Aplicaciones del Teorema de Grothendieck multilineal

David Pérez García

Salobreña, Abril 2008

Índice

1. Aplicaciones fuera de la teoría multilineal-tensorial:
   - Series de Dirichlet
   - Álgebras de Banach
   - Correlaciones Cuánticas
2. Aplicaciones a la estructura de productos tensoriales:
   - Incondicionalidad en productos tensoriales

Parte I

Aplicaciones fuera de la teoría multilineal-tensorial

Índice

El contexto

Estamos interesados en estudiar formas multilineales

$$T : \ell_\infty^m \times \cdots \times \ell_\infty^m \longrightarrow \mathbb{K}$$

con su norma usual

$$\|T\| = \sup_{\|x_i\| \leq 1} |T(x_1, \ldots, x_N)| .$$

El contexto

Estamos interesados en estudiar formas multilineales

$$T : \ell_\infty^m \times \cdots \times \ell_\infty^m \longrightarrow \mathbb{K}$$

con su norma usual

$$\|T\| = \sup_{\|x_i\| \leq 1} |T(x_1, \ldots, x_N)| .$$

Notación

Dado $1 \leq p < \infty$ y dada una sucesión $(x_i)_i$ en un espacio de Banach X, denotamos

$$\|(x_i)_i\|_p^\omega = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_i |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Lo conocido. El caso bilineal

Dado $T : \ell_\infty^m \times \ell_\infty^m \longrightarrow \mathbb{K}$,

Teorema de Grothendieck, 1953

Dadas dos sucesiones $(x_i)_i$, $(y_i)_i$ en ℓ_∞^m, se tiene que

$$\sum_i |T(x_i, y_i)| \leq K_G \|T\| \|(x_i)_i\|_2^\omega \|(y_i)_i\|_2^\omega,$$

donde K_G es una constante universal.

Lo conocido. El caso bilineal

Dado $T : \ell_\infty^m \times \ell_\infty^m \longrightarrow \mathbb{K}$,

Teorema de Grothendieck, 1953

Dadas dos sucesiones $(x_i)_i$, $(y_i)_i$ en ℓ_∞^m, se tiene que

$$\sum_i |T(x_i, y_i)| \leq K_G \|T\| \|(x_i)_i\|_2^\omega \|(y_i)_i\|_2^\omega,$$

donde K_G es una constante universal.

Desigualdad de Littlewood, 1930

$$\left(\sum_{i,j} |T(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2} \|T\|.$$

Índice

Littlewood vectorial

Un espacio de Banach X tiene **cotipo** $p \geq 2$ si para toda sucesión $(x_i)_i \subset X$ es

$$\left(\sum_i \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_i r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

con r_i las funciones de Rademacher y $C_p(X) = \inf C$.

Littlewood vectorial

Un espacio de Banach X tiene **cotipo** $p \geq 2$ si para toda sucesión $(x_i)_i \subset X$ es

$$\left(\sum_i \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_0^1 \left\|\sum_i r_i(t)x_i\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

con r_i las funciones de Rademacher y $C_p(X) = \text{ínf } C$.

Bombal, Villanueva, P-G, Quart. J. Math. 2004

Si X tiene cotipo p y $T : \ell_\infty^m \times \cdots \times \ell_\infty^m \longrightarrow X$, entonces

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_N} \|T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p(X)^N \|T\|.$$

Aplicación: Series de Dirichlet vectoriales

Una serie de Dirichlet vectorial es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

donde $s \in \mathbb{C}$ y los coeficientes a_n están en un cierto espacio de Banach X.

Aplicación: Series de Dirichlet vectoriales

Una serie de Dirichlet vectorial es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

donde $s \in \mathbb{C}$ y los coeficientes a_n están en un cierto espacio de Banach X.

Convergencia

Los dominios maximales de convergencia uniforme o absoluta de una serie de Dirichlet son semi-planos $[\mathrm{Re}\ s > \sigma]$ donde $\sigma = \sigma_a, \sigma_u$ define la abscisa de convergencia absoluta o uniforme (resp.).

Aplicación: Series de Dirichlet vectoriales

Una serie de Dirichlet vectorial es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

donde $s \in \mathbb{C}$ y los coeficientes a_n están en un cierto espacio de Banach X.

Convergencia

Los dominios maximales de convergencia uniforme o absoluta de una serie de Dirichlet son semi-planos $[\mathrm{Re}\; s > \sigma]$ donde $\sigma = \sigma_a, \sigma_u$ define la abscisa de convergencia absoluta o uniforme (resp.).

La pregunta

¿Cuál es el valor de $T = \sup(\sigma_a - \sigma_u)$?

Aplicación: Series de Dirichlet vectoriales

Caso $X = \mathbb{C}$

- Bohr, 1913, $T \leq 1/2$.
- Toeplitz, 1913, $T \geq 1/4$.
- Bohnenblust y Hille, 1931, $T = 1/2$.

Aplicación: Series de Dirichlet vectoriales

Caso $X = \mathbb{C}$

- Bohr, 1913, $T \leq 1/2$.
- Toeplitz, 1913, $T \geq 1/4$.
- Bohnenblust y Hille, 1931, $T = 1/2$.

Defant, García, Maestre, P-G, Math. Ann. 2008

En el caso general

$$T = 1 - \frac{1}{Cot(Y)},$$

donde $Cot(Y) = \text{ínf}\{p\}$ tales que Y tiene cotipo p.

Índice

Grothendieck multilineal

Tonge, J. London Math. Soc, 1978

Si $(x_i^j)_i$ son sucesiones en ℓ_∞^m y

$$T : \ell_\infty^m \times \cdots \times \ell_\infty^m \longrightarrow \mathbb{K},$$

entonces

$$\sum_i |T(x_i^1, \ldots, x_i^N)| \leq K_G \sqrt{2}^{N-2} \|T\| \prod_{j=1}^{N} \|(x_{i_j}^j)_{i_j}\|_2^\omega.$$

Aplicación: Q-álgebras

Definición

Una Q-álgebra es un álgebra de Banach conmutativa que es isomorfa al cociente de una subálgebra de $C(K)$.

Aplicación: Q-álgebras

Definición

Una Q-álgebra es un álgebra de Banach conmutativa que es isomorfa al cociente de una subálgebra de $C(K)$.

Han sido importantes porque

- Son álgebras de operadores (Cole 1969).
- Tienen una caracterización fácil (Davie 1973).

Aplicación: Q-álgebras

Definición

Una Q-álgebra es un álgebra de Banach conmutativa que es isomorfa al cociente de una subálgebra de $C(K)$.

Han sido importantes porque

- Son álgebras de operadores (Cole 1969).
- Tienen una caracterización fácil (Davie 1973).

Resultados iniciales

- (Davie-Varopoulos 1973) ℓ_p es una Q-álgebra.
- (Varopoulos 1975, Blecher-Le Merdy 1995) S_p con el producto de Schur es un álgebra de operadores.

Aplicación: Q-álgebras

Pregunta. Varopoulos 1975, Math. Scand.

¿Es S_p una Q-algebra?

Aplicación: Q-álgebras

Pregunta. Varopoulos 1975, Math. Scand.

¿Es S_p una Q-algebra?

Le Merdy 1998, Proc. Amer. Math. Soc.

Sí para $2 \leq p \leq 4$.

Aplicación: Q-álgebras

Pregunta. Varopoulos 1975, Math. Scand.

¿Es S_p una Q-algebra?

Le Merdy 1998, Proc. Amer. Math. Soc.

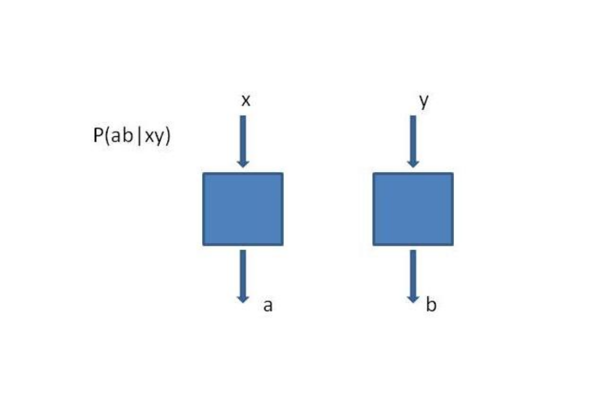
Sí para $2 \leq p \leq 4$.

P-G, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2006

También para $1 \leq p \leq 2$.

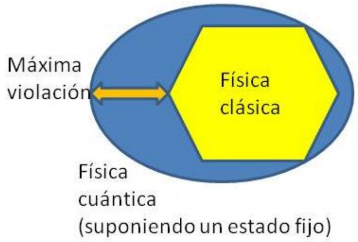
Aplicación: Desigualdades de Bell

Tenemos una situación experimental como la de la figura que nos da la distribución de probabilidad del experimento $p(ab|xy)$. En el caso cuántico, $p(ab|xy)$ viene determinada por un estado cuántico $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ y por medidas.



Aplicación: Desigualdades de Bell

Dado un estado cuántico, podemos *medir* lo cuántico que es mediante



Cota de Tsirelson

Tsirelson, Lett. Mat. Phys. 1980

Si a, b sólo toman 2 valores, la máxima violación posible dada por un estado cuántico está uniformemente acotada (independientemente del número de inputs x, y y de las medidas que se realicen) por K_G.

Cota de Tsirelson

Tsirelson, Lett. Mat. Phys. 1980

Si a, b sólo toman 2 valores, la máxima violación posible dada por un estado cuántico está uniformemente acotada (independientemente del número de inputs x, y y de las medidas que se realicen) por K_G.

Pregunta

¿Qué pasa para el caso de 3 o más partes?

El GHZ

El estado que se cree más cuántico de 3 partes es el llamado GHZ (Greenberger, Horne, y Zeilinger):

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes e_i \otimes e_i .$$

El GHZ

El estado que se cree más cuántico de 3 partes es el llamado GHZ (Greenberger, Horne, y Zeilinger):

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes e_i \otimes e_i .$$

Para este estado, utilizando la desigualdad de Grothendieck multilineal,

P-G, Wolf, Palazuelos, Villanueva, Junge, Comm. Math. Phys. 2008

Si a, b sólo toman 2 valores, la máxima violación posible dada por el GHZ está acotada uniformemente por $4\sqrt{2}K_G$.

Violación no acotada

P-G, Wolf, Palazuelos, Villanueva, Junge, Comm. Math. Phys. 2008

Hay estados que producen violaciones arbitrariamente grandes con a, b tomando sólo 2 valores.

Esto produce una ganancia arbitrariamente grande en determinados juegos dependiendo de si se dispone de recursos cuánticos o no.

Parte II

Aplicaciones a la estructura de productos tensoriales

Índice

Otras desigualdades de Grothendieck multilineales

El caso conocido

Todo operador $u : \ell_1^m \longrightarrow \ell_2^m$ verifica

$$\sum_i \|u(x_i)\| \leq K_G \|(x_i)_i\|_1^\omega .$$

Otras desigualdades de Grothendieck multilineales

El caso conocido

Todo operador $u : \ell_1^m \longrightarrow \ell_2^m$ verifica

$$\sum_i \|u(x_i)\| \leq K_G \|(x_i)_i\|_1^\omega.$$

Villanueva, P-G, J. Math. Anal. Appl, 2003

Todo operador $T : \ell_1^m \times \cdots \times \ell_1^m \longrightarrow \ell_2^m$ verifica

$$\sum_{i_1,\ldots,i_N} \|T(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_N}^N)\| \leq K_G^N \prod_{j=1}^N \|(x_{i_j}^j)_{i_j}\|_1^\omega$$

Aplicación: Incondicionalidad en productos tensoriales

Bases incondicionales en productos tensoriales

Los primeros trabajos se centraron en espacios de Hilbert:

- Gelbaum-Gil de la Madrid (1961). Kwapien-Pelczynski (1970). Gordon-Lewis (1974. Acta Math.). La única clase de Schatten con base incondicional es S_2.
- Pisier-Schütt (1978). La única norma tensorial en $\ell_2 \otimes \ell_2$ que admite base incondicional es la norma de Hilbert-Schmidt.

Incondicionalidad en Productos Tensoriales

Actualmente, la investigación sigue muy activa:

- Defant-Díaz-García-Kalton-Maestre (2001-2005). Los espacios de polinomios no tienen base incondicional.
- Defant, García, Maestre (2003). La constante de base incondicional en productos tensoriales $\Leftrightarrow$ Radio de convergencia de series de potencias multidimensionales (Teoremas tipo Bohr).
- Zerhussen (2006). Incondicionalidad en productos tensoriales $\Rightarrow$ mejora del Teorema de inmersión de Bishop, Narasimhan y Remmert en análisis complejo.

Incondicionalidad en Productos Tensoriales

Filosofía común

Las normas tensoriales destruyen la incondicionalidad

En esta línea

- (Villanueva, P-G, Math. Scand. 2005) La única norma en $\ell_2 \otimes \cdots \otimes \ell_2$ que admite base incondicional es la de Hilbert-Schmidt.
- (Villanueva, P-G, Quaest. Math. 2004) Ninguna de las 14 normas tensoriales naturales de Grothendieck preserva incondicionalidad.

Incondicionalidad en Productos Tensoriales

Filosofía común

Las normas tensoriales destruyen la incondicionalidad

En esta línea

- (Villanueva, P-G, Math. Scand. 2005) La única norma en $\ell_2 \otimes \cdots \otimes \ell_2$ que admite base incondicional es la de Hilbert-Schmidt.
- (Villanueva, P-G, Quaest. Math. 2004) Ninguna de las 14 normas tensoriales naturales de Grothendieck preserva incondicionalidad.

Pero . . . (Defant, P-G, Trans. Amer. Math. Soc. 2008)

Existen normas tensoriales que preservan bases incondicionales para muchos espacios (en particular para todos los L_p).

Aplicaciones del Teorema de Grothendieck multilineal

David Pérez García

Salobreña, Abril 2008