La Estructura Natural de Espacio Invariante por Reordenamiento sobre el Producto Tensorial

C. Fernández-González, C. Palazuelos, D. Pérez-García

3 de abril de 2008

1. Motivación y Resultados Previos
2. Definiciones Necesarias
   - Espacios Invariantes por Reordenamiento
   - Productos Tensoriales y Crossnorms
3. Resultado
   - Resultado
   - Pasos de la Demostración
   - Bases Simétricas
4. Sobre la Optimalidad del Resultado

Motivación y Resultados Previos

Motivación y Resultados Previos

El problema sobre la existencia de bases:

Motivación y Resultados Previos

El problema sobre la existencia de bases:

* En 1962 Gelbaum y Gil de Lamadrid prueban que si X e Y tienen base, la *sucesión producto* es base del producto tensorial con cualquier **uniform crossnorm**. Además, demuestran que la base producto en el espacio $S_\infty = \ell_2 \hat{\otimes}_\varepsilon \ell_2$ (operadores compactos) no es incondicional.

Motivación y Resultados Previos

El problema sobre la existencia de bases:

* En 1962 Gelbaum y Gil de Lamadrid prueban que si X e Y tienen base, la *sucesión producto* es base del producto tensorial con cualquier **uniform crossnorm**. Además, demuestran que la base producto en el espacio $S_\infty = \ell_2 \hat{\otimes}_\varepsilon \ell_2$ (operadores compactos) no es incondicional.
* Kwapien y Pelczynski demuestran en 1970 que los espacios S_1 y S_∞ no admiten base incondicional.

Motivación y Resultados Previos

El problema sobre la existencia de bases:

* En 1962 Gelbaum y Gil de Lamadrid prueban que si X e Y tienen base, la *sucesión producto* es base del producto tensorial con cualquier **uniform crossnorm**. Además, demuestran que la base producto en el espacio $S_\infty = \ell_2 \hat{\otimes}_\varepsilon \ell_2$ (operadores compactos) no es incondicional.
* Kwapien y Pelczynski demuestran en 1970 que los espacios S_1 y S_∞ no admiten base incondicional.
* En 1974 Gordon y Lewis demuestran que, de hecho, ningún espacio S_p admite base incondicional salvo S_2.

Teorema de Pisier-Schütt

En 1978 Pisier y Schütt demuestran independientemente:

Teorema de Pisier-Schütt

En 1978 Pisier y Schütt demuestran independientemente:

Teorema (Teorema de Pisier-Schütt)

Sean X e Y dos espacios de Banach con bases incondicionales $(x_i)_i$ e $(y_j)_j$ respectivamente; y sea α una "norma tensorial". Entonces $X\hat{\otimes}_\alpha Y$ tiene base incondicional si y sólo si la base producto $(X_i \otimes Y_j)_{i,j}$ es base incondicional.

Teorema de Pisier-Schütt

En 1978 Pisier y Schütt demuestran independientemente:

Teorema (Teorema de Pisier-Schütt)

Sean X e Y dos espacios de Banach con bases incondicionales $(x_i)_i$ e $(y_j)_j$ respectivamente; y sea α una "norma tensorial". Entonces $X\hat{\otimes}_\alpha Y$ tiene base incondicional si y sólo si la base producto $(X_i \otimes Y_j)_{i,j}$ es base incondicional.

Observación

De hecho, Pisier prueba un resultado más fuerte: Que el producto tensorial tenga base incondicional es equivalente a que este espacio tenga la propiedad de Gordon-Lewis. Y por tanto a que tenga estructura de retículo.

Motivación y Resultados Previos

La investigación sobre la incondicionalidad en productos tensoriales sigue siendo una línea muy activa de investigación:

Motivación y Resultados Previos

La investigación sobre la incondicionalidad en productos tensoriales sigue siendo una línea muy activa de investigación:

* En 2004 I. Villanueva y D. Pérez García demuestran que ninguna de las 14 normas naturales de Grothendieck preserva incondicionalidad

Motivación y Resultados Previos

La investigación sobre la incondicionalidad en productos tensoriales sigue siendo una línea muy activa de investigación:

* En 2004 I. Villanueva y D. Pérez García demuestran que ninguna de las 14 normas naturales de Grothendieck preserva incondicionalidad
* En 2005 A. Defant y N. Kalton demuestran que el espacio de polinomios m-homogéneos sobre un espacio de Banach infinito-dimensional nunca tiene base incondicional. Hay varios trabajos "detrás" de éste.

Motivación y Resultados Previos

La investigación sobre la incondicionalidad en productos tensoriales sigue siendo una línea muy activa de investigación:

* En 2004 I. Villanueva y D. Pérez García demuestran que ninguna de las 14 normas naturales de Grothendieck preserva incondicionalidad
* En 2005 A. Defant y N. Kalton demuestran que el espacio de polinomios m-homogéneos sobre un espacio de Banach infinito-dimensional nunca tiene base incondicional. Hay varios trabajos "detrás"de éste.
* En 2007 A. Defant y D. Pérez García definen una norma tesorial que preserva incondicionalidad sobre un amplio conjunto de espacios (subespacios de espacios $\mathcal{L}_1$,...).

Motivación y Resultados Previos

La investigación sobre la incondicionalidad en productos tensoriales sigue siendo una línea muy activa de investigación:

* En 2004 I. Villanueva y D. Pérez García demuestran que ninguna de las 14 normas naturales de Grothendieck preserva incondicionalidad
* En 2005 A. Defant y N. Kalton demuestran que el espacio de polinomios m-homogéneos sobre un espacio de Banach infinito-dimensional nunca tiene base incondicional. Hay varios trabajos "detrás"de éste.
* En 2007 A. Defant y D. Pérez García definen una norma tesorial que preserva incondicionalidad sobre un amplio conjunto de espacios (subespacios de espacios $\mathcal{L}_1$,...).
* .....

Simetría de la base

Interesa más el caso continuo:

Simetría de la base

Interesa más el caso continuo:

* En sucesivos trabajos (1960-1980) T. Andô, R. O'Neil, M. Milman, etc; estudian la estructura de r.i. en el producto tensorial de determinados espacios: Lorentz, Orlicz, Marcinkiewicz... Les interesa más el problema desde el punto de vista de su relación con los operadores integrales.

Simetría de la base

Interesa más el caso continuo:

* En sucesivos trabajos (1960-1980) T. Andô, R. O'Neil, M. Milman, etc; estudian la estructura de r.i. en el producto tensorial de determinados espacios: Lorentz, Orlicz, Marcinkiewicz... Les interesa más el problema desde el punto de vista de su relación con los operadores integrales.
* En 1989 C. Read aborda el problema de las bases simétricas en productos tensoriales para una determinada crossnorm y determinados espacios. **Volveremos a esto al final del trabajo**.

Simetría de la base

Interesa más el caso continuo:

* En sucesivos trabajos (1960-1980) T. Andô, R. O'Neil, M. Milman, etc; estudian la estructura de r.i. en el producto tensorial de determinados espacios: Lorentz, Orlicz, Marcinkiewicz... Les interesa más el problema desde el punto de vista de su relación con los operadores integrales.
* En 1989 C. Read aborda el problema de las bases simétricas en productos tensoriales para una determinada crossnorm y determinados espacios. **Volveremos a esto al final del trabajo**.
* Finalmente, en 1974 D. H. Fremlin trata el problema de la definición de crossnorms sobre el producto tensorial de retículos de forma que se preserve esta estructura.

Simetría de la base

Interesa más el caso continuo:

* En sucesivos trabajos (1960-1980) T. Andô, R. O'Neil, M. Milman, etc; estudian la estructura de r.i. en el producto tensorial de determinados espacios: Lorentz, Orlicz, Marcinkiewicz... Les interesa más el problema desde el punto de vista de su relación con los operadores integrales.
* En 1989 C. Read aborda el problema de las bases simétricas en productos tensoriales para una determinada crossnorm y determinados espacios. **Volveremos a esto al final del trabajo**.
* Finalmente, en 1974 D. H. Fremlin trata el problema de la definición de crossnorms sobre el producto tensorial de retículos de forma que se preserve esta estructura.
* Otros trabajos que citaremos..

Definiciones Necesarias

Espacios Invariantes por Reordenamiento

Sea $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ un espacio de medida. Y $(\Omega \times \Omega, \lambda \otimes \lambda)$ el espacio producto.

Espacios Invariantes por Reordenamiento

Sea $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ un espacio de medida. Y $(\Omega \times \Omega, \lambda \otimes \lambda)$ el espacio producto.

$\mathcal{M}_0(\Omega)$ (resp. $\mathcal{M}_0(\Omega \times \Omega)$) será el conjunto de funciones medibles sobre Ω (resp. sobre $\Omega \times \Omega$) $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$-valuadas.

Espacios Invariantes por Reordenamiento

Sea $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ un espacio de medida. Y $(\Omega \times \Omega, \lambda \otimes \lambda)$ el espacio producto.
$\mathcal{M}_0(\Omega)$ (resp. $\mathcal{M}_0(\Omega \times \Omega)$) será el conjunto de funciones medibles sobre Ω (resp. sobre $\Omega \times \Omega$) $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$-valuadas.
Dada una función $f \in \mathcal{M}_0(\Omega)$, denotamos μ_f la **función de distribución** de f, definida por

$$\mu_f(x) := \lambda\{t \in \Omega : |f(t)| > x\},$$

para todo $x \geq 0$.

Espacios Invariantes por Reordenamiento

Dada $f \in \mathcal{M}_0(\Omega)$, el **reordenamiento decreciente** de f es una función f^* definida sobre $[0, \infty)$ como

$$f^*(t) := \text{ínf}\{x : \mu_f(x) \leq t\},$$

$t \in [0, \infty)$.

Espacios Invariantes por Reordenamiento

Dada $f \in \mathcal{M}_0(\Omega)$, el **reordenamiento decreciente** de f es una función f^* definida sobre $[0, \infty)$ como

$$f^*(t) := \inf\{x : \mu_f(x) \leq t\},$$

$t \in [0, \infty)$.

Definición

Un espacio Köthe de funciones X definido sobre el espacio de medida Ω se dice **invariante por reordenamiento** (r.i.) si verifica la siguiente propiedad:

Dadas $f, g \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ tal que $f^*(t) \leq g^*(t)$ para todo $t \in [0, \infty)$ y $g \in X(\Omega)$, entonces $f \in X(\Omega)$ y $\|f\|_X \leq \|g\|_X$.

Espacios Invariantes por Reordenamiento

Se puede *reducir* el estudio de los espacios r.i. a los espacios de medida $\Omega = I = [0,1]$ con la medida de Lesbegue usual λ, $\Omega = [0,\infty)$ con la medida de Lesbegue usual λ, y el caso en que Ω es el conjunto de números enteros con la medida discreta.
En la primera parte del trabajo, Ω denotará uno de los primeros dos casos.

Espacios Invariantes por Reordenamiento

Se puede *reducir* el estudio de los espacios r.i. a los espacios de medida $\Omega = I = [0,1]$ con la medida de Lesbegue usual λ, $\Omega = [0,\infty)$ con la medida de Lesbegue usual λ, y el caso en que Ω es el conjunto de números enteros con la medida discreta.
En la primera parte del trabajo, Ω denotará uno de los primeros dos casos.

Espacios Invariantes por Reordenamiento

Se puede *reducir* el estudio de los espacios r.i. a los espacios de medida $\Omega = I = [0, 1]$ con la medida de Lesbegue usual λ, $\Omega = [0, \infty)$ con la medida de Lesbegue usual λ, y el caso en que Ω es el conjunto de números enteros con la medida discreta.

En la primera parte del trabajo, Ω denotará uno de los primeros dos casos.

Cuando tenemos un espacio r.i. $X = X(\Omega)$ sobre Ω, el correspondiente espacio r.i. $X(\Omega \times \Omega)$ sobre $\Omega \times \Omega$ es el espacio de funciones medibles $x(s, t)$ sobre $\Omega \times \Omega$ tal que $x^*(t) \in X(\Omega)$, con la norma $\|x\|_{X(\Omega\times\Omega)} = \|x^*\|_{X(\Omega)}$, donde x^* denota el reordenamiento decreciente de x.

Productos Tensoriales y Crossnorms

Definición

Dados dos espacios de Banach X, Y, diremos que α es una **crossnorm razonable"** cuando satisface las condiciones:

1. $\alpha(x \otimes y) = \|x\|\|y\|$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, y
2. Si $x^* \in X^*$ e $y^* \in Y^*$, entonces $x^* \otimes y^* \in (X \otimes Y, \alpha)^*$ y tiene $\|x^*\|\|y^*\|$.

En lo que sigue diremos simplemente crossnorm.

Productos Tensoriales y Crossnorms

Definición

Dados dos espacios de Banach X, Y, diremos que α es una **crossnorm razonable"** cuando satisface las condiciones:

1. $\alpha(x \otimes y) = \|x\|\|y\|$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, y
2. Si $x^* \in X^*$ e $y^* \in Y^*$, entonces $x^* \otimes y^* \in (X \otimes Y, \alpha)^*$ y tiene $\|x^*\|\|y^*\|$.

En lo que sigue diremos simplemente crossnorm.

Existen dos crossnorms particularmente interesantes sobre el producto tensorial $X \otimes Y$: La crossnorm **proyectiva** π, y la crossnorm **inyectiva** ε. Verificándose que cualquier crossnorm α satisface $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$.

Productos Tensoriales y Crossnorms

La siguiente familia de crossnorms serán clave en nuestro trabajo:

Productos Tensoriales y Crossnorms

La siguiente familia de crossnorms serán clave en nuestro trabajo:
Sea (Ω, μ) un espacio arbitrario de medida, y E un espacio Banach. Entonces para cada $p \in [1, \infty)$ consideramos el espacio $L_p(\mu, E)$.

Productos Tensoriales y Crossnorms

La siguiente familia de crossnorms serán clave en nuestro trabajo: Sea (Ω, μ) un espacio arbitrario de medida, y E un espacio Banach. Entonces para cada $p \in [1, \infty)$ consideramos el espacio $L_p(\mu, E)$. Consideremos la aplicación natural inyectiva

$$L_p(\mu) \otimes E \hookrightarrow L_p(\mu, E)$$

definida por $\tilde{f} \otimes x \mapsto \tilde{f}(\cdot)x$. Podemos definir la crossnorm

$$\Delta_p(f; L_p, E) := \Big(\int_\Omega \|f(w)\|_E^p d\mu(w) \Big)^{\frac{1}{p}}$$

on $L_p \otimes E$. La denotaremos por $L_p \otimes_{\Delta_p} E$ y por $L_p \hat{\otimes}_{\Delta_p} E$ su completación.

Productos Tensoriales y Crossnorms

Usando un argumento de densidad con funciones simples, se sigue que la identificación $L_p \hat{\otimes}_{\Delta_p} E = L_p(\mu, \hat{E})$ es un isomorfismo isométrico.

Productos Tensoriales y Crossnorms

Usando un argumento de densidad con funciones simples, se sigue que la identificación $L_p\hat{\otimes}_{\Delta_p}E = L_p(\mu, \hat{E})$ es un isomorfismo isométrico.

En el caso $p = \infty$, $L_\infty(\mu, E)$ se define de forma análoga.

Productos Tensoriales y Crossnorms

Usando un argumento de densidad con funciones simples, se sigue que la identificación $L_p\hat{\otimes}_{\Delta_p}E = L_p(\mu, \hat{E})$ es un isomorfismo isométrico.

En el caso $p = \infty$, $L_\infty(\mu, E)$ se define de forma análoga.

Es fácil ver que $\Delta_1 = \pi$ sobre $L_1 \otimes E$ y $\Delta_\infty = \varepsilon$ sobre $L_\infty \otimes E$.

Productos Tensoriales y Crossnorms

Usando un argumento de densidad con funciones simples, se sigue que la identificación $L_p \hat{\otimes}_{\Delta_p} E = L_p(\mu, \hat{E})$ es un isomorfismo isométrico.

En el caso $p = \infty$, $L_\infty(\mu, E)$ se define de forma análoga.

Es fácil ver que $\Delta_1 = \pi$ sobre $L_1 \otimes E$ y $\Delta_\infty = \varepsilon$ sobre $L_\infty \otimes E$.

Observación

$L_\infty(\Omega) \hat{\otimes}_\varepsilon L_\infty(\Omega) \subsetneq L_\infty(\Omega \times \Omega)$ en los casos que estamos considerando.

Resultado y pasos de la Demostración

Resultado

¿Cómo vemos el producto tensorial como espacio de funciones?, ¿Qué es lo análogo a la base producto?

Resultado

¿Cómo vemos el producto tensorial como espacio de funciones?, ¿Qué es lo análogo a la base producto?
Sean $X(\Omega_1)$, $Y(\Omega_2)$ y $Z(\Omega_1 \times \Omega_2)$ espacios de Banach de funciones. Consideremos el operador bilineal

$$B : X(\Omega_1) \times Y(\Omega_2) \longrightarrow Z(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

definido como $B(x, y)(s, t) = x \otimes y(s, t) = x(s)y(t)$ para todo $(s, t) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

Resultado

La pregunta que vamos a estudiar es:

Resultado

La pregunta que vamos a estudiar es:

¿Qué espacios r.i. X, Y, Z verifican que existe una crossnorm α tal que el operador $\hat{B} : X(\Omega_1)\hat{\otimes}_\alpha Y(\Omega_2) \longrightarrow Z(\Omega_1 \times \Omega_2)$ es un isomorfismo topológico de $X(\Omega_1)\hat{\otimes}_\alpha Y(\Omega_2)$ sobre $Z(\Omega_1 \times \Omega_2)$?($\hat{B}$ es la extensión del operador B a la completación $X(\Omega_1)\hat{\otimes}_\alpha Y(\Omega_2)$).

Resultado

La pregunta que vamos a estudiar es:
¿Qué espacios r.i. X, Y, Z verifican que existe una crossnorm α tal que el operador $\hat{B} : X(\Omega_1)\hat{\otimes}_\alpha Y(\Omega_2) \longrightarrow Z(\Omega_1 \times \Omega_2)$ es un isomorfismo topológico de $X(\Omega_1)\hat{\otimes}_\alpha Y(\Omega_2)$ sobre $Z(\Omega_1 \times \Omega_2)$?($\hat{B}$ es la extensión del operador B a la completación $X(\Omega_1)\hat{\otimes}_\alpha Y(\Omega_2)$).
Obviamente, si consideramos $X = Y = Z = L_p$ y $\alpha = \Delta_p$ para $1 \leq p < \infty$, se verifica lo anterior. El recíproco también es cierto:

Resultado

La pregunta que vamos a estudiar es:
¿Qué espacios r.i. X, Y, Z verifican que existe una crossnorm α tal que el operador $\hat{B} : X(\Omega_1)\hat{\otimes}_\alpha Y(\Omega_2) \longrightarrow Z(\Omega_1 \times \Omega_2)$ es un isomorfismo topológico de $X(\Omega_1)\hat{\otimes}_\alpha Y(\Omega_2)$ sobre $Z(\Omega_1 \times \Omega_2)$?($\hat{B}$ es la extensión del operador B a la completación $X(\Omega_1)\hat{\otimes}_\alpha Y(\Omega_2)$).
Obviamente, si consideramos $X = Y = Z = L_p$ y $\alpha = \Delta_p$ para $1 \leq p < \infty$, se verifica lo anterior. El recíproco también es cierto:

Teorema (Principal)

Dados X, Y, Z espacios r.i. y una crossnorm α. El operador $\hat{B}$ es un isomorfimo topológico desde $X(\Omega)\hat{\otimes}_\alpha Y(\Omega)$ sobre $Z(\Omega \times \Omega)$ si y sólo si existe un $p \in [1, \infty)$ tal que $X = Y = Z = L_p$ y $\alpha = \Delta_p$.

Pasos de la Demostración

Trabajamos sobre $\Omega = I = [0, 1]$. El caso $[0, \infty)$ es similar. El problema de bases simétricas se comentará al final.

Pasos de la Demostración

Trabajamos sobre $\Omega = I = [0, 1]$. El caso $[0, \infty)$ es similar. El problema de bases simétricas se comentará al final.

Descartamos el caso $p = \infty$:

Lema

No existe ningún espacio r.i. Z tal que exista una crossnorm α verificando que el operador $\hat{B}$ es un isomorfismo topológico desde $L_\infty(I)\hat{\otimes}_\alpha L_\infty(I)$ sobre $Z(I \times I)$.

Pasos de la Demostración

El resultado principal que usamos es la caracterización de espacios L_p que se da en el trabajo:
S. V. Astashkin, L. Maligranda and E. M. Semenov, *Multiplicator space and complemented subspaces of rearrangement invariant space*, J. Funct. Anal. **202** (2003) 247-276.
En él se hace la siguiente construcción:

Pasos de la Demostración

El resultado principal que usamos es la caracterización de espacios L_p que se da en el trabajo:
S. V. Astashkin, L. Maligranda and E. M. Semenov, *Multiplicator space and complemented subspaces of rearrangement invariant space*, J. Funct. Anal. **202** (2003) 247-276.
En él se hace la siguiente construcción:
Dado un espacio r.i. X sobre I, denotamos

$$V_0(X) = \{a \in X : a \neq 0, a = a^*\}.$$

Ahora, para cualquier función $a \in V_0(X)$ e intervalos diádicos $\Delta_{n,k} = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, $k = 1, 2, \cdots, 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, consideramos las dilataciones y translaciones de la función a:

$$a_{n,k} = \begin{cases} a(2^n t - k + 1) & \text{si } t \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Pasos de la Demostración

El punto clave de nuestra demostración es el siguiente resultado, que aparece en el artícullo anteriormente citado:

Pasos de la Demostración

El punto clave de nuestra demostración es el siguiente resultado, que aparece en el artícullo anteriormente citado:

Teorema (S. V. Astashkin, L. Maligranda y E. M. Semenov)

Sea X un espacio r.i. sobre $[0,1]$. Entonces existe un $p \in [1,\infty]$ tal que $X = L_p$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que

$$C^{-1}\|\sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\chi_{\Delta n,k}\|_X\|a\|_X \leq \|\sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}a_{n,k}\|_X$$

$$\leq C\|\sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\chi_{\Delta_{n,k}}\|_X\|a\|_X, \qquad (1)$$

para todo $a \in V_0(X)$ y todo $c_{n,k} \in \mathbb{R}$ con $k = 1, 2, \cdots, 2^n, n = 0, 1, 2, \cdots$.

Idea de la Demostración

Con esto se puede probar la siguiente proposición

Idea de la Demostración

Con esto se puede probar la siguiente proposición

Proposición

Dados X, Y, Z espacios r.i. y una crossnorm α, si el operador B es un isomorfismo topológico desde $X(I) \otimes_\alpha Y(I)$ en $Z(I \times I)$, entonces debe existir un $p \in [1, \infty]$ tal que $X = L_p = Y$.

Idea de la Demostración

Con esto se puede probar la siguiente proposición

Proposición

Dados X, Y, Z espacios r.i. y una crossnorm α, si el operador B es un isomorfismo topológico desde $X(I) \otimes_\alpha Y(I)$ en $Z(I \times I)$, entonces debe existir un $p \in [1, \infty]$ tal que $X = L_p = Y$.

El teorema principal se demuestra a partir de este resultado usando razonamientos de densidad sobre las funciones simples.

Pasos de la Demostración

Algunas observaciones:

Pasos de la Demostración

Algunas observaciones:

(i) Hemos pedido que el operador $\hat{B}$ fuese isomorfismo topológico y sobreyectivo. El caso L_∞ muestra que la hipótesis de sobreyectividad no es redundante.

Pasos de la Demostración

Algunas observaciones:

(i) Hemos pedido que el operador $\hat{B}$ fuese isomorfismo topológico y sobreyectivo. El caso L_∞ muestra que la hipótesis de sobreyectividad no es redundante.

(ii) El caso de $[0, \infty)$ se demuestra con un teorema análogo. Teniendo que salvar alguna cuestión técnica nueva como la aparición del espacio $\Gamma = \overline{S}^{\|\cdot\|_\infty}$. El resultado que se usa en este caso aparece en:
F. L. Hernandez and E. M. Semenov, *Subspaces generated by translations in rearrangement invariant spaces*, J. Funct. Anal. **169** (1999) 52-80.

Pasos de la Demostración

Algunas observaciones:

(i) Hemos pedido que el operador $\hat{B}$ fuese isomorfismo topológico y sobreyectivo. El caso L_∞ muestra que la hipótesis de sobreyectividad no es redundante.

(ii) El caso de $[0, \infty)$ se demuestra con un teorema análogo. Teniendo que salvar alguna cuestión técnica nueva como la aparición del espacio $\Gamma = \overline{S}^{\|\cdot\|_\infty}$. El resultado que se usa en este caso aparece en:
F. L. Hernandez and E. M. Semenov, *Subspaces generated by translations in rearrangement invariant spaces*, J. Funct. Anal. **169** (1999) 52-80.

(iii) Notemos que el espacio que funciona bien con la crossnorm ε es $C(K)$, ya que $C(K)\hat{\otimes}_\varepsilon C(L)$ es isométricamente isomorfo (vía el operador B) a $C(K \times L)$. Pero no es un r.i.!!!!

Bases Simétricas

El problema para espacios **separables** puede ser traducido a bases.

Bases Simétricas

El problema para espacios **separables** puede ser traducido a bases. ¿Qué espacios de Banach X e Y con bases simétricas y qué crossnorms α verifican que la base producto es una base simétrica del producto tensorial $X\hat{\otimes}_\alpha Y$?

Bases Simétricas

El problema para espacios **separables** puede ser traducido a bases.
¿Qué espacios de Banach X e Y con bases simétricas y qué crossnorms α verifican que la base producto es una base simétrica del producto tensorial $X\hat{\otimes}_\alpha Y$?
La demostración para este caso es totalmente análoga a la que hemos desarrollado. El teorema que debemos usar, puede *encontrarse* en el trabajo
Z. Altshuler, *Characterization of c_o and l_p among Banach spaces with symmetric basis*, Israel J. Math., **24** (1976) 39-44.

Bases Simétricas

El teorema en este caso queda:

Bases Simétricas

El teorema en este caso queda:

Teorema

Si X, Y son espacios con bases simétricas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ respectivamente, tal que existe una crossnorm α que hace que $\{x_n \otimes y_m\}$ es una base simétrica en $Z = X\hat{\otimes}_\alpha Y$, entonces $X = Y = Z$ es el espacio ℓ_p y $\alpha = \Delta_p$ para algún $1 \leq p < \infty$, o es el espacio c_0 y $\alpha = \varepsilon$.

Bases Simétricas

El teorema en este caso queda:

Teorema

Si X, Y son espacios con bases simétricas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ respectivamente, tal que existe una crossnorm α que hace que $\{x_n \otimes y_m\}$ es una base simétrica en $Z = X \hat{\otimes}_\alpha Y$, entonces $X = Y = Z$ es el espacio ℓ_p y $\alpha = \Delta_p$ para algún $1 \leq p < \infty$, o es el espacio c_0 y $\alpha = \varepsilon$.

Observación

El orden de los teoremas que hemos usado aparecen en la literatura inversamente. De hecho, los teoremas en r.i. generalizan el resultado de Z. Altshuler.

Sobre la Optimalidad del Resultado

Sobre la Optimalidad del Resultado

Si uno recuerda el teorema de Pisier-Schütt, y existiese una versión simétrica, el resultado que damos podría ser mucho más completo.

Sobre la Optimalidad del Resultado

Si uno recuerda el teorema de Pisier-Schütt, y existiese una versión simétrica, el resultado que damos podría ser mucho más completo. Nuestro resultado implicaría entonces que, con que el producto tensorial tenga base simétrica, sea la que sea, necesariamente ambos espacios son ℓ_p o c_0 y la crossnorm es Δ_p o ε.

Sobre la Optimalidad del Resultado

Este resultado **NO** es cierto:

Sobre la Optimalidad del Resultado

Este resultado **NO** es cierto:
Dados dos espacios de Banach X e Y con bases $(x_n)_n$ e $(y_m)_m$ respectivamente, se define la siguiente crossnorm sobre $X \otimes Y$:

$$\eta\Big(\sum_{n,m} a_{n,m} x_n \otimes y_m\Big) = \Big\| \sum_{n} \Big\| \sum_{m} a_{n,m} y_m \Big\|_Y x_n \Big\|_X .$$

Sobre la Optimalidad del Resultado

Este resultado **NO** es cierto:
Dados dos espacios de Banach X e Y con bases $(x_n)_n$ e $(y_m)_m$ respectivamente, se define la siguiente crossnorm sobre $X \otimes Y$:

$$\eta(\sum_{n,m} a_{n,m} x_n \otimes y_m) = \| \sum_n \| \sum_m a_{n,m} y_m \|_Y x_n \|_X .$$

En
C.J.Read, *When E and $E[E]$ are isomorphic*, Geometry of Banach spaces (Strobl, 1989), 245-252, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 158, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
se demuestra que existe un espacio U (**Espacio Universal de Pelcynsky)** tal que tiene base simétrica, $U \simeq U \hat{\otimes}_\eta U$, pero U no es ℓ_p ni c_0.

Sobre la Optimalidad del Resultado

En este sentido nuestro resultado no es mejorable. **Es óptimo!**

Sobre la Optimalidad del Resultado

En este sentido nuestro resultado no es mejorable. **Es óptimo!**
Algunos Comentarios sobre la NO existencia de Pisier-Schütt simétrico.