerovností v (b) obdržíme (c).

II. Postupujeme opět analogicky k důkazu E.5 II. při záměnách $r_\lambda \rightsquigarrow s_\lambda$, $\dot R \rightsquigarrow \dot S$ a $T^* \rightsquigarrow T$. □

**Věta E.11** (Algoritmus pro $\widehat{f}$ pomocí $S$ dle E.9)**.**
*Nechť* $\Phi = \{\phi_n\}_{n \in J}$ *je frame v* $H \subseteq H_2$ *s mezemi* $A \leq B$, $f \in H_2$ *libovolný. Pak pro* $0 < \lambda < \frac{2}{B}$ *(optimální volba je* $\lambda = \frac{2}{A+B}$*) platí* $f_n \to \widehat{f}$, *kde* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *je posloupnost inovací počítaná rekurentně takto:*

1° **(počáteční krok)**

$f_1 = \lambda S f \overset{3(ii)}{=} \lambda \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j$

2° **(iterační kroky)**

$f_{n+1} = f_n + \lambda \sum_{j \in J} (\langle f, \phi_j \rangle - \langle f_n, \phi_j \rangle) \phi_j$ *pro* $n = 1, 2, \ldots$

*Přitom* $f_n = L^* \xi^{(n)} = \sum_{j \in J} \xi_j^{(n)} \phi_j$, *kde rekonstrukční posloupnosti inovací počítáme rekurentně takto:*

1′° **(počáteční krok)**

$\xi^{(1)}$ *je libovolná rekonstrukční posloupnost pro* $\lambda S f$, *např. lze zvolit* $\xi^{(1)} = \{\lambda \langle f, \phi_j \rangle\}_{j \in J} = \lambda [R] \xi$, *kde* $\xi$ *je libovolná rekonstrukční posloupnost pro* $f$, *tj.* $f = L^* \xi$.

2′° **(iterační kroky)**

$$\xi^{(n+1)} = \xi^{(1)} + \xi^{(n)} - \{\lambda \sum_{m \in J} \xi_m^{(n)} \langle \phi_m, \phi_j \rangle\}_{j \in J}$$
$$= \xi^{(1)} + ([I_{\ell^2(J)}] - \lambda [R]) \xi^{(n)}$$
$$= \xi^{(n)} + \lambda [R] (\xi - \xi^{(n)}) \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots$$

*Přitom pro* $\widehat{f} = 0$ *je* $f_n = 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a pro* $\widehat{f} \neq 0$ *platí odhad relativní chyby*

$$\frac{\|f_n - \widehat{f}\|}{\|\widehat{f}\|} \leq \|I_H - \lambda S\|^n,$$

*kde pro optimální* $\lambda = \frac{2}{A+B}$ *platí horní odhad* $\|I_H - \lambda S\| \leq \frac{B-A}{A+B} = \frac{d}{2+d}$, *kde* $d := \frac{B}{A} - 1$.

**Důsledek E.12** (Algoritmus pro $f'$ pomocí $S$ dle E.9).
*Nechť* $\Phi = \{\phi_n\}_{n\in J}$ *je frame v* $H \subseteq H_2$ *s mezemi* $A \leq B$, $f \in H_2$ *libovolný. Pak pro* $0 < \lambda < \frac{2}{B}$ *(optimální volba je* $\lambda = \frac{2}{A+B}$*) platí* $f_n \to f'$, *kde* $f_n = L^*\xi^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, *spočteme rekurentně takto:*

1° **(počáteční krok)**

$f_1 = \lambda f = \lambda L^* \xi$, *kde* $\xi$ *je libovolná rekonstrukční posloupnost pro* $f$

2° **(iterační kroky)**

$f_{n+1} = f_n + \lambda \sum_{j\in J}(\xi_j - \langle f_n, \phi_j\rangle)\phi_j$ *pro* $n = 1, 2, \ldots,$

*resp.* $\xi^{(n)}$ *takto:*

1′° **(počáteční krok)**

$\xi^{(1)} = \lambda\xi$

2′° **(iterační kroky)**

$$\begin{aligned}\xi^{(n+1)} &= \xi^{(1)} + \xi^{(n)} - \{\lambda \sum_{m\in J} \xi^{(n)}_m \langle \phi_m, \phi_j\rangle\}_{j\in J} \\ &= \xi^{(1)} + ([I_{\ell^2(J)}] - \lambda[R])\xi^{(n)} \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

*Přitom pro* $f = f' = 0$ *je* $f_n = 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a pro* $f' \neq 0$ *platí odhad relativní chyby*

$$\frac{\|f_n - f'\|}{\|f'\|} \leq \|I_H - \lambda S\|^n,$$

*kde pro optimální* $\lambda = \frac{2}{A+B}$ *platí horní odhad* $\|I_H - \lambda S\| \leq \frac{B-A}{A+B} = \frac{d}{2+d}$, *kde* $d := \frac{B}{A} - 1$.

**Důsledek E.13** (Algoritmus pro $\Phi'$ pomocí $S$ dle E.9).
*Nechť* $\Phi = \{\phi_n\}_{n\in J}$ *je frame v* $H \subseteq H_2$ *s mezemi* $A \leq B$ *a* $\Phi' = \{\phi'_n\}_{n\in J}$ *jeho duální frame. Pak pro* $0 < \lambda < \frac{2}{B}$ *(optimální volba je* $\lambda = \frac{2}{A+B}$*) platí* $\varphi_{k,n} \to \phi'_k$, *kde* $\varphi_{k,n} = L^*\xi^{(n)}_k$, $n \in \mathbb{N}$, *spočteme pro každé* $k \in J$ *rekurentně takto:*

1° **(počáteční krok)**

$\varphi_{k,1} = \lambda\phi_k$

2° **(iterační kroky)**

$\varphi_{k,n+1} = \varphi_{k,n} + \lambda \sum_{j\in J}(\delta_{k,j} - \langle \varphi_{k,n}, \phi_j\rangle)\phi_j$ *pro* $n = 1, 2, \ldots,$

*resp.* $\xi^{(n)}_k$ *takto:*

1′° **(počáteční krok)**

$\xi^{(1)}_k = \lambda\varepsilon_k = \{\lambda\delta_{k,j}\}_{j\in J}$

2′° **(iterační kroky)**

$$\begin{aligned}\xi^{(n+1)}_k &= \lambda\varepsilon_k + \xi^{(n)}_k - \{\lambda \sum_{m\in J} \xi^{(n)}_{k,m} \langle \phi_m, \phi_j\rangle\}_{j\in J} \\ &= \lambda\varepsilon_k + ([I_{\ell^2(J)}] - \lambda[R])\xi^{(n)}_k \\ &= \xi^{(n)}_k + \lambda(\varepsilon_k - [R]\xi^{(n)}_k) \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

*Přitom pro* $\phi_k = \phi'_k = 0$ *je* $\varphi_{k,n} = 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a pro* $\phi'_k \neq 0$ *platí odhad relativní chyby*

$$\frac{\|\varphi_{k,n} - \phi'_k\|}{\|\phi'_k\|} \leq \|I_H - \lambda S\|^n,$$

*kde pro optimální* $\lambda = \frac{2}{A+B}$ *platí horní odhad* $\|I_H - \lambda S\| \leq \frac{B-A}{A+B} = \frac{d}{2+d}$, *kde* $d := \frac{B}{A} - 1$.

# F PŘÍKLADY REPREZENTAČNÍCH SYSTÉMŮ (BÁZÍ, FRAMŮ) VE ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLŮ

*Skripta:* [RD14]

**Příklad F.1.** Uvažujme na úvod vektorový prostor $\mathbb{R}^2$. Jako nejjednodušší příklad těsného framu v $\mathbb{R}^2$ můžeme uvést tzv. Mercedes-Benz frame, který již byl uveden a vyobrazen v Příkladu 6.49. Příklad 6.53 pak uvedl a ilustroval tři vektory, které v $\mathbb{R}^2$ tvoří (už ne těsný) frame, a rovněž uvedl výpočet framu k němu duálního.

**Příklad F.2.** Klasickým příkladem báze pro prostor $\mathbb{C}^N$ je fourierovská ortonormální báze $\{\boldsymbol{e}_k\}_{k=0}^{N-1}$, kde $\boldsymbol{e}_k$ je vektor obsahující prvky

$$\frac{1}{\sqrt{N}} e^{i2\pi kn/N} \quad \text{pro } n = 0, \dots, N-1,$$

viz definici DFT v C.5. Lze ukázat [Chr08, část 1.3], že pro $M > N$, přeparametrizovaný systém $\{\boldsymbol{f}_k\}_{k=0}^{M-1}$, kde $\boldsymbol{f}_k$ odpovídá

$$\frac{1}{\sqrt{M}} e^{i2\pi kn/M} \quad \text{pro } n = 0, \dots, N-1,$$

tvoří v $\mathbb{C}^N$ těsný frame, který je dokonce parsevalovský. Z inženýrského pohledu to znamená, že se jedná o harmonické signály, jejichž kmitočty ovšem jsou hustěji rozloženy na frekvenční ose než je tomu u obvyklé DFT.

**Příklad F.3.** Dalším příkladem může být prostor všech reálných matic rozměru $8 \times 8$, tedy $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8}$. Stanovíme-li jednoznačně způsob vektorizace takových matic, pak tento prostor je totožný s prostorem $\mathbb{R}^{64}$. Jako příklad ortonormální báze pro tento prostor uvádíme např. založenou na DCT (diskrétní kosinové transformaci), kdy pro obecnou dimenzi $N$ bázové vektory $\{\boldsymbol{d}_k\}_{k=0}^{N-1}$ obsahují posloupnost

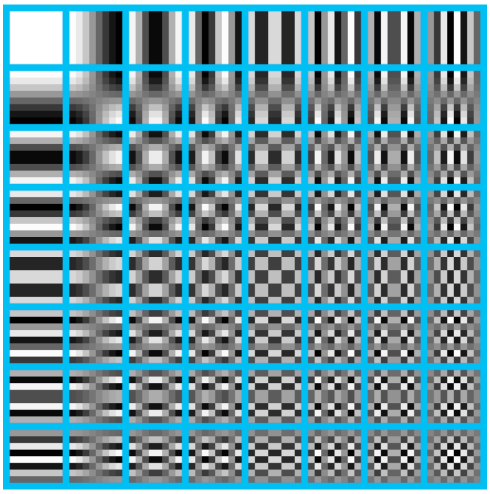
$$\cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)k\right] \quad \text{pro } n = 0, \dots, N-1.$$

V takto definované bázi se vyjadřují bloky obrazu $8 \times 8$ pixelů, jako je tomu u obrazového komprimačního standardu JPEG, viz obr. F.1.

**Příklad F.4.** V poznámce 2.100 byl zmíněn systém $\{\operatorname{sinc}(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jako ONB prostoru $\mathrm{PW}_{\frac{1}{2}}$, tedy prostoru funkcí, které mají omezené frekvenční spektrum (band-limited functions). Dokažme nyní, že to je pravda.

Harmonické funkce $\{e^{i2\pi n\gamma}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvoří ortonormální bázi prostoru 1-periodických funkcí s konečnou energií, $L^2([a, a+1])$ pro jakékoli pevně zvolené $a$, viz např. `[Heil:Thm. 13.23 s.450]`. Pokud zvolíme $a = -1/2$ a tyto funkce omezíme výhradně na interval $[-1/2, 1/2]$, pak každá takto vzniklá funkce $e^{i2\pi n\gamma} \cdot \operatorname{rect}(\gamma)$ patří do $L^1 \cap L^2$, má jednotkovou normu a dohromady tvoří bázi pro všechny funkce z $L^2$ s nosičem $[-1/2, 1/2]$). Srovnáním s částí 3.5 (tabulka 3.1) je zřejmé, že $e^{i2\pi n\gamma} \cdot \operatorname{rect}(\gamma)$ je modulací obdélníkového signálu. Fourierovým obrazem tohoto unitárního operátoru je posun v duální oblasti, dle tabulky tedy jsou to funkce $\{\tau_n(\mathcal{F}\operatorname{rect})(t)\}_n = \{\tau_n \operatorname{sinc}(t)\}_n = \{\operatorname{sinc}(t-n)\}_n$. Jelikož Fourierova transformace je unitární, $\{\operatorname{sinc}(t-n)\}_n$ je ONB pro prostor $\mathrm{PW}_{\frac{1}{2}}$.

<u>*Poznámka*</u> F.5. Lze ukázat `[Heil:Thm.10.4 s.271]`, že systém $\{\tau_{bn} \operatorname{sinc}(t)\}_n$ tvoří pro $0 < b < 1$ těsný frame s mezemi $A = B = b^{-1}$. Jde tedy o případ nadbytečného vzorkování, $b = 1$ odpovídá ONB neboli tzv. kritickému případu, a pro $b > 1$ se ztrácí možnost přesné rekonstrukce funkce pomocí jejích vzorků, viz rekonstrukční formuli (2.6).



**Obrázek F.1**: Šedesátčtyři prvků DCT ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8}$, zobrazené postupně jako obrázky rozměru $8 \times 8$ pixelů.

**Příklad F.6.** Vlnkové (waveletové) systémy, framy a báze jsou vystavěny na principu dilatace a translace. Pro $L^2$ např. existují „mateřské“ funkce $\psi \in L^2$, ze kterých jsou odvozeny další funkce ve formě

$$D_{\frac{1}{a}} \tau_b \psi(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Parametr $b$ odpovídá posunutí $\psi$ v čase (translace) a $a$ odpovídá změně měřítka (dilatace). Jestliže $\|\psi\| = 1$, pak i tato nová funkce má jednotkovou normu. Původně reálné obory hodnot pro parametry $a, b$ mohou být vhodně diskretizovány, aby vytvořily frame, biortogonální či dokonce ortonormální bázi v $L^2$. Tento koncept je také nazýván mnohoměřítková analýza (MRA), jelikož signál je možné vyjádřit jako součet dílčích signálů, které pocházejí z různých podprostorů $L^2$, kde každý odpovídá jednomu měřítku $a$. Příklad dvou ortogonálních bázových vlnkových funkcí je na obrázku F.2.

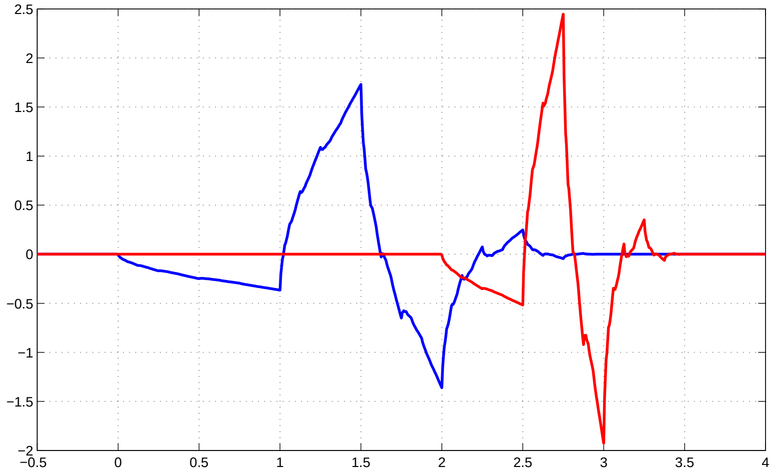
**Příklad F.7.** Vlnky existují samozřejmě i v diskrétní podobě (ale nelze je získat jednoduše navzorkováním vlnek z F.6). Příklad vlnkové ortonormální báze v $\ell^2$, resp. $\mathbb{R}^{32}$ je na obr. F.3. Místo pojmu **měřítko** zde pracujeme s tzv. **hloubkou dekompozice**, jelikož každé rekurzivní provedení mnohoměřítkové analýzy (MRA) signálu odpovídá jeho frekvenční dekompozici.

**Příklad F.8.** Diskrétní obrazové signály velikosti $N$ na $M$ pixelů lze považovat za vektory z prostoru $\mathbb{R}^{NM}$. Na obr. F.4 je ukázka několika málo (neortogonálních) bázových vektorů tohoto Hilbertova prostoru.

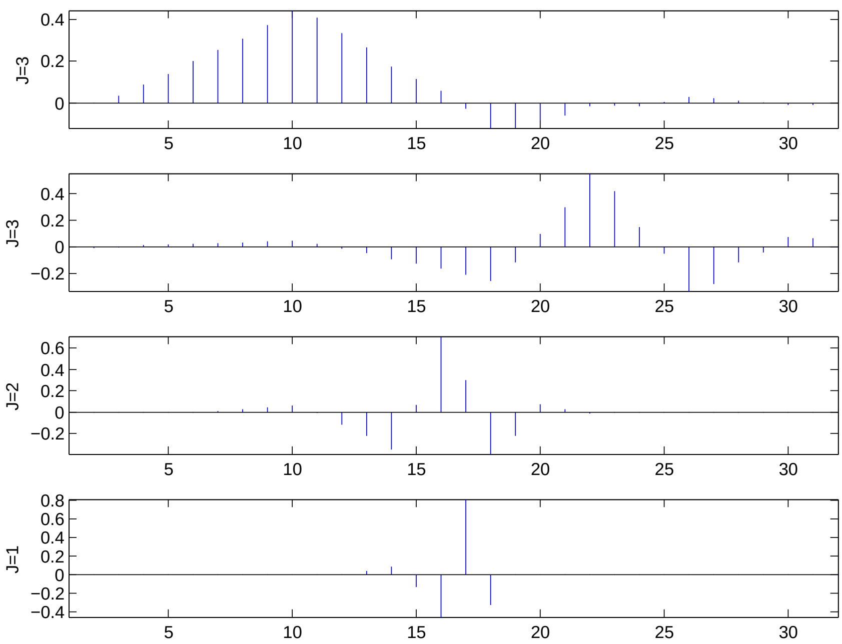
**Příklad F.9** (Gaborovy framy)**.** Jestliže vlnkový rozklad $L^2$ byl postaven na operátorech translace a dilatace, Gaborova analýza v $L^2$ je postavena na operátorech translace a modulace. Funkce $f \in L^2$ je vyjádřena jako superpozice posunutých a modulovaných verzí fixní, tzv. okénkové funkce $g \in L^2$. Soubor takovýchto funkcí

$$\{e_{mb}\, \tau_{na}\, g(t)\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \left\{e^{i2\pi mbx} g(x - na)\right\}_{m,n\in\mathbb{Z}} \tag{F.1}$$

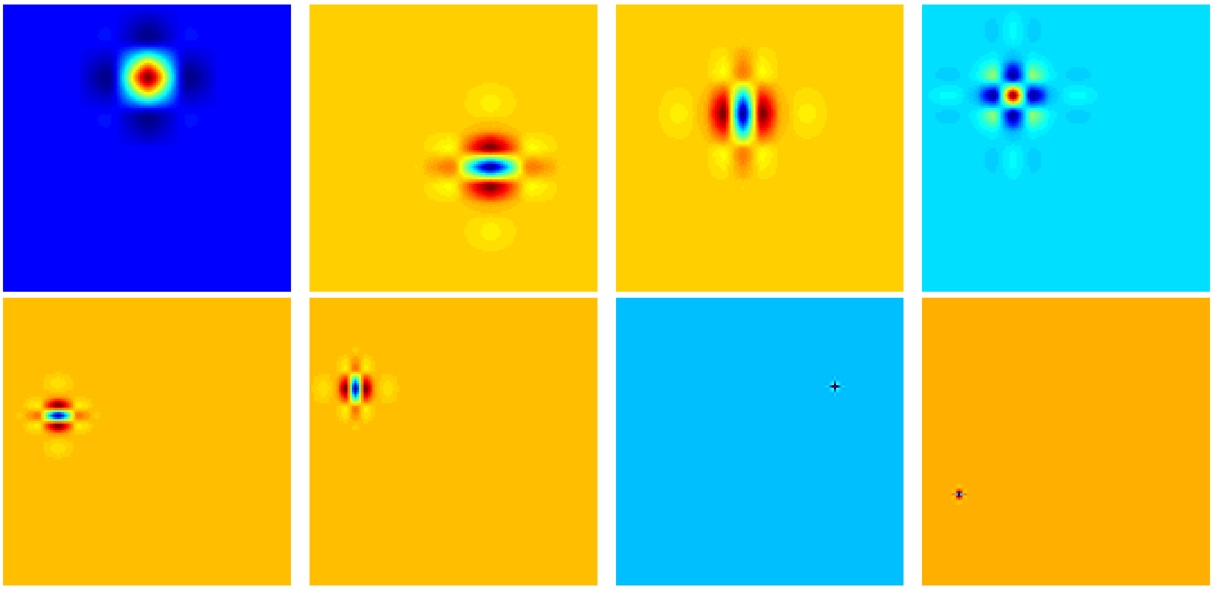
pro zvolené dvě hodnoty $a$ a $b$ se nazývá **Gaborův (či gaborovský) systém**, případně **Weyl-Heisenbergův systém** [Chr08]. Podobně jako u vlnkové transformace se tedy jedná o reprezentaci funkce definované na $\mathbb{R}$ pomocí spočetného množství jiných funkcí.




**Obrázek F.2**: Vlnka „Daubechies 2" jakožto mateřská funkce $\psi$ (modře) a funkce z ní odvozená pomocí $a = 1/2, b = 2$ (červeně). Jsou navzájem ortogonální.




**Obrázek F.3**: Příklady bázových posloupností v $\mathbb{R}^{32}$. Jsou to posloupnosti vycházející z MRA s použitím vlnky s označením `sym3`. V rámci pevného indexu hloubky dekompozice $J$ (v obrázku odpovídá jednomu podgrafu a souvisí s vlnkovou transformací v $L^2$ přes vztah $a = 2^J$) jsou ortogonální všechna posunutí vyobrazených posloupností o $2^J k$, $k \in \mathbb{Z}$. Navíc každá taková posloupnost z jednoho měřítka je ortogonální vůči jakékoliv v jiném měřítku.



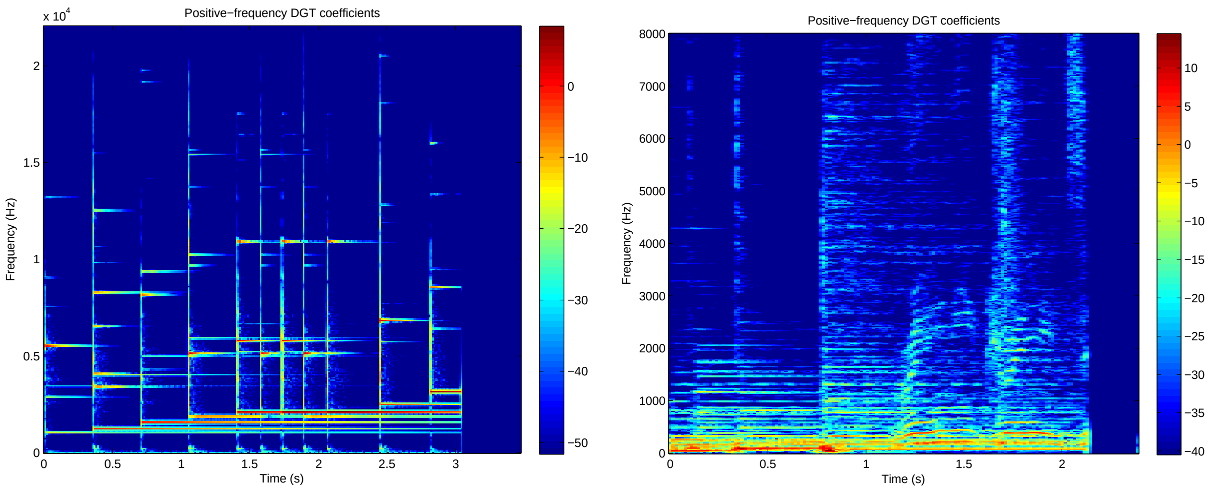
**Obrázek F.4**: Několik prvků biortogonální báze pro $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_{128}\times\mathbb{Z}_{128}}$. Byla použita vlnka s označením `bior4.4`, jiným označením CDF9/7 (Cohen, Daubechies, Feauveau), která se využívá např. v kompresním formátu JPEG2000. Pro zvýraznění průběhu je použita nepravá barevná škála „jet“ z MATLABu, pro každý obrázek zvlášť.

V kontextu zpracování signálů se lze také často setkat s názvem **krátkodobá Fourierova analýza** či **transformace**, pod zkratkou STFT (Short-time Fourier transform). Motivací pro zavedení systému tohoto typu je fakt, že klasická Fourierova transformace pracuje s harmonickými funkcemi, které mají globální dosah – jeden nenulový koeficient ovlivní podobu celého signálu. To však neodpovídá tomu, jak funguje lidské vnímání zvuků – zjednodušeně, člověk vnímá jejich frekvenční strukturu, ale tu dokáže zároveň umístit v čase. Napodobit tento způsob potom přirozeně znamená analyzovat *časově lokální* spektra signálu. Odtud pramení pojem **časově-kmitočtová reprezentace**.

Lokalizace nejsnadněji dosáhneme obyčejným vyříznutím úseku signálu a provedením Fourierovy transformace. Takové vyříznutí odpovídá násobení signálu s funkcí $g$, jež je nyní obdélníkovým signálem; to je podle C.20 či C.21 ekvivalentní s konvolucí spekter těchto signálů; avšak obdélník má ve frekvenční doméně průběh odpovídající funkci sinc, jejíž hodnota pouze *pomalu* klesá směrem k vysokým kmitočtům — jak bylo ukázáno v 2.95, sinc není TF-koncentrovaná funkce.

Limit časově-kmitočtového rozlišení popisuje tzv. **Heisenbergův princip neurčitosti**. Říká, že žádný signál nemůže být zároveň koncentrován v čase i v kmitočtu [Gro01]. Ačkoliv teorie je vybudována pro obecné funkce $g$, nejen v praxi jsou protěžovány funkce, které jsou symetrické, hladké a mají dostatečně rychle klesající spektrum. Lze ukázat, že Gaussova funkce $g(t) = \exp(-t^2/2)$ je jediná okénková funkce, která dosahuje optimální časově-kmitočtové koncentrace, tedy že Heisenbergova nerovnost je splněna jako rovnost [Gro01]. Pro praxi má však nevýhodu nekonečně dlouhého nosiče.

Základní otázkou je, jak zvolit funkci $g \in L^2$ a parametry $a, b$ tak, aby Gaborův systém (F.1) tvořil frame v prostoru $L^2$. Dodnes není tato otázka vyčerpávajícím způsobem vyřešena. Zcela obecně platí pouze následující tvrzení:




**Obrázek F.5**: Spektrogramy úryvků hudebních signálů. Vyobrazení jsou získána redundantní Gaborovou transformací (frame). Vlevo jsou moduly gaborovských koeficientů pro signál „Glockenspiel“ (zvonkohra). Zde je evidentní harmonická struktura signálu, jsou zde vidět i vyšší harmonické a nástup každého tónu. Vpravo je signál poprockové hudby; obsahuje výrazné nízké kmitočty, ale současně jsou patrné údery činelů a zpěvová linka. „Prázdný“ prostor na koncích signálů je dán výpočetními nároky (zde diskrétní) Gaborovy transformace na dělitelnost délky okna, počtu frekvenčních kanálů a délky signálu.

**Věta F.10** ([Chr08]). *Nechť $a, b > 0$ a $g \in L^2$. Gaborovský systém* (F.1) *může být frame pro $L^2$, pouze pokud platí $ab \leq 1$. Pokud je systém* (F.1) *framem pro $L^2$ a platí $ab = 1$, pak je tento systém dokonce Rieszovou bází.*

Nutnou podmínkou pro gaborovský frame je tedy, aby časově-kmitočtová mřížka (angl. lattice) byla dostatečně hustá, přičemž to ale není podmínka dostačující. Časové rozlišení $a$ může být obětováno za zvýšení kmitočtového rozlišení $b$.

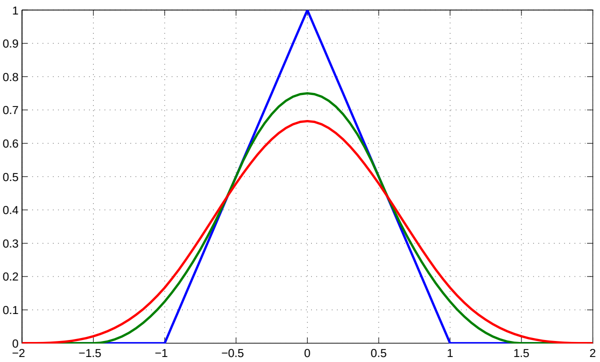
Gaborovy koeficienty tvoří mřížkovou strukturu, což umožňuje časově-kmitočtový obsah signálu $f$ vizualizovat v podobě tzv. **spektrogramu**, což je dvojrozměrné pole modulů Gaborových koeficientů $\{\langle f(t), e_{mb}\, \tau_{na}\, g(t)\rangle\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ a jako takové se obvykle zobrazuje formou obrázku s nepravými barvami, viz např. obr. F.5.

Další kritickou otázkou v tomto oboru je, v jakých případech má duální frame (důležitý pro rekonstrukci) ke Gaborovu framu rovněž časově-kmitočtovou strukturu. To není vždy zaručeno, ale je to pochopitelně vlastnost, která podstatně zpohodlňuje zpracování signálu. Naštěstí platí, že každý kanonický duání frame tomuto požadavku vyhovuje, a duální okno je přímo dosažitelné pomocí inverze framového operátoru [Chr08], viz např. důsledek 6.52. Zde ovšem pohodlí končí, neboť nalezení inverze je ve většině případů nesnadné, s výjimkou těsných framů.

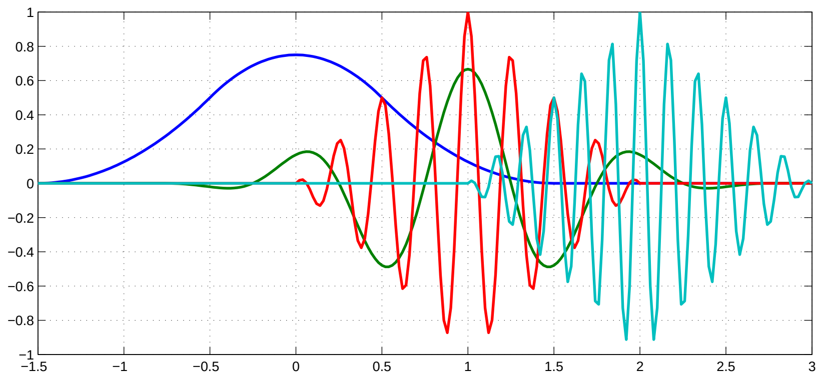
Jednou z konstrukcí, kdy duální frame je možné vyjádřit dokonce explicitně, je použít za okénkovou funkci $g$ tzv. **B-splajny**, známé především z počítačové grafiky. Jsou to funkce s kompaktním nosičem, definované rekurentně:

$$N_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (t-j)_+^{n-1},\ t \in \mathbb{R}, \tag{F.2}$$

kde $f(t)_+$ značí pouze kladné hodnoty daného výrazu, $f(t)_+ = \max\{0, f(t)\}$, a $n$ je řád B-splajnu. B-splajny $B_n(t) = N_n(t + \frac{n}{2})$ (tj. posunuté, jakožto sudé funkce) řádů $n = 2, 3, 4$ jsou




**Obrázek F.6**: Symetrické B-splajny řádů 2 (modře), 3 (zeleně), 4 (červeně).




**Obrázek F.7**: Ukázka několika atomů Gaborova framu složeného z posunutých a modulovaných B-splajnů. Zobrazena je reálná část. B-splajnová okénková funkce $g$ je modře.

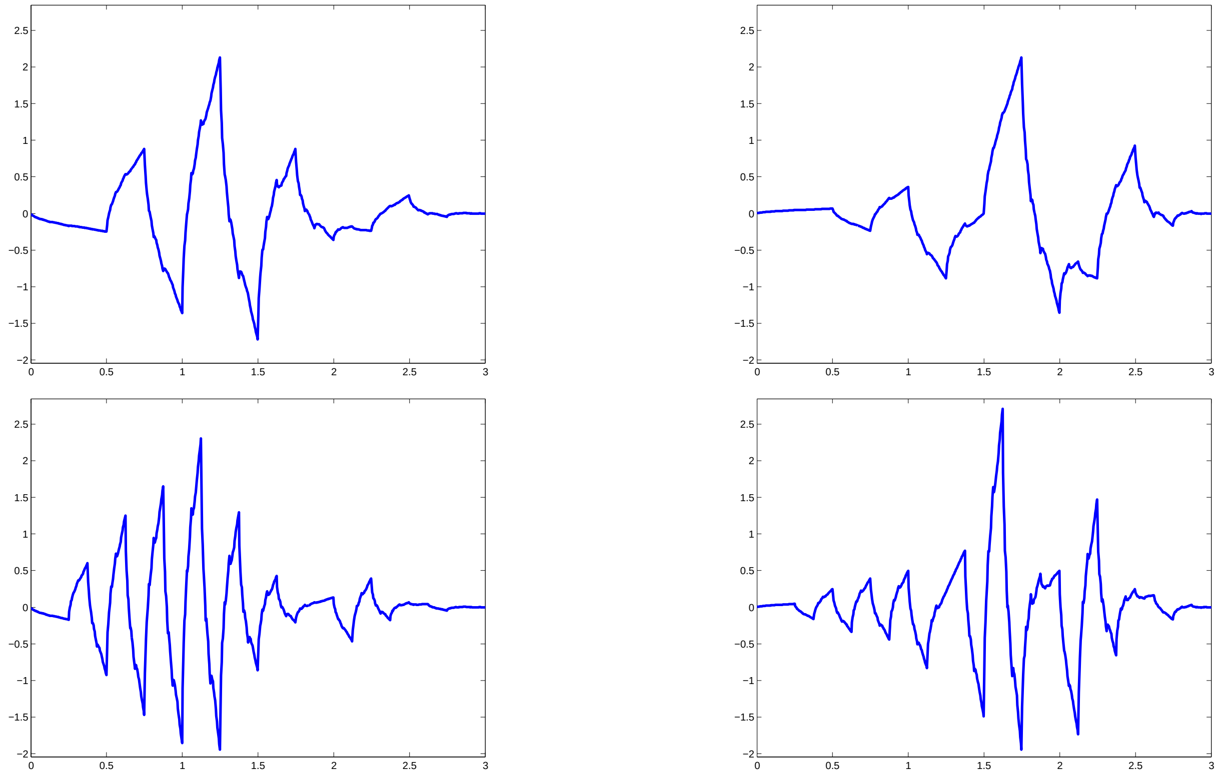
vidět na obr. F.6. Gaborův frame tvoří B-splajny $g(t) = B_\ell(t)$ (taktéž $N_\ell$), pokud pro parametry platí $(a, b) \in (0, \ell) \times (0, 1/\ell]$ [Chr08]. Ukázka několika prvků takového framu je na obr. F.7. Tyto okénkové funkce s kompaktním nosičem mají tu nezanedbatelnou výhodu, že duální frame je možné nalézt explicitním, ne příliš složitým vzorcem.

Gaborovy systémy existují i pro signály s diskrétním časem, opět platí (splnitelné) podmínky, kdy soubor diskrétních modulovaných a posouvaných posloupností je framem v $\mathbb{R}^N$.

**Problém F.11** (Cvičení)**.** Pro úplnost, platí $B_n(t) = \underbrace{\mathrm{rect}\,(t) * \ldots * \mathrm{rect}\,(t)}_{n\text{-krát}}$. Ukažte, že $B_1(t) = \mathrm{rect}\,(t)$ a že $B_2(t) = \Delta(t)$ z příkladu C.23. Jaký je Fourierův obraz $B_n(t)$? Použijte C.21.

**Příklad F.12** (Framy vzniklé sjednocením bází)**.** Jeden z přirozených a jednoduchých přístupů je frame vytvořit pomocí sloučení dvou či více ortogonálních bází. Např. použijeme Haarovu vlnkovou bázi[1] a současně (bi)ortogonální bázi s vyšší hladkostí, např. `sym8`. Potom náhlé změny v signálu budou úsporně a interpretabilně vyjádřeny pomocí Haarových vlnek a naopak hladké průběhy budou zachyceny malým počtem koeficientů z druhé rodiny. Nebo sloučíme gaborovský frame s Haarovou bází, čímž dostaneme systém, který bude vhodný pro analýzu signálu, který obsahuje harmonické složky, ale rovněž skokové změny. Příkladem mohou být také vlnkové pakety (packets), kdy se záměrně přidávají funkce, které jsou lineárními kombinacemi jiných vlnek, viz obr. F.8.

[1] mateřskou Haarovu vlnku můžeme definovat jako $\psi(t) = \mathrm{rect}\,(t + \frac{1}{2}) - \mathrm{rect}\,(t - \frac{1}{2})$



**Obrázek F.8**: Několik atomů z vlnkového paketu pro vlnku „Daubechies 2“. Srovnej s obrázkem F.2.

# Literatura

Doplňková specializovaná literatura


[AN67] J.H. Ahlberg and E.N. Nilson, *The theory of splines and their applications*, vol. 38, Academic Press, New York, 1967.

[BDE09] A. M. Bruckstein, D. L. Donoho, and M. Elad, *From Sparse Solutions of Systems of Equations to Sparse Modeling of Signals and Images*, SIAM Review **51** (2009), no. 1, 34–81.

[BHS93] B.D. Bojanov, H. Hakopian, and B.J. Sahakian, *Spline functions and multivariate interpolations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1993.

[Bri88] E. Oran Brigham, *The fast Fourier transform and its applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[CDS98] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders, *Atomic decomposition by basis pursuit*, SIAM J. Sci. Comput. **20** (1998), no. 1, 33–61, reprinted in SIAM Review, **43** (2001), no. 1, pp. 129–159.

[Chr03] Ole Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2003.

[Chr08] ______, *Frames and Bases: An Introductory Course*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2008.

[Chu92] Charles K. Chui, *An introduction to wavelets*, Wavelet Analysis and Its Applications, vol. 1, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1992.

[Dau92] Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.

[DS52] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 341–366.

[Ela10] Michael Elad, *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*, Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London, 2010.

[FS98] Hans G. Feichtinger (ed.) and Thomas Strohmer (ed.), *Gabor analysis and algorithms. Theory and applications*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1998 (English).

[Gro77] C. W. Groetsch, *Generalized inverses of linear operators. Representation and approximation*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 37, Marcel Dekker, Inc. VIII, New York-Basel, 1977.

[Gro01] K. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis.* Birkhäuser, 2001.

[HRVŠ11a] R. Hrbáček, P. Rajmic, V. Veselý, and J. Špiřík, *Řídké reprezentace signálů: úvod do problematiky*, Elektrorevue (2011/50), 1–10, `http://www.elektrorevue.cz/cz/clanky/zpracovani-signalu/0/ridke-reprezentace-signalu--uvod-do-problematiky/`.

[HRVŠ11b] ______, *Řídké reprezentace signálů: komprimované snímání*, Elektrorevue (2011/67), 1–8, `http://www.elektrorevue.cz/cz/clanky/zpracovani-signalu/0/ridke-reprezentace-signalu--komprimovane-snimani/`.

[Kuf69] Alois Kufner a Jan Kadlec, *Fourierovy řady*, Academia, Praha, 1969.

[Las96] Rupert Lasser, *Introduction to Fourier series*, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel-Hong Kong, 1996.

[RD14] Pavel Rajmic a Marie Daňková, Úvod do řídkých reprezentací signálů a komprimovaného snímání. Skriptum, Vysoké učení technické v Brně, 2014.

[Sin70] Ivan Singer, *Bases in Banach spaces I*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[ŠRV10] J. Špiřík, P. Rajmic, and V. Veselý, *Reprezentace signálů: od bází k framům*, Elektrorevue (2010/111), 1–10, `http://www.elektrorevue.cz/cz/download/reprezentace-signalu--od-bazi-k-framum/`.

[Teo98] Anthony Teolis, *Computational signal processing with wavelets*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1998.

## Studijní literatura

### Základní


[Heil] Heil C.: A Basis Theory Primer, expanded edition, Birkhäuser, New York, 2011.

[DeMi] Debnath L., Mikusinski P.: Introduction to Hilbert spaces with Applications 2nd ed., Academic Press, London, 1999 (viz `cviceni`).

[KoFo] Kolmogorov A.N, Fomin S.V.: Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy, SNTL, Praha 1975 (`KF-M&Tprostory.pdf`).

[Tay] Taylor A.E.: Úvod do funkcionální analýzy. Academia, Praha 1973.

[Yos] Yosida, K.: Functional Analysis, 6th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.


### Podpůrná


[FA1] Lomtatidze A: Lineární funkcionální analýza I., ÚM FSI VUT, Brno 2012 (soubor `FM1txt.pdf`).

[ZM1] Veselý V.: Základy matematiky I., KAMI ESF MU, Brno 2007–13 (soubor `ZM1txt.pdf`).

[KaSk] Karásek J., Skula L.: Algebra a geometrie, PC-DIR Real s.r.o., Brno 2002 (skripta VUT Brno, Fakulta strojního inženýrství)

[Šik] Šik F.: Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, PřF MU Brno, 1998 (skripta)

[DoKu] Došlá Z., Kuben J.: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, PřF MU, Brno 2004 (skripta).


- *Doplňkové pracovní texty* ke stažení v elektronické podobě dle dispozic přednášejícího.


*Poděkování.*

Autoři děkují studentům z VUT v Brně, kteří v nějaké podobě napomohli vzniku této práce. Konkrétně

- studentům 4. ročníku 2012 oboru *Matematické inženýrství FSI VUT*, kteří se podíleli na přepisu rukopisu do systému LaTeX: *Alici Doktorové, Janu Dražkovi, Jiřímu Kráčmarovi, Barboře Navrátilové, Josefu Svatoňovi* a *Michaele Zemčíkové*;
- studentům 4. ročníku 2013 oboru *Matematické inženýrství FSI VUT* za korekce některých chyb v textu: *Janu Horníčkovi* a *Haně Zemanové*;
- *Marii Daňkové* za korekce chyb, pomoc s obrázky a přepis některých důkazů LaTeXem.