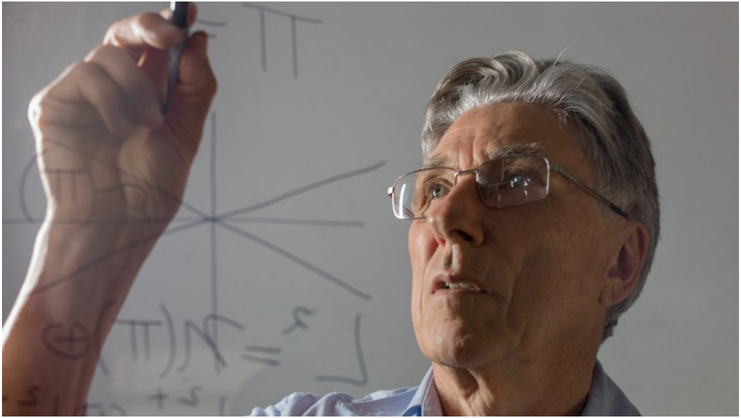
# Funciones cuadrado y cálculo funcional $H^\infty$ para operadores sectoriales

H. Ariza, L. Cabezas, J. Canto, G. Cao, M. Godoy, M. Utrera

BCAM, Bilbao

7 de marzo de 2019

Profesor: J. Betancor



Alan McIntosh (1942–2016)

## Notación

- En lo sucesivo $H$ es un espacio de Hilbert. $\mathcal{L}(H)$ es el espacio de los operadores acotados en $H$ y $\mathcal{C}(H)$ es el espacio de los operadores cerrados en $H$.
- Si $A$ es un operador cerrado en $H$, $\sigma(A)$ es el espectro de $A$ y $\rho(A)$ es el conjunto resolvente de $A$.
- Para $\lambda \in \rho(A)$ el resolvente de $A$ en $\lambda$ es $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$.
- $D(A)$ es el dominio de $A$, $R(A)$ es el rango de $A$ y $N(A)$ es el núcleo de $A$.
- Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, $\mathcal{O}(\Omega)$ denota el espacio de las funciones holomorfas en $\Omega$ y $H^\infty(\Omega) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : f \text{ es acotada}\}$.
- $\mathbf{1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la función constante igual a 1.

# Operadores sectoriales

## Definición

Para $0 < \omega \leq \pi$, el *sector abierto de ángulo* $\omega$ es el conjunto $S_\omega = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ y } |\arg z| < \omega\}$ y $S_0 = (0, \infty)$. Un operador cerrado $A$ es *sectorial de ángulo* $\omega < \pi$ si $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$ y $M(A, \omega') = \sup\{||\lambda R(\lambda, A)|| : \lambda \notin \overline{S_{\omega'}}\} < \infty$ para todo $\omega < \omega' < \pi$. En ese caso escribimos $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$.

## Definición

Una familia de operadores cerrados $(A_i)_i$ es *uniformemente sectorial de ángulo* $\omega$ si $A_i \in \mathrm{Sect}(\omega)$ para todo $i$ y $\sup_i M(A_i, \omega') < \infty$ para $\omega < \omega' < \pi$.

## Definición

$$\mathcal{O}_c(S_\omega) = \{f \in \mathcal{O}(S_\omega) : f \text{ es acotada en } S_\varphi \cap \{r \leq |z| \leq R\} \\ \text{para } 0 < r < R < \infty\}.$$

## Proposición

Sea $0 \leq \omega < \pi$ y sea $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$.

a) Si $A$ es inyectivo entonces $A^{-1} \in \mathrm{Sect}(\omega)$ y se tiene

$$\lambda\left(\lambda + A^{-1}\right)^{-1} = I - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} + A\right)^{-1}$$

para $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.

b) Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in H$ se tiene

$$x \in \overline{D(A)} \iff \lim_{t \to \infty} t^n (t + A)^{-n} x = x,$$
$$x \in \overline{R(A)} \iff \lim_{t \to 0} A^n (t + A)^{-n} x = x.$$

c) $\overline{D(A)} = H$ y $H = N(A) \oplus \overline{R(A)}$.

## Definición

Sea $\omega < \pi$ y sea $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$. Si $(A_n)$ es una sucesión uniformemente sectorial de ángulo $\omega$, decimos que es una *aproximación sectorial de $A$ en $S_\omega$* si

$$R(-1, A_n) \to R(-1, A) \text{ en } \mathcal{L}(H).$$

En ese caso escribimos $A_n \to A$ $(S_\omega)$.

## Proposición

a) Si $A_n \to A$ $(S_\omega)$ y $A_n, A$ son inyectivos, entonces $A_n^{-1} \to A^{-1}$ $(S_\omega)$.
b) Si $A_n \to A$ $(S_\omega)$ y $A \in \mathcal{L}(H)$, entonces $A_n \in \mathcal{L}(H)$ para $n$ suficientemente grande y $A_n \to A$ en norma.
c) Si $(A_n) \subset \mathcal{L}(H)$ es uniformemente sectorial de ángulo $\omega$ y $A_n \to A$ en norma, entonces $A_n \to A$ $(S_\omega)$.

# Espacios de funciones holomorfas

## Objetivo

Si $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ y $f \in \mathcal{O}(S_\varphi)$ con $\varphi > \omega$, buscamos definir el operador

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) R(z, A) dz,$$

donde $\Gamma$ es un camino en $S_\varphi$ que "rodea" $S_\omega$ en sentido positivo.

- Decimos que $f$ *decae regularmente en* $\infty$ si existe $\alpha < 0$ tal que $f(z) = O(|z|^\alpha)$ para $|z| \to \infty$.
- Decimos que $f$ *decae regularmente en 0* si existe $\beta > 0$ tal que $f(z) = O(|z|^\beta)$ para $|z| \to 0$.

### Definición

Sea $0 < \varphi \leq \pi$. La *clase de Dunford-Riesz en* $S_\varphi$ es el ideal

$$\mathcal{DR}(S_\varphi) = \{f \in H^\infty(S_\varphi) : f \text{ decae regularmente en } 0 \text{ y en } \infty\}$$

### Lema

Sea $0 < \varphi \leq \pi$ y sea $f \in \mathcal{O}(S_\varphi)$. Son equivalentes:

1. $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi)$.
2. Existen $C \geq 0$ y $s > 0$ tales que
$$|f(z)| \leq C \min\{|z|^s, |z|^{-s}\}, \quad (z \in S_\varphi).$$
3. Existen $C \geq 0$ y $s > 0$ tales que
$$|f(z)| \leq C \left(\frac{|z|}{1+|z|^2}\right)^s, \quad (z \in S_\varphi).$$

### Definición

Sea $0 < \varphi \leq \pi$. Definimos la clase

$$\mathcal{DR}_0(S_\varphi) = \{f \in H^\infty(S_\varphi) : f \text{ es holomorfa en } 0 \\ \text{y decae regularmente en } \infty\}$$

### Lema

Sea $0 < \varphi \leq \pi$ y sea $f \in \mathcal{O}(S_\varphi)$. Son equivalentes:

1. $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$.
2. $f$ está acotada y cumple:
   - 2.1 $f$ decae regularmente en $\infty$.
   - 2.2 Existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f - c$ decae regularmente en 0.

## Definición

Sea $0 < \varphi \leq \pi$. La *clase de Dunford-Riesz extendida en* $S_\varphi$ es el álgebra

$$\mathcal{DR}_{ext}(S_\varphi) = \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi) + \mathbb{C}\mathbf{1}$$

## Lema

Sea $0 < \varphi \leq \pi$ y sea $f \in \mathcal{O}(S_\varphi)$. Son equivalentes:

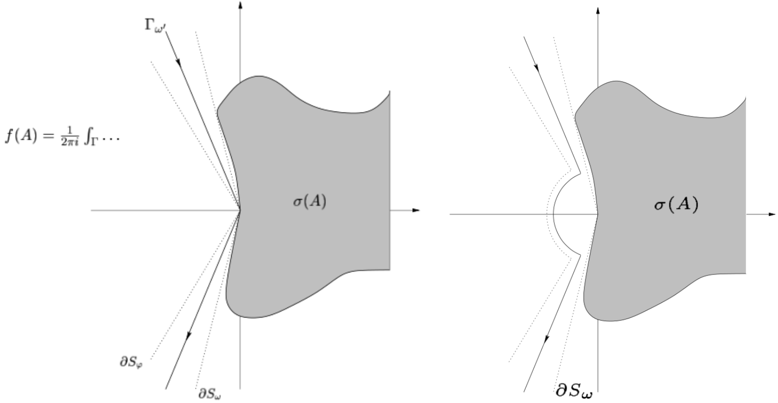
1. $f \in \mathcal{DR}_{ext}(S_\varphi)$.
2. Existen $h \in \mathcal{DR}(S_\varphi)$ y $g, \tilde{g} \in \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$ tales que

$$f(z) = h(z) + g(z) + \tilde{g}(z^{-1}), \quad (z \in S_\varphi).$$

3. $f$ está acotada y cumple:
   - 3.1 Existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f - c$ decae regularmente en $\infty$
   - 3.2 Existe $d \in \mathbb{C}$ tal que $f - d$ decae regularmente en 0.

# Cálculo funcional mediante integrales de Cauchy

Sea $0 < \varphi < \pi$ y $\delta > 0$. Llamamos $\Gamma_\varphi = \partial S_\varphi$:
Denotamos por $\Gamma_{(\varphi,\delta)} := \partial(S_\varphi \cup B_\delta(0))$:



Para $\omega < \omega' < \varphi < \pi$ y $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi)$, definimos:

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega'}} f(z) R(z,A) dz$$

Veamos que está bien definida:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_{\omega'}} ||f(z)R(z,A)|| \, |dz| \\
&\leq M \int_{\Gamma_{\omega'}} \frac{|f(z)|}{|z|} \, |dz| \\
&\leq M \int_{\Gamma_0} \frac{|f(z)|}{|z|} \, |dz| + M \int_{\Gamma_\infty} \frac{|f(z)|}{|z|} \, |dz| \\
&\leq M \int_{\Gamma_0} \frac{C|z|^\beta}{|z|} \, |dz| + M \int_{\Gamma_\infty} \frac{C|z|^\alpha}{|z|} \, |dz| < \infty
\end{aligned}$$

donde $\beta > 0$ y $\alpha < 0$, lo que asegura la convergencia.

Para $\omega < \omega' < \varphi < \pi$, $\delta > 0$ suficientemente pequeño y $g \in \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$, definimos:

$$g(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega',\delta}} g(z) R(z, A) dz$$

De forma análoga se puede comprobar que $g(A)$ está bien definida. Las definiciones son independientes de los parámetros $\omega'$ y $\delta$. Las dos definiciones coinciden para funciones $f = g \in \mathcal{DR} \cap \mathcal{DR}_0$.

Definimos $h(A) := f(A) + g(A)$ para $h = f + g \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$, lo cual da la aplicación lineal:

$$(h \longmapsto h(A)) : \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi) \to \mathcal{L}(H)$$

## Proposición

Sea $A \in Sect(\omega)$ y $\varphi > \omega$. Se cumplen:

a) Si $x \in N(A)$ y $f \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$, entonces $f(A)x = f(0)x$.

b) La aplicación $(h \longmapsto h(A))$ es un homomorfismo de álgebras.

c) Para $\lambda \notin \overline{S_\varphi}$ se tiene $R(\lambda, A) = (\frac{1}{\lambda - z})(A)$.

d) Se cumple $(A - \nu)R(\lambda, A)R(\mu, A) = \left(\frac{(z-\nu)}{(\lambda-z)(\mu-z)}\right)(A)$ para todo $\lambda, \mu \notin \overline{S_\varphi}$ y $\nu \in \mathbb{C}$.

e) Si $B$ es un operador cerrado que conmuta con las resolventes de $A$, entonces $B$ también conmuta con $f(A)$. En particular, $f(A)$ conmuta con $A$.

# Cálculo funcional natural

## Definición

$\mathcal{A}(S_\varphi) := \{f : S_\varphi \to \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N} : \frac{f(z)}{(1+z)^n} \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)\}$,
y

$$\mathcal{A}[S_\omega] := \bigcup_{\varphi > \omega} \mathcal{A}(S_\varphi).$$

## Lema

Sea $f : S_\varphi \to \mathbb{C}$ holomorfa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $f \in \mathcal{A}(S_\varphi)$.
2. $f \in \mathcal{O}_c(S_\varphi)$ y tiene las siguientes propiedades:
   2.1 $f(z) = O(|z|^\alpha)$ $(z \to \infty)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, y
   2.2 $f(z) - c = O(|z|^\beta)$ para algún $\beta > 0$ y algún $c \in \mathbb{C}$.
3. Sea $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, y $F \in \mathcal{DR}$ tal que $f(z) = c + (1+z)^n F(z)$.

### Definición

Para $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ y $f \in \mathcal{A}(S_\varphi)$ con $\varphi > \omega$, definimos

$$f(A) = (1+A)^n \left( \frac{f(z)}{(1+z)^n} \right)(A),$$

donde $n \in \mathbb{N}$ cumple $f(z)(1+z)^{-n} \in \mathcal{DR}(S_\varphi) + \mathcal{DR}_0(S_\varphi)$.
Llamamos cálculo funcional natural para $A$ en $S_\varphi$ a la aplicación

$$(f \longmapsto f(A)) : \mathcal{A}(S_\phi) \to \mathcal{C}(H).$$

## Proposición

Sea $f \in \mathcal{A}(S_\varphi)$. Entonces se cumple:

a) $f(A)$ es cerrado.

b) Si $A \in \mathcal{L}(H)$, entonces $f(A) \in \mathcal{L}(H)$.

c) Si $T \in \mathcal{L}(X)$ conmuta con A, también conmuta con $f(A)$. Si $f(A) \in \mathcal{L}(X)$, entonces $f(A)$ conmuta con $A$.

d) Sea $g \in \mathcal{A}(S_\varphi)$. Entonces,

$$f(A) + g(A) \subset (f+g)(A) \quad y \quad f(A)g(A) \subset (fg)(A).$$

Además, $D((fg)(A)) \cup D(g(A)) = D(f(A)g(A))$.

e) Tenemos $(\mathbf{1})(A) = I$,

$$\left(\frac{f(z)}{\lambda - z}\right)(A) = f(A)R(\lambda, A), \quad (\lambda \notin \overline{S_\varphi})$$

y

$$((z-\mu)f(z))(A) = (A-\mu)f(A), \quad (\mu \in \mathbb{C}).$$

f) Si $A$ es inyectiva y $f(z^{-1}) \in \mathcal{A}(S_\varphi)$, entonces se cumple $f(A) = f(z^{-1})(A^{-1})$.

g) Si $f, f^{-1} \in \mathcal{A}(S_\varphi)$, entonces $(f^{-1})(A) = f(A)^{-1}$. En particular, $f(A)$ es inyectiva.

# Cálculo funcional acotado

## Definición

Sea $0 \leq \omega < \pi$ y sea $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$. Supongamos que $\varphi > \omega$ y que $\mathcal{F}$ es una subálgebra de $H^\infty(S_\varphi)$ tal que $f(A)$ está definido mediante el cálculo funcional natural para operadores sectoriales para toda $f \in \mathcal{F}$. Decimos que el $\mathcal{F}$-cálculo natural para $A$ es acotado si existe $C \geq 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene $f(A) \in \mathcal{L}(H)$ y

$$||f(A)|| \leq C||f||_\infty,$$

donde

$$||f||_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in S_\varphi\}.$$

# Ejemplo de operador sin cálculo funcional acotado

Sea $H$ un espacio de Hilbert separable.
Veremos que existe $A$ operador invertible y sectorial con ángulo 0 tal que no tiene $H^{\infty}(S_{\frac{\pi}{2}})$-cálculo funcional acotado. Se conoce un teorema que te dice que un operador $A$ sectorial, con dominio denso y rango denso admite un cálculo funcional acotado con respecto a la clase de funciones $\mathcal{DR}(S_{\frac{\pi}{2}})$ si y solo lo admite para la clase de funciones $H^{\infty}(S_{\frac{\pi}{2}})$. Por tanto, tampoco tendremos cálculo funcional acotado con respecto a $\mathcal{DR}(S_{\frac{\pi}{2}})$.

Existe $(e_n)_n \subset H$ cumpliendo:

1. Para todo $x \in H$ existe una única $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.
2. Existe $(\theta_n)_{n=1}^{\infty} \subset \{-1, 1\}$ y $x \in H$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n e_n$ no converge.

Dada $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, definimos,

$$|||a||| := \limsup_{n\to\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

Para $n \geq 1$, el operador de proyección es

$$P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

Sabemos que $P_n \in L(H)$ y $sup_n||P_n|| =: M_0$ es finito.
$A_a : D_a = \{x = \sum x_n e_n : \sum a_n x_n e_n \text{ convergente}\} \longrightarrow H$
$A_a(x) := \sum a_k x_k e_k$. Teniendo en cuenta
$\sum^N a_k x_k e_k = a_{N+1} P_N(x) + \sum^N P_k(x)(a_k - a_{k+1})$ se sigue:

$$||A_a|| \leq M_0 |||a||| \tag{1}$$

Sean $a := (a_n) \subset \mathbb{R} \nearrow \infty$ con $a_1 > 0$, $\lambda \notin [a_1, \infty)$ y $r_\lambda := (\frac{1}{\lambda - a_n})$.

$|||r_\lambda||| = \sum_{k=1} |\frac{1}{\lambda - a_{k+1}} - \frac{1}{\lambda - a_k}| = \sum_{k=1} | \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{dt}{(\lambda - t)^2}| \leq \int_{a_1}^{\infty} \frac{dt}{(\lambda - t)^2} < \infty$

De (1) se tiene $A_{r_\lambda}$ es continua y además $R(\lambda, A_a) = A_{r_\lambda}$.

Se sigue $\sigma(A_a) \subset [a_1, \infty)$ y además, dado $\pi \geq \theta > 0$, y para cualquier $\lambda = |\lambda| e^{i\phi}$, $0 < \theta < |\phi| \leq \pi$, tenemos por (3) y (y la cota de $|||r_\lambda|||$):

$$\begin{aligned} ||\lambda R(\lambda, A_a)|| &\leq |\lambda| \; |||r_\lambda||| M_0 \leq M_0 \int_0^\infty \frac{|\lambda| dt}{(\lambda - t)^2} \\ &= M_0 \int_0^\infty \frac{dt}{(\exp i\phi - t)^2} \\ &= M_0 \int_0^\infty \frac{dt}{((t-1)^2 + 2t(1 - cos(\phi))} \end{aligned}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad: $0 < \theta < \phi \leq \pi$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{((t-1)^2 + 2t(1-cos(\phi))} = \left( \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{1/2}^{\frac{3}{2}} + \int_{\frac{3}{2}}^\infty \right)$$
$$\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)^2} + \int_{1/2}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2t(1-cos(\phi))} + \int_{\frac{3}{2}}^\infty \frac{1}{(t-1)^2} \leq C_\theta$$

donde en el último paso hemos utilizado $1 - cos(\phi) \geq 1 - cos(\theta)$

Finalmente, $A_a \in Sect(0)$.

Tenemos por definición y el teorema de Cauchy,
$f(A_a)(\sum_{k=1}^{n} x_n e_n) = \sum_{k=1}^{n} x_n f(a_n) e_n$

Fijamos $a = (a_n) = (2^n)_n$ por (1) y (2), existe $(\theta_n) \subset \{-1, 1\}$ y $x = \sum_{k=1} x_k e_k$ tal que $\sum_{k=1} \theta_k x_k e_k$ diverge.

Por el Teorema de interpolación de Carleson:

Existe $f \in H^{\infty}(S_{\frac{\pi}{2}})$ tal que $f(2^n) = \theta_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Obviamente al ser $f(A_a)(\sum_k x_k e_k) = \sum_k \theta_k x_k e_k$ no convergente, no puede tener cálculo funcional acotado.

# Funciones Cuadrado

$A$ un operador sectorial con ángulo $\omega$, inyectivo y con dominio y rango densos, y $F \in \mathcal{DR}(S_\theta)$ para algún $\theta > \omega$.

## Función cuadrado de $A$

$$||x||_F = \left( \int_0^\infty ||F(tA)x||^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Está bien definida porque la aplicación $t \to f(tA)$ es continua. Puede ocurrir $||x||_F = \infty$

## Cálculo funcional acotado en $H^\infty$

Decimos que el operador $A$ tiene un cálculo funcional acotado en $H^\infty(S_\theta)$ si existe $C > 0$ tal que para toda función $f \in H^\infty(S_\theta)$

$$||f(A)x|| \leq C \, ||f||_\infty \, ||x||, \quad x \in H$$

## Proposición

Las funciones cuadrado no dependen de la $F$ elegida. Es decir, si $F, G \in \mathcal{DR}(S_\theta)$ no son idénticamente nulas, existe $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K}||x||_F \leq ||x||_G \leq K||x||_F$$

## Proposición

Sea $F \in \mathcal{DR}(S_\theta)$. Para toda $f \in H^\infty(S_\theta)$ y $x \in H$,

$$\left(\int_0^\infty ||f(A)F(tA)x||^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \leq K||f||_\infty ||x||_F$$

## Estimación cuadrado para $A$

$$||x||_F = \left(\int_0^\infty ||F(tA)x||^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C||x||$$

Teorema

Sea $A$ un operador sectorial inyectivo tal que $A$ y $A^*$ satisfacen estimaciones cuadrado. Entonces $A$ tiene un cálculo funcional acotado, es decir,

$$||f(A)x|| \leq C||f||_\infty ||x||, \quad x \in H, \quad f \in H^\infty(S_\theta)$$

Las hipótesis significan que existen $F, G \in \mathcal{DR}(S_\theta)$ y $C > 0$ tales que

$$||x||_F = \left( \int_0^\infty ||F(tA)x||^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C||x||$$

$$||y||_G^* = \left( \int_0^\infty ||G(tA^*)x||^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C||x||$$

Sean $F, G \in \mathcal{DR}(S_\theta)$ con $\int_0^\infty F(t)\tilde{G}(t)\frac{dt}{t} = 1$. Aquí $\tilde{G}(z) = \overline{G(\bar{z})}$

$$f(A) = \int_0^\infty f(A)F(tA)G(tA^*)^* \frac{dt}{t}, \quad f \in H^\infty(S_\theta)$$

$$\langle f(A)x, y\rangle = \int_0^\infty \langle f(A)F(tA)x, G(tA^*)y\rangle \frac{dt}{t}, \quad x, y \in H, f \in H^\infty(S_\theta)$$

$$\begin{aligned}
|\langle f(A)x, y\rangle| &\leq \int_0^\infty |\langle F(tA)f(A)x, G(tA^*)y\rangle| \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^\infty ||f(A)F(tA)x|| \, ||G(tA^*)y|| \frac{dt}{t} \\
&\leq \left(\int_0^\infty ||f(A)F(tA)x||^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty ||G(tA^*)y||^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C||f||_\infty \, ||x||_F \, ||y||_G^*
\end{aligned}$$

$$|\langle f(A)x, y\rangle| \leq C||f||_\infty \, ||x||_F \, ||y||_G^*$$

Elegimos $f_n(z) = \frac{n^2 z}{(n+z)(1+nz)} \in H^\infty(S_\theta)$. Se cumple

$$\sup_n ||f_n||_\infty < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(A)x = x, \quad x \in H$$

Elegimos $y = x$ en la desigualdad anterior

$$||x||^2 = |\langle x, x\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle f_n(A)x, x\rangle| \leq C||x||_F \, ||x||_G^*$$

Junto con las estimaciones cuadrado de $A$ y $A^*$ esto implica

$$c||x||_F \leq ||x|| \leq C||x||_F$$

$$c||x||_F \leq ||x|| \leq C||x||_F$$

Sea $f \in H^\infty(S_\theta)$

$$\begin{aligned} ||f(A)x|| &\leq C||f(A)x||_F \\ &= C\left(\int_0^\infty ||F(tA)f(A)x||^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C\left(\int_0^\infty ||f(A)F(tA)x||^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C||f||_\infty ||x||_F \\ &\leq C||f||_\infty ||x|| \end{aligned}$$

En este caso $A^*$ también tendrá un cálculo funcional en $H^\infty(S_\theta)$ acotado y además

$$f(A^*) = \tilde{f}(A), \quad \tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

# Seminorma de Rademacher

### Definición

Sea $H$ un espacio de Hilbert. Sea $(\Sigma, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Para una variable aleatoria $x(s) : \Sigma \to H$ definimos su seminorma de Rademacher como

$$\|x\|_{Rad(H)} = \Big( \int_\Sigma \|x(s)\|_H^2 d\mathbb{P}(s) \Big)^{1/2} = \mathbb{E}(\|x\|_H^2)^{1/2}.$$

### Lema

Sean $x_1, x_2, \ldots x_n \in H$ cualesquiera y sean $\varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \ldots \varepsilon_n(s)$ variables aleatorias reales, **independientes** y de media cero. Sea $x = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k$. Tenemos,

$$\|x\|_{Rad(H)}^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}ar(\varepsilon_k) \|x_k\|_H^2.$$

$$\|x\|_{Rad(H)}^2 = \mathbb{E}\Big(\langle\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j, \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\rangle\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{j,k=1}^n \varepsilon_j\varepsilon_k\langle x_j, x_k\rangle\Big)$$

$$= \sum_{j,k=1}^n \mathbb{E}(\varepsilon_j\varepsilon_k)\langle x_j, x_k\rangle = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\varepsilon_k^2)\|x_k\|_H^2.$$

## Corolario

En las hipótesis previas, consideramos $\varepsilon_k$ iid, dadas por $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$. Entonces,

$$\|x\|_{Rad(H)} = \Big(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_H^2\Big)^{1/2}.$$

# Necesidad de estimaciones cuadrado

### Teorema

Sea $A$ operador sectorial inyectivo de tipo $\omega \in (0, \pi)$ con dominio denso en un espacio de Hilbert $H$. Supongamos que $A$ tiene un cálculo funcional acotado en $H^\infty(S_\theta)$, con $\theta \in (\omega, \pi)$. Entonces, para todo $\tau \in (\omega, \theta)$, y todo par de funciones $F, G \in \mathcal{DR}(S_\tau)$, existe una constante $K > 0$ que satisface

$$\begin{aligned} \|x\|_F \leq & \quad K\|x\|, \\ \|y\|_G^* \leq & \quad K\|y\|, \qquad\qquad \forall x, y \in H. \end{aligned}$$

Para $x \in H$, estimamos

$$\|x\|_F^2 = \int_0^\infty \|F(tA)x\|^2 \frac{dt}{t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \|F(tA)x\|^2 \frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_1^2 \|F(t2^kA)x\|^2 \frac{dt}{t} = \int_1^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|F(t2^kA)x\|^2 \frac{dt}{t}.$$

El objetivo es acotar la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|F(t2^kA)x\|^2.$$

Sean $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ con $|\alpha_k| \leq 1$ cualesquiera. Como $F \in \mathcal{DR}(S_\tau)$ y el cálculo es acotado, existen $C, s > 0$ con

$$\Big\| \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k F(t2^k A) \Big\| \leq C \sup_{z\in S_\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big( \frac{|z|2^k}{1+(|z|2^k)^2} \Big)^s$$

$$= C \sup_{z\in S_\tau} \sum_{|z|2^k \leq 1} \Big( \frac{|z|2^k}{1+(|z|2^k)^2} \Big)^s + C \sup_{z\in S_\tau} \sum_{|z|2^k > 1} \Big( \frac{|z|2^k}{1+(|z|2^k)^2} \Big)^s$$

$$\leq C \sup_{z\in S_\tau} \sum_{|z|2^k \leq 1} |z|^s 2^{ks} + C \sup_{z\in S_\tau} \sum_{|z|2^k > 1} |z|^{-s} 2^{-ks}$$

$$\leq C \sup_{z\in S_\tau} |z|^s \frac{1/|z|^s}{1-2^{-s}} + C \sup_{z\in S_\tau} |z|^{-s} \sum_{|z|2^k > 1} \frac{|z|^s}{1-2^{-s}} \leq \frac{2C}{1-2^{-s}}.$$

Ahora consideramos $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ va iid, en $(\Sigma, \mathbb{P})$, con $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$. Para cualquier suceso $s$ y $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=-n}^{n} \varepsilon_k(s) F(t2^k A)$ tiene seminorma de Rademacher menor que $2C/(1-2^{-s})$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} \|F(t2^k A)x\|^2 &= \Big\| \sum_{k=-n}^{n} \varepsilon_k F(t2^k A)x \Big\|_{Rad(H)}^2 \\
&= \int_\Sigma \Big\| \sum_{k=-n}^{n} \varepsilon_k F(t2^k A)x \Big\|^2 d\mathbb{P}(s) \\
&\leq \Big\| \sum_{k=-n}^{n} F(t2^k A) \Big\|_{Rad(\mathcal{L}(H))}^2 \|x\|^2 \\
&\leq \Big( \frac{2C}{1-2^{-s}} \Big)^2 \|x\|^2.
\end{aligned}$$

La serie es absolutamente convergente y

$$\|x\|_F^2 = \int_1^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|F(t2^k A)x\|^2 \frac{dt}{t} \leq K^2 \|x\|^2.$$

Como $G(A^*) = \tilde{G}(A)$, también tenemos $\|y\|_G^* \leq K\|y\|$.

## Observaciones

- La constante $K$ depende de $F, G \in \mathcal{DR}(S_\tau)$ y de la cota del cálculo funcional, pero no de $\tau$.
- Si $A$ tiene un cálculo funcional acotado en $\mathcal{DR}(S_\theta)$ para algún $\theta \in (\omega, \pi)$, entonces lo tiene **para todo** $\theta \in (\omega, \pi)$.
- Existen casos donde $A$ satisface una estimación cuadrada pero $A^*$ no. Ambas estimaciones son necesarias.

# Bibliografía


M. Hasse.
The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Method.
PhD thesis (2003), Universität Ulm.

A. McIntosh.
Operators which have an $H^\infty$ calculus.
Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations, 1986, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, ANU, Canberra, **4** (1986), 210-231.

C. Le Merdy.
Square functions, bounded analytic semigroups, and applications.
Perspectives in operator theory, **75** (2007), 191-220.

¡Muchas gracias!

Eskerrik asko!