Álgebra Heterogénea

Tesis doctoral presentada por Juan C. Soliveres

dirigida por Prof. Juan B. Climent

Septiembre, 1999

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Lògica i Filosofia de la Ciència

A todos mis padres

Índice

Introducción

Este trabajo está dedicado al estudio de la heterogeneidad en contextos algebraicos. Para ello, investigamos diversas categorías de álgebras heterogéneas, tanto las relativas a una signatura fija, como aquellas en las que se permite la variación en las signaturas subyacentes, y sus contrapartidas invariantes en la teoría de las mónadas.

Nuestros principales resultados son relativos a la naturaleza bidimensional de ciertas entidades algebraicas heterogéneas, para las que introducimos nociones de 2-células más generales que las consideradas habitualmente en la literatura.

Nuestro interés por los temas tratados en esta memoria tiene un origen doble. En primer lugar, el estudio de diversas traducciones entre lógicas distintas y en particular, de las comparaciones entre la lógica proposicional clásica e intuicionista, nos llevó a preguntarnos sobre modos de comparar álgebras de distinta naturaleza y maneras de clasificar tales comparaciones. Buscando tratamientos de estas materias nos encontramos con unos trabajos de Fujiwara [Fuj59] en los que se comparaban álgebras homogéneas sobre distintas signaturas.

Por otra parte, estábamos también interesados en las álgebras heterogéneas porque conocíamos ciertas proposiciones del álgebra homogénea cuya contrapartida heterogénea era incorrecta, e.g., el teorema de Birkhoff-Frink que afirma que todo operador clausura es un operador subálgebra, e investigábamos que hipótesis adicionales eran necesarias para obtener una versión heterogénea adecuada.

Al generalizar la teoría de Fujiwara al caso heterogéneo, se obtienen 2-categorías de signaturas, teorías y álgebras que permiten una mayor riqueza al comparar entidades algebraicas de distinta naturaleza. Cuando se trasladan tales conceptos al lenguaje de las mónadas, es necesario considerar una noción de 2-célula entre morfismos de mónadas de naturaleza más general que las definidas, e.g., en Street [Str72].

Para abordar las cuestiones mencionadas, estudiamos, en el primer capítulo, diversas categorías de *conjuntos heterogéneos*. Estos pueden definirse formalmente como familias de conjuntos indexadas por un conjunto de tipos, o como aplicaciones que asignan a cada elemento de su dominio su tipo correspondiente. Ambas nociones son equivalentes y dan lugar, para cada conjunto de tipos S, a categorías de S-*conjuntos*. Estas están dotadas de una estructura de topos que, aunque heredan muchas de sus propiedades del topos de los conjuntos ordinarios, se separan de este en aspectos esenciales.

Cuando se permite la variación en el conjunto de tipos se obtienen categorías de conjuntos heterogéneos que constituyen bifibraciones sobre la categoría de conjuntos ordinarios, y que son la *suma* de las diversas categorías de S-conjuntos a través de la construcción de Grothendieck. La categoría de conjuntos heterogéneos es asimismo un topos aunque, a diferencia de los topoi asociados a conjuntos de tipos fijos, no es clásico.

Los conceptos de sistema y operador clausura pueden generalizarse también para los conjuntos heterogéneos. De ellos se hace uso en el estudio posterior de algunas propiedades de las álgebras heterogéneas.

En el segundo capítulo estudiamos las álgebras heterogéneas relativas a una signatura algebraica heterogénea arbitraria pero fija. Aunque, en general, los resultados habituales del álgebra homogénea siguen siendo válidos para las álgebras heterogéneas, la generalización automática de ciertos teoremas al álgebra universal heterogénea es incorrecta. Por ejemplo, el teorema de Birkhoff-Frink citado anteriormente, que afirma que todo operador clausura es un operador subálgebra, no es cierta para las álgebras heterogéneas, como demostró Mathiessen en [Mat72]. El teorema se cumple, como demostramos en la sección correspondiente confirmando un conjetura de Andreas Blass, para aquellos operadores clausura que cumplen una propiedad adicional. Asimismo, algunas caracterizaciones de los colímites en el álgebra homogénea no son tampoco válidas para sistemas de $\underline{\Sigma}$-álgebras heterogéneas, a menos que estos cumplan una cierta propiedad de uniformidad.

Las diferencias existentes entre proposiciones del álgebra homogénea y sus contrapartidas heterogéneas se deben, en su mayor parte, a la eventual existencia de coordenadas vacías en las álgebras heterogéneas. Mientras que en las álgebras homogéneas las álgebras vacías coinciden con el álgebra inicial y no tienen, por tanto, una estructura especialmente interesante, en las álgebras heterogéneas, las álgebras vacías, i.e., las que contienen alguna coordenada vacía, pueden tener estructuras arbitrariamente complejas.

Como consecuencia se tiene, por ejemplo, que las variedades heterogéneas no están cerradas bajo algunas construcciones, e.g., la formación de colímites de sistemas dirigidos, para los que las variedades homogéneas sí lo están. Este hecho tiene especial relevancia en el estudio de la relación entre variedades y ecuaciones, en el que se introducen las variedades *finitarias* como la contrapartida semántica de las clases ecuacionales para ecuaciones con un número finito de variables.

Las variedades heterogéneas constituyen el correlato semántico de las clases ecuacionales *infinitarias* (cuando se consideran ecuaciones con un número arbitrario de variables) y para ellas demostramos que se cumple el correspondiente teorema de caracterización de Birkhoff. Sin embargo, para las clases ecuacionales *finitarias*, es necesario considerar para su caracterización, como pusieron de manifiesto Mathiessen [Mat76], y Goguen y Meseguer [GM85], variedades *finitarias*, i.e., variedades cerradas bajo la formación de colímites dirigidos superiormente.

En el álgebra heterogénea, la validez de una ecuación depende crucialmente del S-conjunto de las variables respecto del que se la considere. Esta observación es fundamental para la consecución de un cálculo sintáctico adecuado para las ecuaciones heterogéneas. En relación a esto, estudiamos la noción de *álgebra de Hall* y una noción equivalente de *álgebra de Bénabou* y demostramos que las reglas de abstracción y concreción introducidas por Goguen y Meseguer en [GM85] son reglas derivadas.

En el capítulo tercero estudiamos las categorías de álgebras heterogéneas cuando se permite la variación en la signatura subyacente. Consideramos para ello, categorías de signaturas algebraicas heterogéneas con conjuntos de tipos variables, cuyos morfismos inducen functores entre las categorías de álgebras asociadas a las signaturas, así como entre ciertas categorías de términos relativos a las mismas. Los functores entre las categorías de términos nos permiten, en particular, la traducción de ecuaciones sobre distintas signaturas.

Los morfismos de signaturas pueden ser generalizados en diversos aspectos, como, por ejemplo, mediante la noción de *derivor*, que permite interpretar símbolos de operación de la signatura dominio en símbolos de operación derivados en la signatura codominio. Los derivors son un caso particular de la noción de *morfismo de Fujiwara* en los que la interpretación de los símbolos de operación entre signaturas distintas se hace respecto de morfismos entre los conjuntos de tipos subyacentes que interpretan los tipos en la signatura dominio en ciertos tipos derivados de la signatura codominio. Creemos que tales interpretaciones pueden dar lugar a comparaciones interesantes entre muchas de las estructuras que se estudian en ciencias de la computación, así como entre las lógicas abstractas heterogéneas que se pueden obtener a partir de la combinación de los espacios de clausura heterogéneos y las álgebra heterogéneas.

Las diversas categorías de signaturas tienen, además, una estructura adicional de 2-categoría, a cuyas 2-células denominamos *deformaciones* y que son una generalización del concepto de morfismos de Fujiwara equivalentes, introducido por Fujiwara para las álgebras homogéneas en [Fuj60]. Disponer de una estructura de 2-categoría permite comparaciones entre signaturas y teorías más complejas, para las que se dispone, en particular, de una noción sintáctica de teorías equivalentes o de morfismos entre teorías adjuntos entre sí.

Las relaciones entre las signaturas, los términos y las álgebras heterogéneas pueden ser descritas a través de una cierta noción de *2-institución*, del que las definiciones habituales de institución son casos particulares.

En el capítulo cuarto se estudia la contrapartida de algunos de los resultados obtenidos para las álgebras heterogéneos desde el punto de vista de las mónadas.

En primer lugar, demostramos una versión invariante respecto de las presentaciones sintácticas del teorema de completud para las mónadas sobre categorías de S-conjuntos. Para ello, consideramos las categorías de Kleisli asociadas a una mónada como categorías de términos, definimos las nociones correspondientes de ecuación, realización de términos y validez de ecuaciones e introducimos el concepto de *congruencia compatible con los límites* en una categoría.

En el resto del capítulo se estudian diversas 2-categorías de mónadas, cuyas 2-células denominamos deformaciones, que generalizan la noción habitual de 2-célula entre morfismos de mónadas (v. [Str72]), y que reflejan alguna de las propiedades de las deformaciones entre morfismos de signaturas estudiadas en el capítulo anterior.

Consideramos, en primer lugar, los *morfismos de Kleisli* y de *Eilenberg-Moore* entre mónadas, denominados así porque están en correspondencia biunívoca con ciertos functores entre las categoría de Kleisli y de Eilenberg-Moore asociados a las mónadas respectivas, y para los que se tienen conceptos correspondientes de deformación.

A partir de ellos, definimos los *morfismos y deformaciones algebraicas* entre mónadas, que son, simultáneamente, morfismos y deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore. Los morfismos de Fujiwara y las deformaciones entre ellos introducidas en el capítulo anterior para las álgebras heterogéneas, son casos particulares de los morfismos y deformaciones algebraicas entre las mónadas.

Estudiamos entonces la contrapartida para las adjunciones de los conceptos introducidos para las mónadas. En particular, se tienen 2-categorías de adjunciones con morfismos y 2-células de Kleisli y de Eilenberg-Moore y 2-functores de tales 2-categorías hasta las correspondientes de mónadas. Las construcciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore son, respectivamente, 2-adjuntos por la izquierda y por la derecha de tales 2-functores.

Los morfismos y deformaciones algebraicas de las mónadas se corresponden con *cuadrados algebraicos* de adjunciones y deformaciones entre tales cuadrados, mediante las cuales es posible dar cuenta de ciertas relaciones entre adjunciones surgidas anteriormente. En particular, demostramos que las adjunciones asociadas a las algebras de Hall y Bénabou son equivalentes en la 2-categoría apropiada.

Finalizamos el capítulo con una aplicación de los resultados anteriores a los espacios de clausura heterogéneos considerados como mónadas. De ella se sigue que los espacios de clausura pueden compararse de manera más general que la habitual, de un modo que permite dar cuenta de la equivalencia entre algunos de ellos.

1 Conjuntos heterogéneos

Un conjunto heterogéneo es un conjunto en el que sus elementos están clasificados por tipos. Para dar cuenta formalmente de esta situación, podemos considerar entidades que consten de un conjunto y una aplicación que a cada elemento le asigne su tipo, o considerar familias de conjuntos indexadas por un cierto conjunto de tipos. Estas dos posibilidades son equivalentes, en el sentido de que, dotados de los morfismos adecuados, determinan categorías equivalentes y constituyen, en cierto sentido, dos puntos de vista de la heterogeneidad complementarios entre si. En este trabajo se elige, normalmente, la presentación mediante familias de conjuntos, aunque con referencias a sus contrapartidas como aplicaciones en un conjunto de tipos, puesto que algunas de las nociones heterogéneas tienen una forma más natural bajo esta última presentación.

En lo que sigue, salvo indicación expresa de lo contrario, cualquier conjunto que consideremos será miembro de un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, arbitrario pero fijo.

1.1 S-conjuntos y S-aplicaciones.

Un S-conjunto es un conjunto heterogéneo cuyo conjunto de tipos es S. Muchas de las nociones y construcciones relativas a los conjuntos ordinarios, aunque no todas, e.g., la noción de pertenencia, admiten una extensión natural para S-conjuntos, realizándose entonces coordenada a coordenada.

1.1.1. Definición. Sea $S \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ un conjunto de tipos.

1. Un **S-conjunto** $A = (A_s)_{s\in S}$ es una aplicación de S en $\boldsymbol{\mathcal{U}}$. Para cada $s \in S$, los elementos de A_s son los objetos de tipo s del S-conjunto en cuestión.

2. Las operaciones de la teoría de conjuntos para familias de conjuntos, $\prod$, $\coprod$, $\bigcap$, $\bigcup$, las operaciones binarias correspondientes, $\times$, $\amalg$, $\cap$, $\cup$, así como la formación de la diferencia $-$, se definen coordenada a coordenada. Por ejemplo, si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de S-conjuntos $\mathcal{A} = (A^i)_{i\in I}$, con $A^i = (A^i_s)_{s\in S}$, para cada $i \in I$, entonces

$$\bigcap \mathcal{A} = (\bigcap\nolimits_{i\in I} A^i_s)_{s\in S}$$

3. Si A y B son dos S-conjuntos, A es un **sub-S-conjunto** de B, $A \subseteq_S B$ o, simplemente, $A \subseteq B$, si, para cada $s \in S$, $A_s \subseteq B_s$. El conjunto de los sub-S-conjuntos de A se denota $\mathrm{Sub}(A)$ y cuando se le considera ordenado por $\subseteq_S$ como $\underline{\mathrm{Sub}}(A)$.

4. Una **S-relación** Φ de un S-conjunto A en otro B es un sub-S-conjunto de $A \times B$. El conjunto de las S-relaciones de A en B se denota por $\mathrm{Rel}(A, B)$. Si $A = B$, entonces $\mathrm{Rel}(A, B)$ se denota como $\mathrm{Rel}(A)$. La diagonal de A, Δ_A, es la S-relación en A cuya coordenada s-ésima es Δ_{A_s}, i.e., la diagonal de A_s.

   La composición de S-relaciones se realiza coordenada a coordenada, i.e., si Φ es una S-relación de A en B y Ψ lo es de B en C, la **composición** de Φ y Ψ, $\Psi \circ \Phi$, se define como $\Psi \circ \Phi = (\Psi_s \circ \Phi_s)_{s \in S}$.

5. Una **S-función** de un S-conjunto A en otro B es una S-relación funcional F de A en B, i.e., una S-relación de A en B tal que para cada $s \in S$, F_s es una función de A_s en B_s.

   El conjunto de las S-funciones de A en B se denota por $\mathrm{Fnc}(A, B)$. La composición de S-funciones, que es un caso particular de la composición de relaciones, es una S-función.

6. Una **S-aplicación** de un S-conjunto A en otro B es un triplo (A, f, B) en el que f es una S-función de A en B. El *conjunto* de las S-aplicaciones de A en B se denota por $\mathrm{Hom}(A, B)$ o por B_A. Las expresiones $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y $f\colon A \longrightarrow B$ se consideran sinónimas. La composición de S-aplicaciones, que es la de sus S-funciones subyacentes, es una S-aplicación, como también lo es la identidad.

En los conjuntos ordinarios, las aplicaciones de un conjunto A en otro B son, a su vez, un conjunto que coincide con el objeto exponencial de la categoría de conjuntos. En cambio, para un conjunto de tipos S no unitario, las S-aplicaciones de un S-conjunto A en otro B no determinan un S-conjunto sino un conjunto ordinario que denotamos como B_A. La notación B^A se reserva para cuando se introduzca el objeto exponencial de la categoría de conjuntos heterogéneos.

Las S-aplicaciones pueden clasificarse con respecto a sus propiedades locales, i.e., su comportamiento en cada coordenada del conjunto de tipos.

1.1.2. Definición. Sea S un conjunto de tipos, A un S-conjunto y P una propiedad de los conjuntos. Entonces A es **localmente** P si, para cada $s \in S$, A_s es P. De igual modo, si $f\colon A \longrightarrow B$ es una S-aplicación y P una propiedad de las aplicaciones, entonces f es **localmente** P si, para cada $s \in S$, f_s es P. En particular, un S-conjunto es **localmente finito** si, para cada $s \in S$, A_s es finito y una S-aplicación es **localmente inyectiva** (resp., **sobreyectiva**, **biyectiva**) cuando la S-función subyacente sea, en cada $s \in S$, inyectiva (resp., sobreyectiva, biyectiva).

Los operadores **imagen directa** e **imagen inversa** asociados a una S-aplicación f se definen, igualmente, coordenada a coordenada.

1.1.3. Definición. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una S-aplicación:

1. La **f-imagen directa** (o imagen directa a través de f), es la aplicación definida como:
$$f[\cdot]\begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(B) \\ \quad X \quad\ \longmapsto (f_s[X_s])_{s\in S} \end{cases}$$

2. La **f-imagen inversa** (o imagen inversa través de f), es la S-aplicación definida como:
$$f^{\text{-}1}[\cdot]\begin{cases} \mathrm{Sub}(B) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad Y \quad\ \longmapsto (f_s^{-1}[Y_s])_{s\in S} \end{cases}$$

1.1.4. Proposición. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una S-aplicación. Entonces

1. $f^{-1}[\cdot]$ preserva el orden y conmuta con los operadores $\bigcap$ y $\bigcup$, y también con la diferencia.

2. $f[\cdot]$ preserva el orden y conmuta con $\bigcup$ (pero no en general con $\bigcap$, para el que únicamente es cierto, en general, que $f[\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F] \subseteq_S \bigcap_{F\in\mathcal{F}} f[F]$.

□

1.1.5. Definición. Sea S un conjunto de tipos.

1. Una S-relación Φ en un S-conjunto A es una S-relación de **equivalencia** sobre A, si, para cada $s \in S$, Φ_s es una relación de equivalencia sobre A_s. Si $(a, b) \in \Phi_s$, se escribe también $a \equiv b\,(\text{mód.}\,\Phi_s)$ o $a \equiv_{\Phi_s} b$.

   El conjunto de las S-relaciones de equivalencias sobre un S-conjunto A se denota por $\mathrm{Eqv}(A)$. Cuando se le considera ordenado por la S-inclusión constituye un retículo algebraico que se denota mediante $\underline{\mathrm{Eqv}}(A)$. El operador clausura asociado se denota mediante Eg_A.

2. Sean Φ, $\Psi \in \mathrm{Eqv}(A)$ con $\Phi \subseteq_S \Psi$. Entonces el **cociente de Ψ entre Φ**, Ψ/Φ, es la S-relación de equivalencia $(\Psi_s/\Phi_s)_{s\in S}$ sobre A/Φ cuya coordenada s-ésima es
$$\Psi_s/\Phi_s = \{([a]_{\Phi_s}, [b]_{\Phi_s}) \in (A_s/\Phi_s)^2 \mid (a, b) \in \Psi_s\}$$

3. Sea $X \subseteq_S A$ y $\Phi \in \mathrm{Eqv}(A)$. La **Φ-saturación de** X, $\mathrm{Sat}_\Phi(X)$, es el S-conjunto cuya coordenada s-ésima es

$$\mathrm{Sat}_\Phi(X)_s = \{a \in A_s \mid X_s \cap [a]_{\Phi_s} \neq \emptyset\} = \bigcup\nolimits_{x \in X_s} [x]_{\Phi_s}$$

Los núcleos e imágenes de las S-aplicaciones se definen localmente. La factorización clásica de las aplicaciones es válida también para las S-aplicaciones.

Si $f\colon A \longrightarrow B$ una S-aplicación, el **núcleo** de f, $\mathrm{Ker}(f)$, es la S-relación de equivalencia sobre A determinada por los núcleos de las aplicaciones subyacentes, i.e., $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Ker}(f_s))_{s\in S}$. La **imagen** de f, $\mathrm{Im}(f)$, es el S-conjunto $(\mathrm{Im}(f_s))_{s\in S}$. La S-aplicación f se puede entonces factorizar como

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] \arrow[drr, "f^{\mathrm{sb}}" near start] & & B \\
A/\operatorname{Ker}(f) \arrow[rr, "f^{\mathrm{b}}"'] \arrow[urr, "f^{\mathrm{i}}"' near end] & & \operatorname{Im}(f) \arrow[u, "\mathrm{in}"']
\end{tikzcd}$$

donde todas la S-aplicaciones se definen a partir de las correspondientes en cada coordenada, i.e., para cada $s \in S$, pr_s es la proyección canónica de A_s en $A_s/\operatorname{Ker}(f_s)$, f^{b}_s es el isomorfismo canónico entre $A_s/\operatorname{Ker}(f_s)$ y $\mathrm{Im}(f_s)$, in_s es la inclusión canónica en B_s, f^{sb}_s es la correstricción de f_s a $\mathrm{Im}(f_s)$ y f^{i}_s es la aplicación que a $[a]$ le asigna $f_s(a)$.

Asimismo, el operador equivalencia generada se obtiene localmente a través de los operadores equivalencia generada homogéneos, puesto que, para cada S-conjunto A, y cada S-relación Φ en A, se cumple $\mathrm{Eg}_A(\Phi) = (\mathrm{Eg}_{A_s}(\Phi_s))_{s\in S}$.

Soportes.

La existencia de coordenadas vacías en un S-conjunto es relevante en muchas de las nociones que se consideran en este trabajo. Por ello, se introduce la noción de *soporte* de un S-conjunto.

1.1.6. Definición. Sea A un S-conjunto. El **soporte** de A, $\mathrm{supp}(A)$, es el conjunto de los $s \in S$ tales que A_s no es vacío, i.e., $\mathrm{supp}(A) = \{s \in S \mid A_s \neq \emptyset\}$.

Para cada conjunto S, el soporte es una función $\mathrm{supp}\colon \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \longrightarrow \mathrm{Sub}(S)$. Algunas propiedades de esta se detallan en la siguiente proposición.

1.1.7. Proposición. Sean A y B dos S-conjuntos.

1. Si $A \subseteq_S B$, entonces $\mathrm{supp}(A) \subseteq \mathrm{supp}(B)$.

2. $\mathrm{supp}((\emptyset)_{s\in S}) = \emptyset$.
3. Si $I \neq \emptyset$ y $(A^i)_{i\in I} \in (\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)^I$, entonces $\mathrm{supp}(\bigcup_{i\in I} A^i) = \bigcup_{i\in I} \mathrm{supp}(A^i)$.
4. Si $I \neq \emptyset$ y $(A^i)_{i\in I} \in (\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)^I$, entonces $\mathrm{supp}(\bigcap_{i\in I} A^i) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{supp}(A^i)$.
5. $\mathrm{supp}(A) - \mathrm{supp}(B) \subseteq \mathrm{supp}(A - B)$.
6. $\mathrm{Hom}(A, B) \neq \emptyset$ si y sólo si $\mathrm{supp}(A) \subseteq \mathrm{supp}(B)$.

□

Cardinalidad de los S-conjuntos

Para los S-conjuntos, la noción de cardinal puede definirse globalmente o relativa a cada coordenada. Desde un punto de vista *interno* a las categorías de S-conjuntos la noción adecuada es la de S-cardinal, entendiendo por tal un S-conjunto en el que todas sus coordenadas son cardinales. Externamente, la cardinalidad del coproducto de un S-conjunto es, a veces, más importante, como cuando se consideran algebras heterogéneas con operaciones finitarias.

1.1.8. Definición. Sea A un S-conjunto.

1. El **S-cardinal** de A es el S-conjunto $\mathrm{card}_S(A) = (\mathrm{card}(A_s))_{s\in S}$. Si m y n son S-cardinales entonces $m < n$ si, para cada $s \in S$, $m_s < n_s$. El **cardinal** de A, $\mathrm{card}(A)$, es el cardinal del conjunto $\coprod A$.
2. A es **S-finito** (resp., **S-infinito**, **S-infinito numerable**, **S-numerable**), si, para cada $s \in S$, $\mathrm{card}(A_s)$ es finito (resp., infinito, infinito numerable, numerable).
3. A es **finito** (resp., **infinito**, **infinito numerable**, **numerable**), si $\mathrm{card}(A)$ es finito (resp., infinito, infinito numerable, numerable).

Obsérvese que si A es S-infinito y B es finito, B se puede encajar en A. De hecho, los S-conjuntos S-infinito numerables son los S-conjuntos más pequeños en los que todos los S-conjuntos finitos se pueden encajar.

En algunas partes de este trabajo se utiliza la convención tipográfica siguiente: si A es un S-conjunto se denota mediante $\mathrm{Sub_f}(A)$ el conjunto de los sub-S-conjuntos finitos de A, y, para un cardinal m,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sub}_m(A) &= \{X \subseteq_S A \mid \mathrm{card}(\textstyle\coprod X) = m\}\\
\mathrm{Sub}_{<m}(A) &= \{X \subseteq_S A \mid \mathrm{card}(\textstyle\coprod X) < m\}\\
\mathrm{Sub}_{\leq m}(A) &= \{X \subseteq_S A \mid \mathrm{card}(\textstyle\coprod X) \leq m\}
\end{aligned}$$

1.2 La categoría $\mathbf{Set}^S$ de S-conjuntos.

Los conjuntos heterogéneos y sus aplicaciones determinan, para un conjunto de tipos fijo, una categoría que, aunque hereda muchas de sus propiedades de la categoría de conjuntos ordinarios, se separa de ésta en aspectos esenciales.

1.2.1. Proposición. Los S-conjuntos y las S-aplicaciones, junto con la composición y las identidades, determinan una categoría, $\mathbf{Set}^S$, que es, esencialmente, la categoría de functores y transformaciones naturales de S (como categoría discreta) en $\mathbf{Set}$. □

Muchas nociones categoriales en $\mathbf{Set}^S$ pueden obtenerse a partir de las correspondientes en $\mathbf{Set}$. Por ejemplo, el objeto final en $\mathbf{Set}^S$ es el S-conjunto $1^S = (1)_{s\in S}$, que en cada coordenada es el objeto final de $\mathbf{Set}$. Si A es un S-conjunto, la única S-aplicación de A en 1^S, $!_A$, se obtiene a partir de las únicas aplicaciones de A_s en el objeto final de $\mathbf{Set}$. De hecho, la construcción de límites proyectivos e inductivos en $\mathbf{Set}^S$ es un caso del teorema de los límites con parámetros de [Mac71], tal como pone de manifiesto la siguiente proposición.

1.2.2. Proposición. La categoría $\mathbf{Set}^S$ es completa y cocompleta.

Demostración. Sea $\mathbf{J}$ una categoría pequeña y $F\colon \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{Set}^S$. Para cada $s \in S$, sea Pr_s el functor de $\mathbf{Set}^S$ en $\mathbf{Set}$ que a S-conjuntos A y S-aplicaciones f les asigna sus coordenadas s-ésimas A_s, f_s. Sea F_s la composición de F con Pr_s. Como $\mathbf{Set}$ es completa F_s tiene un límite proyectivo (L_s, τ_s) con L_s un conjunto y τ_s un cono proyectivo de L_s en F_s. Sea $L = (L_s)_{s\in S}$ y τ el cono proyectivo de L en F definido, para cada objeto $j \in \mathbf{J}$ y cada $s \in S$ como $\tau(j)_s = \tau_s(j)$.

Veamos que el par (L, τ) es un límite proyectivo para F. Sea $u\colon j \longrightarrow k$ un morfismo en $\mathbf{J}$. El triángulo

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\tau_j"'] \arrow[dr, "\tau_k"] & \\ F(j) \arrow[rr, "F(u)"'] & & F(k) \end{tikzcd}$$

conmuta, puesto que, para cada $s \in S$, los triángulos correspondientes conmutan, ya que las τ_s son transformaciones naturales. Es un cono proyectivo límite ya que si (M, υ) es otro cono proyectivo, entonces, para cada $s \in S$, hay un único morfismo $\gamma_s\colon M_s \longrightarrow L_s$, porque L_s es un límite proyectivo para cada s. Entonces $\gamma = (\gamma_s)_{s\in S}$ es el único morfismo de M en L que hace conmutativo el triángulo correspondiente.

La existencia de límites inductivos se demuestra del mismo modo. □

Las nociones de morfismos *inyectivos* y *sobreyectivos* en $\mathbf{Set}^S$, definidas a través de los miembros globales, no coinciden, en general, con las nociones *locales* de ambos conceptos. Además, a diferencia de lo que ocurre en **Set**, no todos los morfismos inyectivos son monomorfismos, ni todos los sobreyectivos son epimorfismos.

1.2.3. Definición. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathbf{Set}^S$. Entonces f es **inyectivo** si para cada $x, y\colon 1^S \longrightarrow A$, $f \circ x = f \circ y$ implica que $x = y$. f es **sobreyectivo** si para cada $y\colon 1^S \longrightarrow B$, existe un $x\colon 1^S \longrightarrow A$ tal que $f \circ x = y$.

1.2.4. Proposición. Sea S un conjunto de tipos. Entonces, en la categoría $\mathbf{Set}^S$, se cumple que

1. Sección = loc. sección $\subset$ mónica = loc. mónica = loc. inyectiva $\subset$ inyectiva.
2. Retracción = loc. retracción = loc. épica = loc. sobreyectiva = épica $\subset$ sobreyectiva.

Demostración. Sea $f\colon A \longrightarrow B$ una S aplicación.

1. Puesto que la composición de S-aplicaciones se realiza coordenada a coordenada, f es una sección exactamente si f es localmente una sección.

Si f es mónica entonces, para cada $s \in S$ y cada par de aplicaciones $g, h\colon C \longrightarrow A_s$ se tiene que las únicas S-aplicaciones $\overline{g}, \overline{h}\colon \delta^s(C) \longrightarrow A$, que coinciden en la coordenada s-ésima con g y h son tales que $f \circ \overline{g} = f \circ \overline{h}$, luego $\overline{g} = \overline{h}$ y $g = h$, por lo que f es localmente mónica. Recíprocamente, si f es localmente mónica entonces f es mónica.

Toda sección es mónica pero, al igual que en **Set** existen mónicas que no son secciones, e.g., las S-aplicaciones con dominio $0^S = (\emptyset)_{s \in S}$.

Puesto que ser mónica y ser inyectiva coinciden en **Set**, ser localmente mónica y ser localmente inyectiva coinciden en $\mathbf{Set}^S$.

La inyectividad local implica claramente la inyectividad. Sin embargo, la inyectividad no implica la inyectividad local, puesto que cualquier S-aplicación cuyo dominio tenga alguna coordenada vacía es vacuamente inyectivo, aunque no necesariamente localmente inyectivo.

2. Las retracciones coinciden en $\mathbf{Set}^S$ con las S-aplicaciones que son localmente retracciones y por tanto, con las localmente épicas y las localmente sobreyectivas.

Si f es localmente épica, entonces f es épica. Recíprocamente, si f es épica entonces, para cada $s \in S$ y cada par de aplicaciones $g, h\colon B_s \longrightarrow C$, existe un único par de aplicaciones $\overline{g}$ y $\overline{h}$ de B en $\overline{C}$, con $\overline{C}$ el S-conjunto que es 1 en cada coordenada excepto la s-ésima en la que $\overline{C}$ es C, que coinciden, respectivamente, en la coordenada s-ésima, con g y h. Además, $\overline{g} \circ f = \overline{h} \circ f$ y por tanto, $\overline{g} = \overline{h}$ y $g = h$, por lo que f es localmente épica.

Si f es localmente sobreyectiva entonces es sobreyectiva. Sin embargo, existen S-aplicaciones sobreyectivas que no lo son localmente, e.g., si $S = 2$, la 2-aplicación $(0, !)\colon (1, \emptyset) \longrightarrow (2, \emptyset)$ es vacuamente sobreyectiva, puesto que $(2, \emptyset)$ no tiene miembros globales, aunque no localmente sobreyectivo puesto que su coordenada 0-ésima no es sobreyectiva. □

Puesto que en $\mathbf{Set}^S$ las nociones de épica y retracción coinciden, el axioma de elección es válido en ella.

El topos $\mathbf{Set}^S$.

La categoría de S-conjuntos y S-aplicaciones es un topos, en cuanto que categoría de functores sobre un topos. Su estructura es *localmente* como la de conjuntos ordinarios y la proposición 1.2.2 establece que límites y colímites se calculan coordenada a coordenada. Esto es cierto también para el cálculo de los exponenciales y el objeto de valores de verdad de $\mathbf{Set}^S$.

En algunos trabajos se definen los S-conjuntos excluyendo la posibilidad de que alguna coordenada sea vacía, lo que destruye obviamente la estructura de topos de las categorías de S-conjuntos, que no son, siquiera, finito cocompletas.

1.2.5. Proposición. La categoría $\mathbf{Set}^S$ es un topos.

Demostración. $\mathbf{Set}$ es un topos, por lo que $\mathbf{Set}^S$, siendo (isomorfa a) una categoría de functores en $\mathbf{Set}$, es también un topos (v. [Gol84]). □

El **exponencial** de dos S-conjuntos A y B se denota mediante B^A y es el S-conjunto $(B_s^{A_s})_{s\in S}$, i.e., $(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A_s, B_s))_{s\in S}$. La función de evaluación, $\mathrm{ev}_{A,B}\colon A\times B^A \longrightarrow A$, es la S-aplicación que en la coordenada s-ésima es la función de evaluación para A_s, B_s en $\mathbf{Set}$, i.e., $\mathrm{ev}_{(A,B)_s} = \mathrm{ev}_{A_s,B_s}\colon A_s \times B_s^{A_s} \longrightarrow B_s$.

Si A y B son S-conjuntos, el producto de su exponencial, $\prod_{s\in S} B_s^{A_s}$, es isomorfo al conjunto B_A de las S-aplicaciones de A en B. Este isomorfismo es natural, como pone de manifiesto la siguiente proposición.

1.2.6. Proposición. Sea S un conjunto de tipos y Exp el functor de *exponenciación* definido como

$$\mathbf{Set}^{S^{\mathrm{op}}} \times \mathbf{Set}^S \xrightarrow{\mathrm{Exp}} \mathbf{Set}^S$$

$$\begin{array}{ccc} (A,B) & & (B_s^{A_s})_{s\in S} \\ {\scriptstyle (f,g)}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle (g_s\circ\cdot\circ f_s)_{s\in S}} \\ (C,D) & & (D_s^{C_s})_{s\in S} \end{array}$$

Los functores Hom y $\prod \circ \mathrm{Exp}$ son naturalmente isomorfos

Demostración. El isomorfismo se define, para cada par de S-conjuntos (A, B) como

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Hom}(A,B) & \longrightarrow & \prod_{s\in S} B_s^{A_s} \\ f & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} S \longrightarrow \bigcup_{s\in S} B_s^{A_s} \\ s \longmapsto \left\{ \begin{array}{lcl} A_s & \longrightarrow & B_s \\ a & \longmapsto & f_s(a) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

□

El objeto de **valores de verdad** en $\mathbf{Set}^S$ se denota mediante Ω^S y consiste en el S-conjunto $(2)_{s\in S}$, que en cada coordenada es $2 = \Omega$, el objeto de valores de verdad en **Set**. El **clasificador de mónicas** en $\mathbf{Set}^S$ es $\top^S = (\top)_{s\in S} \colon 1^S \longrightarrow \Omega^S$, cuya coordenada s-ésima, $\top \colon 1 \longrightarrow 2$, es la aplicación que a 0 le asigna 1. El carácter de una S-aplicación mónica $f \colon A \longrightarrow B$ se obtiene entonces a partir de los caracteres de las aplicaciones componentes en **Set**, i.e., $\mathrm{ch}_f = (\mathrm{ch}_{f_s})_{s\in S}$.

Si el conjunto de tipos S no es vacío, el topos $\mathbf{Set}^S$ no es degenerado. Su conjunto de valores de verdad, i.e., el conjunto de los morfismos de 1^S en Ω^S, tiene cardinalidad 2^S. Un S-conjunto es *vacío* si su conjunto de miembros globales lo es. Si $\mathrm{card}(S) \geq 2$, existen en $\mathbf{Set}^S$ objetos que no son cero pero son globalmente vacíos (los S-conjuntos que tienen alguna coordenada vacía). No es, pues, un topos bien punteado puesto que no satisface el principio de extensionalidad: un par de S-aplicaciones distintas cuyo dominio tenga alguna coordenada vacía no pueden distinguirse mediante un S-aplicación desde 1^S. Por consiguiente, 1^S no es un generador y es por ello que conviene introducir las nociones de S-conjunto subfinal y delta de Kronecker, para poder obtener un conjunto de generadores para $\mathbf{Set}^S$.

1.2.7. Definición.

1. Un S-conjunto A es **subfinal** si $\mathrm{card}(A_s) \leq 1$, para todo $s \in S$.

2. Si $s \in S$, entonces $\delta^s = (\delta^s_t)_{t\in S}$ es el S-conjunto cuyas coordenadas son todas nulas excepto la coordenada s-ésima, en la que δ^s_s es 1. A δ^s se la denomina **delta de Kronecker** en s.

3. Un **miembro parcial** de un S-conjunto A es un morfismo desde una delta de Kronecker hasta A, i.e., esencialmente un miembro de una coordenada de A.

4. Si X es un conjunto, $\delta^s(X)$ es el S-conjunto cuyas coordenadas son todas nulas excepto la s-ésima, en la que $\delta^s(X)$ es X. Obsérvese que $\delta^s(X)$ es naturalmente isomorfo a $\coprod_{\alpha\in\mathrm{card}(X)} \delta^s$.

En **Set** no existen conjuntos que estén estrictamente entre el objeto inicial y el final, pero en $\mathbf{Set}^S$ existen $2^{\mathrm{card}(S)}$ objetos, salvo isomorfismo, entre el objeto inicial, $0^S = (\emptyset)_{s\in S}$, y el final, 1^S. El conjunto $\{\delta^s \mid s \in S\}$ es un conjunto de generadores para $\mathbf{Set}^S$ puesto que cualquier par de S-aplicaciones paralelas distintas pueden ser siempre distinguidas haciendo uso de algún morfismo desde un δ^s apropiado. En general, todos los S-conjuntos se pueden representar como coproductos de múltiplos de los deltas de Kronecker, i.e., si A es un S-conjunto, entonces A es naturalmente isomorfo a $\coprod_{s\in S} \mathrm{card}(A_s) \cdot \delta^s$.

En $\mathbf{Set}^S$ se cumple que $[\top, \bot]\colon 1 \amalg 1 \longrightarrow \Omega^S$ es un isomorfismo, por lo que $\mathbf{Set}^S$ es un topos clásico y por consiguiente booleano. Su estructura lógica es, localmente, como la de $\mathbf{Set}$. Los morfismos de verdad en $\mathbf{Set}^S$ son, en cada coordenada, los correspondientes en $\mathbf{Set}$, e.g., $\wedge^S = (\wedge)_{s\in S}$ y $\neg^S = (\neg)_{s\in S}$. Como consecuencia, las operaciones correspondientes en las álgebras de subobjetos de $\mathbf{Set}^S$ se realizan también coordenada a coordenada y coinciden con las operaciones definidas en 1.1.1. En el álgebra booleana de los subfinales de $\mathbf{Set}^S$, $\underline{\mathrm{Sub}}(1^S)$, los δ^s son los átomos de la misma y es, esencialmente, el álgebra booleana de los subconjuntos de S, $\underline{\mathrm{Sub}}(S)$.

La equivalencia de los topoi $\mathbf{Set}^S$ y $\mathbf{Set}\downarrow S$.

Los S-conjuntos pueden ser considerados también como aplicaciones con codominio S, que a cada elemento del dominio de la aplicación le asigna su tipo. Como tales se denominan **S-foliaciones** y constituyen los objetos de la categoría de cotas inferiores de S en $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Set}\downarrow S$, i.e., los pares (X, A) en los que X es un conjunto y A una aplicación de X en S, que asigna a cada $x \in X$ su tipo $A(x)$. Las S-aplicaciones de un S-conjunto en otro se corresponden entonces con los morfismos de $\mathbf{Set}\downarrow S$, siendo un morfismo de (X, A) en (Y, B) un triplo $((X, A), f, (Y, B))$ en el que $f\colon X \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "A"'] & & Y \arrow[dl, "B"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

1.2.8. Proposición. Las categorías $\mathbf{Set}^S$ y $\mathbf{Set}\downarrow S$ son equivalentes.

Demostración. Sea P^S el functor definido como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[rr, "P^S"] & & \mathbf{Set}\downarrow S \\ A \arrow[d, "f"'] & & (\coprod A, [\kappa_s^A]_{s\in S}) \arrow[d, "\coprod f"] \\ B & \longmapsto & (\coprod B, [\kappa_s^B]_{s\in S}) \end{tikzcd}$$

donde κ_s^A es la aplicación constante de A_s en S que asigna a cada miembro de A_s su tipo s y $[\kappa_s^A]_{s\in S}$ la única aplicación de $\coprod A$ en S determinada por la propiedad universal del coproducto, y lo mismo para κ_s^A y $[\kappa_s^A]_{s\in S}$.

Sea Q^S el functor definido como

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}\downarrow S & \xrightarrow{Q^S} & \mathbf{Set}^S \\ (X,A) & & (A^{-1}[s])_{s\in S} \\ f\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow (f_s)_{s\in S} \\ (Y,B) & & (B^{-1}[s])_{s\in S} \end{array}$$

donde f_s es la restricción de f al dominio y codominio indicado. Ambos functores son cuasi-inversos, i.e., su composición es naturalmente isomorfa a la identidad, por lo que ambas categorías son equivalentes. $\square$

La categoría $\mathbf{Set}\downarrow S$ es un topos, por el *teorema fundamental de los topoi* (v. [Fre72]). La equivalencia con la categoría $\mathbf{Set}^S$ determina morfismos entre ambas categorías que permiten *traducir* la estructura de topos de una categoría hasta la otra, por lo que cualquiera de las dos puede ser utilizada como formalización de los conceptos de conjunto y aplicación heterogénea para un conjunto de tipos S fijo. Sin embargo, algunas construcciones tienen una forma más *natural* en una de las dos, por lo que resulta conveniente considerar directamente algunas de las propiedades del topos $\mathbf{Set}\downarrow S$.

Productos. Sean (X,A) y (Y,B) dos objetos en $\mathbf{Set}\downarrow S$. Su producto es $(X,A)\times(Y,B) = (\mathrm{Pb}(A,B),\mathrm{p})$, con $\mathrm{Pb}(A,B)$ el producto fibrado en $\mathbf{Set}$ de A y B, y $\mathrm{p} = A\circ \mathrm{p}_0 = B\circ \mathrm{p}_1$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pb}(A,B) \arrow[r, "\mathrm{p}_1"] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"'] \arrow[dr, "\mathrm{p}" description] & Y \arrow[d, "B"] \\ X \arrow[r, "A"'] & S \end{tikzcd}$$

El objeto final es $1^{\downarrow S} = (S, \mathrm{id}_S)$

Igualadores. Sean $f, g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$. Su igualador es $\mathrm{eq}(f, g)$ considerado como un morfismo de $\mathrm{Eq}^{\downarrow S}(f, g) = A \circ \mathrm{eq}(f, g)$ en B.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"] \arrow[dr, "\mathrm{Eq}^{\downarrow S}(f,g)"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "A"'] & Y \arrow[dl, "B"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

Productos fibrados. Sean $f\colon (X, A) \longrightarrow (Z, C)$ y $g\colon (Y, B) \longrightarrow (Z, C)$ dos morfismos en $\mathbf{Set} \downarrow S$. El producto fibrado de f y g, $\mathrm{Pb}^{\downarrow S}(f, g)$, es $(\mathrm{Pb}(f, g), \mathrm{p})$ con $\mathrm{Pb}(f, g)$ el producto fibrado de f y g en $\mathbf{Set}$ y $\mathrm{p} = C \circ f \circ \mathrm{p}_0 = C \circ g \circ \mathrm{p}_1$ en $\mathbf{Set} \downarrow S$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pb}(f,g) \arrow[rr, "\mathrm{p}_1"] \arrow[dd, "\mathrm{p}_0"'] \arrow[dr, "\mathrm{p}"] & & Y \arrow[dl, "B"'] \arrow[dd, "g"] \\
& S & \\
X \arrow[ur, "A"] \arrow[rr, "f"'] & & Z \arrow[ul, "C"']
\end{tikzcd}$$

Colímites. El coproducto de (X, A) y (Y, B) es $[A, B]$, la única aplicación de $X \amalg Y$ en S. El objeto inicial es $0^{\downarrow S} = (\emptyset, !_{\emptyset,S})$. El coigualador y la suma amalgamada se obtienen mediante diagramas duales a los del igualador y el producto fibrado.

Exponenciales. Sean (X, A) y (Y, B) dos objetos en $\mathbf{Set} \downarrow S$. Entonces $(Y, B)^{(X,A)} = (\coprod_{s \in S} B^{-1}[s]^{A^{-1}[s]}, \mathrm{pr}_1)$ y la función de evaluación, $\mathrm{ev}_{(X,A),(Y,B)}$ se define como

$$\mathrm{ev}_{(X,A),(Y,B)} \begin{cases} \mathrm{Pb}(A, \mathrm{pr}_1) \longrightarrow Y \\ (x, (f, s)) \longmapsto f(x) \end{cases}$$

Clasificador de subobjetos. El objeto de **valores de verdad**, $\Omega^{\downarrow S}$, viene dado por $(2 \times S, \mathrm{pr}_1)$, y el clasificador de mónicas es $\top^{\downarrow S} = \langle \top_S, \mathrm{id}_S \rangle$. Si

$f\colon (Y,B)\rightarrowtail(X,A)$ entonces $\mathrm{ch}_f^{\downarrow S} = \langle \mathrm{ch}_f, A\rangle$.

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "B"] \arrow[dd, "B"'] & & X \arrow[dl, "A"'] \arrow[dd, "\mathrm{ch}_f^{\downarrow S} = \langle \mathrm{ch}_f, A\rangle"] \\
& S & \\
S \arrow[ur, "\mathrm{id}_S"] \arrow[rr, "\langle \top, \mathrm{id}_S\rangle"'] & & 2\times S \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1"']
\end{tikzcd}
$$

Valores de verdad. Por ser $\mathbf{Set}\downarrow S$ un topos, los elementos de Ω^S están en correspondencia biunívoca con $\mathrm{Sub}(1^S)$. Ahora bien, un subobjeto de 1^S es un $f\colon (X,A)\rightarrowtail(S,\mathrm{id}_S)$ tal que $\mathrm{id}_s \circ f = A$, por lo que $f = A$. Así pues, un subobjeto de 1^S se puede identificar con una mónica $f\colon X\rightarrowtail S$, i.e., con un subconjunto de S. Su carácter $\mathrm{ch}_f\colon 1^{\downarrow S}\longrightarrow\Omega^{\downarrow S}$ es $\langle \mathrm{ch}_X, \mathrm{id}_S\rangle$, i.e.,

$$
\mathrm{ch}_f(s) = \begin{cases} (1,s) & \text{si } s\in X \\ (0,s) & \text{si } s\notin X \end{cases}
$$

El conjunto de valores de verdad de $\mathbf{Set}\downarrow S$ tiene por tanto, cardinalidad 2^S.

Morfismos de verdad. Puesto que $\Omega^{\downarrow S} = (2\times S, \mathrm{pr}_1)$, la fibra sobre un $s\in S$ es $2\times\{s\}$, i.e., esencialmente una copia de 2, el objeto de valores de verdad de $\mathbf{Set}$. Los morfismos de verdad en $\mathbf{Set}\downarrow S$ consisten en *copias* de los morfismos de verdad correspondientes en $\mathbf{Set}$ actuando en cada fibra. Así, por ejemplo,

$$
\neg^{\downarrow S} = \langle \neg\circ\mathrm{pr}_0, \mathrm{id}_S\rangle = \left\{ \begin{array}{lcl} 2\times S & \longrightarrow & 2\times S \\ (0,s) & \longmapsto & (1,s) \\ (1,s) & \longmapsto & (0,s) \end{array} \right.
$$

y

$$
\wedge^{\downarrow S} = \langle \wedge\circ\langle \mathrm{pr}_0\circ\mathrm{p}_0, \mathrm{pr}_0\circ\mathrm{p}_1\rangle, \mathrm{pr}_0\circ\mathrm{p}_0\rangle = \left\{ \begin{array}{lcl} (2\times S)\times_S(2\times S) & \longrightarrow & 2\times S \\ ((x,s),(y,s)) & \longmapsto & (x\wedge y, s) \end{array} \right.
$$

Por su equivalencia con $\mathbf{Set}^S$, $\mathbf{Set}\downarrow S$ es un topos no degenerado si $S\neq\emptyset$, clásico y booleano, en el que existen objetos no cero pero que son vacíos (los objetos (X,A) en los que A no es una aplicación sobreyectiva) y que, por consiguiente, no está bien punteado.

La equivalencia entre las categorías $\mathbf{Set}^S$ y $\mathbf{Set}\downarrow S$ puede ser considerada también desde otra perspectiva. Ambas categorías son, junto a los functores apropiados, categorías concretas sobre $\mathbf{Set}$.

1.2.9. Proposición. Sea S un conjunto. Entonces la categoría $\mathbf{Set} \downarrow S$, junto con el functor de olvido

$$G(f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)) = f\colon X \longrightarrow Y$$

es una categoría de conjuntos con estructura.

Demostración. Sea $\mathrm{St}(X)$ el conjunto de las aplicaciones A de X en S, y $\mathrm{Ad}((X,A),(Y,B))$ el conjunto de las aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$ tales que $A = B \circ f$. Entonces $(\mathrm{St}, \mathrm{Ad})$ es un constructo unívocamente transportable, y su categoría asociada es $\mathbf{Set} \downarrow S$. □

La categoría $(\mathbf{Set}^S, \coprod)$ es una categoría concreta (amnéstica y no transportable) sobre $\mathbf{Set}$. Por otra parte, $(\mathbf{Set} \downarrow S, G)$, siendo una categoría de conjuntos con estructura, es una categoría concreta y unívocamente transportable. La equivalencia entre ambas es una equivalencia concreta. Puesto que, para cada categoría concreta, existe una categoría concreta unívocamente transportable y una equivalencia concreta hasta ella determinada salvo un isomorfismo concreto (v. [AHS90], prop. 5.36), podemos concluir que $(\mathbf{Set} \downarrow S, G)$ es, salvo isomorfismo concreto, la modificación transportable de $(\mathbf{Set}^S, \coprod)$.

1.3 La categoría HSet de los conjuntos heterogéneos.

Los conjuntos heterogéneos son entidades en las cuales, en principio, el conjunto de tipos subyacente puede variar. Mientras que las categorías de la forma $\mathbf{Set}^S$ formalizan los conceptos de conjunto y aplicación heterogénea para un conjunto de tipos S fijo, es posible definir también una categoría **HSet** de conjuntos y aplicaciones heterogéneas que tenga en cuenta la variación en el conjunto de tipos, y de la cual las categorías de la forma $\mathbf{Set}^S$ son subcategorías no plenas.

Una manera canónica de determinar una categoría tal es definir un functor de la categoría **Set** de conjuntos y aplicaciones en una categoría de categorías del tamaño adecuado y aplicar la construcción de Grothendieck sobre él. Se obtiene así una bifibración de la categoría de conjuntos y aplicaciones heterogéneas en la de conjuntos y aplicaciones. La categoría **HSet** es bicompleta y tiene estructura de topos. La estructura de sus valores de verdad es, por cierto, bastante más interesante que la de las categorías $\mathbf{Set}^S$.

En primer lugar, se definen los conjuntos heterogéneos y algunas nociones y construcciones relevantes.

1.3.1. Definición.

1. Un **conjunto heterogéneo** es un par (S, A), con $S \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ y A un S-conjunto. Los conjuntos heterogéneos se denominan también **h-conjuntos**.

2. Sean (S, A) y (T, B) dos h-conjuntos. Entonces su producto se define como
$$(S, A) \times (T, B) = (S \times T, A \times^{\mathrm{h}} B)$$
donde $A \times^{\mathrm{h}} B = (A_s \times B_t)_{(s,t) \in S \times T}$, y su coproducto como
$$(S, A) \amalg (T, B) = (S \amalg T, A \amalg^{\mathrm{h}} B)$$
donde $A \amalg^{\mathrm{h}} B$ es la aplicación que a $(s, 0)$ le asigna A_s y a $(t, 1)$ le asigna B_t. Las operaciones infinitarias correspondientes se definen similarmente.

3. Sean (S, A) y (T, B) dos h-conjuntos. Entonces su intersección se define como
$$(S, A) \cap (T, B) = (S \cap T, A \cap^{\mathrm{h}} B)$$
donde $A \cap^{\mathrm{h}} B = (A_x \cap B_x)_{x \in S \cap T}$. La unión, las operaciones infinitarias correspondientes, así como la formación de la diferencia se definen similarmente.

4. Si (S, A) y (T, B) son dos h-conjuntos, (S, A) es un **sub-h-conjunto** de (T, B), $(S, A) \subseteq^{\mathrm{h}} (T, B)$, o, simplemente, $(S, A) \subseteq (T, B)$, si
$$S \subseteq T \text{ y para cada } s \in S,\ A_s \subseteq B_s$$
El conjunto de los sub-h-conjuntos de (S, A) se denota $\mathrm{Sub}(S, A)$ y cuando se le considera ordenado por $\subseteq^{\mathrm{h}}$ como $\underline{\mathrm{Sub}}(S, A)$. En ocasiones, si no hay lugar para la confusión, se usará simplemente $\subseteq$ para indicar la h-inclusión.

5. Una **h-relación** de un h-conjunto (S, A) en otro (T, B) es un sub-h-conjunto de $(S, A) \times (T, B)$. El conjunto de las h-relaciones de (S, A) en (T, B) se denota por $\mathrm{Rel}((S, A), (T, B))$. Si $(S, A) = (T, B)$, entonces $\mathrm{Rel}((S, A), (T, B))$ se denota como $\mathrm{Rel}(S, A)$. La diagonal de (S, A), $\Delta_{(S,A)}$, es la h-relación $(\Delta_S, (\Delta_{A_s})_{(s,s) \in \Delta_S})$.

   La composición de h-relaciones se define de la siguiente manera: si (Φ, D) es una h-relación de (S, A) en (T, B) y (Ψ, E) lo es de (T, B) en (U, C), la **composición** de (Φ, D) y (Ψ, E), es el h-conjunto
$$(\Psi, E) \circ (\Phi, D) = \left(\Psi \circ \Phi, \left(\bigcup \left\{ E_{t,u} \circ D_{s,t} \mid \exists t, \begin{array}{l} (s,t) \in \Phi \ \text{ y} \\ (t,u) \in \Psi \end{array} \right\}\right)_{(s,u) \in \Psi \circ \Phi}\right)$$

6. Una **h-función** de un h-conjunto (S, A) en otro (T, B) es una h-relación *funcional* (φ, f) de (S, A) en (T, B), i.e., una h-relación de (S, A) en (T, B) tal que φ es una función de S en T y, para cada $s \in S$, f_s es una función de A_s en $B_{\varphi(s)}$.

   El conjunto de las h-funciones de (S, A) en (T, B) se denota por $\mathrm{Fnc}((S, A), (T, B))$. La composición de h-funciones, que es un caso particular de la composición de relaciones, es una h-función.

7. Una **h-aplicación** de un h-conjunto (S, A) en otro (T, B) es un triplo $((S, A), (\varphi, f), (T, B))$ en el que (φ, f) es una h-función de (S, A) en (T, B). El conjunto de las h-aplicaciones de (S, A) en (T, B) se denota por $\mathrm{Hom}((S, A), (T, B))$ o por $(T, B)_{(S,A)}$. Se consideran sinónimas las expresiones $(\varphi, f) \in \mathrm{Hom}((S, A), (T, B))$ y $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$. La composición de h-aplicaciones es una h-aplicación, como también lo es la identidad.

En algunas partes de este trabajo se utiliza la siguiente denotación *posicional* para referirse a h-conjuntos y h-aplicaciones: $(\{x, y, \dots\}, (A, B, \dots))$ denota al $\{x, y \dots\}$-conjunto que en x es A, en y es B, etc. Si $(\{x', y', \dots\}, (A', B', \dots))$ es un $\{x', y' \dots\}$-conjunto y $\varphi\colon \{x, y, \dots\} \longrightarrow \{x', y', \dots\}$, entonces $(\varphi, (f, g, \dots))$ denota a la h-aplicación que en x es f, en y es g, $\dots$.

Los operadores de formación de la **imagen directa** y la **imagen inversa** asociados a una h-aplicación (φ, f) se denotan, respectivamente, como $(\varphi, f)_*$ y $(\varphi, f)^*$ y se definen de la manera siguiente:

1.3.2. Definición. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación:

1. La (φ, f)**-imagen directa** (o imagen directa a través de (φ, f)), es la aplicación definida como:

$$(\varphi, f)_* \begin{cases} \mathrm{Sub}(S, A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(T, B) \\ \quad (S', A') \quad \longmapsto (\varphi[S'], (\bigcup_{s \in \varphi^{-1}[t]} f_s[A'_s])_{t \in \varphi[S']}) \end{cases}$$

2. La (φ, f)**-imagen inversa** (o imagen inversa través de (φ, f)), es la aplicación definida como:

$$(\varphi, f)^* \begin{cases} \mathrm{Sub}(T, B) \longrightarrow \mathrm{Sub}(S, A) \\ \quad (T', B') \quad \longmapsto (\varphi^{-1}[T'], (f_s^{-1}[B'_{\varphi(s)}])_{s \in \varphi^{-1}[T']}) \end{cases}$$

1.3.3. Proposición. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación. Entonces

1. $(\varphi, f)^*$ preserva el orden y conmuta con los operadores $\bigcap$ y $\bigcup$ y también con la diferencia.

2. $(\varphi, f)_*$ preserva el orden y conmuta con $\bigcup^{\mathrm{h}}$, pero no en general con $\bigcap^{\mathrm{h}}$.

□

1.3.4. Proposición. Los h-conjuntos y las h-aplicaciones, junto con la composición y las identidades, determinan una categoría, denotada como **HSet**. □

Las categorías de la forma $\mathbf{Set}^S$ se pueden encajar en **HSet** como las subcategorías (no plenas) determinadas por las h-aplicaciones cuya primera componente es id_S. La categoría **HSet** se puede obtener, mediante la construcción de Grothendieck, a partir de las diversas categorías de S-conjuntos. Para ello es necesario definir un functor de la categoría de conjuntos hasta **Cat**, que a cada conjunto de tipos S le asigne la categoría de S-conjuntos y a cada morfismo entre conjuntos de tipos un funtor de *traducción* correspondiente entre las categorías de S-conjuntos asociadas.

1.3.5. Proposición. Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T$ un morfismo en **Set**. Entonces

1. De $\mathbf{Set}^T$ en $\mathbf{Set}^S$ existe un functor $\Delta_\varphi = (\,\cdot\,_{\varphi(s)})_{s\in S}$, que a cada T-aplicación $f : A \longrightarrow B$ le asocia la S-aplicación $(f_{\varphi(s)})_{s\in S}\colon (A_{\varphi(s)})_{s\in S} \longrightarrow (B_{\varphi(s)})_{s\in S}$. En general, se denota a $\Delta_\varphi(f)$ como $f_\varphi\colon A_\varphi \longrightarrow B_\varphi$. Además, si $S \subseteq T$ y φ es la inclusión canónica $\mathrm{in}\colon S \longrightarrow T$, se denota mediante $f{\restriction}_T\colon A{\restriction}_T \longrightarrow B{\restriction}_T$ a la S-aplicación f_{in}.
2. De $\mathbf{Set}^S$ en $\mathbf{Set}^T$ existe un functor $\coprod_\varphi = (\coprod_{s\in\varphi^{-1}(t)}\,\cdot\,_s)_{t\in T}$.
3. De $\mathbf{Set}^S$ en $\mathbf{Set}^T$ existe un functor $\prod_\varphi = (\prod_{s\in\varphi^{-1}(t)}\,\cdot\,_s)_{t\in T}$.

$\square$

1.3.6. Proposición. Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T$ un morfismo en **Set**. Entonces se tiene que $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi \dashv \prod_\varphi$.

Demostración. Veamos que Δ_φ es adjunto por la derecha de $\coprod_\varphi$. Si A un S-conjunto, $\Delta_\varphi(\coprod_\varphi(A))$ es el S-conjunto

$$\Delta_\varphi(\textstyle\coprod_\varphi(A)) = (\coprod_{x\in\varphi^{-1}[\varphi(s)]} A_x)_{s\in S}$$

Sea $\eta_A\colon A \longrightarrow \Delta_\varphi(\coprod_\varphi(A))$ la S-aplicación que en su coordenada s-ésima es la inyección canónica de A_s en $\coprod_{x\in\varphi^{-1}[\varphi(s)]} A_x$. Entonces el par (η_A, A) es un morfismo universal desde A hasta Δ_φ. Si B es un T-conjunto y $f\colon A \longrightarrow \coprod_\varphi(B)$, entonces

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[dr, "f_s"'] & \coprod_{x\in\varphi^{-1}[t]} A_x \arrow[d, "{[f_x]_{x\in\varphi^{-1}[t]}}"] \\
& B_t
\end{tikzcd}$$

Sea $f_t^\sharp = [f_x]_{x\in\varphi^{-1}[t]}$ y $f^\sharp = (f_t^\sharp)_{t\in T}$. Es fácil comprobar que $f^\sharp$ es tal que $f = \Delta_\varphi(f^\sharp) \circ \eta_A$ y la única con esa propiedad.

La demostración para el otro par adjunto es similar. $\square$

La proposición anterior es una generalización de la adjunción $\coprod \dashv \Delta \dashv \prod$ entre **Set** y $\mathbf{Set}^S$. Si identificamos **Set** con $\mathbf{Set}^1$, los functores Δ, $\coprod$, y $\prod$ son, respectivamente, $\Delta_{!_S}$, $\coprod_{!_S}$ y $\prod_{!_S}$, en donde $!_S$ es la única aplicación en **Set** de S en 1. Recíprocamente, si consideramos las diversas aplicaciones $s\colon 1 \longrightarrow S$, entonces Δ_s es el functor de proyección Pr_s, que asocia a cada S-conjunto A su coordenada s-ésima A_s y a cada S-aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ la aplicación $f_s\colon A_s \longrightarrow B_s$, y $\coprod_s$ es el functor $\delta^s(\cdot)$, que asocia a cada conjunto A el S-conjunto $\delta^s(A)$, y a cada aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ la S-aplicación $\delta^s(f)\colon \delta^s(A) \longrightarrow \delta^s(B)$, definida como f en la coordenada s-ésima y como la única aplicación del vacío en sí mismo en las restantes. El functor $\prod_s$ es análogo a $\delta^s(\cdot)$ excepto que en las coordenadas no elegidas el conjunto se amplia con 1 en lugar de con $\emptyset$.

Considérense los morfismos entre conjuntos de tipos como functores entre las categoría discretas correspondientes y a los S-conjuntos como functores de categorías discretas en **Set**. Se tienen entonces los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{S} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "A"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\alpha\,\Nearrow"] & \mathbf{T} \arrow[d, "\coprod_\varphi(A)"] \\
& \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{S} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "A"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\beta\,\Swarrow"] & \mathbf{T} \arrow[d, "\prod_\varphi(A)"] \\
& \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

en donde α y β son las transformaciones naturales inducidas por las propiedades universales del coproducto y el producto. Entonces $(\coprod_\varphi(A), \alpha)$ es la extensión de Kan por la izquierda de A a través de φ. Similarmente, $(\prod_\varphi(A), \beta)$ es la extensión de Kan por la derecha de A a través de φ.

1.3.7. Proposición. De **Set** en **Cat** existe un functor contravariante Set definido como

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[r, "\mathrm{Set}"] & \mathbf{Cat} \\
S \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{Set}^S \\
T \arrow[r, phantom, "\longmapsto", shift left=4ex] & \mathbf{Set}^T \arrow[u, "\Delta_\varphi"']
\end{tikzcd}
$$

1.3.8. Proposición. De **Set** en **Cat** existe un pseudo-functor $\mathrm{Set}^{\mathrm{II}}$ definido como

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[r, "\mathrm{Set}^{\amalg}"] & \mathbf{Cat} \\
S \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{Set}^S \arrow[d, "\coprod_\varphi"] \\
T \arrow[r, phantom, "\longmapsto" above, shift left=6ex] & \mathbf{Set}^T
\end{tikzcd}
$$

tal que

1. Para cada S, T, $U \in \mathbf{Set}$, el isomorfismo natural $\gamma_{S,T,U}$ que, para cada $\varphi\colon S \longrightarrow T$ y $\psi\colon T \longrightarrow U$, es el isomorfismo natural de $\coprod_\psi \circ \coprod_\varphi$ en $\coprod_{\psi\circ\varphi}$, definido, para cada S-conjunto A, como la U-aplicación que en la coordenada u-ésima es $((a,s),\varphi(s)) \mapsto (a,s)$, si existe un $s \in S$ tal que $u = \psi(\varphi(s))$ y la única endoaplicación del vacío, en caso contrario. Denotamos a $(\gamma_{S,T,U})_{\varphi,\psi}$ mediante $\gamma^{\varphi,\psi}$.

2. Para cada conjunto S, el isomorfismo natural ν^S de $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^S}$ en $\coprod_{\mathrm{id}_S}$ que, para cada S-conjunto A y cada coordenada $s \in S$, es el isomorfismo canónico de A_s en $A_s \times \{s\}$.

Demostración. Es suficiente comprobar los axiomas de coherencia. Dada la situación,

$$
S \xrightarrow{\ \varphi\ } T \xrightarrow{\ \psi\ } U \xrightarrow{\ \xi\ } X
$$

los siguientes diagramas conmutan

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_\xi \circ \coprod_\psi \circ \coprod_\varphi \arrow[r, "\mathrm{id}_{\coprod_\xi} * \gamma^{\varphi,\psi}"] \arrow[d, "\gamma^{\psi,\xi} * \mathrm{id}_{\coprod_\varphi}"'] & \coprod_\xi \circ \coprod_{\psi\circ\varphi} \arrow[d, "\gamma^{\psi\circ\varphi,\xi}"] \\
\coprod_{\xi\circ\psi} \circ \coprod_\varphi \arrow[r, "\gamma^{\varphi,\xi\circ\psi}"'] & \coprod_{\xi\circ\psi\circ\varphi}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_\varphi \circ \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^S} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\coprod_\varphi} * \nu^S"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\coprod_\varphi}"'] & \coprod_\varphi \circ \coprod_{\mathrm{id}_S} \arrow[d, "\gamma^{\mathrm{id}^S,\varphi}"] \\
\coprod_\varphi \arrow[r, "\mathrm{id}_{\coprod_\varphi}"'] & \coprod_{\varphi\circ\mathrm{id}_S}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^T} \circ \coprod_\varphi \arrow[r, "\nu^T * \mathrm{id}_{\coprod_\varphi}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\coprod_\varphi}"'] & \coprod_{\mathrm{id}_T} \circ \coprod_\varphi \arrow[d, "\gamma^{\varphi,\mathrm{id}_T}"] \\
\coprod_\varphi \arrow[r, "\mathrm{id}_{\coprod_\varphi}"'] & \coprod_{\mathrm{id}_T\circ\varphi}
\end{tikzcd}
$$

□

1.3.9. Proposición. De **Set** en **Cat** existe un pseudo-functor Set^{Π} definido como

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[r, "\mathrm{Set}^{\Pi}"] & \mathbf{Cat}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "\varphi"'] & & \mathbf{Set}^{S} \arrow[d, "\prod_{\varphi}"] \\
T & \longmapsto & \mathbf{Set}^{T}
\end{tikzcd}
$$

tal que

1. Para cada S, T, $U \in \mathbf{Set}$, el isomorfismo natural $\gamma_{S,T,U}$ que, para cada $\varphi\colon S \longrightarrow T$ y $\psi\colon T \longrightarrow U$, es el isomorfismo natural de $\prod_{\psi} \circ \prod_{\varphi}$ en $\prod_{\psi\circ\varphi}$, que, para cada S-conjunto A, es la U-aplicación cuya coordenada u-ésima es
$$
\begin{array}{ccc}
(\prod_{\psi}(\prod_{\varphi}(A)))_u & \longrightarrow & (\prod_{\psi\circ\varphi} A)_u \\
((a_{s,t})_{s\in\varphi^{-1}[t]})_{t\in\psi^{-1}[u]} & \longmapsto & (a_{s,\varphi(s)})_{s\in(\psi\circ\varphi)^{-1}[u]}
\end{array}
$$

2. Para cada conjunto S, el isomorfismo natural ν^{S} de $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^{S}}$ en $\prod_{\mathrm{id}_S}$ que, para cada S-conjunto A y cada coordenada $s \in S$, es el isomorfismo canónica de A_s en $A_{(s)}$.

$\square$

La situación anterior es bastante común. Si se tiene un functor de una categoría **C** en **Cat** que sea *localmente reversible* entonces la familia de los adjuntos determina un pseudo-functor de **C** en **Cat**.

1.3.10. Definición. Un functor $G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ es **localmente reversible** si para cada morfismo $h\colon c \longrightarrow d$ en **C** el functor $F(h)$ tiene un adjunto por la izquierda.

1.3.11. Proposición. Sea $G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ un functor localmente reversible. Entonces F es parte de un pseudo-functor $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$.

Demostración. Nos limitamos a comprobar la existencia del isomorfismo para la composición. Si $\varphi\colon S \longrightarrow T$ y $\psi\colon T \longrightarrow U$ son morfismos en **C**, entonces se tiene que $F(\varphi) \circ F(\varphi)$ es adjunto por la izquierda de $G(\psi) \circ G(\varphi)\colon G(S) \longrightarrow G(U)$, y, puesto que $F(\psi \circ \varphi)$ también lo es de $G(\psi \circ \varphi) = G(\psi) \circ G(\varphi)$, existe un isomorfismo natural $\gamma^{\varphi,\psi}\colon F(\varphi) \circ F(\varphi) \longrightarrow F(\psi \circ \varphi)$. $\square$

La categoría **HSet** puede obtenerse mediante la construcción de Grothendieck, a través del functor Set, como $\int^{\mathbf{Set}} \mathrm{Set} = (\int_{\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}} \mathrm{Op} \circ \mathrm{Set})^{\mathrm{op}}$, cuando se considera a Set como un functor covariante de $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ en **Cat**. Por consiguiente el functor de olvido $G\colon \mathbf{HSet} \longrightarrow \mathbf{Set}$ definido como

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{HSet} \arrow[rr, "G"] & & \mathbf{Set} \\
(S,A) \arrow[d, "{(\varphi,f)}"'] & & S \arrow[d, "\varphi"] \\
(T,B) & \longmapsto & T
\end{tikzcd}$$

es una fibración escindida. Para cada conjunto S, la fibra de $G\colon \mathbf{HSet} \longrightarrow \mathbf{Set}$ en S, $\mathbf{HSet}_S$, es, esencialmente, la categoría $\mathbf{Set}^S$.

Por otra parte, si aplicamos la construcción de Grothendieck al pseudo-functor $\mathrm{Set}^{\amalg}$ obtenemos una categoría con los mismos objetos que **HSet** y cuyos morfismos de (S,A) en (T,B) son pares (φ,f), con $\varphi\colon S \longrightarrow T$ y $f\colon \coprod_\varphi(A) \longrightarrow B$. Puesto que para cada morfismo $\varphi\colon S \longrightarrow T$, se tiene que $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi$, y por tanto, que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^T}(\coprod_\varphi(A),B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^S}(A,\Delta_\varphi(B))$, las categorías $\int^{\mathbf{Set}}\mathrm{Set}$ y $\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Set}^{\amalg}$ son isomorfas. Puesto que $\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Set}^{\amalg}$ (el functor de olvido en **Set**) es una opfibración escindida, también la categoría **HSet** lo es.

La construcción de Grothendieck permite definir otras categorías de conjuntos heterogéneos con los mismos objetos de **HSet**:

1. La categoría $\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Set}$, cuyos morfismos de (S,A) en (T,B) son los pares (φ,f) en los que $\varphi\colon T \longrightarrow S$ y $f\colon A_\varphi \longrightarrow B$.

2. La categoría $(\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Set})^{\mathrm{op}}$, cuyos morfismos de (S,A) en (T,B), son los pares (φ,f) en los que $\varphi\colon S \longrightarrow T$ y $f\colon B_\varphi \longrightarrow A$.

3. La categoría $\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Op}\circ\mathrm{Set}$, cuyos morfismos de (S,A) en (T,B), son los pares (φ,f) en los que $\varphi\colon T \longrightarrow S$ y $f\colon B \longrightarrow A_\varphi$.

Puesto que para cada morfismo $\varphi\colon S \longrightarrow T$ entre conjuntos de tipos se da la situación de adjunción $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi \dashv \prod_\varphi$, se tienen los siguientes isomorfismos:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Set} &\cong (\textstyle\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Op}\circ\mathrm{Set}^{\amalg})^{\mathrm{op}} \\
(\textstyle\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Set})^{\mathrm{op}} &\cong \textstyle\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Op}\circ\mathrm{Set}^{\amalg} \\
\textstyle\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Op}\circ\mathrm{Set} &\cong (\textstyle\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Set}^{\amalg})^{\mathrm{op}}
\end{aligned}$$

y, por tanto, cualquiera de (los functores de olvido en **Set** o $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ de) las categorías de conjuntos heterogéneos citadas es un bifibración escindida, mediante razonamientos similares a los del párrafo anterior.

También es posible considerar a la categoría **HSet** como un producto orlado. Sea Dis el functor de **Set** en **Cat** que a un conjunto le asigna la categoría discreta canónicamente asociada y a una aplicación el functor correspondiente. Entonces **HSet** es isomorfa a $\mathbf{Set} \wr^{\mathrm{Dis}} \mathbf{Set}$, i.e., a la categoría cuyos objetos son pares (S, A) con S un conjunto y A un functor de $\mathrm{Dis}(S)$ en **Set** y con morfismos, de (S, A) en (T, B), son pares (φ, h) con $\varphi\colon S \longrightarrow T$ y h una transformación natural de A en $B \circ \mathrm{Dis}$. Este punto de vista resulta útil cuando se consideran los conjuntos heterogéneos en relación con las mónadas.

Límites y colímites en HSet.

Los límites y colímites en una fibración escindida están fuertemente relacionados con los límites y colímites correspondientes en las fibras, así como con su comportamiento respecto de los functores inducidos por los morfismos en la categoría base de la fibración.

Las proposiciones siguientes son esenciales para establecer la completud y cocompletud de varias de las categorías estudiadas en este trabajo. Para una demostración de las mismas, véase, por ejemplo, [TBG91].

1.3.12. Proposición. Sea $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ un functor. Si $\mathbf{C}$ es completa, $F(c)$ es completa para cada objeto c de $\mathbf{C}$ y $F(h)$ es continuo para cada morfismo $h\colon c \longrightarrow d$ en $\mathbf{C}$, entonces $\int^{\mathbf{C}} F$ es completa. □

1.3.13. Proposición. Sea $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ un functor. Si $\mathbf{C}$ es cocompleta, $F(c)$ es cocompleta para cada objeto c de $\mathbf{C}$ y F es localmente reversible, entonces $\int^{\mathbf{C}} F$ es cocompleta. □

1.3.14. Proposición. La categoría **HSet** es completa. □

Demostración. Puesto que tanto **Set** como $\mathbf{Set}^S$ son completas, para cada conjunto S y los functores Δ_φ asociados a un morfismo φ entre conjuntos de tipos preservan todos los límites al tener un adjunto por la izquierda, la categoría **HSet** es completa. □

El límite de un diagrama $D\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{HSet}$ se puede obtener a través del límite en **Set** del diagrama $G \circ D$, que, a través de los functores inducidos por las proyecciones de ese límite, nos permite obtener un diagrama en la fibra del límite y su límite correspondiente, a partir del cual se deriva el límite del diagrama original.

Por ejemplo, el producto de una familia de conjuntos heterogéneos $(S^i, A^i)_{i \in I}$ es el h-conjunto (S, A) en el que $S = \prod_{i \in I} S^i$ y $A = (\prod_{i \in I} A^i_{x(i)})_{x \in S}$, junto a la familia de proyecciones que, en cada $i \in I$, es $(\mathrm{pr}_i, (\mathrm{pr}_i)_{x \in S})$.

El igualador de un par de morfismos $(\varphi, f), (\psi, g)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ en **HSet** es el h-conjunto $(\mathrm{Eq}(\varphi, \psi), (\mathrm{Eq}(f_s, g_s)_{s\in \mathrm{Eq}(\varphi,\psi)})$, junto al morfismo $(\mathrm{Eq}(\varphi, \psi), (\mathrm{Eq}(f_s, g_s))_{s\in \mathrm{Eq}(\varphi,\psi)})$, en donde $\mathrm{Eq}(\varphi, \psi)$ es el igualador en **Set** de φ y ψ y $\mathrm{Eq}(f_s, g_s)$ es el igualador en **Set** de f_s y g_s.

1.3.15. Proposición. La categoría **HSet** es cocompleta.

Demostración. Puesto que tanto **Set** como $\mathbf{Set}^S$ son cocompletas para cada conjunto S y los functores Δ_φ asociados a un morfismo φ entre conjuntos de tipos tienen como adjunto por la izquierda a los functores $\coprod_\varphi$, la categoría **HSet** es localmente reversible y, por tanto, cocompleta. □

El colímite de un diagrama $D\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{HSet}$ se puede obtener a través del colímite en **Set** del diagrama $G \circ D$, que mediante los functores adjuntos por la izquierda de los functores inducidos por las inyecciones de ese límite nos permite obtener un diagrama en la fibra del colímite y su colímite correspondiente, a partir del cual se deriva el colímite del diagrama original.

Por ejemplo, el coproducto de una familia de conjuntos heterogéneos $(S^i, A^i)_{i\in I}$ es el conjunto heterogéneo (S, A) en el que S es $\coprod_{i\in I} S^i$ y A es $(\coprod_{i\in I} A^i_s)_{(s,i)\in S}$, junto a la familia de inyecciones que en cada $i \in I$ es $(\mathrm{in}_i, (\mathrm{in}^s_i)_{s\in S^i})$, en donde in^s_i es la inclusión canónica de A^i_s en $\coprod_{i\in I} A^i_s$.

El coigualador de dos morfismos $\Phi = (\varphi, f)$ y $\Psi = (\psi, g)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ en **HSet** se puede obtener de la manera siguiente. Sea $(\mathrm{Coeq}(\varphi, \psi), p)$ el coigualador en **Set** de φ y ψ, y sean $f^\flat\colon \coprod_\varphi(A) \longrightarrow B$, $g^\flat\colon \coprod_\psi(A) \longrightarrow B$ las T-aplicaciones obtenidas mediante la adjunción $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi$ a partir de las S-aplicaciones f y g. Entonces $\coprod_p \coprod_\varphi(A)$ es $\coprod_p \coprod_\psi(A)$ y podemos calcular $\mathrm{Coeq}(\coprod_p f^\flat, \coprod_p g^\flat)$, el coigualador de $\coprod_p f^\flat$ y $\coprod_p g^\flat$ en $\mathbf{Set}^{\mathrm{Coeq}(\varphi,\psi)}$ con proyección p'. El coigualador de Φ y Ψ en **HSet** es entonces el h-conjunto $(\mathrm{Coeq}(\varphi, \psi), \mathrm{Coeq}(\coprod_p f^\flat, \coprod_p g^\flat)$ junto a la proyección $(p, p'^\sharp)$, en donde $p'^\sharp$ es la T-aplicación obtenida mediante la adjunción a partir de p'.

Algunos tipos de morfismos en HSet.

Mientras que en **Set** las aplicaciones mónicas e inyectivas coinciden, no sucede lo mismo cuando se consideran h-conjuntos y h-aplicaciones. Además, tampoco lo hacen las h-aplicaciones inyectivas (sobreyectivas) con aquellas cuyas dos componentes son ambas inyectivas (sobreyectivas). En lo que sigue se clasifican algunas de estas propiedades.

1.3.16. Definición. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ un morfismo de **HSet**. Entonces

1. Se dice que (φ, f) es **inyectivo** si, para cada $x, y\colon 1^{\mathrm{h}} \longrightarrow (S, A)$, $x = y$ si $(\varphi, f) \circ x = (\varphi, f) \circ y$. Se dice que (φ, f) es **sobreyectivo** si, para cada $y\colon 1^{\mathrm{h}} \longrightarrow (T, B)$, existe un $x\colon 1^{\mathrm{h}} \longrightarrow (S, A)$ tal que $(\varphi, f) \circ x = y$.
2. Sea P una propiedad de los morfismos. Entonces (φ, f) es **localmente** P si f es localmente P. En particular, (φ, f) es **localmente inyectivo** (resp. sobreyectivo) si f es localmente inyectivo (resp. sobreyectivo).
3. Sea P una propiedad de los morfismos. Entonces (φ, f) es **di**P si φ es P y f es P. En particular, (φ, f) es dimónica si φ es mónica en **Set** y f es mónica en $\mathbf{Set}^S$.

1.3.17. Proposición. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación. Entonces (φ, f) es mónica si y sólo si (φ, f) es dimónica, i.e., φ es mónica (en **Set**) y f es mónica (en $\mathbf{Set}^S$).

Demostración. Si φ y f son mónicas, entonces (φ, f) es mónica. En efecto, sean $(\psi, g), (\gamma, h)\colon (U, C) \longrightarrow (S, A)$ dos h-aplicaciones para las que se cumpla que $(\varphi, f) \circ (\psi, g) = (\varphi, f) \circ (\gamma, h)$. Entonces $\varphi \circ \psi = \varphi \circ \gamma$ y por ser φ mónica $\psi = \gamma$. Además, $f_\psi \circ g = f_\gamma \circ h$ y, puesto que f es mónica, $f_\psi = f_\gamma$ es también mónica, por lo que $g = h$.

Supongamos que (φ, f) es mónica. Veamos que f es mónica. Si $g, h\colon C \longrightarrow A$ son dos morfismos en $\mathbf{Set}^S$ tales que $f \circ g = f \circ h$, entonces tenemos las h-aplicaciones $(\mathrm{id}_S, g), (\mathrm{id}_S, h)\colon (S, C) \longrightarrow (S, A)$, y $(\varphi, f) \circ (\mathrm{id}_S, g) = (\varphi, f) \circ (\mathrm{id}_S, h)$, pero, por ser (φ, f) mónica, $g = h$. Luego f es mónica. Veamos que φ es mónica. Dados dos morfismos $\psi, \gamma\colon U \longrightarrow S$ tales que $\varphi \circ \psi = \varphi \circ \gamma$ se cumple que $(\psi, !_{\emptyset, A_\psi})$ y $(\gamma, !_{\emptyset, A_\gamma})$ son h-aplicaciones de $(U, \emptyset)$ en (S, A) y tales que se cumple que $(\varphi, f) \circ (\psi, !_{\emptyset, A_\psi}) = (\varphi, f) \circ (\gamma, !_{\emptyset, A_\gamma})$. Puesto que (φ, f) es mónica, $\psi = \gamma$ y φ es mónica. $\square$

1.3.18. Proposición. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación. Entonces (φ, f) es una retracción si y sólo si es una dirretracción, i.e., si φ es una retracción (en **Set**) y f es una retracción (en $\mathbf{Set}^S$).

Demostración. Supongamos que (φ, f) es una retracción. Entonces existe un $(\psi, g)\colon (T, B) \longrightarrow (S, A)$ tal que $(\varphi, f) \circ (\psi, g) = \mathrm{id}_{(T,B)}$. Pero entonces ψ es una retracción en **Set**, puesto $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_T$, y g una retracción en $\mathbf{Set}^S$, puesto que $f_\psi \circ g = \mathrm{id}_B$.

Supongamos que (φ, f) es una dirretracción. Entonces existe un $\psi\colon T \longrightarrow S$ tal que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_T$ y, para cada $t \in T$, $f_{\psi(t)}\colon A_{\psi(t)} \longrightarrow B_{\varphi(\psi(t))} = B_t$ es una retracción. Luego, para cada $t \in T$, existe una aplicación $h_t\colon B_t \longrightarrow A_{\psi(t)}$ tal que $f_{\psi(t)} \circ h_t = \mathrm{id}_{B_t}$. La h-aplicación $(\psi, (h_t)_{t \in T})$ es entonces un inverso por la derecha de (φ, f), por lo que (φ, f) es una retracción. $\square$

1.3.19. Proposición. En la categoría **HSet** se cumple que:

1. Sección $\subset$ Disección $\subset$ Dimónica $=$ Mónica $\subset$ Inyectiva $\subset$ Loc. Inyectiva.
2. Retracción $=$ Dirretracción $=$ Diépica $\subset$ Épica $\subset$ Sobreyectiva.

Demostración. Sección $\subset$ Disección. Sea (φ, f) una sección. Entonces existe un (ψ, g) tal que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ y $g_\varphi \circ f = \mathrm{id}$, luego (φ, f) es di-sección. No obstante, el morfismo $(0, (!))\colon (1, (1)) \longrightarrow (2, (\emptyset, 1))$ es, obviamente, una disección aunque no una sección, puesto que no existe ninguna h-aplicación de $(2, (\emptyset, 1))$ en $(1, (1))$.

Disección $\subset$ Dimónica. Puesto que sección $\subset$ mónica tanto en **Set** como en $\mathbf{Set}^S$. Las h-aplicaciones con dominio $(\emptyset, (\emptyset))$ son dimónicas aunque, en general, no son disecciones.

Dimónica $=$ Mónica. En virtud de la proposición 1.3.17. Por consiguiente, (φ, f) es mónica si y sólo si φ es inyectiva y f es localmente inyectiva.

Mónica $\subset$ Inyectiva. El morfismo $(!, (0, 1))\colon (2, (1, 1)) \longrightarrow (1, (2))$ es inyectivo, aunque, obviamente, $!\colon 2 \longrightarrow 1$ no es mónica puesto que no es inyectiva.

Inyectiva $\subset$ Loc. Inyectiva. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación inyectiva. Si $s \in S$ y $a, b\colon 1 \longrightarrow A_s$ son tales que $f_s(a) = f_s(b)$, entonces $(s, (a))$ y $(s, (b))$ son h-aplicaciones de $(1, (1))$ en (S, A) que se igualan mediante su composición con (φ, f), y puesto que (φ, f) es inyectivo $a = b$, y (φ, f) es, por tanto, localmente inyectiva. Por el contrario, el morfismo $(!, \mathrm{id}_1)\colon (2, (1, 1)) \longrightarrow (1, (1))$ no es inyectivo aunque es localmente inyectivo.

Retracción $=$ Dirretracción. En virtud de la proposición 1.3.18. Por consiguiente, (φ, f) es una retracción exactamente si φ es sobreyectiva y f es localmente sobreyectiva.

Dirretracción $=$ Diépica. Puesto que las retracciones coinciden en **Set** y $\mathbf{Set}^S$ con las épicas, dirretracción equivale a diépica.

Diépica $\subset$ Épica. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación diépica y $(\psi, g), (\gamma, h)\colon (T, B) \longrightarrow (U, C)$, tales que al componerlos con (φ, f) den lugar al mismo morfismo. Entonces φ es sobreyectiva por ser épica en **Set** y $\psi = \gamma$. Puesto que $g_\varphi \circ f = h_\varphi \circ f$ y, para cada $t \in T$, existe un $s \in S$ tal que $\varphi(s) = t$, se cumple que $g = h$, por lo que (φ, f) es épica. Como ejemplo de h-aplicación épica aunque no diépica se tiene $(!, (0, 1))\colon (2, (1, 1)) \longrightarrow (1, (2))$ en la que la 2-aplicación $(0, 1)$ no es épica en $\mathbf{Set}^2$ aunque $(!, (0, 1))$ sí lo es en **HSet**.

Épica $\subset$ Sobreyectiva. Supongamos que (φ, f) es épica y $(t, (b))$ un elemento global de (T, B). Sean $g, h\colon B \longrightarrow B \amalg \delta^t(0) \amalg \delta^t(1)$ dos T-aplicaciones iguales a la inyección canónica desde B excepto que $g_t(b) = 0$ y $g_t(b) = 1$. Entonces (id_T, g) y (id_T, h) son h-aplicaciones que no pueden ser igualadas por composición con (φ, f). Por tanto, existe un $s \in S$ y un $a \in A_s$ tales que $g_{\varphi}(s) \circ f_s(a) \neq h_{\varphi(s)} \circ f_s(a)$. Puesto que g y h sólo difieren en el valor que asignan a b en la coordenada t, $\varphi(s) = t$ y $f_s(a) = b$ y por tanto que, para el elemento global (s, a) de (S, A), $(\varphi, f) \circ (s, a) = (t, b)$ y (φ, f) es sobreyectiva.

Una h-aplicación sobreyectiva pero no épica es $(1, !)\colon (1, (\emptyset)) \longrightarrow (2, (\emptyset, \emptyset))$, que es vacuamente sobreyectiva pero no un epimorfismo puesto que los endomorfismos $(\mathrm{id}_2, (!, !))$ y $(1, (!, !))$ de $(2, (\emptyset, \emptyset))$ son distintos pero se igualan por composición con $(1, !)$.

□

Las h-aplicaciones épicas se pueden caracterizar mediante la siguiente proposición.

1.3.20. Proposición. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación. Entonces (φ, f) es épica exactamente si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. φ es sobreyectiva.
2. Para cada $t \in T$ y cada $b \in B_t$, existe un $s \in S$ y un $a \in A_s$ tal que $\varphi(s) = t$ y $f_s(a) = b$.

Demostración. Supongamos 1 y 2. Sean $(\psi, g), (\gamma, h)\colon (T, B) \longrightarrow (U, C)$ dos h-aplicaciones tales que al componerlas con (φ, f) den lugar al mismo morfismo. Entonces $\psi = \gamma$ por ser φ sobreyectiva. Supongamos que $g \neq h$. Entonces existe un $t \in T$ y un $b \in B_t$ tal que $g_t(b) \neq h_t(b)$. Por 2, existe un $s \in S$ tal que $\varphi(s) = t$ y un $a \in A_s$ tal que $f_s(a) = b$ y por tanto $g_t(b) = g_{\varphi(s)}(f_s(a) = h_{\varphi(s)}(f_s(a)) = h_t(b)$. Por contradicción, $g = h$ y (φ, f) es épica.

Recíprocamente, si (φ, f) es épica, es fácil demostrar, de nuevo por contradicción, que φ ha de ser sobreyectiva. Supongamos que la condición 2 no se cumple. Entonces existe un $t \in T$ y un $b \in B_t$ tal que, para cada $s \in S$ y cada $a \in A_s$, si $\varphi(s) = t$, entonces $f_s(a) \neq b$. Sean $(\mathrm{id}, g), (\mathrm{id}, h)$ las h-aplicaciones de (T, B) en $(T, B \amalg \delta^t(0) \amalg \delta^t(1))$ que son la inyección canónica excepto que $g_t(b) = 0$ y $h_t(b) = 1$. Entonces $(\mathrm{id}, g) \circ (\varphi, f) = (\mathrm{id}, h) \circ (\varphi, f)$ y puesto que (φ, f) es épica $g = h$. Por contradicción, la condición 2 se cumple. □

Relaciones de equivalencia heterogéneas.

1.3.21. Definición. Una **h-relación de equivalencia** sobre un h-conjunto (S, A) es un h-conjunto (Φ, E), en el que Φ es una relación de equivalencia sobre S y E es un Φ-conjunto $(E_{s,s'})_{(s,s') \in \Phi}$ tal que, para cada $(s, s') \in \Phi$, $E_{s,s'} \subseteq A_s \times A_{s'}$, y cumple las condiciones siguientes:

1. Para cada $s \in S$, $\Delta_{A_s} \subseteq E_{s,s}$.
2. Para cada s, $s' \in S$, $E^{-1}_{s,s'} \subseteq E_{s',s}$.
3. Para cada s, s', $s'' \in S$, $E_{s',s''} \circ E_{s,s'} \subseteq E_{s,s''}$.

El conjunto de las h-relaciones de equivalencia sobre un h-conjunto (S, A) se denota como $\mathrm{Eqv}(S, A)$ y, cuando se le considera ordenado por $\subseteq^{\mathrm{h}}$, como $\underline{\mathrm{Eqv}}(S, A)$.

Dar una h-relación de equivalencia sobre un h-conjunto (S, A) equivale a dar una relación de equivalencia Φ sobre el conjunto de tipos y una familia de relaciones de equivalencia indexada por las clases de equivalencia en $S/\Phi = \{[s] \mid s \in S\}$. Sea $A_{[s]} = \coprod_{x\in[s]} A_x$, y para cada $s \in S$, sea $E_{[s]}$ el conjunto definido como

$$E_{[s]} = \{((a, x), (a', x')) \in A^2_{[s]} \mid (a, a') \in E_{x,x'}\}$$

Entonces, para cada $s \in S$, $E_{[s]}$ es una relación de equivalencia sobre $A_{[s]}$.

Recíprocamente, si $H = (H_{[s]})_{[s]\in S/\Phi}$ es tal que $H_{[s]} \in \mathrm{Eqv}(A_{[s]})$ entonces definiendo, para cada $(s, s') \in \Phi$, $H_{s,s'}$ como

$$H_{s,s'} = \{(a, a') \in A_s \times A_{s'} \mid ((a, s), (a', s')) \in H_{[s]}\}$$

se cumple que $(\Phi, (H_{s,s'})_{(s,s')\in\Phi})$ es una h-relación de equivalencia sobre (S, A).

1.3.22. Definición. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación. El **núcleo** de (φ, f), $\mathrm{Ker}(\varphi, f)$, es el h-conjunto $(\mathrm{Ker}(\varphi), \mathrm{Ker}^{\varphi}(f))$, en donde $\mathrm{Ker}^{\varphi}(f)$ es $(\mathrm{Pb}(f_s, f_{s'}))_{(s,s')\in\mathrm{Ker}(\varphi)}$, con $\mathrm{Pb}(f_s, f_{s'})$ el producto fibrado obtenido a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pb}(f_s, f_{s'}) \arrow[r, "\mathrm{p}_1"] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"'] & A_{s'} \arrow[d, "f_{s'}"] \\
A_s \arrow[r, "f_s"'] & {}
\end{tikzcd}$$

1.3.23. Proposición. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación. Entonces $\mathrm{Ker}(\varphi, f)$ es una h-relación de equivalencia sobre (S, A). $\square$

1.3.24. Definición. Sea (S, A) un h-conjunto y $(\Phi, E) \in \mathrm{Eqv}(S, A)$. Entonces el **h-conjunto cociente** de (S, A) entre (Φ, E), $(S, A)/(\Phi, E)$ es el h-conjunto $(S/\Phi, A/E)$ en donde $A/E = (A_{[s]}/E_{[s]})_{[s]\in S/\Phi})$. La **proyección canónica** de (S, A) en $(S/\Phi, A/E)$, $\mathrm{pr}_{(\Phi,E)}$, es la h-aplicación $(\mathrm{pr}_\Phi, (\mathrm{pr}_{E_{[s]}} \circ \mathrm{in}_s)_{s\in S}$, en donde pr_Φ es la proyección canónica de S en S/Φ y $\mathrm{pr}_{E_{[s]}} \circ \mathrm{in}_s$ se obtiene por composición de la inclusión canónica de A_s en $A_{[s]}$ con la proyección canónica de $A_{[s]}$ en $A_{[s]}/E_{[s]}$.

1.3.25. Proposición. Sea (S, A) un h-conjunto y $(\Phi, E) \in \mathrm{Eqv}(S, A)$. Entonces $\mathrm{pr}_{(\Phi,E)}$ es un epimorfismo.

Demostración. Veamos que pr_Φ es sobreyectiva. Sea $[s] \in S/\Phi$ y $[(a, s)]$ un elemento de $A_{[s]}/E_{[s]}$. Entonces $s \in S$ y $(\mathrm{pr}_{(\Phi,E)})_s(a) = [(a, s)]$, por lo que, haciendo uso de la proposición 1.3.20, se cumple que $\mathrm{pr}_{(\Phi,E)}$ es un epimorfismo. $\square$

La factorización clásica de una aplicación a través de su núcleo es también válida para los conjuntos heterogéneas.

1.3.26. Proposición. Sea $(\varphi, f)\colon (S,A) \longrightarrow (T,B)$ una h-aplicación. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(S,A) \arrow[rr, "(\varphi, f)"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(\varphi,f)}"'] & & (T,B) \\
& (S,A)/\operatorname{Ker}(\varphi, f) \arrow[ur, "(\varphi, f)^{\mathrm{i}}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde $(\varphi, f)^{\mathrm{i}}$, denominada la *inyectivizada* de (φ, f), es la h-aplicación $(\varphi^{\mathrm{i}}, f^{\varphi,\mathrm{i}})$ en la que φ^{i} es la inyectivizada de φ, i.e., la inyección canónica de $S/\operatorname{Ker}(\varphi)$ en T, y $f^{\varphi,\mathrm{i}}$ es la $S/\operatorname{Ker}(\varphi)$-aplicación cuya coordenada $[s]$-ésima, es la definida como

$$(f^{\varphi,\mathrm{i}})_{[s]} \begin{cases} A_{[s]}/\operatorname{Ker}^{\varphi}(f)_{[s]} \longrightarrow B_{\varphi(s)} \\ \qquad [(a,s)] \qquad \longmapsto f_s(a) \end{cases}$$

Además, $(\varphi, f)^{\mathrm{i}}$ es mónica, por lo que el diagrama anterior constituye una epi-mono factorización de (φ, f).

Demostración. El diagrama es conmutativo y $\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}((\varphi,f))}$ es un epimorfismo por lo que sólo hay que comprobar que $(\varphi, f)^{\mathrm{i}}$ es mónica. Puesto que

$$(S,A)/\operatorname{Ker}(\varphi, f) = (S/\operatorname{Ker}(\varphi), (A_{[s]}/\operatorname{Ker}^{\varphi}(f)_{[s]})_{[s]\in \operatorname{Ker}(\varphi)})$$

y que

$$\begin{aligned} A_{[s]}/\operatorname{Ker}^{\varphi}(f)_{[s]} &= \{((a,x),(a',x')) \in A_{[s]}^2 \mid (a,a') \in \operatorname{Pb}(f_s, f_{s'})\} \\ &= \{((a,x),(a',x')) \in A_{[s]}^2 \mid f_s(a) = f_{s'}(a')\} \end{aligned}$$

f^{i} es mónica, porque si $[(a,x)]$ y $[(a',x')]$ están en $A_{[s]}/\operatorname{Ker}^{\varphi}(f)_{[s]}$ y además, $f_x(a) = f_{x'}(a')$, entonces $((a,x),(a',x')) \in \operatorname{Ker}^{\varphi}(f)_{[s]}$, luego $[(a,s)] = [(a',s')]$. Puesto que φ^{i} es mónica, $(\varphi, f)^{\mathrm{i}}$ es mónica. □

1.3.27. Definición. Sea $(\varphi, f)\colon (S,A) \longrightarrow (T,B)$ una h-aplicación. La **imagen** de (φ, d), $\operatorname{Im}(\varphi, f)$, es el h-conjunto $(\operatorname{Im}(\varphi), \bigcup_{s\in\varphi^{-1}[t]} \operatorname{Im}(f_s))_{t\in \operatorname{Im}(\varphi)})$.

La factorización clásica de una aplicación a través de su imagen es también válida para las h-aplicaciones.

1.3.28. Proposición. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación. Entonces el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(S, A) \arrow[rr, "{(\varphi, f)}"] \arrow[dr, "{(\varphi, f)^{\mathrm{sb}}}"'] & & (T, B) \\
& \mathrm{Im}(\varphi, f) \arrow[ur, "{\mathrm{in}_{\mathrm{Im}(\varphi, f)}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

conmuta, donde $(\varphi, f)^{\mathrm{sb}}$, denominada la *sobreyectivizada* de (φ, f), es la h-aplicación $(\varphi^{\mathrm{sb}}, f^{\varphi,\mathrm{sb}})$ en la que φ^{sb} es la sobreyectivizada de φ, i.e., la sobreyección canónica de S en $\mathrm{Im}(\varphi)$, y $f^{\varphi,\mathrm{sb}}$ es la S-aplicación definida, en la coordenada s-ésima, como

$$
(f^{\varphi,\mathrm{sb}})_s \begin{cases} A_s \longrightarrow \bigcup_{\varphi(x)=\varphi(s)} \mathrm{Im}(f_x) \\ a \longmapsto f_s(a) \end{cases}
$$

Además, $(\varphi, f)^{\mathrm{sb}}$ es épica, por lo que el diagrama anterior constituye una epi-mono factorización de (φ, f).

Demostración. El diagrama es conmutativo e $\mathrm{in} = (\mathrm{in}, (\mathrm{in}_t)_{t \in \mathrm{Im}(\varphi)})$ es un monomorfismo. Haciendo uso de la prop. 1.3.20 se sigue que $(\varphi, f)^{\mathrm{sb}}$ es un epimorfismo. □

1.3.29. Proposición. Sea $(\varphi, f)\colon (S, A) \longrightarrow (T, B)$ una h-aplicación. Entonces el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(S, A) \arrow[r, "{(\varphi, f)}"] \arrow[d, "{\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(\varphi, f)}}"'] & (T, B) \\
(S, A)/\mathrm{Ker}(\varphi, f) \arrow[r, "{(\varphi, f)^{\mathrm{b}}}"'] & \mathrm{Im}(\varphi, f) \arrow[u, "{\mathrm{in}_{\mathrm{Im}(\varphi, f)}}"']
\end{tikzcd}
$$

conmuta, donde $(\varphi, f)^{\mathrm{b}}$, denominada la *biyectivizada* de (φ, f) es la h-aplicación $(\varphi^{\mathrm{b}}, f^{\varphi,\mathrm{b}})$, con φ^{b} la biyección canónica entre $S/\mathrm{Ker}(\varphi)$ y $\mathrm{Im}(\varphi)$ y $f^{\varphi,\mathrm{b}}$ la $S/\mathrm{Ker}(\varphi)$-biyección definida, en la coordenada $[s]$-ésima, como

$$
(f^{\varphi,\mathrm{b}})_{[s]} \begin{cases} A_{[s]}/\mathrm{Ker}^{\varphi}(f)_{[s]} \longrightarrow \bigcup_{\varphi(x)=\varphi(s)} \mathrm{Im}(f_x) \\ [(a, s)] \longmapsto f_s(a) \end{cases}
$$

Además, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} (S,A) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(\varphi,f)}"] \arrow[d, "(\varphi,f)^{\mathrm{sb}}"'] & (S,A)/\operatorname{Ker}(\varphi,f) \arrow[d, "(\varphi,f)^{\mathrm{i}}"] \arrow[dl, "(\varphi,f)^{\mathrm{b}}"'] \\ \operatorname{Im}(\varphi,f) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{Im}(\varphi,f)}"'] & (T,B) \end{tikzcd}$$

□

El topos HSet.

La categoría **HSet** es un topos. A diferencia de los topoi de la forma $\mathbf{Set}^S$, es un topos no clásico que, cuando se considera como una fibración sobre **Set**, contiene *sub-topoi* clásicos, relacionados entre sí mediante morfismos lógicos. Así, podríamos decir que la lógica de los conjuntos heterogéneos es clásica *localmente*, i.e., para un conjunto fijo de tipos, aunque no *globalmente*.

Exponenciales. Sean (S,A) y (T,B) dos conjuntos heterogéneos. El exponencial, denotado como $(T,B)^{(S,A)}$, es el h-conjunto $(T^S,(B_{\varphi A})_{\varphi\in T^S})$. La función de evaluación $\mathrm{ev}_{(S,A),(T,B)}\colon (S,A)\times(T,B)^{(S,A)} \longrightarrow (T,B)$ es el morfismo de $(S\times T^S,(A_s\times B_{\varphi A})_{(s,\varphi)\in S\times T^S})$ en (T,B) determinado por el par $(\mathrm{ev}_{S,T},(\mathrm{ev}_{s,\varphi})_{(s,\varphi)\in S\times T^S})$, con $\mathrm{ev}_{s,\varphi}$ la aplicación definida como

$$\mathrm{ev}_{s,\varphi}\begin{cases} A_s\times B_{\varphi A} \longrightarrow B_{\varphi(s)} \\ \quad (a,f) \longmapsto f_s(a)\end{cases}$$

1.3.30. Proposición. Sean (S,A), (T,B) (U,C) tres h-conjuntos. Entonces

$$\operatorname{Hom}((U,C)\times(S,A),(T,B)) \cong \operatorname{Hom}((U,C),(T,B)^{(S,A)})$$

Demostración. El isomorfismo es la aplicación definida como

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}((U,C)\times(S,A),(T,B)) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}((U,C),(T,B)^{(S,A)}) \\ (\psi,g) & \longmapsto & (\overline{\psi},\overline{g}) \end{array}$$

donde $\overline{\psi}\colon U\longrightarrow T^S$ es la transpuesta de $\psi\colon U\times S\longrightarrow T$ y $\overline{g}$ la U-aplicación de C en $(B_{\overline{\psi(u)}_A})_{u\in U}$ cuya coordenada u-ésima es la aplicación definida como

$$\overline{g}_u\begin{cases} C_u \longrightarrow B_{\overline{\psi(u)}_A} \\ \ c \longmapsto (\overline{g}_{u,s}(c))_{s\in S}\end{cases}$$

siendo $\overline{g}_{u,s}$, para cada $(u,s)\in U\times S$, la transpuesta de $g_{u,s}$, i.e., la componente (u,s)-ésima de la aplicación $g=(g_{u,s}\colon C_u\times A_s\longrightarrow B_{\varphi(u,s)})_{(u,s)\in U\times S}$. La aplicación $\overline{g}_u$ está bien definida porque $(\overline{g}_{u,s}(c))_{s\in S}$ es una S-aplicación de $A=(A_s)_{s\in S}$ en $(B_{\psi(u,s)})_{s\in S}=(B_{\overline{\psi(u)}(s)})_{s\in S}=B_{\overline{\psi(u)}}$. □

Por la proposición anterior se tiene que, efectivamente, el exponencial $(T,B)^{(S,A)}$ de dos h-conjuntos (junto con la evaluación) es el exponencial en la categoría **HSet**.

Clasificador de subobjetos. El objeto final en la categoría **HSet**, denotado como 1^{h}, es el h-conjunto $(1,(1))$. Sea Ω^{h} el h-conjunto $(2,(1,2))$ y $\top^{\mathrm{h}}$ la h-aplicación determinada por el par $(\top,(\top))$, con $\top$ el morfismo verdad en **Set**. Entonces el h-conjunto Ω^{h}, junto a la h-aplicación $\top^{\mathrm{h}}$, es un clasificador de subobjetos en la categoría **HSet**.

1.3.31. Proposición. Sea $(\varphi,f)\colon (S,A)\longrightarrow(T,B)$ una h-aplicación mónica. Entonces existe una única h-aplicación $\mathrm{ch}_{(\varphi,f)}$, denominada el carácter de (φ,f), tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(S,A) \arrow[r, tail, "{(\varphi,f)}"] \arrow[d, "!"'] & (T,B) \arrow[d, "\mathrm{ch}_{(\varphi,f)}"] \\
1^{\mathrm{h}} \arrow[r, "\top^{\mathrm{h}}"'] & \Omega^{\mathrm{h}}
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Demostración. Sea $\mathrm{ch}_{(\varphi,f)}$ la h-aplicación $(\mathrm{ch}_\varphi,\mathrm{ch}_f^\varphi)$ en donde ch_f^φ es la T-aplicación que, en la coordenada t-ésima, se define como

$$(\mathrm{ch}_f^\varphi)_t \begin{cases} B_t \longrightarrow (1,2)_{\mathrm{ch}_\varphi(t)} \\ b \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{ch}_\varphi(t)=0 \\ \mathrm{ch}_{f_s}(b) & \text{si } \mathrm{ch}_\varphi(t)=1 \end{cases} \end{cases}$$

en donde ch_φ y ch_{f_s} se obtienen a partir de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "!"'] & T \arrow[d, "\mathrm{ch}_\varphi"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & 2
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "!"'] & B_{\varphi(s)} \arrow[d, "\mathrm{ch}_{f_s}"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & 2
\end{tikzcd}$$

□

1.3.32. Proposición. La categoría **HSet** es un topos.

Demostración. Por las proposiciones anteriores, **HSet** tiene límites (en especial finitos), exponenciación y un clasificador de subobjetos. □

Puesto que **HSet** es un topos, existen en él objetos potencia para cualquier h-conjunto. Si (S, A) es un h-conjunto entonces su objeto potencia, denotado por $\mathrm{Pow}(S, A) \cong \Omega^{\mathrm{h}(S,A)}$, admite una descripción más simple como

$$\mathrm{Pow}(S, A) = (\mathrm{Sub}(S), (\mathrm{Sub}(A{\upharpoonright}_T))_{T \subseteq S})$$

donde $A{\upharpoonright}_T = (A_s)_{s \in T}$ y $\mathrm{Sub}(A{\upharpoonright}_T)$ se calcula en $\mathbf{Set}^T$.

Los subobjetos de un h-conjunto (S, A), i.e., las clases de equivalencia de mónicas con codominio (S, A), están en correspondencia biunívoca con el conjunto de los elementos globales de $\mathrm{Pow}(S, A)$. A su vez, éste es isomorfo al conjunto de los elementos *parciales* de A en la categoría $\mathbf{Set}^S$, i.e., los morfismos $a\colon \delta^s \longrightarrow A$ para algún $s \in S$, mediante la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (S, A)^{1^{\mathrm{h}}} & \longrightarrow & \bigcup(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^S}(\delta^s, A))_{s \in S} \\ (s, a) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \delta^s \longrightarrow A \\ 0 \longmapsto a \end{array} \right. \end{array}$$

En un topos cada morfismo tiene una epi-mono factorización, que es única salvo un único isomorfismo. En la categoría **HSet**, la construcción canónica de la factorización de un morfismo en un topos, como la suma amalgamada de las proyecciones del producto fibrado del morfismo consigo mismo, proporciona esencialmente la factorización por el núcleo descrita anteriormente, mientras que si se construye como el producto fibrado de las inyecciones en la suma amalgamada del morfismo consigo mismo, se obtiene la factorización a través de la imagen.

El topos **HSet** no está bien-punteado. De $(1, (\emptyset))$ en un h-conjunto arbitrario (S, A), con $\mathrm{card}(S) \geq 2$, se tienen pares de h-aplicaciones distintas que no pueden distinguirse mediante un morfismo desde el objeto final. En general, cualquier h-conjunto con alguna coordenada vacía es vacío, aunque pueda ser distinto del objeto inicial $0^{\mathrm{h}} = (\emptyset, \emptyset)$. No es tampoco un topos clásico, puesto que $1^{\mathrm{h}} \amalg 1^{\mathrm{h}}$ no es isomorfo a Ω^{h}. La lógica de **HSet** es una lógica *intermedia*, con tres valores de verdad, i.e., tres morfismos de 1^{h} en Ω^{h}: $(\bot, (\mathrm{id}_1))$, $(\top, (\bot))$ y $(\top, (\top))$.

La lógica de HSet.

Para determinar la lógica en el topos **HSet** es necesario caracterizar sus morfismos de verdad. A partir de estos, se puede determinar el álgebra de subobjetos de la categoría que justifica, en particular, las definiciones introducidas en 1.3.1 para la intersección y unión de h-conjuntos.

Falsedad. La falsedad en la categoría **HSet**, $\bot^{\mathrm{h}}$, es el carácter del único morfismo de $(\emptyset, \emptyset)$ en $(1, (1))$, i.e., el morfismo $(\bot, \mathrm{id}_1)\colon (1, (1)) \longrightarrow (2, (1, 2))$, obtenido a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\emptyset,\emptyset) \arrow[r, "(!,\emptyset)"] \arrow[d, "(!,\emptyset)"'] & (1,(1)) \arrow[d, "\perp^{\mathrm{h}} = \mathrm{ch}_{(!,\emptyset)} = (\perp, \mathrm{id}_1)"] \\
(1,(1)) \arrow[r, "(\top,(\top))"'] & (2,(1,2))
\end{tikzcd}$$

Negación. La negación, $\neg^{\mathrm{h}}$, es el carácter de $\perp^{\mathrm{h}}$, i.e., el endomorfismo $(\neg,(\top,!))$ de Ω^{h} obtenido a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
(1,(1)) \arrow[r, "(\perp,(\mathrm{id}_1))"] \arrow[d, "(!,(\mathrm{id}_1))"'] & (2,(1,2)) \arrow[d, "\neg^{\mathrm{h}} = (\neg,(\top,!))"] \\
(1,(1)) \arrow[r, "(\top,(\top))"'] & (2,(1,2))
\end{tikzcd}$$

La tabla de verdad para la negación es

	$\neg^{\mathrm{h}}$
$(\perp,(\mathrm{id}_1))$	$(\top,(\top))$
$(\top,(\perp))$	$(\perp,(\mathrm{id}_1))$
$(\top,(\top))$	$(\perp,(\mathrm{id}_1))$

Conjunción. La conjunción, $\wedge^{\mathrm{h}}$, es el carácter del morfismo $\langle \top^{\mathrm{h}}, \top^{\mathrm{h}} \rangle$, i.e., el morfismo $(\wedge,(!,!,!,\wedge))$, obtenido a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
(1,(1)) \arrow[r, "\langle \top^{\mathrm{h}}, \top^{\mathrm{h}} \rangle"] \arrow[d, "(!,(\mathrm{id}_1))"'] & (2,(1,2)) \times (2,(1,2)) \arrow[d, "\wedge^{\mathrm{h}} = (\wedge,(!,!,!,\wedge))"] \\
(1,(1)) \arrow[r, "(\top,(\top))"'] & (2,(1,2))
\end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que la tabla de verdad para la conjunción es

		$\wedge^{\mathrm{h}}$
$(\bot, (\mathrm{id}_1))$	$(\bot, (\mathrm{id}_1))$	$(\bot, (\mathrm{id}_1))$
$(\bot, (\mathrm{id}_1))$	$(\top, (\bot))$	$(\bot, (\mathrm{id}_1))$
$(\bot, (\mathrm{id}_1))$	$(\top, (\top))$	$(\bot, (\mathrm{id}_1))$
$(\top, (\bot))$	$(\bot, (\mathrm{id}_1))$	$(\bot, (\mathrm{id}_1))$
$(\top, (\bot))$	$(\top, (\bot))$	$(\top, (\bot))$
$(\top, (\bot))$	$(\top, (\top))$	$(\top, (\bot))$
$(\top, (\top))$	$(\bot, (\mathrm{id}_1))$	$(\bot, (\mathrm{id}_1))$
$(\top, (\top))$	$(\top, (\bot))$	$(\top, (\bot))$
$(\top, (\top))$	$(\top, (\top))$	$(\top, (\top))$

Disyunción. Para determinar la disyunción en **HSet**, $\vee^{\mathrm{h}}$, es necesario calcular el carácter de la imagen de la h-aplicación

$$[\langle \top^{\mathrm{h}}_{\Omega}, \mathrm{id}_{\Omega}\rangle, \langle \mathrm{id}_{\Omega}, \top^{\mathrm{h}}_{\Omega}\rangle] \colon \Omega^{\mathrm{h}} \amalg \Omega^{\mathrm{h}} \longrightarrow \Omega^{\mathrm{h}} \times \Omega^{\mathrm{h}}$$

Veamos pues en que consiste.

$$\Omega^{\mathrm{h}} \amalg \Omega^{\mathrm{h}} = (\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}, (1 \times \{0\}, 2 \times \{0\}, 1 \times \{1\}, 2 \times \{1\})$$

$$\langle \top^{\mathrm{h}}_{\Omega}, \mathrm{id}_{\Omega}\rangle = (\langle \top, \mathrm{id}_2\rangle, (\langle \top, \mathrm{id}_1\rangle, \langle \top_2, \mathrm{id}_1\rangle))$$
$$\langle \mathrm{id}_{\Omega}, \top^{\mathrm{h}}_{\Omega}\rangle = (\langle \mathrm{id}_2, \top\rangle, (\langle \mathrm{id}_1, \top\rangle, \langle \mathrm{id}_1, \top_2\rangle))$$

y, por tanto, $[\langle \top^{\mathrm{h}}_{\Omega}, \mathrm{id}_{\Omega}\rangle, \langle \mathrm{id}_{\Omega}, \top^{\mathrm{h}}_{\Omega}\rangle]$ es

$$([\langle \top_2, \mathrm{id}_2\rangle, \langle \mathrm{id}_2, \top_2\rangle], (\langle \top, \mathrm{id}_1\rangle \circ \mathrm{pr}_0, \langle \top_2, \mathrm{id}_2\rangle \circ \mathrm{pr}_0, \langle \mathrm{id}_1, \top\rangle \circ \mathrm{pr}_0, \langle \mathrm{id}_2, \top_2\rangle \circ \mathrm{pr}_0))$$

donde $[\langle \top_2, \mathrm{id}_2\rangle, \langle \mathrm{id}_2, \top_2\rangle]$ es la aplicación

$$\begin{aligned} 2 \amalg 2 &\longrightarrow 2 \times 2 \\ (0,0) &\longmapsto (1,0) \\ (1,0) &\longmapsto (1,1) \\ (0,1) &\longmapsto (0,1) \\ (1,1) &\longmapsto (1,1) \end{aligned}$$

La imagen de $[\langle \top^{\mathrm{h}}_{\Omega}, \mathrm{id}_{\Omega}\rangle, \langle \mathrm{id}_{\Omega}, \top^{\mathrm{h}}_{\Omega}\rangle]$ es entonces el h-conjunto

$$(\{(0,1),(1,0),(1,1)\}, (\{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(0,1),(1,0),(1,1)\}))$$

y $\vee^{\mathrm{h}}$ es la h-aplicación

$$(\vee, (!, \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_0, \vee))$$

Por tanto, la tabla de verdad para la disyunción es

		$\vee^{\mathrm{h}}$
$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\bot,(\mathrm{id}_1))$
$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\top,(\bot))$	$(\top,(\bot))$
$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\top,(\top))$	$(\top,(\top))$
$(\top,(\bot))$	$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\top,(\bot))$
$(\top,(\bot))$	$(\top,(\bot))$	$(\top,(\bot))$
$(\top,(\bot))$	$(\top,(\top))$	$(\top,(\top))$
$(\top,(\top))$	$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\top,(\top))$
$(\top,(\top))$	$(\top,(\bot))$	$(\top,(\top))$
$(\top,(\top))$	$(\top,(\top))$	$(\top,(\top))$

Implicación. La implicación en **HSet**, $\rightarrow^{\mathrm{h}}$, es el carácter del igualador $\mathrm{Eq}(\wedge^{\mathrm{h}},\mathrm{pr}_0)$. El igualador de los conjuntos de tipos en **Set** es el conjunto $\mathrm{Eq}(\wedge,\mathrm{pr}_0)=\{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, junto con la inyección canónica en 2×2, por lo que se necesita calcular el igualador en $\mathbf{Set}^{\mathrm{Eq}(\wedge,\mathrm{pr}_0)}$ del diagrama

$$(1\times 1, 1\times 2, 2\times 2)\ \underset{(!,!,\mathrm{pr}_0)}{\overset{(!,!,\wedge)}{\rightrightarrows}}\ (1,1,2)$$

que es el par $((1\times 1,1\times 2,\mathrm{Eq}(\wedge,\mathrm{pr}_0)),(\mathrm{id},\mathrm{id},\mathrm{in}))$. El carácter de $\mathrm{Eq}(\wedge^{\mathrm{h}},\mathrm{pr}_0)$ en **HSet** es entonces el morfismo

$$(\rightarrow,(1,1,!,\rightarrow))$$

donde 1 puede considerarse como la aplicación constantemente 1 o como la aplicación $\rightarrow$ restringida al dominio correspondiente. La tabla de verdad para la implicación es

		$\rightarrow^{\mathrm{h}}$
$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\top,(\top))$
$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\top,(\bot))$	$(\top,(\top))$
$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\top,(\top))$	$(\top,(\top))$
$(\top,(\bot))$	$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\bot,(\mathrm{id}_1))$
$(\top,(\bot))$	$(\top,(\bot))$	$(\top,(\top))$
$(\top,(\bot))$	$(\top,(\top))$	$(\top,(\top))$
$(\top,(\top))$	$(\bot,(\mathrm{id}_1))$	$(\bot,(\mathrm{id}_1))$
$(\top,(\top))$	$(\top,(\bot))$	$(\top,(\bot))$
$(\top,(\top))$	$(\top,(\top))$	$(\top,(\top))$

Si denotamos mediante 0 a $(\perp, \mathrm{id}_1)$, mediante 1 a $(\top, (\perp))$ y mediante 2 a $(\top, (\top))$ las tablas de verdad anteriores se pueden reescribir como:

	$\neg^{\mathrm{h}}$
0	2
1	0
2	0

		$\wedge^{\mathrm{h}}$
0	0	0
0	1	0
0	2	0
1	0	0
1	1	1
1	2	1
2	0	0
2	1	1
2	2	2

		$\vee^{\mathrm{h}}$
0	0	0
0	1	1
0	2	2
1	0	1
1	1	1
1	2	2
2	0	2
2	1	2
2	2	2

		$\to^{\mathrm{h}}$
0	0	2
0	1	2
0	2	2
1	0	0
1	1	2
1	2	2
2	0	0
2	1	1
2	2	2

y resultan de considerar el álgebra de Heyting sobre $\underline{3} = (3, \leq)$. La lógica proposicional definida por estas tablas es la lógica trivalorada de Heyting ([Hey30] y [Hey56]), una lógica desarrollada por Heyting en la búsqueda de una formalización de los principios intuicionistas. En ella, $\neg\neg A \to A$ no es una tautología, así como no lo es la ley del tercio excluso $A \vee \neg A$. Sin embargo, las expresiones $A \to \neg\neg A$ y $\neg A \vee \neg\neg A$ sí son tautologías, por lo que la categoría **HSet** es de De Morgan.

Una vez establecida la lógica proposicional del topos **HSet** se puede determinar, para cada h-conjunto (S, A), el álgebra de sus subobjetos. En ésta, las operaciones de union e intersección coinciden con las definidas anteriormente para h-conjuntos arbitrarios. Se tienen, además, las operaciones inducidas por los morfismos $\neg^{\mathrm{h}}$ y $\to^{h}$. En particular, si (S, A) es un sub-h-conjunto de (T, B), el **complemento** en (S, A) de (T, B), $-(T, B)$, es $(S - T, B\restriction_{S-T})$ con $B\restriction_{S-T} = (B_s)_{s \in S-T}$, con lo que se puede comprobar que, en general, no vale la ley de la doble negación ni la de tercio excluso.

La equivalencia de los topoi HSet y $\mathbf{Set}^{\to}$.

La categoría **HSet** se ha obtenido como la *suma* de las diversas categorías de S-conjuntos a través de la construcción de Grothendieck, y es la formalización adecuada cuando se consideran los conjuntos heterogéneos como familias de conjuntos indexadas por los conjuntos de tipos. Para los conjuntos heterogéneos considerados como cotas inferiores de su conjunto de tipos existe una construcción similar, aunque en este caso es necesario aplicar la construcción de Grothendieck sobre un pseudo-functor. La categoría resultante es, esencialmente, la categoría de flechas sobre **Set**.

Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T$ y $B\colon Y \longrightarrow T$ un T-conjunto. En el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pb}(\varphi, B) \arrow[r, "\mathrm{p}_1"] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"'] & Y \arrow[d, "B"] \\
S \arrow[r, "\varphi"'] & T
\end{tikzcd}$$

el producto fibrado $\mathrm{Pb}(\varphi, B)$ se puede considerar como un S-conjunto a través de la proyección p_0. Cuando esta construcción se extiende a los morfismos, se obtiene un functor $\mathrm{Pb}(\varphi, \cdot\,)$ de $\mathbf{Set} \downarrow T$ en $\mathbf{Set} \downarrow S$, que corresponde, cuando se consideran los conjuntos heterogéneos como familias, al functor Δ_φ. Este functor es adjunto por la derecha del functor $\mathbf{Set} \downarrow \cdot$, que a todo S-conjunto $A\colon X \longrightarrow S$ le asocia el T-conjunto $\varphi \circ A$ y que corresponde al functor $\coprod_\varphi$. A su vez, en virtud del teorema fundamental de los topoi (v. [Fre72]), el functor $\mathrm{Pb}(\varphi, \cdot)$ tiene asimismo un adjunto por la derecha, que se corresponde con el functor $\prod_\varphi$.

1.3.33. Proposición. Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T$ un morfismo en **Set**. Entonces φ determina los siguientes functores:

1. $\mathrm{Pb}(\varphi, \cdot)$ es el functor de $\mathbf{Set} \downarrow T$ en $\mathbf{Set} \downarrow S$ definido como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \downarrow T \arrow[rr, "\mathrm{Pb}(\varphi, \cdot)"] & & \mathbf{Set} \downarrow S \\
(Y, B) \arrow[d, "f"'] & & (\mathrm{Pb}(\varphi, B), p_0) \arrow[d, "\mathrm{Pb}(\varphi, f)"] \\
(Y', B') & \longmapsto & (\mathrm{Pb}(\varphi, B'), p'_0)
\end{tikzcd}$$

en donde $\mathrm{Pb}(\varphi, f)$ se obtiene en virtud de la propiedad universal del producto fibrado de φ y B

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pb}(\varphi, B') \arrow[rrr, "p'_1"] \arrow[dr, "\mathrm{Pb}(\varphi, f)"] \arrow[ddr, "p'_0"'] & & & Y' \arrow[dl, "f"'] \arrow[ddl, "B'"] \\
& \mathrm{Pb}(\varphi, B) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"] & Y \arrow[d, "B"'] & \\
& S \arrow[r, "\varphi"'] & T &
\end{tikzcd}$$

2. $\mathrm{Set}\downarrow\varphi$ es el functor de $\mathbf{Set}\downarrow S$ en $\mathbf{Set}\downarrow T$ definido como:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Set}^T & \xrightarrow{\mathrm{Set}\downarrow\varphi} & \mathbf{Set}^S \\
(X,A) & & (X,\varphi\circ A) \\
f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow f \\
(X',A') & & (X',\varphi\circ A')
\end{array}
$$

Además, el functor $\mathrm{Set}\downarrow\varphi$ es adjunto por la izquierda del functor $\mathrm{Pb}(\varphi,\cdot)$. □

Si $\varphi\colon S\longrightarrow T$ y $g\colon T\longrightarrow U$ son morfismos en **Set**, el functor $\mathrm{Pb}(\varphi,\cdot)\circ\mathrm{Pb}(\psi,\cdot)$ es naturalmente isomorfo al functor $\mathrm{Pb}(\psi\circ\varphi,\cdot)$. Este isomorfismo es subyacente a un pseudo-functor contravariante, Pb de **Set** en **Cat**, que asigna a cada morfismo $\varphi\colon S\longrightarrow T$ el functor $\mathrm{Pb}(\varphi,\cdot)\colon \mathbf{Set}\downarrow T\longrightarrow\mathbf{Set}\downarrow S$. Asimismo, de **Set** en **Cat** se tiene un functor covariante $\mathrm{Set}\downarrow\cdot$, que a un morfismo $\varphi\colon S\longrightarrow T$ le asigna el functor $\mathrm{Set}\downarrow\varphi$, de $\mathbf{Set}\downarrow S$ en $\mathbf{Set}\downarrow T$. El pseudo-functor Pb es el análogo del functor Set y el functor $\mathrm{Set}\downarrow\cdot$ el análogo del pseudo-functor $\mathrm{Set}^{\mathrm{II}}$.

La construcción de Grothendieck aplicada a Pb determina la categoría con objetos los pares $(S,(X,A))$ con $A\colon X\longrightarrow S$ y con morfismos de $(S,(X,A))$ en $(T,(Y,B))$ los pares (φ,f) tales que $\varphi\colon S\longrightarrow T$ y f es un morfismo en $\mathbf{Set}\downarrow S$ de (X,A) en $(\mathrm{Pb}(\varphi,B),\mathrm{p}_0)$, i.e., $f\colon X\longrightarrow\mathrm{Pb}(\varphi,B)$ y $\mathrm{p}_0\circ f=A$.

En virtud de la adjunción $\mathrm{Set}\downarrow\varphi\dashv\mathrm{Pb}(\varphi,\cdot)$, dar un morfismo f en $\mathbf{Set}\downarrow S$ de (X,A) en $(\mathrm{Pb}(\varphi,B),\mathrm{p}_0)$ equivale a dar un $\widetilde{f}$ en $\mathbf{Set}\downarrow T$ de $\varphi\circ A$ en B, i.e., $\widetilde{f}\colon X\longrightarrow Y$ es tal que $B\circ\widetilde{f}=\varphi\circ A$. Por consiguiente, los objetos de la categoría $\int^{\mathbf{Set}}\mathrm{Pb}$ son, esencialmente, flechas en **Set** y sus morfismos, cuadrados conmutativos, por lo que la categoría $\int^{\mathbf{Set}}\mathrm{Pb}$ es isomorfa a $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$.

Si adoptamos el punto de vista de los conjuntos heterogéneos como aplicaciones, éstos constituyen los objetos de la categoría $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$. Si A es un objeto de $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ entonces $A\colon \mathrm{dom}(A)\longrightarrow\mathrm{cod}(A)$ donde $\mathrm{dom}(A)$ es el *conjunto subyacente* y $\mathrm{cod}(A)$ el *conjunto de tipos* del conjunto heterogéneo A. El functor *codominio* de la categoría $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ en **Set** que a una aplicación le asigna su codominio y a un morfismo de aplicaciones su segunda coordenada, constituye una bifibración sobre **Set**. La equivalencia entre conjuntos heterogéneos como familias y como aplicaciones se refleja formalmente en la equivalencia de las categorías **HSet** y $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$.

1.3.34. Proposición. Las categorías **HSet** y $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ son equivalentes.

Demostración. Sea P el functor definido como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{HSet} \arrow[rr, "P"] & & \mathbf{Set}^{\to} & \\
(S,A) \arrow[d, "{(\varphi,f)}"'] & & \coprod A \arrow[r, "{[\kappa_s^A]_{s\in S}}"] \arrow[d, "\mathrm{in}\circ\coprod f"'] & S \arrow[d, "\varphi"] \\
(T,B) & & \coprod B \arrow[r, "{[\kappa_t^B]_{t\in T}}"'] & T
\end{tikzcd}$$

donde in es la inclusión canónica de $\coprod B_\varphi$ en $\coprod B$.

Sea Q el functor definido como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\to} \arrow[rr, "Q"] & & \mathbf{HSet} \\
A\colon X \to S \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & (A^{-1}[s])_{s\in S} \arrow[d, "(f\restriction s)_{s\in S}"] \\
B\colon Y \to T & & (B^{-1}[s])_{s\in S}
\end{tikzcd}$$

donde $f\restriction s$ es la restricción de f al dominio y codominio correspondiente. Los functores definidos son cuasi-inversos. □

Puesto que las categorías $\mathbf{Set}^{\to}$ y **HSet** son equivalentes, son indistinguibles mediante propiedades definidas salvo isomorfismo, y, en particular, sus lógicas son idénticas. Sin embargo, resulta interesante considerar directamente la estructura de topos en $\mathbf{Set}^{\to}$, puesto que ilustra algunos aspectos de la estructura de topos en **HSet**, y en particular, la forma del objeto de valores de verdad.

Productos. El producto de un familia de aplicaciones $(A^i\colon A_0^i \to S^i)_{i\in I}$ es la aplicación $\langle A^i \circ \mathrm{pr}_i\rangle_{i\in I}$ obtenida a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} A_0^i \arrow[d, "\langle A^i\circ \mathrm{pr}_i\rangle_{i\in I}"'] \arrow[dr, "A^i\circ \mathrm{pr}_i"] & \\
\prod_{i\in I} S^i \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & S^i
\end{tikzcd}$$

El objeto final es la aplicación $\mathrm{id}_1\colon 1 \to 1$.

Igualadores. En el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Eq}(f,g) \arrow[r, "\mathrm{eq}(f,g)"] \arrow[d, "A\upharpoonright \mathrm{Eq}(f,g)"'] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "A"'] & Y \arrow[d, "B"] \\
\mathrm{Eq}(\varphi,\psi) \arrow[r, "\mathrm{eq}(\varphi,\psi)"'] & S \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & T
\end{tikzcd}
$$

(f,φ), y (g,ψ) son morfismos de A en B. Su igualador es el morfismo $(\mathrm{eq}(f,g), \mathrm{eq}(\varphi,\psi))$ con $\mathrm{eq}(f,g)$ el igualador de f y g en **Set** y $\mathrm{eq}(\varphi,\psi)$ el igualador de φ y ψ en **Set**.

Productos fibrados. El producto fibrado se obtiene de manera similar. En el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Pb}(f,g) \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\mathrm{Pb}(\Phi,\Psi)"] \arrow[dd, "p'"'] & & Y \arrow[dr, "B"] \arrow[dd, "g" near start] & \\
& \mathrm{Pb}(\varphi,\psi) \arrow[rr, crossing over, "q" near end] & & T \arrow[dd, "\psi"] \\
X \arrow[rr, "f" near end] \arrow[dr, "A"'] & & Z \arrow[dr, "C"] & \\
& S \arrow[rr, "\varphi"'] \arrow[from=uu, crossing over, "q'" near start] & & U
\end{tikzcd}
$$

$\Phi = (f,\varphi)\colon A \longrightarrow C$ y $\Psi = (g,\psi)\colon B \longrightarrow C$ son morfismos en $\mathbf{Set}^{\to}$ y $\mathrm{Pb}(f,g)$ y $\mathrm{Pb}(\varphi,\psi)$ son los productos fibrados correspondientes en **Set**. El producto fibrado de Φ y Ψ es $\mathrm{Pb}(\Phi,\Psi)$, la aplicación determinada por la propiedad universal del producto fibrado de φ y ψ.

Colímites. Puesto que la construcción de los colímites en $\mathbf{Set}^{\to}$ es, esencialmente, la misma que la de los límites, no la desarrollamos.

Exponenciales. Sean $A\colon X \longrightarrow S$ y $B\colon Y \longrightarrow T$ dos objetos en $\mathbf{Set}^{\to}$. Entonces B^A es la aplicación de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\to}}(A,B)$ en T^S que a $(f,\varphi)\colon A \longrightarrow B$ le asigna φ. La evaluación $\mathrm{ev}_{A,B}$ es la diagonal del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,B)\times X \arrow[r] \arrow[d, "\langle B^A\circ \mathrm{pr}_0, A\circ \mathrm{pr}_1\rangle"'] & Y \arrow[d, "B"] \\
T^S \times S \arrow[r, "\mathrm{ev}_{S,T}"'] & T
\end{tikzcd}
$$

siendo la flecha superior la aplicación que a $((f,\varphi),a)$ le asigna $f(a)$.

Clasificador de subobjetos. El objeto de valores de verdad en $\mathbf{Set}^{\to}$ es la aplicación

$$\Omega^{\to}\begin{cases} 3 \longrightarrow 2 \\ 2 \longmapsto 1 \\ 1 \longmapsto 1 \\ 0 \longmapsto 0 \end{cases}$$

Sea $\kappa_2\colon 1 \longrightarrow 3$ la aplicación que a 0 le asigna 2. El morfismo verdad en $\mathbf{Set}^{\to}$ es $\top^{\to} = (\kappa_2, \top)\colon \mathrm{id}_1 \longrightarrow \Omega^{\to}$.

Sea $(f,\varphi)\colon A \longrightarrow B$ un mónica en $\mathbf{Set}^{\to}$, con $A\colon X \longrightarrow S$ y $B\colon Y \longrightarrow T$. El diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "A"'] & & Y \arrow[dr, "B"] & \\ & S \arrow[rr, "\varphi"'] & & T \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathbf{Set}$. Tomando f y φ como inclusiones, se tiene que, para cada $y \in Y$, una de las tres condiciones siguientes es posible:

1. $y \in X$, y, por consiguiente, $B(y) \in S$.

2. $y \notin X$ pero $B(y) \in S$.

3. $y \notin X$ y $B(y) \notin S$.

Así pues, un subobjeto de un objeto de $\mathbf{Set}^{\to}$ viene determinado por la selección de un subconjunto de sus tipos y, para cada uno de los tipos seleccionados, un subconjunto del conjunto de los elementos del tipo en cuestión. Sea ch_f^{φ} la aplicación definida como

$$\mathrm{ch}_f^{\varphi}\begin{cases} Y \longrightarrow 3 \\ y \longmapsto \begin{cases} 2, & \text{si se cumple 1;} \\ 1, & \text{si se cumple 2;} \\ 0, & \text{si se cumple 3.} \end{cases} \end{cases}$$

y considérese el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "A"] \arrow[dd, "!_X"'] & & Y \arrow[dr, "B"] \arrow[dd, "\mathrm{ch}_f^{\varphi}"] & \\
& S \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "!_S"] & & T \arrow[dd, "\mathrm{ch}_{\varphi}"] \\
1 \arrow[rr, "\kappa_2"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_1"] & & \Omega \arrow[dr, "\Omega^{\to}"] & \\
& 1 \arrow[rr, "\top"] & & 2
\end{tikzcd}
$$

Entonces $\mathrm{ch}_{(f,\varphi)} = (\mathrm{ch}_f^{\varphi}, \mathrm{ch}_{\varphi})$ es el carácter del morfismo (f, φ) y

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "{(f,\varphi)}"] \arrow[d, "{(!_X, !_S)}"'] & B \arrow[d, "\mathrm{ch}_{(f,\varphi)}"] \\
\mathrm{id}_1 \arrow[r, "\top^{\to}"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado en $\mathbf{Set}^{\to}$.

El topos $\mathbf{Set}^{\to}$ es la categoría de functores desde (la categoría asociada al preorden) $\underline{2}$ hasta **Set**. Para cada preorden $\underline{P}$, la validez en el topos $\mathbf{Set}^{P}$ equivale a la validez en $\underline{P}$ para la semántica de Kripke. Se cumple entonces que el conjunto de sentencias válidas en $\mathbf{Set}^{\to}$ es idéntico al conjunto de sentencias Kripke-válidas en $\underline{2}$. La validez para la semántica de Kripke sobre $\underline{2}$ equivale a la validez en el álgebra de Heyting de los subconjuntos hereditarios de $\underline{2}$, que es, esencialmente, $\underline{3}$, un resultado ya obtenido cuando considerábamos la lógica de **HSet**.

1.4 Espacios de clausura heterogéneos.

En esta sección se estudian los conceptos de sistema y operador clausura para los conjuntos heterogéneos, que generalizan a los correspondientes de los conjuntos ordinarios, puesto que surgen, de manera natural, en el estudio posterior de algunas propiedades de las álgebras heterogéneas.

1.4.1. Definición. Sea A un S-conjunto. Un **sistema de clausura heterogéneo** sobre A es un subconjunto $\mathcal{C}$ de $\mathrm{Sub}(A)$ tal que:

1. $A \in \mathcal{C}$.

2. Para cada $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ si $\mathcal{D} \neq \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{D} \in \mathcal{C}$.

El conjunto de los sistemas de clausura heterogéneos sobre A se denota mediante $\mathrm{Cls}(A)$.

1.4.2. Proposición. Sea A un S-conjunto. Entonces cada sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A, determina un retículo completo, $\underline{\mathcal{C}}$, cuando se le considera ordenado por la S-inclusión.

Demostración. Si $(C^i)_{i \in I}$ es una familia no vacía en $\mathcal{C}$, el ínfimo de la familia es la S-intersección de sus miembros

$$\bigwedge\nolimits_{i \in I} C^i = \bigcap\nolimits_{i \in I} C^i$$

y su supremo es el ínfimo de las cotas superiores de la S-unión de $(C^i)_{i \in I}$

$$\bigvee\nolimits_{i \in I} C^i = \bigcap \left\{ T \in \mathcal{C} \mid \bigcup\nolimits_{i \in I} C^i \subseteq_S T \right\}$$

El máximo del retículo es A y el mínimo es $\bigcap \mathcal{C}$. □

1.4.3. Proposición. El conjunto ordenado $\underline{\mathrm{Cls}}(A) = (\mathrm{Cls}(A), \subseteq_S)$ es un retículo completo.

Demostración. Sea $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ una familia no vacía en $\mathrm{Cls}(A)$. El ínfimo de la familia es su intersección,

$$\bigwedge\nolimits_{i \in I} \mathcal{C}_i = \bigcap\nolimits_{i \in I} \mathcal{C}_i$$

y su supremo es

$$\bigvee\nolimits_{i \in I} \mathcal{C}_i = \bigcap \{ \mathcal{C} \in \mathrm{Cls}(A) \mid \bigcup\nolimits_{i \in I} \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C} \}$$

El máximo sistema de clausura sobre A es $\mathrm{Sub}(A)$, y el mínimo es $\{A\}$. □

1.4.4. Definición. Un **operador clausura heterogéneo** sobre un S-conjunto A es una endoaplicación J de $\mathrm{Sub}(A)$ tal que, para cada $X, Y \subseteq_S A$, se cumplen las condiciones siguientes:

1. J es extensivo, i.e., $X \subseteq_S \mathrm{J}(X)$
2. J es isótono, i.e., si $X \subseteq_S Y$ entonces $\mathrm{J}(X) \subseteq_S \mathrm{J}(Y)$
3. J es idempotente, i.e., $\mathrm{J}(\mathrm{J}(X)) = \mathrm{J}(X)$

El conjunto de los operadores clausura heterogéneos sobre A se denota $\mathrm{Clop}(A)$. Si J es un operador clausura heterogéneo sobre A, a los puntos fijos de J, i.e., a los $X \subseteq_S A$ tales que $X = J(X)$, los denominamos *J-cerrados*. Además, al conjunto de los operadores clausura heterogéneos sobre A lo denotamos por $\mathrm{Clop}(A)$, y si J y K son dos operadores clausura heterogéneos sobre A, decimos que $\mathrm{J} \leq \mathrm{K}$ si, para todo $X \subseteq_S A$, $\mathrm{J}(X) \subseteq_S \mathrm{K}(X)$.

1.4.5. Proposición. El conjunto ordenado $\underline{\mathrm{Clop}}(A) = (\mathrm{Clop}(A), \leq)$ es un retículo completo.

Demostración. Si $(\mathrm{J}^i)_{i\in I}$ es una familia no vacía en $\mathrm{Clop}(A)$, el ínfimo viene dado, para cada $X \subseteq_S A$, como

$$\bigwedge\nolimits_{i\in I} \mathrm{J}^i(X) = \bigcap\nolimits_{i\in I} \mathrm{J}^i(X)$$

y su supremo, como

$$\bigvee\nolimits_{i\in I} \mathrm{J}^i = \bigwedge \left\{\mathrm{J} \in \mathrm{Clop}(A) \mid \forall i \in I, \mathrm{J}^i \leq \mathrm{J}\right\}$$

El máximo es el operador clausura totalmente inconsistente, κ_A, que a cualquier $X \subseteq_S A$ le asigna A, y el mínimo es la identidad. □

1.4.6. Proposición. Sea A un S-conjunto. Entonces hay un antiisomorfismo (natural) entre el conjunto ordenado de los sistemas de clausura heterogéneos sobre A y el conjunto ordenado de los operadores clausura heterogéneos sobre A.

Demostración. Veamos, en primer lugar, que si J es un operador clausura heterogéneo, entonces, siendo $\mathrm{Fix}(\mathrm{J}) = \{X \subseteq_S A \mid \mathrm{J}(X) = X\}$, el conjunto $\mathcal{C}^{\mathrm{J}} = \mathrm{Fix}(\mathrm{J})$ es un sistema de clausura heterogéneo. En efecto, si $(\mathrm{J}(X^i))_{i\in I}$ es una familia no vacía en $\mathcal{C}^{\mathrm{J}}$, entonces tenemos que, para cada $i \in I$, se cumple que

$$\bigcap\nolimits_{i\in I} \mathrm{J}(X^i) \subseteq \mathrm{J}(X^i)$$

y, por ser $\mathcal{C}^{\mathrm{J}}$ isótono e idempotente,

$$\mathrm{J}(\bigcap\nolimits_{i\in I} \mathrm{J}(X^i)) \subseteq \mathrm{J}(X^i).$$

Entonces

$$\mathrm{J}(\bigcap\nolimits_{i\in I} \mathrm{J}(X^i)) = \bigcap\nolimits_{i\in I} \mathrm{J}(X^i)$$

puesto que J es idempotente, y $\bigcap_{i\in I} \mathrm{J}(X^i)$ es un punto fijo de J y, por tanto, pertenece a $\mathcal{C}^{\mathrm{J}}$. Como $\mathrm{J}(A) = A$, $\mathrm{Fix}(\mathrm{J})$ es un sistema de clausura.

Por otra parte, si $\mathcal{C}$ es un sistema de clausura heterogéneo, entonces la aplicación $\mathrm{J}^{\mathcal{C}}$, definida como:

$$\mathrm{J}^{\mathcal{C}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto \bigcap\{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\}, \end{cases}$$

es un operador clausura heterogéneo. En efecto, el operador $\mathrm{J}^{\mathcal{C}}$ es extensivo, ya que

$$X \subseteq \bigcap\{Y \subseteq A \mid Y \supseteq X\} \subseteq \bigcap\{Y \subseteq \mathcal{C} \mid Y \supseteq X\} = \mathrm{J}^{\mathcal{C}}(X),$$

el operador $\mathrm{J}^{\mathcal{C}}$ es isótono, ya que si $X \subseteq_S Y$, entonces $\{T \in \mathcal{C} \mid X \subseteq_S T\}$ contiene a $\{T \in \mathcal{C} \mid Y \subseteq_S T\}$, luego $\bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid X \subseteq_S T\} \subseteq \bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid Y \subseteq_S T\}$, por lo tanto $\mathrm{J}^{\mathcal{C}}(X) \subseteq_S \mathrm{J}^{\mathcal{C}}(Y)$.

Por último, $\mathrm{J}^{\mathcal{C}}$ es idempotente, debido a que por estar $\{T \in \mathcal{C} \mid X \subseteq_S T\}$ incluido en $\{T \in \mathcal{C} \mid \mathrm{J}^{\mathcal{C}}(X) \subseteq_S T\}$, se cumple que $\bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid X \subseteq_S T\}$ contiene a $\bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid \mathrm{J}^{\mathcal{C}}(X) \subseteq_S T\}$, luego $\mathrm{J}^{\mathcal{C}}(X) = \mathrm{J}^{\mathcal{C}}(\mathrm{J}^{\mathcal{C}}(X))$.

Las aplicaciones $\mathrm{J} \mapsto \mathcal{C}^{\mathrm{J}}$ y $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^{\mathrm{J}}$ son inversas una de la otra, y, por tanto, son aplicaciones biyectivas.

Queda por demostrar que las biyecciones son antihomomorfismos, i.e., que invierten el orden. Supongamos que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Entonces

$$\mathrm{J}^{\mathcal{C}}(X) = \bigcap\{T \in \mathcal{C} \mid T \supseteq X\} \supseteq \bigcap\{T \in \mathcal{D} \mid T \supseteq X\} = \mathrm{J}^{\mathcal{D}}(X)$$

luego $\mathrm{J}^{\mathcal{C}} \geq \mathrm{J}^{\mathcal{D}}$. Supongamos ahora que $\mathrm{J} \leq \mathrm{K}$. Entonces si $T \in \mathcal{C}_{\mathrm{K}}$, se tiene que $T = \mathrm{K}(X)$, para algún $X \subseteq B$. Pero

$$\mathrm{JK}(X) \subseteq \mathrm{KK}(X) = \mathrm{K}(X)$$

luego $T \in \mathcal{C}^{\mathrm{J}}$. □

1.4.7. Proposición. Sea A un S-conjunto, $\mathrm{J} \in \mathrm{Clop}(A)$ y $(X^i)_{i\in I}$ una familia en $\mathrm{Sub}(A)$. Entonces

$$\bigvee\nolimits_{i\in I}^{\mathrm{Fix(J)}} \mathrm{J}(X^i) = \mathrm{J}(\bigcup\nolimits_{i\in I} X^i)$$

Demostración. Si $T \in \mathrm{Fix(J)}$ entonces T contiene a $\bigcup_{i\in I} X^i$ exactamente si T contiene a $\bigcup_{i\in I} \mathrm{J}(X^i)$, puesto que para cada cerrado T se tiene que $T \supseteq X$ si y sólo si $T \supseteq \mathrm{J}(X)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(\bigcup\nolimits_{i\in I} X^i) &= \bigcap\{T \in \mathcal{C}^{\mathrm{J}} \mid T \supseteq \bigcup\nolimits_{i\in I} X^i\} \\ &= \bigcap\{T \in \mathcal{C}^{\mathrm{J}} \mid T \supseteq \bigcup\nolimits_{i\in I} \mathrm{J}(X^i)\} \\ &= \bigvee\nolimits_{i\in I}^{\mathcal{C}^{\mathrm{J}}} \mathrm{J}(X^i) \end{aligned}$$

□

Espacios de clausura algebraicos.

1.4.8. Definición. Sea A un S-conjunto y $\mathcal{C}$ un subconjunto de $\mathrm{Sub}(A)$. Decimos que $\mathcal{C}$ es **inductivo** si está cerrado bajo S-uniones de familias no vacías en $\mathcal{C}$ dirigidas superiormente, i.e., si para cada $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y para cada X e Y en $\mathcal{F}$, existe un $Z \in \mathcal{F}$ con $X \cup Y \subseteq_S Z$, se tiene que $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{C}$. El conjunto de los $\mathcal{C}$ en $\mathrm{Sub}(A)$ que son inductivos se denota como $\mathrm{Ind}(A)$.

La condición anterior es equivalente a que $\mathcal{C}$ esté cerrado bajo S-uniones de cadenas no vacías en $\mathcal{C}$, o bajo S-uniones de partes no vacías bien ordenadas.

1.4.9. Proposición (Birkhoff). Sea $(\mathcal{F}^i)_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos inductivos sobre un S-conjunto A. Entonces $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}^i$ es un sistema inductivo sobre A.

1.4.10. Definición. Sea J un operador clausura sobre un S-conjunto A y m un cardinal. Entonces $\mathrm{J}_{<m}$ es el operador definido como

$$\mathrm{J}_{<m} \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad\ \longmapsto \bigcup\{\mathrm{J}(Y) \mid Y \in \mathrm{Sub}_{<m}(X)\} \end{cases}$$

De manera similar se define los operadores $\mathrm{J}_{\leq m}$ y J_m, siendo este último el que a un X le asigna $\bigcup\{\mathrm{J}(Y) \mid Y \in \mathrm{Sub}_m(X)\}$. El operador $\mathrm{J}_{<\aleph_0}$ se denota también como J_{f}.

1.4.11. Definición. Sea A un S-conjunto, $\mathrm{J} \in \mathrm{Clop}(A)$ y α un ordinal. Entonces J^α es la endoaplicación de $\mathrm{Sub}(A)$ definida, por recursión, y para cada S-subconjunto X de A, como:

$$\mathrm{J}^\alpha(X) = \begin{cases} X, & \text{si } \alpha = 0; \\ \mathrm{J}(\mathrm{J}^\beta(X)), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ \bigcup\{\mathrm{J}^\beta(X) \mid \beta < \alpha\}, & \text{si } \alpha \text{ es un ordinal límite.} \end{cases}$$

1.4.12. Definición. Sea A un S-conjunto, $\mathrm{J} \in \mathrm{Clop}(A)$ y m un cardinal. Entonces J es m-ario si $\mathrm{J} = \mathrm{J}^\alpha_{\leq m}$, para algún ordinal α.

1.4.13. Definición. Sea A un S-conjunto. Un operador $\mathrm{J}\colon \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A)$ es **uniforme** si, dados dos sub-S-conjuntos X, $Y \subseteq_S A$, si $\mathrm{supp}(X) = \mathrm{supp}(Y)$, entonces $\mathrm{supp}(\mathrm{J}(X)) = \mathrm{supp}(\mathrm{J}(Y))$.

Para cada operador clausura uniforme J sobre un S-conjunto A, se puede definir un operador clausura (homogéneo) Ex^{J} sobre S, que a un subconjunto $T \subseteq S$ le asigne el soporte de la clausura de un S-conjunto con soporte T. La elección de un conjunto tal es arbitraria a causa de la uniformidad del operador. Una elección posible es el S-conjunto $A{\restriction_T}$ que en su coordenada s-ésima es el conjunto

$$(A{\restriction_T})_s = \begin{cases} A_s & \text{si } s \in T \\ \emptyset & \text{si } s \notin T \end{cases}$$

cuyo soporte es obviamente el conjunto T.

1.4.14. Proposición. Sea A un S-conjunto, J un operador clausura uniforme sobre A y Ex^{J} la aplicación definida como:

$$\mathrm{Ex}^{\mathrm{J}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(S) \longrightarrow \mathrm{Sub}(S) \\ \quad T \quad\; \longmapsto \mathrm{supp}(J(A{\restriction_T})) \end{cases}$$

Entonces Ex^{J} es un operador clausura sobre S. Además, $\mathrm{Ex}^{\mathrm{J}_{\mathrm{f}}} \leq \mathrm{Ex}^{\mathrm{J}}$ □

1.4.15. Definición. Sea A un S-conjunto, J un operador clausura sobre A e $Y \in \mathrm{Fix}(\mathrm{J})$.

1. Un sub-S-conjunto X de A es un S-conjunto de **generadores** para Y si $\mathrm{J}(X) = Y$.

2. Y está **finitamente generado** (resp., **numerablemente generado**) si existe un S-conjunto de generadores finito (resp., numerable) para Y. En general, si m es un cardinal, Y está $<m$**-generado** si existe un S-conjunto de generadores de cardinalidad estrictamente menor que m para Y.

3. X es un S-conjunto de **generadores minimal** para Y si genera Y y ningún sub-S-conjunto estricto de X genera Y.

1.4.16. Definición. Sea A un S-conjunto y $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Sub}(A)$. Decimos que $\mathcal{F}$ es un **sistema de clausura algebraico** sobre A, si $\mathcal{F}$ es un sistema de clausura sobre A y si para cada familia no vacía dirigida superiormente $(X^i)_{i\in I}$ en $\mathcal{F}$, $\bigcup_{i\in I} X^i \in \mathcal{F}$. Al conjunto de los sistemas de clausura algebraicos sobre A lo denotamos por $\mathrm{ACls}(A)$.

1.4.17. Definición. Sea A un S-conjunto y $J\colon \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A)$. Decimos que J es un **operador clausura algebraico heterogéneo** sobre A, si J es un operador clausura sobre A y para cada familia no vacía dirigida superiormente $(X^i)_{i\in I}$ en $\mathrm{Sub}(A)$, se cumple que $J\big(\bigcup_{i\in I} X^i\big) = \bigcup_{i\in I} J(X^i)$. Al conjunto de los operadores clausura algebraicos sobre A lo denotamos por $\mathrm{AClop}(A)$.

1.4.18. Proposición. Sea A un S-conjunto y J un operador clausura heterogéneo sobre A. Entonces J es algebraico exactamente si $\mathcal{C}^{\mathrm{J}}$ es algebraico.

Demostración. Supongamos que J sea algebraico y $\mathcal{F}$ una familia en $\mathcal{C}^{\mathrm{J}}$ dirigida superiormente. Sea $s \in S$ y $a \in \mathrm{J}(\bigcup \mathcal{F})_s$. Por ser J algebraico,

$$\mathrm{J}(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \{\mathrm{J}(Y) \mid Y \in \mathrm{Sub_f}(\bigcup \mathcal{F})\}$$

luego existe una S-parte finita Y de $\bigcup \mathcal{F}$ tal que $a \in \mathrm{J}(Y)_s$. Luego para cada $t \in S$ y cada $y \in Y_t$ existe un $X^{t,y} \in \mathcal{F}$ tal que $y \in X^{t,y}$ y, puesto que $\mathcal{F}$ está dirigido, existe un Z en $\mathcal{F}$ tal que $Y \subseteq Z$. Entonces $a \in \mathrm{J}(Y)_s \subseteq \mathrm{J}(Z)_s = Z_s \subseteq \bigcup \mathcal{F}_s$. Por lo tanto, $\mathrm{J}(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \mathcal{F}$.

Si $\mathcal{C}^{\mathrm{J}}$ es algebraico, la familia $\mathcal{F} = \{\mathrm{J}(Y) \mid Y \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{f}(X)}\}$ está dirigida superiormente, luego $\mathrm{J}(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \mathcal{F}$. Pero entonces, como $X \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, se tiene que $\mathrm{J}(X) \subseteq \mathrm{J}(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup \mathcal{F} \subseteq \mathrm{J}(X)$. Por tanto, J es algebraico. □

1.4.19. Proposición. Un operador clausura heterogéneo J sobre A es algebraico si $\mathrm{J} = \mathrm{J_f}$, i.e., si para cada $X \subseteq_S A$, se cumple que $\mathrm{J}(X) = \bigcup_{Y \in \mathrm{Sub_f}(X)} \mathrm{J}(Y)$.

1.4.20. Proposición. Sea J un operador clausura algebraico sobre un S-conjunto A. Si $X \in \mathrm{Fix}(\mathrm{J})$ está finitamente generado entonces todo S-conjunto de generadores para X contiene un S-conjunto de generadores finito para X, i.e., para cada $Y \subseteq A$ con $\mathrm{J}(Y) = X$, existe un $F \in \mathrm{Sub_f}(Y)$ tal que $\mathrm{J}(F) = X$.

Demostración. Sea $Y \subseteq A$ tal que $\mathrm{J}(Y) = X$ y sea Z un S-conjunto finito con $\mathrm{J}(Z) = X$. Como J es algebraico, $\mathrm{J}(Y) = \bigcup \{\mathrm{J}(F) \mid F \in \mathrm{Sub_f}(Y)\}$, luego, para cada $s \in S$ y cada $z \in Z_s$, existe un $F^{s,z} \in \mathrm{Sub_f}(Y)$ tal que $z \in \mathrm{J}(F^{s,z})$. Por lo tanto,

$$X = \mathrm{J}(Z) \subseteq \mathrm{J}(\bigcup\nolimits_{z \in Z_s,\, s \in S} \mathrm{J}(F^{s,z})) \subseteq \mathrm{J}(Y) = X$$

y $\bigcup_{z \in Z_s,\, s \in S} \mathrm{J}(F^{s,z})$ es un S-conjunto finito. □

1.4.21. Proposición. Sea A un S-conjunto y J un operador clausura heterogéneo sobre A.

1. Entonces $\mathrm{J_f}$ es el máximo operador clausura algebraico que precede a J.

2. Si J es uniforme, entonces $\mathrm{J_f}$ es el máximo operador clausura algebraico uniforme que precede a J.

□

La categoría $\mathbf{ClSp}(S)$ de los S-espacios de clausura.

Para cada conjunto de tipos S, existe una categoría de S-espacios de clausura, cuyos objetos están formados por un S-conjunto y un espacio de clausura heterogéneo sobre él, definido este último de manera alternativa, pero equivalente, como un sistema o un operador clausura heterogéneo, y cuyos morfismos son S-aplicaciones compatibles con los espacios de clausura respectivos.

1.4.22. Proposición. Sea S un conjunto de tipos. Entonces $\mathbf{ClSp}(S)$, es una categoría cuyos objetos son pares $(A, \mathcal{C})$, en los que A un S-conjunto y $\mathcal{C} \in \mathrm{Cls}(A)$, y cuyos morfismos de $(A, \mathcal{C})$ en $(B, \mathcal{D})$ son los triplos $((A, \mathcal{C}), f, (B, \mathcal{D}))$, denotados como $f\colon (A, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{D})$, en los que f es una S-aplicación de A en B tal que, para cada $D \in \mathcal{D}$, $f^{-1}[D] \in \mathcal{C}$, y con composición e identidades definidas a partir de las de sus S-aplicaciones subyacentes.

De $\mathbf{ClSp}(S)$ en $\mathbf{Set}^S$ se tiene un functor de olvido, $G_{\mathbf{ClSp}(S)}$, definido como:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{ClSp}(S) & \xrightarrow{G_{\mathbf{ClSp}(S)}} & \mathbf{Set}^S \\
(A, \mathcal{C}) & & A \\
{\scriptstyle f}\downarrow & \longmapsto & \downarrow{\scriptstyle f} \\
(B, \mathcal{D}) & & B
\end{array}$$

que es obviamente fiel, por lo que $\mathbf{ClSp}(S)$ es una categoría concreta sobre $\mathbf{Set}^S$.

1.4.23. Proposición. Sea S un conjunto de tipos. Entonces $\mathbf{Clop}(S)$, es una categoría cuyos objetos son pares (A, J), en los que A un S-conjunto y $\mathrm{J} \in \mathrm{Clop}(A)$, y cuyos morfismos de (A, J) en (B, K) son los triplos $((A, \mathrm{J}), f, (B, \mathrm{K}))$, denotados como $f\colon (A, \mathrm{J}) \longrightarrow (B, \mathrm{K})$, en los que f es una S-aplicación de A en B tal que, para todo $X \subseteq A$, $f[\mathrm{J}(X)] \subseteq_S \mathrm{K}(f[X])$, y con composición e identidades definidas a partir de las de sus S-aplicaciones subyacentes.

De $\mathbf{Clop}(S)$ en $\mathbf{Set}^S$ se tiene un functor de olvido $G_{\mathbf{Clop}(S)}$, definido similarmente a $G_{\mathbf{Clop}(S)}$, por lo que $\mathbf{Clop}(S)$ es también una categoría concreta sobre $\mathbf{Set}^S$.

1.4.24. Proposición. Las categorías $\mathbf{ClSp}(S)$ y $\mathbf{Clop}(S)$ son concretamente isomorfas, a través del functor definido como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Clop}(S) \arrow[rr] & & \mathbf{ClSp}(S) \\
(A, \mathrm{J}) \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & (A, \mathrm{Fix}(J)) \arrow[d, "f"] \\
(B, \mathrm{K}) & & (B, \mathrm{Fix}(K))
\end{tikzcd}$$

□

Este resultado justifica que, en lo que sigue, se use aquella de las dos categorías, $\mathbf{Clop}(S)$, o $\mathbf{ClSp}(S)$, que se considere más oportuna para abordar la situación de que se trate. Convenimos que por la categoría de **S-espacios de clausura**, $\mathbf{ClSp}(S)$, nos referimos indistintamente a cualquiera de las dos categorías $\mathbf{Clop}(S)$, o $\mathbf{ClSp}(S)$.

Para cada S-conjunto A se cumple que $(\mathrm{Cls}(A), \subseteq)$ es antiisomorfo a $(\mathrm{Clop}(A), \leq)$, pero cuando se considera el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Clop}(S) \arrow[dr, "G_{\mathbf{Clop}(S)}"'] & & \mathbf{ClSp}(S) \arrow[dl, "G_{\mathbf{ClSp}(S)}"] \\
& \mathbf{Set}^S &
\end{tikzcd}$$

donde $G_{\mathbf{Clop}(S)}$ y $G_{\mathbf{ClSp}(S)}$ son los functores de olvido correspondientes, la fibra de $G_{\mathbf{ClSp}(S)}$ en un S-conjunto A es, esencialmente, $(\mathrm{Cls}(A), \supseteq)$, puesto que si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ están en $\mathrm{Cls}(A)$ y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ entonces la identidad en A es un morfismo en $\mathbf{ClSp}(S)$ de $(A, \mathcal{D})$ en $(A, \mathcal{C})$.

Levantamientos optimales y cooptimales.

Podemos inducir un sistema de clausura heterogéneo, de manera optimal, sobre el dominio común de una familia de S-aplicaciones cuando los codominios de las mismas están dotados de sistemas de clausura heterogéneos, y, dualmente, podemos inducir un sistema de clausura heterogéneo, de manera cooptimal, sobre el codominio común de una familia de S-aplicaciones cuando los dominios de las mismas están dotados de sistemas de clausura heterogéneos.

1.4.25. Lema. Sea A un S-conjunto, $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i \in I}$ una familia de S-espacios de clausura y $f = (f^i)_{i \in I}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $i \in I$, $f^i \colon A \longrightarrow A^i$. Entonces hay un único sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A, al que denotamos por $\mathrm{L}^f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i \in I}$, y denominamos el **levantamiento optimal de $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i \in I}$ a través de f**, tal que:

1. Para cada $i \in I$, $f^i\colon (A, \mathrm{L}^f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}) \longrightarrow (A^i, \mathcal{C}^i)$.
2. Dado un S-espacio de clausura $(B, \mathcal{B})$ y $g\colon B \longrightarrow A$, si, para cada $i \in I$, $f^i \circ g\colon (B, \mathcal{B}) \longrightarrow (A^i, \mathcal{C}^i)$, entonces $g\colon (B, \mathcal{B}) \longrightarrow (A, \mathrm{L}^f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I})$.

Además, se cumple que:

1. Para cada sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A:
$$\mathrm{L}^{\mathrm{id}_A}(A, \mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
2. Si, para cada $i \in I$, $(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ es una familia de S-espacios de clausura, $g^i = (g^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $m \in \mathrm{M}_i$, $g^{i,m}\colon A^i \longrightarrow A^{i,m}$ y $\mathcal{C}^i = \mathrm{L}^{g^i}(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$, entonces
$$\mathrm{L}^{(g^i\circ f)_{i\in I}}(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{(i,m)\in \coprod_{i\in I} \mathrm{M}_i} = \mathrm{L}^f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}.$$

Demostración. Es suficiente que tomemos como $\mathrm{L}^f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ el sistema de clausura heterogéneo sobre A generado por $\bigcup_{i\in I}\{\, (f^i)^{-1}[C] \mid C \in \mathcal{C}^i \,\}$. □

Obsérvese que, para cada S-conjunto A, el levantamiento optimal de $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in\emptyset}$ a través de $f = (f^i)_{i\in\emptyset}$ es $\{A\}$.

1.4.26. Definición. Sea $f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (B, \mathcal{B})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Decimos que f es un morfismo **optimal** si, para cada S-espacio de clausura $(C, \mathcal{C})$ y cada aplicación $g\colon C \longrightarrow A$, si $f \circ g\colon (C, \mathcal{C}) \longrightarrow (B, \mathcal{B})$, entonces $g\colon (C, \mathcal{C}) \longrightarrow (A, \mathcal{A})$.

1.4.27. Proposición. Sea $f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (B, \mathcal{B})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un morfismo optimal es que $\mathcal{A} = \mathrm{L}^f(B, \mathcal{B})$.

1.4.28. Proposición. Si $f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (B, \mathcal{B})$ y $g\colon (B, \mathcal{B}) \longrightarrow (C, \mathcal{C})$ son morfismos optimales, entonces $g\circ f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (C, \mathcal{C})$ es un morfismo optimal. Además, si $g \circ f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (C, \mathcal{C})$ es un morfismo optimal, entonces $f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (B, \mathcal{B})$ es optimal.

1.4.29. Lema. Sea A un S-conjunto, $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ una familia de S-espacios de clausura heterogéneos y $f = (f^i)_{i\in I}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $i \in I$, $f^i\colon A^i \longrightarrow A$. Entonces hay un único sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ sobre A, al que denotamos por $\mathrm{L}_f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$, y denominamos el **levantamiento cooptimal de** $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ **a través de** f, tal que:

1. Para cada $i \in I$, $f^i\colon (A, \mathrm{L}_f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}) \longrightarrow (A^i, \mathcal{C}^i)$.
2. Dado un S-espacio de clausura $(B, \mathcal{B})$ y $g\colon A \longrightarrow B$, si, para cada $i \in I$, $g \circ f^i\colon (A^i, \mathcal{C}^i) \longrightarrow (B, \mathcal{B})$, entonces $g\colon (A, \mathrm{L}_f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}) \longrightarrow (B, \mathcal{B})$.

Además, se cumple que:

1. Para cada sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}$ en A:
$$\mathrm{L}_{\mathrm{id}_A}(A, \mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
2. Si, para cada $i \in I$, $(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ es una familia de S-espacios de clausura, $g^i = (g^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$ una familia de S-aplicaciones, en la que, para cada $m \in \mathrm{M}_i$, $g^{i,m}\colon A^{i,m} \longrightarrow A^i$ y $\mathcal{C}^i = \mathrm{L}_{g^i}(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{m\in \mathrm{M}_i}$, entonces
$$\mathrm{L}_{(f\circ g^i)_{i\in I}}(A^{i,m}, \mathcal{C}^{i,m})_{(i,m)\in \coprod_{i\in I} \mathrm{M}_i} = \mathrm{L}_f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}.$$

Demostración. Es suficiente que tomemos como $\mathrm{L}_f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I}$ el subconjunto de $\mathrm{Sub}(A)$ definido como:
$$\mathrm{L}_f(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in I} = \{\, C \subseteq A \mid \forall i \in I\, (\, (f^i)^{-1}[C] \in \mathcal{C}^i \,)\, \}.$$
□

Para cada S-conjunto A, el levantamiento cooptimal de $(A^i, \mathcal{C}^i)_{i\in\emptyset}$ a través de $f = (f^i)_{i\in\emptyset}$ es $\mathrm{Sub}(A)$.

1.4.30. Definición. Sea $f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (B, \mathcal{B})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Decimos que f es un morfismo **cooptimal** si, para cada S-espacio de clausura $(C, \mathcal{C})$ y cada aplicación $g\colon B \longrightarrow C$, si $g \circ f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (C, \mathcal{C})$, entonces $g\colon (B, \mathcal{B}) \longrightarrow (C, \mathcal{A})$.

1.4.31. Proposición. Sea $f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (B, \mathcal{B})$ un morfismo de S-espacios de clausura. Una condición necesaria y suficiente para que f sea un morfismo cooptimal es que $\mathcal{B} = \mathrm{L}_f(A, \mathcal{A})$.

1.4.32. Proposición. Si $f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (B, \mathcal{B})$ y $g\colon (B, \mathcal{B}) \longrightarrow (C, \mathcal{C})$ son morfismos cooptimales, entonces $g \circ f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (C, \mathcal{C})$ es un morfismo cooptimal. Además, si $g \circ f\colon (A, \mathcal{A}) \longrightarrow (C, \mathcal{C})$ es un morfismo cooptimal, entonces $g\colon (B, \mathcal{B}) \longrightarrow (C, \mathcal{C})$ es cooptimal.

Espacios de clausura algebraicos y uniformes.

Mostramos, a continuación, alguna de las relaciones entre las categorías de espacios de clausura algebraicos y uniformes.

1.4.33. Definición. Sea S un conjunto de tipos. Las subcategorías plenas de $\mathbf{ClSp}(S)$ determinadas por los S-espacios de clausura con propiedades adicionales se denotan de la manera siguiente:

1. $\mathbf{AClSp}(S)$, S-espacios de clausura algebraicos.
2. $\mathbf{UClSp}(S)$, S-espacios de clausura uniformes.
3. $\mathbf{UAClSp}(S)$, S-espacios de clausura algebraicos uniformes.

1.4.34. Proposición. Sea S un conjunto de tipos. Entonces $\mathbf{AClSp}(S)$ es una subcategoría correflectiva de $\mathbf{ClSp}(S)$.

Demostración. Sea (A, J) un S-espacio de clausura. Entonces el S-espacio de clausura algebraico $(A, \mathrm{J}_{\mathrm{f}})$, junto con el morfismo de $(A, \mathrm{J}_{\mathrm{f}})$ en (A, J) determinado por id_A, tiene la propiedad de que para cada S-espacio de clausura algebraico (B, K) y cada morfismo $f\colon (B, \mathrm{K}) \longrightarrow (A, \mathrm{J}_{\mathrm{f}})$, existe un único $f^\flat\colon (B, \mathrm{K}) \longrightarrow (A, \mathrm{J}_{\mathrm{f}})$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(B, \mathrm{K}) \arrow[d, "f^\flat"'] \arrow[dr, "f"] & \\
(A, \mathrm{J}_{\mathrm{f}}) \arrow[r] & (A, \mathrm{J})
\end{tikzcd}$$

En efecto, si $f\colon (B, \mathrm{K}) \longrightarrow (A, \mathrm{J})$, entonces $f^\flat = ((B, \mathrm{K}), f, (A, \mathrm{J}_{\mathrm{f}}))$ es un morfismo, porque si $X \subseteq_S B$, y $a \in \mathrm{K}(X)_s$ con $s \in S$, tenemos, por ser K algebraico, que $a \in \mathrm{K}(F)_s$, para algún $F \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(X)$ y por lo tanto $f_s(a) \in \mathrm{J}(f[F])_s$, luego $f_s(a) \in \mathrm{J}_{\mathrm{f}}(f[X])_s$. □

1.4.35. Proposición. Sea A un S-conjunto y $\mathrm{J} \in \mathrm{Clop}(A)$. Si J es uniforme entonces J_{f} es uniforme.

Demostración. Sean $X, Y \subseteq_S A$ tales que $\mathrm{supp}(X) = \mathrm{supp}(Y)$ y $s \in \mathrm{supp}(\mathrm{J}_{\mathrm{f}}(X))$. Entonces s pertenece al soporte de la unión, (y, por tanto, a la unión de los soportes) de las clausuras mediante J de los sub-S-conjuntos finitos de X. Luego existe un $Z \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(X)$ tal que $s \in \mathrm{supp}(\mathrm{J}(Z))$. Ahora bien, por ser Z finito, existe un $Z' \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(Y)$ tal que $\mathrm{supp}(Z) = \mathrm{supp}(Z')$ y, como J es uniforme, $s \in \mathrm{supp}(\mathrm{J}(Z'))$, por lo que $s \in \mathrm{supp}(\mathrm{J}_{\mathrm{f}}(Y))$. □

1.4.36. Corolario. Sea S un conjunto de tipos. Entonces $\mathbf{UAClSp}(S)$ es una subcategoría correflectiva de $\mathbf{AClSp}(S)$.

Relaciones entre las categorías $\mathbf{ClSp}(S)$ y $\mathbf{CLat}_\wedge$.

En lo que sigue se estudian los espacios de clausura respecto a los retículos completos a los que están asociados.

1.4.37. Proposición. Sea $\mathbf{CLat}_\wedge$ la categoría de retículos completos con morfismos que preservan ínfimos arbitrarios. Entonces $\underline{\mathrm{Fix}}$ es un functor contravariante definido como

$$\mathbf{ClSp}(S) \xrightarrow{\underline{\mathrm{Fix}}} \mathbf{CLat}_\wedge$$

$$\begin{array}{ccc} (A,\mathrm{J}) & & \underline{\mathrm{Fix}}(\mathrm{J}) \\ f \Big\downarrow & \longmapsto & \Big\uparrow \underline{\mathrm{Fix}}(f) \\ (B,\mathrm{K}) & & \underline{\mathrm{Fix}}(\mathrm{K}) \end{array}$$

donde $\underline{\mathrm{Fix}}(f)$ es el homomorfismo determinado por $f^{-1}\colon \mathrm{Fix}(\mathrm{K}) \longrightarrow \mathrm{Fix}(\mathrm{J})$.

Demostración. Sea $f\colon (A,\mathrm{J}) \longrightarrow (B,\mathrm{K})$ un morfismo en $\mathbf{ClSp}(S)$. Se cumple que $\underline{\mathrm{Fix}}$ es efectivamente un functor ya que, para cada $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Fix}(K)$, se tiene $f^{-1}[\bigwedge \mathcal{F}] = f^{-1}[\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F] = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} f^{-1}[F] = \bigwedge\{f^{-1}[F] \mid F \in \mathcal{F}\}$. En general, f^{-1} no preserva supremos. $\square$

El functor $\underline{\mathrm{Fix}}$ se restringe a un functor desde $\mathbf{AClSp}(S)$ en $\mathbf{ACLat}_\wedge$, la subcategoría de $\mathbf{CLat}_\wedge$ de terminada por los retículos algebraicos. Para demostrarlo necesitamos, en primer lugar, del siguiente lema.

1.4.38. Lema. Sea $(A^i)_{i\in I}$ una familia de S-conjuntos y $X \in \mathrm{Sub_f}(\bigcup_{i\in I} A^i)$. Entonces existe un $K \in \mathrm{Sub_f}(I)$ tal que $X \in \mathrm{Sub_f}(\bigcup_{i\in K} A^i)$.

Demostración. Sea $s \in S$ y $x \in X_s$. Entonces $x \in \bigcup_{i\in I} A^i_s$, luego existe un $i_{s,x} \in I$ tal que $x \in A^{i_{s,x}}_s$. Sea $K = \{i_{s,x} \in I \mid s \in S,\, x \in X_s\}$. Se tiene que $X \subseteq \bigcup (A^i)_{i\in K}$ y, como $\mathrm{card}(K) \leq \mathrm{card}(X)$ y X es finito, K es finito. $\square$

1.4.39. Proposición. Sea J un operador clausura algebraico heterogéneo sobre un S-conjunto A. Entonces $\underline{\mathrm{Fix}}(\mathrm{J})$ es un retículo algebraico, y los compactos de $\underline{\mathrm{Fix}}(\mathrm{J})$ son precisamente los S-conjuntos de la forma $\mathrm{J}(X)$ con X un S-conjunto finito.

Demostración. En primer lugar se demuestra que $\mathrm{J}(X)$ es compacto si X es finito. Supongamos que $\mathrm{J}(X) \subseteq \bigvee_{i\in I} \mathrm{J}(X^i)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} X \subseteq \bigvee\nolimits_{i\in I} \mathrm{J}(X^i) &= \mathrm{J}(\bigcup\nolimits_{i\in I} X^i) \\ &= \bigcup\nolimits_{Z\in \mathrm{Sub_f}(\bigcup_{i\in I} X^i)} \mathrm{J}(Z) \end{aligned}$$

Entonces, para cada $s \in S$ y cada $x \in X_s$, existe un $Z^{s,x} \in \mathrm{Sub_f}(\bigcup_{i \in I} X^i)$ tal que $x \in \mathrm{J}(Z^{s,x})_s$, luego, por el lema anterior, existe un $K^{s,x} \in \mathrm{Sub_f}(I)$ tal que $Z^{s,x} \in \mathrm{Sub_f}(\bigcup_{i \in K^{s,x}} X^i)$. Sea $K = \bigcup\{K^{s,x} \subseteq I \mid s \in S,\, x \in X_s\}$. Entonces, para cada $s \in S$ y cada $x \in X_s$, se tiene que

$$\begin{aligned} Z^{s,x} &\in \mathrm{Sub_f}(\bigcup\nolimits_{i \in K} X^i), \text{ luego} \\ \mathrm{J}(Z^{s,x}) &\subseteq \mathrm{J}(\bigcup\nolimits_{i \in K} X^i) \\ &= \bigcup\{\mathrm{J}(Z) \mid Z \in \mathrm{Sub_f}(\bigcup\nolimits_{i \in K} X^i)\} \end{aligned}$$

puesto que J es algebraico. Pero entonces

$$\begin{aligned} X &\subseteq \bigcup\nolimits_{s \in S,\ x \in X_s} \mathrm{J}(Z^{s,x}) \\ &\subseteq \bigcup\{\mathrm{J}(Z) \mid Z \in \mathrm{Sub_f}(\bigcup\nolimits_{i \in K} X^i)\} \\ &\subseteq \mathrm{J}(\bigcup\nolimits_{i \in K} X^i) \\ &= \bigvee\nolimits_{i \in K} \mathrm{J}(X^i) \end{aligned}$$

Veamos que si T es compacto entonces existe un $X \in \mathrm{Sub_f}(A)$ para el que $T = \mathrm{J}(X)$. Sea $\mathcal{F} = \{\mathrm{J}(Y) \mid Y \in \mathrm{Sub_f}(T)\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \bigvee \mathcal{F} &= \mathrm{J}(\bigcup\nolimits_{Y \in \mathrm{Sub_f}(T)} \mathrm{J}(Y)) \\ &= \mathrm{J}(\bigcup\nolimits_{Y \in \mathrm{Sub_f}(T)} Y) \\ &= \mathrm{J}(T) = T \end{aligned}$$

luego $T \subseteq \bigvee \mathcal{F}$ y existe una parte finita $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Sub_f}(T)$ tal que $T \subseteq \bigvee_{Y \in \mathcal{K}} \mathrm{J}(Y)$. Pero entonces, $\bigcup \mathcal{K}$ es finito y, por ser J un operador algebraico, se cumple que $\bigvee_{Y \in \mathcal{K}} \mathrm{J}(Y) = \mathrm{J}(\bigcup \mathcal{K})$, luego $T \subseteq \mathrm{J}(\bigcup \mathcal{K}) \subseteq T$.

Solamente queda por comprobar que, para cada $X \subseteq A$, $\mathrm{J}(X)$ es supremo de compactos:

$$\begin{aligned} \mathrm{J}(X) &= \bigcup\nolimits_{Y \in \mathrm{Sub_f}(X)} \mathrm{J}(Y) \\ &\subseteq \bigvee\nolimits_{Y \in \mathrm{Sub_f}(X)} \mathrm{J}(Y) \subseteq \mathrm{J}(X) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\underline{\mathrm{Fix}}(\mathrm{J})$ es un retículo algebraico. □

El functor $\underline{\mathrm{Fix}}$ es esencialmente sobreyectivo, como pone de manifiesto la siguiente proposición.

1.4.40. Proposición. Sea S un conjunto de tipos no vacío. Todo retículo completo es isomorfo al retículo completo de los puntos fijos de un operador clausura heterogéneo sobre un S-conjunto.

Demostración. Sea $\underline{L}$ un retículo completo. Para demostrar lo que se quiere es suficiente con que se determine un sistema de clausura heterogéneo $\mathcal{C}_{\underline{L}}$ isomorfo a $\underline{L}$. Puesto que el conjunto de tipos no es vacío, sea t un tipo, arbitrario pero fijo. Recordemos que $\delta^t(L)$ es el S-conjunto:

$$\delta^t(L)_s = \begin{cases} L & \text{si } s = t, \\ \emptyset & \text{si } s \neq t. \end{cases}$$

Por otra parte, para $a \in L$, sea $\downarrow a = \{b \in L \mid b \leq a\}$ y

$$\mathcal{C}_{\underline{L}} = \{X \subseteq_S \delta^t(L) \mid \exists a \in L \text{ tal que } X_t = \downarrow a\}$$

Entonces se cumple que $\underline{L}$ y $\mathcal{C}_{\underline{L}}$ son isomorfos. □

La categoría HClSp de espacios de clausura heterogéneos.

Los morfismos entre conjuntos de tipos dan lugar a functores entre las categorías de espacios de clausura correspondientes. Esta construcción se extiende hasta un functor que, mediante la construcción de Grothendieck, permite obtener una categoría de espacios de clausura heterogéneos, donde se considera la variación en el conjunto de tipos.

1.4.41. Proposición. Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T$ una aplicación. Entonces de $\mathbf{ClSp}(T)$ en $\mathbf{ClSp}(S)$ existe un functor, $\mathrm{ClSp}^{\Delta}(\varphi)$, definido como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{ClSp}(T) \arrow[rr, "\mathrm{ClSp}^{\Delta}(\varphi)"] & & \mathbf{ClSp}(S) \\ (B,\mathcal{D}) \arrow[d, "f"'] & & (B_\varphi, \Delta_\varphi[\mathcal{D}]) \arrow[d, "f_\varphi"] \\ (B',\mathcal{D}') & \longmapsto & (B'_\varphi, \Delta_\varphi[\mathcal{D}']) \end{tikzcd}$$

Demostración. Si $\mathcal{D}$ es un sistema de clausura sobre B, entonces $\Delta_\varphi[\mathcal{D}]$ es un sistema de clausura sobre B_φ, porque, para cada familia $(Y^i)_{i\in I}$ de T-conjuntos, se cumple que

$$\Delta_\varphi(\bigcap\nolimits_{i\in I} Y^i) = \bigcap\nolimits_{i\in I} \Delta_\varphi(Y^i)$$

Además, si $f\colon (B,\mathcal{D}) \longrightarrow (B',\mathcal{D}')$ es continuo e $Y_\varphi \in \Delta_\varphi[\mathcal{D}']$, entonces $Y \in \mathcal{D}'$ y $f^{-1}[Y] \in \mathcal{D}$, luego $\Delta_\varphi(f^{-1}[Y]) \in \Delta_\varphi[\mathcal{D}]$. Pero $\Delta_\varphi(f^{-1}[Y])$ es idéntico a $\Delta_\varphi(f)^{-1}(Y_\varphi)$ y, por consiguiente, f_φ es continuo. □

1.4.42. Proposición. Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T$ una aplicación. Entonces de $\mathbf{ClSp}(S)$ en $\mathbf{ClSp}(T)$ existe un functor, $\mathrm{ClSp}^{\amalg}(\varphi)$, definido como

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{ClSp}(S) \arrow[rr, "\mathrm{ClSp}^{\amalg}(\varphi)"] & & \mathbf{ClSp}(T) \\
(A,\mathcal{C}) \arrow[d, "f"'] & & (\coprod_{\varphi}(A), \coprod_{\varphi}[\mathcal{C}]) \arrow[d, "\coprod_{\varphi}(f)"] \\
(A,\mathcal{C}) & \longmapsto & (\coprod_{\varphi}(A'), \coprod_{\varphi}[\mathcal{C}'])
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Si $\mathcal{C}$ es un sistema de clausura sobre A, entonces $\coprod_{\varphi}[\mathcal{C}]$ es un sistema de clausura sobre $\coprod_{\varphi}(A)$, porque, para cada familia $(X^i)_{i\in I}$ de S-conjuntos, se cumple que

$$\textstyle\coprod_{\varphi}(\bigcap_{i\in I} X^i) = \bigcap_{i\in I} \coprod_{\varphi}(Y^i)$$

Además, si $f\colon (A,\mathcal{C}) \longrightarrow (A',\mathcal{C}')$ es continuo y $\coprod_{\varphi}(X) \in \coprod_{\varphi}[\mathcal{C}']$, entonces X está en $\mathcal{C}'$ y $f^{-1}[Y] \in \mathcal{C}$, luego $\coprod_{\varphi}(f^{-1}[X]) \in \coprod_{\varphi}[\mathcal{C}]$. Puesto que $\coprod_{\varphi}(f^{-1}[X])$ es idéntico a $\coprod_{\varphi}(f)^{-1}(\coprod_{\varphi}(X))$, se cumple que $\coprod_{\varphi}(f)$ es continuo. $\square$

1.4.43. Proposición. Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T$ una aplicación. Entonces se cumple que $\mathrm{ClSp}^{\amalg}(\varphi) \dashv \mathrm{ClSp}^{\Delta}(\varphi)$.

Demostración. El isomorfismo natural θ^{φ} de la adjunción $\coprod_{\varphi} \dashv \Delta_{\varphi}$ es también un isomorfismo natural

$$\mathbf{ClSp}(S)((A,\mathcal{C}),(B_{\varphi},\Delta_{\varphi}(\mathcal{D}))) \cong \mathbf{ClSp}(T)((\textstyle\coprod_{\varphi}(A),\coprod_{\varphi}(\mathcal{C})),(B,\mathcal{D}))$$

para cada $(A,\mathcal{C})$ en $\mathbf{ClSp}(S)$ y cada $(B,\mathcal{D})$ en $\mathbf{ClSp}(T)$.

Sea f un morfismo continuo de $(A,\mathcal{C})$ en $(B_{\varphi},\Delta_{\varphi}(\mathcal{D}))$, e $Y \in \mathcal{D}$. Puesto que $Y_{\varphi} \in \Delta_{\varphi}[\mathcal{D}]$ y f es continuo, se cumple que $f^{-1}[Y_{\varphi}] \in \mathcal{C}$ y $\coprod_{\varphi}(f^{-1}[Y_{\varphi}]) \in \coprod_{\varphi}[\mathcal{C}]$. Pero $\coprod_{\varphi}(f^{-1})[Y_{\varphi}]$ coincide con $(\theta^{\varphi})^{-1}(f)^{-1}[Y]$, puesto que

$$
\begin{aligned}
(\theta^{\varphi})^{-1}(f)^{-1}[Y] &= (\{(a,s) \in \textstyle\coprod_{\varphi}(A)_t \mid a \in A_s,\ \varphi(s)=t,\ f_s(a) \in Y_t\})_{t\in T} \\
&= (\{(a,s) \in \textstyle\coprod_{\varphi}(A)_t \mid a \in f^{-1}[Y_{\varphi}]_s,\ \varphi(s)=t\})_{t\in T} \\
&= (\textstyle\coprod_{s\in\varphi^{-1}[t]} f^{-1}[Y_{\varphi}]_s)_{t\in T} \\
&= \textstyle\coprod_{\varphi}(f^{-1}[Y_{\varphi}])
\end{aligned}
$$

y, por consiguiente, $(\theta^{\varphi})^{-1}(f)$ es continuo.

Recíprocamente, supongamos que g es un morfismo continuo de $(\coprod_\varphi(A), \coprod_\varphi(\mathcal{C}))$ en $(B, \mathcal{D})$. Sea $Y_\varphi \in \Delta_\varphi[\mathcal{D}]$. Entonces $Y \in \mathcal{D}$ y $g^{-1}[Y] \in \coprod_\varphi[\mathcal{C}]$. Pero tenemos que

$$\begin{aligned} g^{-1}[Y] &= (\{(a,s) \in \textstyle\coprod_\varphi(A)_t \mid g_t(a,s) \in Y_t\})_{t\in T} \\ &= (\textstyle\coprod_{s\in\varphi^{-1}[t]}\{a \in A_s \mid g_{\varphi(s)}(a,s) \in Y_{\varphi(s)}\})_{t\in T} \\ &= \textstyle\coprod_\varphi((\{a \in A_s \mid g_{\varphi(s)}(a,s) \in Y_{\varphi(s)}\})_{s\in S}) \end{aligned}$$

y, además,

$$\begin{aligned} (\{a \in A_s \mid g_{\varphi(s)}(a,s) \in Y_{\varphi(s)}\})_{s\in S} &= (\{a \in A_s \mid \theta^\varphi(g)_s(a) \in Y_{\varphi(s)}\})_{s\in S} \\ &= \theta^\varphi(g)^{-1}(Y_\varphi) \end{aligned}$$

luego $g^{-1}[Y] = \coprod_\varphi(\theta^\varphi(g)^{-1}(Y_\varphi))$, por lo que $\theta^\varphi(g)^{-1}(Y_\varphi) \in \mathcal{C}$ y $\theta^\varphi(g)$ es continuo. □

Los functores $\mathrm{ClSp}^\Delta(\varphi)$ y $\mathrm{ClSp}^\amalg(\varphi)$ pueden definirse alternativamente para operadores clausura. En particular, la definición apropiada para el functor $\mathrm{ClSp}^\amalg(\varphi)$ es inmediata teniendo en cuenta la siguiente proposición.

1.4.44. Proposición. Sea $\varphi : S \longrightarrow T$ una aplicación y A un S-conjunto. Entonces se cumple que $\mathrm{Sub}(A) \cong \mathrm{Sub}(\coprod_\varphi(A)) = \coprod_\varphi[\mathrm{Sub}(A)]$.

Demostración. El isomorfismo asigna a cada S-conjunto $X \subseteq A$ el conjunto $\coprod_\varphi(X)$. □

Se tiene, por tanto, que si $Z \in \mathrm{Sub}(\coprod_\varphi(A))$ entonces Z es de la forma $\coprod_\varphi(X)$ con $X \subseteq A$. Si J es un operador clausura sobre A, podemos definir entonces un operador clausura J_φ sobre $\coprod_\varphi(A)$ que asigna a cada $\coprod_\varphi(X)$, con $X \subseteq A$, el T-conjunto $\coprod_\varphi(J(X))$. La definición es correcta porque para cada S-conjunto A, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Clop}(A) \arrow[r, "(\cdot)^\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Fix}"'] & \mathrm{Clop}(\coprod_\varphi(A)) \arrow[d, "\mathrm{Fix}"] \\ \mathrm{Cls}(A) \arrow[r, "\coprod_\varphi(\cdot)"'] & \mathrm{Cls}(\coprod_\varphi(A)) \end{tikzcd}$$

conmuta.

La definición correspondiente para el functor $\mathrm{ClSp}^\Delta(\varphi)$ es menos inmediata, puesto que, en general, si B es un T-conjunto, entonces $\Delta_\varphi[\mathrm{Sub}(B)]$ está estrictamente incluido en $\mathrm{Sub}(\Delta_\varphi(B))$. No obstante, cada sub-$S$-conjunto Y de B_φ tiene asociado un elemento de $\Delta_\varphi[\mathrm{Sub}(B)]$ a través de la aplicación $\bigcup_\varphi$ definida como

$\bigcup_\varphi(Y) = (\bigcup_{s\in\varphi^{-1}[t]} Y_s)_{t\in T}$. Si K es un operador clausura sobre B, podemos definir un operador clausura K^φ sobre B_φ que a un $Y \subseteq B_\varphi$ le asocia $K(\bigcup_\varphi(Y))_\varphi$. La definición es correcta porque si B es un T-conjunto, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Clop}(B) \arrow[r, "(\cdot)^\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Fix}"'] & \mathrm{Clop}(B_\varphi) \arrow[d, "\mathrm{Fix}"] \\
\mathrm{Cls}(B) \arrow[r, "\Delta_\varphi[\cdot]"'] & \mathrm{Cls}(B_\varphi)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Como para el caso de los conjuntos heterogéneos, las construcciones anteriores se extienden, respectivamente, hasta un functor y un pseudo-functor, de **Set** en **Cat**. En particular, podemos obtener una categoría de espacios de clausura heterogéneos mediante la construcción de Grothendieck aplicada al siguiente functor.

1.4.45. Proposición. De **Set** en **Cat** existe un functor contravariante ClSp^Δ, definido como

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[rr, "\mathrm{ClSp}^\Delta"] & & \mathbf{Cat} \\
S \arrow[d, "\varphi"'] & & \mathbf{ClSp}(S) \\
T & \longmapsto & \mathbf{ClSp}(T) \arrow[u, "\mathrm{ClSp}^\Delta(\varphi)"']
\end{tikzcd}$$

□

1.4.46. Definición. Denotamos por **HClSp** la categoría $\int^{\mathbf{Set}} \mathrm{ClSp}^\Delta$, obtenida mediante la construcción de Grothendieck para functores contravariantes aplicada al functor ClSp^Δ.

La categoría **HClSp** tiene como objetos los triplos $(S, A, \mathcal{C})$, en los que S es un conjunto y $(A, \mathcal{C})$ un S-espacio de clausura, denominados **espacios de clausura heterogéneos**, y como morfismos de $(S, A, \mathcal{C})$ en $(T, B, \mathcal{D})$ los pares (φ, f), con $\varphi\colon S \longrightarrow T$ una aplicación y $f\colon A \longrightarrow B_\varphi$ un morfismo continuo de $(A, \mathcal{C})$ en $(B_\varphi, \Delta_\varphi[\mathcal{D}])$.

2 Álgebras relativas a una signatura.

En este capítulo estudiamos las álgebras heterogéneas relativas a una signatura algebraica heterogénea.

Aunque en general, se cumple que los resultados habituales del álgebra homogénea siguen siendo válidos para las álgebras heterogéneas, la generalización automática de ciertos teoremas al álgebra universal heterogénea no es válida. Por ejemplo, la versión heterogénea del teorema de Birkhoff-Frink que afirma que todo operador clausura es un operador subálgebra es incorrecta, como demostró Mathiessen en [Mat72]. El teorema se cumple, como demostramos en la sección correspondiente, para aquellos operadores clausura que tienen una propiedad adicional.

Muchas de las diferencias entre el álgebra homogénea y heterogénea están relacionadas con la eventual existencia de coordenadas vacías en los S-conjuntos subyacentes de las álgebras involucradas. En las álgebras homogéneas las álgebras vacías coinciden con el álgebra inicial y no tienen, por tanto, una estructura especialmente interesante, mientras que para las heterogéneas, las álgebras vacías (alguna coordenada vacía) pueden tener estructuras arbitrariamente complejas.

2.1 Signaturas y álgebras.

Las álgebras heterogéneas, para un conjunto de tipos S, constan de un S-conjunto y de una familia de *operaciones* sobre tal S-conjunto, por lo que lo primero que debemos hacer es determinar con precisión la noción de operación sobre un S-conjunto.

Dados dos conjuntos X y A, una operación X-aria sobre A es simplemente una aplicación de A^X, el conjunto de los elementos de A con *dominio de variación* X, en A. El hecho de que una operación sobre un conjunto tengan como dominio de definición a un conjunto de elementos variables relativo a un cierto dominio de variación, es el que nos lleva, en lo que sigue, a definir la noción de operación sobre los objetos de una categoría arbitraria a través del concepto categorial de elemento variable. Además, la definición será tal que, para las categorías usuales, el concepto ordinario de operación se obtendrá como un caso particular del que establezcamos a continuación.

2.1.1. Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría.

1. Un **conjunto de biariedades** o, **tipos de operación** en $\mathbf{C}$ es cualquier conjunto de pares de objetos de $\mathbf{C}$. Si T es un conjunto de biariedades y $(X, Y) \in T$, se denomina a X la **ariedad** y a Y la **coariedad** de (X, Y).

2. Sea T un conjunto de biariedades en $\mathbf{C}$, $(X, Y) \in T$ y A un objeto de $\mathbf{C}$. Una T**-operación de biariedad**, o **tipo** (X, Y) sobre A es cualquier aplicación de $A_X = \mathbf{C}(X, A)$ en $A_Y = \mathbf{C}(Y, A)$. El T-conjunto de las T-operaciones sobre A se denota como $\mathrm{Op}_T(A) = (\mathbf{Set}(A_X, A_Y))_{(X,Y)\in T}$.

2.1.2. Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y T un conjunto de biariedades en $\mathbf{C}$. Una $(\mathbf{C}, T)$**-signatura** es un T-conjunto $\Sigma = (\Sigma_{X,Y})_{(X,Y)\in T}$. Las expresiones $\sigma \in \Sigma_{X,Y}$ y $\sigma\colon X \longrightarrow Y$ se consideran sinónimas. Las $(\mathbf{C}, T)$-signaturas y las T-aplicaciones entre ellas determinan una categoría $\mathbf{Sig}(\mathbf{C}, T)$.

La categoría $\mathbf{Sig}(\mathbf{C}, T)$ es, dependiendo de si se desea o no la existencia de *polimorfismo* en los símbolos de operación, una de las categorías $\mathbf{Set}^T$ o $\mathbf{Set} \downarrow T$.

2.1.3. Definición. Sea Σ una $(\mathbf{C}, T)$-signatura y A un $\mathbf{C}$-objeto:

1. Una Σ**-estructura algebraica** sobre A es una T-aplicación F de Σ en $\mathrm{Op}_T(A)$.

2. Una Σ**-álgebra** es un par $\underline{A} = (A, F)$, en el que A es un $\mathbf{C}$-objeto y F una Σ-estructura algebraica sobre A.

Los morfismos entre los objetos subyacentes de las Σ-álgebras que son compatibles con sus estructuras algebraicas determinan los Σ-homomorfismos.

2.1.4. Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría, T un conjunto de biariedades en $\mathbf{C}$ y Σ una $(\mathbf{C}, T)$-signatura.

1. Sean $\underline{A} = (A, F)$ y $\underline{B} = (B, G)$ dos Σ-álgebras. Un Σ**-homomorfismo** de $\underline{A}$ en $\underline{B}$ es un triplo ordenado $(\underline{A}, f, \underline{B})$, en el que f es una $\mathbf{C}$-morfismo de A en B tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon X \longrightarrow Y$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_X \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "F_{X,Y}(\sigma)"'] & B_X \arrow[d, "G_{X,Y}(\sigma)"] \\ A_Y \arrow[r, "f_Y"'] & B_Y \end{tikzcd}$$

   conmuta, siendo f_X la aplicación que a un $h\colon X \longrightarrow A$ le asigna $f \circ h$. El hecho de que $(\underline{A}, f, \underline{B})$ sea un Σ-homomorfismo, se denota también mediante $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$.

2. Sean $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ y $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$. Su composición es el triplo $(\underline{A}, g \circ f, \underline{C})$. Para una Σ-álgebra $\underline{A}$, el morfismo identidad, denotado como $\mathrm{id}_{\underline{A}}$, es $(\underline{A}, \mathrm{id}_A, \underline{A})$, con id_A la identidad en A.

2.1.5. Proposición. Sea Σ una $(\mathbf{C}, T)$-signatura. Las Σ-álgebras y los homomorfismos entre ellas determinan una categoría, denotada como $\mathbf{Alg}_{\mathbf{C},T}(\Sigma)$. □

A partir de los morfismos entre signaturas se obtienen funtores en sentido inverso entre las categorías de álgebras asociadas. Se tiene además, que el proceso es functorial, por lo que se dispone de un funtor $\mathrm{Alg}_{\mathbf{C},T}$ que a una $(\mathbf{C}, T)$-signaturas Σ le asigna la categoría de Σ-álgebras correspondiente $\mathbf{AlgC}, T(\Sigma)$.

2.1.6. Proposición. De $\mathbf{Sig}(\mathbf{C}, T)$ en $\mathbf{Cat}$ existe un functor contravariante $\mathrm{Alg}_{\mathbf{C},T}$, definido como

$$\mathbf{Sig}(\mathbf{C}, T) \xrightarrow{\mathrm{Alg}_{\mathbf{C},T}} \mathbf{Cat}$$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & & \mathbf{Alg}_{\mathbf{C},T}(\Sigma) \\ D \Big\downarrow & \longmapsto & \Big\uparrow D^* \\ \Lambda & & \mathbf{Alg}_{\mathbf{C},T}(\Lambda) \end{array}$$

siendo D^* el functor que a una Λ-álgebra (B, G) le asigna la Σ-álgebra $(B, G \circ D)$ y que es la identidad en los morfismos.

La construcción de Grothendieck aplicada al functor contravariante $\mathrm{Alg}_{\mathbf{C},T}$ permite obtener la categoría de $(\mathbf{C}, T)$-álgebras, $\mathbf{Alg}(\mathbf{C}, T)$, cuyos objetos son triplos (Σ, A, F), en los que Σ una $(\mathbf{C}, T)$-signatura, A un objeto de $\mathbf{C}$ y F una T-aplicación de Σ en $\mathrm{Op}_T(A)$.

2.1.7. Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y T un conjunto de biariedades en $\mathbf{C}$. La categoría de $\mathbf{C}$-álgebras $\mathbf{Alg}(\mathbf{C}, T)$, es la categoría $\int^{\mathbf{Sig}(\mathbf{C},T)} \mathrm{Alg}_{\mathbf{C},T}$.

2.1.8. Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y X, X' dos conjuntos de objetos en $\mathbf{C}$. Decimos que X está **iso-incluido** en X', $X \subseteq_{\mathrm{iso}} X'$, si y sólo si, para cada $x \in X$, existe un $x' \in X'$ tal que x es isomorfo a x'. Decimos que X y X', son **iso-equivalentes**, $X \equiv_{\mathrm{iso}} X'$ si y sólo si $X \subseteq_{\mathrm{iso}} X'$ y $X' \subseteq_{\mathrm{iso}} X$. Las nociones anteriores se extienden naturalmente a las subcategorías plenas asociadas a los subconjuntos de objetos de $\mathbf{C}$.

La iso-equivalencia de dos subconjuntos X, X' de objetos en $\mathbf{C}$ implica la equivalencia de las subcategorías plenas asociadas a X y X', aunque la inversa no siempre se cumple. Además, de la iso-equivalencia de los conjuntos de tipos de operación sobre una categoría $\mathbf{C}$ podemos concluir la equivalencia de las categorías de álgebras asociadas.

2.1.9. Proposición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y T, T' dos conjuntos iso-equivalentes de biariedades en $\mathbf{C}$. Entonces las categorías $\mathbf{Alg}(\mathbf{C}, T)$ y $\mathbf{Alg}(\mathbf{C}, T')$ son equivalentes. □

Los conceptos anteriores, para las categorías de la forma $\mathbf{Set}^S$, se concretan como sigue. Dados dos S-conjuntos X e Y, una operación (X, Y)-aria sobre un S-conjunto A es una aplicación $f\colon A_X \longrightarrow A_Y$. Ahora bien, puesto que A_Y es isomorfo a $\prod_{s\in S} {A_s}^{Y_s}$, dar una operación (X, Y)-aria f sobre A equivale a dar una familia de operaciones $(f_s\colon A_X \longrightarrow {A_s}^{Y_s})_{s\in S}$, y, siendo ${A_s}^{Y_s}$ a su vez un producto, equivalente a dar una familia $(f_{s,y}\colon A_X \longrightarrow A_s)_{s\in S, y\in Y_s}$. Por lo tanto, se pueden considerar, sin perdida de generalidad, operaciones (X, δ^s)-arias, y puesto que A_{δ^s} es isomorfo a A_s, en definitiva, operaciones (X, s)-arias, entendiendo por estas las operaciones cuyo codominio es A_s.

Respecto de la ariedad de las operaciones, es equivalente considerar S-conjuntos o S-cardinales, siendo la categoría determinada por estos últimos un esqueleto de la de S-conjuntos y puesto que en las categorías de S-conjuntos se cumple que si dos subcategorías son equivalentes, entonces son iso-equivalentes.

Por otra parte, la noción de finitud admite una versión local y otra global, por lo que se tienen operaciones finitarias y localmente finitarias .

2.1.10. Definición. Sea S un conjunto de tipos y A un S-conjunto. Una operación $f\colon A_X \longrightarrow A_s$ es **localmente finitaria** si X es un S-conjunto localmente finito, y **finitaria** si X es finito.

La categoría de los S-cardinales localmente finitos, denotada mediante $\mathbf{N}^S$, es un esqueleto de la categoría de los S-conjuntos localmente finitos $\mathbf{Set}^S_{\mathrm{lf}}$. Se sigue por tanto que para estudiar las operaciones localmente finitarias, es suficiente considerar operaciones con ariedades en los objetos de $\mathbf{N}^S$ y coariedades en S. Las signaturas adecuadas en ese caso son las $(\mathbf{Set}^S, \mathrm{N}^S \times S)$-signaturas.

A su vez, la subcategoría de $\mathbf{N}^S$ determinada por los S-cardinales finitos, denotada como $\mathbf{N}^{(S)}$, es un esqueleto de la categoría de los S-conjuntos finitos $\mathbf{Set}^S_{\mathrm{f}}$. Por consiguiente, para las operaciones finitarias, es suficiente considerar operaciones con ariedades en $\mathbf{N}^{(S)}$ y coariedades en S. Las signaturas correspondientes son las $(\mathbf{Set}^S, \mathrm{N}^{(S)} \times S)$-signaturas.

Los objetos de $\mathbf{N}^{(S)}$ admiten una descripción alternativa, pero equivalente, como los elementos del conjunto subyacente del monoide abeliano libre sobre S, y como tales se denominan palabras abelianas.

2.1.11. Definición. Una **palabra abeliana** sobre S es una aplicación m de S en N cuyo soporte es finito. Si m y n son palabras abelianas sobre S, la **suma**

de m y n es la palabra abeliana $m + n = (m_s + n_s)_{s\in S}$ y la palabra abeliana vacía es la aplicación $0 = (0)_{s\in S}$. La suma de palabras abelianas es asociativa, y su neutro es 0. El conjunto $\mathrm{N}^{(S)}$ junto con la suma y la palabra abeliana vacía, $\underline{\mathrm{N}}^{(S)} = (\mathrm{N}^{(S)}, +, 0)$ es el monoide abeliano libre sobre S.

Dada la equivalencia entre $\mathbf{Set}^S$ y $\mathbf{Set} \downarrow S$, las definiciones anteriores tienen una traducción inmediata a $\mathbf{Set} \downarrow S$. La categoría $\mathbf{Card} \downarrow S$ es un esqueleto de $\mathbf{Set} \downarrow S$. Sin embargo, los esqueletos en las categorías de S-foliaciones finitas y localmente finitas tienen una descripción menos directa, excepto si se realiza a través de la equivalencia de $\mathbf{Set}^S$ con $\mathbf{Set} \downarrow S$. No obstante, la subcategoría de $\mathbf{Set} \downarrow S$ determinada por las aplicaciones de la forma $w\colon n \longrightarrow S$, siendo n un número natural, denotada como $\mathbf{N} \downarrow S$, es equivalente a la de las S-foliaciones finitas y por tanto, a la de S-cardinales finitos $\mathbf{N}^{(S)}$.

Los objetos de $\mathbf{N} \downarrow S$ admiten, asimismo, una descripción alternativa, pero equivalente, como los elementos del monoide libre sobre S y como tales se denominan palabras sobre S.

2.1.12. Definición. Sea S un conjunto de tipos.

1. Una **palabra** sobre S es una aplicación $w\colon n \longrightarrow S$, con $n \in \mathrm{N}$. El conjunto de las palabras sobre S, $\bigcup_{n\in\mathrm{N}} S^n$, se denota como $S^\star$. A la única aplicación $\lambda\colon \emptyset \longrightarrow S$ se la denomina la **palabra vacía** sobre S.

2. Sea w una palabra sobre S. La **longitud** de w, $|w|$, es el dominio de la aplicación w. Si $s \in S$, el **número de las ocurrencias** de s en w, denotado mediante $|s|_w$, es $\mathrm{card}\{i \in |w| \mid w(i) = s\}$, por lo que $|w| = \sum_{s\in S}|s|_w$.

3. Si w y w' son palabras sobre S, la **concatenación** de w y w' es la palabra $w \curlywedge w'\colon |w| + |w'| \longrightarrow S$ definida como

$$w \curlywedge w' \begin{cases} |w| + |w'| \longrightarrow S \\ \qquad i \quad \longmapsto \begin{cases} w_i, & \text{si } 0 \leq i < |w|; \\ w'_{i-|w|}, & \text{si } |w| \leq i < |w'|. \end{cases} \end{cases}$$

   La concatenación de una familia finita $(w_\alpha)_{\alpha\in p}$, denotada por $\curlywedge_{\alpha\in p} w_\alpha$, se define como

$$\curlywedge_{\alpha\in\emptyset} w_\alpha = \lambda \qquad \text{y}$$

$$\curlywedge_{\alpha\in p+1} w_\alpha = \curlywedge_{\alpha\in p} w_\alpha \curlywedge w_p$$

El conjunto $S^\star$ junto con la concatenación y la palabra vacía, $\underline{S}^\star = (S^\star, \curlywedge, \lambda)$, es el monoide libre sobre S.

Para las operaciones finitarias definidas sobre S-foliaciones, es suficiente considerar operaciones con ariedades en $S^\star$ y coariedades en S. Las signaturas correspondientes son las $(\mathbf{Set}\downarrow S, S^\star \times S)$-signaturas.

La equivalencia entre las categorías $\mathbf{N}^{(S)}$ y $\mathbf{N}\downarrow S$ se refleja algebraicamente en el hecho de que el monoide abeliano libre sobre S es una imagen homomorfa del monoide libre sobre S, mediante el homomorfismo de $\underline{S}^\star$ en $\underline{\mathrm{N}}^{(S)}$ que a una palabra w le asigna la palabra abeliana $(|s|_w)_{s\in S}$, y que constituye la definición de la equivalencia sobre los objetos.

2.1.13. Proposición. Si S un conjunto de tipos, entonces se cumple que las categorías $\mathbf{Alg}(\mathbf{Set}^S, \mathrm{N}^{(S)} \times S)$ y $\mathbf{Alg}(\mathbf{Set}\downarrow S, S^\star \times S)$ son equivalentes. □

En la mayoría de los trabajos sobre álgebra heterogénea las ariedades para las operaciones finitarias sobre S-conjuntos se definen como los elementos del monoide libre sobre S y no como los del monoide abeliano libre, i.e., las signaturas se definen como $S^\star \times S$-conjuntos (con polimorfismo) o como $S^\star \times S$-foliaciones (sin polimorfismo). Esto equivale a considerar que las ariedades son los objetos en la imagen de $S^\star$ en $\mathbf{Set}^S$ mediante su equivalencia con $\mathbf{Set}\downarrow S$. La categoría de álgebras asociada, denotada como $\mathbf{Alg}(\mathbf{Set}^S, S^\star \times S)$, es equivalente a $\mathbf{Alg}(\mathbf{Set}^S, \mathrm{N}^{(S)} \times S)$. La diferencia fundamental es que en la primera, los argumentos de una operación son esencialmente una familia de elementos indexada por un número natural y, por tanto, están linealmente ordenados, mientras que en la segunda son un S-conjunto de familias indexadas por un número natural, y por consiguiente, están ordenados sólo localmente.

2.1.14. Definición. Sea A un S-conjunto y $w \in S^\star$. Entonces A_w denota el conjunto $\prod_{i\in|w|} A_{w_i}$. Si $f\colon A \longrightarrow B$ es una S-aplicación, entonces $f_w\colon A_w \longrightarrow B_w$ denota la única aplicación $\prod_{i\in|w|} f_{w_i}$ de A_w en B_w tal que, para cada $i \in |w|$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A_w \arrow[r, "f_w"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_i"'] & B_w \arrow[d, "\mathrm{pr}_i"] \\
A_{w_i} \arrow[r, "f_{w_i}"'] & B_{w_i}
\end{tikzcd}$$

2.1.15. Proposición. Sea A un S-conjunto, $w \in S^\star$ y $\downarrow\! w$ el S-conjunto asociado a la S-foliación w. Entonces los conjuntos $A_{\downarrow w}$ y A_w son isomorfos. Además, para cada S-aplicación $f\colon A \longrightarrow B$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_{\downarrow w} \arrow[r, "f_{\downarrow w}"] \arrow[d] & B_{\downarrow w} \arrow[d] \\ A_w \arrow[r, "f_w"] & B_w \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. El isomorfismo entre ambos conjuntos viene dado por las correspondencias biunívocas siguientes:

$$\begin{array}{ccl} A_{\downarrow w} & \longrightarrow & A_w \\ a & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ccc} |w| & \longrightarrow & \bigcup_{i\in|w|} A_{w(i)} \\ i & \longmapsto & a_{w(i)}(i) \end{array}\right. \end{array} \qquad \begin{array}{ccl} A_w & \longrightarrow & A_{\downarrow w} \\ b & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} \downarrow w_s & \longrightarrow & A_s \\ i & \longmapsto & b(i) \end{array}\right)_{s\in S} \end{array}$$

□

En lo que sigue, si no hay ambigüedad, y en virtud de la proposición anterior, no distinguiremos notacionalmente entre los elementos de $A_{\downarrow w}$ y los de A_w.

Signaturas algebraicas finitarias.

Presentamos a continuación las nociones de signatura algebraica y álgebra que utilizaremos en el resto de este trabajo.

2.1.16. Definición. Sea S un conjunto de tipos. Una **S-signatura algebraica finitaria** Σ es un $S^\star \times S$-conjunto $\Sigma = (\Sigma_{w,s})_{(w,s)\in S^\star\times S}$. Una **signatura algebraica finitaria** es un par $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$, en el que S es un conjunto de tipos y Σ una S-signatura algebraica finitaria.

Para una S-signatura algebraica finitaria Σ y un símbolo de operación σ en Σ, las expresiones $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ y $\sigma\colon w \longrightarrow s$ se consideran sinónimas. Además, el conjunto de los símbolos de operación de ariedad w se denota como $\Sigma_{w,\cdot}$ y el de los símbolos de coariedad s mediante $\Sigma_{\cdot,s}$.

2.1.17. Definición. Sea $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ una S-signatura algebraica finitaria y A un S-conjunto. Una **$\underline{\Sigma}$-estructura algebraica** F sobre A es una $S^\star \times S$-aplicación de Σ en $\mathrm{Op}_{S^\star\times S}(A) = (\mathbf{Set}(A_w, A_s))_{(w,s)\in S^\star\times S}$. Una **$\underline{\Sigma}$-álgebra** es un par $\underline{A} = (A, F)$, en el que A es un S-conjunto y F una $\underline{\Sigma}$-estructura algebraica sobre A.

En ocasiones, se denota a la $\underline{\Sigma}$-estructura de una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ por $F^{\underline{A}}$, y a las operaciones que la componen mediante $F^{\underline{A}}_\sigma$ o, simplemente, como $\sigma^{\underline{A}}$. En particular, cuando $\sigma\colon \lambda \longrightarrow s$, $\sigma^{\underline{A}}$ denota al valor de $F^{\underline{A}}_\sigma\colon 1 \longrightarrow A_s$ para el único miembro de 1.

2.1.18. Definición. Sea $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ una signatura algebraica finitaria.

1. Sean $\underline{A} = (A, F)$ y $\underline{B} = (B, G)$ dos $\underline{\Sigma}$-álgebras. Un **$\underline{\Sigma}$-homomorfismo** o, simplemente, un **homomorfismo** de $\underline{A}$ en $\underline{B}$ es un triplo ordenado $(\underline{A}, f, \underline{B})$, en el que f es una S-aplicación de A en B, tal que para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_w \arrow[r, "f_w"] \arrow[d, "F_\sigma"'] & B_w \arrow[d, "G_\sigma"] \\ A_s \arrow[r, "f_s"'] & B_s \end{tikzcd}$$

   conmuta, i.e., para cada $x \in A_w$, $f_s F_\sigma(x) = G_\sigma(f_w(x))$. El hecho de que $(\underline{A}, f, \underline{B})$ sea un $\underline{\Sigma}$-homomorfismo, se denota también mediante $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$.

2. Sean $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ y $g\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$. Su composición es el triplo $(\underline{A}, g \circ f, \underline{C})$. Para una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, el morfismo identidad, $\mathrm{id}_{\underline{A}}$, es $(\underline{A}, \mathrm{id}_A, \underline{A})$, con id_A la S-aplicación identidad sobre A.

2.1.19. Proposición. Sea $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ una signatura algebraica finitaria. Entonces las $\underline{\Sigma}$-álgebras y los homomorfismos entre ellas determinan una categoría, denotada como $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$. □

El conjunto de los homomorfismos de $\underline{A}$ en $\underline{B}$ se denota por $\mathrm{Hom}_{\underline{\Sigma}}(\underline{A}, \underline{B})$. A un homomorfismo de la forma $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}$ se le denomina un **endomorfismo** de $\underline{A}$ y al monoide de los endomorfismos se de $\underline{A}$ se le denota mediante $\underline{\mathrm{End}_{\underline{\Sigma}}}(\underline{A})$. Un endomorfismo cuya S-aplicación subyacente sea una biyección es un **automorfismo** y el grupo de los automorfismos se denota como $\underline{\mathrm{Aut}_{\underline{\Sigma}}}(\underline{A})$. En general, si no hay lugar para la confusión, se omite el subíndice.

Los **homomorfismos inyectivos** (resp., **sobreyectivos**, **biyectivos**) entre $\underline{\Sigma}$-álgebras son aquellos cuya S-aplicación subyacente es inyectiva (resp., sobreyectiva, biyectiva). En algunas ocasiones, si hay un $\underline{\Sigma}$-homomorfismo sobreyectivo de $\underline{A}$ en $\underline{B}$, diremos que $\underline{B}$ es una imagen homomorfa de $\underline{A}$.

En este trabajo se consideran, casi exclusivamente, las $\underline{\Sigma}$-álgebras en las que $\underline{\Sigma}$ es una signatura algebraica finitaria, por lo que, en lo que sigue, y si no se indica lo contrario, se entenderán por signaturas algebraicas las signaturas algebraicas finitarias. Además, en el resto de este capítulo, y salvo indicación expresa, suponemos que $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ es una signatura algebraica finitaria, arbitraria pero fija.

2.2 Subálgebras

En esta sección se estudia la noción de subálgebra y conceptos relacionados con ella. Los subconjuntos del S-conjunto subyacente de una $\underline{\Sigma}$-álgebra que están cerrados respecto de las operaciones estructurales del álgebra forman un sistema de clausura algebraico y, por tanto, un retículo algebraico. El operador de subálgebra generada asociado se caracteriza mediante el anti-isomorfismo existente entre sistemas de clausura algebraicos y operadores clausura algebraicos.

2.2.1. Definición. Sean $\underline{A} = (A, F)$ y $\underline{B} = (B, G)$ dos $\underline{\Sigma}$-álgebras y $X \subseteq A$.

1. Sea $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$. Se dice que X está **cerrado bajo la operación** $F_\sigma\colon A_w \longrightarrow A_s$ si, para cada $a \in X_w$, $F_\sigma(a) \in X_s$.

2. X es un **cerrado** de $\underline{A}$ si, para cada $\sigma \in \Sigma$ con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, y cualquier $a \in X_w$, $F_\sigma(a) \in X_s$, i.e., si X está cerrado bajo cada una de las operaciones estructurales de $\underline{A}$. El conjunto de los cerrados de $\underline{A}$ se denota por $\mathrm{Cl}(\underline{A})$.

3. $\underline{B}$ es una **sub-$\underline{\Sigma}$-álgebra** o, simplemente, **subálgebra**, de $\underline{A}$, $\underline{B} \leq \underline{A}$, si $B \subseteq A$ y la inclusión canónica, $\underline{\mathrm{in}}_{B,A}$, de $\underline{B}$ en $\underline{A}$ es un homomorfismo de $\underline{B}$ en $\underline{A}$. Si además $B \neq A$, se dice que B es una **subálgebra estricta** de A. El conjunto de las subálgebras de A se denota por $\mathrm{Sub}(\underline{A})$.

2.2.2. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces existe una biyección natural entre el conjunto de cerrados de $\underline{A}$ y el de las subálgebras de $\underline{A}$. □

En virtud de la proposición anterior, cuando X sea un cerrado de $\underline{A}$, la subálgebra de $\underline{A}$ canónicamente asociada a X se denota por $\underline{X}$.

2.2.3. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. El conjunto de los cerrados de A, $\mathrm{Cl}(\underline{A})$, es un sistema de clausura algebraico heterogéneo sobre A. Además, el retículo algebraico $\underline{\mathrm{Cl}}(\underline{A})$, determinado por $\mathrm{Cl}(\underline{A})$, y $\underline{\mathrm{Sub}}(\underline{A})$, el determinado por $\mathrm{Sub}(\underline{A})$, son isomorfos. □

2.2.4. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. El operador clausura algebraico sobre A canónicamente asociado a $\mathrm{Cl}(\underline{A})$ se denota por $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}$. Si $X \subseteq A$, $\mathrm{Sg}(X)$ es el **cerrado** de $\underline{A}$ **generado** por X i.e., el mínimo cerrado de $\underline{A}$ que S-contiene a X. A la subálgebra de $\underline{A}$ canónicamente asociada a $\mathrm{Sg}(X)$ se la denota por $\underline{\mathrm{Sg}}_{\underline{A}}(X)$.

En lo que sigue, se introducen unas nociones que permiten obtener una descripción más constructiva de la subálgebra generada por un S-conjunto.

2.2.5. Definición. Sea $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra.

1. El operador $\mathrm{E}_{\underline{A}}$, sobre $\mathrm{Sub}(A)$, se define como:

$$\mathrm{E}_{\underline{A}}\begin{cases} \mathrm{Sub}(A) \longrightarrow \mathrm{Sub}(A) \\ \quad X \quad \longmapsto X \cup \left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma_{\cdot,s}} F_\sigma[X_{\mathrm{ar}(\sigma)}]\right)_{s\in S} \end{cases}$$

2. Si $X \subseteq A$, entonces la familia $(\mathrm{E}^n_{\underline{A}}(X))_{n\in\mathrm{N}}$ en $\mathrm{Sub}(A)$ se define por recursión como:

$$\mathrm{E}^0_{\underline{A}}(X) = X,$$
$$\mathrm{E}^{n+1}_{\underline{A}}(X) = \mathrm{E}_{\underline{A}}(\mathrm{E}^n_{\underline{A}}(X)),\ n \geq 0.$$

   Además, convenimos que

$$\mathrm{E}^\omega_{\underline{A}}(X) = \bigcup\nolimits_{n\in\omega} \mathrm{E}^n_{\underline{A}}(X)$$

2.2.6. Proposición. Si $\underline{A}$ es una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $X \subseteq A$, entonces se cumple que $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) = \mathrm{E}^\omega_{\underline{A}}(X)$. □

La proposición anterior proporciona una demostración alternativa de la algebricidad de $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}$. En efecto, si $a \in \mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X)$, entonces $a \in \mathrm{E}^n_{\underline{A}}(X)$ para algún $n \in \mathrm{N}$. De ello se sigue que $a \in \mathrm{E}^n_{\underline{A}}(Y)$ para algún S-conjunto finito $Y \subseteq X$ y por consiguiente que $a \in \mathrm{Sg}_{\underline{A}}(Y)$, lo que equivale a la algebricidad de $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}$.

2.2.7. Definición. Sea $n \in \mathrm{N}$ y $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Entonces $\underline{\Sigma}$ es $\leq n$-aria si para cada $(w,s) \in S^\star \times S$ tal que $|w| > n$, $\Sigma_{w,s} = \emptyset$.

2.2.8. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, siendo $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica $\leq n$-aria. Entonces $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}$ es $\leq n$-ario, i.e., $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) = \mathrm{Sg}^\omega_{\underline{A},\leq n}(X)$.

Demostración. Para cada $X \subseteq A$, $\mathrm{E}_{\underline{A}} \subseteq \mathrm{Sg}_{\underline{A},\leq n} \subseteq \mathrm{Sg}_{\underline{A}}$. Por consiguiente,

$$\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) = \mathrm{E}^\omega_{\underline{A}}(X) = \bigcup\nolimits_{m\in\omega} \mathrm{E}^m_{\underline{A}}(X) \subseteq \bigcup\nolimits_{m\in\omega} \mathrm{Sg}^m_{\underline{A},\leq n}(X) \subseteq \mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X)$$

y puesto que $\mathrm{Sg}^\omega_{\underline{A},\leq n}(X) = \bigcup_{m\in\omega} \mathrm{Sg}^m_{\underline{A},\leq n}(X)$, se cumple $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) = \mathrm{Sg}^\omega_{\underline{A},\leq n}(X)$. □

El Teorema de Birkhoff & Frink

En el álgebra homogénea, todo sistema de clausura algebraico $\mathcal{C}$ sobre A coincide con el conjunto de las partes cerradas de algún álgebra $\underline{A}$. Además, puesto que todo retículo algebraico $\underline{L}$ se puede representar como el retículo algebraico determinado por el conjunto de los puntos fijos de algún operador clausura algebraico, sabemos que, para algún álgebra $\underline{A}$ de alguna especie, $\underline{L}$ es siempre isomorfo al retículo algebraico canónicamente asociado al conjunto de los puntos fijos del operador $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}$: $\underline{L} \cong \underline{S}(\underline{A}) = \underline{\mathrm{Fix}}(\mathrm{Sg}_{\underline{A}})$,

Aunque la última afirmación sigue siendo cierta en el ámbito del álgebra heterogénea, i.e., para todo retículo algebraico $\underline{L}$ existe una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ tal que $\underline{L} \cong \underline{\mathrm{Fix}}(\mathrm{Sg}_{\underline{A}})$, no es cierto que, para todo conjunto de tipos S y todo S-conjunto A, cada S-operador clausura algebraico sobre A coincida con $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}$ para alguna signatura algebraica heterogénea $\underline{\Sigma}$ y alguna $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$.

Categorialmente, se tiene que en el diagrama

$$\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \xrightarrow{\ \mathrm{Sg}\ } \mathbf{ClSp}(S) \xrightarrow{\ \mathrm{Fix}\ } \mathbf{CLat}_{\bigwedge}^{\mathrm{op}}$$

los functores Fix y $\mathrm{Fix} \circ \mathrm{Sg}$ son esencialmente sobreyectivos, pero Sg no lo es.

Esto último fue puesto de manifiesto por Mathiessen (v. [Mat72]), mostrando que la generalización automática de ciertos teoremas del álgebra universal homogénea al álgebra universal heterogénea es incorrecta. Posteriormente, Climent y Fernandino (v. [CF90]) determinaron una clase de operadores clausura algebraicos, los operadores uniformes 2-algebraicos, para los que existen $\underline{\Sigma}$-álgebras tales que su operador subálgebra generada pertenece a la clase. La condición de ser 2-algebraico es, sin embargo, innecesaria y en esta sección se caracterizan los operadores clausura heterogéneos que son de la forma $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}$, para alguna $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, como aquellos que tienen la propiedad adicional de ser uniformes, confirmando una conjetura de A. Blass al respecto.

2.2.9. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces el operador clausura algebraico $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}$ es uniforme.

Demostración. El operador $\mathrm{E}_{\underline{A}}$ es uniforme: sean $X, Y \subseteq A$ y supongamos que $\mathrm{supp}(X) = \mathrm{supp}(Y)$. Si $s \in \mathrm{supp}(\mathrm{E}_{\underline{A}}(X))$ y $s \in \mathrm{supp}(X)$ entonces $s \in \mathrm{supp}(Y)$. Si $s \notin \mathrm{supp}(X)$ entonces existe un $w \in S^\star$ tal que $\sigma\colon w \longrightarrow s$ y $F_\sigma[X_w] \neq \emptyset$. Pero entonces $F_\sigma[Y_w] \neq \emptyset$, luego $s \in \mathrm{supp}(\mathrm{E}_{\underline{A}}(Y))$.

Puesto que $\mathrm{E}_{\underline{A}}$ es uniforme se sigue, por inducción, que para cada $n \in \mathrm{N}$, $\mathrm{E}_{\underline{A}}^n$ es uniforme y, por tanto que $\mathrm{E}_{\underline{A}}^\omega = \mathrm{Sg}_{\underline{A}}$ es también uniforme. □

2.2.10. Teorema. Sea J un operador clausura algebraico heterogéneo sobre un S-conjunto A. Si J es *uniforme*, entonces $\mathrm{J} = \mathrm{Sg}_{\underline{A}}$ para algún álgebra $\underline{A}$.

Demostración. Sea Σ la S-signatura definida, para cada $(w, s) \in S^\star \times S$, como:

$$\Sigma_{w,s} = \{\sigma_{X,b} \mid X \subseteq A\ ,\ b \in \mathrm{J}(X)_s \text{ y } \forall s \in S,\ |s|_w = \mathrm{card}(X_s)\}$$

Sea $\mathcal{F}$ la familia $(Y_s)_{Y \in \mathrm{Sub}(A), s \in \mathrm{supp}(Y)}$ y f una función de elección para $\mathcal{F}$, i.e., un miembro de $\prod \mathcal{F}$, que es no vacío puesto que, para cada $Y \in \mathrm{Sub}(A)$ con

$s \in \operatorname{supp}(Y)$, $Y_s \neq \emptyset$. Además, para cada $w \in S^\star$ y cada $a \in A_w$, sea $\mu(w,a)$ el S-conjunto $(\{a_i \mid w(i) = s\})_{s\in S}$.

Entonces $\underline{A} = (A, F)$ es la $\underline{\Sigma}$-álgebra en la que, para cada $\sigma_{X,b} \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, la operación estructural $F_{\sigma_{X,b}}$ es la definida como

$$F_{\sigma_{X,b}} \begin{cases} A_w \longrightarrow A_s \\ \quad a \quad\longmapsto \begin{cases} b & \text{si } \mu(w,a) = X \\ f(\mathrm{J}(\mu(w,a)), s) & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{cases}$$

Para que la definición anterior sea correcta hay que demostrar que s pertenece al soporte de $\mathrm{J}(\mu(w,a))$. Si $t \in S$ es tal que $t \in \operatorname{supp}(\mu(w,a))$, tenemos que $\mu(w,a)_t$ no es vacío, i.e., que existe un $i \in |w|$ con $w(i) = t$. Por tanto, se cumple que $0 < |t|_w = \operatorname{card}(X_t)$ (por la definición de las operaciones) y $t \in \operatorname{supp}(X)$.

Recíprocamente, si $t \in \operatorname{supp}(X)$, $|t|_w > 0$, y existe un $i \in |w|$ tal que $w(i) = t$, entonces $a_i \in A_t$, $\mu(w,a)_t \neq \emptyset$ y $t \in \operatorname{supp}(\mu(w,a))$. Por consiguiente, $\operatorname{supp}(\mu(w,a))$ es igual a $\operatorname{supp}(X)$ y, por la uniformidad de J, $\operatorname{supp}(\mathrm{J}(\mu(w,a)))$ coincide con $\operatorname{supp}(\mathrm{J}(X))$. Como $b \in \mathrm{J}(X)_s$ por definición, $s \in \operatorname{supp}(\mathrm{J}(\mu(w,a)))$, y la definición es correcta.

Ahora, sean $X \subseteq A$, $s \in S$ y $b \in \mathrm{J}(X)_s$. Por ser J algebraico, $b \in \mathrm{J}(Y)_s$, con $Y \subseteq X$ y $\operatorname{card}(Y) = n$, con n finito. Por ser $\mathrm{N}^{(S)}$ una imagen homomorfa de $S^\star$, existe, para la palabra abeliana $(\operatorname{card}(Y_s))_{s\in S}$, una palabra $w \in S^n$ tal que, para cada $s \in S$, $\operatorname{card}(Y_s) = |s|_w$, por lo que $\sigma_{Y,b} \in \Sigma_{w,s}$.

Sea $a \in A_w$ la aplicación de n en $\bigcup A$ obtenida por composición del isomorfismo de n en $\coprod Y$ con la única aplicación de $\coprod Y$ en $\bigcup A$ que hace conmutativo el triángulo de la izquierda del diagrama:

$$\begin{tikzcd} Y_s \arrow[r, "\mathrm{in}_s"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_s"'] & \coprod (Y_s)_{s\in S} \arrow[d] & n \arrow[l, "\sim"'] \arrow[dl, "a"] \\ & \bigcup_{s\in S} A_s & \end{tikzcd}$$

El S-conjunto Y coincide pues con $\mu(w,a)$ y $F_{\sigma_{Y,b}}(a) = b$, por lo que tenemos que $\mathrm{J}(X) \subseteq Sg_{\underline{A}}(X)$.

Para la inclusión inversa es suficiente demostrar que si X es un sub-S-conjunto de A, entonces $\mathrm{E}_{\underline{A}}(X) \subseteq \mathrm{J}(X)$, ya que entonces se deduce, por inducción, que $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) \subseteq \mathrm{J}(X)$. Sea pues $s \in S$, $c \in \mathrm{E}_{\underline{A}}(X)_s$. Si $c \in X_s$, $c \in \mathrm{J}(X)_s$ por ser J extensivo. Si $c \notin X_s$, existe un $w \in S^\star$, un $\sigma_{Y,b} \in \Sigma_{w,s}$ y un $a \in X_w$ tal que $F_{\sigma_{Y,b}}(a) = c$, con $Y \subseteq A$ y $b \in \mathrm{J}(Y)_s$. En el caso de que $\mu(w,a) = Y$, $c = b$, luego $c \in \mathrm{J}(Y)_s$. Si $\mu(w,a) \neq Y$, $F_{\sigma_{Y,b}}(a)$ es un miembro de $\mathrm{J}(\mu(w,a))_s$ que está incluido en $\mathrm{J}(X)$ ya que $\mu(w,a) \subseteq X$ y J es un operador isótono. $\square$

2.2.11. Corolario. Sea J un operador clausura algebraico. Entonces $\mathrm{J} = \mathrm{Sg}_{\underline{A}}$ para alguna $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ exactamente si J es uniforme. □

2.3 Congruencias

Consideramos ahora las congruencias sobre las $\underline{\Sigma}$-álgebras y demostramos algunas proposiciones relativas a ellas. Las congruencias sobre una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ determinan un retículo algebraico, que es un subretículo completo del de las equivalencias sobre el S-conjunto subyacente del álgebra y su operador congruencia generada asociado es un operador clausura algebraico.

2.3.1. Definición. Sea $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $\Phi \in \mathrm{Eqv}(A)$. Se dice que Φ es una **congruencia** sobre $\underline{A}$ si Φ es compatible con las operaciones de $\underline{A}$, i.e., si para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$ y $w \neq \lambda$, y cada $a, b \in A_w$:

$$\frac{\forall i \in |w|,\ a_i \equiv_{\Phi_{w(i)}} b_i}{F_\sigma(a) \equiv_{\Phi_s} F_\sigma(b)}$$

El conjunto de las congruencias sobre $\underline{A}$ se denota por $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$ y cuando se le considera ordenado por la S-inclusión como $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{A})$.

2.3.2. Definición. Sea $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$. El **álgebra cociente** de $\underline{A}$ entre Φ, $\underline{A}/\Phi$, es la $\underline{\Sigma}$-álgebra cuyo S-conjunto subyacente es $A/\Phi = (A_s/\Phi_s)_{s\in S}$, y cuyas operaciones estructurales $F_\sigma^{\underline{A}/\Phi}$ están definidas, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, como:

$$F_\sigma^{\underline{A}/\Phi} \begin{cases} (A/\Phi)_w & \longrightarrow A_s/\Phi_s \\ ([a_i]_{\Phi_{w(i)}})_{i\in|w|} & \longmapsto [F_\sigma^{\underline{A}}(a_i)_{i\in|w|}]_{\Phi_s} \end{cases}$$

Demostramos a continuación que el retículo completo de las congruencias sobre un álgebra es un subretículo del retículo de las equivalencias sobre el conjunto heterogéneo subyacente del álgebra. Para ello necesitamos el siguiente lema.

2.3.3. Lema. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y Φ el supremo en $\underline{\mathrm{Eqv}}(\underline{A})$ de una familia no vacía $(\Phi^i)_{i\in I}$ de congruencias sobre $\underline{A}$. Entonces se tiene que para cada $w \in S^\star$, $c \in A_w$, a, $b \in A_{w_j}$, $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$ y $j \in |w|$, si $a \equiv_{\Phi_{w_j}} b$, entonces

$$F_\sigma(c_o, \ldots, c_{j-1}, a, c_{j+1}, \ldots, c_{|w|-1}) \equiv_{\Phi_s} F_\sigma(c_o, \ldots, c_{j-1}, b, c_{j+1}, \ldots, c_{|w|-1})$$

Demostración. El supremo en el retículo $\underline{\mathrm{Eqv}}(A)$ de una familia no vacía $(\Phi^i)_{i\in I}$ de congruencias sobre $\underline{A}$ es la S-relación de equivalencia que, en su coordenada s-ésima, es:

$$\left\{ (a,b) \in A_s^2 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists n \geq 1, x \in A_s^{n+1}, x_0 = a, x_n = b \text{ y} \\ \forall p \in n, (x_p, x_{p+1}) \in \bigcup_{i\in I} \Phi_s^i \end{array} \right\}$$

o, lo que es equivalente,

$$\left\{ (a,b) \in A_s^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists n \geq 1, x \in A_s^{n+1}, x_0 = a, x_n = b \text{ y} \\ \exists \alpha : n \to I,\, \forall p \in n,\, (x_p, x_{p+1}) \in \Phi_s^{\alpha(p)} \end{array} \right\}$$

Ahora, sea $w \in S^\star$, $c \in A_w$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$ y supongamos que $a \equiv_{\Phi_{w_j}} b$. Por definición, existe un $x \in A_{w_j}^{n+1}$ tal que $x_0 = a$ y $x_n = b$ y un $\alpha\colon n \longrightarrow I$ tal que, para cada $p \in n$, $x_p \equiv_{\Phi_s^{\alpha(p)}} x_{p+1}$, luego

$$\begin{aligned}
&F_\sigma(c_o, \ldots, c_{j-1}, a, c_{j+1}, \ldots, c_{|w|-1}) \\
&= F_\sigma(c_o, \ldots, c_{j-1}, x_0, c_{j+1}, \ldots, c_{|w|-1}) \\
&\equiv_{\Phi_s^{\alpha(o)}} F_\sigma(c_o, \ldots, c_{j-1}, x_1, c_{j+1}, \ldots, c_{|w|-1}) \\
&\vdots \\
&\equiv_{\Phi_s^{\alpha(n-2)}} F_\sigma(c_o, \ldots, c_{j-1}, x_{n-1}, c_{j+1}, \ldots, c_{|w|-1}) \\
&\equiv_{\Phi_s^{\alpha(n-1)}} F_\sigma(c_o, \ldots, c_{j-1}, x_n, c_{j+1}, \ldots, c_{|w|-1}) \\
&= F_\sigma(c_o, \ldots, c_{j-1}, b, c_{j+1}, \ldots, c_{|w|-1})
\end{aligned}$$

lo que demuestra el lema. □

2.3.4. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{A})$ es un subretículo completo de $\underline{\mathrm{Eqv}}(A)$, el retículo de las S-relaciones de equivalencias sobre A.

Demostración. Es evidente que la intersección de una familia no vacía de congruencias es una congruencia.

Veamos que el supremo en el retículo $\underline{\mathrm{Eqv}}(A)$ de una familia no vacía $(\Phi^i)_{i \in I}$ de congruencias sobre $\underline{A}$ es también una congruencia. Sea $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, $w \neq \lambda$ y $a, b \in A_w$ tal que, para cada $j \in |w|$, $a_j \equiv_{\Phi_{w_j}} b_j$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
F_\sigma(a_0, \ldots, a_j, \ldots, a_{|w|-1}) &\equiv_{\Phi_s} F_\sigma(b_0, \ldots, a_j, \ldots, a_{|w|-1}) \\
&\vdots \\
&\equiv_{\Phi_s} F_\sigma(b_0, \ldots, b_j, \ldots, a_{|w|-1}) \\
&\vdots \\
&\equiv_{\Phi_s} F_\sigma(b_0, \ldots, b_j, \ldots, b_{|w|-1})
\end{aligned}$$

mediante $|w|$ aplicaciones del lema anterior, lo que demuestra la proposición. □

2.3.5. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$ es un sistema de clausura algebraico sobre $A \times A$.

Demostración. Si $(\Phi^i)_{i\in I}$ es una familia no vacía dirigida superiormente de congruencias sobre $\underline{A}$, entonces $\bigcup_{i\in I}\Phi^i = \bigvee_{i\in I}\Phi^i$. En efecto, si $(a,b)\in\bigvee_{i\in I}\Phi^i_s$, entonces $a = x_0 \equiv_{\Phi^{i_0}_s} x_1 \equiv \cdots \equiv_{\Phi^{i_{n-1}}_s} x_n = b$, para algún $n \geq 1$ y alguna $n+1$ familia x. Ahora bien, puesto que $(\Phi^i)_{i\in I}$ es una familia dirigida, hay un $j\in I$, tal que, para cada $p\in n$, $\Phi^j \supseteq \Phi^{i_p}$, por lo que $a \equiv_{\bigcup_{i\in I}\Phi^i_s} b$. Luego $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$ está cerrado bajo familias dirigidas. Además, ya que $\nabla_A = A\times A$ es una congruencia, y $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$ está cerrado bajo intersecciones de familias arbitrarias no vacías, $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$ es un sistema de clausura algebraico. □

2.3.6. Definición. Si $\underline{A}$ es una $\underline{\Sigma}$-álgebra, el operador clausura algebraico heterogéneo asociado al sistema de clausura algebraico $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$ sobre $A\times A$ se denota como $\mathrm{Cg}_{\underline{A}}$, y si $\Phi\subseteq A\times A$, a $\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)$ se la denomina la **congruencia generada** por Φ.

El operador de congruencia generada se puede caracterizar también como un operador subálgebra, lo que proporciona una demostración alternativa de la algebricidad de $\mathrm{Cgr}(\underline{A})$.

2.3.7. Proposición. Para cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, existe una S-signatura algebraica heterogénea $\underline{\Pi}$, y una estructura algebraica de $\underline{\Pi}$-álgebra G sobre $A\times A$ tal que $\mathrm{Cl}(A\times A, G) = \mathrm{Cgr}(\underline{A})$, i.e., $\mathrm{Cg}_{\underline{A}} = \mathrm{Sg}_{(A\times A,G)}$.

Demostración. La S-signatura $\underline{\Pi}$ se construye adjuntando a Σ, para cada $s\in S$, los símbolos siguientes:

1. $\omega_a^{\lambda,s}\colon \lambda \longrightarrow s$, para cada $a\in A_s$
2. $\omega^{(s),s}\colon (s)\longrightarrow S$
3. $\omega^{(s,s),s}\colon (s,s)\longrightarrow s$

Para cada $\sigma\in\Sigma$, con $\sigma\colon w\longrightarrow s$, se define G_σ como:

$$G_\sigma \begin{cases} A_w & \longrightarrow A_s \\ ((a_i,b_i)\mid i\in|w|) & \longmapsto (F_\sigma(a_i\mid i\in|w|), F_\sigma(a_i\mid i\in|w|)) \end{cases}$$

Los nuevos símbolos se realizan, para cada $s\in S$, como:

1. $G_{\omega_a^{\lambda,s}} = (a,a)$
2. $G_{\omega^{(s),s}}(a,b) = (b,a)$
3. $G_{\omega^{(s,s),s}}((a,b),(c,d)) = \begin{cases} (a,d), \text{ si } b = c; \\ (a,b), \text{ en caso contrario.}\end{cases}$

Se cumple que Φ es un cerrado de la Π-álgebra $(A \times A, G)$ exactamente cuando Φ es una congruencia sobre $\underline{A}$. $\square$

Los compactos del retículo $\underline{\mathrm{Con}}(\underline{A})$ son, en virtud de 1.4.39 las congruencias finitamente generadas, i.e., las generadas por los sub-S-conjuntos finitos de $A \times A$.

2.3.8. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $\Phi \subseteq A^2$. Entonces

1. $\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi) = \bigvee_{(a,b)\in\Phi_s, s\in S} \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b))$
2. Si $\Phi \in \mathrm{Con}(\underline{A})$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi &= \bigcup\nolimits_{(a,b)\in\Phi_s, s\in S} \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b)) \\ &= \bigvee\nolimits_{(a,b)\in\Phi_s, s\in S} \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b))\end{aligned}$$

Demostración. 1. Si $(a,b) \in \Phi_s$ entonces

$$(a,b) \in \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b))_s \subseteq \bigvee\nolimits_{(a,b)\in\Phi_s, s\in S} \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b))_s$$

luego

$$\Phi \subseteq \bigvee\nolimits_{(a,b)\in\Phi_s, s\in S} \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b))$$

y por tanto

$$\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi) \subseteq \bigvee\nolimits_{(a,b)\in\Phi_s, s\in S} \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b))$$

Por otra parte, para cada $(a,b) \in \Phi_s$ y cada $s \in S$, $(a,b) \in \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)_s$. Por consiguiente,

$$\mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b)) \subseteq \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)$$

luego

$$\bigvee\nolimits_{(a,b)\in\Phi_s, s\in S} \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b)) \subseteq \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)$$

2. Si $(a,b) \in \Phi_s$, $(a,b) \in \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b))_s \subseteq \Phi_s$, luego $\delta^s(a,b) \subseteq \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b))_s$ por lo que

$$\begin{aligned}\Phi = \bigcup\nolimits_{(a,b)\in\Phi_s, s\in S} \delta^s(a,b) &\subseteq \bigcup\nolimits_{(a,b)\in\Phi_s, s\in S} \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b)) \\ &\subseteq \bigvee\nolimits_{(a,b)\in\Phi_s, s\in S} \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a,b)) \\ &\subseteq \Phi\end{aligned}$$

$\square$

2.3.9. Definición. Sean Φ y Ψ un par de congruencias sobre una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$. Entonces Φ y Ψ **conmutan** si $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.

2.3.10. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y Φ, $\Psi \in \mathrm{Con}(\underline{A})$. Las siguientes proposiciones son equivalentes

1. $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.
2. $\Phi \vee \Psi = \Phi \circ \Psi$.
3. $\Phi \circ \Psi \subseteq \Psi \circ \Phi$.

□

Para cualquier $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, se cumple, en virtud de la proposición 2.3.5, que, para cualquier S-relación sobre A, existe la mínima congruencia sobre $\underline{A}$ que la contiene. Además, para cada S-relación *de equivalencia* sobre A existe la máxima congruencia contenida en ella. Tal congruencia, a la que se denomina la **congruencia cogenerada** por la relación de equivalencia, es el supremo en $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{A})$ de las congruencias contenidas en ella.

2.3.11. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Se dice que $\underline{A}$ es **simple** si A es subfinal o las únicas congruencias en $\underline{A}$ son la identidad y la S-relación total, i.e., si $\mathrm{Cgr}(\underline{A}) = \{\Delta_A, \nabla_A\}$. Además, una congruencia Φ sobre $\underline{A}$ es **maximal** si el intervalo $[\Phi, \nabla]$ en $\mathrm{Con}(\underline{A})$ contiene a lo sumo dos congruencias.

2.3.12. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces Φ es una congruencia maximal sobre $\underline{A}$ precisamente si $\underline{A}/\Phi$ es simple o $\Phi = \nabla_A$. □

2.4 Homomorfismos

En las proposiciones que siguen se establecen algunas de las relaciones entre los conceptos de homomorfismo, subálgebra y congruencia.

2.4.1. Proposición (Principio de la prolongación de las identidades). Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra generada por X, i.e., $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) = A$. Si $f, g\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ son homomorfismos y coinciden en X, entonces $f = g$. □

2.4.2. Proposición. Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras, X un cerrado de $\underline{A}$ e Y uno de $\underline{B}$. Entonces $f[X] \in \mathrm{Cl}(\underline{B})$ y $f^{-1}[Y] \in \mathrm{Cl}(\underline{A})$. A las subálgebras asociadas se las denota como $f[\underline{X}]$ y $f^{-1}[\underline{Y}]$. □

2.4.3. Proposición (Propiedad universal de la subálgebra). Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, $\underline{X}$ una subálgebra de $\underline{A}$ y $f\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{A}$. Si $\mathrm{Im}(f) \subseteq X$, entonces existe un único homomorfismo de $\underline{B}$ en $\underline{X}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & \underline{B} \arrow[dl] \arrow[d, "f"] \\ \underline{X} \arrow[r, "\mathrm{in}_{\underline{X}}"'] & \underline{A} \end{tikzcd}$$

siendo $\mathrm{in}_{\underline{X}}$, la **inclusión canónica** de $\underline{X}$ en $\underline{A}$, el homomorfismo inyectivo determinado por in_X.

La factorización clásica de un homomorfismo a través de su imagen también se cumple para las álgebras heterogéneas, en virtud de la proposición anterior.

2.4.4. Proposición. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos $\underline{\Sigma}$-álgebras y $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo. Entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^{\mathrm{sb}}"'] & & \underline{B} \\ & \underline{\mathrm{Im}}(f) \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\underline{\mathrm{Im}}(f)}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, siendo f^{sb} la *sobreyectivizada* de f, i.e., el homomorfismo sobreyectivo determinado por la S-aplicación cuya coordenada s-ésima está definida como :

$$f_s^{\mathrm{sb}} \begin{cases} A_s \longrightarrow \mathrm{Im}(f_s) \\ \;a \longmapsto f_s(a) \end{cases}$$

2.4.5. Proposición. Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras y X un sub-S-conjunto de A. Entonces $f[\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X)] = \mathrm{Sg}_{\underline{B}}(f[X])$. En general, si $Y \subseteq B$, $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(f^{-1}[Y]) \subseteq f^{-1}[\mathrm{Sg}_{\underline{B}}(Y)]$. □

2.4.6. Proposición. Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras y X un S-conjunto de generadores de A. Entonces f es sobreyectivo exactamente si $f[X]$ es un S-conjunto de generadores de $\underline{B}$. □

Las propiedades de los homomorfismos relacionados con la noción de congruencia son similares a sus contrapartidas homogéneas.

2.4.7. Definición. Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras. El **núcleo** de f, $\mathrm{Ker}(f)$, es la S-relación en A cuya coordenada s-ésima es $\mathrm{Ker}(f_s)$, el núcleo de f_s.

2.4.8. Proposición. Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces $\mathrm{Ker}(f)$, es una congruencia sobre $\underline{A}$. □

2.4.9. Proposición (Propiedad universal del cociente). Dada una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, una congruencia Φ sobre $\underline{A}$ y $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, si $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, entonces hay un único homomorfismo de $\underline{A}/\Phi$ en $\underline{B}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\Phi}"] \arrow[dr, "f"'] & \underline{A}/\Phi \arrow[d] \\
 & \underline{B}
\end{tikzcd}$$

siendo $\mathrm{pr}^{\Phi}\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}/\Phi$, la **proyección canónica** de $\underline{A}$ en $\underline{A}/\Phi$, el homomorfismo sobreyectivo que, para cada $s \in S$, está definido como:

$$\mathrm{pr}^{\Phi}_s \begin{cases} A_s \longrightarrow A_s/\Phi_s \\ a \longmapsto [a]_{\Phi_s} \end{cases}$$

La siguiente proposición establece que toda imagen homomorfa es isomorfa a un álgebra cociente.

2.4.10. Proposición. Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo sobreyectivo de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces $\underline{A}/\mathrm{Ker}(f)$ es isomorfa a $\underline{B}$. El isomorfismo viene dado por la S-aplicación cuya coordenada s-ésima es:

$$\begin{array}{rcl} A_s/\mathrm{Ker}(f_s) & \longrightarrow & B \\ [a]_{\mathrm{Ker}(f_s)} & \longmapsto & f_s(a) \end{array}$$

□

La factorización clásica de un homomorfismo a través de su núcleo también se cumple para las álgebras heterogéneas, en virtud de la proposición 2.4.9.

2.4.11. Proposición. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos $\underline{\Sigma}$-álgebras y $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo. Entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}^{\mathrm{Ker}(f)}"'] & & \underline{B} \\
 & \underline{A}/\mathrm{Ker}\,(f) \arrow[ur, "f^{\mathrm{i}}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo f^{i} la *inyectivizada* de f, i.e., el homomorfismo inyectivo asociado a la S-aplicación cuya coordenada s-ésima es:

$$f^{\mathrm{i}}_s \begin{cases} A_s/\operatorname{Ker}(f_s) \longrightarrow B_s \\ [a]_{\operatorname{Ker}(f_s)} \longmapsto f_s(a) \end{cases}$$

En la proposición que sigue se establece que la factorización de un homomorfismo a través de su núcleo y de su imagen también se cumple para las álgebras heterogéneas.

2.4.12. Proposición. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos $\underline{\Sigma}$-álgebras y $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo. Entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{pr}^{\operatorname{Ker}(f)}"'] & \underline{B} \\ \underline{A}/\operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "f^{\mathrm{b}}"'] & \underline{\mathrm{Im}}(f) \arrow[u, "\mathrm{in}_{\underline{\mathrm{Im}}(f)}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., $f = \mathrm{in}_{\underline{\mathrm{Im}}(f)}, \circ f^{\mathrm{b}} \circ \mathrm{pr}^{\operatorname{Ker}(f)}$, siendo f^{b} la *biyectivizada* de f, i.e., el homomorfismo biyectivo asociado a la S-aplicación cuya coordenada s-ésima es

$$f^{\mathrm{b}}_s \begin{cases} A_s/\operatorname{Ker}(f_s) \longrightarrow \mathrm{Im}(f_s) \\ [a]_{\operatorname{Ker}(f_s)} \longmapsto f_s(a) \end{cases}$$

Además, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\operatorname{Ker}(f)}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{sb}}"'] & \underline{A}/\operatorname{Ker}(f) \arrow[dl, "f^{\mathrm{b}}"'] \arrow[d, "f^{\mathrm{i}}"] \\ \underline{\mathrm{Im}}(f) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\underline{\mathrm{Im}}(f)}"'] & \underline{B} \end{tikzcd}$$

2.4.13. Proposición. Sean Φ, $\Psi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$ y $\Phi \subseteq \Psi$. Entonces se cumple:

1. Ψ/Φ es una congruencia sobre $\underline{A}/\Phi$.
2. Existe un único homomorfismo $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ de $\underline{A}/\Phi$ en $\underline{A}/\Psi$ tal que $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi} \circ \mathrm{pr}^{\Phi} = \mathrm{pr}^{\Psi}$, i.e., el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \underline{A} \arrow[dl, "\mathrm{pr}^{\Phi}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}^{\Psi}"] & \\ \underline{A}/\Phi \arrow[rr, "\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}"'] & & \underline{A}/\Psi \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $\mathrm{p}_{\Phi,\Psi}$ es sobreyectivo.

3. Las $\underline{\Sigma}$-álgebras $(\underline{A}/\Phi)/(\Psi/\Phi)$ y $\underline{A}/\Psi$ son isomorfas. El isomorfismo se define, en la coordenada s-ésima, como:

$$\begin{aligned} (A_s/\Phi_s)/(\Psi_s/\Phi_s) &\longrightarrow A_s/\Psi_s \\ [[a]_{\Phi_s}]_{\Psi_s/\Phi_s} &\longmapsto [a]_{\Psi_s} \end{aligned}$$

4. $\Psi/\Phi = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}_{\Phi,\Psi})$.

□

2.4.14. Proposición. Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Si Φ es una congruencia sobre $\underline{B}$, entonces la imagen inversa de Φ mediante f^2 es una congruencia sobre $\underline{A}$, i.e., $(f^2)^{-1}[\Phi] \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$. □

2.4.15. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, $X \in \mathrm{Cl}(\underline{A})$ y $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$. Entonces se cumple que:

1. $\mathrm{Sat}_\Phi(X) \in \mathrm{Cl}(\underline{A})$.

2. $\Phi\!\upharpoonright\! \mathrm{Sat}_\Phi(X)$ es una congruencia sobre $\underline{\mathrm{Sat}_\Phi}(X)$.

3. $\underline{X}/(\Phi\!\upharpoonright\!\underline{X})$ y $\underline{\mathrm{Sat}_\Phi}(X)/(\Phi\!\upharpoonright\!\underline{\mathrm{Sat}_\Phi}(X))$ son isomorfas.

□

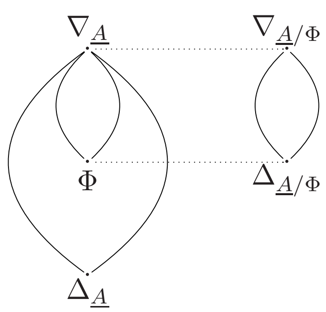
2.4.16. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$. Entonces los retículos $(\Uparrow\Phi, \subseteq)$ y $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{A}/\Phi)$ son isomorfos. □

Demostración. El isomorfismo viene dado por la aplicación

$$\begin{aligned} \Uparrow\Phi &\longrightarrow \mathrm{Cgr}(\underline{A}/\Phi) \\ \Psi &\longmapsto \Psi/\Phi \end{aligned}$$

□

La proposición anterior se puede ilustrar con la siguiente figura:



2.4.17. Proposición. Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo sobreyectivo de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Si $\Phi \subseteq A^2$, entonces

$$f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)] = \mathrm{Cg}_{\underline{B}}(f^2[\Phi])$$

Demostración. $(f^2)^{-1}[\mathrm{Cg}_{\underline{B}}(f^2[\Phi])]$ es una congruencia sobre $\underline{A}$ que contiene a $\Phi \cup \mathrm{Ker}(f)$, luego contiene a $\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)$, así que, por ser f sobreyectiva, $\mathrm{Cg}_{\underline{B}}(f^2[\Phi])$ contiene a $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)]$.

Por otra parte, al ser f sobreyectiva, hay un isomorfismo entre los conjuntos ordenados $(\Uparrow \mathrm{Ker}(f), \subseteq)$ y $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{B})$. Pero $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)$ así que corresponde a una congruencia $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)]$ que contiene a $f^2[\Phi]$, luego $f^2[\mathrm{Ker}(f) \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\Phi)]$ contiene a $\mathrm{Cg}_{\underline{B}}(f^2[\Phi])$. □

2.5 Operaciones polinómicas.

En esta sección se estudian aquellas operaciones sobre el conjunto heterogéneo subyacente de una $\underline{\Sigma}$-álgebra que se derivan de sus operaciones estructurales. En secciones posteriores se estudiarán las relaciones de estas operaciones con los símbolos de operación polinómica o términos y su estructura como un *clon de operaciones*. En esta sección se caracterizan de modo intrínseco, mediante la definición algebraica clásica de McKinsey y Tarski [MT44].

2.5.1. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $w \in S^\star$. La **$\underline{\Sigma}$-álgebra de las operaciones w-arias** sobre $\underline{A}$, $\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})$, es $\underline{A}^{A_w}$, i.e., el producto de $\mathrm{card}(A_w)$-copias de $\underline{A}$.

En $\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})$, las operaciones estructurales F_σ, con $\sigma\colon v \longrightarrow s$, están definidas para elementos $(f_j)_{j\in|v|}$ de $(A^{A_w})_v = \prod_{j\in|v|} A_{v_j}^{A_w}$. Ahora bien, como A_v es el producto de la familia $(A_{v_j})_{j\in|v|}$, existe, en virtud de la propiedad universal del producto, un único morfismo $\langle f_j\rangle_{j\in|v|}$ de A_w en A_v tal que

$$\begin{tikzcd}
A_w \arrow[d, "\langle f_j\rangle_{j\in|v|}"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
A_v \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"'] & A_{v_j}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces

$$F_\sigma \left\{ \begin{array}{lcl} (A^{A_w})_v & \longrightarrow & A_s^w \\ (f_j)_{j\in|v|} & \longmapsto & F_\sigma^{\underline{A}} \circ \langle f_j\rangle_{j\in|v|} \end{array} \right.$$

2.5.2. Definición. Sea A un S-conjunto y w una palabra sobre S. Entonces

1. Para cada $i \in |w|$, la **proyección w-aria, i-ésima** para A, $\mathrm{pr}^{A}_{w,i}$, es la operación definida como:

$$\mathrm{pr}^{A}_{w,i} \begin{cases} A_w \longrightarrow A_{w(i)} \\ a \longmapsto a_i \end{cases}$$

2. El S-conjunto de las **proyecciones w-arias** sobre un S-conjunto A es:

$$\mathrm{pr}^{A}_{w} = (\{\mathrm{pr}^{A}_{w,i} \mid w_i = s\})_{s\in S}$$

2.5.3. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $w \in S^{\star}$. La $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea de las **operaciones polinómicas w-arias** u operaciones derivadas w-arias sobre $\underline{A}$, $\underline{\mathrm{Pol}}_w(\underline{A})$, es la subálgebra de las operaciones w-arias sobre A, $\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})$ generada por pr^{A}_{w}.

2.5.4. Proposición. Sea $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces, se cumple que, para cada $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, $F_\sigma \in \mathrm{Pol}_w(\underline{A})_s$. □

2.5.5. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, $u, w \in S^{\star}$, $s \in S$, $P \in \mathrm{Pol}_w(\underline{A})_s$ y $Q = (Q_i)_{i\in|w|}$ una familia tal que, para cada $i \in |w|$, $Q_i \in \mathrm{Pol}_u(\underline{A})_{w(i)}$. Entonces $P \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} \in \mathrm{Pol}_u(\underline{A})_s$.

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ el S-conjunto cuya coordenada s-ésima es:

$$\mathcal{X}_s = \{P \in \mathrm{Pol}_w(\underline{A})_s \mid \forall (Q_i)_{i\in|w|} \in \mathrm{Pol}_u(\underline{A})_w,\ f \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} \in \mathrm{Pol}_u(\underline{A})_s\}$$

En primer lugar, se cumple que el S-conjunto de las proyecciones para w en A, pr^{A}_{w} está incluido en $\mathcal{X}$ porque, dado un $s \in S$, un $i \in w^{-1}(s)$ y una familia $(Q_i)_{i\in|w|}$ en $\mathrm{Pol}_u(\underline{A})_w$,

$$\mathrm{pr}^{A}_{w,i} \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} = Q_i \in \mathrm{Pol}_u(\underline{A})_{w(i)}$$

Además, $\mathcal{X}$ es un cerrado de $\mathrm{Pol}_w(\underline{A})$, ya que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon v \longrightarrow s$, y cada $R = (R_i)_{i\in|v|} \in \mathcal{X}_v$, se tiene que $F^{\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})}_{\sigma}(R) \in \mathcal{X}_s$, puesto que dada una familia $(Q_i)_{i\in|w|} \in \mathrm{Pol}_u(\underline{A})_w$ se cumple que

$$\begin{aligned} F^{\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})}_{\sigma}(R) \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} &= F^{A}_{\sigma} \circ \langle R_i\rangle_{i\in|v|} \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} \\ &= F^{A}_{\sigma} \circ \langle R_i \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|}\rangle_{i\in|v|} \in \mathrm{Pol}_u(\underline{A})_s \end{aligned}$$

□

En la proposición que sigue usamos las operaciones polinómicas para dar otra descripción del operador subálgebra generada.

2.5.6. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces se cumple que

1. Para cada $w \in S^\star$, cada $a \in A_w$ y cada $s \in S$

$$\mathrm{Sg}_{\underline{A}}((\{a_i \mid w_i = s\})_{s\in S})_s = \{P(a) \mid P \in \mathrm{Pol}_w(\underline{A})_s\}$$

2. Para cada $X \subseteq A$ y cada $s \in S$ se cumple que

$$\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X)_s = \{P(x) \mid w \in S^\star,\ P \in \mathrm{Pol}_w(\underline{A})_s,\ x \in X_w\}$$

□

La siguiente proposición afirma que los cerrados de las $\underline{\Sigma}$-álgebras no sólo lo están respecto de las operaciones estructurales, sino respecto de las operaciones polinómicas de las mismas.

2.5.7. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, X un cerrado de $\underline{A}$, $w \in S^\star$, $s \in S$ y $P \in \mathrm{Pol}_w(\underline{A})_s$. Entonces, para cada $x \in X_w$, $P(x) \in X_s$. □

Al igual que los cerrados, también las congruencias de una $\underline{\Sigma}$-álgebra son compatibles con las operaciones polinómicas.

2.5.8. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, Φ una congruencia sobre $\underline{A}$, w una palabra sobre S, $s \in S$ y $P \in \mathrm{Pol}_w(\underline{A})_s$. Entonces, para cada x, $y \in A_w$, si para cada $i \in |w|$, $x_i \equiv_{\Phi_{w(i)}} y_i$, entonces $P(x) \equiv_{\Phi_s} P(y)$ □

2.5.9. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $w \in S^\star$. El S-conjunto κ_w^A de las **constantes** w**-arias** en A, es $(\{\kappa_{w,s}^a \mid a \in A_s\})_{s\in S}$, siendo, para cada $s \in S$ y cada $a \in A_s$, $\kappa_{w,s}^a$ la aplicación de A_w en A_s que es constantemente a. La $\underline{\Sigma}$-álgebra de las **operaciones algebraicas** w**-arias** sobre A, $\underline{\mathrm{Alg}}_w(\underline{A})$, es la subálgebra de $\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})$ generada por el S-conjunto $\mathrm{pr}_w^A \cup \kappa_w^A$.

2.5.10. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, u, w dos palabras sobre S, $s \in S$, $P \in \mathrm{Alg}_w(\underline{A})_s$, y $(Q_i)_{i\in|w|}$ una familia tal que, para cada $i \in |w|$, $Q_i \in \mathrm{Alg}_u(\underline{A})_{w_i}$. Entonces $P \circ \langle Q_i\rangle_{i\in|w|} \in \mathrm{Alg}_u(\underline{A})_s$. □

En general, en una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, se pueden definir las operaciones polinómicas *con constantes* en un sub-S-conjunto $X \subseteq A$.

2.5.11. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, $w \in S^\star$ y $X \subseteq A$. Entonces $\kappa_w^{X,A}$ es el S-conjunto $(\{\kappa_{w,s}^a \mid a \in X_s\})_{s\in S}$ de las constantes w-arias en X sobre A. La $\underline{\Sigma}$-álgebra de las **operaciones polinómicas** w**-arias con constantes en** X sobre $\underline{A}$, $\underline{\mathrm{Pol}}_w(\underline{A}, X)$, es la subálgebra de $\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})$ generada por el S-conjunto $\mathrm{pr}_w^A \cup \kappa_w^{X,A}$.

Es obvio, a partir de las definiciones, que $\mathrm{Pol}_w(\underline{A}) = \mathrm{Pol}_{w(\underline{A},\emptyset)}$, mientras que $\mathrm{Alg}_w(\underline{A}) = \mathrm{Pol}_w(\underline{A}, A)$

De las operaciones estructurales de una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ se obtienen también operaciones polinómicas cuyas ariedades son S-conjuntos arbitrarios. Si X es un S-conjunto, la $\underline{\Sigma}$-álgebra de las **operaciones** X**-arias** sobre $\underline{A}$, $\underline{\mathrm{Op}}_X(\underline{A})$, se define como $\underline{A}^{A_X}$ y las **operaciones polinómicas** X**-arias** sobre $\underline{A}$, $\underline{\mathrm{Pol}}_X(\underline{A})$ como la subálgebra de $\underline{\mathrm{Op}}_X(\underline{A})$ generada por el S-conjunto de las proyecciones pr^A_X, definido, para cada $s \in S$, como $\mathrm{pr}^A_{X,s} = \{\mathrm{pr}^A_{X,s,x} \mid x \in X_s\}$, siendo

$$\mathrm{pr}^A_{X,s,x} \begin{cases} A_X \longrightarrow A_s \\ \;\; a \;\longmapsto a_s(x) \end{cases}$$

2.6 Álgebras libres.

En esta sección se demuestra la existencia de $\underline{\Sigma}$-álgebras libres sobre cualquier S-conjunto y se estudia la relación de los *términos* o *símbolos de operación polinómica* con las operaciones polinómicas de una $\underline{\Sigma}$-álgebra.

2.6.1. Definición. De $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ en $\mathbf{Set}^S$ existe un functor de olvido $\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}$ definido sobre objetos y morfismos como:

$$\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}(f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}) = f\colon A \longrightarrow B$$

El functor $\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}$ tiene un adjunto por la izquierda, que asigna a cada S-conjunto X, una $\underline{\Sigma}$-álgebra libre sobre él. Ésta se obtiene a partir de una cierta $\underline{\Sigma}$-álgebra de palabras, como la subálgebra generada por X. En este contexto, es usual referirse a los elementos de X como *variables*.

2.6.2. Definición. Sea $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ una signatura algebraica y X un S-conjunto. La $\underline{\Sigma}$**-álgebra de las palabras** sobre X, $\underline{\mathrm{W}}_{\underline{\Sigma}}(X)$, es la definida como:

1. Para cada $s \in S$, $\mathrm{W}_{\underline{\Sigma}}(X)_s = (\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$, i.e., el conjunto subyacente es, en cada coordenada, el conjunto de las palabras que pueden formarse con símbolos de operación de Σ y variables de X.

2. Para cada $\sigma \in \Sigma$, $\sigma\colon w \longrightarrow s$, la operación estructural F_σ, asociada a σ, es la aplicación de $\mathrm{W}_{\underline{\Sigma}}(X)_w$ en $\mathrm{W}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$, i.e., de $((\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star)^{|w|}$ en $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$, que a una palabra de palabras $(P_i)_{i\in|w|}$ le asigna $(\sigma) \curlywedge \curlywedge_{i\in|w|} P_i$, i.e., la concatenación de (la imagen de) σ (bajo las inclusiones canónicas desde Σ hasta $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$) y de la concatenación de las palabras que componen $(P_i)_{i\in|w|}$.

$$F_\sigma \begin{cases} \mathrm{W}_{\underline{\Sigma}}(X)_w \longrightarrow \mathrm{W}_{\underline{\Sigma}}(X)_s \\ (P_i)_{i\in|w|} \longmapsto (\sigma) \curlywedge \curlywedge_{i\in|w|} P_i \end{cases}$$

2.6.3. Definición. La **$\underline{\Sigma}$-álgebra libre** sobre un S-conjunto X, $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)$, es la subálgebra de $\underline{\mathrm{W}}_{\underline{\Sigma}}(X)$ generada por el S-conjunto $(\{(x) \mid x \in X_s\})_{s\in S}$, donde, para cada $s \in S$ y cada $x \in X_s$, (x) es la imagen de x mediante las inclusiones canónicas desde X_s hasta $(\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star$.

A los elementos de $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$ se les denomina **símbolos de operación polinómica** o **términos** de tipo s con variables en X.

En las figuras siguientes se muestran las inclusiones desde X_s, resp., $\Sigma_{w,s}$, hasta $\mathrm{W}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
X_s & \xrightarrow{\mathrm{in}_{X_s}} & \coprod X & \xrightarrow{\mathrm{in}_{\coprod X}} & \coprod \Sigma \amalg \coprod X & \xrightarrow{\eta_{\coprod \Sigma \amalg \coprod X}} & (\coprod \Sigma \amalg \coprod X)^\star \\
x & \longmapsto & (x,s) & \longmapsto & ((x,s),1) & \longmapsto & (((x,s),1)) \equiv (x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Sigma_{w,s} & \xrightarrow{\mathrm{in}_{\Sigma_{w,s}}} & \coprod \Sigma & \xrightarrow{\mathrm{in}_{\coprod \Sigma}} & \Sigma \amalg \coprod X & \xrightarrow{\eta_{\Sigma \amalg \coprod X}} & (\Sigma \amalg \coprod X)^\star \\
\sigma & \longmapsto & (\sigma,(w,s)) & \longmapsto & ((\sigma,(w,s)),0) & \longmapsto & (((\sigma,(w,s)),0)) \equiv (\sigma)
\end{array}
$$

2.6.4. Proposición. Los símbolos de operación polinómica se pueden representar unívocamente como:

1. (x), para un único $s \in S$ y un único $x \in X_s$.

2. (σ), para un único $s \in S$ y un único $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$.

3. $(\sigma) \curlywedge \bigcurlywedge(P_i)_{i\in|w|}$, para unos únicos $w \in S^\star - \{\lambda\}$, $s \in S$, $\sigma \in \Sigma_{w,s}$, y una única familia $(P_i)_{i\in|w|}$ en $\in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_w$.

$\square$

Es posible dar otras representaciones de la $\underline{\Sigma}$-álgebra libre sobre un S-conjunto, e.g., mediante la noción de árbol etiquetado. Sin embargo, las propiedades esenciales de la $\underline{\Sigma}$-álgebra libre sobre un S-conjunto X dependen sólo de su propiedad universal, puesto que esta la determina salvo un único homomorfismo, y no de la forma concreta que se dé de la misma.

2.6.5. Proposición. Para cada S-conjunto X, el par $(\eta^X, \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X))$, en el que η^X es la correstricción a $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$ de la inclusión canónica de X en $\mathrm{W}_{\underline{\Sigma}}(X)$, es un morfismo universal desde X hasta $\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}$, i.e., dada una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ y una S-aplicación $f\colon X \longrightarrow A$, existe un único homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras $f^\sharp\colon \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X) \longrightarrow \underline{A}$ que extiende f, i.e., tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta^X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Demostración. En la coordenada s-ésima, la aplicación $f^\sharp_s\colon \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s \longrightarrow A_s$ se define, por recursión, como:

$$P \longmapsto \begin{cases} f_s(x), & \text{si } P = (x); \\ \sigma^{\underline{A}}, & \text{si } P = (\sigma); \\ F^{\underline{A}}_\sigma(f^\sharp_{w(0)}(P_0), \dots, f^\sharp_{w(|w|-1)}(P_{|w|-1})), & \text{si } P = (\sigma) \curlywedge \curlywedge (P_i)_{i \in |w|}. \end{cases}$$

□

Siguiendo la práctica habitual, los términos, $F^{\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)}_\sigma(P_i \mid i \in |w|)$ se denotan como $\sigma(P_0, \dots, P_{|w|-1})$. Asimismo, si no hay ambigüedad, los términos (x) y (σ) se denotan simplemente como x y σ.

2.6.6. Corolario. El functor $\underline{\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}}$ es adjunto por la izquierda del functor de olvido $\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \arrow[r, shift left, "\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Set} \arrow[l, shift left, "\underline{\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}}"] \end{tikzcd}$$

2.6.7. Proposición. Cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ es isomorfa a un cociente de una $\underline{\Sigma}$-álgebra libre sobre un S-conjunto. □

Demostración. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces la extensión canónica de la identidad en A, $\mathrm{id}^\sharp_{\underline{A}}$, es un epimorfismo y $\underline{\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}}(A)/\operatorname{Ker}(\mathrm{id}^\sharp_{\underline{A}})$ es isomorfa a $\underline{A}$. □

Es posible dar una caracterización intrínseca de las álgebras absolutamente libres, por medio de lo que se conoce como *álgebras de Dedekind-Peano*.

2.6.8. Definición. Sea $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\underline{A}$ es un **$\underline{\Sigma}$-álgebra de Dedekind-Peano**, abreviado como DP-álgebra, si se cumplen las condiciones siguientes:

DP1. Para cada $\sigma \in \Sigma$, $F_\sigma\colon A_{\mathrm{ar}(\sigma)} \longrightarrow A_{\mathrm{car}(\sigma)}$ es inyectiva.

DP2. Para cada $s \in S$ y cada $\sigma, \tau \in \Sigma_{\cdot,s}$, si $\sigma \neq \tau$, entonces $\mathrm{Im}(F_\sigma) \cap \mathrm{Im}(F_\tau) = \emptyset$

DP3. $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(A - (\bigcup_{\sigma \in \Sigma_{\cdot,s}} \mathrm{Im}(F_\sigma))_{s\in S}) = A$

Al S-conjunto $A - (\bigcup_{\sigma \in \Sigma_{\cdot,s}} \mathrm{Im}(F_\sigma))_{s\in S}$ se le denomina la **base de Dedekind-Peano** de $\underline{A}$ y se le denota por $\mathrm{B}(\underline{A})$.

Los axiomas DP1–DP3 son las generalizaciones obvias de los axiomas de Dedekind-Peano para los números naturales, por lo que son llamados **axiomas de Dedekind-Peano (generalizados)** .

Los axiomas DP1 y DP2 son equivalentes a la siguiente condición:

DP4. Para cualesquiera $s \in S$, $\sigma, \tau \in \Sigma_{\cdot,s}$, $a \in A_{\mathrm{ar}(\sigma)}$, $b \in A_{\mathrm{ar}(\tau)}$, si $F_\sigma(a) = F_\tau(b)$ entonces $\sigma = \tau$ y $a = b$.

Además, si $\underline{A}$ es un álgebra de Dedekind-Peano, su base se puede obtener como $\mathrm{B}(\underline{A}) = \bigcap\{X \subseteq A \mid \mathrm{Sg}_{\underline{A}}(X) = A\}$

2.6.9. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra de Dedekind-Peano sobre X. Entonces $\underline{A}$ y $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(\mathrm{B}(\underline{A}))$ son isomorfas. □

Para cualquier $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea es posible introducir un preorden sobre el coproducto de su S-conjunto subyacente que, en el caso del álgebras libres, nos permite definir la noción de *subtérmino* de un término dado.

2.6.10. Definición. Sea $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $<_{\underline{A}}$ denota la relación binaria en $\coprod A$ que consta de los pares ordenados $((a,s),(b,t)) \in (\coprod A)^2$ para los que existe un $w \in S^\star - \{\lambda\}$, un $\sigma \in \Sigma_{w,t}$, y un $x \in A_w$ tal que $F_\sigma(x) = b$ y, para algún $i \in w$, $w_i = s$ y $x_i = a$. Se denota mediante $\leq_{\underline{A}}$ la clausura reflexiva y transitiva de $<_{\underline{A}}$, i.e., el orden parcial generado por $<_{\underline{A}}$.

2.6.11. Proposición. Sea X un S-conjunto. Entonces $\leq_{\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}(X)}}$ es antisimétrica y no tiene ω-cadenas estrictamente descendentes, i.e., es un orden artiniano. □

2.6.12. Definición. Sea X un S-conjunto. Entonces, dado un término P en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_t$, el S-conjunto de los **subtérminos** de P es

$$\mathrm{sub}(P) = (\{Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s \mid (Q,s) \leq_{\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}(X)}} (P,t)\})_{s\in S}$$

A continuación vamos a asociar a cada término su S-conjunto de variables. Para definirlo hacemos uso de la propiedad universal del álgebra libre.

2.6.13. Definición. Sea X un S-conjunto. Entonces $\underline{\mathrm{Fin}}(X)$ es la $\underline{\Sigma}$-álgebra cuyo S-conjunto subyacente es, en cada coordenada, $\mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(X)$, y tal que, para cada $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, $F_\sigma(K^i \mid i \in |w|) = \bigcup_{i \in |w|} K^i$. Sea $\delta^X = (\delta^X_s)_{s\in S}$ la S-aplicación definida como

$$\delta^X_s \begin{cases} X_s \longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(X) \\ a \longmapsto \delta^s(a) \end{cases}$$

i.e., la S-aplicación de X en $(\mathrm{Sub}_{\mathrm{f}}(X))_{s\in S}$ que a un $a \in X_s$ le asigna el S-conjunto que es $\{a\}$ en la coordenada s-ésima y el vacío en las restantes. Entonces var^X denota $(\delta^X)^\sharp$, i.e., la S-aplicación subyacente al único homomorfismo que extiende a δ^X:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta^X"] \arrow[dr, "\delta^X"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \arrow[d, "(\delta^X)^\sharp = \mathrm{var}^X"] \\ & \mathrm{Fin}(X) \end{tikzcd}$$

El S-conjunto de las **variables** de un término $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$ es $\mathrm{var}^X_s(P)$, o simplemente $\mathrm{var}(P)$, si los índices quedan fijados por el contexto.

Símbolos y operaciones polinómicas.

Las operaciones polinómicas sobre una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ se pueden caracterizar como las realizaciones de los símbolos de operación polinómica. Estos son los miembros de una cierta $\underline{\Sigma}$-álgebra libre sobre un S-conjunto de variables asociados a la aridad de las operaciones. Esta relación constituye la base para la construcción de ecuaciones heterogéneas y ciertos tipos de morfismos derivados entre las álgebras heterogéneas.

Para el estudio de los símbolos de operación polinómicos es necesario asociar a cada palabra sobre S un S-conjunto de *variables*. Puesto que las palabras sobre S constituyen los objetos de $\mathbf{N}\!\downarrow\! S$, que es una subcategoría plena de $\mathbf{Set}\!\downarrow\! S$, por la equivalencia de esta con $\mathbf{Set}^S$, cada palabra $w\colon n \longrightarrow S$ tiene unívocamente asociado un S-conjunto.

2.6.14. Definición. Sea $w \in S^\star$. Entonces $\downarrow\! w$ es el S-conjunto

$$\downarrow\! w = (\{i \in \mathrm{N} \mid w_i = s\})_{s\in S}$$

Si A un S-conjunto y w es una palabra sobre S, entonces los conjuntos $A_{\downarrow w}$ y A_w son naturalmente isomorfos por la proposición 2.1.15. En lo que sigue, si no hay ambigüedad, no distinguiremos notacionalmente entre las S-aplicaciones de $A_{\downarrow w}$ y los elementos de A_w.

Las operaciones polinómicas w-arias sobre un álgebra pueden definirse mediante los símbolos de operación polinómica w-arios. Para ello, se hace uso del hecho de que dada una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ y un $w \in S^\star$, existe un único homomorfismo

$\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w\colon \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w) \longrightarrow \underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow w \arrow[r, "\eta^{\downarrow w}"] \arrow[dr, "\mathrm{p}^{A}_w"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w"] \\
 & \mathrm{Op}_w(\underline{A})
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo p^{A}_w la S-aplicación definida, para cada $s \in S$ y para cada $i \in \downarrow w_s$, como $\mathrm{p}^{A}_{w,s}(i) = \mathrm{pr}^{A}_{w,i}$.

2.6.15. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, $w \in S^{\star}$, $s \in S$ y $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$. Entonces a $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s}(P)$ se le denomina el **polinomio** (w, s)**-ario determinado** por P en $\underline{A}$ y se le denota por $P^{\underline{A}}$.

2.6.16. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $w \in S^{\star}$. La $\underline{\Sigma}$-álgebra heterogénea de las operaciones polinómicas w-arias sobre $\underline{A}$, $\underline{\mathrm{Pol}}_w(\underline{A})$, coincide con la subálgebra de $\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})$ canónicamente asociada a la imagen de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)$ mediante $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w$, i.e., $\mathrm{Pol}_w(\underline{A}) = \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w[\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)]$. □

Demostración. Puesto que $\mathrm{pr}^{A}_w \subseteq \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w[\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)]$, $\mathrm{Sg}_{\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})}(\mathrm{pr}^{A}_w) \subseteq \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w[\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)]$.

Recíprocamente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w[\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)] &= \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w[\mathrm{Sg}_{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)}(\eta^{\downarrow w}[\downarrow w])] \\
&= \mathrm{Sg}_{\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w[\eta^{\downarrow w}[\downarrow w]]) \\
&= \mathrm{Sg}_{\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})}(\mathrm{p}^{A}_w[\downarrow w]) \\
&= \mathrm{Sg}_{\underline{\mathrm{Op}}_w(\underline{A})}(\mathrm{pr}^{A}_w) \\
&= \mathrm{Pol}^{\underline{A}}_w
\end{aligned}$$

□

2.6.17. Proposición (Ley de reciprocidad). Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, P un términos en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ y $a\colon \downarrow w \longrightarrow A$. Entonces $a^{\sharp}_s(P) = P^{\underline{A}}(a)$.

Demostración. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow w \arrow[r, "\eta_{\downarrow w}"] \arrow[dr, "a"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "a^{\sharp}"] \arrow[dr, "\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w"] & \\
 & A & \mathrm{Op}_w(\underline{A}) \arrow[l, "\mathrm{ev}_a"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo ev_a el homomorfismo de evaluación definido, en la coordenada s-ésima, como

$$(\mathrm{ev}_a)_s(f\colon A_w \longrightarrow A_s) = f(a)$$

luego, para cada $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$, se cumple que:

$$a^\sharp_s(P) = (\mathrm{ev}_a)_s \circ \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s}(P) = (\mathrm{ev}_a)_s(P^{\underline{A}}) = P^{\underline{A}}(a)$$

□

2.6.18. Proposición. La restricción a $\underline{\mathrm{Pol}}_w(\underline{A})$ de $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w$ es un homomorfismo sobreyectivo, por lo que $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\operatorname{Ker}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w)$ es isomorfa a $\underline{\mathrm{Pol}}_w(\underline{A})$. □

Las operaciones polinómicas w-arias se comportan, respecto de los homomorfismos, como las operaciones estructurales de las álgebras.

2.6.19. Proposición. Sea $\underline{\Sigma}$ un signatura algebraica y $h\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces, para cada $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_w \arrow[r, "P^{\underline{A}}"] \arrow[d, "h_w"'] & A_s \arrow[d, "h_s"] \\
B_w \arrow[r, "P^{\underline{B}}"'] & B_s
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Para cada signatura $\underline{\Sigma}$, cada $a \in A_w$ y cada $h\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\downarrow w \arrow[r, "\eta_{\downarrow w}"] \arrow[dr, "a"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "a^\sharp"] \arrow[dr, "(h \circ a)^\sharp"] & \\
 & A \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que

$$h_s \circ P^{\underline{A}} = h_s \circ a^\sharp_s(P) = (h \circ a)^\sharp_s(P) = P^{\underline{B}}(h \circ a) = P^{\underline{B}}(h_w(a))$$

□

Al igual que en el caso de las operaciones polinómicas w-arias, para w una palabra sobre S, las operaciones polinómicas X-arias, para X un S-conjunto, pueden definirse alternativa, pero equivalentemente, mediante los símbolos de operación X-arios. Dada una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ y un S-conjunto X existe un único homomorfismo $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_X \colon \underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Op}}_X(\underline{A})$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta^X"] \arrow[dr, "\mathrm{p}^{\underline{A}}_X"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_X"] \\ & \mathrm{Op}_X(\underline{A}) \end{tikzcd}$$

conmuta, siendo $\mathrm{p}^{\underline{A}}_X$ la S-aplicación definida, para cada $s \in S$, como

$$\mathrm{p}^{\underline{A}}_{X,s}(x) = \mathrm{pr}^{\underline{A}}_{X,s,x}$$

2.6.20. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, X un S-conjunto, $s \in S$ y P un términos en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$. A $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{X,s}(P)$ se le denomina el **polinomio** (X, s)**-ario determinado** por P en $\underline{A}$ y se le denota como $P^{\underline{A}}$.

2.6.21. Proposición. Sea X un S-conjunto y $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\underline{\mathrm{Pol}}_X(\underline{A})$, es la subálgebra de $\underline{\mathrm{Op}}_X(\underline{A})$ canónicamente asociada a la imagen de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$ mediante $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_X$. □

La ley de reciprocidad es también válida para las operaciones polinómicas X-arias.

2.6.22. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$ y $a \colon X \longrightarrow A$. Entonces $a^{\sharp}_s(P) = P^{\underline{A}}(a)$. □

2.6.23. Proposición. La restricción a $\underline{\mathrm{Pol}}_X(\underline{A})$ de $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_X$ es un homomorfismo sobreyectivo, por lo que $\underline{\mathrm{Fr}_{\Sigma}}(X)/\operatorname{Ker}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_X)$ es isomorfa a $\underline{\mathrm{Pol}}_X(\underline{A})$. □

Las operaciones polinómicas X-arias se comportan, respecto de los homomorfismos, como las operaciones estructurales de las álgebras.

2.6.24. Proposición. Sea $\underline{\Sigma}$ un signatura algebraica y $h \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces, para cada $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_X \arrow[r, "P^{\underline{A}}"] \arrow[d, "h_X"'] & A_s \arrow[d, "h_s"] \\ B_X \arrow[r, "P^{\underline{B}}"'] & B_s \end{tikzcd}$$

conmuta. □

El álgebra de las operaciones polinómicas $\downarrow w$-arias sobre una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ es isomorfa a la de las operaciones w-arias, puesto que $\mathrm{Pd}_w^{\underline{A}} = \cong \circ \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\downarrow w}$, en virtud de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} \downarrow w \arrow[r, "\mathrm{p}^{A}_{\downarrow w}"] \arrow[dr, "\mathrm{p}^{A}_{w}"'] & \mathrm{Op}_{\downarrow w}(\underline{A}) \arrow[d, "\cong"] \\ & \mathrm{Op}_{w}(\underline{A}) \end{tikzcd}$$

en el que $\cong$ es el isomorfismo inducido por el existente entre $A_{\downarrow w}$ y A_w (v. prop. 2.1.15). Por otra parte, por ser las operaciones estructurales de las álgebras finitarias, las operaciones polinómicas X-arias se derivan inmediatamente de las operaciones w-arias; si $P^{\underline{A}}$ es una operación polinómica X-aria en $\underline{A}$, entonces $\mathrm{var}(P)$ es un S-conjunto finito, por lo que existe un $w \in S^\star$ con $\downarrow w \cong \mathrm{var}(P)$ y un término w-ario Q tal que $P^{\underline{A}}(a) = Q^{\underline{A}}(a \circ i)$, siendo i la inclusión obvia de $\downarrow w$ en X.

2.7 Límites y colímites.

En esta sección estudiamos la formación de límites y colímites en las categorías de $\underline{\Sigma}$-álgebras. En general, los resultados habituales del álgebra homogénea siguen siendo válidos para las álgebras heterogéneas, aunque con algunas peculiaridades propias de estas últimas, ligadas, en la mayoría de los casos, a la eventual existencia de coordenadas vacías en los S-conjuntos subyacentes de las álgebras involucradas.

Límites.

La categoría de $\underline{\Sigma}$-álgebras es completa. Puesto que el functor de olvido $\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}} \colon \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \longrightarrow \mathbf{Set}^S$ crea límites, el cálculo de los límites de diagramas de $\underline{\Sigma}$-álgebras se reduce a encontrar la estructura algebraica sobre el límite de sus S-conjuntos subyacentes.

2.7.1. Definición. Sea $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ una familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras, con $\underline{A}^i = (A^i, F^i)$.

1. El **producto** de $(\underline{A}^i)_{i\in I}$, $\prod_{i\in I} \underline{A}^i$, es la $\underline{\Sigma}$-álgebra cuyo S-conjunto subyacente es $\prod_{i\in I} A^i$, y en la que, para cada $\sigma \colon w \longrightarrow s$, la operación estructural F_σ se define como:

$$F_\sigma \begin{cases} (\prod_{i\in I} A^i)_w & \longrightarrow \prod_{i\in I} A^i_s \\ (a_\alpha \mid \alpha \in |w|) & \longmapsto (F^i_\sigma(a_\alpha(i) \mid \alpha \in |w|)_{i\in I} \end{cases}$$

2. La **proyección canónica** i-ésima, es el homomorfismo de $\prod_{i\in I}\underline{A}^i$ en $\underline{A}^i$ determinado por la S-aplicación pr^i que, para cada $s\in S$, se define como:

$$\mathrm{pr}^i_s\begin{cases}\prod_{i\in I}A^i_s & \longrightarrow A^i_s\\ (a_i\mid i\in I) & \longmapsto a_i\end{cases}$$

El producto de una familia vacía de $\underline{\Sigma}$-álgebras es la $\underline{\Sigma}$-álgebra final $\underline{1}$. Por otra parte, la noción de soporte de un S-conjunto se extiende naturalmente a las $\underline{\Sigma}$-álgebras, por lo que decimos que un $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ tiene soporte X si su S-conjunto subyacente tiene soporte X. Así pues, el soporte de un producto de $\underline{\Sigma}$-álgebras es la intersección de los soportes de las $\underline{\Sigma}$-álgebras en la familia.

2.7.2. Proposición. Sea $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ una familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras. El par ordenado $(\prod_{i\in I}\underline{A}^i,(\mathrm{pr}^i)_{i\in I})$ es un producto en la categoría $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$.

Demostración. Sea $\underline{A}^i=(A^i,F^i)$ y $\sigma\colon w\longrightarrow s$. Entonces de $(\prod_{i\in I}A^i)_w$ en A^i_w existe una única aplicación p tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\prod_{i\in I}A^i)_w \arrow[d, "p"] & \prod_{\alpha\in|w|}(\prod_{i\in I}A^i_{w_\alpha}) \arrow[r, "\mathrm{pr}_\alpha"] \arrow[d] & \prod_{i\in I}A^i_{w_\alpha} \arrow[d, "\mathrm{pr}^i_{w_\alpha}"]\\
A^i_w & \prod_{\alpha\in|w|}A^i_{w_\alpha} \arrow[r, "\mathrm{pr}^i_\alpha"'] & A^i_{w_\alpha}
\end{tikzcd}$$

$$p = \langle \mathrm{pr}^i_{w_\alpha}\circ\mathrm{pr}_\alpha\rangle_{\alpha\in|w|}$$

conmuta. Ahora bien, ya que para cada $i\in I$, $F^i_\sigma\colon A^i_w\longrightarrow A^i_s$, existe una única aplicación $\langle F^i_\sigma\circ p\rangle_{|i\in I}$ de $(\prod_{i\in I}A^i)_w$ en $\prod_{i\in I}A^i_s$ tal que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\prod_{i\in I}A^i)_w \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\langle F^i_\sigma\circ p\rangle_{i\in I}"'] & A^i_w \arrow[d, "F^i_\sigma"]\\
\prod_{i\in I}A^i_s \arrow[r, "\mathrm{pr}^i_s"'] & A^i_s
\end{tikzcd}$$

Si F es la estructura algebraica de $\prod_{i\in I}\underline{A}^i$, entonces $F_\sigma=\langle F^i_\sigma\circ p\rangle_{i\in I}$, a partir de lo cual deducir la propiedad universal de $(\prod_{i\in I}\underline{A}^i,(\mathrm{pr}^i)_{i\in I})$ es inmediato. □

2.7.3. Proposición (Igualadores). Sean $f,g\colon\underline{A}\longrightarrow\underline{B}$ dos homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras. El par $(\underline{\mathrm{Eq}}(f,g),\mathrm{eq}(f,g))$, en el que $\underline{\mathrm{Eq}}(f,g)$ es la subálgebra de $\underline{A}$ determinada por el S-conjunto $\mathrm{Eq}(f,g)=(\{a\in A_s\mid f_s(a)=g_s(a)\})_{s\in S}$ y $\mathrm{eq}(f,g)$ es la inclusión canónica en $\underline{A}$, es un igualador de f y g en $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$. □

2.7.4. Corolario. La categoría $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ es completa.

Colímites.

La categoría de $\underline{\Sigma}$-álgebras es cocompleta. Sin embargo, algunas caracterizaciones de los colímites en el álgebra homogénea no son válidas para sistemas arbitrarios de $\underline{\Sigma}$-álgebras heterogéneas. En general, se les ha de exigir que tengan la propiedad adicional de tener *soporte constante*.

2.7.5. Definición (Coproductos). Sea $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ una familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras.

1. El **coproducto** de $(\underline{A}^i)_{i\in I}$, $\coprod_{i\in I}\underline{A}^i$, es la $\underline{\Sigma}$-álgebra definida como el cociente
$$\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\textstyle\coprod_{i\in I}A^i)/C$$
en la que C es la congruencia sobre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\coprod_{i\in I}A^i)$ generada por la S-relación R que, en la coordenada s-ésima, es el conjunto
$$\left\{ \big((F^i_\sigma(a_0,\ldots,a_{|w|-1}),i),\sigma((a_0,i),\ldots,(a_{|w|-1},i))\big) \;\middle|\; \begin{array}{c} w\in S^\star,\ \sigma\in\Sigma_{w,s},\\ i\in I,\ a\in A^i_w \end{array} \right\}$$

2. La **inyección canónica** i-ésima, in^i, es el homomorfismo de $\underline{A}^i$ en $\coprod_{i\in I}\underline{A}^i$ determinado por la composición de la inclusión canónica de A^i en $\coprod_{i\in I}A^i$, la inclusión canónica de $\coprod_{i\in I}A^i$ en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\coprod_{i\in I}A^i)$ y la proyección canónica de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\coprod_{i\in I}A^i)$ en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\coprod_{i\in I}A^i)/C$

2.7.6. Proposición. Sea $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ una familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras. El par ordenado $(\coprod_{i\in I}\underline{A}^i,(\mathrm{in}^i)_{i\in I})$ es un coproducto en la categoría $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$.

Demostración. Sea $\underline{B}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $f^i\colon \underline{A}^i \longrightarrow \underline{B}$ una familia de homomorfismos. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I}A^i \arrow[r, "\eta^{\coprod_{i\in I}A^i}"] \arrow[dr, "{[f^i]_{i\in I}}"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\coprod_{i\in I}A^i) \arrow[d, "{[f^i]^\sharp_{i\in I}}"] \\
& \underline{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta. Puesto que $\mathrm{Ker}([f^i]^\sharp_{i\in I})$ contiene a R, existe un único homomorfismo $[f^i]^{\varkappa}_{i\in I}$ de $\coprod_{i\in I}\underline{A}^i$ en $\underline{B}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\coprod_{i\in I}A^i) \arrow[r, "\mathrm{pr}^C"] \arrow[dr, "{[f^i]^\sharp_{i\in I}}"'] & \coprod_{i\in I}\underline{A}^i \arrow[d, "{[f^i]^{\varkappa}_{i\in I}}"] \\
& \underline{B}
\end{tikzcd}$$

conmuta y que satisface la propiedad universal del coproducto. $\square$

2.7.7. Proposición (Coigualadores). Sean $f, g\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ dos homomorfismos de $\underline{\Sigma}$-álgebras. El par $(\underline{\mathrm{Coeq}}(f,g), \mathrm{coeq}(f,g))$, en el que $\underline{\mathrm{Coeq}}(f,g)$ es el cociente de $\underline{B}$ entre la congruencia C generada por la S-relación R definida como

$$R = (\{(f_s(a), g_s(a)) \mid a \in A_s\})_{s\in S}$$

y $\mathrm{coeq}(f,g)$ es la proyección canónica de $\underline{B}$ en $\underline{B}/C$, es un coigualador de f y g en $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$. $\square$

2.7.8. Corolario. La categoría $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ es cocompleta.

Colímites dirigidos.

De entre los colímites, los de los sistemas dirigidos tienen especial importancia para el estudio de ciertas clases de ecuaciones heterogéneas.

Recordemos que un conjunto preordenado $\underline{I} = (I, \leq)$ está **dirigido superiormente** si $I \neq \emptyset$ y para cada $i, j \in I$ existe un $k \in I$ tal que $i, j \leq k$.

2.7.9. Definición. Un **sistema dirigido** de $\underline{\Sigma}$-álgebras es un par ordenado $(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}})$ en el que $\underline{I}$ es un conjunto preordenado dirigido superiormente

$$\underline{\mathcal{A}} = ((\underline{A}^i)_{i\in I}, (a^{i,i'})_{(i,i')\in\leq})$$

y cumple las condiciones siguientes:

1. Para cada $i \in I$, $\underline{A}^i$ es una $\underline{\Sigma}$-álgebra.
2. Para cada $(i, i') \in\leq$, $a^{i,i'}\colon \underline{A}^i \longrightarrow \underline{A}^{i'}$.
3. Para cada $i \in I$, $a^{i,i} = \mathrm{id}_{\underline{A}}$.
4. Para cada $i, i', i'' \in I$, si $i \leq i' \leq i''$ entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^i \arrow[r, "a^{i,i'}"] \arrow[dr, "a^{i,i''}"'] & \underline{A}^{i'} \arrow[d, "a^{i',i''}"] \\
 & \underline{A}^{i''}
\end{tikzcd}$$

A los morfismos $a^{i,i'}$ se les denomina **morfismos de transición** del sistema.

Para los sistemas dirigidos de $\underline{\Sigma}$-álgebras, la construcción del colímite, que es siempre posible mediante los coproductos y coigualadores, se simplifica notablemente, puesto que su S-conjunto subyacente se puede obtener como un cociente del coproducto de los S-conjuntos subyacentes de las $\underline{\Sigma}$-álgebras del sistema dirigido.

2.7.10. Proposición (Colímites dirigidos). Sea $(\mathbf{I}, \mathcal{A})$ un sistema dirigido de $\underline{\Sigma}$-álgebras y $\varinjlim(\mathbf{I}, \mathcal{A})$ la $\underline{\Sigma}$-álgebra cuyo S-conjunto subyacente es $\coprod_{i\in I} A^i/\Phi$, en donde Φ es la mínima S-relación de equivalencia sobre $\coprod_{i\in I} A^i$ cuya coordenada s-ésima contiene a todos los pares ordenados de la forma $((x,i),(a^{i,i'}(x),i'))$, con $x \in A^i_s$ y $i \leq i'$, i.e.,

$$\Phi_s = \mathrm{Eg}_{\coprod_{i\in I} A^i_s}\left(\bigcup_{(i,i')\in\leq}\{\,((x,i),(a^{i,i'}_s(x),i')) \in \left(\coprod_{i\in I} A^i_s\right)^2 \mid x \in A^i_s\,\}\right)_s$$

y cuya estructura de $\underline{\Sigma}$-álgebra viene dada asociando a cada $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, la operación w-aria F_σ de $(\coprod_{i\in I} A^i/\Phi)_w$ en $\coprod_{i\in I} A^i_s/\Phi_s$ que a un $([(x_\alpha, i_\alpha)])_{\alpha\in|w|}$ del primero le asigna $[(F^k_\sigma(a^{i_\alpha,k}(x_\alpha) \mid \alpha \in |w|), k)]$, siendo k una cota superior de $(i_\alpha)_{\alpha\in|w|}$ en $\mathbf{I}$ y F^k_σ la operación estructural de $\underline{A}^k$ correspondiente a σ.

Para cada $i \in I$, sea a^i la composición $\mathrm{pr}^\Phi \circ \mathrm{in}^i$, de la inclusión canónica en el coproducto con la proyección en el cociente, que en cada coordenada $s \in S$, asigna a un $x \in A^i_s$ la clase de equivalencia $[(x,i)]_{\Phi_s}$.

El par ordenado $(\varinjlim(\mathbf{I}, \mathcal{A}), (a^i)_{i\in I})$ es un colímite del sistema dirigido $(\mathbf{I}, \mathcal{A})$.

Demostración. Las operaciones F_σ están bien definidas. En efecto, si $u \in I$ fuera tal que, para cada $\alpha \in |w|$, $i_\alpha \leq u$, entonces

$$[(F^k_\sigma(a^{i_\alpha,k}(x_\alpha) \mid \alpha \in |w|), k)] = [(F^u_\sigma(a^{i_\alpha,u}(x_\alpha) \mid \alpha \in |w|), u)],$$

porque, por estar el conjunto preordenado $\mathbf{I}$ dirigido superiormente, existiría un $v \in I$ tal que $k, u \leq v$, luego, por ser $a^{k,v}$ y $a^{u,v}$ homomorfismos se cumpliría que

$$a^{k,v}(F^k_\sigma(a^{i_\alpha,k}(x_\alpha) \mid \alpha \in |w|)) = a^{u,v}(F^u_\sigma(a^{i_\alpha,u}(x_\alpha) \mid \alpha \in |w|)).$$

y puesto que para cada $(x,i), (y,j) \in \coprod_{i\in I} A^i_s$, se cumple que $((x,i),(y,j)) \in \Phi_s$ si y sólo si existe un $u \in I$ tal que $i, j \leq u$ y $a^{i,u}(x) = a^{j,u}(y)$.

Las operaciones estructurales son también independientes de los representantes de clase elegidos puesto que si, para cada $\alpha \in |w|$, $((x_\alpha, i_\alpha),(y_\alpha, j_\alpha)) \in \Phi_{w_\alpha}$ entonces existe un $l_\alpha \geq i_\alpha, j_\alpha$ tal que $a^{i_\alpha,l_\alpha}_{w_\alpha}(x_\alpha) = a^{j_\alpha,l_\alpha}_{w_\alpha}(y_\alpha)$. Por ser $\mathbf{I}$ dirigido, existe un $l \geq l_\alpha$, para cada $\alpha \in |w|$, y por tanto $a^{i_\alpha,l}_{w_\alpha}(x_\alpha) = a^{j_\alpha,l}_{w_\alpha}(y_\alpha)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
F_\sigma([(x_\alpha, i_\alpha)] \mid \alpha \in |w|) &= [(F^l_\sigma(a^{i_\alpha,l}_{w_\alpha}(x_\alpha \mid \alpha \in |w|)), l)]\\
&= [(F^l_\sigma(a^{j_\alpha,l}_{w_\alpha}(y_\alpha \mid \alpha \in |w|)), l)]\\
&= F_\sigma([(y_\alpha, j_\alpha)] \mid \alpha \in |w|)
\end{aligned}$$

Además, para cada $i \in I$, $a^i = \mathrm{pr}^\Phi \circ \mathrm{in}^i$ es un homomorfismo de $\underline{A}^i$ en $\varinjlim(\mathbf{I}, \mathcal{A})$. En efecto, dado un $i \in I$, un $\sigma \in \Sigma$, con $\sigma\colon w \longrightarrow s$, y una tupla

$(x_\alpha \mid \alpha \in |w|)$ en A^i_w, se cumple que

$$\begin{aligned} a^i(F^i_\sigma(x_\alpha \mid \alpha \in |w|)) &= [(F^i_\sigma(x_\alpha \mid \alpha \in |w|), i)] \\ &= F_\sigma([(x_\alpha, i)] \mid \alpha \in |w|). \end{aligned}$$

Por último, el par ordenado $(\varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}}), (a^i)_{i\in I})$ es un colímite del sistema inductivo. En efecto, por una parte, para cada $(i, i') \in\leq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}^i \arrow[rr, "a^{i,i'}"] \arrow[dr, "a^i"'] & & \underline{A}_{i'} \arrow[dl, "a^{i'}"] \\ & \varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}}) & \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., para cada $x \in A^i$ y cada $s \in S$, $[(x, i)] = [(a^{i,i'}_s(x), i')]$, por definición de Φ

Por otra parte, si un par ordenado $(\underline{L}, (l^i)_{i\in I})$, arbitrario, pero fijo, en el que, para cada $i \in I$, $l^i\colon \underline{A}^i \longrightarrow \underline{L}$ es un homomorfismo, es tal que, para cada $(i, i') \in\leq$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}^i \arrow[rr, "a^{i,i'}"] \arrow[dr, "l^i"'] & & \underline{A}_{i'} \arrow[dl, "l_{i'}"] \\ & \underline{L} & \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces, en virtud de la propiedad universal del coproducto, hay una única aplicación$\left[l^i\right]_{i\in I} : \coprod_{i\in I} A^i \longrightarrow L$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A^i \arrow[r, "\mathrm{in}^i"] \arrow[dr, "l^i"'] & \coprod_{i\in I} A^i \arrow[d, "\left[l^i\right]_{i\in I}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, $\Phi \subseteq \mathrm{Ker}(\left[l^i\right]_{i\in I})$, porque Φ es la mínima congruencia sobre $\coprod_{i\in I} A^i$ que contiene a $(\bigcup_{(i,i')\in\leq}\{ ((x, i), (a^{i,i'}_s(x), i')) \in \left(\coprod_{i\in I} A^i_s\right)^2 \mid x \in A^i_s \})_{s\in S}$ y $\mathrm{Ker}(\left[l^i\right]_{i\in I})$ es una congruencia sobre $\coprod_{i\in I} A^i$ que la contiene. En virtud de la propiedad universal del cociente, podemos afirmar que existe una única S-aplicación $u\colon \varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}}) \longrightarrow L$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i\in I} A^i \arrow[r, "\mathrm{pr}_\Phi"] \arrow[dr, "{[l^i]_{i\in I}}"'] & \varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & L \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, u es un homomorfismo de $\varinjlim(\underline{I}, \underline{\underline{\mathcal{A}}})$ en $\underline{L}$.

Ahora bien, puesto que, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^i \arrow[r, "\mathrm{in}^i"] \arrow[dr, "l^i"'] & \coprod_{i\in I} A^i \arrow[d, "{[l^i]_{i\in I}}"] \\ & L \end{tikzcd}$$

conmuta, también, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A^i \arrow[r, "\mathrm{in}^i"] \arrow[dr, "l^i"'] \arrow[rr, bend left, "a^i"] & \coprod_{i\in I} A^i \arrow[r, "\mathrm{pr}_\Phi"] \arrow[d, "{[l^i]_{i\in I}}"] & \varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[dl, bend left, "u"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por consiguiente se tiene que u es tal que, para cada $i \in I$, el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underline{A}^i \arrow[r, "a^i"] \arrow[dr, "l^i"'] & \varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}}) \arrow[d, "u"] \\ & \underline{L} \end{tikzcd}$$

conmuta y es el único con esa propiedad. $\square$

2.7.11. Proposición. Cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ es un colímite del sistema dirigido formado por sus subálgebras finitamente generadas. $\square$

En el álgebra homogénea el colímite dirigido de un sistema dirigido de $\underline{\Sigma}$-álgebras homogéneas no vacías $(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}})$ se puede obtener como la $\underline{\Sigma}$-álgebra cociente $\underline{C}/\equiv$, donde $\underline{C} \leq \prod_{i\in I} \underline{A}^i$ es la subálgebra determinada por el conjunto de elementos *eventualmente consistentes*

$$C = \{x \in \textstyle\prod_{i\in I}\underline{A}^i \mid \exists k \in I,\, \forall j \geq i \geq k,\, a_{i,j}(x(i) = x(j))\}$$

y $\equiv$ es la congruencia sobre $\underline{C}$ definida como

$$x \equiv x' \text{ si y sólo si } \exists k \in I,\, \forall i \geq k,\, x(i) = x'(i)$$

Puesto que tal colímite se obtiene a partir del sistema dirigido haciendo uso de productos, subálgebras y cocientes, toda variedad homogénea está cerrada bajo colímites dirigidos. Si se consideran sistemas en los que pueda ocurrir la $\underline{\Sigma}$-álgebra homogénea vacía, el resultado es el mismo porque las álgebras vacías pueden eliminarse del sistema sin alterar el colímite resultante. Sin embargo, en el álgebra heterogénea muchas $\underline{\Sigma}$-álgebras no iniciales *son vacías*, ya que por tener alguna coordenada vacía no existe ningún morfismo desde la $\underline{\Sigma}$-álgebra final hasta ellas y, por consiguiente, no pueden eliminarse sin alterar el colímite resultante. Como consecuencia, la construcción anterior no es adecuada para la obtención de colímites dirigidos de las $\underline{\Sigma}$-álgebras heterogéneas. De hecho, *las variedades heterogéneas no están cerradas, en general, bajo colímites dirigidos*, como se demostrará en el estudio posterior sobre las clases ecuacionales finitarias. Ahora bien, si el sistema es tal que sus $\underline{\Sigma}$-álgebras tienen el mismo soporte la construcción anterior sí resulta aplicable.

2.7.12. Proposición. Sea $(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}})$, con $\underline{\mathcal{A}} = ((\underline{A}^i)_{i\in I}, (a^{i,i'})_{(i,i')\in\leq})$, un sistema dirigido de $\underline{\Sigma}$-álgebras con **soporte constante**, i.e., tal que, para cada $i, j \in I$, $\text{supp}(A^i) = \text{supp}(A^j)$. Sea $\underline{C}$ la subálgebra de $\prod_{i\in I} \underline{A}^i$ determinada por el S-conjunto C cuya coordenada s-ésima es

$$C_s = \{x \in \textstyle\prod_{i\in I}A^i_s \mid \exists k \in I,\ \forall j \geq i \geq k,\ a^{i,j}(x_i) = x_j\}$$

y $\equiv$ la congruencia sobre $\underline{C}$ definida por

$$x \equiv_s y \text{ si y sólo si } \exists k \in I,\ \forall i \geq k,\ x_i = y_i$$

Entonces $\underline{C}/\equiv$ es isomorfo a $\varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}})$.

Demostración. Veamos que $\underline{C}$ es una subálgebra. Sea $\sigma\colon w \longrightarrow s$ y $x \in C_w$. Entonces, para cada $\alpha \in |w|$, existe un k_α tal que, para cada $j \geq i \geq k_\alpha$, $a^{i,j}(x_{\alpha,i}) = x_{\alpha,j}$. Puesto que $\underline{I}$ es dirigido, existe un $k \in I$ tal que $k \geq k_\alpha$, para cada $\alpha \in |w|$. Entonces, para cada $j \geq i \geq k$, se cumple que $a^{i,j}(x_{\alpha,i}) = (x_{\alpha,j})$ y por consiguiente

$$F^i_\sigma(a^{i,j}(x_{\alpha,i}) \mid \alpha \in |w|) = F^j_\sigma(x_{\alpha,j} \mid \alpha \in |w|)$$

luego
$$(a^{i,j}(F_\sigma(x_\alpha \mid \alpha \in |w|)))_i = (F_\sigma(x_\alpha \mid \alpha \in |w|))_j$$
por lo que $F_\sigma(x_\alpha \mid \alpha \in |w|) \in C_s$.

Se cumple que $\equiv$ es una congruencia sobre $\underline{C}$. Puesto que está definida mediante la igualdad es una S-relación de equivalencia. Además, si $\sigma\colon w \longrightarrow s$ y, para cada $\alpha \in |w|$, $x_\alpha \equiv_{w_\alpha} y_\alpha$, entonces, para cada $\alpha \in |w|$, existe un k_α tal que, para cada $i \geq k_\alpha$, $x_{\alpha,i} = y_{\alpha,i}$. Sea k una cota superior de los k_α. Entonces para cada $i \geq k$, $x_{\alpha,i} = y_{\alpha,i}$, luego $F^i_\sigma(x_{\alpha,i} \mid \alpha \in |w|) = F^i_\sigma(y_{\alpha,i} \mid \alpha \in |w|)$ y $\equiv$ es una congruencia.

Sea f la S-aplicación de $\underline{C}/\equiv$ en $\coprod_{i\in I} A^i/\Phi$, el S-conjunto subyacente de $\varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}})$, definida, para cada $s \in S$, como
$$f_s \begin{cases} C_s/\equiv_s & \longrightarrow \coprod_{i\in I} A^i_s/\Phi_s \\ [x] & \longmapsto [(x_k, k)] \end{cases}$$
con k tal que para cada $j \geq i \geq k$, $a^{i,j}(x_i) = x_j$. La definición de f es independiente del representante de clase elegido. En efecto, si $[y] = [x]$ y $f_s[y] = [(y_l, l)]$, entonces, por ser $\underline{I}$ dirigido existe un $m \geq k, l$ tal que, para cada $i \geq m$, $x_i = y_i$. Pero entonces se cumple que
$$(x_k, k)\Phi(a^{k,m}(x_k), m)\Phi(x_m, m)\Phi(y_m, m)\Phi(a^{l,m}(y_l), m)\Phi(y_l, l)$$
luego $((x_k, k), (y_l, l)) \in \Phi$.

Veamos que $f\colon \underline{C}/\equiv \longrightarrow \varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}})$ es un homomorfismo. Hay que demostrar que, para cada $\sigma\colon w \longrightarrow s$, con $|w| = n$ y cada $([x_0], \ldots, [x_{n-1}]) \in (\underline{C}/\equiv)_w$, se cumple que
$$f_s(F^{\underline{C}/\equiv}_\sigma([x_0], \ldots, [x_{n-1}])) = F^{\varinjlim(\underline{I},\underline{\mathcal{A}})}_\sigma(f_{w_0}([x_0]), \ldots, f_{w_{n-1}}([x_{n-1}]))$$
Tenemos que
$$\begin{aligned} &F^{\varinjlim(\underline{I},\underline{\mathcal{A}})}_\sigma(f_{w_0}([x_0]), \ldots, f_{w_{n-1}}([x_{n-1}])) \\ &\quad = F^{\varinjlim(\underline{I},\underline{\mathcal{A}})}_\sigma([(x_{0,k_0}, k_0)], \ldots, [(x_{n-1,k_{n-1}}, k_{n-1})]) \end{aligned}$$
donde, para cada $\alpha \in |w|$, k_α tiene la propiedad de que para $j \geq i \geq k_\alpha$, $a^{i,j}(x_{\alpha,i}) = x_{\alpha,j}$. Sea $k \geq k_0, \ldots, k_{n-1}$. Entonces
$$F^{\varinjlim(\underline{I},\underline{\mathcal{A}})}_\sigma([(x_{0,k_0}, k_0)], \ldots, [(x_{n-1,k_{n-1}}, k_{n-1})]) = [(F^k_\sigma(x_{0,k}, \ldots, x_{n-1,k}), k)]$$
Por otra parte,
$$\begin{aligned} f_s(F^{\underline{C}/\equiv}_\sigma([x_0], \ldots, [x_{n-1}])) &= f_s([F^{\underline{C}}_\sigma(x_0, \ldots, x_{n-1})]) \\ &= f_s([(F^{\underline{C}}_\sigma(x_0, \ldots, x_{n-1})_i \mid i \in I)]) \end{aligned}$$

Ahora bien, para cada $j \geq i \geq k$,

$$\begin{aligned} a_s^{i,j}(F_\sigma^{\underline{C}}(x_0, \ldots, x_{n-1})_i) &= a_s^{i,j}(F_\sigma^i(x_{0,i}, \ldots, x_{n-1,i})) \\ &= F_\sigma^j(a_{w_0}^{i,j}(x_{0,i}), \ldots, a_{w_{n-1}}^{i,j}(x_{n-1,i})) \\ &= (F_\sigma^j(x_{0,j}, \ldots, x_{n-1,j})) \\ &= F_\sigma^{\underline{C}}(x_0, \ldots, x_{n-1})_j \end{aligned}$$

por lo que

$$f_s([(F_\sigma^{\underline{C}}(x_0, \ldots, x_{n-1})_i \mid i \in I)]) = [(F_\sigma^k(x_{0,k}, \ldots, x_{n-1}, k), k)]$$

Veamos que f es biyectiva. Si $f_s[x] = [(x_k, k)] = f_s[y] = [(y_l, l)]$, entonces $((x_k, k), (y_l, l)) \in \Phi_s$, luego existe un $m \geq k, l$, tal que $a^{k,m}(x_k) = a^{l,m}(y_l)$. Por consiguiente, para cada $i \geq m$, $x_m = a^{k,m}(x_k) = a^{l,m}(y_l) = y_l$ y por tanto $[x] = [y]$ y f es inyectiva. Ahora, si $[(b, k)] \in \coprod_{i \in I} A_s^i / \Phi_s$, entonces $(b, k) \in A_s^k$. Sea x la función de elección definida como

$$x \begin{cases} I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_s^i \\ j \longmapsto \begin{cases} a^{k,j}(b) & \text{si } k \leq j \\ c & \text{si } k \not\leq j \end{cases} \end{cases}$$

donde c es un elemento arbitrario de A_s^j, que no es en ningún caso vacío porque la familia $(A^i)_{i \in I}$ es de soporte constante y $A_s^k \neq \emptyset$. La función x está en C puesto que para cada $j \geq i \geq k$, $a^{i,j}(x_i) = x_j$ y $f_s([x]) = [(b, k)]$, luego f es sobreyectiva. □

Productos reducidos y ultraproductos.

Las definiciones habituales de los productos reducidos y ultraproductos para las $\underline{\Sigma}$-álgebras homogéneas tienen una traducción inmediata para $\underline{\Sigma}$-álgebras heterogéneas. Sin embargo, algunas caracterizaciones de tales construcciones no son válidas para sistemas arbitrarios de $\underline{\Sigma}$-álgebras heterogéneas, aunque sí para aquellos que tengan la propiedad adicional de tener soporte constante.

2.7.13. Definición. Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro sobre I y $(\underline{A}^i)_{i \in I}$ una familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces, para $(\mathcal{F}, \leq) = (\mathcal{F}, \supseteq)$, el par

$$((\textstyle\prod_{j \in J} \underline{A}^j)_{J \in \mathcal{F}}, (\mathrm{p}^{J,K})_{J \leq K})$$

en donde $\mathrm{p}^{J,K}$ denota $\mathrm{p}^{J,K} = \langle \mathrm{pr}^j \rangle_{j \in K} \colon \prod_{j \in J} \underline{A}^j \longrightarrow \prod_{k \in K} \underline{A}^k$ es un sistema dirigido de $\underline{\Sigma}$-álgebras. El límite inductivo de tal sistema se denomina el **producto reducido** o **filtrado** de $(\underline{A}^i)_{i \in I}$ relativo a $\mathcal{F}$. A la $\underline{\Sigma}$-álgebra subyacente se la denota por $\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} \underline{A}^i$ y a los morfismos estructurales de $\prod_{j\in J} \underline{A}^j \longrightarrow \prod_{i\in I}^{\mathcal{F}} \underline{A}^i$ mediante p^J. En particular, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, al límite inductivo anterior se le denomina el **ultraproducto** de $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ relativo a $\mathcal{F}$.

2.7.14. Proposición. Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro sobre I y $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ una familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras. La S-relación $\equiv^{\mathcal{F}}$ en $\prod_{i\in I} A^i$, definida en su coordenada s-ésima, como

$$a \equiv_s^{\mathcal{F}} b \text{ si y sólo si } \mathrm{Eq}(a,b) \in \mathcal{F}$$

es una congruencia sobre $\prod_{i\in I} \underline{A}^i$.

Demostración. Veamos, en primer lugar, que $\equiv^{\mathcal{F}}$ es una S-relación de equivalencia. Puesto que $I \in \mathcal{F}$, para cada $a \in \prod_{i\in I} A_s^i$, $a \equiv_s^{\mathcal{F}} a$, por lo que $\equiv^{\mathcal{F}}$ es reflexiva. La simetría es inmediata. Es transitiva, puesto que si $a, b, c \in \prod_{i\in I} A_s^i$, con $a \equiv_s^{\mathcal{F}} b$ y $b \equiv_s^{\mathcal{F}} c$ se tiene que $\mathrm{Eq}(a,b)$ y $\mathrm{Eq}(b,c)$ están en $\mathcal{F}$ por lo que su intersección, también pertenece a $\mathcal{F}$ y, puesto que $\mathrm{Eq}(a,b) \cap \mathrm{Eq}(b,c) \subseteq \mathrm{Eq}(a,c)$, $\mathrm{Eq}(a,c) \in \mathcal{F}$ y $a \equiv_s^{\mathcal{F}} c$.

Veamos que $\equiv^{\mathcal{F}}$ es una congruencia. Sea $\sigma\colon w \longrightarrow s$ y $a, b \in \prod_{i\in I} A_w^i$ tales que, para cada $\alpha \in |w|$, $a_\alpha \equiv_{w_\alpha}^{\mathcal{F}} b_\alpha$. Entonces, para cada $\alpha \in |w|$, $\mathrm{Eq}(a_\alpha, b_\alpha) \in \mathcal{F}$ y por estar $\mathcal{F}$ cerrado bajo intersecciones finitas, $\bigcap_{\alpha\in|w|} \mathrm{Eq}(a_\alpha, b_\alpha) \in \mathcal{F}$. Pero $\mathcal{F}$ está cerrado para superconjuntos, luego $\mathrm{Eq}(F_\sigma(a_\alpha \mid \alpha \in |w|), F_\sigma(b_\alpha \mid \alpha \in |w|))$ también pertenece a $\mathcal{F}$ por lo que $F_\sigma(a_\alpha \mid \alpha \in |w|) \equiv_s^{\mathcal{F}} F_\sigma(b_\alpha \mid \alpha \in |w|)$. □

2.7.15. Proposición. Sea I un conjunto y $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ una familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras de soporte constante. Sea $\mathcal{F}$ el filtro principal sobre I generado por $F \subseteq I$. Entonces $\prod_{i\in I} \underline{A}^i / {\equiv^{\mathcal{F}}} \cong \prod_{j\in J} \underline{A}^j$.

Demostración. Sea f la S-aplicación definida, para cada $s \in S$, como

$$f_s \begin{cases} \prod_{i\in I} A_s^i / {\equiv_s^{\mathcal{F}}} \longrightarrow \prod_{j\in J} A_s^j \\ \qquad [a] \qquad \longmapsto a{\restriction}J \begin{cases} J \longrightarrow \bigcup_{j\in J} A_s^j \\ j \longmapsto a_j \end{cases} \end{cases}$$

La S-aplicación f está bien definida. En efecto, si $a \equiv_s^{F} b$, entonces $\mathrm{Eq}(a,b) \in \mathcal{F}$. Pero $J \subseteq \mathrm{Eq}(a,b) \in \mathcal{F}$, luego $a{\restriction}J = b{\restriction}J$.

Veamos que f es homomorfismo. Sea $\sigma\colon w \longrightarrow s$, con $|w| = n$, y $([a_i] \mid i \in n)$

una familia en $(\prod_{i\in I} A^i)_w$. Entonces

$$\begin{aligned}
f_s(F_\sigma^{\prod_{i\in I}\underline{A}^i/\equiv^{\mathcal{F}}}([a_0],\dots,[a_{n-1}])) &= f_s([F_\sigma^{\prod_{i\in I}\underline{A}^i}(a_0,\dots,a_{n-1})]) \\
&= F_\sigma^{\prod_{i\in I}\underline{A}^i}(a_0,\dots,a_{n-1})\restriction J \\
&= (F_\sigma^{\underline{A}^j}(a_{0,j},\dots,a_{n-1,j}) \mid j\in J) \\
&= (F_\sigma^{\underline{A}^j}((a_0\restriction J)_j,\dots,(a_{n-1}\restriction J)_j) \mid j\in J) \\
&= F_\sigma^{\prod_{j\in J}\underline{A}^j}(a_0\restriction J,\dots,a_{n-1}\restriction J) \\
&= F_\sigma^{\prod_{j\in J}\underline{A}^j}(f_{w_0}(a_0),\dots,f_{w_{n-1}}(a_{n-1}))
\end{aligned}$$

Se cumple que f sobreyectiva. Sea $s\in S$ y $a\in\prod_{i\in J}\underline{A}^i$. Por ser $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ una familia de soporte constante, $\mathrm{supp}(\prod_{j\in J} A^j) = \mathrm{supp}(\prod_{i\in I} A^i)$, luego existe un $b\in\prod_{i\in I} A^i_s$ tal que $b\restriction J = a$ y por consiguiente f es sobreyectiva.

Finalmente, f es inyectiva. Sean $s\in S$ y $[a],[b]\in\prod_{i\in I} A^i_s/\equiv^{\mathcal{F}}_s$, para los que $f_s(a) = f_s(b)$. Si $[a]\neq[b]$ entonces $\mathrm{Eq}(a,b)\notin\mathcal{F}$. Pero $\mathcal{F}$ es el filtro principal generado por J, por lo que $J\subseteq\mathrm{Eq}(a,b)$ y $\mathrm{Eq}(a,b)\in\mathcal{F}$. Por consiguiente, $[a]=[b]$ y f es inyectiva. □

Como es bien sabido, el producto reducido de una familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras homogéneas es isomorfo al cociente del producto de la misma entre una cierta congruencia. Cuando se consideran sistemas de $\underline{\Sigma}$-álgebras heterogéneas, esa representación es válida únicamente para sistemas de $\underline{\Sigma}$-álgebras con soporte constante.

2.7.16. Proposición. Sea I un conjunto, $\mathcal{F}$ un filtro sobre I y $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ una familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras con soporte constante. Entonces $\prod^{\mathcal{F}}_{i\in I}\underline{A}^i$ es isomorfa a $\prod_{i\in I}\underline{A}^i/\equiv^{\mathcal{F}}$.

Demostración. Por definición, $\prod^{\mathcal{F}}_{i\in I}\underline{A}^i$ es igual a $\varinjlim(\underline{\mathcal{F}},\underline{\mathcal{A}})$, donde $\underline{\mathcal{F}} = (\mathcal{F},\leq)$, $\underline{\mathcal{A}} = ((\underline{A}(J))_{J\in\mathcal{F}},(\mathrm{p}^{J,K})_{J\leq K})$ y $\underline{A}(J) = \prod_{j\in J}\underline{A}^j$. Por la proposición 2.7.12, $\varinjlim(\underline{\mathcal{F}},\underline{\mathcal{A}})$ es isomorfo a $\underline{C}/\equiv$, donde $\underline{C}$ es la subálgebra de $\underline{B} = \prod_{J\in\mathcal{F}}(\underline{A}(J))$ determinada por el S-conjunto que en su coordenada s-ésima es:

$$C_s = \{a\in\underline{B} \mid \exists L\in\mathcal{F},\ \forall K\geq J\geq L,\ \mathrm{p}^{J,K}(a_J) = a_K\}$$

y $\equiv$ la congruencia sobre $\underline{C}$ determinada por

$$a\equiv_s b \text{ si y sólo si } \exists J\in\mathcal{F},\ \forall K\geq J,\ a_K = b_K$$

Sea f la S-aplicación definida como

$$f_s\begin{cases}\prod_{i\in I} A^i_s \longrightarrow C_s \\ \quad a \quad\longmapsto \begin{cases}\mathcal{F}\longrightarrow\bigcup_{J\in\mathcal{F}}\underline{A}(J)\\ J\longmapsto a\restriction J\end{cases}\end{cases}$$

i.e., tal que $f_s(a)(J)(i) = a_i$.

La S-aplicación f es un homomorfismo. Si $\sigma\colon w \longrightarrow s$, con $|w| = n$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
f_s(F_\sigma^{\underline{A}(I)}(a_0,\dots,a_{n-1})) &= f_s(F_\sigma^{\underline{A}^i}(a_{0,i},\dots,a_{n-1,i}) \mid i\in I)\\
&= ((F_\sigma^{\underline{A}^i}(a_{0,i},\dots,a_{n-1,i}) \mid i\in I)\restriction J \mid J\in\mathcal{F})\\
&= ((F_\sigma^{\underline{A}^j}(a_{0,j},\dots,a_{n-1,j}) \mid j\in J) \mid J\in\mathcal{F})\\
&= (F_\sigma^{\underline{A}(I)}(a_0\restriction J,\dots,a_{n-1}\restriction J) \mid J\in\mathcal{F})\\
&= F_\sigma^{\underline{C}}((a_0\restriction J \mid J\in\mathcal{F}),\dots,(a_{n-1}\restriction J \mid J\in\mathcal{F}))\\
&= F_\sigma^{\underline{C}}(f_{w_0}(a_0),\dots,f_{w_{n-1}}(a_{n-1}))
\end{aligned}
$$

Podemos definir ahora una S-aplicación g de manera que

$$
g_s\begin{cases} \prod_{i\in I} A_s^i/{\equiv_s^{\mathcal{F}}} & \longrightarrow C_s/{\equiv_s}\\ \quad [a] & \longmapsto [f_s(a)]\end{cases}
$$

La definición es independiente del representante de clase escogido. En efecto, si $[a] = [b]$ entonces $J = \{i\in I \mid a_i = b_i\}\in\mathcal{F}$. Si $K\in\mathcal{F}$ y $J\leq K$, entonces $f_s(a)(K) = f_s(b)(K)$ por lo que $[f_s(a)] = [f_s(b)]$.

Veamos que g es homomorfismo. Sea $\sigma\colon w\longrightarrow s$, con $|w| = n$. Entonces

$$
\begin{aligned}
g_s(F_\sigma^{\underline{A}(I)/\equiv^{\mathcal{F}}}([a_0],\dots,[a_{n-1}])) &= g_s([F_\sigma^{\underline{A}(I)}(a_0,\dots,a_{n-1})])\\
&= [f_s(F_\sigma^{\underline{A}(I)}(a_0,\dots,a_{n-1}))]\\
&= [F_\sigma^{\underline{C}}(f_{w_0}(a_0),\dots,f_{w_{n-1}}(a_{n-1}))]\\
&= F_\sigma^{\underline{C}/\equiv}([f_{w_0}(a_0)],\dots,[f_{w_{n-1}}(a_{n-1})])\\
&= F_\sigma^{\underline{C}/\equiv}(g_{w_0}([a_0]),\dots,g_{w_{n-1}}([a_{n-1}]))
\end{aligned}
$$

Para comprobar que g es inyectiva, sean $a,b\in\underline{A}(I)_s$ y $J = \{i\in I \mid a_i = b_i\}$. Supongamos que $g_s(a) = g_s(b)$, i.e., que $[f_s(a)] = [f_s(b)]$. Entonces existe un $K\in\mathcal{F}$ tal que $f_s(a)(K) = f_s(b)(K)$. Puesto que $K\subseteq J$, $J\in\mathcal{F}$ por lo que $a\equiv_s^{\mathcal{F}} b$ y $[a] = [b]$.

Por último, veamos que g es sobreyectiva. Sea $b\in C_s$. Entonces existe un $L\in\mathcal{F}$ tal que, para cada $K\geq J\geq L$, $\mathrm{p}^{J,K}(b_J) = b_K$. Sea $a\in\underline{A}(I)$ tal que para cada $i\in L$, $a_i = b_{Li}$. Sabemos que $g_s([a]) = [f_s(a)]$. Para cada $J\geq L$, $f_s(a)(J) = a\restriction J = b_J$. Por consiguiente, $f_s(a)\equiv b$ y $g_s([a]) = [b]$.

Por todo lo anterior, g es un isomorfismo y $\prod_{i\in I}^{\mathcal{F}}\underline{A}^i$ es isomorfo a $\prod_{i\in I}\underline{A}^i/{\equiv^{\mathcal{F}}}$

$\square$

2.8 Algebras directa y subdirectamente irreducibles.

En esta sección estudiamos la versión heterogénea de los teoremas de Birkhoff sobre la descomposición de las $\underline{\Sigma}$-álgebras en productos de álgebras directamente irreducibles y productos subdirectos de $\underline{\Sigma}$-álgebras subdirectamente irreducibles.

Algebras directamente irreducibles.

Decimos que una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ es **subfinal** si existe una única estructura algebraica sobre su S-conjunto subyacente. Las $\underline{\Sigma}$-álgebras subfinales son subobjetos de la $\underline{\Sigma}$-álgebra final en la categoría de $\underline{\Sigma}$-álgebras y sus S-conjuntos subyacentes son subfinales en $\mathbf{Set}^S$. De hecho, no todos los S-conjuntos subfinales admiten una estructura de $\underline{\Sigma}$-álgebra sobre ellos, pero de admitirla, ésta es única.

Al contrario que para las álgebras homogéneas, existen $\underline{\Sigma}$-álgebras subfinales que son isomorfas a un producto de $\underline{\Sigma}$-álgebras no subfinales, como consecuencia de que los factores de un producto de S-conjuntos no tienen necesariamente un S-cardinal menor que su producto, cuando los soportes de los factores incluyen estrictamente al soporte de su producto. Esto sugiere que la definición adecuada de $\underline{\Sigma}$-álgebra directamente reducible debe exigir que los soportes de los factores del producto estén incluidos en el soporte de la $\underline{\Sigma}$-álgebra considerada. Esta condición adicional permite obtener la contrapartida heterogénea del teorema de Birkhoff sobre la descomposición de las $\underline{\Sigma}$-álgebras finitas homogéneas.

2.8.1. Definición. Una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ es **directamente reducible** si $\underline{A}$ es isomorfa a un producto de un par de $\underline{\Sigma}$-álgebras no triviales y cuyos soportes estén incluidos en el soporte de $\underline{A}$.

2.8.2. Proposición. Una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ es directamente reducible si y sólo si $\underline{A}$ es isomorfa a un producto $\underline{B} \times \underline{C}$ de $\underline{\Sigma}$-álgebras $\underline{B}$ y $\underline{C}$, cuyos S-cardinales son estrictamente menores que el S-cardinal de $\underline{A}$. □

Cada $\underline{\Sigma}$-álgebra subfinal es directamente irreducible. Asimismo, cada $\underline{\Sigma}$-álgebra finita $\underline{A}$ en la que una coordenada tenga como cardinal un número primo es directamente irreducible.

2.8.3. Definición. Sean Φ y Ψ dos congruencias sobre una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$. Entonces Φ y Ψ son **congruencias factoriales** sobre $\underline{A}$ si se cumple que

$$\Phi \wedge \Psi = \Delta$$

$$\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$$

$$\Phi \vee \Psi = \nabla$$

2.8.4. Proposición. Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_0)$ y $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_1)$ son congruencias factoriales sobre $\underline{A}$.

2.8.5. Proposición. Si Φ y Ψ son congruencias factoriales sobre $\underline{A}$ entonces $\underline{A} \cong \underline{A}/\Phi \times \underline{A}/\Psi$.

Demostración. Considérese la S-aplicación $f\colon A \longrightarrow A/\Phi \times A/\Psi$ definida como $f_s(a) = ([a]_{\Phi_s}, [a]_{\Psi})$. Es evidente que f es un homomorfismo. Además, si se cumple que $f_s(a) = f_s(b)$ entonces $(a,b) \in \Phi_s$ y $(a,b) \in \Psi_s$, por lo que f es inyectiva. Por último, si a,$b \in A_s$ entonces, por 2.3.10 existe un $c \in A_s$ tal que $(a,c) \in \Phi_s$ y $(c,b) \in \Psi_s$ por lo que $f_s(c) = ([a]_{\Phi_s}, [a]_{\Psi})$ y f es sobreyectiva. □

2.8.6. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\underline{A}$ es directamente irreducible si y sólo si las únicas congruencias factoriales sobre ella son Δ_A y ∇_A. □

2.8.7. Teorema (Birkhoff). Cada $\underline{\Sigma}$-álgebra finita es isomorfa a un producto finito de $\underline{\Sigma}$-álgebras directamente irreducibles.

Demostración. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra finita. La demostración se realiza por inducción sobre el cardinal global de $\underline{A}$. Si $\mathrm{card}(\underline{A}) = 0$ entonces $\underline{A}$ es irreducible. Supongamos que $\underline{A}$ es tal que para cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{B}$ con $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A)$, $\underline{B}$ es isomorfa a un producto de $\underline{\Sigma}$-álgebras irreducibles. Si $\underline{A}$ es irreducible la proposición queda demostrada. En caso contrario, $\underline{A} \cong \underline{A}^0 \times \underline{A}^1$. Sea $T = \mathrm{supp}(A) = \mathrm{supp}(A^0) \cap \mathrm{supp}(A^1)$. Sea $\underline{A}^i{\restriction}T$, con $i = 0, 1$, la $\underline{\Sigma}$-álgebra cuyo S-conjunto subyacente es $A^i{\restriction}T$, definido como

$$(A^i{\restriction}T)_s = \begin{cases} A^i_s & \text{si } s \in T \\ \emptyset & \text{si } s \notin T \end{cases}$$

y cuya estructura algebraica $F^{\underline{A}^i{\restriction}T}$ se define como

$$F^{\underline{A}^i{\restriction}T} \begin{cases} \Sigma \longrightarrow \mathrm{Op}_{S^\star \times S}(A^i{\restriction}T) \\ \sigma \longmapsto \begin{cases} F^{\underline{A}^i}(\sigma) & \text{si } \mathrm{Im}(w) \subseteq T, s \in T \\ ! : \emptyset \longrightarrow B_s & \text{si } \mathrm{Im}(w) \nsubseteq T \end{cases} \end{cases}$$

Esta definición es correcta puesto que el caso en que $\sigma\colon w \longrightarrow s$ con $\mathrm{Im}(w) \subseteq T$ y $s \notin T$ es imposible, debido a que su realización en $\underline{A}$ sería una aplicación $F^{\underline{A}}(\sigma)\colon A_w \neq \emptyset \longrightarrow A_s = \emptyset$. Se cumple que $\underline{A} \cong \underline{A}^0{\restriction}T \times \underline{A}^1{\restriction}T$ y que $\mathrm{card}(A^0{\restriction}T), \mathrm{card}(A^1{\restriction}T) < \mathrm{card}(A)$ por lo que, aplicando la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\underline{A}^0{\restriction}T = \underline{B}^0 \times \cdots \times \underline{B}^n$$

$$\underline{A}^1{\restriction}T = \underline{C}^0 \times \cdots \times \underline{C}^m$$

donde $\underline{B}^j$ y $\underline{C}^k$, con $j \in n$ y $h \in m$ son directamente irreducibles. Por consiguiente,

$$\underline{A} = \underline{B}^0 \times \cdots \times \underline{B}^n \times \underline{C}^0 \times \cdots \times \underline{C}^m$$

□

Álgebras subdirectamente irreducibles.

2.8.8. Definición. Una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ es un **producto subdirecto** de una familia $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ de $\underline{\Sigma}$-álgebras, $\underline{A} \leq_{\mathrm{s}} \prod_{i\in I} \underline{A}^i$, si se cumple que:

1. $\underline{A}$ es una subálgebra de $\prod_{i\in I} \underline{A}^i$.
2. Para cada $i \in I$, $\mathrm{pr}^i \circ \mathrm{in}$ es sobreyectiva, i.e., $\mathrm{pr}^i \circ \mathrm{in}[A] = A^i$.

Un **encajamiento** $f\colon \underline{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \underline{A}^i$ es **subdirecto** si $f[\underline{A}]$ es un producto subdirecto de $(\underline{A}^i)_{i\in I}$.

2.8.9. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $(\Phi^i)_{i\in I}$ una familia de congruencias sobre $\underline{A}$. Entonces $\underline{A}/\bigcap_{i\in I} \Phi^i$ puede ser subdirectamente encajado en $\prod_{i\in I} \underline{A}/\Phi^i$

Demostración. Sea f^i, para cada $i \in I$, el único homomorfismo de $\underline{A}/\bigcap_{i\in I} \Phi^i$ en $\underline{A}/\Phi^i$ que conmuta con las proyecciones canónicas. Entonces el único homomorfismo $\langle f^i \rangle_{i\in I}\colon \underline{A}/\bigcap_{i\in I} \Phi^i \longrightarrow \prod_{i\in I} \underline{A}/\Phi^i$ determinado por la propiedad universal del producto es un encajamiento subdirecto. □

2.8.10. Corolario. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $(\Phi^i)_{i\in I}$ una familia de congruencias sobre $\underline{A}$ tal que $\bigcap_{i\in I} \Phi^i = \Delta_A$. Entonces $\langle \mathrm{pr}^i \rangle_{i\in I}\colon \underline{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \underline{A}/\Phi^i$ es un encajamiento subdirecto. □

2.8.11. Definición. Una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ es **subdirectamente irreducible** si, para cada encajamiento subdirecto $f\colon \underline{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \underline{A}^i$ con $I \neq \emptyset$, existe un $i \in I$ tal que $\mathrm{pr}^i \circ f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}^i$ es inyectiva (y por tanto un isomorfismo).

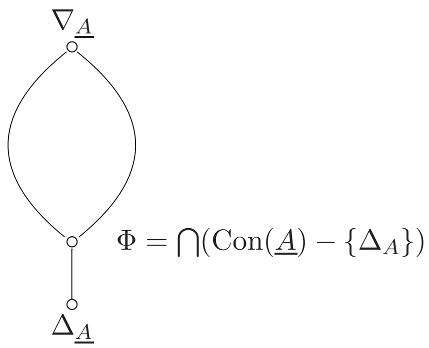
De la definición anterior se sigue que las $\underline{\Sigma}$-álgebras subfinales son subdirectamente irreducibles. En efecto, si $I = \emptyset$ entonces el producto de la familia vacía es la $\underline{\Sigma}$-álgebra terminal $\underline{1}$ de la que todas las $\underline{\Sigma}$-álgebras subfinales son subálgebras y que vacuamente satisfacen la condición 2. Si, por el contrario, $I \neq \emptyset$ y $f\colon \underline{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \underline{A}^i$ es un encajamiento subdirecto, entonces, para cada $i \in I$, pr^i es sobreyectiva, y $\mathrm{supp}(A) = \mathrm{supp}(\prod_{i\in I} \underline{A}^i) = \mathrm{supp}(\underline{A}^i)$. por consiguiente, si $\underline{A}$ es subfinal entonces $\underline{A} \cong \prod_{i\in I} \underline{A}^i \cong \underline{A}^i$ para cada $i \in I$.

2.8.12. Proposición. Una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ es subdirectamente irreducible exactamente si $\underline{A}$ es subfinal o existe un congruencia mínima en $\mathrm{Con}(\underline{A}) - \Delta_A$.

Demostración. Si $\underline{A}$ no es subfinal y $\mathrm{Con}(\underline{A}) - \Delta_A$ no contiene una congruencia mínima entonces $\bigcap(\mathrm{Con}(\underline{A}) - \Delta_A) = \Delta_A$. Sea $I = \mathrm{Con}(\underline{A}) - \Delta_A$. La aplicación canónica $\langle \mathrm{pr}^i \rangle_{i \in I} \colon \underline{A} \longrightarrow \prod(\underline{A}/\Phi)_{\Phi \in I}$ es un encajamiento subdirecto por el corolario anterior y puesto que las proyecciones canónicas $\mathrm{pr}^i \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}/\Phi$ no son inyectivas para ninguna congruencia $\Phi \in I$, se cumple que $\underline{A}$ no es subdirectamente irreducible. Si $\underline{A}$ es subfinal entonces es subdirectamente irreducible. Si $\underline{A}$ no es subfinal, sea $\Phi = \bigcap(\mathrm{Con}(\underline{A}) - \{\Delta_A\}) \neq \Delta_A$. Sea $s \in S$ y $(a, b) \in \Phi_s$ tal que $a \neq b$. Si $f \colon \underline{A} \longrightarrow \prod_{i \in I}(\underline{A}^i)$ es un encajamiento subdirecto entonces existe un $i \in I$ tal que $f^i_s(a) \neq f^i_s(b)$ con $f^i = \mathrm{pr}^i \circ f$ puesto que en caso contrario $(a, b) \in \ker(f_s) = \Delta$ y $a = b$. Por consiguiente, $(a, b) \notin \mathrm{Ker}(f^i)_s$ y $\Phi \nsubseteq \mathrm{Ker}(f^i)$, luego $\mathrm{Ker}(f^i) = \Delta$ y $f^i \colon \underline{A} \longrightarrow \underline{A}^i$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $\underline{A}$ es subdirectamente irreducible. □

La propiedad de que $\mathrm{Con}(\underline{A}) - \{\Delta\}$ tenga un mínimo es equivalente a la propiedad de que Δ_A sea completamente inf-irreducible.

Si en una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ el retículo $\mathrm{Con}(\underline{A}) - \{\Delta\}$ tiene un mínimo, el retículo de las congruencias sobre $\underline{A}$ tiene la forma



A Φ se le llama el **monolito** de $\underline{A}$, y se le denota mediante $\mathrm{M}^{\underline{A}}$. El monolito de $\underline{A}$ tiene una propiedad notable y es la de estar generado por cualquiera de sus deltas de Kronecker, i.e., $\mathrm{M}^{\underline{A}} = \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^s(a, b))$, para cada $s \in S$ y cada $(a, b) \in \mathrm{M}^{\underline{A}}_s$ con $a \neq b$.

2.8.13. Proposición. Cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ simple es subdirectamente irreducible y cada subdirectamente irreducible es directamente irreducible.

Demostración. En una $\underline{\Sigma}$-álgebra subdirectamente irreducible las únicas congruencias factoriales son Δ_A y ∇_A, por lo que $\underline{A}$ es directamente irreducible. □

2.8.14. Teorema (Birkhoff). Toda $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ es isomorfa a un producto subdirecto de $\underline{\Sigma}$-álgebras subdirectamente irreducibles (que son imágenes homomorfas de $\underline{A}$).

Demostración. Puesto que las $\underline{\Sigma}$-álgebras subfinales son subdirectamente irreducibles, es suficiente considerar las $\underline{\Sigma}$-álgebras no subfinales. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra no subfinal y

$$I = \{(t,a,b) \mid t \in S, (a,b) \in A_t, a \neq b\}$$

que no es vacío puesto que $\underline{A}$ no es subfinal. Mediante el lema de Zorn se obtiene que, para $(t,a,b) \in I$, existe una congruencia $\Phi^{(t,a,b)}$ sobre $\underline{A}$ tal que $\Phi^{(t,a,b)} \cap \delta^t(a,b) = (\emptyset)_{s\in S}$ y maximal con esa propiedad. Además, la congruencia $\Phi^{(t,a,b)} \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^t(a,b))$ es la mínima congruencia en $[\Phi^{(t,a,b)}, \nabla_A] - \{\Phi^{(t,a,b)}\}$. Luego en el retículo $\mathrm{Cgr}(\underline{A}/\Phi^{(t,a,b)})$, la congruencia $\Phi^{(t,a,b)} \vee \mathrm{Cg}_{\underline{A}}(\delta^t(a,b))$ es el monolito de $\underline{A}/\Phi^{(t,a,b)}$, que es subdirectamente irreducible. Puesto que se cumple que $\bigcap\{\Phi^{(t,a,b)} \mid (t,a,b) \in I\} = \Delta_A$, se tiene que $\underline{A}$ puede ser subdirectamente encajada en $\prod(\underline{A}/\Phi^{(t,a,b)})_{(t,a,b)\in I}$, un producto de las álgebras subdirectamente irreducibles . □

2.8.15. Corolario. Cada $\underline{\Sigma}$-álgebra finita es isomorfa a un producto subdirecto de un número finito de $\underline{\Sigma}$-álgebras finitas subdirectamente irreducibles.

2.9 Álgebras libres para subcategorias.

En este sección estudiamos la formación de $\underline{\Sigma}$-álgebras libres para clases de $\underline{\Sigma}$-álgebras.

2.9.1. Definición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras y $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}$ es la congruencia

$$\bigcap\big\{\mathrm{Ker}\,(f) \mid f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B} \text{ y } \underline{B} \in \mathcal{K}\big\}$$

2.9.2. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras y $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}$ es idéntica a la siguiente congruencia:

$$\bigcap\big\{\Phi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A}) \mid \underline{A}/\Phi \text{ es isomorfa a una subálgebra de un } \underline{B} \in \mathcal{K}\big\}$$

□

Si $\mathcal{K} = \{\underline{B}\}$ entonces $\equiv^{\{\underline{B}\}}_{\underline{A}}$ se denota simplemente como $\equiv^{\underline{B}}_{\underline{A}}$. Denotamos mediante $\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{K}}(A)$ a $\underline{A}/\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}$.

2.9.3. Definición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Se dice que $\mathcal{K}$ está **cerrada bajo subálgebras** si cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ que sea isomorfa a una subálgebra de una $\underline{\Sigma}$-álgebra en $\mathcal{K}$ pertenece a $\mathcal{K}$. Se dice que $\mathcal{K}$ está **cerrada bajo productos** si cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ que sea isomorfa a un producto de $\underline{\Sigma}$-álgebras en $\mathcal{K}$ pertenece a $\mathcal{K}$.

2.9.4. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Si $\mathcal{K}$ está cerrada bajo subálgebras y productos directos, entonces para cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, se cumple que $\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{K}}(\underline{A}) \in \mathcal{K}$

Demostración. Por la proposición anterior, se cumple que $\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{K}}(\underline{A})$ es $\underline{A}/\bigcap C$ con $C = \{\Phi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A}) \mid \exists \underline{B} \in \mathcal{K},\ \underline{A}/\Phi \cong \underline{B}\}$. Por 2.8.9 se tiene un encajamiento subdirecto $f\colon \underline{A}/{\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}} \longrightarrow \prod_{\Phi\in C} \underline{A}/\Phi$. Puesto que $\mathcal{K}$ está cerrada bajo subálgebras y productos, $\prod_{\Phi\in C} \underline{A}/\Phi \in \mathcal{K}$ y $\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{K}}(\underline{A}) \in \mathcal{K}$. Obsérvese, en particular, que si C es $\emptyset$, entonces $\bigcap C = \nabla_A$ y $\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{K}}(\underline{A})$ es la $\underline{\Sigma}$-álgebra final $\underline{1}$. □

Si una clase $\mathcal{K}$ está cerrada bajo subálgebras y productos, entonces el functor de inclusión de la subcategoría asociada en la categoría de las $\underline{\Sigma}$-álgebras tiene un adjunto por la izquierda.

2.9.5. Proposición. Sea $\mathbf{K}$ la subcategoría plena de $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ determinada por una clase $\mathcal{K}$ de $\underline{\Sigma}$-álgebras cerrada bajo productos y subálgebras. El functor de inclusión $\mathrm{In}_{\mathbf{K}}$ de $\mathbf{K}$ en $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ tiene un adjunto por la izquierda $\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{K}}$.

Demostración. Demostramos que, para cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, el par $(\mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}}, \underline{A}/{\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}})$, en el que $\mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}}$ es la proyección canónica en el cociente, es un morfismo universal desde $\underline{A}$ hasta $\mathrm{In}_{\mathcal{K}}$.

Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, con $\underline{B} \in \mathbf{K}$. Puesto que $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}})$ está incluido en $\mathrm{Ker}(f)$, existe un único homomorfismo $f^{\varkappa}\colon \underline{A}/{\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}} \longrightarrow \underline{B}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}}"] \arrow[dr, "f"'] & \underline{A}/{\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{A}}} \arrow[d, "f^{\varkappa}"] \\
 & \underline{B}
\end{tikzcd}
$$

□

La construcción anterior resulta especialmente relevante cuando se aplica sobre las $\underline{\Sigma}$-álgebras absolutamente libres. Componiendo las adjunciones del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{K} \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{In}_{\mathbf{K}}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \arrow[l, shift left=2, "\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{K}}"] \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Set}^{S} \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}"]
\end{tikzcd}
$$

se tiene que la composición del functor $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}$ con el functor $\underline{\mathrm{F}}_{\mathcal{K}}$, denotado como $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}$ es adjunto por la izquierda del functor de olvido $\mathrm{G}_{\mathcal{K}} = \mathrm{G}_{\underline{\Sigma}} \circ \mathrm{In}_{\mathbf{K}}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta^X"] \arrow[rr, bend left, "\nu^X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_X}"] \arrow[d, "f^\sharp"] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X) \arrow[dl, "f^{\varkappa}"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Si X es un S-conjunto, la $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X)$ se denomina la $(\underline{\Sigma},\mathcal{K})$**-álgebra libre sobre** X y $\nu^X = \mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)}} \circ \eta^X$ la **inserción de los generadores**. La congruencia $\equiv^{\mathcal{K}}_{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)}$, denotada simplemente como $\equiv^{\mathcal{K}}_X$, se puede describir de la manera siguiente.

2.9.6. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras y X un S-conjunto. Las S-relaciones siguientes son congruencias idénticas a $\equiv^{\mathcal{K}}_X$:

1. $\bigcap\big\{\mathrm{Ker}\,(f^\sharp) \mid f\colon X \longrightarrow \underline{A} \text{ y } \underline{A} \in \mathcal{K}\big\}$.

2. $\bigcap\left\{\Phi \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)) \;\middle|\; \begin{array}{c} \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi \text{ es isomorfa a} \\ \text{una subálgebra de un } \underline{A} \in \mathcal{K} \end{array}\right\}$.

3. $(\big\{(P,Q) \in \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)_s{}^2 \mid \forall \underline{A} \in \mathcal{K}, \forall f\colon X \longrightarrow A,\ f^\sharp(P) = f^\sharp(Q)\big\})_{s\in S}$.

4. $\bigcap\big\{\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_X) \mid \underline{A} \in \mathcal{K}\big\}$.

□

Si X es un S-conjunto, entonces $\equiv^{\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})}_X = \Delta_{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)}$ y, por tanto, $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})}(X)$ es igual a $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)$. Además, en virtud de la adjunción $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}} \dashv \mathrm{G}_{\mathcal{K}}$, y puesto que $0^S = (\emptyset)_{s\in S}$ es inicial en $\mathbf{Set}^S$, la $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(0^S)$ es un objeto inicial para $\mathbf{K}$.

En este contexto es usual la siguiente definición.

2.9.7. Definición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras, $\underline{F}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y X un sub-S-conjunto de F.

1. Se dice que $\underline{F}$ es **libre para** $\mathcal{K}$ **sobre** X si, para cada álgebra $\underline{A} \in \mathcal{K}$ y cada S-aplicación $f\colon X \longrightarrow A$, existe un único homomorfismo $f^\sharp\colon \underline{F} \longrightarrow A$

que extiende f, i.e., tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{in}_X"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "f^\sharp"] \\ & A \end{tikzcd}$$

2. Se dice que $\underline{F}$ es **libre en** $\mathcal{K}$ **sobre** X si $\underline{F}$ es libre para $\mathcal{K}$ sobre X y $\underline{F} \in \mathcal{K}$.

3. Se dice que $\underline{F}$ es **libre para** (resp. **en**) $\mathcal{K}$ si lo es sobre algún sub-S-conjunto X de F.

2.9.8. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras y $\underline{A} \in \mathcal{K}$. Si $\underline{F}$ es libre para $\mathcal{K}$ sobre X y, para cada $s \in S$, $\mathrm{card}(X_s) \geq \mathrm{card}(A_s)$, entonces $\underline{A}$ es una imagen homomorfa de $\underline{F}$. $\square$

Si $\mathcal{K}$ es una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras y X un S-conjunto, $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)$ es libre para $\mathcal{K}$ sobre $\eta^X[X]/{\equiv^{\mathcal{K}}_X}$, pero no necesariamente libre en $\mathcal{K}$. No obstante, por lo expuesto anteriormente, si $\mathcal{K}$ está cerrada bajo productos y subálgebras, $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X) \in \mathcal{K}$.

La inserción de los generadores $\nu^X\colon X \longrightarrow \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X)$ es una S-aplicación inyectiva si y sólo si $\equiv^{\mathcal{K}}_X \restriction \eta^X[X]$ es la diagonal sobre $\eta^X[X]$. En ese caso, $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X)$ es libre sobre $\eta^X[X]$.

En el álgebra homogénea, se cumple que, para cada conjunto X, la inserción de los generadores ν^X es una aplicación inyectiva si y sólo si la clase $\mathcal{K}$ no es trivial, siendo una clase trivial cuando contiene exclusivamente a la $\underline{\Sigma}$-álgebra inicial o a las $\underline{\Sigma}$-álgebras finales. Si la clase $\mathcal{K}$ no es trivial entonces contiene una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ tal que $\mathrm{card}(A) \geq 2$, a partir de lo cual es fácil demostrar la inyectividad de ν_X. Para las clases de $\underline{\Sigma}$-álgebras heterogéneas se cumple que si la clase $\mathcal{K}$ contiene exclusivamente $\underline{\Sigma}$-álgebras subfinales, entonces $\nu_X\colon X \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$ no es inyectiva, para cada S-conjunto X. Ésta no es, sin embargo, una condición necesaria. Para obtener una condición tal introducimos la siguiente definición.

2.9.9. Definición. Sea $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ una signatura. Entonces $\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}}$ es el operador clausura sobre el conjunto de tipos S que a cada $T \subseteq S$, le asigna $\mathrm{supp}(\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X))$, donde X es un S-conjunto arbitrario de soporte T, e.g., $\bigcup_{s\in T} \delta^s$.

Los operadores $\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}}$ pueden considerarse casos particulares de los operadores introducidos en 1.4.14, en donde a cada operador clausura heterogéneo uniforme J sobre un S-conjunto A se le asociaba un operador clausura Ex^{J} sobre S, e.g., tomando como J el operador subálgebra generada en $\underline{\mathrm{W}}_{\underline{\Sigma}}(1)$. En ese caso $\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}}$ es $\mathrm{Ex}^{\mathrm{Sg}_{\mathrm{W}_{\underline{\Sigma}}(1)}}$.

2.9.10. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\mathrm{supp}(A)$ es un cerrado de $\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}}$.

Demostración. Si $s \in \mathrm{supp}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(A))$ entonces hay un $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(A)_s$, luego $\varepsilon_s^A(P)$ está en A_s y $s \in \mathrm{supp}(A)$. Además $\mathrm{supp}(A) = \mathrm{supp}(\eta^A[A]) \subseteq \mathrm{supp}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(A))$, por lo que $\mathrm{supp}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(A)) = \mathrm{supp}(A)$, y $\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}}(\mathrm{supp}(A)) = \mathrm{supp}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(A)) = \mathrm{supp}(A)$. □

Por la proposición anterior, el conjunto de los cerrados del operador $\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}}$, $\mathrm{Fix}(\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}})$, es el conjunto de los soportes posibles de las $\underline{\Sigma}$-álgebras. Además, si X es un S-conjunto y $\mathcal{K}$ un clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras, la $(\underline{\Sigma}, \mathcal{K})$-álgebra libre sobre X tiene como soporte $\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}}(\mathrm{supp}(X))$. Mediante el operador $\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}}$ podemos caracterizar las clases de $\underline{\Sigma}$-álgebras para las que la unidad de la adjunción es inyectiva.

2.9.11. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras cerrada bajo subálgebras y productos. Para cada S-conjunto X, la unidad de la adjunción $\nu : \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^S} \Longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}$ es inyectiva si y sólo si, para cada $T \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}})$ y cada $s \in T$, existe un $\underline{A} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathrm{supp}(A) = T$ y $\mathrm{card}(A_s) \geq 2$.

Demostración. Supongamos que $\nu^X : X \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X)$ es inyectiva para cada S-conjunto X. Sea $T \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}})$ y $s \in T$. Entonces existe un S-conjunto X con soporte T y tal que $\mathrm{card}(X_s) \geq 2$, e.g., $(\bigcup_{s \in T} \delta^s) \amalg \delta^s$. Luego $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X) \in \mathcal{K}$, $\mathrm{card}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X)_s) \geq 2$ y $\mathrm{supp}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X)) = \mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}}(T)$.

Recíprocamente, sea X un S-conjunto, $T = \mathrm{Ex}^{\underline{\Sigma}}(\mathrm{supp}(X))$ y $s \in T$. Entonces existe un $\underline{A} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathrm{card}(A_s) \geq 2$ y $\mathrm{supp}(A) = T$. Sean $x, y \in X_s$ tales que $x \neq y$. Entonces existe un $f : X \longrightarrow A$ tal que $f_s(x) \neq f_s(y)$. Luego tenemos que $f_s^{\varkappa}(\nu_s^X(x)) \neq f_s^{\varkappa}(\nu_s^X(y))$ y $\nu_s^X(x) \neq \nu_s^X(y)$. Por consiguiente, ν^X es inyectiva. □

2.10 Variedades.

Las variedades heterogéneas, i.e., las clases de $\underline{\Sigma}$-álgebras cerradas bajo productos, subálgebras e imágenes homomorfas, constituyen el correlato semántico de las clases ecuacionales *infinitarias* (cuando se consideran ecuaciones con un número arbitrario de variables) y para ellas se cumple el teorema de caracterización de Birkhoff. Sin embargo, para las clases ecuacionales *finitarias*, es necesario considerar para su caracterización, como pusieron de manifiesto Mathiessen, Goguen y Meseguer, variedades *finitarias*, i.e., variedades cerradas bajo la formación de colímites dirigidos superiormente.

2.10.1. Definición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces

1. $\mathrm{S}(\mathcal{K}) = \{\underline{A} \in \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \mid \exists \underline{B} \in \mathcal{K}, \exists f : \underline{A} \rightarrowtail \underline{B}\}$, i.e., $\mathrm{S}(\mathcal{K})$ consta de todas las $\underline{\Sigma}$-álgebras isomorfas a alguna subálgebra de alguna $\underline{\Sigma}$-álgebra en $\mathcal{K}$.

2. $\mathrm{H}(\mathcal{K}) = \{\underline{A} \in \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \mid \exists \underline{B} \in \mathcal{K}, \exists f\colon \underline{B} \twoheadrightarrow \underline{A}\}$, i.e., $\mathrm{H}(\mathcal{K})$ consta de todas las $\underline{\Sigma}$-álgebras isomorfas a algún cociente de alguna $\underline{\Sigma}$-álgebra en $\mathcal{K}$.

3. $\mathrm{P}(\mathcal{K}) = \{\underline{A} \in \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \mid \exists I \in \boldsymbol{\mathcal{U}}, \exists (\underline{A}^i)_{i\in I} \in \mathcal{K}^I, \underline{A} \cong \prod_{i\in I} \underline{A}^i\}$, i.e., $\mathrm{P}(\mathcal{K})$ consta de todas las $\underline{\Sigma}$-álgebras que son isomorfas a un producto directo de alguna familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras en $\mathcal{K}$.

Los operadores S, H, P, son operadores clausura sobre el conjunto de los objetos de$\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$. Como es usual, la composición de estos operadores se escribe por yuxtaposición.

2.10.2. Proposición. $\mathrm{S\,H} \leq \mathrm{H\,S}$, $\mathrm{P\,S} \leq \mathrm{S\,P}$ y $\mathrm{P\,H} \leq \mathrm{H\,P}$.

Demostración. $\mathrm{S\,H} \leq \mathrm{H\,S}$. Sea $\mathcal{K}$ un conjunto de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Supongamos que $\underline{A} \in \mathrm{S\,H}(\mathcal{K})$. Entonces existe un $f\colon \underline{B} \twoheadrightarrow \underline{C}$ con $\underline{B} \in \mathcal{K}$ y $\underline{A} \leq \underline{C}$. Pero entonces $f^{-1}[\underline{A}] \leq \underline{B}$ y puesto que $f[f^{-1}[\underline{A}]] = \underline{A}$, $\underline{A} \in \mathrm{H\,S}(\mathcal{K})$.

$\mathrm{P\,S} \leq \mathrm{S\,P}$. Si $\underline{A} \in \mathrm{P\,S}(\mathcal{K})$, existe una familia $(f^i\colon \underline{B}^i \rightarrowtail \underline{C}^i)_{i\in I}$ con $\underline{C}^i \in \mathcal{K}$, para cada $i \in I$, y $\underline{A} = \prod_{i\in I} \underline{B}^i$. La única aplicación $f\colon \underline{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \underline{C}^i$ que existe en virtud de la propiedad universal de $\prod_{i\in I} \underline{C}^i$ proporciona la representación de $\underline{A}$ como subálgebra de un producto. Por consiguiente $\underline{A} \in \mathrm{S\,P}(\mathcal{K})$.

$\mathrm{P\,H} \leq \mathrm{H\,P}$. Si $\underline{A} \in \mathrm{P\,H}(\mathcal{K})$, existe una familia $(f^i\colon \underline{B}^i \twoheadrightarrow \underline{C}^i)_{i\in I}$ con $\underline{B}^i \in \mathcal{K}$ para cada $i \in I$ y $\underline{A} = \prod_{i\in I} \underline{C}^i$. La única aplicación $f\colon \prod_{i\in I} \underline{B}^i \twoheadrightarrow \underline{A}$ que existe en virtud de la propiedad universal de $\underline{A}$ como producto es un epimorfismo y por tanto $\underline{A} \in \mathrm{H\,P}(\mathcal{K})$.

□

2.10.3. Proposición. Los operadores $\mathrm{H\,S}$, $\mathrm{S\,P}$, $\mathrm{H\,P}$ son operadores clausura. □

2.10.4. Definición. Una clase $\mathcal{K}$ de $\underline{\Sigma}$-álgebras es una **variedad** si $\mathcal{K}$ está cerrada bajo los operadores H, S y P. Se denota mediante $\mathrm{Var}(\underline{\Sigma})$ el conjunto de todas las variedades de $\underline{\Sigma}$-álgebras.

2.10.5. Proposición. El conjunto $\mathrm{Var}(\underline{\Sigma})$ es un sistema de clausura sobre el conjunto de los objetos de $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$. □

El operador clausura asociado a $\mathrm{Var}(\underline{\Sigma})$ se denota como V y, lo mismo que en el caso homogéneo, para el operador V se tiene un teorema *à la* Tarski, en virtud del cual se puede representar como la composición de los operadores H, S y P.

2.10.6. Teorema (Tarski). $\mathrm{V} = \mathrm{H\,S\,P}$.

Demostración. Puesto que $\mathrm{I} \leq V$ y H, S y P son operadores clausura, se cumple que $\mathrm{HSP} \leq \mathrm{HSPI} \leq \mathrm{HSP}V = V$. Por otra parte, en virtud de la proposición 2.10.2, $\mathrm{HHSP} \leq \mathrm{HSP}$, $\mathrm{SHSP} \leq \mathrm{HSSP} = \mathrm{HSP}$, y $\mathrm{PHSP} \leq \mathrm{HPSP} \leq \mathrm{HSPP} = \mathrm{HSP}$ y por consiguiente $V \leq \mathrm{HSP}$. □

La mínima variedad de $\underline{\Sigma}$-álgebras es $\bigcap \mathrm{Var}(\underline{\Sigma})$, que coincide con $\mathrm{V}(\emptyset)$. Tal variedad consta de todas las $\underline{\Sigma}$-álgebras subfinales (puesto que $\mathrm{P}(\emptyset)$ es $\{\underline{1}\}$ y todas las $\underline{\Sigma}$-álgebras subfinales se obtienen como subálgebras de $\underline{1}$).

De la caracterización de los productos reducidos de la proposición 2.7.16 se sigue que si $\mathcal{K}$ es una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras cerrada bajo productos y cocientes entonces $\mathcal{K}$ está cerrada bajo productos reducidos de sistemas con soporte constante. En particular, toda variedad está cerrada bajo productos reducidos y ultraproductos de sistemas con soporte constante.

2.11 Ecuaciones.

El concepto de ecuación es necesario para la descripción sintáctica de ciertas clases de álgebras heterogéneas. Así como una signatura fija la clase de álgebras sobre esa signatura, una ecuación sirve para fijar la clase de álgebras en las que los términos de la ecuación tienen el mismo valor.

En el estudio de los términos y ecuaciones heterogéneas es conveniente considerar ciertos T-conjuntos, con T un conjunto de tipos para el que $T \notin \boldsymbol{\mathcal{U}}$ siendo $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ el universo de Grothendieck elegido. Estos son, estrictamente, T-conjuntos que residen en una categoría $\mathbf{Set}_{\boldsymbol{\mathcal{V}}}$, la categoría de conjuntos asociada a un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ tal que $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Aunque este uso no es esencial, resulta conveniente desde un punto de vista categorial, en especial cuando se considera lo aquí expuesto desde el punto de vista de las mónadas

2.11.1. Definición. Sea $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ una signatura algebraica.

1. Sea $(X, s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S$. Un **$\underline{\Sigma}$-término de tipo** (X, s) es un $\underline{\Sigma}$-término de tipo s con variables en X, i.e., un elemento de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$. Un $\underline{\Sigma}$-término de tipo (X, s) es **localmente finitario** si X es localmente finito y **finitario** si X es finito.

2. Sea $\mathrm{Ter}(\underline{\Sigma}) = (\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s)_{(X,s)\in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S}$ el $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S$-conjunto de todos los $\underline{\Sigma}$-términos. Sea $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S_{\mathrm{lf}}$ el conjunto de los S-conjuntos localmente finitos y $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S_{\mathrm{f}}$ el de los S-conjuntos finitos. El $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S_{\mathrm{lf}} \times S$-conjunto de los términos localmente finitarios sobre $\underline{\Sigma}$ se denota como $\mathrm{Ter}_{\mathrm{lf}}(\underline{\Sigma})$ y el $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S_{\mathrm{f}} \times S$-conjunto de los términos finitarios como $\mathrm{Ter}_{\mathrm{f}}(\underline{\Sigma})$.

2.11.2. Definición. Sea $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ una signatura algebraica.

1. Sea $(X,s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S$. Una **$\underline{\Sigma}$-ecuación** de tipo (X,s), o $\underline{\Sigma}$-ecuación de tipo s con variables en X, es un par ordenado (P,Q) en el que P y Q son $\underline{\Sigma}$-términos de tipo (X,s). Una $\underline{\Sigma}$-ecuación de tipo (X,s) es **localmente finitaria** si X es localmente finito y **finitaria** si X es finito.

2. Sea $\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma}) = \mathrm{Ter}(\underline{\Sigma})^2 = (\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s^2)_{(X,s)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^S\times S}$ el $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S$-conjunto de todas las $\underline{\Sigma}$-ecuaciones. El $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S_{\mathrm{lf}} \times S$-conjunto de las ecuaciones localmente finitarias sobre $\underline{\Sigma}$ se denota como $\mathrm{Eq}_{\mathrm{lf}}(\underline{\Sigma})$ y el $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S_{\mathrm{f}} \times S$-conjunto de las ecuaciones finitarias como $\mathrm{Eq}_{\mathrm{f}}(\underline{\Sigma})$. El S-conjunto de las ecuaciones con variables en un S-conjunto X se denota como $\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_X$.

2.11.3. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $(P,Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s}$. Se dice que (P,Q) es **válida** en $\underline{A}$, que $\underline{A}$ **satisface** (P,Q), o que $\underline{A}$ es un **modelo** de (P,Q), y lo denotamos por $\underline{A} \models^{\Sigma}_{X,s} (P,Q)$, o por $\underline{A} \models (P,Q)$ si no hay lugar para el equívoco, cuando, para cada $a \in A_X$, $a^\sharp_s(P) = a^\sharp_s(Q)$, o, lo que es equivalente, por la ley de reciprocidad, cuando $P^{\underline{A}} = Q^{\underline{A}}$.

La relación binaria de satisfacción entre $\underline{\Sigma}$-álgebras y $\underline{\Sigma}$-ecuaciones de tipo (X,s) se obtiene a partir de la relación ternaria $\cdot \models^{\Sigma}_{X,s} \cdot[\cdot]$ definida, para cada $a \in A_X$, como

$$\underline{A} \models^{\Sigma}_{X,s} (P,Q)[a] \text{ exactamente si } a^\sharp_s(P) = a^\sharp_s(Q)$$

Si $\underline{A} \models^{\Sigma}_{X,s} (P,Q)[a]$ se dice que la **valoración** a es una **solución** de la $\underline{\Sigma}$-ecuación (P,Q) en la $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$.

2.11.4. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\underline{A} \models^{\Sigma}_{X,s} (P,Q)$ exactamente si $(P,Q) \in \equiv^{\underline{A}}_{X,s}$. $\square$

2.11.5. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})$. Se dice que $\mathcal{E}$ es **válida** en $\underline{A}$, o que $\underline{A}$ **satisface** $\mathcal{E}$, $\underline{A} \models^{\Sigma} \mathcal{E}$, cuando, para cada $(X,s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S$, y cada $(P,Q) \in \mathcal{E}_{X,s}$ se cumple que $\underline{A} \models^{\Sigma}_{X,s} (P,Q)$.

Una familia de ecuaciones $\mathcal{E}$ es **localmente finitaria** (resp. **finitaria**) si $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{lf}}(\underline{\Sigma})$ (resp. $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{f}}(\underline{\Sigma})$).

En algunos casos, resulta conveniente considerar en lugar del $\boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S$-conjunto $\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})$, el conjunto $\coprod \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})$, en el que sus elementos tienen la forma $((P,Q),(X,s))$ con $(P,Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s}$. Puesto que $\underline{\mathrm{Sub}}(\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})) \cong \underline{\mathrm{Sub}}(\coprod \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma}))$, toda familia $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})$ tiene unívocamente asociado un subconjunto de $\coprod \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})$ y viceversa. En adelante, si no hay ambigüedad, no distinguiremos notacionalmente entre ambas presentaciones.

2.11.6. Definición.

1. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})$. La **clase ecuacional determinada** por $\mathcal{E}$, $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})$, consta de todas las $\underline{\Sigma}$-álgebras $\underline{A}$ que satisfacen todas las ecuaciones de $\mathcal{E}$, i.e.,
$$\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}) = \{\underline{A} \in \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \mid \underline{A} \models \mathcal{E}\}$$
2. Sea $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$. La **teoría ecuacional determinada** por $\mathcal{K}$, $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K})$, consta de todas las $\underline{\Sigma}$-ecuaciones válidas en todas las $\underline{\Sigma}$-álgebras de $\mathcal{K}$, i.e.,
$$\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K}) = \big(\{E \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s} \mid \forall \underline{A} \in \mathcal{K},\ \underline{A} \models E\}\big)_{(X,s)\in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S}$$

2.11.7. Proposición. Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ dos conjuntos de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones y $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ dos conjuntos de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces se cumple que

1. Si $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}') \subseteq \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})$.
2. Si $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$, $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K}') \subseteq \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K})$.
3. $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}))$ y $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K}))$.

Por consiguiente, para cada signatura algebraica $\underline{\Sigma}$, las funciones $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}$ y $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}$ forman una *conexión de Galois contravariante.* $\square$

Para las categorías asociadas a los retículos de clases de $\underline{\Sigma}$-álgebras y familias de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones, se tiene la adjunción

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sub}}(\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}))^{\mathrm{op}} \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \underline{\mathrm{Sub}}(\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})) \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}"] \end{tikzcd}$$

en donde, para cada clase $\mathcal{K}$ de $\underline{\Sigma}$-álgebras y cada familia $\mathcal{E}$ de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones, se cumple que
$$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}) \text{ si y sólo si } \mathcal{E} \subseteq \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K})$$

2.11.8. Definición.

1. El operador clausura sobre $\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})$ asociado a la conexión de Galois, $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}} \circ \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}$, se denota como $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}$. Los cerrados de $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}$ se denominan **teorías ecuacionales**. Si $\mathcal{E}$ es una familia de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones y E una $\underline{\Sigma}$-ecuación, entonces E es una **consecuencia semántica** de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \Vdash E$, si $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(E)$, i.e., si $E \in \mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})$.
2. El operador clausura sobre $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ asociado a la conexión de Galois, $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}} \circ \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}$, se denota como $\mathrm{Ec}_{\underline{\Sigma}}$. Los cerrados de $\mathrm{Ec}_{\underline{\Sigma}}$ se denominan **clases ecuacionales** . Si $\mathcal{K}$ es una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras y $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, entonces $\underline{A}$ está en la clase ecuacional determinada por $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \models \underline{A}$, si $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\underline{A})$, i.e., si $\underline{A} \in \mathrm{Ec}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K})$.

Las restricciones del operador $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}$ a $\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_X$, $\mathrm{Eq}_{\mathrm{lf}}(\underline{\Sigma})$ y $\mathrm{Eq}_{\mathrm{f}}(\underline{\Sigma})$ se denotan, respectivamente, como $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma},X}$, $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma},\mathrm{lf}}$ y $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma},\mathrm{f}}$. Asimismo, las correstricciones del operador $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}$ se denotan mediante $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}$, $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},\mathrm{lf}}$ y $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},\mathrm{f}}$. Todos ellos forman, dos a dos, conexiones de Galois contravariantes que determinan operadores clausura, y que se denotan con los subíndices correspondientes.

Una clase ecuacional $\mathcal{K}$ es **localmente finitaria** si $\mathcal{K}$ es un cerrado de $\mathrm{Ec}_{\underline{\Sigma},\mathrm{lf}}$, **finitaria** si es un cerrado de $\mathrm{Ec}_{\underline{\Sigma},\mathrm{f}}$ y **sobre** X si $\mathcal{K}$ es un cerrado de $\mathrm{Ec}_{\underline{\Sigma},X}$.

2.11.9. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras y $\mathcal{E}$ una familia de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones. Entonces se cumple que:

1. Para cada $(X,s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S$, $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})_s = \equiv^{\mathcal{K}}_{X,s}$
2. $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K}) = (\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})_s)_{(X,s)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S}$
3. $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}) = \bigcap(\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{E}_X))_{X\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^s}$

□

En el álgebra homogénea, cada clase ecuacional lo es sobre un conjunto infinito numerable, arbitrario pero fijo. Para el álgebra heterogénea, en cambio, existen clases ecuacionales que no lo son sobre ningún S-conjunto de variables fijo. Esto es debido a que si dos S-conjuntos X e Y son tales que $X \subseteq Y$, entonces se cumple que $\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma},X) \subseteq \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma},Y)$, pero *no toda* $(\underline{\Sigma},Y)$*-ecuación, con variables en* X*, válida en un álgebra sigue siendo válida cuando se considera como una* $(\underline{\Sigma},X)$*-ecuación* (la implicación inversa se cumple siempre), una condición que sí se cumple para las ecuaciones homogéneas.

2.11.10. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, y X e Y dos S-conjuntos tales que $X \subseteq Y$. Si $\underline{A} \models_{X,s} (P,Q)$, entonces $\underline{A} \models_{Y,s} (P,Q)$. □

La recíproca de la proposición anterior no es cierta en general. Si tenemos que $\mathrm{supp}(X) \subseteq \mathrm{supp}(A) \subset \mathrm{supp}(Y)$, entonces $\underline{A} \models_{Y,s} (P,Q)$ se cumple vacuamente, sea cual sea la estructura algebraica de $\underline{A}$, porque no existe ninguna valoración de Y en A.

2.11.11. Proposición. Sea X un S-conjunto y $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\underline{A} \models_{X,s} (P,Q)$,
2. Existe un $s \in \mathrm{supp}(X)$ tal que $A_s = \emptyset$ o se cumple que $\underline{A} \models_{\mathrm{var}(P,Q),s} (P,Q)$, siendo $\mathrm{var}(P,Q) = \mathrm{var}(P) \bigcup \mathrm{var}(Q)$.

□

2.11.12. Corolario. Sean X e Y dos S-conjuntos con el mismo soporte. Entonces para cada $(P,Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X\cap Y}$ y cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, se cumple que $\underline{A} \models_{X,s} (P,Q)$ exactamente si $\underline{A} \models_{Y,s} (P,Q)$. □

A continuación, presentamos un ejemplo de clase ecuacional que no lo es sobre ningún S-conjunto fijo.

2.11.13. Ejemplo. Sea $S = \{a,b,c\}$, $\Sigma = \{\sigma,\tau\colon \lambda \longrightarrow a\}$, $X = (1,1,0)$, $Y = (1,0,1)$ y $\mathcal{E} = \{((\sigma,\tau),(X,s)),((\sigma,\tau),(Y,s))\}$. Entonces $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})$ es una clase ecuacional pero no es una clase ecuacional sobre Z, para ningún S-conjunto Z.

Demostración. $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}) = \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}((\sigma,\tau),(X,s)) \cap \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\sigma,\tau),(Y,s))$. Haciendo uso de la proposición anterior se tiene que

$$\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}) = \{\underline{A} \in \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \mid (A_b = \emptyset \wedge A_c = \emptyset) \vee a^{\underline{A}} = b^{\underline{A}}\}$$

Supongamos que exista un Z y un $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma}, Z)$ tal que $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}) = \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{H})$ Entonces

$$\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{H}) = \{\underline{A} \in \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \mid \exists s \in \mathrm{supp}(Z),\ A_s = \emptyset \text{ o } \forall H \in \mathcal{H}, \underline{A} \models_{\mathrm{var}(H)} H\}$$

Examinando los posibles soportes de Z se puede encontrar para cada uno de ellos un álgebra que está en $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{H})$ y no pertenece a $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})$. □

Para el estudio de las clases ecuacionales es suficiente considerar clases ecuacionales localmente finitarias. Además, si el conjunto de tipos S es finito, es suficiente tener en cuenta las clases ecuacionales finitarias.

2.11.14. Proposición. Para cada $(P,Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s}$ existe un S-conjunto Y localmente finito tal que $(P,Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{Y,s}$ y, para cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, se cumple que $\underline{A} \models_{X,s} (P,Q)$ si y sólo si $\underline{A} \models_{Y,s} (P,Q)$.

Demostración. Sea Y el S-conjunto $\mathrm{var}(P) \cup \mathrm{var}(Q) \cup \bigcup\{\delta^s \mid s \in \mathrm{supp}(X)\}$. Se tiene que Y es localmente finito y que $\mathrm{supp}(Y) = \mathrm{supp}(X)$. Luego, por 2.11.12, podemos afirmar que, para cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, $\underline{A} \models_{X,s} (P,Q)$ si y sólo si $\underline{A} \models_{Y,s} (P,Q)$. □

2.11.15. Corolario. Sea $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$. Entonces $\mathcal{K}$ es una clase ecuacional si y sólo si es una clase ecuacional localmente finitaria.

Así pues, en el álgebra heterogénea, para la satisfacibilidad de ecuaciones heterogéneas, es suficiente que se consideren ecuaciones localmente finitarias. Además, los S-conjuntos de variables pueden elegirse de entre las partes localmente finitas de un S-conjunto localmente infinito numerable V^S, arbitrario pero fijo, e.g., $V^S = (\mathrm{N})_{s\in S}$. En efecto, si X es el S-conjunto de las variables de una ecuación localmente finitaria, entonces X es necesariamente localmente finito y, por tanto, isomorfo a un sub-S-conjunto localmente finito de V^S. Los elementos de V^S_s se denotan como $\{v^s_0, v^s_1, \ldots\}$. Es suficiente, por tanto, considerar exclusivamente las ecuaciones relativas a V^S, i.e., las ecuaciones en el $\mathrm{Sub}_{\mathrm{lf}}(V) \times S$-conjunto

$$\mathrm{Eq}_{V^S}(\underline{\Sigma}) = (\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)^2_s)_{(X,s)\in \mathrm{Sub}_{\mathrm{lf}}(V)\times S}$$

Si el conjunto de tipos S es finito, cada clase ecuacional es, además, finitaria, como se muestra en la siguiente proposición. En cambio, *si S no es finito, existen clases ecuacionales que no son finitarias.*

2.11.16. Proposición. Sea S un conjunto de tipos finito. Entonces, para cada $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s}$, existe un S-conjunto finito Y tal que $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{Y,s}$ y, para cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, se cumple que $\underline{A} \models_{X,s} (P, Q)$ si y sólo si $\underline{A} \models_{Y,s} (P, Q)$.

Demostración. Es suficiente considerar la demostración de 2.11.14, puesto que, si S es finito, entonces $\mathrm{var}(P) \cup \mathrm{var}(Q) \cup \bigcup\{\delta^s \mid s \in \mathrm{supp}(X)\}$ es finito. □

Respecto de las clases ecuacionales finitarias, la siguiente proposición muestra que es suficiente considerar $\underline{\Sigma}$-ecuaciones sobre conjuntos de variables de la forma $\downarrow w$, con $w \in S^\star$.

2.11.17. Proposición. Sea $\underline{\Sigma}$ una S-signatura y X un S-conjunto finito. Entonces, para cada $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s}$ existe un $w \in S^\star$ y una $\underline{\Sigma}$-ecuación (P', Q') de tipo (w, s) tal que, para cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, $\underline{A} \models_{X,s} (P, Q)$ exactamente si $\underline{A} \models_{\downarrow w,s} (P', Q')$.

Demostración. Sea m el S-cardinal de X. Entonces, puesto que X es finito, se tiene que $m \in \mathrm{N}^{(S)}$. Ahora bien, por ser $\underline{\mathrm{N}}^{(S)}$ una imagen homomorfa de $\underline{S}^\star$, existe un $w \in S^\star$ tal que $\downarrow w$ y X son isomorfos y uno cualquiera de ellos induce un isomorfismo entre $\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_X$ y $\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{\downarrow w}$. □

Los términos y ecuaciones sobre conjuntos de variables asociados a palabras $w \in S^\star$ determinan un $S^\star \times S$-conjunto $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}) = (\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)^2_s)_{(w,s)\in S^\star\times S}$, que, como veremos más adelante, está asimismo dotado de una cierta estructura algebraica de *álgebra de Hall.* En virtud de la proposición anterior, podemos, para el estudio de las clases ecuacionales finitarias, considerar exclusivamente ecuaciones en $\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}) = \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})^2$.

Para que los S-conjuntos de variables asociados a una palabra $w \in S^\star$ sean partes del S-conjunto V^S de todas las variables, es suficiente que se defina V^S como $(\mathrm{N})_{s\in S}$ o definir $\downarrow w_s$, para cada $s \in S$, como $\{v^s_i \mid w_i = s\}$.

Clases ecuacionales y variedades.

Demostramos ahora el teorema de caracterización de Birkhoff para las clases ecuacionales heterogéneas.

2.11.18. Proposición. Sea $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ una signatura algebraica.

1. Los epimorfismos preservan la satisfacibilidad de las $\underline{\Sigma}$-ecuaciones, i.e., si $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ es un $\underline{\Sigma}$-homomorfismo sobreyectivo, entonces para cualquier $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s}$ se cumple que $\underline{A} \models (P, Q)$ implica $\underline{B} \models (P, Q)$.

2. Los monomorfismos reflejan la satisfacibilidad de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones, i.e., si $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ es un $\underline{\Sigma}$-homomorfismo inyectivo, entonces para cualquier $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s}$ se cumple que $\underline{B} \models (P, Q)$ implica $\underline{A} \models (P, Q)$.

3. Sea $(\underline{A}^i)_{i\in I}$ una familia de $\underline{\Sigma}$-álgebras y $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s}$. Si para cada $i \in I$, $\underline{A}^i \models (P, Q)$ entonces $\prod_{i\in I} \underline{A}^i \models (P, Q)$.

□

Como corolario de la proposición anterior se tiene que los $\underline{\Sigma}$-isomorfismos preservan y reflejan la relación de satisfacibilidad.

2.11.19. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces las clases $\mathcal{K}$, $\mathrm{S}(\mathcal{K})$, $\mathrm{H}(\mathcal{K})$, $\mathrm{P}(\mathcal{K})$ y $\mathrm{V}(\mathcal{K})$ satisfacen las mismas ecuaciones sobre cualquier S-conjunto de variables. □

2.11.20. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras y $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s}$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\mathcal{K} \models_{X,s} (P, Q)$
2. $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X) \models_{X,s} (P, Q)$
3. $P^{\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X)} = Q^{\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X)}$
4. $(P, Q) \in \equiv^{\mathcal{K}}_{X,s}$

Demostración. En virtud de la ley de reciprocidad y por la proposición 2.11.4 tenemos que 2, 3 y 4 son equivalentes. Supongamos que $\mathcal{K} \models (P, Q)$. Puesto que $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X) \in \mathrm{S\,P}(\mathcal{K})$, se cumple que $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X) \models (P, Q)$.

Recíprocamente, si $(P, Q) \in \equiv^{\mathcal{K}}_{X,s}$, entonces, para cada $\underline{A} \in \mathcal{K}$ y cada aplicación $f\colon X \longrightarrow A$, $f^{\sharp}(P) = f^{\sharp}(Q)$, por lo que $\mathcal{K} \models (P, Q)$. □

2.11.21. Corolario. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces se cumple que $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K}) = \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X))$

Recordemos que, a diferencia del caso homogéneo, la anterior proposición no implica que si X e Y son S-conjuntos tales que $X \subseteq Y$, $\mathcal{K} \models_{X,s} (P, Q)$ sea una condición necesaria y suficiente para $\mathcal{K} \models_{Y,s} (P, Q)$, sino que únicamente es válida la suficiencia. En otras palabras, para cada S-conjunto X, la $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X)$ satisface todas y cada una de las ecuaciones satisfechas por las álgebras en $\mathcal{K}$ *cuyo conjunto de variables es* X. Para ecuaciones con S-conjuntos de variables distintos son necesarias $(\underline{\Sigma}, \mathcal{K})$-álgebras libres distintas para evaluar su satisfacción en la clase $\mathcal{K}$. En el álgebra heterogénea *no existe ningún conjunto universal de variables.*

2.11.22. Proposición. Cada clase ecuacional es una variedad.

Demostración. Sea $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})$ una clase ecuacional. Entonces, por la proposición 2.11.18, $\mathrm{V}(\mathcal{K}) \models \mathcal{E}$ y por tanto $\mathrm{V}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}) = \mathcal{K}$. □

Cada familia de ecuaciones $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})$ determina una subcategoría plena de $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$, precisamente aquella cuyo conjunto de objetos es $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})$, y que se denota como $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$. Las $\underline{\Sigma}$-álgebras en la categoría $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ se denominan $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$-álgebras. Por ser $\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})$ una variedad, la categoría $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ está cerrada bajo productos y subálgebras, por lo que la restricción del functor de olvido $\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}$ a $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$, denotado como $\mathrm{G}_{\underline{\Sigma},\mathcal{E}}$, tiene un adjunto por la izquierda, $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})}$, que se denota simplemente como $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{E}}$.

El functor $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{E}}$ se obtiene mediante la composición de $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}$ y $\underline{\mathrm{F}}_{\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})}$. En el diagrama siguiente se ilustra la obtención de la $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$-álgebra libre sobre X

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta^X"] \arrow[rr, bend left, "\nu^X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{E}}_X}"] \arrow[d, "f^\sharp"] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{E}}(X) \arrow[dl, "f^\varkappa"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

2.11.23. Teorema (sobre variedades de Birkhoff). Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces $\mathcal{K}$ es una variedad si y sólo si $\mathcal{K}$ es una clase ecuacional.

Demostración. Cada clase ecuacional es una variedad.

Recíprocamente, sea $\mathcal{K}$ un variedad y $\mathcal{K}' = \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K}))$. Puesto que $\mathcal{K}'$ es una variedad y $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$, es suficiente demostrar que $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$. Se cumple que $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K}) = \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma}}(\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K}))) = \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K}')$ y por la proposición 2.11.20, para cada S-conjunto X, $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X) = \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}'}(X)$, puesto que $\equiv^{\mathcal{K}}_X = \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})$ es idéntica a $\equiv^{\mathcal{K}'}_X = \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K}')$. Si $\underline{A} \in \mathcal{K}'$ entonces, para algún S-conjunto Y, $A \in \mathrm{H}(\mathrm{Fr}_{(\underline{\Sigma},\mathcal{K}')}(Y))$ y por tanto, $A \in \mathrm{H}(\mathrm{Fr}_{(\underline{\Sigma},\mathcal{K})}(Y))$ y $A \in \mathcal{K}$. Por consiguiente, $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ y $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. □

Congruencias totalmente invariantes.

En esta sección demostramos que las clases ecuacionales sobre un S-conjunto X forman un retículo algebraico antiisomorfo al retículo de las congruencias totalmente invariantes sobre $\underline{\mathrm{Fr}_\Sigma}(X)$. En el álgebra homogénea, cada clase ecuacional es una clase ecuacional sobre un conjunto universal de variables V, por lo que el antiisomorfismo entre el retículo de las congruencias totalmente invariantes sobre $\underline{\mathrm{Fr}_\Sigma}(V)$ y el retículo de las clases ecuacionales permite obtener un cálculo sintáctico completo sobre las ecuaciones homogéneas. En el álgebra heterogénea, en cambio, no toda clase ecuacional es una clase ecuacional sobre algún S-conjunto X y el procedimiento anterior sólo permite obtener cálculos relativos al S-conjunto de variables que se considere.

2.11.24. Definición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Una congruencia $\Phi \in \mathrm{Cgr}(\underline{A})$ es **totalmente invariante** si para cada endomorfismo f sobre $\underline{A}$ se cumple que $f^2[\Phi] \subseteq \Phi$. El conjunto de las congruencias totalmente invariantes sobre una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ se denota como $\mathrm{Cgr}^{\mathrm{fi}}(\underline{A})$, y cuando se le considera ordenado por la S-inclusión como $\underline{\mathrm{Cgr}^{\mathrm{fi}}}(\underline{A})$.

2.11.25. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces se cumple que $\underline{\mathrm{Cgr}^{\mathrm{fi}}}(\underline{A})$ es un subretículo completo de $\underline{\mathrm{Cgr}}(A)$, el retículo de las congruencias sobre $\underline{A}$.

Demostración. La intersección de una familia no vacía de congruencias totalmente invariantes es totalmente invariante.

Veamos que el supremo en el retículo $\underline{\mathrm{Cgr}}(A)$ de una familia no vacía $(\Phi^i)_{i\in I}$ de congruencias totalmente invariantes sobre $\underline{A}$ es también una congruencia totalmente invariante. Si $(a,b) \in \bigvee_{i\in I} \Phi^i$, entonces, para algún $n \geq 1$ y alguna $n+1$ familia x, $a = x_0 \equiv_{\Phi_s^{i_0}} x_1 \equiv \cdots \equiv_{\Phi_s^{i_{n-1}}} x_n = b$. Pero puesto que, para cada $p \in n$, $\Phi^{\alpha(p)}$ es totalmente invariante, se cumple que, para cada endomorfismo f de $\underline{A}$, $f(a) \equiv_{\Phi_s^{i_0}} f(x_1) \equiv \cdots \equiv_{\Phi_s^{i_{n-1}}} f(b)$, por lo que $(f(a), f(b)) \in \bigvee_{i\in I} \Phi^i$. $\square$

2.11.26. Proposición. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\mathrm{Cgr}^{\mathrm{fi}}(\underline{A})$ es un sistema de clausura algebraico sobre $A \times A$. El operador clausura algebraico asociado se denota como $\mathrm{Cg}^{\mathrm{fi}}_{\underline{A}}$. Si $\Phi \subseteq A^2$, a $\mathrm{Cg}^{\mathrm{fi}}(\Phi)$ se le denomina la congruencia totalmente invariante generada por Φ.

Demostración. Para demostrar que $\mathrm{Cg}^{\mathrm{fi}}$ es un operador clausura algebraico sobre $A \times A$, es suficiente añadir al álgebra descrita en la descripción del operador congruencia generada como un operador subálgebra (prop. 2.3.7) un símbolo de operación $\omega^f : s \longrightarrow s$ por cada endomorfismo f de $\underline{A}$, realizado de manera que $G_{\omega^f}(a,b) = (f(a), f(b))$. $\square$

2.11.27. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras y X un S-conjunto. Entonces $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})$ es una congruencia totalmente invariante sobre $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$.

Demostración. Veamos que $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})$ es totalmente invariante. Sea f un endomorfismo de $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)$ y $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})$. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra en $\mathcal{K}$ y $g\colon \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X) \longrightarrow \underline{A}$. Pero entonces $(g \circ f(P), g \circ f(Q)) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})$ y por tanto, $(f(P), f(Q)) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})$. □

2.11.28. Proposición. Sea X un S-conjunto de variables y Φ una congruencia totalmente invariante sobre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)$. Entonces para cada $(P,Q) \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_{X,s}$,

$$\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi \models (P,Q) \text{ si y sólo si } (P,Q) \in \Phi$$

Además, $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi$ es libre en $\mathrm{V}(\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi)$.

Demostración. Supongamos que $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi \models (P,Q)$. Entonces se cumple que $\mathrm{pr}^{\Phi}(P) = \mathrm{pr}^{\Phi}(Q)$ y por tanto $(P,Q) \in \Phi$.

Recíprocamente, si $(P,Q) \in \Phi$ y $f\colon \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi$, entonces existe un endomorfismo f' de $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)$ tal que $f = \mathrm{pr}^{\Phi} \circ f'$. Como Φ es totalmente invariante $(f'(P), f'(Q)) \in \Phi$ y por consiguiente $\mathrm{pr}^{\Phi}(f'(P)) = \mathrm{pr}^{\Phi}(f'(Q))$. Luego $f(P) = f(Q)$ y $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi \models (P,Q)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}(P,Q) \in \Phi &\text{ si y sólo si } \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi \models (P,Q)\\ &\text{ si y sólo si } \mathrm{V}(\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi) \models (P,Q), \text{ por } 2.11.18\end{aligned}$$

luego $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi$ es libre en $\mathrm{V}(\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\Phi)$ por 2.11.20 □

2.11.29. Proposición. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})_X$. Entonces $\mathcal{E} = \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})$, para alguna clase $\mathcal{K}$ de $\underline{\Sigma}$-álgebras si y sólo si $\mathcal{E}$ es una congruencia totalmente invariante sobre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)$.

Demostración. Si $\mathcal{E} = \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})$, entonces $\mathcal{E}$ es totalmente invariante por 2.11.27. Sea $\mathcal{E}$ totalmente invariante y $\mathcal{K} = \{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)/\mathcal{E}\}$. Entonces $\mathcal{K} \models (P,Q)$ si y sólo si $(P,Q) \in \mathcal{E}$ por 2.11.28, luego $\mathcal{E} = \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})$. □

2.11.30. Corolario. Sea X un S-conjunto. Las teorías ecuacionales sobre X forman un retículo algebraico isomorfo al retículo de las congruencias totalmente invariantes sobre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(X)$.

Demostración. A partir de 2.11.29 y de 2.11.26. □

Por el corolario, el operador de consecuencia semántica $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma},X}$ coincide con el operador de congruencia totalmente invariante generada $\mathrm{Cg}^{\mathrm{fi}}_{\mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)}$. Este hecho puede ser utilizado, al igual que en el álgebra homogénea, para desarrollar sistemas de axiomas y reglas de inferencia para las ecuaciones (relativos a X), para los que se cumple el correspondiente teorema de completud de Birkhoff. Se obtiene pues una multiplicidad de cálculos, tantos cuantos S-conjuntos de variables se consideren. Sin embargo, puesto que para las $\underline{\Sigma}$-álgebras heterogéneas no existe un S-conjunto de variables universal, este procedimiento no proporciona un cálculo de ecuaciones que relacione ecuaciones sobre distintos S-conjuntos de variables.

Las congruencias inducidas por una clase $\mathcal{K}$ de $\underline{\Sigma}$-álgebras en las $\underline{\Sigma}$-álgebras libres son también invariantes respecto de los homomorfismos entre ellas. Como consecuencia de ello, se cumple que para la validez de una ecuación en una clase $\mathcal{K}$ de $\underline{\Sigma}$-álgebras es suficiente considerar la validez en la clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras formada por las $(\underline{\Sigma},\mathcal{K})$-álgebras libres.

2.11.31. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces se cumple que, para cada $f\colon X \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(Y)$, $f^\sharp[\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})] \subseteq \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},Y}(\mathcal{K})$.

Demostración. Sea $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},X}(\mathcal{K})_s$ y $g\colon Y \longrightarrow \underline{A}$ con $\underline{A}$ en $\mathcal{K}$. Entonces $(g^\sharp \circ f)^\sharp_s(P) = (g^\sharp \circ f)^\sharp_s(Q)$ y por consiguiente, $g^\sharp_s(f^\sharp_s(P)) = g^\sharp_s(f^\sharp_s(Q))$, por lo que $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},Y}(\mathcal{K})_s$ □

2.11.32. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces se cumple que $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K}) = \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\{\mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X) \mid X \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S\})$.

Demostración. Supongamos que $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K})_{X,s}$. Sea g una valoración de X en $\mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(Z)$. Entonces existe un $\widehat{g}\colon X \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(Z)$ tal que $\mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_Z} \circ \widehat{g} = g$. Por la proposición anterior, se tiene que $(\widehat{g}^\sharp_s(P), \widehat{g}^\sharp_s(Q) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},Z}(\mathcal{K})_s = \equiv^{\mathcal{K}}_{Z,s}$, luego $\mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_Z}_s \circ \widehat{g}^\sharp_s(P) = \mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_Z}_s \circ \widehat{g}^\sharp_s(Q)$. Como el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta^X"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\widehat{g}"] & \mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\widehat{g}^\sharp"] \arrow[dl, "g^\sharp"'] \\
\mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma}}(Z)/\equiv^{\mathcal{K}}_Z & \mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma}}(Z) \arrow[l, "\mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_Z}"]
\end{tikzcd}$$

conmuta, $g^\sharp_s(P) = g^\sharp_s(Q)$ y $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\{\mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X) \mid X \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S\})_{X,s}$.

Recíprocamente, si $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\{\mathbf{Fr}_{\underline{\Sigma},\mathcal{K}}(X) \mid X \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S\})_{X,s}$, entonces $\mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_X}_s(P) = \mathrm{pr}^{\equiv^{\mathcal{K}}_X}_s(Q)$, luego $(P,Q) \in \equiv^{\mathcal{K}}_{X,s}$ y $(P,Q) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K})_{X,s}$. □

La proposición anterior tiene versiones correspondientes para la teoría localmente finitaria y finitaria de una clase $\mathcal{K}$ de $\underline{\Sigma}$-álgebras, que se demuestran del mismo modo.

Clases ecuacionales finitarias y variedades finitarias.

En el álgebra homogénea, la validez de una ecuación no depende más que del conjunto de las variables que ocurren en ella y éste es finito, por lo que cada ecuación se puede considerar, sin pérdida de generalidad, como finitaria y por consiguiente, todas las clases ecuacionales homogéneas son finitarias. Sin embargo, tal como se ha indicado anteriormente, la validez de una ecuación heterogénea depende crucialmente del S-conjunto de las variables respecto del que se la considere. Esto tendrá como consecuencia, como mostraremos al final de esta sección, la existencia de clases ecuacionales heterogéneas que no serán finitarias. Paralelamente, no todas las variedades heterogéneas serán finitarias. Se les ha de exigir para ello que estén cerradas bajo colímites dirigidos superiormente.

2.11.33. Definición. Sea $\mathcal{K}$ una variedad de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Se dice que $\mathcal{K}$ es una variedad **finitaria** si está cerrada bajo colímites dirigidos superiormente.

2.11.34. Proposición. Cada clase ecuacional finitaria es una variedad finitaria.

Demostración. Es suficiente demostrar que las clases ecuacionales finitarias están cerradas bajo la formación de colímites dirigidos. Sea $(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}})$ un sistema dirigido de $\underline{\Sigma}$-álgebras tal que, para cada $i \in I$, $\underline{A}^i \models_{w,s} (P, Q)$ con $(P, Q) \in \mathrm{Eq_f}(\underline{\Sigma})$. Vamos a demostrar que en ese caso, se cumple que $\varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}}) \models_{w,s} (P, Q)$. Supongamos que $\varinjlim(\underline{I}, \underline{\mathcal{A}}) \not\models_{w,s} (P, Q)$, i.e., que existe un $h\colon \downarrow w \longrightarrow \varinjlim(\underline{I}, \underline{A}^i)$ tal que $h^\sharp(P) \neq Q^\sharp$. Para cada $j \in |w|$, h_{w_j} asigna a cada v_j un elemento $[(x_j, i_j)]$ de $\coprod_{i \in I} A^i/\Phi$. Sea k una cota superior del conjunto de los i_j (que existe en virtud de que $\underline{I}$ es dirigido y $|w|$ es finito). Sea $g\colon |w| \longrightarrow \underline{A}^k$ la valoración que a un v_j le asigna $a^{i_j,k}(x_j)$. Entonces, puesto que $\underline{A}^k$ pertenece al sistema, $g^\sharp(P) = g^\sharp(Q)$, luego $a^k \circ g^\sharp(P) = a^k \circ g^\sharp(Q)$, y puesto que $a^k \circ g = h$ se cumple que $h^\sharp(P) = h^\sharp(Q)$, obteniendo así una contradicción. □

2.11.35. Proposición. Cada variedad finitaria es una clase ecuacional finitaria.

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ un variedad finitaria y $\mathcal{K}' = \mathrm{Mod}_{\underline{\Sigma},\mathrm{f}}(\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},\mathrm{f}}(\mathcal{K}))$. Puesto que $\mathcal{K}'$ es una variedad finitaria y $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$, es suficiente demostrar que $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$. Se cumple que $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},\mathrm{f}}(\mathcal{K}) = \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},\mathrm{f}}(\mathcal{K}')$ y por la proposición 2.11.20, para cada S-conjunto finito X, $\mathrm{Fr}_{(\underline{\Sigma},\mathcal{K})}(X) = \mathrm{Fr}_{(\underline{\Sigma},\mathcal{K}')}(X)$, puesto que $\equiv_X^{\mathcal{K}}$ es idéntica a $\equiv_X^{\mathcal{K}'}$.

Supongamos que $\underline{A} \in \mathcal{K}'$. Sabemos que $\underline{A}$ es el colímite del sistema dirigido formado por sus subálgebras finitamente generadas, i.e., $\underline{A} = \varinjlim(\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(Y))_{Y \subseteq_{\mathrm{f}} A}$. Para cada $Y \subseteq_{\mathrm{f}} A$, $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(Y)$ es una imagen homomorfa de $\mathrm{Fr}_{(\underline{\Sigma},\mathcal{K}')}(Y)$. Como Y es finito, $\mathrm{Fr}_{(\Sigma,\mathcal{K}')}(Y) = \mathrm{Fr}_{(\Sigma,\mathcal{K})}(Y)$ y por tanto, $\mathrm{Sg}_{\underline{A}}(Y) \in \mathcal{K}$. Como $\mathcal{K}$ está cerrada bajo colímites dirigidos, $\underline{A} \in \mathcal{K}$. □

A partir de las dos últimas proposiciones obtenemos como corolario el teorema de caracterización de las variedades finitarias debido a Mathiessen (v. [Mat76]) y Goguen & Meseguer (v. [GM85]).

2.11.36. Corolario (Teorema sobre variedades finitarias). Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces $\mathcal{K}$ es una variedad finitaria si y sólo si $\mathcal{K}$ es una clase ecuacional finitaria. □

Veamos, por último, un ejemplo de variedad de $\underline{\Sigma}$-álgebras que no es una variedad finitaria.

2.11.37. Ejemplo. Sea S un conjunto de tipos numerable, $S = \{s_i \mid i \in \mathrm{N}\}$, y Σ una S-signatura con dos constantes de tipo s_0, i.e., $\Sigma = \{a, b \colon \lambda \longrightarrow s_0\}$. Sea X un S-conjunto con exactamente una variable por cada tipo y considérese la variedad definida por la ecuación $E = ((a, b), (X, s))$. Para cada $i \in N$, sea $\underline{A}^i$ la (S, Σ)-álgebra cuyo S-conjunto subyacente es

$$A^i_{s_k} \begin{cases} \{a, b\} & \text{si } k = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < k \leq i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases}$$

y cuya estructura algebraica es tal que $F^i(a) = a$ y $F^i(b) = b$. Entonces todas las álgebras $\underline{A}^i$ están en la variedad $\mathrm{Mod}_{S,\Sigma}(E)$ y forman una cadena creciente cuya unión no pertenece a la variedad.

2.12 Clones.

Sea $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $\mathrm{Op}_{\mathrm{H}}(S, A)$ el $S^\star \times S$-conjunto de las operaciones sobre A con biariedades en $S^\star \times S$, i.e., $\mathrm{Op}_{\mathrm{H}}(S, A) = (\mathbf{Set}(A_w, A_s))_{(w,s)\in S^\star\times S}$. De $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ en $\mathrm{Op}_{\mathrm{H}}(S, A)$ se tiene la $S^\star \times S$-aplicación $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}}$ definida, en la coordenada (w, s)-ésima, como $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s}$. Para cada familia de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones finitarias $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ se cumple que $\underline{A} \models \mathcal{E}$ exactamente cuando el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, shift left, "\mathrm{p}^0"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{p}^1"'] & \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}) \arrow[r, "\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}}"] & \mathrm{Op}_{\mathrm{H}}(S, A) \end{tikzcd}$$

conmuta, en donde p^0 y p^1 son las restricciones de las proyecciones canónicas de $\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$. Las familias $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ y $\mathrm{Op}_{\mathrm{H}}(S, A)$ están dotadas de una estructura de álgebra heterogénea que es preservada por $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}}$, y que formaliza la noción de *substitución* para los términos y de *composición* para las operaciones sobre A. Del estudio de esta estructura se puede obtener, entre otras cosas, un cálculo sintáctico para las ecuaciones heterogéneas finitarias.

Observaciones similares a las anteriores son válidas también para los términos, ecuaciones y operaciones infinitarias y localmente finitarias, excepto que las estructuras algebraicas involucradas son, respectivamente, infinitarias y localmente finitarias. En esta sección se considera, principalmente, el caso finitario.

Álgebras de Hall.

2.12.1. Definición. Sea S un conjunto de tipos. Un **álgebra de Hall** para S es una $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{H}_S})$-álgebra, donde $\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S} = (S^\star \times S, \Sigma^{\mathrm{H}_S})$, con Σ^{H_S} la $S^\star \times S$-signatura[1], definida como:

1. Para cada $w \in S^\star$ y cada $i \in |w|$,
$$\pi_i^w \colon \lambda \longrightarrow (w, w_i)$$
2. Para cada u, $w \in S^\star$ y cada $s \in S$,
$$\xi_{u,w,s} \colon ((w, s), (u, w_0), \dots, (u, w_{|w|-1})) \longrightarrow (u, s)$$

y $\mathcal{E}^{\mathrm{H}_S} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})$ consta de las ecuaciones siguientes:

H1. *Proyección.* Para cada u, $w \in S^\star$ y cada $i \in |w|$, la ecuación de tipo $((u, w_0), \dots, (u, w_{|w|-1})), (u, w_i)$
$$\xi_{u,w,w_i}(\pi_i^w, v_0^{u,w_0}, \dots, v_{|w|-1}^{u,w_{|w|-1}}) = v_i^{u,w_i}$$

H2. *Identidad.* Para cada $u \in S^\star$ y cada $j \in |u|$, la ecuación de tipo $((u, u_j)), (u, u_j)$
$$\xi_{u,u,u_j}(v_j^{u,u_j}, \pi_0^u, \dots, \pi_{|u|-1}^u) = v_j^{u,u_j}$$

H3. *Asociatividad.* Para cada u, v, $w \in S^\star$ y cada $s \in S$, la ecuación de tipo $((w, s), (v, w_0), \dots, (v, w_{|w|-1}), (u, v_0), \dots (u, v_{|v|-1})), (u, s)$
$$\begin{aligned}\xi_{u,v,s}(\xi_{v,w,s}(v_0^{w,s}, v_1^{v,w_0}, \dots, v_{|w|}^{v,w_{|w|-1}}), v_{|w|+1}^{u,v_0}, \dots, v_{|w|+|v|}^{u,v_{|v|-1}}) = \\ \xi_{u,w,s}(v_0^{w,s}, \xi_{u,v,w_0}(v_1^{v,w_0}, v_{|w|+1}^{u,v_0}, \dots, v_{|w|+|v|}^{u,v_{|v|-1}}), \dots, \\ \xi_{u,v,w_{|w|-1}}(v_{|w|}^{v,w_{|w|-1}}, v_{|w|+1}^{u,v_0}, \dots, v_{|w|+|v|}^{u,v_{|v|-1}}))\end{aligned}$$

[1] el $(S^\star \times S)^\star \times (S^\star \times S)$-conjunto

donde $v_n^{u,s}$ designa $v_n^{(u,s)}$, i.e., la variable n-ésima de tipo (u,s).

Obsérvese que si $w=\lambda$ en H3 entonces se cumple

> *Invarianza de las funciones constantes.* Para cada u, $w\in S^\star$, y cada $s\in S$, la ecuación de tipo $((\lambda,s),(u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1})),(\lambda,s)$
>
> $$\xi_{u,w,s}(\xi_{w,\lambda,s}(v_0^{\lambda,s}),v_1^{u,w_0},\ldots,v_{|w|}^{u,w_{|w|-1}})=\xi_{u,\lambda,s}(v_0^{\lambda,s})$$

Las constantes π_i^w se denominan *proyecciones*, y los símbolos de operación de la forma $\xi_{u,w,s}$, *operadores de substitución.*

Las ecuaciones anteriores se pueden ilustrar con el caso clásico de las álgebras de Hall, i.e., el de los clones de operaciones sobre un S-conjunto. Para cada S-conjunto A, $\mathrm{Op}_\mathrm{H}(S,A)$ está dotado de una estructura de álgebra de Hall, interpretando las proyecciones como verdaderas proyecciones y los operadores de substitución como la substitución de funciones. Los cerrados de tal álgebra se denominan *clones de operaciones*, y fueron estudiados originalmente, en el caso de los clones de operaciones sobre conjuntos ordinarios, por Philip Hall (v. [Coh81]).

2.12.2. Proposición. Sea A un S-conjunto y $\underline{\mathrm{Op}}_\mathrm{H}(S,A)$ la Σ^{H_S}-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Op}_\mathrm{H}(S,A)$ y cuya estructura algebraica F es la definida como:

1. Para cada $u,w\in S^\star$, cada $s\in S$ y cada $i\in|w|$, $F_{\pi_i^w}=\mathrm{pr}_{w,i}^A$
2. Para cada $f\in A_s^{A_w}$ y cada $g\in A_w^{A_u}$, $F_{\xi_{u,w,s}}(f,g_0,\ldots,g_{|w|-1})=f\circ\langle g_i\rangle_{i\in|w|}$

Entonces $\underline{\mathrm{Op}}_\mathrm{H}(S,A)$ es un álgebra de Hall.

Demostración. Las ecuaciones de Hall afirman simplemente que los diagramas siguientes conmutan.

Proyección

$$\begin{tikzcd} A_u \arrow[d, "\langle g_i\rangle_{i\in|w|}"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ A_w \arrow[r, "\mathrm{pr}_i^w"'] & A_{w_i} \end{tikzcd}$$

Identidad

$$\begin{tikzcd} A_u \arrow[d, "\langle \mathrm{pr}_i^u\rangle_{i\in|u|}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A_u \arrow[r, "f"'] & A_s \end{tikzcd}$$

Asociatividad

$$
\begin{tikzcd}
 & A_u \arrow[dl, "g_j \circ h"'] \arrow[dd, "k"] \\
 & \\
A_{w_j} & A_w \arrow[l, "\mathrm{pr}^w_j"] \arrow[d, "f"] \\
 & A_s
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A_u \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "h_i"] & \\
A_v \arrow[r, "\mathrm{pr}^v_i"'] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g_i"] & A_{w_j} \\
A_w \arrow[r, "\mathrm{pr}^w_j"'] \arrow[d, "f"'] & A_{w_j} \\
A_s &
\end{tikzcd}
$$

Invarianza de las constantes

$$
\begin{tikzcd}
A_u \arrow[dd, "!_{A_u}"'] \\
 \\
A_\lambda \arrow[d, "f"'] \\
A_s
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A_u \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g_j"] & \\
A_w \arrow[r, "\mathrm{pr}^w_j"'] \arrow[d, "!_{A_w}"'] & A_{w_j} \\
A_\lambda \arrow[d, "f"'] & \\
A_s &
\end{tikzcd}
$$

donde $g = \langle g_j \rangle_{j \in |w|}$, $h = \langle h_i \rangle_{i \in |w|}$ y $k = \langle g_j \circ \langle h_i \rangle_{i \in |v|} \rangle_{j \in |w|}$.

Obsérvese que como caso particular de substitución se tiene $\xi_{u,\lambda,s}$, que se interpreta como la conversión de constantes $\kappa^a_{\lambda,s}$ en constantes $\kappa^a_{u,s}$. □

La familia $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}) = (\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s)_{(w,s) \in S^\star \times S}$ está también naturalmente dotada de un estructura de álgebra de Hall.

2.12.3. Proposición. Sea $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ la Σ^{H_S}-álgebra cuyo conjunto subyacente es $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ y cuya estructura algebraica F interpreta las proyecciones π^w_i como (la imagen bajo $\eta^{\downarrow w}_{w(i)}$ de) las variables v_i, y los operadores de substitución como la substitución de términos, i.e., como la función

$$
F_{\xi_{u,w,s}} : \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s \times \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_{w(0)} \times \cdots \times \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_{w(|w|-1)} \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_s
$$

que a $(P, Q_0, \dots, Q_{|w|-1})$ le asocia el término $P \circ \langle Q_0, \dots, Q_{|w|-1} \rangle$ definido como $Q^\sharp_s(P)$, donde $Q^\sharp$ es el único homomorfismo que extiende a Q, i.e., la aplicación asociada a la w-tupla $(Q_0, \dots, Q_{|w|-1})$

$$
\begin{tikzcd}
\downarrow w \arrow[r, "\eta_{\downarrow(w)}"] \arrow[dr, "Q"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "Q^\sharp"] \\
 & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)
\end{tikzcd}
$$

Entonces $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ es un álgebra de Hall.

□

Las álgebras de Hall para S y los homomorfismos entre ellas determinan una categoría, denotada como $\mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)$. El functor de olvido $\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}$ de $\mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)$ en

$\mathbf{Set}^{S^\star \times S}$ tiene un adjunto por la izquierda $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S) \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Set}^{\mathbf{S}^\star \times \mathbf{S}} \arrow[l, shift left=2, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}"] \end{tikzcd}$$

que a un $S^\star \times S$-conjunto le asigna el álgebra de Hall libre correspondiente. Esta última es isomorfa a $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$, como demostramos a continuación.

2.12.4. Definición. Sea $\underline{A}$ un álgebra de Hall y Σ una S-signatura. Entonces, para cada $f\colon \Sigma \longrightarrow A$ y cada $u \in S^\star$, $\underline{A}^{f,u}$ es la $\underline{\Sigma}$-álgebra cuyo S-conjunto subyacente es $A_u = (A_{u,s})_{s\in S}$ y cuya estructura algebraica $F^{f,u}$ se define, para cada $(w, s) \in S^\star \times S$, como

$$F^{f,u}_{w,s}\begin{cases} \Sigma_{w,s} \longrightarrow \mathrm{Op}_w(A_u)_{w,s} \\ \sigma \longmapsto \begin{cases} (A_u)_w \longrightarrow (A_u)_s \\ (a_0,\ldots,a_{|w|-1}) \longmapsto \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}(f(\sigma), a_0, \ldots, a_{|w|-1}) \end{cases} \end{cases}$$

Sea $p^u\colon \downarrow u \longrightarrow A_u$ la S-aplicación definida como $p^u_s(v_i) = (\pi^u_i)^{\underline{A}}$. Por la propiedad universal de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)$, podemos extender p^u hasta un homomorfismo $(p^u)^\sharp$ de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)$ en $\underline{A}^{f,u}$.

$$\begin{tikzcd} \downarrow u \arrow[r, "\eta^{\downarrow u}"] \arrow[dr, "p^u"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u) \arrow[d, "(p^u)^\sharp"] \\ & A_u \end{tikzcd}$$

Obsérvese que si $\underline{B} = (B, G)$ es una $\underline{\Sigma}$-álgebra, entonces $G\colon \Sigma \longrightarrow \mathrm{Op}_{\mathrm{H}}(S, B)$, y se cumple que $\underline{B} \cong (\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(S, B))^{G,\lambda}$. Asimismo, para cada $u \in S^\star$ se tiene que $\underline{\mathrm{Op}}_u(\underline{A}) \cong (\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(S, B))^{G,u}$.

2.12.5. Lema. Sea $\underline{A}$ un álgebra de Hall, Σ una S-signatura, $f\colon \Sigma \longrightarrow A_u$ y $u \in S^\star$. Entonces, para cada $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ y cada $a \in (A_u)_w$, se cumple que

$$P^{\underline{A}^{f,u}}(a_0,\ldots,a_{|w|-1}) = \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((p^w)^\sharp_s(P), a_0,\ldots,a_{|w|-1})$$

Demostración. Por inducción algebraica sobre la complejidad de P. Si P es una variable v_i, con $i \in |w|$, entonces

$$\begin{aligned} v_i^{\underline{A}^{f,u}}(a_0,\ldots,a_{|w|-1}) &= a^\sharp_{w_i}(v_i) \\ &= a_i \\ &= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((\pi^w_i)^{\underline{A}}, a_0,\ldots,a_{|w|-1}) \quad (\mathrm{H1}) \\ &= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((p^w)^\sharp_s(v_i), a_0,\ldots,a_{|w|-1}) \end{aligned}$$

Supongamos que $P = \sigma(Q_0, \dots, Q_{|x|-1})$, con $\sigma\colon x \longrightarrow s$ y que, para cada $j \in |x|$, $Q_j \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_{x_j}$ satisface la hipótesis de inducción. Entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
&(\sigma(Q_0, \dots, Q_{|x|-1}))^{\underline{A}^{f,u}}(a_0, \dots, a_{|w|-1})\\
&= \sigma^{\underline{A}^{f,u}}(Q_0^{\underline{A}^{f,u}}(a_0, \dots, a_{|w|-1}), \dots, Q_{|x|-1}^{\underline{A}^{f,u}}(a_0, \dots, a_{|w|-1}))\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,x,s}(f(\sigma), Q_0^{\underline{A}^{f,u}}(a_0, \dots, a_{|w|-1}), \dots, Q_{|x|-1}^{\underline{A}^{f,u}}(a_0, \dots, a_{|w|-1}))\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,x,s}(f(\sigma), \xi^{\underline{A}}_{u,w,x_0}((p^w)^{\sharp}_{x_0}(Q_0), a_0, \dots, a_{|w|-1}), \dots,\\
&\qquad\qquad \xi^{\underline{A}}_{u,w,x_{|x|-1}}((p^w)^{\sharp}_{x_{|x|-1}}(Q_{|x|-1}), a_0, \dots, a_{|w|-1}),) \quad \text{(hip. inducción)}\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}(\xi^{\underline{A}}_{w,x,s}(f(\sigma), (p^w)^{\sharp}_{x_0}(Q_0), \dots, (p^w)^{\sharp}_{x_{|x|-1}}(Q_{|x|-1})), a_0, \dots, a_{|w|-1})\ \text{(H3)}\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}(\sigma^{\underline{A}_w}((p^w)^{\sharp}_{x_0}(Q_0), \dots, (p^w)^{\sharp}_{x_{|x|-1}}(Q_{|x|-1})), a_0, \dots, a_{|w|-1})\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((p^w)^{\sharp}_{s}(\sigma, Q_0, \dots, Q_{|x|-1}), a_0, \dots, a_{|w|-1})\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((p^w)^{\sharp}_{s}(P), a_0, \dots, a_{|w|-1})
\end{aligned}
$$

□

2.12.6. Proposición. Sea $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ una signatura algebraica. Entonces se cumple que $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ y $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ son álgebras de Hall isomorfas.

Demostración. Es suficiente comprobar que $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ tiene la propiedad universal del álgebra de Hall libre sobre Σ. Sea h la $S^\star \times S$-aplicación definida, para cada $(w, s) \in S^\star \times S$, como

$$
h_{w,s} \begin{cases} \Sigma_{w,s} \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s \\ \quad \sigma \quad \longmapsto \sigma(v_0, \dots, v_{|w|-1}) \end{cases}
$$

Sea $\underline{A}$ un álgebra de Hall y $f\colon \Sigma \longrightarrow A$ una $S^\star \times S$-aplicación. Entonces, para cada $u \in S^\star$, se tiene la S-aplicación $(p^u)^\sharp$ de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)$ en $\underline{A}^{f,u}$ que extiende a $p^u\colon \downarrow u \longrightarrow A_u$. Sea $\widehat{f}\colon \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}) \longrightarrow A$ la $S^\star \times S$-aplicación definida, para cada $(w, s) \in S^\star \times S$, como $\widehat{f}_{w,s} = (p^u)^\sharp_s$. Así definido, $\widehat{f}$ es un homomorfismo de álgebras de Hall. Sea $w \in S^\star$ e $i \in |w|$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}_{w,w_i}(\pi^w_i)^{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})} &= \widehat{f}_{w,w_i}(v_i)\\
&= p^w_{w_i}(v_i)\\
&= (\pi^w_i)^{\underline{A}}
\end{aligned}
$$

Los operadores $\xi_{u,w,s}$ son preservados por $\widehat{f}$. Sea $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ y $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_w$.

Entonces se cumple que,

$$
\begin{aligned}
&\widehat{f}_{u,s}(\xi^{\underline{\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\Sigma)}}_{u,w,s}(P, Q_0, \dots, Q_{|w|-1}))\\
&= (p^u)^\sharp_s(Q^\sharp_s(P))\\
&= ((p^u)^\sharp \circ Q)^\sharp_s(P)\\
&= P^{\underline{A}^{f,u}}((p^u)^\sharp_{w_0}(Q_0), \dots, (p^u)^\sharp_{w_{|w|-1}}(Q_{|w|-1}))\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}((p^w)^\sharp_s(P), (p^u)^\sharp_{w_0}(Q_0), \dots, (p^u)^\sharp_{w_{|w|-1}}(Q_{|w|-1})) \qquad \text{(por 2.12.5)}\\
&= \xi^{\underline{A}}_{u,w,s}(\widehat{f}_{w,s}(P), \widehat{f}_{(u,w_0)}(Q_0), \dots, \widehat{f}_{(u,w_{|w|-1})}(Q_{|w|-1}))
\end{aligned}
$$

La $S^\star \times S$-aplicación $\widehat{f}$ es, por consiguiente, un homomorfismo y tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}) \arrow[d, "\widehat{f}"] \\
& \underline{A}
\end{tikzcd}
$$

conmuta, puesto que, para cada $w \in S^\star$, cada $s \in S$, y cada $\sigma\colon w \longrightarrow s$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}_{w,s}(h_{w,s}(\sigma)) &= (p^w)^\sharp_s(\sigma(v_0, \dots, v_{|w|-1}))\\
&= \sigma^{\underline{A}_w}((g_w)_{w_0}(v_0), \dots, (g_w)_{w_{|w|-1}}(v_{|w|-1}))\\
&= \xi^{\underline{A}}_{w,w,s}(f(\sigma), (\pi^w_0)\underline{A}, \dots, (\pi^w_{|w|-1})\underline{A})\\
&= f(\sigma) \quad \text{(H2)}
\end{aligned}
$$

Además, $\widehat{f}$ es el único con esa propiedad. Puesto que $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ satisface la propiedad universal del algebra libre de Hall sobre Σ, es isomorfa a $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$. □

Dado el isomorfismo existente entre $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ y $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$ en lo que sigue utilizaremos cualquiera de las dos álgebras indistintamente. En particular, la inclusión canónica de Σ en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ y se la denota también como η^Σ.

2.12.7. Proposición. Sea $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces la $S^\star \times S$-aplicación $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}}$ de $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ en $\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(S, A)$ definida como

$$
\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}} = (\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s})_{(w,s)\in S^\star \times S}
$$

es un homomorfismo de álgebras de Hall.

Demostración. Para cada $w \in S^\star$, se cumple que

$$\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s}(\pi^w_i) = \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s}(v_i) = \mathrm{pr}^A_{w,i} = (\pi^w_i)^{\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(S,A)}$$

Además, para cualesquiera $u, w \in S^\star$, $s \in S$, $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ y $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_w$, se tiene que

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{u,s}(\xi_{u,w,s}(P, Q_0, \dots, Q_{|w|-1}))\\ &= \xi^{\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(S,A)}_{u,w,s}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{w,s}(P), \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{u,w_0}(Q_0), \dots, \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{u,w_{|w|-1}}(Q_{|w|-1}))\end{aligned}$$

por inducción algebraica sobre la complejidad de P. □

Por la adjunción $\mathrm{Fr}_{\mathrm{H}_S} \dashv \mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}$ se tiene, en particular, que, para cada S-conjunto A, los conjuntos $\mathbf{Set}^{S^\star \times S}(\Sigma, \mathrm{Op}_{\mathrm{H}}(S, A))$ y $\mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}), \underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(A))$ son isomorfos. El isomorfismo asigna a cada estructura algebraica F sobre A el homomorfismo de álgebras de Hall $\mathrm{Pd}^{(A,F)}_{\mathrm{H}}$ y su inverso asocia a cada homomorfismo $h\colon \underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(A)$, la estructura algebraica sobre A, $\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S} \circ \eta_{\underline{\Sigma}}$.

La teoría de una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ respecto de las ecuaciones en $\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$, $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},\mathrm{H}}(A)$, es, por definición, $(\mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_w)_s)_{(w,s)\in S^\star\times S}$, que es exactamente el núcleo de $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}}$ y, por consiguiente, una congruencia en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$. Lo anterior es extensible a clases de $\underline{\Sigma}$-álgebras, y en particular, a los modelos de una familia $\mathcal{E}$ de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones finitarias. Como consecuencia, el operador congruencia generada en $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ es correcto respecto del operador consecuencia semántica $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma},\mathrm{H}}$, la restricción de $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}$ a las ecuaciones en $\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$.

2.12.8. Proposición. Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\underline{\Sigma}$-álgebras. Entonces $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},\mathrm{H}}(\mathcal{K})$ es una congruencia sobre $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$.

Demostración. Puesto que $\mathrm{Th}_{\underline{\Sigma},\mathrm{H}}(\mathcal{K})$ es $\bigcap_{\underline{A}\in\mathcal{K}} \mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}}) \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}))$. □

2.12.9. Corolario (Teorema de corrección). Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Entonces se cumple que $\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})} \leq \mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma},\mathrm{H}}$. □

Sea $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}}(\underline{A}) = (\mathrm{Pol}(\underline{A})_{w,s})_{(w,s)\in S^\star\times S}$. Entonces $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}}(\underline{A}) = \mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}}[\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})]$. Además $\mathrm{Pol}_{\mathrm{H}}(\underline{A})$ es la subálgebra de $\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(A)$ generada por las operaciones estructurales $F[\Sigma]$ de $\underline{A}$. Recíprocamente, toda subálgebra X de $\underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(A)$ es igual a $\underline{\mathrm{Pol}}(\underline{A})$ para alguna $\underline{\Lambda}$-álgebra cuyo conjunto subyacente es A (e.g., $\underline{A} = (A, \mathrm{id}_X)$).

2.12.10. Proposición. Sea $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\mathrm{Pd}^{\underline{A}}_{\mathrm{H}}$ es el único homomorfismo de álgebras de Hall que extiende a F, la estructura algebraica de $\underline{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\eta^{\Sigma}"] \arrow[dr, "F"'] & \mathrm{Fr}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "F^{\sharp}"] & \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\Sigma) \arrow[dl, "\mathrm{Pd}^{A}_{\mathrm{H}}"] \\
 & \mathrm{Op}_{\mathrm{H}}(S, A) &
\end{tikzcd}$$

□

Demostración. Es suficiente comprobar que $F = \mathrm{Pd}^{A}_{\mathrm{H}} \circ \eta^{\Sigma}$, lo cual es inmediato puesto que, para cada $\sigma\colon w \longrightarrow s$, $F_\sigma = F^{A}_{\sigma} \circ \langle \mathrm{pr}^{A}_{w,w_0}, \ldots, \mathrm{pr}^{A}_{w,|w|-1} \rangle$. □

Cada familia de ecuaciones finitarias $\mathcal{E}$ sobre $\underline{\Sigma}$ es una $S^\star \times S$-relación sobre $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ y como tal, genera una congruencia $\overline{\mathcal{E}} = \mathrm{Cg}_{\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}(\mathcal{E})$. Sea $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra y $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$. Entonces $\underline{A} \models \mathcal{E}$ si y sólo si $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{Pd}^{A}_{\mathrm{H}})$, o lo que es equivalente, $\mathrm{Pd}^{A}_{\mathrm{H}}$ factoriza a través de la proyección canónica de $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ en $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})/\overline{\mathcal{E}}$.

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}) \arrow[rr, "\mathrm{Pd}^{A}_{\mathrm{H}}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & & \underline{\mathrm{Op}}_{\mathrm{H}}(A) \\
 & \underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})/\overline{\mathcal{E}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

La congruencia generada en el álgebra de Hall de los $\underline{\Sigma}$-términos finitarios por una familia de ecuaciones finitarias $\mathcal{E}$ se puede caracterizar de la manera siguiente.

2.12.11. Proposición. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$. Entonces $\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}(\mathcal{E})$ es el menor sub-$S^\star \times S$-conjunto $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ que contiene a $\mathcal{E}$ y satisface las condiciones siguientes, para cada $u, w \in S^\star$ y cada $s \in S$:

1. *Reflexividad.* Para cada $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$, $(P, P) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.

2. *Simetría.* Para cada P, $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$, si $(P, Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$, $(Q, P) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.

3. *Transitividad.* Para cada P, Q, $R \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$, si (P, Q), $(Q, R) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$, $(P, R) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.

4. *Substitución.* Para cada $(P, Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$, y cada $P', Q' \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_w$ tal que, para cada $i \in |w|$, $(P'_i, Q'_i) \in \overline{\mathcal{E}}_{u,w_i}$,

$$(\xi_{u,w,s}(P, P'_0, \ldots, P'_{|w|-1}), \xi_{u,w,s}(Q, Q'_0, \ldots, Q'_{|w|-1})) \in \overline{\mathcal{E}}_{u,s}$$

$\square$

Obsérvese que en la proposición anterior, la condición de substitución para $w = \lambda$ exige que si $(P, Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{\lambda,s}$ entonces, para cada $u \in S^\star$, $(P, Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{u,s}$.

2.12.12. Proposición. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$. Si $(P_i, Q_i) \in \overline{\mathcal{E}}_{(w,w_i)}$ y $\sigma\colon w \longrightarrow s$, entonces $(\sigma(P_0, \dots, P_{|w|-1}), \sigma(Q_0, \dots, Q_{|w|-1})) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.

Demostración. Por reflexividad $(\sigma(v_0, \dots, v_{|w|-1}), \sigma(v_0, \dots, v_{|w|-1})) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$. Pero entonces, por substitución, $(\sigma(P_0, \dots, P_{|w|-1}), \sigma(Q_0, \dots, Q_{|w|-1})) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$ $\square$

2.12.13. Proposición. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$. Si $(P, Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$ y f es un endomorfismo de $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)$ entonces $(f(P), f(Q)) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.

Demostración. Para cada $i \in \downarrow w$, la ecuación $(f_{w_i}(v_i), f_{w_i}(v_i))$ está en $\overline{\mathcal{E}}_{(w,w_i)}$. Por substitución, se cumple que

$$(\xi_{w,w,s}(P, f_{w_0}(v_0), \dots, f_{w_{|w|-1}}(v_{|w|-1})), \xi_{w,w,s}(Q, f_{w_0}(v_0), \dots, f_{w_{|w|-1}}(v_{|w|-1})))$$

pertenece a $\overline{\mathcal{E}}_{w,s}$, luego $(f(P), f(Q)) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$. $\square$

2.12.14. Proposición. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$. Entonces $\overline{\mathcal{E}}_w = (\overline{\mathcal{E}}_{(w,s)})_{s \in S}$ es una congruencia totalmente invariante sobre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)$.

Demostración. Por definición, $\overline{\mathcal{E}}_w$ es una equivalencia sobre $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)$. Por la proposición 2.12.12 es compatible con las operaciones en Σ y por la proposición 2.12.13 está cerrada bajo endomorfismos. $\square$

La congruencia $\overline{\mathcal{E}}_w$ incluye a $\mathrm{Cg}^{\mathrm{fi}}_{\underline{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)}(\mathcal{E}_w)$, la congruencia totalmente invariante generada por $\mathcal{E}_w = (\mathcal{E}_{w,s})_{s \in S}$. En general, la inclusión es estricta, puesto que $\mathrm{Cg}^{\mathrm{fi}}_{\underline{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)}(\mathcal{E}_w)$ contiene únicamente a las consecuencias de la subfamilia de $\mathcal{E}$ formada por las ecuaciones en $\mathcal{E}$ con variables en $\downarrow w$, mientras que $\overline{\mathcal{E}}_w$ contiene a las ecuaciones con variables en $\downarrow w$ que son consecuencia de todas las ecuaciones en $\mathcal{E}$.

2.12.15. Proposición. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$. Entonces $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w \models \mathcal{E}$.

Demostración. Claramente, $\overline{\mathcal{E}}_w$ es una congruencia. Sea $(P, Q) \in \mathcal{E}_{u,s}$ y R una valoración $R\colon \downarrow u \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w$. Entonces

$$R^\sharp(P) = [P(R_0, \dots, R_{|u|-1})] = [Q(R_0, \dots, R_{|u|-1})] = R^\sharp(Q)$$

$\square$

2.12.16. Proposición (Teorema de adecuación). Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Entonces se cumple que $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma},\mathrm{H}} \leq \mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}$.

Demostración. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$. Si $(P, Q) \in \mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})_{w,s}$ entonces, puesto que $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w$ es un modelo de $\mathcal{E}$, $P^{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w} = Q^{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w}$. Luego

$$
\begin{aligned}
[P] &= [\xi_{w,w,s}(P, \pi^w_0, \dots, \pi^w_{|w|-1})] \\
&= [P^{\underline{\mathrm{Fr}}(\downarrow w)}(v_0, \dots, v_{|w|-1})] \\
&= P^{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w}([v_0], \dots, [v_{|w|-1}]) \\
&= Q^{\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w}([v_0], \dots, [v_{|w|-1}]) \\
&= [Q^{\underline{\mathrm{Fr}}(\downarrow w)}(v_0, \dots, v_{|w|-1})] \\
&= [\xi_{w,w,s}(Q, \pi^w_0, \dots, \pi^w_{|w|-1})] \\
&= [Q]
\end{aligned}
$$

y $(P, Q) \in \mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}(\mathcal{E})_{w,s}$. □

2.12.17. Corolario (Teorema de completud). Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Entonces $\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})} = \mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma},\mathrm{H}}$. □

2.12.18. Proposición. Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$. Entonces $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)/\overline{\mathcal{E}}_w = \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma},\mathcal{E}}(\downarrow w)$

Demostración. Puesto que $\overline{\mathcal{E}}_w = \mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma},\mathrm{H}}(\mathcal{E})_w = \equiv^{\mathcal{E}}_{\downarrow w}$. □

Axiomas y Reglas.

El teorema de completud proporciona un cálculo de ecuaciones heterogéneas sobre conjuntos de variables de la forma $\downarrow w$ con $w \in S^\star$. Las condiciones de la proposición 2.12.11 pueden ser *traducidas* para determinar un cálculo de ecuaciones heterogéneas finitarias relativas a los sub-S-conjuntos finitos del conjunto V^S de variables.

Para la descripción de las reglas del cálculo, convenimos que $(P, Q) : (X, s)$ significa que la $\underline{\Sigma}$-ecuación (P, Q) es de tipo (X, s) y que si $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$ y $P' \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(Y)_X$, entonces la expresión $P(x/P'_{x,s})_{s \in S, x \in X_s}$ denota el término $P'^{\sharp}(P)$.

2.12.19. Proposición (Reglas de deducción). Las reglas siguientes determinan un operador clausura sobre $\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{V^S}(\underline{\Sigma}))$ que es idéntico al operador $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma},V^S}$.

R1 *Reflexividad.*

$$
\frac{}{(P, P) : (X, s)} \quad P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s
$$

R2 *Simetría.*

$$\frac{(P,Q):(X,s)}{(Q,P):(X,s)}$$

R3 *Transitividad.*

$$\frac{(P,Q):(X,s) \qquad (Q,R):(X,s)}{(P,R):(X,s)}$$

R4 *Substitución generalizada.*

$$\frac{(P,Q):(X,s) \qquad ((P'_{x,s},Q'_{x,s}):(Y,s))_{s\in S,x\in X_s}}{(P(x/P'_{x,s})_{s\in S,\,x\in X_s},Q(x/Q'_{x,s})_{s\in S,\,x\in X_s}):(Y,s)}$$

donde X, $Y \in \mathrm{Sub_f}(V^S)$, $s \in S$.

Demostración. Las reglas dadas son la traducción de las condiciones de la proposición 2.12.11 para S-conjuntos finitos. □

La regla de substitución generalizada es equivalente a una regla de substitución para ocurrencias particulares de las variables.

2.12.20. Proposición. La regla R4 es equivalente (asumiendo R1) a la siguiente regla

R4′ *Substitución.*

$$\frac{(P,Q):(X,s) \qquad (P',Q'):(Y,t)}{(P(x/P'),Q(x/Q')):(X-\delta^s(x)\cup Y,s)} \quad x \in X_t$$

Demostración. Veamos que R4 implica R4′. Si $(P,Q):(X,s)$ y $(P',Q'):(Y,t)$ son deducibles y $x \in X_t$, entonces también son deducibles las ecuaciones en la familia $((P''_{x,s},Q''_{x,s}):(X-\delta^s(x)\cup Y,s))_{s\in S,x\in X_s}$, donde $P''_{x,t}=P'$, $Q''_{x,t}=Q'$, y en cualquier otro caso $P''_{y,s}=Q''_{y,s}=y$ (por reflexividad). Entonces, por substitución generalizada, $(P(x/P'),Q(x/Q')):(X-\delta^s(x)\cup Y,s)$ es deducible, puesto que $P(x/P')=(P(x/P''_{x,s})_{s\in S,\,x\in X_s}$ y $Q(x/Q')=Q(x/P''_{x,s})_{s\in S,\,x\in X_s}$.

Recíprocamente, R4′ implica R4, mediante $\mathrm{card}(\coprod X)$ aplicaciones de R4′. □

En algunas presentaciones del cálculo de ecuaciones heterogéneas finitarias, e.g., en [GM85], se introducen dos reglas adicionales que permiten la adición y supresión de variables.

2.12.21. Definición (Reglas de abstracción y concreción).

R5 *Abstracción.*

$$\frac{(P,Q):(X,s)}{(P,Q):(X\cup\delta^t(x),s)} \quad x \notin X_t$$

R6 *Concreción.*

$$\frac{(P,Q):(X,s)}{(P,Q):(X-\delta^t(x),s)}\quad x\in X_t,\ x\notin \mathrm{var}(P,Q),\ t \text{ no vacío}$$

donde t no vacío significa que $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\emptyset)_t \neq \emptyset$, i.e., que $t \in \mathrm{supp}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\emptyset))$.

2.12.22. Proposición. Las reglas de abstracción y concreción son reglas derivadas.

Demostración. La regla de abstracción es derivada. Sea $y \neq x$ y tal que $y \notin X_t$. Entonces la ecuación $(y,y):(\delta^s(y)\cup\delta^s(x),s)$ es deducible por reflexividad. Por substitución, se tiene que la ecuación

$$(y(y/P),y(y/Q)):(((\delta^s(y)\cup\delta^t(x))-\delta^s(y))\cup X,s)$$

que es igual a $(P,Q):(X\cup\delta^t(y),s)$, es deducible. Como caso particular se tiene que si $(P,Q):(\emptyset,s)$ es deducible entonces $(P,Q):(\delta^t(y),s)$ es deducible.

La regla de concreción es derivada. Si t no es vacío, existe un $R\in\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(0)_t$ y la ecuación $(R,R):(0,t)$ es deducible. Aplicando la regla de substitución, $(P(x/R),Q(x/R)):(X-\delta^t(x)\cup 0,s)$ es deducible y, puesto que $x\notin\mathrm{var}(P,Q)$, $(P,Q):(X-\delta^t(x),s)$ es deducible. □

2.12.23. Definición (Regla de reemplazo).

R7 *Reemplazo.*

$$\frac{(P^i,Q^i):(X,w_i)}{(\sigma(P_0,\dots,P_{|w|-1}),\sigma(Q_0,\dots,Q_{|w|-1})):(X,s)}\quad \sigma\in\Sigma_{w,s}$$

2.12.24. Proposición. La regla de reemplazo es una regla derivada.

Demostración. Por reflexividad, $(\sigma(v_0,\dots,v_{|w|-1}),\sigma(v_0,\dots,v_{|w|-1})):(\downarrow w,s)$ es deducible. Mediante $|w|$ aplicaciones de la regla de substitución se obtiene la ecuación deseada. □

El cálculo presentado es independiente del tipo de S-conjuntos de variables finitos que se consideren. De hecho, si $\mathcal{X}\subseteq\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\mathrm{f}}^S$ es iso-equivalente a $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\mathrm{f}}^S$, entonces las reglas dadas son completas respecto del operador $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma},\mathcal{X}}$ de consecuencia semántica relativo a $\mathcal{X}$. Es posible definir álgebras de Hall relativas a cualquier $\mathcal{X}\subseteq\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\mathrm{f}}^S$ y obtener directamente el cálculo de los párrafos anteriores.

Por otra parte, lo expuesto en esta sección puede ser desarrollado para el caso de las ecuaciones heterogéneas sobre S-conjuntos de variables arbitrarios, aunque para ello es necesario considerar álgebras de Hall infinitarias. Puesto que cada clase ecuacional es una clase ecuacional localmente finitaria, es suficiente considerar S-conjuntos de variables localmente finitarios, e.g., $\mathrm{Sub}_{\mathrm{lf}}(V^S)$. Las álgebras de Hall para $\mathrm{Sub}_{\mathrm{lf}}(V^S) \times S$-conjuntos requieren de operaciones que son localmente finitarias. En general, la ariedad de las operaciones que se han de considerar en las álgebras de Hall está acotada por el cardinal de los S-conjuntos de variables que se consideren.

El cálculo resultante de considerar el operador de congruencia generada en las álgebras de Hall para $\mathrm{Sub}_{\mathrm{lf}}(V^S) \times S$-conjuntos consta de las mismas reglas R1–R4 que en el caso finitario, pero generalizado para S-conjuntos de variables arbitrarios, o si se prefiere, sin pérdida de generalidad, para S-conjuntos de variables localmente finitos. Sin embargo, la regla de substitución, que sigue siendo una regla derivada, ya no es equivalente a la de substitución generalizada, puesto que siendo el S-conjunto de las variables que ocurren en los términos posiblemente infinito, no es posible reemplazar todas las ocurrencias de variables en ellos por un numero finito de substituciones individuales. Por último, las reglas de abstracción y concreción tienen también versiones generalizadas.

2.12.25. Definición.

R5$'$ *Abstracción generalizada.*

$$\frac{(P,Q):(X,s)}{(P,Q):(X\cup Y,s)}$$

R6$'$ *Concreción generalizada.*

$$\frac{(P,Q):(X,s)}{(P,Q):(X-Y,s)}\quad Y\cap \mathrm{var}(P,Q)=\emptyset,\ \mathrm{supp}(Y)\subseteq \mathrm{supp}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\emptyset))$$

En el caso finitario las reglas de abstracción y concreción generalizada son también válidas (para S-conjuntos de variables finitos) y se deducen de sus versiones normales.

Álgebras de Bénabou.

Es posible dar una formulación alternativa, pero equivalente, de las propiedades esenciales de las álgebras de Hall mediante la noción de álgebra de Bénabou. Éstas constituyen una formulación más adecuada para expresar la equivalencia de lo anteriormente expuesto con el estudio de la lógica ecuacional heterogénea desde el punto de vista de las teorías algebraicas al estilo de Lawvere y Bénabou. Asimismo, resultan de interés al considerar ciertos tipos de morfismos complejos entre signaturas algebraicas.

2.12.26. Definición. Sea S un conjunto de tipos. Un **álgebra de Bénabou para** S es una $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{B}_S})$-álgebra, donde $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S} = (S^\star \times S^\star, \Sigma^{\mathrm{B}_S})$, con Σ^{B_S} la $(S^\star)^2$-signatura [2], definida como:

1. Para cada $w \in S^\star$ y cada $i \in |w|$,

$$\pi^w_i \colon \lambda \longrightarrow (w, (w_i))$$

2. Para cualesquiera u, $w \in S^\star$,

$$\langle\,\rangle_{u,w} \colon ((u,(w_0)), \ldots, (u,(w_{|w|-1}))) \longrightarrow (u, w)$$

3. Para cualesquiera u, x, $w \in S^\star$,

$$\circ_{u,x,w} \colon ((u,x),(x,w)) \longrightarrow (u,w)$$

y $\mathcal{E}^{\mathrm{B}_S} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\Sigma^{\mathrm{B}_S})$ consta de las ecuaciones siguientes:

B1. Para cada u, cada $w \in S^\star$ y cada $i \in |w|$, la ecuación de tipo $((u,(w_0)), \ldots, (u,(w_{|w|-1}))), (u,(w_i))$

$$\pi^w_i \circ_{u,w,(w_i)} \langle v_0^{u,(w_0)}, \ldots, v_{|w|-1}^{u,(w_{|w|-1})} \rangle_{u,w} = v_i^{u,(w_i)}$$

B2. Para cada u y cada $w \in S^\star$, la ecuación de tipo $((u,w)),(u,w)$

$$v_0^{u,w} \circ_{u,u,w} \langle \pi^u_0, \ldots, \pi^u_{|u|-1} \rangle_{u,u} = v_0^{u,w}$$

B3. Para cada u y cada $w \in S^\star$, la ecuación de tipo $((u,w)),(u,w)$

$$\langle \pi^w_0 \circ_{u,w,w_0} v_0^{u,w}, \ldots, \pi^w_{|w|-1} \circ_{u,w,w_{|w|-1}} v_0^{u,w} \rangle_{u,w} = v_0^{u,w}$$

B4. Para cada $w \in S^\star$, la ecuación de tipo $((w,(w_0))),(w,(w_0))$

$$\langle \pi^w_0 \rangle_{w,(w_0)} = \pi^w_0$$

B5. Para cualesquiera u, x, w, $y \in S^\star$, la ecuación de tipo $((w,y),(x,w),(u,x)),(u,y)$

$$v_0^{w,y} \circ_{u,w,y} (v_1^{x,w} \circ_{u,x,w} v_2^{u,x}) = (v_0^{w,y} \circ_{x,w,y} v_1^{x,w}) \circ_{u,x,y} v_2^{u,x}$$

donde $v_n^{u,w}$ designa la variable n-ésima de tipo (u,w), $P \circ_{u,x,w} Q$ denota $\circ_{u,x,w}(P,Q)$, y $\langle P_0, \ldots, P_{n-1} \rangle_{u,x}$ denota $\langle\,\rangle_{u,x}(P_0, \ldots, P_{n-1})$. Cuando no exista ambigüedad escribiremos $\circ$ en lugar de $\circ_{u,x,w}$ y $\langle \ldots \rangle$ en lugar de $\langle \ldots \rangle_{u,w}$.

[2] el $(S^\star \times S^\star)^\star \times (S^\star \times S^\star)$-conjunto

Las álgebras de Bénabou y los homomorfismos entre ellas forman una categoría denotada como $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$.

2.12.27. Proposición. Las categorías $\mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)$ y $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$ son equivalentes.

Demostración. Definimos un par de funtores cuasi-inversos entre las categorías de álgebras de Hall y Bénabou. Sea $\underline{\mathrm{B}}\colon \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S) \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$ el functor que a cada álgebra de Hall, $\underline{A}$, le asigna el álgebra de Bénabou $\underline{\mathrm{B}}(\underline{A})$ cuyo $S^\star \times S^\star$-conjunto subyacente es $\mathrm{B}(A) = ((A_w)_u)_{(w,u)\in(S^\star)^2}$, donde $A_w = (A_{w,s})_{s\in S}$, y cuya estructura algebraica se define como

$$
\begin{aligned}
(\pi_i^w)^{\mathrm{B}(\underline{A})} &= ((\pi_i^w)^{\underline{A}}) \\
\langle (a_0), \dots, (a_{|w|-1}) \rangle_{u,w}^{\mathrm{B}(\underline{A})} &= (\xi_{u,w,w_0}^{\underline{A}}(\pi_0^w, a_0, \dots, a_{|w|-1}), \dots \\
&\quad\ \xi_{u,w,w_{|w|-1}}^{\underline{A}}(\pi_{|w|-1}^w, a_0, \dots, a_{|w|-1})) \\
\circ_{u,x,w}(a, b) &= (\xi_{u,x,w_0}^{\underline{A}}(b_0, a_0, \dots, a_{|x|-1}), \dots \\
&\quad\ \xi_{u,x,w_{|w|-1}}^{\underline{A}}(b_0, a_0, \dots, a_{|x|-1}))
\end{aligned}
$$

y que a cada morfismo $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ de álgebras de Hall, le asigna el morfismo $\mathrm{B}(f) = ((f_w)_u)_{(w,u)\in(S^\star)^2}$, que asocia a un elemento $(a_0, \dots, a_{|u|-1})$ de $(A_w)_u$ el elemento $(f_{w,u_0}(a_0), \dots, f_{w,u_{|u-1|}}(a_{|u|-1}))$ de $(B_w)_u$.

Recíprocamente, sea $\underline{\mathrm{H}}\colon \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S) \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)$ el functor que a un álgebra de Bénabou, $\underline{A}$, le asigna el álgebra de Hall $\underline{\mathrm{H}}(\underline{A})$, cuyo $S^\star \times S$-conjunto subyacente es $\mathrm{H}(A) = (A_{w,(s)})_{(w,s)\in S^\star\times S}$ y cuya estructura algebraica se define como

$$
\begin{aligned}
(\pi_i^w)^{\mathrm{H}(\underline{A})} &= (\pi_i^w)^{\underline{A}} \\
\xi_{u,w,s}^{\mathrm{H}(\underline{A})}(a_0, a_1, \dots, a_{|w|}) &= a_0 \circ_{u,w,s} \langle a_1, \dots, a_{|w|} \rangle_{u,w}
\end{aligned}
$$

y tal que, para cada morfismo $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ de álgebras de Bénabou, $\mathrm{B}(f)$ es la birrestricción de f a $\mathrm{B}(A)$ y $\mathrm{B}(B)$.

Así definidos, $\underline{\mathrm{B}}$ y $\underline{\mathrm{H}}$ son functores.

Sea $\underline{A}$ un álgebra de Bénabou. Demostramos que $\underline{A}$ y $\underline{\mathrm{BH}}(\underline{A})$ son isomorfas mostrando un par de homomorfismos inversos. Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{\mathrm{BH}}(A)$ la $S^{\star 2}$-aplicación definida, para cada $(u, w) \in S^{\star 2}$, como

$$
a \mapsto ((\pi_0^w)^{\underline{A}} \circ a, \dots, (\pi_{|w|-1}^w)^{\underline{A}} \circ a)
$$

La definición es correcta porque si $a \in A_{u,w}$, $(\pi_i^w)^{\underline{A}} \circ a \in \underline{\mathrm{H}}(\underline{A})_{u,w_i}$ y por tanto, $((\pi_0^w)^{\underline{A}} \circ a, \dots, (\pi_{|w|-1}^w)^{\underline{A}} \circ a) \in \underline{\mathrm{BH}}(\underline{A})_{u,w}$.

Recíprocamente, sea $g\colon \underline{\mathrm{BH}}(\underline{A}) \longrightarrow \underline{A}$ la $S^{\star 2}$-aplicación definida, para cada $(u, w) \in S^{\star 2}$, como

$$
b \mapsto \langle b_0, \dots, b_{|w|-1} \rangle^{\underline{A}}
$$

La definición es correcta porque si $b \in \underline{\mathrm{BH}}(\underline{A})$, entonces $b = (b_0, \dots, b_{|w|-1})$, donde $b_i \in \underline{\mathrm{H}}(\underline{A})_{u,w_i}$, luego $b_i \in \underline{A}_{u,(w_i)}$ y por tanto, $\langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle^{\underline{A}} \in A_{u,w}$.

Las aplicaciones f y g son homomorfismos inversos. Se cumple que $g \circ f = 1$, puesto que para cada $a \in A_{u,w}$, se tiene que $\langle (\pi^w_0)^{\underline{A}} \circ a, \dots, (\pi^w_{|w|-1})^{\underline{A}} \circ a\rangle = a$ por B3. Se cumple que $f \circ g = 1$ porque para cada $b \in \underline{\mathrm{BH}}(\underline{A})$, $f_{u,w} \circ g_{u,w}(b)$ es la aplicación

$$\begin{aligned} b \mapsto & \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle^{\underline{A}}_{u,w} \\ \mapsto & ((\pi^w_0)^{\underline{\mathrm{BH}}(\underline{A})} \circ \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle^{\underline{A}}_{u,w}, \dots, (\pi^w_{|w|-1})^{\underline{\mathrm{BH}}(\underline{A})} \circ \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle^{\underline{A}}_{u,w}) \\ & = ((\pi^w_0)^{\underline{A}} \circ \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle^{\underline{A}}_{u,w}, \dots, (\pi^w_{|w|-1})^{\underline{A}} \circ \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle^{\underline{A}}_{u,w}) \\ & = \langle b_0, \dots, b_{|w|-1}\rangle^{\underline{A}}_{u,w} \end{aligned}$$

donde el último paso se justifica por el axioma B1.

Sea $\underline{B}$ un álgebra de Hall. Entonces $\underline{B}$ y $\underline{\mathrm{HB}}(\underline{B})$ son idénticas, puesto que $a \in A_{w,s}$ si y sólo si $a \in \underline{\mathrm{B}}(\underline{A})_{w,(s)}$ si y sólo si $a \in \underline{\mathrm{HB}}(\underline{A})_{w,s}$. □

Los functores $\mathrm{B}\colon \mathbf{Set}^{S^\star \times S} \longrightarrow \mathbf{Set}^{S^\star \times S^\star}$ y $\mathrm{H} : \mathbf{Set}^{S^\star \times S^\star} \longrightarrow \mathbf{Set}^{S^\star \times S}$ definidos en la proposición anterior tienen adjuntos por la izquierda.

Puesto que de $S^\star \times S$ en $S^\star \times S^\star$ se tiene una inclusión canónica in, definida como $(w, s) \mapsto (w, (s))$, entre las categorías $\mathbf{Set}^{S^\star \times S}$ y $\mathbf{Set}^{S^\star \times S^\star}$ se tiene la adjunción $\coprod_{\mathrm{in}} \dashv \Delta_{\mathrm{in}}$. Por definición, $\Delta_{\mathrm{in}} = \mathrm{H}$, y denotando, en este contexto, a $\coprod_{\mathrm{in}}$ mediante I, se cumple que $I \dashv H$.

Respecto del functor B, se tiene un adjunto por la izquierda, D, definido como

$$\mathrm{D}(\cdot) = (\textstyle\coprod_{w_i = s} \ \cdot \ _{u,w})_{(u,s)\in S^\star \times S}$$

Para cada $S^\star \times S^\star$-conjunto A, $\mathrm{D}(A)$ es, esencialmente, el $S^\star \times S$-conjunto

$$(\{(a, u, w, i) \mid a \in A_{u,w},\ w_i = s\})_{(u,s)\in S^\star \times S}$$

Intuitivamente, D asigna a cada elemento a de tipo (u, w) un conjunto de $|w|$ elementos de tipos (u, w_i).

2.12.28. Proposición. El functor $\mathrm{D}\colon \mathbf{Set}^{S^\star \times S^\star} \longrightarrow \mathbf{Set}^{S^\star \times S}$ es un adjunto por la izquierda del functor $B\colon \mathbf{Set}^{S^\star \times S} \longrightarrow \mathbf{Set}^{S^\star \times S^\star}$.

Demostración. Mostramos, para cada $S^\star \times S^\star$-conjunto A y cada $S^\star \times S$-conjunto B, un isomorfismo natural $\mathbf{Set}^{S^\star \times S}(\mathrm{D}(A), B) \cong \mathbf{Set}^{S^\star \times S^\star}(A, \mathrm{B}(B))$.

Si $f\colon \mathrm{D}(A) \longrightarrow B$, entonces $\theta(f)\colon A \longrightarrow \mathrm{B}(B)$ se define como

$$\theta(f)_{u,w} \begin{cases} A_{u,w} \longrightarrow \mathrm{B}(B)_{u,w} \\ \quad a \quad \longmapsto (f_{u,w_i}(a, u, w, i))_{i\in|w|} \end{cases}$$

Recíprocamente, si $g\colon A \longrightarrow \mathrm{B}(B)$, $\theta^{-1}(g)\colon \mathrm{D}(A) \longrightarrow B$ se define como

$$\theta^{-1}(g)_{u,s} \begin{cases} \quad \mathrm{D}(A) & \longrightarrow B \\ (a,u,w,i) & \longmapsto g_{u,w}(a)_i \end{cases}$$

Las aplicaciones son efectivamente inversas.

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(\theta(f))_{u,s}(a,u,w,i) &= \theta(f)_{u,w}(a)_i \\ &= (f_{u,w_i}(a,u,w,i) \mid i \in |w|)_i \\ &= f_{u,s}(a,u,w,i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(\theta^{-1}(g))_{u,w}(a) &= (\theta^{-1}(g)_{u,w_i}(a,u,w,i))_{i\in|w|} \\ &= (g_{u,w}(a)_i)_{i\in|w|} \\ &= g_{u,w}(a) \end{aligned}$$

□

2.12.29. Proposición. Considérense los diagramas siguientes,

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\mathbf{Set}^{S^\star\times S} \arrow[rr, shift right, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right=2, "I"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S) \arrow[ll, shift right, "\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}"'] \arrow[d, shift right=2, "\underline{\mathrm{B}}"'] \arrow[d, phantom, "\equiv"] \\
\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star} \arrow[u, shift right=2, "H"'] \arrow[rr, shift right, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S) \arrow[ll, shift right, "\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}"'] \arrow[u, shift right=2, "\underline{\mathrm{H}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star} \arrow[rr, shift right, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right=2, "D"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S) \arrow[ll, shift right, "\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}"'] \arrow[d, shift right=2, "\underline{\mathrm{H}}"'] \arrow[d, phantom, "\equiv"] \\
\mathbf{Set}^{S^\star\times S} \arrow[u, shift right=2, "B"'] \arrow[rr, shift right, "\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S) \arrow[ll, shift right, "\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}"'] \arrow[u, shift right=2, "\underline{\mathrm{B}}"']
\end{tikzcd}$$

Se cumple que

(1) $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S} \circ I \cong \underline{\mathrm{B}} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}$
(2) $H \circ \mathrm{G}_{\mathrm{B}_S} = \mathrm{G}_{\mathrm{H}_S} \circ \underline{\mathrm{H}}$
(3) $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S} \circ D \cong \underline{\mathrm{H}} \circ \underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}$
(4) $B \circ \mathrm{G}_{\mathrm{H}_S} = \mathrm{G}_{\mathrm{B}_S} \circ \underline{\mathrm{B}}$

Demostración. (2) y (4) son inmediatos a partir de las definiciones. (1) y (3) se deducen de la unicidad (salvo isomorfismo) de los adjuntos correspondientes. □

De la proposición anterior se sigue que, en la 2-categoría de categorías, adjunciones y pares conjugados (v., e.g., [Mac71]), se tienen los isomorfismos siguientes

$$
\begin{array}{rcl}
(\,\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}\ \circ\underline{\mathrm{B}}\dashv\underline{\mathrm{H}}\,) & \cong & (\,\mathrm{I}\dashv\mathrm{H}\ \circ\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}\,)\\
(\,\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}\ \circ\underline{\mathrm{H}}\dashv\underline{\mathrm{B}}\,) & \cong & (\,\mathrm{D}\dashv\mathrm{B}\ \circ\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}\,)
\end{array}
$$

En secciones posteriores se introduce una cierta 2-categoría de adjunciones, morfismos de adjunciones y deformaciones entre tales morfismos y los resultados anteriores implican que, en tal categoría, las adjunciones $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}$ y $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}\dashv\mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}$ son equivalentes, caracterizando así categorialmente la equivalencia entre ambas construcciones.

El teorema de completud para el cálculo ecuacional heterogéneo puede desarrollarse mediante las álgebras de Bénabou de manera paralela a como se ha realizado con las álgebras de Hall. Las álgebras de Bénabou son adecuadas cuando se consideran signaturas cuyos símbolos de operación tienen coariedades complejas, cuyas categorías de $\underline{\Sigma}$-álgebras asociadas son equivalentes a las categorías de $\underline{\Sigma}$-álgebras consideradas en este capítulo. Las proposiciones anterior puede utilizarse para *traducir* muchos de los conceptos y construcciones entre álgebras de Hall y álgebras de Bénabou. En particular, el álgebra de Bénabou de los $\underline{\Sigma}$-términos finitarios, $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})=B(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}))$, que es isomorfa a $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S}(I(\underline{\Sigma}))$, tiene como $(S^\star)^2$-conjunto subyacente el formado por u-tuplas de $\underline{\Sigma}$-términos sobre $\downarrow w$, i.e., $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})=(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u)_{(w,u)\in(S^\star)^2}$. En ella, las proyecciones π_i^w se interpretan como las variables $v_i^{w_i}$, las operaciones $\langle\rangle_{u,w}$ como el isomorfismo que transforma S-aplicaciones de $\downarrow w$ en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)$ en w-tuplas de $\underline{\Sigma}$-términos sobre $\downarrow u$ y los operadores $\circ_{u,w,x}$ como la substitución para tuplas de términos, que a tuplas $P\in\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_x$ y $Q\in\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_w$ les asigna la tupla asociada a la S-aplicación $Q^\sharp\circ P\in\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)_x$,

$$
\begin{tikzcd}
\downarrow x \arrow[dr, "P"] & \\
\downarrow w \arrow[r, "\eta^w"] \arrow[dr, "Q"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w) \arrow[d, "Q^\sharp"] \\
& \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow u)
\end{tikzcd}
$$

Para el estudio de la relación entre las ecuaciones y las congruencias en el álgebra de Bénabou de los términos finitarios para una signatura $\underline{\Sigma}$, es natural considerar a las ecuaciones como pares de tuplas de términos, pues esta es la forma de los elementos en las congruencias sobre $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})$. Sin embargo, ambas nociones de ecuación tienen el mismo poder expresivo y son, por tanto, equivalentes, como se puede comprobar atendiendo a las reglas que definen el operador de congruencia generada en $\underline{\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}}(\Sigma)}$.

2.12.30. Proposición. Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica y $\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma}) = \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})^2$. Entonces, para cada $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})$, $\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}}(\Sigma)}}(\mathcal{E})$ es el menor sub-$(S^\star)^2$-conjunto $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})$ que contiene a $\mathcal{E}$ y satisface las condiciones siguientes, para cada $u, w, x \in S^\star$:

1. *Reflexividad.* Para cada $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u$, $(P, P) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u}$.
2. *Simetría.* Para cada P, $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u$, si $(P, Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u}$, $(Q, P) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u}$.
3. *Transitividad.* Para cada P, Q, $R \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u$, si (P, Q), $(Q, R) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u}$, entonces $(P, R) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,s}$.
4. *Compatibilidad con los productos.* Para cada P, $Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u$, si, para cada $i \in |u|$, $(P_i, Q_i) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u_i}$, $(\langle P_0, \ldots, P_{|w|-1}\rangle, \langle Q_0, \ldots, Q_{|w|-1}\rangle) \in \overline{\mathcal{E}}_{u,w}$
5. *Substitución.* Para cada $P, Q \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_u$ y cada P', $Q' \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow x)_w$, si $(P, Q) \in \overline{\mathcal{E}}_{w,u}$ y $(P', Q') \in \overline{\mathcal{E}}_{x,w}$, entonces $(P \circ P', Q \circ Q') \in \overline{\mathcal{E}}_{x,u}$.

□

2.12.31. Proposición. Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Considérense las aplicaciones $H, D\colon \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}))$ definidas como:

$$H(\mathcal{E}) = (\{(P, Q) \in \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})(\downarrow w)_s \mid (P, Q) \in \mathcal{E}_{w,(s)}\})_{(w,s) \in S^\star \times S}$$

$$D(\mathcal{E}) = \left(\left\{(P, Q) \in \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})(\downarrow w)_s \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists (P', Q') \in \mathcal{E}_{w,u},\, \exists i \in u^{-1}[s], \\ (P, Q) = (P'_i Q'_i) \end{array}\right\}\right)_{(w,s) \in S^\star \times S}$$

junto con las aplicaciones $I, B\colon \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma}))$ definidas como

$$I(\mathcal{E}') = (\{(P, Q) \in \mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})(\downarrow w)_u \mid \exists s \in S,\, u = (s) \text{ y } (P, Q) \in \mathcal{E}'_{w,s}\})_{(w,u) \in S^\star \times S^\star}$$

$$B(\mathcal{E}') = (\{(P, Q) \in \mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})(\downarrow w)_u \mid \forall i \in |u|,\, (P_i, Q_i) \in \mathcal{E}'_{w,u_i}\})_{(w,u) \in S^\star \times S^\star}$$

Los operadores H, D, I, B preservan el orden. Para cada $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})$ y cada $\mathcal{E}' \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})$, se cumple que:

$$D(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}' \text{ si y sólo si } \mathcal{E} \subseteq B(\mathcal{E}')$$
$$I(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{E} \text{ si y sólo si } \mathcal{E}' \subseteq H(\mathcal{E})$$

Además, $H \circ I = D \circ I = H \circ B = D \circ B = 1_{\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\mathbf{T}))}$.

Demostración. La preservación del orden es inmediata a partir de las definiciones.

$D(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}' \implies \mathcal{E} \subseteq B(\mathcal{E}')$. Supongamos que $(P, Q) \in \mathcal{E}_{u,w}$. Entonces, para cada $i \in |w|$, $(P_i, Q_i) \in D(\mathcal{E})_{u,w_i} \subseteq \mathcal{E}'_{u,w_i}$ y $(P, Q) \in B(\mathcal{E}')_{u,w}$.

$\mathcal{E} \subseteq B(\mathcal{E}') \implies D(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}'$. Supongamos que $(P, Q) \in D(\mathcal{E})_{u,s}$. Entonces existe un S-conjunto w, un $i \in |w|$ y un par $(P', Q') \in \mathcal{E}_{u,w}$ tal que $P'_i = P$ y $Q'_i = Q$. Por tanto, $(P', Q') \in B(\mathcal{E}')_{u,w}$ y $(P, Q) \in \mathcal{E}'_{u,w_i}$.

$I(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{E} \implies \mathcal{E}' \subseteq H(\mathcal{E})$. Si $(P, Q) \in \mathcal{E}'_{u,s}$, entonces $(P, Q) \in I(\mathcal{E}')_{u,(s)}$, pero $I(\mathcal{E}')_{u,(s)} \subseteq \mathcal{E}_{u,(s)}$, y por consiguiente, $(P, Q) \in H(\mathcal{E})_{u,s}$.

$\mathcal{E}' \subseteq H(\mathcal{E}) \implies I(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{E}$. Si $(P, Q) \in I(\mathcal{E}')_{u,w}$, entonces $w = (s)$, para algún $s \in S$. Pero entonces $(P, Q) \in \mathcal{E}'_{u,s} \subseteq H(\mathcal{E})_{u,s}$ y $(P, Q) \in \mathcal{E}_{u,(s)}$. □

2.12.32. Proposición. Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Se cumple que,

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}"] \arrow[d, "I"'] \arrow[dr, phantom, "\rotatebox{-135}{$\subseteq$}"] & \cdot \arrow[d, "I"] \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}"] \arrow[d, "I"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}"'] & \cdot \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \arrow[d, "D"] \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}"'] & \cdot \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}"] \arrow[dr, phantom, "\rotatebox{-90}{$\subseteq$}"] & \cdot \arrow[d, "I"] \\
\cdot \arrow[u, "H"] \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}"] \arrow[dr, phantom, "\rotatebox{-45}{$\subseteq$}"] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "H"] \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}"'] & \cdot \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}"] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \arrow[d, "D"] \\
\cdot \arrow[u, "B"] \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}"] \arrow[dr, phantom, "="] & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "B"] \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}"'] & \cdot \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}
$$

2.12.33. Proposición. Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Entonces los retículos $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}))$ y $\underline{\mathrm{Cgr}}(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma}))$ son isomorfos.

Demostración. Es suficiente considerar la birrestricción de los operadores B y H a $\mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}))$ y $\mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma}))$.

Si $\mathcal{E} \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}))$ entonces

$$\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}(B(\mathcal{E})) = B(\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}(\mathcal{E})) \subseteq B(\mathcal{E})$$

y $B(\mathcal{E}) \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma}))$.

Recíprocamente, si $\mathcal{E} \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma}))$, entonces

$$\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}(H(\mathcal{E})) \subseteq H(\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}(\mathcal{E})) \subseteq H(\mathcal{E})$$

y $H(\mathcal{E}) \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}))$. Puesto que $H \circ B = \mathrm{Id}$, solo resta comprobar que para cada $\mathcal{E} \in \mathrm{Cgr}(\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma}))$, $B(H(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$. Si $(P, Q) \in B(H(\mathcal{E}))_{u,w}$, entonces, para cada $i \in |w|$, $(P_i, Q_i) \in H(\mathcal{E})_{u,w_i}$, luego $(P_i, Q_i) \in \mathcal{E}_{u,(w_i)}$ y $(P, Q) \in \mathcal{E}_{u,w}$. Si $(P, Q) \in \mathcal{E}_{u,w}$, entonces, para cada $i \in |w|$, $(P_i, Q_i) \in \mathcal{E}_{u,(w_i)}$, luego se tiene que $(P_i, Q_i) \in H(\mathcal{E})_{u,w_i}$ y $(P, Q) \in B(H(\mathcal{E}))_{u,w}$. □

Por la proposición anterior, cualquiera de las álgebras de términos consideradas es adecuada para la obtención de un cálculo de ecuaciones finitarias heterogéneas. Al igual que para las álgebras de Hall, existen álgebras de Bénabou para conjuntos de tipos de operación distintos de $(S^\star)^2$, y que permiten la obtención de un cálculo de ecuaciones infinitarias heterogéneas. En general, éstas álgebras son también infinitarias, con operaciones cuyas ariedades están en función de los cardinales de los tipos de operación.

Finalmente, mostramos como cada álgebra de Bénabou $\underline{A}$ puede ser considerada como una categoría $\mathbf{A}$, cuyos objetos son palabras sobre S y cuyos morfismos vienen dados por los objetos de $\underline{A}$.

2.12.34. Proposición. Sea $\underline{A}$ un álgebra de Bénabou para S. Entonces $\mathbf{A}$ es una categoría definida como

1. $\mathrm{Ob}(\mathbf{A}) = S^\star$ y $\mathbf{A}(u, w) = A_{u,w}$.
2. Para cada $x \in S^\star$, $\mathrm{id}_x = \langle (\pi_i^x)^{\underline{A}} \mid i \in |x| \rangle_{x,x}$.
3. Para cada $P\colon u \longrightarrow x$, $Q\colon x \longrightarrow w$, $Q \circ P = \circ^{\underline{A}}_{u,x,w}(P, Q)$.

Además, para cada $w \in S^\star$, $(w, ((\pi_i^w)^{\underline{A}})_{i\in|w|})$ es un producto en $\mathbf{A}$ de la familia $(w_i)_{i\in|w|}$.

Demostración. Veamos que las identidades efectivamente lo son. Sea $x \in \mathbf{A}$, $P\colon u \longrightarrow x$ y $Q\colon x \longrightarrow w$. Entonces $\langle (\pi_i^x)^{\underline{A}} \mid i \in |x| \rangle$ es la identidad en x:

$$
\begin{aligned}
P &= \langle (\pi_i^x)^{\underline{A}} \circ P \mid i \in |x| \rangle && \text{(por B3)} \\
&= \langle (\pi_i^x)^{\underline{A}} \circ (\langle (\pi_i^x)^{\underline{A}} \mid i \in |x| \rangle \circ P) \mid i \in |x| \rangle && \text{(por B2 y B5)} \\
&= \langle (\pi_i^x)^{\underline{A}} \mid i \in |x| \rangle \circ P && \text{(por B3)}
\end{aligned}
$$

$$
Q = Q \circ \langle (\pi_i^x)^{\underline{A}} \rangle \qquad \text{(por B2)}
$$

La composición es asociativa por B5. Si $(P_i\colon x \longrightarrow (w_i))_{i\in|w|}$ es una familia de morfismos, se cumple que

$$
(\pi_i^w)^{\underline{A}} \circ \langle P_i \rangle_{i\in|w|} = P_i \quad \text{(por B1)}
$$

Además si $Q\colon x \longrightarrow w$ es tal que $(\pi_i^w)^{\underline{A}} \circ Q = P_i$, entonces

$$
\begin{aligned}
Q &= \langle (\pi_i^w)^{\underline{A}} \circ Q \rangle_{i\in|w|} \quad \text{(por B3)} \\
&= \langle P_i \rangle_{i\in|w|}
\end{aligned}
$$

por lo que, para cada $w \in S^\star$, $(w, ((\pi_i^w)^{\underline{A}})_{i\in|w|})$ es un producto en $\mathbf{A}$. $\square$

3 Álgebras Heterogéneas.

En este capítulo estudiamos las categorías de álgebras heterogéneas cuando se considera la variación de las signaturas subyacentes. Para ello, introducimos una categoría de signaturas algebraicas cuyos morfismos permiten comparar signaturas sobre distintos conjuntos de tipos, y que determinan, a su vez, functores entre las categorías de álgebras asociadas.

Los morfismos de signaturas inducen asimismo traducciones entre los términos asociados a cada signatura. Al sistema de los términos relativos a una signatura algebraica se le puede dotar de un estructura de categoría y la traducción de términos asociada a un morfismo de signatura es entonces un functor entre las correspondientes categorías de términos. Todo ello nos permite, en particular, traducir ecuaciones sobre una signatura en ecuaciones sobre otra signatura y obtener una categoría de teorías heterogéneas.

En la sección sobre signaturas derivadas se consideran algunas generalizaciones de los morfismos entre signaturas. Los *derivors* asignan a cada símbolo de operación de la signatura dominio un símbolo de operación derivado de la signatura codominio. Los *morfismos de Fujiwara* generalizan a los derivors considerando aplicaciones entre los conjuntos de tipos subyacentes a las signaturas que asignan a tipos básicos de la signatura dominio, tipos derivados de la signatura codominio.

Los morfismos de Fujiwara pueden ser, a su vez, comparados mediante una cierta noción de *deformación* entre ellos, que nos permite obtener una estructura de 2-categoría sobre la categoría de signaturas y F-morfismos y, por tanto, también sobre las categorías de signaturas y derivors o morfismos de signaturas. Finalmente, mostramos que la relación entre signaturas, términos y álgebras heterogéneas es invariante respecto de F-morfismos y deformaciones, y que constituye un caso particular del concepto de *2-institución*.

3.1 Signaturas.

La formación de la categoría de signaturas es, de hecho, un proceso functorial, i.e., de la categoría de conjuntos **Set** en la categoría **Cat** de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$-categorías se tiene un functor contravariante, que a un conjunto S le asocia la categoría de S-signaturas, y a un morfismo $\varphi\colon S \longrightarrow T$ entre conjuntos de tipos, un functor en sentido inverso, de reetiquetamiento, desde la categoría de T-signaturas hasta la de S-signaturas.

La construcción de Grothendieck aplicada a este functor nos permite obtener una categoría de signaturas algebraicas. En secciones posteriores introduciremos categorías de signaturas más complejas que la descrita, de las que esta última será, en general, una subcategoría no plena.

3.1.1. Definición. Dado un conjunto de tipos S, denotamos por $\mathbf{Sig}(S)$ la categoría de S-signaturas $\mathbf{Set}^{S^\star \times S}$. Entonces $\mathrm{Sig}\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ es el functor contravariante definido como:

$$
\mathbf{Set} \xrightarrow{\ \mathrm{Sig}\ } \mathbf{Cat}
$$

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "\varphi"'] & \longmapsto & \mathbf{Sig}(S) \\
T & & \mathbf{Sig}(T) \arrow[u, "\mathrm{Sig}(\varphi)"']
\end{tikzcd}
$$

y obtenido componiendo el endofunctor $(\cdot^\star \times \cdot)$ de $\mathbf{Set}$, que a $\varphi : S \longrightarrow T$ le asigna $\varphi^\star \times \varphi : S^\star \times S \longrightarrow T^\star \times T$, donde $\varphi^\star$ denota la extensión de φ a los monoides libres correspondientes, i.e., como:

$$
\varphi^\star \begin{cases} S^\star \longrightarrow T^\star \\ w \longmapsto (\varphi(w_i))_{i\in|w|} \end{cases}
$$

con el functor contravariante Set de $\mathbf{Set}$ en $\mathbf{Cat}$.

Para cada aplicación $\varphi : S \longrightarrow T$ en $\mathbf{Set}$, $\mathrm{Sig}(\varphi)$ es un reetiquetamiento de T-signaturas en S-signaturas. En efecto, si $d : \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ es un homomorfismo de T-signaturas, entonces

$$
\mathrm{Sig}(\varphi)(d) = d_{\varphi^\star\times\varphi} : \Lambda_{\varphi^\star\times\varphi} \longrightarrow \Lambda'_{\varphi^\star\times\varphi}
$$

Puesto que una T-signatura es, esencialmente, un functor de $T^\star \times T$ en $\mathbf{Set}$, podemos describir el functor $\mathrm{Sig}(\varphi)$ como el de composición con el functor asociado a $\varphi^\star \times \varphi$ entre las categorías discretas correspondientes.

En particular, si $S \subseteq T$ y Λ es una T-signatura, $\mathrm{Sig}(\mathrm{in}_{S,T})(\Lambda) = \Lambda_{\mathrm{in}^\star\times\mathrm{in}}$ se denota también como $\Lambda\restriction_S$.

3.1.2. Definición. Denotamos por $\mathbf{Sig}$ la categoría $\int^{\mathbf{Set}} \mathrm{Sig}$, obtenida mediante la construcción de Grothendieck para functores contravariantes aplicada al functor Sig.

La categoría $\mathbf{Sig}$ tiene como objetos las signaturas algebraicas heterogéneas, i.e., los pares (S, Σ) con S un conjunto y Σ una S-signatura algebraica, y como morfismos de (S,Σ) en (T,Λ) los pares (φ, d), con $\varphi : S \longrightarrow T$ un morfismo en $\mathbf{Set}$ y $d : \Sigma \longrightarrow \Lambda_{\varphi^\star\times\varphi}$ un morfismo en $\mathbf{Sig}(S)$. La composición de

$(\varphi, d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$ y $(\psi, e)\colon (T,\Lambda) \longrightarrow (U,\Omega)$, denotada como $(\psi, e)\circ(\varphi, d)$, es el morfismo $(\psi\circ\varphi, e_{\varphi^\star\times\varphi}\circ d)$,

$$\begin{tikzcd}
(S,\Sigma) \arrow[d, "{(\varphi,d)}"'] \arrow[dr, "{(\psi\circ\varphi, e_{\varphi^\star\times\varphi}\circ d)}"] & \\
(T,\Lambda) \arrow[r, "{(\psi,e)}"'] & (U,\Omega)
\end{tikzcd}$$

siendo $e_{\varphi^\star\times\varphi} : \Lambda_{\varphi^\star\times\varphi} \longrightarrow (\Omega_{\psi^\star\times\psi})_{\varphi^\star\times\varphi} = \Omega_{(\psi\circ\varphi)^\star\times\psi\circ\varphi}$.

Sea $\mathrm{Sig}^{\amalg}$ el functor $\mathrm{Set}^{\amalg}\circ(\cdot^\star\times\cdot)$ y Sig^{Π} el functor $\mathrm{Set}^{\Pi}\circ(\cdot^\star\times\cdot)$. Mediante la construcción de Grothendieck aplicada a los functores $\mathrm{Sig}^{\amalg}$ y Sig^{Π} se obtienen otras categorías de signaturas heterogéneas, del mismo modo que en el caso de los conjuntos heterogéneos. En particular, se cumple que la categoría **Sig** es un bifibración escindida, en virtud del isomorfismo entre las categorías $\int^{\mathbf{Set}}\mathrm{Sig}$ y $\int_{\mathbf{Set}}\mathrm{Sig}^{\amalg}$.

3.1.3. Proposición. La categoría **Sig** es completa y cocompleta.

Demostración. La demostración es análoga a la de la completud y cocompletud de **HSet**. Concretamente, los productos y coproductos son como sigue:

Productos. El producto de una familia $(S^i,\Sigma^i)_{i\in I}$ de signaturas es la signatura (S,Σ) en donde $S=\prod_{i\in I}S^i$ y para cada $(w,x)\in S^\star\times S$,

$$\Sigma_{w,x} = \prod\nolimits_{i\in I}\Sigma^i_{(\mathrm{pr}_i)^\star(w),\mathrm{pr}_i(x)}$$

En particular, el producto de (S,Σ) y (T,Λ) es la signatura $(S\times T, \Sigma\times^{\mathrm{h}}\Lambda)$ en la que, para cada $(w,x)=((u_\alpha,v_\alpha)_{\alpha\in|w|},(s,t))\in(S\times T)^\star\times(S\times T)$, tenemos que $(\Sigma\times^{\mathrm{h}}\Lambda)_{w,x}=\Sigma_{u,s}\times\Lambda_{v,t}$.

Coproductos. El coproducto de una familia $(S^i,\Sigma^i)_{i\in I}$ de signaturas es la signatura (S,Σ) en donde $S=\coprod_{i\in I}S^i$ y para cada $(w,x)\in S^\star\times S$, se tiene que

$$\Sigma_{w,x} = \begin{cases} \Sigma_{u,s}, & \text{si } \exists i\in I,\ \exists (u,s)\in S^{i\star}\times S^i,\ (w,x)=(\mathrm{in}_i^\star(u),\mathrm{in}_i(s)); \\ \emptyset, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

siendo $\mathrm{in}_i : S^i \longrightarrow S$ la inclusión canónica. □

3.1.4. Proposición. Sea $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma)\longrightarrow(T,\Lambda)$ un morfismo en **Sig**. Entonces (φ,d) es mónica si y sólo si es dimónica, i.e., φ es mónica en **Set** y d es mónica en $\mathbf{Set}^{S^\star\times S}$.

La proposición anterior justifica la siguiente definición de subsignatura.

3.1.5. Definición. Sean (S,Σ) y (T,B) dos signaturas. Entonces (S,Σ) es una **subsignatura** de (T,B), $(S,\Sigma)\leq(T,\Lambda)$, si $S\subseteq T$ y para cada $(w,s)\in S^\star\times S$, se cumple que $\Sigma_{w,s}\subseteq\Lambda_{w,s}$.

3.1.6. Proposición. Sea $(\varphi,d)\,:\,(S,\Sigma)\longrightarrow(T,\Lambda)$ un morfismo de signaturas. Entonces (φ,d) es un epimorfismo exactamente si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. La aplicación φ es sobreyectiva.
2. Para cada $(u,t)\in T^\star\times T$ y cada $\tau\in\Lambda_{u,t}$, existe un $(w,s)\in S^\star\times S$ y un $\sigma\in\Sigma_{w,s}$ tal que $\varphi^\star(w)=u$, $\varphi(s)=t$ y $d_{w,s}(\sigma)=\tau$.

□

3.2 Álgebras.

Del mismo modo que en la sección anterior se definió la categoría **Sig** de signaturas algebraicas, introducimos en lo que sigue una categoría **Alg** de álgebras heterogéneas, en la que tanto los tipos como las signaturas subyacentes de las mismas pueden variar.

3.2.1. Proposición. De **Sig** en **Cat** existe un functor contravariante Alg, definido como:

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Sig} & \xrightarrow{\mathrm{Alg}} & \mathbf{Cat}\\ \underline{\Sigma} & & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})\\ {\scriptstyle \underline{d}}\downarrow & \longmapsto & \uparrow{\scriptstyle \underline{d}^*}\\ \underline{\Lambda} & & \mathbf{Alg}(\underline{\Lambda})\end{array}$$

en donde si $\underline{d}=(\varphi,d)\colon\underline{\Sigma}\longrightarrow\underline{\Lambda}$, entonces $\underline{d}^*$ es el functor definido como

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) & \xrightarrow{\underline{d}^*} & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})\\ (B,G) & & (B_\varphi,G^{(\varphi,d)})\\ {\scriptstyle f}\downarrow & \longmapsto & \downarrow{\scriptstyle f_\varphi}\\ (B',G') & & (B'_\varphi,G'^{(\varphi,d)})\end{array}$$

siendo, para cada $\underline{\Sigma}$-estructura algebraica G, $G^{(\varphi,d)}=G_{\varphi^\star\times\varphi}\circ d$.

Demostración. Para cada (T,Λ)-álgebra (B,G), se cumple que

$$\Lambda \xrightarrow{\ G\ } \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_T}(B) = (\mathbf{Set}(B_u, B_t))_{(u,t)\in T^\star\times T}\ ,$$

luego

$$\Sigma \xrightarrow{\ d\ } \Lambda_{\varphi^\star\times\varphi} \xrightarrow{G_{\varphi^\star\times\varphi}} \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_T}(B)_{\varphi^\star\times\varphi} = \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_T}(B_\varphi)$$

y, por tanto, $G_{\varphi^\star\times\varphi}\circ d$ es una $\underline{\Sigma}$-estructura algebraica sobre B_φ.

Además, para cada $\sigma : w \longrightarrow s$ en Σ, se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(B_\varphi)_w \arrow[r, "G_\sigma^{(\varphi,d)}"] \arrow[d, "(f_\varphi)_w"'] & (B_\varphi)_s \arrow[d, "(f_\varphi)_s"] \\
(B'_\varphi)_w \arrow[r, "G'^{(\varphi,d)}_\sigma"'] & (B'_\varphi)_s
\end{tikzcd}$$

conmuta, porque f es un $\underline{\Lambda}$-homomorfismo y $d(\sigma)$ un símbolo de operación, y por consiguiente f_φ es un $\underline{\Sigma}$-homomorfismo.

Puesto que, además, la composición y las identidades se preservan, obviamente, podemos afirmar que $\underline{d}^*$ es un functor. $\square$

A partir de la definición anterior es inmediato que para cada morfismo de signaturas $(\varphi,d) : (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Alg}(S,\Sigma) \arrow[r, "\mathrm{G}_{(S,\Sigma)}"] & \mathbf{Set}^S \\
\mathbf{Alg}(T,\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{G}_{(T,\Lambda)}"'] \arrow[u, "(\varphi,d)^*"] & \mathbf{Set}^T \arrow[u, "\Delta_\varphi"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

3.2.2. Definición. Denotamos por **Alg** la categoría $\int^{\mathbf{Sig}}\mathrm{Alg}$, obtenida mediante la construcción de Grothendieck para functores contravariantes aplicada al functor Alg. Los objetos de **Alg** se denominan **álgebras heterogéneas** o, simplemente, **álgebras** y sus morfismos **homomorfismos heterogéneos** u **homomorfismos**.

La categoría **Alg** tiene como objetos los pares $(\underline{\Sigma}, \underline{A})$, con $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica y $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra, y como morfismos de $(\underline{\Sigma}, \underline{A})$ en $(\underline{\Lambda}, \underline{B})$, los pares $(\underline{d}, f)$, con $\underline{d}$ un morfismo de signaturas de $\underline{\Sigma}$ en $\underline{\Lambda}$ y f un $\underline{\Sigma}$-homomorfismo de $\underline{A}$ en $\underline{d}^*(\underline{B})$.

En general, a un álgebra heterogénea $((S,\Sigma),(A,F))$ se la denota también como (S,Σ,A,F) y a un homomorfismo heterogéneo $((\varphi,d),f)$ como (φ,d,f).

La categoría **Alg** es una categoría concreta unívocamente transportable. Sea $\mathrm{G}_{\mathbf{Alg},\mathbf{HSet}}$ el functor de olvido de **Alg** en **HSet** (que no es una fibración) y **HSSet** el producto fibrado de $\mathrm{G}_{\mathbf{HSet},\mathbf{Set}}$ y $\mathrm{G}_{\mathbf{Sig},\mathbf{Set}}$, cuyos objetos son, esencialmente, triplos (S,Σ,A), con (S,Σ) una signatura y A un S-conjunto, y cuyos morfismos de (S,Σ,A) en (T,Λ,B) son triplos (φ,d,f), con $(\varphi,d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$ un morfismo de signaturas y $(\varphi,f)\colon (S,A) \longrightarrow (T,B)$ una aplicación heterogénea. Los functores p_0 y p_1 son fibraciones y el único functor G de **Alg** en **HSSet**, que existe en virtud de la propiedad universal de **HSSet**, constituye una categoría concreta unívocamente transportable.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Alg} \arrow[dr, "\mathrm{G}"] \arrow[drr, "\mathrm{G}_{\mathbf{Alg},\mathbf{Sig}}"] \arrow[ddr, "\mathrm{G}_{\mathbf{Alg},\mathbf{HSet}}"'] & & \\
& \mathbf{HSSet} \arrow[r, "\mathrm{p}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{p}_0"] & \mathbf{Sig} \arrow[d, "\mathrm{G}_{\mathbf{Sig},\mathbf{Set}}"] \\
& \mathbf{HSet} \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbf{HSet},\mathbf{Set}}"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

El functor G, como demostramos a continuación, tiene un adjunto por la izquierda, definido a través de las algebras libres que existen para cada signatura.

3.2.3. Proposición. De **HSSet** en **Alg** existe un functor Fr definido como:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{HSSet} & \xrightarrow{\quad\mathrm{Fr}\quad} & \mathbf{Alg} \\
(S,\Sigma,A) & & (S,\Sigma,\mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(A)) \\
{\scriptstyle (\varphi,d,f)}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle (\varphi,d,\mathrm{Fr}_{(\varphi,d)}(f))} \\
(T,\Lambda,B) & & (T,\Lambda,\mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(B))
\end{array}$$

siendo $\mathrm{Fr}_{(\varphi,d)}(f) = (\eta^B_\varphi \circ f)^\sharp$, la extensión de $\eta^B_\varphi \circ f$ a la (S,Σ)-álgebra libre sobre

A.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta^A"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(A) \arrow[d, "(\eta^B_\varphi \circ f)^\sharp"] \\ B_\varphi \arrow[r, "\eta^B_\varphi"'] & \mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(B)_\varphi = (\varphi, d)^*(\mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(B)) \end{tikzcd}$$

3.2.4. Proposición. El functor Fr es un adjunto por la izquierda de G.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg} \arrow[r, shift left, "\mathrm{G}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{HHSet} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Fr}"] \end{tikzcd}$$

□

S-Álgebras.

El functor de olvido de **Alg** en **Set** es una fibración, obtenida componiendo las fibraciones $\mathrm{G}_{\mathbf{Alg},\mathbf{Sig}}$ y $\mathrm{G}_{\mathbf{Sig},\mathbf{Set}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg} \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbf{Alg},\mathbf{Sig}}"] \arrow[dr, "\mathrm{G}_{\mathbf{Alg},\mathbf{Set}}"'] & \mathbf{Sig} \arrow[d, "\mathrm{G}_{\mathbf{Sig},\mathbf{Set}}"] \\ & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

A la fibra de un conjunto de tipos S respecto del functor $\mathrm{G}_{\mathbf{Alg},\mathbf{Set}}$, denotada como $\mathbf{Alg}(S)$, se la denomina la **categoría de S-álgebras**. La categoría $\mathbf{Alg}(S)$ es, esencialmente, la que tiene como objetos los pares $(\Sigma, \underline{A})$, con Σ una S-signatura algebraica y $\underline{A}$ una (S,Σ)-álgebra, y como morfismos de $(\Sigma, \underline{A})$ en $(\Lambda, \underline{B})$, los pares (d, f), con d un morfismo de S-signaturas de Σ en Λ y f un (S,Σ)-homomorfismo de $\underline{A}$ en $d^*(\underline{B})$. La categoría de S-álgebras puede obtenerse directamente mediante la construcción de Grothendieck para functores contravariantes aplicada al functor $\mathrm{Alg}^S : \mathbf{Sig}(S) \longrightarrow \mathbf{Cat}$ que a cada $d : \Sigma \longrightarrow \Lambda$ le asigna el functor $d^* = (\mathrm{id}_S, d)^*$.

De la categoría $\mathbf{Alg}(S)$ se tienen dos functores de olvido en $\mathbf{Sig}(S)$ y en $\mathbf{Set}^S$, por lo que $\mathbf{Alg}(S)$ es una categoría concreta unívocamente transportable sobre la categoría $\mathbf{Sig}(S) \times \mathbf{Set}^S$ **de S-conjuntos con S-signaturas**, denotada también como $\mathbf{SSet}(S)$, mediante el único functor G_S que existe por la propiedad universal del producto. El functor G_S tiene un adjunto por la izquierda, Fr_S, definido asimismo a través de las algebras libres que existen para cada S-signatura.

La categoría de álgebras **Alg** puede también obtenerse mediante la construcción de Grothendieck contravariante aplicada al functor $\mathrm{Alg}: \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ que a cada conjunto S le asocia la categoría de S-álgebras $\mathbf{Alg}(S)$ y a cada aplicación $\varphi : S \longrightarrow T$, el functor $\mathrm{Alg}(\varphi)\colon \mathbf{Alg}(T) \longrightarrow \mathbf{Alg}(S)$ definido de la manera obvia. De la misma manera, tenemos que la categoría **HSSet** es $\int^{\mathbf{Set}} \mathrm{SSet}$, con $\mathrm{SSet}\colon \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ el functor contravariante que asocia a cada conjunto S la categoría $\mathbf{Sig}(\mathrm{S})$, y a cada aplicación $\varphi : S \longrightarrow T$, el functor $\mathrm{SSet}(\varphi) : \mathbf{SSet}(T) \longrightarrow \mathbf{SSet}(S)$. Tenemos entonces que el functor de olvido $\mathrm{G}_{\mathbf{HSSet},\mathbf{Set}}$ es una fibración sobre **Set** y $\mathrm{G} : \mathbf{Alg} \longrightarrow \mathbf{Set}$ una fibración de fibraciones, obtenida mediante composición de G con $\mathrm{G}_{\mathbf{HSSet},\mathbf{Set}}$.

Límites y colímites en la categoría Alg.

Estudiamos a continuación la formación de límites y colímites en la categoría **Alg**.

3.2.5. Proposición. La categoría **Alg** es completa.

Demostración. Sean $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ y $\underline{\Lambda} = (T, \Lambda)$ dos signaturas y $\underline{d} = (\varphi, d)\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ un morfismo de signaturas. Puesto que los functores de olvido $\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}$ y $\mathrm{G}_{\underline{\Lambda}}$ crean límites y el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \arrow[r, "\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}"] & \mathbf{Set}^S \\ \mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \arrow[u, "\underline{d}^*"] \arrow[r, "\mathrm{G}_{\underline{\Lambda}}"'] & \mathbf{Set}^T \arrow[u, "\Delta_\varphi"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, el functor $\underline{d}^*$ preserva límites. En efecto, si $D\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{Alg}(\underline{\Lambda})$ es un diagrama de $\underline{\Lambda}$-álgebras y $(\underline{B}, \alpha)$ un límite proyectivo de D entonces $\Delta_\varphi \circ \mathrm{G}_{\underline{\Lambda}}(\underline{B}, \alpha)$ es un límite proyectivo de $G_{\underline{\Sigma}} \circ \underline{d}^*(D)$. Puesto que $\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}$ crea límites, $\underline{d}^*(\underline{B}, \alpha)$ es un límite en $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ de $\underline{d}^*(D)$. Por la proposición 1.3.12, la categoría **Alg** es completa, puesto que **Sig** es completa, $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ es completa, para cada signatura $\underline{\Sigma}$, y $\underline{d}^*$ es continua, para cada morfismo de signaturas $\underline{d}$. □

La categoría **Alg** es también cocompleta. Para demostrarlo necesitamos definir, en primer lugar, para cada morfismo de signaturas $\underline{d} : \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$, un functor $\underline{d}_*$ adjunto por la izquierda del functor $\underline{d}^*$.

3.2.6. Definición. Sea $\underline{d} = (\varphi, d)\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ un morfismo de signaturas, siendo $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ y $\underline{\Lambda} = (T, \Lambda)$, y $\underline{A} = (A, F)$ una $\underline{\Sigma}$álgebra. Entonces $\underline{d}_*(\underline{A})$ es la $\underline{\Lambda}$-álgebra definida como $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi A)/\overline{R}^{\underline{A}}$, en la que $\overline{R}^{\underline{A}}$ es la congruencia generada sobre $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_{\varphi} A)$ por el T-conjunto $R^{\underline{A}}$, cuya coordenada t-ésima es:

$$\left\{ \left((F^{\underline{A}}_{\sigma}(a_i \mid i \in |w|), s), d(\sigma)((a_i, w_i) \mid i \in |w|)\right) \,\middle|\, \begin{array}{c} s \in \varphi^{-1}[t],\ w \in S^{\star}, \\ \sigma \in \Sigma_{w,s},\ a \in A_w \end{array} \right\}$$

3.2.7. Proposición. Sea $\underline{d} : \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ un morfismo de signaturas. De $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ en $\mathbf{Alg}(\underline{\Lambda})$ existe un functor $\underline{d}_*$ definido como:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \arrow[rr, "\underline{d}_*"] & & \mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \\
(A, F) \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_{\varphi} A)/\overline{R}^{\underline{A}} \arrow[d, "\underline{d}_*(f)"] \\
(A', F') & & \underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_{\varphi} A')/\overline{R}^{\underline{A}'}
\end{tikzcd}$$

siendo $\underline{d}_*(f)$ el único $\underline{\Lambda}$-homomorfismo de $\underline{d}_*(\underline{A})$ en $\underline{d}_*(\underline{B})$ para el que se cumple que $\underline{d}_*(f) \circ \mathrm{pr}^{\overline{R}^{\underline{A}}} = \mathrm{pr}^{\overline{R}^{\underline{B}}} \circ \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_{\varphi} f)$.

Demostración. La T-aplicación $\underline{d}_*(f)$ está bien definida. Para ello es suficiente comprobar que $R^{\underline{A}} \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^{\overline{R}^{\underline{B}}} \circ \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_{\varphi} f))$.

Si $\Big((F_{\sigma}(a_i \mid i \in |w|), s), d(\sigma)((a_i, w_i) \mid i \in |w|)\Big) \in R^{\underline{A}}_t$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\textstyle\coprod_{\varphi} f)((F_{\sigma}(a_i \mid i \in |w|), s))] &= [(f_s(F_{\sigma}(a_i \mid i \in |w|)), s)] \\
&= [d(\sigma)(f_{w_i}(a_i, w_i) \mid i \in |w|)] \\
&= [\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\textstyle\coprod_{\varphi} f)(d(\sigma)((a_i, w_i) \mid i \in |w|))]
\end{aligned}$$

Además, es evidente que $\underline{d}_*(f)$ es un homomorfismo y la composición y las identidades se preservan. □

Veamos ahora que para cada morfismo de signaturas $\underline{d}$, el functor $\underline{d}_*$ es adjunto por la izquierda del functor $\underline{d}^*$.

3.2.8. Proposición. Sea $\underline{d} : \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ un morfismo de signaturas. Entonces se cumple que $\underline{d}_* \dashv \underline{d}^*$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \arrow[r, shift left, "\underline{d}^*"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \arrow[l, shift left, "\underline{d}_*"]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ un morfismo de signaturas y $\underline{A}$ una $\underline{\Sigma}$-álgebra. Entonces $\eta^{\underline{A}}\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{d}^*(\underline{d}_*(\underline{A}))$ es la S-aplicación asociada a la T-aplicación

$$\textstyle\coprod_\varphi A \xrightarrow{\ \eta^{\coprod_\varphi A}\ } \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi A) \xrightarrow{\ \mathrm{pr}^{\overline{R}^{\underline{A}}}\ } \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi A)/\overline{R}^{\underline{A}}$$

en virtud de la adjunción $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi$, que a cada $a \in A_s$ le asigna $[(a,s)]$.

Veamos que $\eta^{\underline{A}}$ es un homomorfismo. Si $\sigma : w \longrightarrow s$ y $a \in A_w$, entonces

$$\eta^{\underline{A}}_s(F^{\underline{A}}_\sigma(a_i \mid i \in |w|)) = [(F^{\underline{A}}_\sigma(a_i \mid i \in |w|), s)]$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned} F^{\underline{d}^*(\underline{d}_*(\underline{A}))}_\sigma(\eta^{\underline{A}}_{w_i}(a_i) \mid i \in |w|) &= F^{\underline{d}_*(\underline{A})}_{d(\sigma)}([(a_i, w_i)] \mid i \in |w|) \\ &= [F^{\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi A)}_{d(\sigma)}((a_i, w_i) \mid i \in |w|)] \\ &= [d(\sigma)((a_i, w_i) \mid i \in |w|)] \end{aligned}$$

pero, por definición de $R^{\underline{A}}_{\varphi(s)}$, $[(F^{\underline{A}}_\sigma(a_i \mid i \in |w|), s)] = [d(\sigma)((a_i, w_i) \mid i \in |w|)]$.

Sea $\underline{B}$ una $\underline{\Lambda}$-álgebra, $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{d}^*(\underline{B})$ y $\widehat{f}$ la T-aplicación asociada a la S-aplicación $f\colon \underline{A} \longrightarrow B_\varphi$. Entonces $f^\sharp$ es el único homomorfismo de $\underline{\Lambda}$-álgebras que hace conmutativo el triángulo derecho del diagrama

$$\begin{tikzcd} \coprod_\varphi A \arrow[r, "\eta^{\coprod_\varphi A}"] \arrow[dr, "\widehat{f}"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi A) \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\overline{R}^{\underline{A}}}"] \arrow[d, "\widehat{f}^\sharp"] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi A)/\overline{R}^{\underline{A}} \arrow[dl, "f^\sharp"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

y que existe en virtud de que $R^{\underline{A}} \subseteq \mathrm{Ker}(\widehat{f}^\sharp)$. En efecto, si

$$\big((F^{\underline{A}}_\sigma(a_i \mid i \in |w|), s), d(\sigma)((a_i, w_i) \mid i \in |w|)\big) \in R^{\underline{A}}_t$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{f}^\sharp(F_\sigma(a_i \mid i \in |w|), s) &= f_s(F_\sigma(a_i \mid i \in |w|)) \\ &= F^{\underline{B}}_{d(\sigma)}((f_{w_i}(a_i) \mid i \in |w|), s) \\ &= F^{\underline{B}}_{d(\sigma)}((\widehat{f}^\sharp(a_i, w_i) \mid i \in |w|), s) \\ &= \widehat{f}^\sharp(d(\sigma)((a_i, w_i) \mid i \in |w|)) \end{aligned}$$

y, por consiguiente, $R^{\underline{A}} \subseteq \mathrm{Ker}(\widehat{f}^\sharp)$.

Puesto que $\underline{d}^*$ es functor, $\underline{d}^*(f^\sharp)$ es un $\underline{\Sigma}$-homomorfismo. Además, se cumple que, para cada $s \in S$ y cada $a \in A_s$,

$$\begin{aligned}
\underline{d}^*(f^\sharp)_s(\eta^{\underline{A}}_s(a)) &= (f^\sharp)_{\varphi(s)}([(a,s)]) \\
&= (\widehat{f^\sharp})_{\varphi(s)}(a,s) \\
&= (\widehat{f^\sharp})_{\varphi(s)}(\eta^{\coprod_\varphi A}_{\varphi(s)}(a)) \\
&= \widehat{f}_{\varphi(s)}(a) \\
&= f_s(a)
\end{aligned}$$

luego el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[r, "\eta^{\underline{A}}"] \arrow[dr, "f"'] & \underline{d}^*(\underline{d}_*(\underline{A})) \arrow[d, "\underline{d}^*(f^\sharp)"] \\
& \underline{d}^*(\underline{B})
\end{tikzcd}$$

conmuta. Es evidente que $f^\sharp$ es el único $\underline{\Lambda}$-homomorfismo de $\underline{d}_*(\underline{A})$ en $\underline{B}$ que hace conmutativo el diagrama anterior conmuta, por lo que $\underline{d}_* \dashv \underline{d}^*$. □

3.2.9. Proposición. La categoría **Alg** es cocompleta.

Demostración. En virtud de la proposición 1.3.13, porque **Sig** es cocompleta, **Alg**($\underline{\Sigma}$) es cocompleta para cada signatura $\underline{\Sigma}$ y el functor Alg es localmente reversible. □

Subálgebras y congruencias en la categoría Alg.

Definimos, a continuación, las nociones de subálgebra y congruencia heterogénea.

3.2.10. Proposición. Sea $(\underline{d}, f) : (\underline{\Sigma}, \underline{A}) \longrightarrow (\underline{\Lambda}, \underline{B})$ un homomorfismo. Entonces $(\underline{d}, f)$ es mónica si y sólo si es dimónica, i.e., $\underline{d}$ es mónica en **Sig** y f es mónica en **Alg**($\underline{\Sigma}$). □

3.2.11. Definición. Sean $(\underline{\Sigma}, \underline{A})$ y $(\underline{\Lambda}, \underline{B})$ dos álgebras. Decimos que $(\underline{\Lambda}, \underline{B})$ es una **subálgebra** de $(\underline{\Sigma}, \underline{A})$ si y solo si $\underline{\Lambda} \leq \underline{\Sigma}$ y $\underline{A} \leq \underline{B}{\upharpoonright}_{\underline{\Lambda}}$.

Por la definición anterior, $(\underline{\Lambda}, \underline{B})$ es una subálgebra de $(\underline{\Sigma}, \underline{A})$ si se cumplen las siguientes condiciones: $T \subseteq S$, $\Lambda \subseteq \Sigma{\upharpoonright}_T$, $B \subseteq A{\upharpoonright}_T$ y $G = F{\upharpoonright}_\Lambda$.

Similarmente al caso de las $\underline{\Sigma}$-álgebras es posible definir la noción de cerrado de una álgebra, utilizando los objetos de la categoría **HSSet**. Un cerrado de una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A} = (S, \Sigma, A, F)$ es un (T, Λ, B) tal que $(T, \Lambda, B) \leq (S, \Sigma, A)$ (en la categoría **HSSet**) y tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ con $\lambda : u \longrightarrow t$ y cada $b \in B_u$, se cumple que $F_\lambda(b) \in B_t$. El conjunto de los cerrados de un álgebra $(\underline{\Sigma}, \underline{A})$ es un sistema de clausura algebraico. El retículo algebraico asociado es isomorfo al retículo $\underline{\mathrm{Sub}}(A)$, de las subálgebras de $\underline{A}$. Por último, el operador de subálgebra generada se puede mediante el operador de sub-$\underline{\Sigma}$-álgebra generada como

$$\mathrm{Sg}_{(S,\Sigma,A,F)}(T,\Lambda,B) = (T,\Lambda,\mathrm{Sg}_{(A\restriction_T,F\restriction_\Lambda)}(B)$$

3.2.12. Proposición. Sea $(\underline{d}, f) : (\underline{\Sigma}, \underline{A}) \longrightarrow (\underline{\Lambda}, \underline{B})$ un homomorfismo. Entonces $(\underline{d}, f)$ es épica si y sólo si es diépica, i.e., $\underline{d}$ es épica en **Sig** y f es épica en **Alg**$(\underline{\Sigma})$. □

3.3 Términos.

El functor $\mathrm{Fr}\colon$ **HSSet** $\longrightarrow$ **Alg** determina las traducciones entre términos sobre distintas signaturas respecto de morfismos entre los conjuntos de variables subyacentes. Si $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$ es un morfismo de signaturas y $(\varphi, f)\colon (S,X) \longrightarrow (T,Y)$ una h-aplicación, entonces (φ, d, f) es un morfismo en **HSSet**, y, para cada (S,Σ)-término P de tipo (X,s), $\mathrm{Fr}_{(\varphi,d)}(f)(P)$ es un (T,Λ)-término de tipo $(Y,\varphi(s))$. Esta traducción de términos, como veremos, es compatible con la realización de los términos como operaciones polinómicas.

3.3.1. Proposición. Sea $(\varphi, d, f)\colon (S,\Sigma,X) \longrightarrow (T,\Lambda,Y)$ un morfismo en **HSSet**. Entonces, para cada (T,Λ)-álgebra $\underline{A}$ y $P \in \mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(X)_s$, se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A_\varphi)_X \arrow[r, "P^{(\varphi,d)^*(\underline{A})}"] & A_{\varphi(s)} \arrow[d, equal] \\
A_Y \arrow[u, "(\cdot)_\varphi \circ f"] \arrow[r, "\mathrm{Fr}_{(\varphi,d)}(f)(P)^{\underline{A}}"'] & A_{\varphi(s)}
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo $(\cdot)_\varphi \circ f$ la aplicación que a a le asigna $a_\varphi \circ f$.

Demostración. Sea $a \in A_Y$. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta^{\Sigma}_{X}"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(X) \arrow[d, "\mathrm{Fr}_{(\varphi,d)}(f)"] \arrow[dd, bend left=70, "(a_\varphi \circ f)^\sharp"] \\
Y_\varphi \arrow[r, "\eta^{\Lambda}_{Y}"] \arrow[dr, "a_\varphi"'] & \mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(Y) \arrow[d, "(a^\sharp)_\varphi"] \\
 & A_\varphi
\end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que, para cada $P \in \mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(X)_s$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fr}_{(\varphi,d)}(f)_s(P)^{\underline{A}}(a) &= (a^\sharp)_{\varphi(s)} \circ \mathrm{Fr}_{(\varphi,d)}(f)_s(P) \\
&= (a_\varphi \circ f)^\sharp_s(P) \\
&= P^{(\varphi,d)^*(\underline{A})}(a_\varphi \circ f)
\end{aligned}$$

□

3.3.2. Corolario. Sea $(\varphi, d, f) : (S, \Sigma, X) \longrightarrow (T, \Lambda, Y)$ un morfismo en **HSSet** y $\underline{A}$ una (S, Λ)-álgebra. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(X) \arrow[r, "\mathrm{Pd}^{X,(\varphi,d)^*(\underline{A})}"] \arrow[d, "\mathrm{Fr}_{(\varphi,d)}(f)"'] & \mathrm{Op}_X((\varphi, d)^*(\underline{A})) \arrow[d, "k"] \\
\mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(Y)_\varphi \arrow[r, "\mathrm{Pd}^{Y,\underline{A}}_{\varphi}"'] & \mathrm{Op}_Y(\underline{A})_\varphi
\end{tikzcd}$$

donde k es la S-aplicación que a un $a\colon (A_\varphi)_X \longrightarrow A_{\varphi(s)}$ le asigna la aplicación $a \circ (\cdot)_\varphi \circ f\colon A_Y \longrightarrow A_{\varphi(s)}$. □

Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T$ una aplicación entre conjuntos de tipos y $\varphi^\star\colon S^\star \longrightarrow T^\star$ la extensión a los monoides libres correspondientes. Entonces el S-conjunto de variables $\downarrow w$ asociado a una palabra $w \in S^\star$ está canónicamente incluido en el T-conjunto de variables $\downarrow\varphi^\star(w)$ mediante la aplicación cuya coordenada s-ésima es:

$$\mathrm{in}_s \begin{cases} \downarrow w_s \longrightarrow \downarrow\varphi^\star(w)_s \\ \quad v^s_i \longmapsto v^{\varphi(s)}_i \end{cases}$$

Para cada morfismo de signaturas $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$, se cumple que $(\varphi, d, \mathrm{in})\colon (S,\Sigma,\mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(\downarrow w)) \longrightarrow (T,\Lambda,\mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(\downarrow \varphi^\star(w)))$ es un morfismo en **HSSet**. Se tiene entonces que $\mathrm{Fr}_{(\varphi,d)}(\mathrm{in})\colon \mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(\downarrow w) \longrightarrow \mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(\varphi^\star(w))_\varphi$ es una traducción de símbolos de operación derivados en (S,Σ) en símbolos de operación derivados en (T,Λ). Denotamos la acción de $\mathrm{Fr}_{(\varphi,d)}(\mathrm{in})$ sobre un termino $P \in \mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(\downarrow w)_s$ mediante $(\varphi, d)_{w,s}(P)$ o, abreviadamente, como $(\varphi, d)(P)$.

3.3.3. Proposición. Sea $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$ un morfismo de signaturas algebraicas. Entonces, para cada (T,Λ)-álgebra $\underline{A}$ y cada $P \in \mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(\downarrow w)_s$, se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A_\varphi)_w \arrow[r, "P^{(\varphi,d)^*(\underline{A})}"] \arrow[d, equal] & A_{\varphi(s)} \arrow[d, equal] \\
A_{\varphi^\star(w)} \arrow[r, "(\varphi,d)(P)^{\underline{A}}"'] & A_{\varphi(s)}
\end{tikzcd}$$

conmuta. □

Puesto que para cada aplicación $\varphi : S \longrightarrow T$ entre conjuntos de tipos disponemos del functor covariante $\coprod_\varphi$ de $\mathbf{Set}^S$ en $\mathbf{Set}^T$, dado un S-conjunto de variables X, podemos tomar a $\coprod_\varphi X$ como el T-conjunto de variables canónicamente asociado al mismo.

La unidad de la adjunción $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi$ proporciona, para cada S-conjunto X, el morfismo $\eta^\varphi_X\colon X \longrightarrow (\coprod_\varphi X)_\varphi$ y si $\underline{d} = (\varphi, d)\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ es un morfismo de signaturas, entonces $\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)$ es una traducción de $(\underline{\Sigma}, X)$-términos en $(\underline{\Lambda}, \coprod_\varphi X)$-términos.

Recordemos que $\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)$ se obtiene a partir del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta^{\underline{\Sigma}}_X"] \arrow[d, "\eta^\varphi_X"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)"] \\
(\coprod_\varphi X)_\varphi \arrow[r, "(\eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi X})_\varphi"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi X)_\varphi = \Delta_\varphi(\underline{d}^*(\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi X))
\end{tikzcd}$$

Si denotamos mediante θ^φ el isomorfismo asociado a la adjunción $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi$, entonces se cumple que $(\eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi X})_\varphi \circ \eta^\varphi_X = \theta^\varphi(\eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi X})$,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\eta^\varphi_X"'] \arrow[dr, "\theta^\varphi(\eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi X})"] & \\
(\coprod_\varphi X)_\varphi \arrow[r, "(\eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi X})_\varphi"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi X)_\varphi
\end{tikzcd}$$

La diagonal del diagrama anterior constituye el valor de la unidad de la adjunción $\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}} \circ \coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi \circ \mathrm{G}_{\underline{\Lambda}}$ en X,

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, shift right, "\coprod_\varphi"'] & \mathbf{Set}^T \arrow[l, shift right, "\Delta_\varphi"'] \arrow[l, phantom, "\top"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}"'] & \mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \arrow[l, shift right, "\mathrm{G}_{\underline{\Lambda}}"'] \arrow[l, phantom, "\top"] \end{tikzcd}$$

y $\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)$ es el valor en X de la extensión de tal unidad hasta el functor $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}$.

3.3.4. Proposición. Sea $\underline{d} : \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ un morfismo de signaturas. Entonces la aplicación $\lambda_{\underline{d}}$, que a cada S-conjunto X le asigna la S-aplicación $\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)$, es una transformación natural de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}$ en $\Delta_\varphi \circ \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}} \circ \coprod_\varphi$.

Demostración. Porque conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \arrow[rr, "\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(f)"] \arrow[dd, "\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)" near start] & & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(Y) \arrow[dd, "\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_Y)"] \\
X \arrow[ur, "\eta^{\underline{\Sigma}}_X"] \arrow[rr, "f" near start] \arrow[dd, "\eta^\varphi_X"'] & & Y \arrow[ur, "\eta^{\underline{\Sigma}}_Y"] \arrow[dd, "\eta^\varphi_Y" near start] & \\
 & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi X)_\varphi \arrow[rr, "\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi f)_\varphi" near start] & & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi Y)_\varphi \\
(\coprod_\varphi X)_\varphi \arrow[ur, "\eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi X}"] \arrow[rr, "(\coprod_\varphi f)_\varphi"] & & (\coprod_\varphi Y)_\varphi \arrow[ur, "\eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi Y}"] &
\end{tikzcd}$$

□

3.3.5. Proposición. Sea $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ un morfismo de signaturas algebraicas. Entonces para cada $\underline{\Lambda}$-álgebra $\underline{A}$ y cada $P \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$, se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A_\varphi)_X \arrow[r, "P^{\underline{d}^*(\underline{A})}"] & A_{\varphi(s)} \arrow[d, equal] \\
A_{\coprod_\varphi X} \arrow[u, "\theta^\varphi_{X,A}"] \arrow[r, "\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)_s(P)^{\underline{A}}"'] & A_{\varphi(s)}
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo θ^φ el isomorfismo asociado a la adjunción $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi$.

Demostración. Por la proposición 3.3.1, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A_\varphi)_X \arrow[r, "P^{\underline{d}^*(\underline{A})}"] & A_{\varphi(s)} \\
A_{\coprod_\varphi X} \arrow[u, "\Delta_\varphi(\cdot)\circ\eta^\varphi_X"] \arrow[r, "\underline{d}_\diamond(P)^{\underline{A}}"'] & A_{\varphi(s)} \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

conmuta, y $\Delta_\varphi(\cdot)\circ\eta^\varphi_X = \theta^\varphi_{X,A}$ □

Cuando estudiamos las ecuaciones vimos que para caracterizar las clases ecuacionales de (S,Σ)-álgebras, era suficiente considerar aquellas ecuaciones cuyas variables se extraían de los subconjuntos localmente finitos de un conjunto V^S que fuera localmente infinito numerable. Por otra parte, es evidente que si $\varphi : S \longrightarrow T$ es una aplicación entre conjuntos de tipos, entonces $\coprod_\varphi V^S$ no está, en general, incluido en V^T. Sin embargo, si X es una parte localmente finita de V^S, $\coprod_\varphi X$ es isomorfo a un sub-T-conjunto Y localmente finito de V^T, y, para cada morfismo de signaturas algebraicas $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma)\longrightarrow(T,\Lambda)$, el isomorfismo entre $\coprod_\varphi X$ e Y induce un isomorfismo entre $\mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(\coprod_\varphi X)$ y $\mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(Y)$ que permite traducir (T,Λ)-ecuaciones con variables en $\coprod_\varphi X$ en (T,Λ)-ecuaciones con variables en Y.

Categorías de términos heterogéneos.

Al sistema de los términos, relativos a una signatura algebraica (S,Σ), se le puede dotar de un estructura de categoría, derivada a partir de la adjunción existente entre la categoría de las (S,Σ)-álgebras y la de S-conjuntos. Además, los morfismos de S-signaturas determinan un functor entre las categorías de términos asociadas.

3.3.6. Definición. Sea $\underline{\Sigma} = (S,\Sigma)$ una signatura algebraica. La **categoría de los $\underline{\Sigma}$-términos**, $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$, es la categoría dual a la categoría de Kleisli sobre $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}$, siendo este último el endofunctor de $\mathbf{Set}^S$ obtenido componiendo el functor de formación de $\underline{\Sigma}$-álgebras libres, $\underline{\mathrm{Fr}}_{\underline{\Sigma}}$, con el functor de olvido $\mathrm{G}_{\underline{\Sigma}}$.

Si nos olvidamos de la estructura categorial de la categoría de términos asociada a una signatura, estos constituyen un $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)^2$-conjunto, al que denotamos como $\mathrm{Ter}(\underline{\Sigma})$, extendiendo nuestra notación anterior para el $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)\times S$-conjunto de los términos. Esta generalización es consistente porque un término P en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$ es esencialmente un morfismo $P : \delta^s \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$. Recíprocamente, un término en $\mathrm{Ter}(\underline{\Sigma})_{X,Y}$ corresponde a una familia de términos indexados por Y, que a un elemento $y\in Y_s$ le asigna un término en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$.

En lo que sigue denotamos mediante $\diamond$ el operador de composición en las categorías $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$ (y también, en las categorías $\mathbf{Kl}(\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}})$), reservando la notación estándar $\circ$ para la composición en $\mathbf{Set}^S$.

3.3.7. Proposición. Sea $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ un morfismo de signaturas. Entonces hay un functor $\underline{d}_\diamond$ definido como:

$$\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}) \xrightarrow{\ \underline{d}_\diamond\ } \mathbf{Ter}(\underline{\Lambda})$$

$$\begin{array}{ccc} X & & \coprod_\varphi X \\ P \big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow (\theta^\varphi)^{-1}(\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X) \circ P) \\ Y & & \coprod_\varphi Y \end{array}$$

siendo θ^φ el isomorfismo asociado a la adjunción $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi$.

Demostración. Veamos, en primer lugar, que $\underline{d}_\diamond$ preserva identidades. Si X es un S-conjunto, el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\eta^{\underline{\Sigma}}_X"] \arrow[d, "\eta^\varphi_X"'] \arrow[drr, "\theta^\varphi(\eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi X})"] & & \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \arrow[d, "\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)"] \\ (\coprod_\varphi X)_\varphi \arrow[rr, "(\eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi X})_\varphi"'] & & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi X)_\varphi \end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que $\underline{d}_\diamond(\eta^{\underline{\Sigma}}_X) = \eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi X}$.

Veamos ahora que $\underline{d}_\diamond$ preserva composiciones. Sean $P\colon X \longrightarrow Y$ y $Q\colon Y \longrightarrow Z$ dos morfismos en $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$. Entonces se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \underline{d}_\diamond(Q \diamond P) &= (\theta^\varphi)^{-1}(\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X) \circ P^{\sharp\underline{\Sigma}} \circ Q) \\ &= (\theta^\varphi)^{-1}(\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)) \circ \textstyle\coprod_\varphi P^{\sharp\underline{\Sigma}} \circ \coprod_\varphi Q \\ \underline{d}_\diamond(Q) \diamond \underline{d}_\diamond(P) &= \underline{d}_\diamond(P)^{\sharp\underline{\Lambda}} \circ \underline{d}_\diamond(Q) \\ &= \underline{d}_\diamond(P)^{\sharp\underline{\Lambda}} \circ (\theta^\varphi)^{-1}(\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_Y) \circ \textstyle\coprod_\varphi Q \end{aligned}$$

luego es suficiente demostrar que

$$(1) \qquad (\theta^\varphi)^{-1}(\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)) \circ \textstyle\coprod_\varphi P^{\sharp\underline{\Sigma}} = \underline{d}_\diamond(P)^{\sharp\underline{\Lambda}} \circ (\theta^\varphi)^{-1}(\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_Y))$$

Para ello, comprobamos que

$$(2) \qquad \mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X) \circ P^{\sharp\underline{\Sigma}} = \Delta_\varphi \underline{d}_\diamond(P)^{\sharp\underline{\Lambda}} \circ \mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_Y)$$

puesto que entonces, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_\varphi \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(Y) \arrow[r, "\coprod_\varphi \mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_Y)"] \arrow[d, "\coprod_\varphi P^{\sharp\Sigma}"'] \arrow[rr, bend left, "(\theta^\varphi)^{-1}(\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_Y))"] & \coprod_\varphi \Delta_\varphi \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi Y) \arrow[r, "\varepsilon^\varphi"] \arrow[d, "\coprod_\varphi \Delta_\varphi \underline{d}_\diamond(P)^{\sharp\Lambda}"] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi Y) \arrow[d, "\underline{d}_\diamond(P)^{\sharp\Lambda}"] \\
\coprod_\varphi \Delta_\varphi \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi X) \arrow[r, "\coprod_\varphi \mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X)"'] \arrow[rr, bend right, "(\theta^\varphi)^{-1}(\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X))"'] & \coprod_\varphi \Delta_\varphi \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi Y) \arrow[r, "\varepsilon^\varphi"'] & \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi X)
\end{tikzcd}$$

nos permite obtener (1).

Veamos que se cumple (2). Para ello demostramos que ambos morfismos coinciden con $(\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X) \circ P)^{\sharp\Sigma}$. En efecto, tenemos que:

$$\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X) \circ P^{\sharp\Sigma} \circ \eta^{\underline{\Sigma}}_Y = \mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X) \circ P$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi \underline{d}_\diamond(P)^{\sharp\Lambda} \circ \mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_Y) \circ \eta^{\underline{\Sigma}}_Y &= \Delta_\varphi \underline{d}_\diamond(P)^{\sharp\Lambda} \circ \Delta_\varphi \eta^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi Y} \circ \eta^\varphi_Y \\
&= \Delta_\varphi \underline{d}_\diamond(P) \circ \eta^\varphi_Y \\
&= \Delta_\varphi (\theta^\varphi)^{-1}(\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X) \circ P) \circ \eta_{\varphi,Y} \\
&= (\mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X) \circ P)^{\sharp\varphi} \circ \eta^\varphi_Y \\
&= \mathrm{Fr}_{\underline{d}}(\eta^\varphi_X) \circ P
\end{aligned}$$

con lo cual la proposición queda demostrada. □

Del functor $\underline{d}_\diamond$ asociado a un morfismo de signaturas $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ podemos dar una descripción alternativa. Componiendo la transformación natural $\lambda_{\underline{d}}$ con la counidad de la adjunción $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi$, obtenemos una transformación natural

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^S \arrow[r, "\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}"] \arrow[d, "\coprod_\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda_{\underline{d}}"] & \mathbf{Set}^S \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\varepsilon^\varphi"] & \mathbf{Set}^S \arrow[d, "\coprod_\varphi"] \\
\mathbf{Set}^T \arrow[r, "\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}"'] & \mathbf{Set}^T \arrow[r, "1"'] \arrow[u, "\Delta_\varphi"'] & \mathbf{Set}^T
\end{tikzcd}$$

Entonces, si $P\colon Y \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$ es una S-aplicación, $\underline{d}_\diamond(P)$ es la composición de $\coprod_\varphi P$ con el valor de la transformación natural del diagrama anterior sobre X, puesto que, por definición, $\underline{d}_\diamond(P)$, es el morfismo

$$\coprod_\varphi Y \xrightarrow{\coprod_\varphi P} \coprod_\varphi \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X) \xrightarrow{\coprod_\varphi (\lambda_{\underline{d}})_X} \coprod_\varphi \Delta_\varphi \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi X) \xrightarrow{\varepsilon^\varphi_{\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}} \coprod_\varphi X}} \mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\coprod_\varphi X)$$

3.3.8. Proposición. Sea $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ un morfismo de signaturas algebraicas. Entonces, para cada $\underline{\Lambda}$-álgebra $\underline{A}$ y cada $\underline{\Sigma}$-término $P\colon X \longrightarrow Y$, se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A_\varphi)_X \arrow[r, "P^{\underline{d}^*(\underline{A})}"] & (A_\varphi)_Y \\
A_{\coprod_\varphi X} \arrow[u, "\theta^\varphi_{X,A}"] \arrow[r, "\underline{d}_\diamond(P)^{\underline{A}}"'] & A_{\varphi(s)} \arrow[u, "\theta^\varphi_{X,A}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Puesto que cada S-conjunto Y es isomorfo a $\coprod_{s\in S, y\in Y_s} \delta^s$ y el functor $\coprod_\varphi$ preserva colímites al tener un adjunto por la derecha, $\coprod_\varphi Y$ es isomorfo a $\coprod_{s\in S,\, y\in Y_s} \delta^{\varphi(s)}$. Pero entonces el conjunto $\mathbf{Set}^T(\coprod_\varphi Y, A)$ es isomorfo a $\prod_{s\in S, y\in Y_s} \mathbf{Set}^T(\delta^{\varphi(s)}, A)$, y es suficiente demostrar la proposición para el caso en que Y sea de la forma δ^s, lo cual es inmediato por la proposición 3.3.5. □

A continuación extendemos la construcción anterior hasta un pseudo-functor, asociando a cada morfismo de signaturas un functor entre las categorías de términos correspondientes.

3.3.9. Proposición. De **Sig** en **Cat** existe un pseudo-functor Ter definido como:

1. $\mathrm{Ter}(\underline{d} : \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}) = \underline{d}_\diamond : \mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}) \longrightarrow \mathbf{Ter}(\underline{\Lambda})$.
2. Para cada triplo de signaturas $\underline{\Sigma}$, $\underline{\Lambda}$, $\underline{\Omega}$, el isomorfismo natural $\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}}$ que, en la situación descrita en el diagrama

$$\underline{\Sigma} = (S, \Sigma) \xrightarrow{\underline{d} = (\varphi, d)} \underline{\Lambda} = (T, \Lambda) \xrightarrow{\underline{e} = (\psi, e)} \underline{\Omega} = (U, \Omega)$$

es el isomorfismo natural de $\underline{e}_\diamond \circ \underline{d}_\diamond$ en $(\underline{e} \circ \underline{d})_\diamond$ que asigna a un S-conjunto X, el morfismo $\gamma^{\underline{d},\underline{e}}_X : \coprod_\psi \coprod_\varphi X \longrightarrow \coprod_{\psi\circ\varphi} X$ en $\mathbf{Ter}(\underline{\Omega})$ que corresponde a la U-aplicación

$$\coprod_{\psi\circ\varphi} X \xrightarrow{(\gamma^{\varphi,\psi}_X)^{-1}} \coprod_\psi \coprod_\varphi X \xrightarrow{\eta^{\underline{\Omega}}_{\coprod_\psi \coprod_\varphi X}} \mathrm{Fr}_{\underline{\Omega}}(\coprod_\psi \coprod_\varphi X)$$

siendo $\gamma^{\varphi,\psi}$ el isomorfismo canónico correspondiente asociado al pseudo-functor $\mathrm{Set}^{\coprod}$. Denotamos a $(\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}})_{\underline{d},\underline{e}}$ mediante $\gamma^{\underline{d},\underline{e}}$.

3. Para cada signatura $\underline{\Sigma}$, el isomorfismo natural $\nu^{\underline{\Sigma}}$ de $\mathrm{Id}_{\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})}$ en $(\mathrm{id}_{\underline{\Sigma}})_{\diamond}$ que asigna a cada S-conjunto X, el morfismo $\nu^{\underline{\Sigma}}_X \colon X \longrightarrow \coprod_{\mathrm{id}_{\underline{\Sigma}}} X$ en $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$que corresponde a la S-aplicación

$$\coprod_{\mathrm{id}_S} X \xrightarrow{\quad \nu^S_X \quad} X \xrightarrow{\quad \eta^{\underline{\Omega}}_X \quad} \mathrm{Fr}_{\underline{\Omega}}(X)$$

con ν^S el isomorfismo canónico asociado al pseudo-functor $\mathrm{Set}^{\amalg}$.

Cada $\underline{\Sigma}$-álgebra determina un functor de la categoría de los $\underline{\Sigma}$-términos en la categoría de conjuntos que formaliza categorialmente la realización de los símbolos de operación polinómica en un álgebra dada.

3.3.10. Proposición. Sea $\underline{\Sigma}$ una signatura algebraica. Cada $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$ determina un functor, denotado también por $\underline{A}$, de $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$ en $\mathbf{Set}$, y definido como

$$\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}) \xrightarrow{\quad \underline{A} \quad} \mathbf{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} X & & A_X \\ {\scriptstyle P}\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle P^{\underline{A}}} \\ Y & & A_Y \end{array}$$

siendo $P^{\underline{A}}$ la aplicación definida como

$$P^{\underline{A}} \left\{ \begin{array}{ccc} A_X & \longrightarrow & A_Y \\ a & \longmapsto & a^{\sharp} \circ P \end{array} \right.$$

y $a^{\sharp}$ la extensión canónica de a.

Demostración. Nos limitamos a comprobar que $\underline{A}$ preserva composiciones. Si $P \colon X \longrightarrow Y$ y $Q \colon Y \longrightarrow Z$ son dos morfismos en $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$, entonces, para cada $a \in A_X$, se cumple que

$$\begin{aligned} (Q \diamond P)^{\underline{A}}(a) &= (P^{\sharp} \circ Q)^{\underline{A}}(a) \\ &= a^{\sharp} \circ (P^{\sharp} \circ Q) \\ &= (a^{\sharp} \circ P)^{\sharp} \circ Q \\ &= Q^{\underline{A}} \circ (a^{\sharp} \circ P) \\ &= Q^{\underline{A}} \circ P^{\underline{A}}(a) \end{aligned}$$

luego $\underline{A}$ preserva composiciones. $\square$

La notación $P^{\underline{A}}$ es una generalización consistente de la utilizada para la realización de términos como operaciones, puesto que un término P en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)_s$ es, esencialmente, un morfismo $P\colon \delta^s \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(X)$. Si $P\colon X \longrightarrow Y$ es un morfismo en $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$, entonces $P^{\underline{A}}$ es la aplicación de A_X en A_Y determinada por la familia $(\mathrm{Pd}_s^{\underline{A}}(P_s(y)))_{s\in S, y\in Y_s}$. El proceso descrito es natural y se puede extender hasta un functor.

3.3.11. Proposición. Para cada signatura algebraicas $\underline{\Sigma}$, existe un functor $\mathrm{Fn}^{\underline{\Sigma}}$ de $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ en $\mathbf{Set}^{\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})}$ que a un álgebra $\underline{A}$ le asigna el functor $\underline{A}$ de la proposición anterior y a un homomorfismo $f : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ la transformación natural, denotada también como f, que a un S-conjunto X le asigna la aplicación $f_X\colon A_X \longrightarrow B_X$ definida como $f_X(a) = f \circ a$.

Demostración. Para cada homomorfismo de $\underline{\Sigma}$-álgebras $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ y cada morfismo $P\colon X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_X \arrow[r, "P^{\underline{A}}"] \arrow[d, "f_X"'] & A_Y \arrow[d, "f_Y"] \\
B_X \arrow[r, "P^{\underline{B}}"'] & B_Y
\end{tikzcd}$$

conmuta porque f es homomorfismo. $\square$

A continuación formalizamos la realización de los términos en las álgebras correspondientes y demostramos que esta es consistente con el cambio de signaturas.

3.3.12. Proposición. Por transposición del functor $\mathrm{Fn}^{\underline{\Sigma}}$ obtenemos un functor $\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}}$ definido como

$$\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \times \mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}) \xrightarrow{\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}}} \mathbf{Set}$$

$$\begin{tikzcd}
(\underline{A}, X) \arrow[dd, "{(f,P)}"'] & & A_X \arrow[dl, "f_X"'] \arrow[dr, "P^{\underline{A}}"] \arrow[dd, "f_P"] & \\
& B_X \arrow[dr, "P^{\underline{B}}"'] & & A_Y \arrow[dl, "f_Y"] \\
(\underline{B}, Y) & & B_Y &
\end{tikzcd}$$

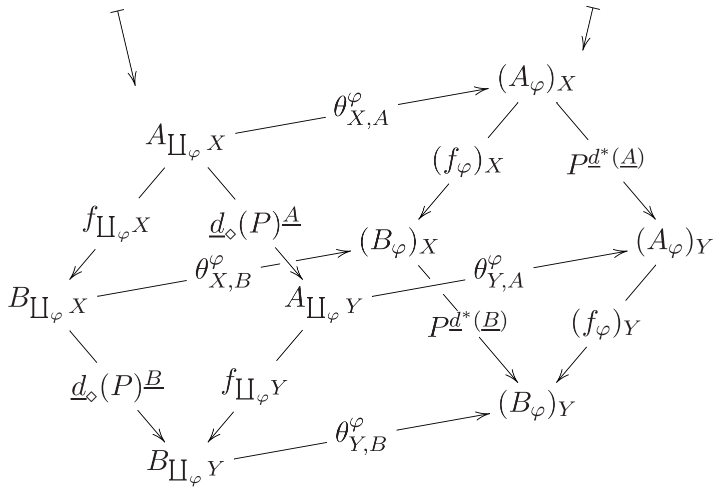
Además, para cada morfismo de signaturas $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \times \mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}) \arrow[r, "\underline{d}^* \times \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times \underline{d}_\diamond"'] & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \times \mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}) \arrow[d, "\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}}"] \\
\mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \times \mathbf{Ter}(\underline{\Lambda}) \arrow[r, "\mathrm{Pd}^{\underline{\Lambda}}"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

iso-conmuta.

Demostración. Sea $(f, P)\colon (\underline{A}, X) \longrightarrow (\underline{B}, Y)$ un morfismo en $\mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \times \mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$. Entonces tenemos la situación

$$\begin{tikzcd}
 & (\underline{A}, X) \arrow[r, "(f,P)"] \arrow[dl, mapsto] & (\underline{B}, Y) \arrow[dr, mapsto] & \\
(\underline{A}, \coprod_\varphi X) \arrow[r, "(f, \underline{d}_\diamond(P))"] & (\underline{B}, \coprod_\varphi Y) & (\underline{d}^*(\underline{A}), X) \arrow[r, "(f_\varphi, P)"] & (\underline{d}^*(\underline{B}), Y)
\end{tikzcd}$$



Ahora bien, el último diagrama conmuta, por la proposición 3.3.8, la naturalidad de θ^φ y el hecho de que f es homomorfismo. Por consiguiente, se cumple que la familia $\theta^{\underline{d}} = (\theta^{\underline{d}}_{\underline{A},X})_{(\underline{A},X) \in \mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}) \times \mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})}$, en donde $\theta^{\underline{d}}_{\underline{A},X} = \theta^\varphi_{X,A}$, es un isomorfismo natural de $\mathrm{Pd}^{\underline{\Lambda}} \circ (\mathrm{Id} \times \underline{d}_\diamond)$ en $\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}} \circ (\underline{d}^* \times \mathrm{Id})$. □

Cuando el conjunto de tipos no varía, entonces muchos de los resultados anteriores se cumplen reemplazando isomorfismo por identidad. Así, por ejemplo, $\mathrm{Ter}^S\colon \mathbf{Sig}(S) \longrightarrow \mathbf{Cat}$ es un functor y, para cada morfismo de S-signaturas

$d\colon \Sigma \longrightarrow \Lambda$, el último diagrama de la demostración anterior es estrictamente conmutativo.

Transformaciones extranaturales.

Como acabamos de ver, la realización de los términos en las álgebras correspondientes es consistente con el cambio de signaturas. Ahora bien, para describir con mayor exactitud esta relación hemos de hacer uso de una noción de transformación extranatural para pseudo-functores. Puesto que posteriormente, añadiendo un cierto tipo de 2-células a la categoría de signaturas, obtenemos una 2-categoría, procedemos a continuación a estudiar la contrapartida de la noción de transformación extranatural en 2-categorías y para pseudo-functores.

Este estudio tiene también relevancia para el concepto de institución. Si identificamos las instituciones con ciertas transformaciones extranaturales, las consideraciones que siguen muestran que el concepto de institución no es unívoco y admite diversas generalizaciones.

3.3.13. Definición. Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ dos 2-categorías y $S, T\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ un par de 2-functores entre ellas. Una **transformación lax-dinatural** de S en T es un par (α, β) que cumple las siguientes condiciones:

1. Para cada 0-célula c en $\mathbf{C}$, $\alpha_c : S(c,c) \longrightarrow T(c,c)$ es una 1-célula en $\mathbf{D}$,

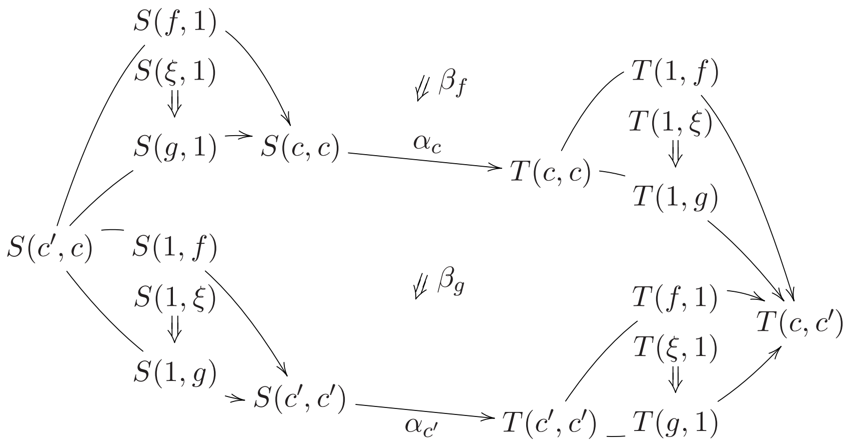
2. Para cada 1-célula $f : c \longrightarrow c'$ en $\mathbf{C}$, β_f es una 2-célula en $\mathbf{D}$

$$\begin{tikzcd}
 & S(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] & T(c,c) \arrow[dr, "T(1,f)"] & \\
S(c',c) \arrow[ur, "S(f,1)"] \arrow[dr, "S(1,f)"'] \arrow[rrr, phantom, "\Downarrow\beta_f"] & & & T(c,c') \\
 & S(c',c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"'] & T(c',c') \arrow[ur, "T(f,1)"'] &
\end{tikzcd}$$

compatible con las 2-células en $\mathbf{C}$, i.e., tal que, para cada 2-célula,

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\xi"] & c'
\end{tikzcd}$$

en $\mathbf{C}$, se cumple que $\beta_g \circ (T(1,\xi) * \alpha_c * S(\xi,1)) = (T(\xi,1) * \alpha_{c'} * S(1,\xi)) \circ \beta_f$.



El par (α, β) es una **transformación pseudo-dinatural** si, para cada $f : c \longrightarrow c'$ en $\mathbf{C}$, β_f es un isomorfismo, y una **transformación 2-dinatural** si β_f es una identidad.

También nos interesan las transformaciones dinaturales cuando S y T son, en la definición anterior, pseudo-functores. En ese caso es necesario imponer una condición adicional de compatibilidad respecto de los isomorfismos naturales de los pseudo-functores. La definición es la siguiente.

3.3.14. Definición. Sean $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ dos 2-categorías, (S, γ^S, ν^S) y (T, γ^T, ν^T) un par de pseudo-functores de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$. Una **transformación lax-dinatural** de S en T es un par (α, β) que cumple las condiciones de 3.3.13, y que además es compatible con las estructuras de pseudo-functores de S y T, i.e., tal que cumple las condiciones adicionales siguientes:

3. Para cada par de 1-células $f : c \longrightarrow c'$, $g : c' \longrightarrow c''$ en $\mathbf{C}$, se cumple que

$$\begin{aligned}\big(T(f,1) * \beta_g * S(1,f)\big) \circ \big(T(1,g) * \beta_f * S(g,1)\big) \\ = \beta_{g \circ f} \circ \big(\gamma^T_{(1,f),(1,g)} * \alpha_C * \gamma^S_{(g,1),(f,1)}\big)\end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \Uparrow\gamma^S & S(c,c) \arrow[rr, "\alpha_c"] & & T(c,c) \arrow[dr, "T(1,f)"] \arrow[ddrr, bend left, "T(1,g\circ f)"] & & \Uparrow\gamma^T \\
 & S(c',c) \arrow[ur, "S(f,1)"] \arrow[dr, "S(1,f)"] & & \Downarrow\beta_f & & T(c,c') \arrow[dr, "T(1,g)"] & \\
S(c'',c) \arrow[ur, "S(g,1)"] \arrow[dr, "S(1,f)"'] \arrow[uurr, bend left, "S(g\circ f,1)"] \arrow[ddrr, bend left, "S(1,g\circ f)"] & & S(c',c') \arrow[rr, "\alpha_{c'}"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\beta_{g\circ f}"] & & T(c',c') \arrow[ur, "T(f,1)"] \arrow[dr, "T(1,g)"'] & & T(c,c'') \\
\Uparrow\gamma^S & S(c'',c') \arrow[ur, "S(g,1)"] \arrow[dr, "S(1,g)"'] & & \Downarrow\beta_g & & T(c',c'') \arrow[ur, "T(f,1)"'] & \Uparrow\gamma^T \\
 & & S(c'',c'') \arrow[rr, "\alpha_{c''}"'] & & T(c'',c'') \arrow[ur, "T(g,1)"'] \arrow[uurr, bend left, "T(g\circ f,1)"] & &
\end{tikzcd}
$$

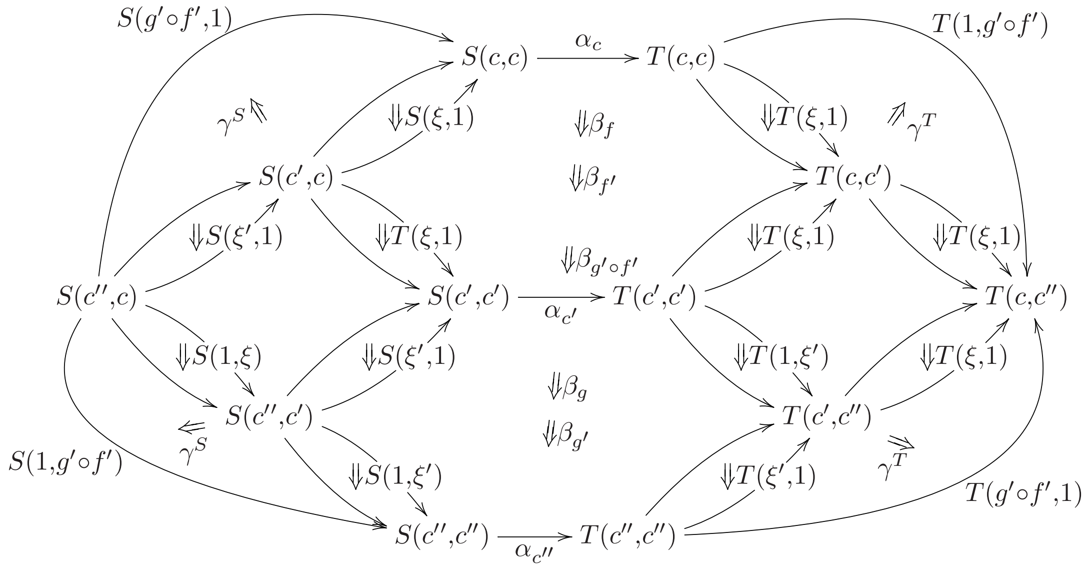
4. Para cada objeto c en $\mathbf{C}$, $\alpha_c * \nu^S_{(c,c,)} = \nu^T_{(c,c,)} \circ \alpha_c$.

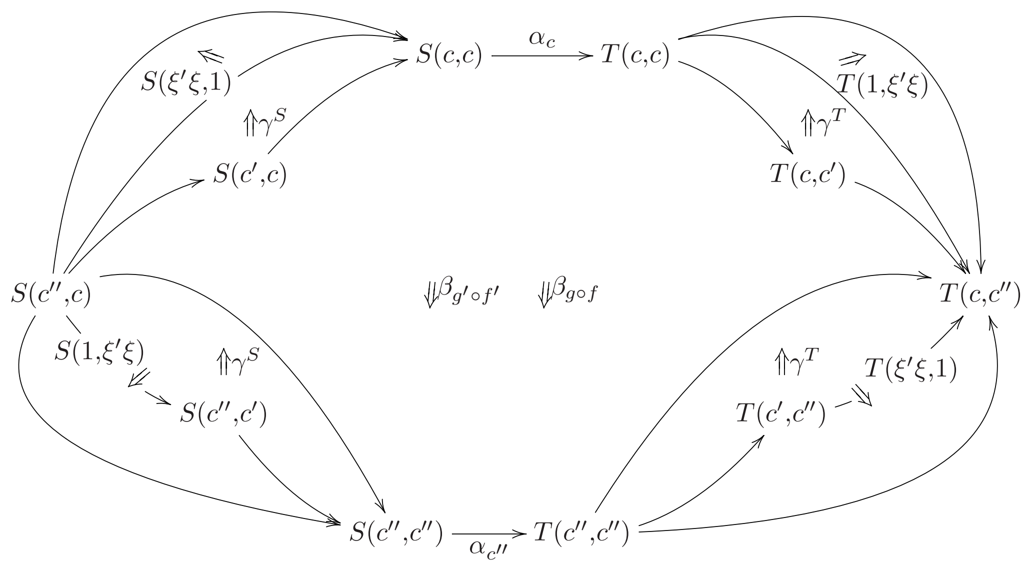
$$
\begin{tikzcd}
S(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"] \arrow[d, bend right=60, "1_{S(c,c)}"'] \arrow[d, bend left=60, "{S(1,1)}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\nu^S_{(c,c)}}{\Rightarrow}"] & T(c,c) \arrow[d, bend right=60, "1_{T(c,c)}"'] \arrow[d, bend left=60, "{T(1,1)}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\nu^T_{(c,c)}}{\Rightarrow}"] \\
S(c,c) \arrow[r, "\alpha_c"'] & T(c,c)
\end{tikzcd}
$$

En la situación de la definición anterior, para cada diagrama en $\mathbf{C}$,

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\xi"] & c' \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\xi'"] & c''
\end{tikzcd}
$$

se cumple que las únicas 2-células de $T(1,g) \circ T(1,f) \circ \alpha_c \circ S(f,1) \circ S(g,1)$ en $T(1,g' \circ f') \circ \alpha_{c''} \circ S(g' \circ f', 1)$ en los diagramas conmutativos siguientes son idénticas.





Si el functor T en las definiciones anteriores es independiente de ambas variables, decimos que la transformación es, respectivamente, **lax-extranatural**, **pseudo-extranatural** o **extranatural**. La condición de compatibilidad con las 2-células de **C** equivale entonces a la condición de que $\beta_g\circ(\alpha_c * S(\xi,1))$ es idéntico a $(\alpha_{c'} * S(1,\xi)) \circ \beta_f$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
 & S(c,c) \arrow[dr, "\alpha_c"] \arrow[d, phantom, "\swarrow\beta_f"] & \\
S(c',c) \arrow[ur, bend left=60, "S(f,1)"] \arrow[ur, bend right=10, "S(g,1)"'] \arrow[ur, phantom, bend left=25, "\Downarrow S(\xi,1)"] \arrow[dr, bend left=10, "S(1,f)"] \arrow[dr, bend right=60, "S(1,g)"'] \arrow[dr, phantom, bend right=25, "\Downarrow S(1,\xi)"] & \swarrow\beta_g & T(c,c) \\
 & S(c',c') \arrow[ur, "\alpha_{c'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

y la condición de compatibilidad con los isomorfismos naturales de S equivale a la condición de que $\beta_{g\circ f}\circ(\alpha_c * \gamma^S_{(g,1),(f,1)})$ y $\gamma^S_{(1,f),(1,g)}\circ(\beta_g * S(1,f))\circ(\beta_g * S(g,1))$ sean iguales.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & S(c,c) \arrow[ddr, "\alpha_c"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta_f"] & \\
 & & S(c',c) \arrow[ur, "S(f,1)"] \arrow[dr, "S(1,f)"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\gamma^S"] & {} & \\
S(c'',c) \arrow[uurrr, bend left, "S(g\circ f,1)"] \arrow[urr, "S(g,1)"] \arrow[drr, "S(1,f)"'] \arrow[ddrrr, bend right, "S(1,g\circ f)"'] & & {} & S(c',c') \arrow[r, "\alpha_{c'}"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\beta_{g\circ f}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta_g"] & T \\
 & & S(c'',c') \arrow[ur, "S(g,1)"'] \arrow[dr, "S(1,g)"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\gamma^S"] & {} & \\
 & & & S(c'',c'') \arrow[uur, "\alpha_{c''}"'] &
\end{tikzcd}
$$

3.3.15. Proposición. De la categoría $\mathbf{Sig}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Sig}$ en $\mathbf{Cat}$ se tiene un pseudofunctor definido como

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Sig}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Sig} \arrow[rr, "\mathrm{Alg}(\cdot)\times\mathrm{Ter}(\cdot)"] & & \mathbf{Cat} \\
(\underline{\Sigma},\underline{\Lambda}) \arrow[d, "(\underline{d},\underline{e})"'] & & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})\times\mathbf{Ter}(\underline{\Lambda}) \arrow[d, "\underline{d}^*\times\underline{e}_\diamond"] \\
(\underline{\Sigma}',\underline{\Lambda}') & \longmapsto & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}')\times\mathbf{Ter}(\underline{\Lambda}')
\end{tikzcd}
$$

así como el functor que es constantemente $\mathbf{Set}$. Entonces $\mathrm{Pd} = (\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}})_{\underline{\Sigma}\in\mathbf{Sig}}$, junto con la familia $\theta = (\theta^{\underline{d}})_{\underline{d}\in\mathrm{Mor}(\mathbf{Sig})}$, siendo $\theta^{\underline{d}}$ el isomorfismo natural de la proposición 3.3.12, es una transformación pseudo-extranatural de $\mathrm{Alg}(\cdot) \times \mathrm{Ter}(\cdot)$ en **Set**.

Demostración. Puesto que la estructura de 2-categoría de **Sig** es trivial sólo falta comprobar la compatibilidad con los isomorfismos del pseudo-functor.

Nos limitamos a demostrar la compatibilidad con el isomorfismo relativo a la composición. Para ello, es suficiente comprobar que, para cada $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ en $\mathbf{Alg}(\underline{\Omega})$ y cada $P\colon X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$, el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & (A_\varphi)_{\coprod_\varphi X} \arrow[rr, "\theta^{\varphi}_{X,A_\psi}"] \arrow[dd, "\underline{d}(P)^{\underline{e}(\underline{A})}"] & & (A_{\psi_\varphi})_X \arrow[dd, "P^{\underline{d}(\underline{e}(\underline{A}))}"] \\
A_{\coprod_\psi \coprod_\varphi X} \arrow[ur, "\theta^{\psi}_{\coprod_\varphi X,A}"] \arrow[rr, "(\gamma^{\underline{d},\underline{e}}_X)_{\underline{A}}"] \arrow[dd, "\underline{e}\circ\underline{d}(P)^{\underline{A}}"] & & A_{\coprod_{\psi\circ\varphi} X} \arrow[ur, "\theta^{\psi\circ\varphi}_{X,A}"] \arrow[dd, "\underline{e}(\underline{d}(P))^{\underline{A}}"] & \\
 & (A_\varphi)_{\coprod_\varphi Y} \arrow[rr, "\theta^{\varphi}_{Y,A_\psi}"] \arrow[dd, "(f_\varphi)_{\coprod_\varphi Y}"] & & (A_{\psi_\varphi})_Y \arrow[dd, "(f_{\psi_\varphi})_Y"] \\
A_{\coprod_\psi \coprod_\varphi Y} \arrow[ur, "\theta^{\psi}_{\coprod_\varphi Y,A}"] \arrow[rr, "(\gamma^{\underline{d},\underline{e}}_Y)_{\underline{A}}"] \arrow[dd, "f_{\coprod_\psi \coprod_\varphi Y}"] & & A_{\coprod_{\psi\circ\varphi} Y} \arrow[ur, "\theta^{\psi\circ\varphi}_{Y,A}"] \arrow[dd, "f_{\coprod_{\psi\circ\varphi} Y}"] & \\
 & (B_\psi)_{\coprod_\varphi Y} \arrow[rr, "\theta^{\varphi}_{Y,B_\psi}"] & & (B_{\psi_\varphi})_Y \\
B_{\coprod_\psi \coprod_\varphi Y} \arrow[ur, "\theta^{\psi}_{\coprod_\varphi Y,B}"] \arrow[rr, "(\gamma^{\underline{d},\underline{e}}_Y)_{\underline{B}}"] & & B_{\coprod_{\psi\circ\varphi} Y} \arrow[ur, "\theta^{\psi\circ\varphi}_{Y,B}"] &
\end{tikzcd}
$$

□

Para un conjunto de tipos S fijo, la transformación pseudo-extranatural de la proposición anterior es una transformación extranatural, i.e., de la categoría $\mathbf{Sig}(S)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Sig}(S)$ en **Cat** se tiene un functor $\mathrm{Alg}^S(\cdot) \times \mathrm{Ter}^S(\cdot)$ tal que la familia $\mathrm{Pd}^S = (\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}})_{\Sigma\in\mathbf{Sig}(S)}$ es una transformación extranatural de $\mathrm{Alg}^S(\cdot) \times \mathrm{Ter}^S(\cdot)$ en **Set**.

La transformación pseudo-extranatural de la proposición anterior formaliza la invarianza respecto del cambio de signaturas de la realización de los términos en las álgebras heterogéneas. Para describir de una manera más compacta tal situación introducimos una generalización de la noción de institución.

3.3.16. Definición (Institución). Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Una **institución sobre $\mathbf{C}$** es un cuádruplo $(\mathbf{Sign}, \mathrm{Mod}, \mathrm{Sen}, \alpha)$, en el que $\mathbf{Sign}$ es una categoría, $\mathrm{Mod}\colon \mathbf{Sign}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ y $\mathrm{Sen}\colon \mathbf{Sign} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ son pseudo-functores y α es una transformación pseudo-extranatural $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)\colon \mathrm{Mod}(\cdot) \times \mathrm{Sen}(\cdot) \longrightarrow \mathbf{C}$.

A partir de la definición anterior, es inmediato que el cuádruplo $(\mathbf{Sig}, \mathrm{Alg}, \mathrm{Ter}, (\mathrm{Pd}, \theta))$ es una institución sobre $\mathbf{Set}$.

La definición anterior generaliza diversas nociones de institución, como la introducida en [GB86], en donde se considera que $\mathrm{Mod}\colon \mathbf{Sign}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$, $\mathrm{Sen}\colon \mathbf{Sign} \longrightarrow \mathbf{Set}$ y $\alpha\colon \mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}(\cdot)) \times \mathrm{Sen}(\cdot) \longrightarrow \mathbf{C}$ una transformación extranatural.

La necesidad de considerar pseudo-functores es consecuencia de tener en cuenta la variación sobre el conjunto de tipos subyacente a las signaturas. Además, la relación entre términos y álgebras heterogéneas no sólo es compatible con el cambio de signaturas, sino con la estructura categorial de las categorías de álgebras y términos heterogéneos, por lo que la restricción del codominio de Sen a $\mathbf{Set}$ y del dominio de la transformación extranatural a $\mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}(\cdot))$ es, en este caso, innecesaria.

Cuando la categoría de signaturas que se considere tenga una estructura adicional de 2-categoría, se tiene el concepto correspondiente de 2-institución.

3.3.17. Definición (2-Institución). Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Una **2-institución sobre $\mathbf{C}$** es un cuádruplo $(\mathbf{Sign}, \mathrm{Mod}, \mathrm{Sen}, \alpha)$, en el que $\mathbf{Sign}$ es una 2-categoría, $\mathrm{Mod}\colon \mathbf{Sign}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ y $\mathrm{Sen}\colon \mathbf{Sign} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ son pseudo-functores y $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)\colon \mathrm{Mod}(\cdot) \times \mathrm{Sen}(\cdot) \longrightarrow \mathbf{C}$ es una transformación pseudo-extranatural.

En la última parte de este capítulo, se introducen categorías más generales de signaturas algebraicas y, en particular, una noción de 2-célula entre morfismos de signaturas, que nos permitirán demostrar que la relación entre términos y álgebras heterogéneas es, también, un ejemplo de 2-institución.

3.4 Teorías heterogéneas.

Para la categoría de términos asociada a una signatura $\underline{\Sigma}$, la noción natural de ecuación es la de un par de morfismos paralelos en $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$. Si P, $Q\colon X \longrightarrow Y$ son un par de morfismos en $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$, decimos que el par (P, Q) es una ecuación de tipo (X, Y).

Lo mismo que para los términos, si nos olvidamos de la estructura categorial de $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$, tenemos que las ecuaciones se organizan naturalmente como un $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)^2$-conjunto. Además, podemos extender el concepto de validez para las ecuaciones con tipos en $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)^2$ diciendo que una ecuación de tipo (X, Y) es válida en una $\underline{\Sigma}$-álgebra $\underline{A}$, $\underline{A} \models^{\Sigma}_{X,Y} (P, Q)$ si y sólo si, para cada $s \in S$ y cada $y \in Y_s$,

$\underline{A} \models^{\underline{\Sigma}}_{X,s} (P_s(y), Q_s(y))$. Denotamos al $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)^2$-conjunto de las ecuaciones como $\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma}) = \mathrm{Ter}(\underline{\Sigma})^2$. Las ecuaciones originales son, desde este punto de vista, pares de morfismos cuyo codominio es un S-conjunto de la forma δ^s. La validez de una ecuación de tipo (X, Y) equivale a la validez del conjunto de ecuaciones $\{(P_s(y), Q_s(y)) \mid s \in S,\ y \in Y_s\}$.

Cada morfismo de signaturas $\underline{d} : \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ induce una h-aplicación $((\coprod_\varphi)^2, \underline{d}_\diamond^2)$ de $((\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)^2, \mathrm{Ter}(\underline{\Sigma}))$ en $((\boldsymbol{\mathcal{U}}^T)^2, \mathrm{Ter}(\underline{\Lambda}))$, donde $(\coprod_\varphi)^2$ es la aplicación que a un par (X, Y) le asigna $(\coprod_\varphi X, \coprod_\varphi Y)$ y $\underline{d}_\diamond^2$ una función de traducción de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones en $\underline{\Lambda}$-ecuaciones que a cada $\underline{\Sigma}$-ecuación (P, Q) de tipo (X, Y) le asocia la $\underline{\Lambda}$-ecuación $\underline{d}_\diamond(P, Q) = (\underline{d}_\diamond(P), \underline{d}_\diamond(Q))$ de tipo $(\coprod_\varphi X, \coprod_\varphi Y)$.

Sabemos, por el teorema de completud, que las ecuaciones sobre una signatura $\underline{\Sigma}$ están dotados de un operador clausura $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}$, que se puede definir tanto sintáctica como semánticamente. La traducción mencionada de $\underline{\Sigma}$-términos en $\underline{\Lambda}$-términos términos constituye un morfismo entre espacios de clausura heterogéneos de $(\mathrm{Eq}(\underline{\Sigma}), \mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}})$ en $(\mathrm{Eq}(\underline{\Lambda}), \mathrm{Cn}_{\underline{\Lambda}})$.

Es obvio que lo anterior requiere considerar h-conjuntos, h-aplicaciones y h-espacios de clausura relativos a un universo de Grothendieck $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ al que pertenezca $\boldsymbol{\mathcal{U}}$, siendo $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ el universo del que se extraen los conjuntos de tipos. Aunque esto último no sea estrictamente esencial, sin embargo es conveniente desde un punto de vista categorial, sobre todo cuando lo que aquí exponemos se considera desde la perspectiva de las teorías algebraicas. Así, por ejemplo, las ecuaciones relativas a una signatura algebraica $\underline{\Sigma}$ pueden ser descritas como el conjunto de relaciones en la categoría de términos relativa a $\underline{\Sigma}$, un enfoque que utilizaremos para una demostración alternativa del teorema de completud, en el que caracterizamos el operador de consecuencia mediante una noción de congruencia compatible con los productos en la categoría de términos.

No obstante, si se prefiere evitar la consideración de varios universos, podemos considerar términos y ecuaciones cuyos conjuntos de variables estén limitados en tamaño. En particular, para el estudio de las clases ecuacionales, es suficiente considerar términos y ecuaciones localmente finitarias.

3.4.1. Lema (de satisfaction). Sea $\underline{d} \colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ un morfismo de signaturas, (P, Q) una $\underline{\Sigma}$-ecuación de tipo (X, Y) y $\underline{A}$ una $\underline{\Lambda}$-álgebra. Entonces se cumple que

$$\underline{d}^*(\underline{A}) \models^{\underline{\Sigma}}_{X,Y} (P, Q) \text{ exactamente si } \underline{A} \models^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi(X), \coprod_\varphi(Y)} \underline{d}_\diamond(P, Q)$$

Demostración. La condición $\underline{d}^*(\underline{A}) \models^{\underline{\Sigma}}_{X,Y} (P, Q)$ equivale a $P^{\underline{d}^*\underline{A}} = Q^{\underline{d}^*\underline{A}}$ que, por 3.3.15, equivale a $\underline{d}_\diamond(P)^{\underline{A}} = \underline{d}_\diamond(Q)^{\underline{A}}$, y, por tanto, a $\underline{A} \models^{\underline{\Lambda}}_{\coprod_\varphi(X), \coprod_\varphi(Y)} \underline{d}_\diamond(P, Q)$. □

3.4.2. Definición. Una **presentación de una teoría ecuacional** es un par $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$, en el que $\underline{\Sigma}$ es una signatura algebraica y $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma})$. Si en una presentación $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ el conjunto de ecuaciones es cerrado, $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, entonces $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$

se denomina una **teoría ecuacional**. Una presentación $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ es **finitaria** si $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{f}}(\underline{\Sigma})$ y **localmente finitaria** si $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}_{\mathrm{lf}}(\underline{\Sigma})$.

Un **morfismo de presentaciones de teorías ecuacionales** de $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ en $(\underline{\Lambda}, \mathcal{H})$ es un morfismo de signaturas $\underline{d}\colon \Sigma \longrightarrow \Lambda$ tal que $\underline{d}_{\diamond}[\mathcal{E}] \subseteq \mathrm{Cn}_{\underline{\Lambda}}(\mathcal{H})$. Denotamos mediante $\overline{\mathcal{E}}$ a $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})$.

3.4.3. Proposición. Las presentaciones de teorías ecuacionales y los morfismos entre ellas determinan una categoría denotada como **Thp**.

Demostración. Nos limitamos a demostrar que la composición de morfismos de presentaciones de teorías es una presentación de teorías. Para ello, observemos que si $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ y $\underline{e}\colon \underline{\Lambda} \longrightarrow \underline{\Omega}$ son morfismos de signaturas, (P, Q) es una $\underline{\Sigma}$-ecuación de tipo (X, Y) y $\underline{C}$ una $\underline{\Omega}$-álgebra, entonces $\underline{e}_{\diamond}(\underline{d}_{\diamond}(P))^{\underline{C}} = \underline{e}_{\diamond}(\underline{d}_{\diamond}(Q))^{\underline{C}}$ si y sólo si $(\underline{e} \circ \underline{d})_{\diamond}(P)^{\underline{C}} = (\underline{e} \circ \underline{d})_{\diamond}(Q)^{\underline{C}}$. Por consiguiente, para cada familia de $\underline{\Sigma}$-ecuaciones $\mathcal{E}$, se cumple que $\mathrm{Cn}_{\underline{\Omega}}(\underline{e}_{\diamond}[\underline{d}_{\diamond}[\mathcal{E}]]) = \mathrm{Cn}_{\underline{\Omega}}((\underline{e} \circ \underline{d})_{\diamond}[\mathcal{E}])$. Si $\underline{d}\colon (\underline{\Sigma}, \mathcal{E}) \longrightarrow (\underline{\Lambda}, \mathcal{H})$ y $\underline{e}\colon (\underline{\Lambda}, \mathcal{H}) \longrightarrow (\underline{\Omega}, \mathcal{F})$ son morfismos de presentaciones algebraicas, entonces

$$\underline{e}_{\diamond}[\underline{d}_{\diamond}[\mathcal{E}]] \subseteq \underline{e}_{\diamond}[\mathrm{Cn}_{\underline{\Lambda}}(\mathcal{H})] \subseteq \mathrm{Cn}_{\underline{\Omega}}(\underline{e}_{\diamond}[H]) \subseteq \mathrm{Cn}_{\underline{\Omega}}(\mathcal{F})$$

a partir de lo cual se sigue la proposición. □

A la subcategoría plena de **Thp** determinada por las presentaciones finitarias la denotamos como $\mathbf{Thp}_{\mathrm{f}}$. Para algunos fines conviene considerar la subcategoría plena de **Thp** asociada a las teorías, que es equivalente a la misma. Ésta puede obtenerse a partir de la construcción de Grothendieck para functores covariantes aplicada al functor Cn. Asimismo, la categoría **Thp** se puede obtener a partir de la categoría $\mathbf{Thp}_{\mathrm{ap}}$ que tiene como objetos presentaciones de teorías y como morfismos de $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ en $(\underline{\Lambda}, \mathcal{D})$ los morfismos de signaturas $\underline{d} : \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ tales que $\underline{d}_{\diamond}[\mathcal{E}] \subseteq \mathcal{H}$, y que se denominan **morfismos de presentaciones estrictos** o morfismos que **preservan axiomas**.

Toda signatura $\underline{\Sigma}$ se puede considerar como la presentación $(\underline{\Sigma}, \emptyset)$, lo cual determina un functor de inclusión canónico de **Sig** en **Thp**. Si $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ es una presentación de teorías, de la clase ecuacional determinada por $\mathcal{E}$ obtenemos la subcategoría plena de $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})$ cuyo conjunto de objetos es precisamente $\mathrm{Mod}_{S,\Sigma}(\mathcal{E})$, y que se denota como $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$. Podemos extender el functor Alg de **Sig** en **Cat** hasta la categoría de las presentaciones **Thp**, como pone de manifiesto la siguiente proposición.

3.4.4. Proposición. De **Thp** en **Cat** se tiene un functor contravariante, denotado como $\mathrm{Alg}^{\mathrm{th}}$, y definido como

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Thp} & \xrightarrow{\mathrm{Alg}^{\mathrm{th}}} & \mathbf{Cat} \\ (\underline{\Sigma}, \mathcal{E}) & & \mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E}) \\ \underline{d}\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\uparrow \underline{d}^* \\ (\underline{\Lambda}, \mathcal{H}) & & \mathbf{Alg}(\underline{\Lambda}, \mathcal{H}) \end{array}$$

Demostración. Sea $\underline{B}$ una $\underline{\Lambda}$-álgebra tal que $\underline{B} \models \mathcal{H}$. Entonces $\underline{B} \models \mathrm{Cn}_{\underline{\Lambda}}(\mathcal{H})$ y por lo tanto $\underline{B} \models \underline{d}_*(\mathcal{E})$ y por el lema de satisfacción $\underline{d}^*(\underline{B}) \models \mathcal{E}$. □

Para cada signatura $\underline{\Sigma}$, cada conjunto de ecuaciones $\mathcal{E} \in \mathrm{Eq}(\underline{\Sigma}))$ determina una relación de equivalencia en $\mathrm{Ter}(\underline{\Sigma})$. Esta relación constituye una congruencia en la categoría $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$, como se puede comprobar atendiendo a las reglas que definen el operador de consecuencia $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}$. Cada teoría ecuacional tiene asociada por tanto una categoría cociente de $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$ con los mismos objetos y con morfismos clases de equivalencia de términos respecto de la teoría. Podemos pues extender también el functor Ter de **Sig** en **Cat** hasta la categoría de presentaciones **Thp**.

3.4.5. Proposición. De **Thp** en **Cat** existe un functor, denotado como $\mathrm{Ter}^{\mathrm{th}}$, y definido como

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Thp} & \xrightarrow{\mathrm{Ter}^{\mathrm{th}}} & \mathbf{Cat} \\ (\underline{\Sigma}, \mathcal{E}) & & \mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E}) \\ \underline{d}\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow \mathrm{Ter}^{\mathrm{th}}(\underline{d}) \\ (\underline{\Lambda}, \mathcal{H}) & & \mathbf{Ter}(\underline{\Lambda}, \mathcal{H}) \end{array}$$

en donde $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ es la categoría cociente obtenida al dividir $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$ entre la congruencia $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{E})$, $\mathbf{Ter}(\underline{\Lambda}, \mathcal{H})$ la obtenida al dividir $\mathbf{Ter}(\underline{\Lambda})$ entre $\mathrm{Cn}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{H})$ y $\mathrm{Ter}^{\mathrm{th}}(\underline{d})([P]_{\overline{\mathcal{E}}} : X \longrightarrow Y) = [\mathrm{Ter}(\underline{d})(P)]_{\overline{\mathcal{H}}} : \coprod_\varphi X \longrightarrow \coprod_\varphi Y$. □

3.5 Signaturas derivadas.

Los morfismos de signaturas considerados en las secciones anteriores asignan a cada símbolo de operación de la signatura dominio un símbolo de operación de la signatura codominio. Las relaciones entre signaturas algebraicas pueden ser, sin embargo, más complejas, en el sentido de que los símbolos básicos de una signatura se interpreten como símbolos derivados de la signatura codominio.

En lo que sigue estudiamos el concepto de *derivor* entre signaturas, así como los *morfismos de Fujiwara*, de los que los derivors son un caso particular, y que permite considerar morfismos entre signaturas que no sólo transforman símbolos de operación básicos en derivados, sino que lo hacen respecto de morfismos entre los conjuntos de tipos que asocian a tipos básicos en el dominio *tipos derivados* en el codominio.

Derivors.

Los símbolos de operación derivados de una signatura algebraica pueden considerarse como los símbolos de operación de un nueva signatura. Las aplicaciones que asocian a los símbolos de operación de una signatura los símbolos de operación derivados sobre otra signatura forman una nueva clase de morfismos denominados *derivors*. En lo que sigue, si (S, Σ) es una signatura algebraica denotamos a $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(S, \Sigma)$ mediante $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)$.

3.5.1. Definición. Sean (S, Σ) y (T, Λ) dos signaturas algebraicas. Un **derivor** de (S, Σ) en (T, Λ) es un par (φ, d), con $\varphi\colon S \longrightarrow T$ y $d\colon \Sigma \longrightarrow \Delta_{\varphi^\star \times \varphi}(\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda))$.

Si $(\varphi, d)\colon (S, \Sigma) \longrightarrow (T, \Lambda)$ es un derivor, entonces, para cada $(w, s) \in S^\star \times S$,

$$d_{w,s}\colon \Sigma_{w,s} \longrightarrow \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)_{\varphi^\star(w),\varphi(s)} = \mathrm{Fr}_\Sigma(\downarrow\varphi^\star(w))_{\varphi(s)}$$

asigna a cada símbolo de operación $\sigma : w \longrightarrow s$, un símbolo de operación *derivado* $d(\sigma) : \varphi^\star(w) \longrightarrow \varphi(s)$, de tal manera que las ariedades y coariedades se preserven módulo la correspondencia entre tipos indicada por φ.

Para cada signatura algebraica $\underline{\Lambda} = (T, \Lambda)$, $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)$ es el conjunto heterogéneo subyacente del álgebra de Hall para T, $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)$. Puesto que, por la proposición 2.12.6, $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)$ es isomorfa a $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)$, los derivors pueden definirse, alternativa, pero equivalentemente, como pares (φ, d) con $d : \Sigma \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)$.

Por otra parte, cada aplicación $\varphi : S \longrightarrow T$ determina un functor de la categoría $\mathbf{Alg}(\mathrm{H}_T)$ en la categoría $\mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)$, por lo que $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)_{\varphi^\star\times\varphi}$ está a su vez dotado de una estructura de álgebra de Hall para S, que nos permitirá, en particular, definir la composición de derivors. Mostramos, a continuación, la existencia de tal functor definiendo un morfismo de presentaciones algebraicas de $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{H}_S})$ en $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_T}, \mathcal{E}^{\mathrm{H}_T})$.

3.5.2. Proposición. Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T$ un morfismo entre conjuntos de tipos y $\mathrm{h}^\varphi\colon \Sigma^{\mathrm{H}_S} \longrightarrow \Sigma^{\mathrm{H}_T}_{\varphi^\star\times\varphi}$ la $S^\star \times S$-aplicación definida como

1. Para cada $w \in S^\star$ y cada $i \in |w|$, $\mathrm{h}^\varphi(\pi^w_i) = \pi^{\varphi^\star(w)}_i$.

2. Para cada u, $w \in S^\star$ y cada $s \in S$, $\mathrm{h}^\varphi(\xi_{u,w,s}) = \xi_{\varphi^\star(u),\varphi^\star(w),\varphi(s)}$

Entonces $(\varphi^\star \times \varphi, \mathrm{h}^\varphi)\colon (S^\star \times S, \underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{H}_S}) \longrightarrow (T^\star \times T, \underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_T}, \mathcal{E}^{\mathrm{H}_T})$ es un morfismo de presentaciones algebraicas. □

Los morfismos de presentaciones inducen functores en sentido inverso entre las categorías de álgebras asociadas, por lo que cada aplicación entre conjuntos de tipos $\varphi\colon S \longrightarrow T$, determina el functor $(\varphi^\star \times \varphi, \mathrm{h}^\varphi)^*\colon \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_T) \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathrm{H}_S)$, que transforma $T^\star \times T$-álgebras de Hall en $S^\star \times S$-álgebras de Hall. La acción del functor sobre el álgebra libre de Hall sobre una T-signatura Λ es un álgebra de Hall para S, cuyo $S^\star \times S$-conjunto subyacente es $\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)_{\varphi^\star \times \varphi}$.

Observemos que si $(\varphi, d) : (S, \Sigma) \longrightarrow (T, \Lambda)$ es un derivor, entonces $d : \Sigma \longrightarrow \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)_{\varphi^\star \times \varphi}$ puede extenderse hasta un homomorfismo de álgebras de Hall $d^\sharp\colon \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)_{\varphi^\star \times \varphi}$, cuya $S^\star \times S$-aplicación subyacente determina una función de traducción de $\underline{\Sigma}$-términos en $\underline{\Lambda}$-términos, y tal que, para cada $(w, s) \in S^\star \times S$, $d^\sharp_{w,s}$ es una aplicación que asigna a términos en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ términos en $\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\downarrow \varphi^\sharp(w))_{\varphi(s)}$.

3.5.3. Definición. Sean $(\varphi, d)\colon (S, \Sigma) \longrightarrow (T, \Lambda)$ y $(\psi, e)\colon (T, \Lambda) \longrightarrow (U, \Omega)$ dos derivors. Entonces $(\psi, e) \circ (\varphi, d)$, la **composición** de (φ, d) con (ψ, e), es el derivor $(\psi \circ \varphi, e^\sharp_{\varphi^\star \times \varphi} \circ d)$, en el que $e^\sharp_{\varphi^\star \times \varphi} \circ d$ se obtiene a partir de

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\eta_\Lambda"] \arrow[dr, "e"'] & \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda) \arrow[d, "e^\sharp"] \\
& \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_U}(\Omega)_{\psi^\star \times \psi}
\end{tikzcd}
\quad \text{como} \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)_{\varphi^\star \times \varphi} \arrow[d, "e^\sharp_{\varphi^\star \times \varphi}"] & \Sigma \arrow[l, "d"'] \\
\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_U}(\Omega)_{\psi^\star \times \psi_{\varphi^\star \times \varphi}} &
\end{tikzcd}
$$

siendo $e^\sharp$ la extensión de e al álgebra libre de Hall sobre Λ.

Para cada signatura (S, Σ), la **identidad** en (S, Σ) es el par $(\mathrm{id}_S, \eta_\Sigma)$.

La definición anterior nos permite formar una categoría de signaturas cuyos morfismos sean los derivors.

3.5.4. Proposición. Las signaturas algebraicas y los derivors forman una categoría, denotada como $\mathbf{Sig}_{\mathrm{der}}$.

Demostración. Nos limitamos a demostrar que la composición de derivors es un derivor y que tal composición es asociativa. En efecto, por una parte, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_U}(\Omega)_{\psi^\star \times \psi_{\varphi^\star \times \varphi}} &= \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_U}(\Omega)_{(\psi^\star \times \psi) \circ (\varphi^\star \times \varphi)} \\
&= \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_U}(\Omega)_{(\psi^\star \circ \varphi^\star) \times (\psi \circ \varphi)} \\
&= \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_U}(\Omega)_{(\psi \circ \varphi)^\star \times \psi \circ \varphi}
\end{aligned}
$$

Por otra, dada la situación

$$(S,\Sigma) \xrightarrow{(\varphi,d)} (T,\Lambda) \xrightarrow{(\psi,e)} (U,\Omega) \xrightarrow{(\gamma,h)} (X,\Xi)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
(\gamma,h)\circ((\psi,e)\circ(\varphi,d)) &= (\gamma,h)\circ(\psi\circ\varphi, e^{\sharp}_{\varphi^{\star}\times\varphi}\circ d)\\
&= (\gamma\circ(\psi\circ\varphi), h^{\sharp}_{(\psi\circ\varphi)^{\star}\times(\psi\circ\varphi)}\circ(e^{\sharp}_{\varphi^{\star}\times\varphi}\circ d))\\
&= ((\gamma\circ\psi)\circ\varphi, h^{\sharp}_{\psi^{\star}\times\psi_{\varphi^{\star}\times\varphi}}\circ(e^{\sharp}_{\varphi^{\star}\times\varphi}\circ d))\\
&= ((\gamma\circ\psi)\circ\varphi, (h^{\sharp}_{\psi^{\star}\times\psi_{\varphi^{\star}\times\varphi}}\circ e^{\sharp}_{\varphi^{\star}\times\varphi})\circ d)\\
&= ((\gamma\circ\psi)\circ\varphi, (h^{\sharp}_{\psi^{\star}\times\psi}\circ e^{\sharp})_{\varphi^{\star}\times\varphi}\circ d)\\
&= ((\gamma\circ\psi)\circ\varphi, (h^{\sharp}_{\psi^{\star}\times\psi}\circ e)^{\sharp}_{\varphi^{\star}\times\varphi}\circ d)\\
&= (\gamma\circ\psi, h^{\sharp}_{\psi^{\star}\times\psi}\circ e)\circ(\varphi,d)\\
&= ((\gamma,h)\circ(\psi,e))\circ(\varphi,d)
\end{aligned}$$

□

La mónada de los derivors.

La categoría $\mathbf{Sig}_{\mathrm{der}}$ se puede obtener como la categoría de Kleisli para una cierta mónada. Para cada conjunto de tipos S, tenemos la adjunción $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{H}_S} \dashv \mathrm{G}_{\mathrm{H}_S}$, y por consiguiente, una mónada sobre $\mathbf{Sig}(S)$ denotada como $\mathbf{Fr}_{\mathrm{H}_S} = (\mathrm{Fr}_{\mathrm{H}_S}, \eta^{\mathrm{H}_S}, \mu^{\mathrm{H}_S})$. Podemos entonces definir la siguiente mónada sobre $\mathbf{Sig}$.

3.5.5. Proposición. El triplo $\mathbf{der} = (\mathrm{der}, \eta, \mu)$ es un mónada sobre $\mathbf{Sig}$, siendo der el functor definido como

$$\mathbf{Sig} \xrightarrow{\mathrm{der}} \mathbf{Sig}$$

$$\begin{tikzcd}
(S,\Sigma) \arrow[d, "{(\varphi,d)}"'] & & (S,\mathrm{Fr}_{\mathrm{H}_S}(\Sigma)) \arrow[d, "{(\varphi,d^{\sharp})}"] \\
(T,\Lambda) & \longmapsto & (T,\mathrm{Fr}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda))
\end{tikzcd}$$

$\eta_{(S,\Sigma)} = (\mathrm{id}, \eta^{H_S}_{\Sigma})$ y $\mu_{(S,\Sigma)} = (\mathrm{id}, \mu^{H_S}_{\Sigma})$.

Es inmediato que la categoría $\mathbf{Sig}_{\mathrm{der}}$ es isomorfa a $\mathbf{Kl}(\mathbf{der})$.

Álgebras heterogéneas y derivors.

El functor contravariante $\mathrm{Alg}\colon \mathbf{Sig} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ se puede extender hasta un functor contravariante $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}\colon \mathbf{Sig}_{\mathrm{der}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$. Mediante la construcción de Grothendieck, se obtiene entonces una categoría $\mathbf{Alg}_{\mathrm{der}}$ en la que los morfismos entre álgebras permiten asociar a operaciones estructurales del álgebra dominio, operaciones derivadas del álgebra codominio, preservando a su vez la correspondencia entre los tipos indicada por los morfismos en cuestión.

3.5.6. Proposición. Sea $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$ un morfismo en $\mathbf{Sig}_{\mathrm{der}}$. Entonces $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}(\varphi, d)$ es el functor definido como

$$\mathbf{Alg}(T,\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}(\varphi,d)} \mathbf{Alg}(S,\Sigma)$$

$$\begin{array}{ccc} (B,G) & & (B_\varphi, G^{(\varphi,d)}) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \longmapsto & \downarrow{\scriptstyle f_\varphi} \\ (B',G') & & (B'_\varphi, G'^{(\varphi,d)}) \end{array}$$

siendo, para cada (T,Λ)-álgebra (B,G), $G^{(\varphi,d)} = G^{\sharp}_{\varphi^\star\times\varphi} \circ d$, y se obtiene a partir de

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\eta_\Lambda"] \arrow[dr, "G"'] & \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda) \arrow[d, "G^\sharp"] \\ & \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_T}(B) \end{tikzcd} \quad \text{como} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)_{\varphi^\star\times\varphi} \arrow[d, "G^\sharp_{\varphi^\star\times\varphi}"] & \Sigma \arrow[l, "d"'] \\ \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_T}(B)_{\varphi^\star\times\varphi} = \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_S}(B_\varphi) & \end{tikzcd}$$

Demostración. Para cada (T,Λ)-álgebra (B,G), $G : \Lambda \longrightarrow \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_T}(B)$, y puesto que $\mathrm{Op}_{\mathrm{H}_T}(B)$ es un álgebra de Hall, G se puede extender hasta el álgebra libre de Hall sobre Λ. Además, se tiene que $\mathrm{Op}_{\mathrm{H}_T}(B)_{\psi^\star\times\psi} = \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_S}(B_\varphi)$ puesto que para cada $(w,s) \in S^\star \times S$ se cumple que

$$\begin{aligned} (\mathrm{Op}_{\mathrm{H}_T}(B)_{\varphi^\star\times\varphi})_{w,s} &= \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_T}(B)_{\varphi^\star(w),\varphi(s)} \\ &= B_{\varphi^\star(w)} \longrightarrow B_{\varphi(s)} \\ &= B_{(\varphi(w_0),\dots,\varphi(w_{|w|-1}))} \longrightarrow B_{\varphi(s)} \\ &= \prod(B_{\varphi(w_i)} \mid i \in |w|) \longrightarrow B_{\varphi(s)} \\ &= \prod((B_\varphi)_{w_i} \mid i \in |w|) \longrightarrow (B_\varphi)_s \\ &= (B_\varphi)_w \longrightarrow (B_\varphi)_s \\ &= \mathrm{Op}_{\mathrm{H}_S}(B_\varphi)_{w,s} \end{aligned}$$

por lo que $G^{(\varphi,d)}$, así definido, es una estructura algebraica sobre B_φ.

Sea $f : (B,G) \longrightarrow (B',G')$ un homomorfismo de (T,Λ)-álgebras y $\sigma : w \longrightarrow s$ un símbolo de operación en Σ. Entonces $f_\varphi : (B_\varphi, G^{(\varphi,d)}) \longrightarrow (B'_\varphi, G'^{(\varphi,d)})$, puesto que $G^{(\varphi,d)}(\sigma)$ es un símbolo de operación polinómica y por tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd} B_{\varphi_w} \arrow[r, "G^{(\varphi,d)}(\sigma)"] \arrow[d, "f_{\varphi_w}"'] & B_{\varphi_s} \arrow[d, "f_{\varphi_s}"] \\ B'_{\varphi_w} \arrow[r, "G'^{(\varphi,d)}(\sigma)"'] & B'_{\varphi_s} \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, se tiene que $(g \circ f)_\varphi = g_\varphi \circ f_\varphi$, por lo que $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}(\varphi,d)$ es un functor. □

A partir de la definición del functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}$, para cada derivor $(\varphi,d) \colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$, es evidente que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg}(S,\Sigma) \arrow[r, "\mathrm{G}_{(S,\Sigma)}"] & \mathbf{Set}^S \\ \mathbf{Alg}(T,\Lambda) \arrow[r, "\mathrm{G}_{(T,\Lambda)}"'] \arrow[u, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}(\varphi,d)"] & \mathbf{Set}^T \arrow[u, "\Delta_\varphi"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

La construcción anterior se extiende hasta un functor contravariante de la categoría $\mathbf{Sig}_{\mathrm{der}}$ en $\mathbf{Cat}$.

3.5.7. Proposición. De $\mathbf{Sig}_{\mathrm{der}}$ en $\mathbf{Cat}$ existe un functor contravariante, denotado por $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}$, y definido como:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sig}_{\mathrm{der}} \arrow[r, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}"] & \mathbf{Cat} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (S,\Sigma) \arrow[d, "(\varphi,d)"'] & & \mathbf{Alg}(S,\Sigma) \\ (T,\Lambda) & \longmapsto & \mathbf{Alg}_{(T,\Lambda)} \arrow[u, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}(\varphi,d)"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Dados $(\varphi,d) \colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$ y $(\psi,e) \colon (T,\Lambda) \longrightarrow (U,\Omega)$, demostramos que $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}(\varphi,d) \circ \mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}(\psi,e) = \mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}((\psi,e) \circ (\varphi,d))$.

Sea (A,F) una (U,Ω)-álgebra. Entonces $A_{\psi_\varphi} = A_{\psi\circ\varphi}$. Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
F^{(\psi,e)\,(\varphi,d)} &= (F^\sharp_{\psi^\star\times\psi}\circ e)^{(\varphi,d)}\\
&= (F^\sharp_{\psi^\star\times\psi}\circ e)^\sharp_{\varphi^\star\times\varphi}\circ d\\
&= (F^\sharp_{\psi^\star\times\psi_{\varphi^\star\times\varphi}}\circ e^\sharp_{\varphi^\star\times\varphi})\circ d\\
&= F^\sharp_{\psi^\star\times\psi_{\varphi^\star\times\varphi}}\circ (e^\sharp_{\varphi^\star\times\varphi}\circ d)\\
&= F^\sharp_{(\psi\circ\varphi)^\star\times(\psi\circ\varphi)}\circ (e^\sharp_{\varphi^\star\times\varphi}\circ d)\\
&= F^{((\psi\circ\varphi),e^\sharp_{\varphi^\star\times\varphi}\circ d)}\\
&= F^{(\psi,e)\circ(\varphi,d)}
\end{aligned}$$

por lo que $(A_{\psi_\varphi}, F^{(\psi,e)\,(\varphi,d)}) = (A_{\psi\circ\varphi}, F^{(\psi,e)\circ(\varphi,d)})$. Por último, si f es un homomorfismo de (U,Ω)-álgebras, entonces $f_{\psi_\varphi} = f_{\psi\circ\varphi}$. $\square$

3.5.8. Definición. La categoría $\mathbf{Alg}_{\mathrm{der}}$ es $\int^{\mathbf{Sig}_{\mathrm{der}}}\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}$, i.e., la categoría obtenida mediante la construcción de Grothendieck aplicada al functor contravariante $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}$.

La categoría $\mathbf{Alg}_{\mathrm{der}}$ tiene como objetos los pares $((S,\Sigma),(A,F))$, con S un conjunto de tipos, Σ una S-signatura algebraica y (A,F) una Σ-álgebra, y como morfismos de $((S,\Sigma),(A,F))$ en $((T,\Lambda),(B,G))$, los pares $((\varphi,d),f)$, con (φ,d) un derivor de (S,Σ) en (T,Λ) y f un homomorfismo de Σ-álgebras de (A,F) en $(B_\varphi, G^{(\varphi,d)})$.

Términos heterogéneos y derivors.

Cada derivor entre signaturas tiene asociado un functor entre las categorías de términos respectivas, definido de manera similar al caso de los morfismos de signaturas.

3.5.9. Proposición. Cada derivor $(\varphi,d)\colon (S,\Sigma)\longrightarrow(T,\Lambda)$ determina un functor $\mathrm{Ter}_{\mathrm{der}}(\varphi,d)$ definido como

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}) & \xrightarrow{\ \mathrm{Ter}_{\mathrm{der}}(\underline{d})\ } & \mathbf{Ter}(\underline{\Lambda})\\[1ex]
X & & \coprod_\varphi X\\
{\scriptstyle P}\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle (\theta^\varphi)^{-1}\left((\theta^\varphi(\eta^{\Lambda}_{\coprod_\varphi X}))^\sharp\circ P\right)}\\
Y & & \coprod_\varphi Y
\end{array}$$

donde $\big(\theta^{\varphi}(\eta^{\Delta}_{\coprod_{\varphi} X})\big)^{\sharp}$se obtiene a partir de

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\eta^{(S,\Sigma)}_X"] \arrow[d, "\eta^{\varphi}_X"'] \arrow[drr, "\theta^{\varphi}(\eta^{\Delta}_{\coprod_{\varphi} X})"] & & \mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(X) \arrow[d, "\big(\theta^{\varphi}(\eta^{\Delta}_{\coprod_{\varphi} X})\big)^{\sharp}"] \\
\Delta_{\varphi} \coprod_{\varphi} X \arrow[rr, "\Delta_{\varphi}(\eta^{\Delta}_{\coprod_{\varphi} X})"'] & & \Delta_{\varphi} \mathrm{Fr}_{\underline{\Delta}}(\coprod_{\varphi} X)
\end{tikzcd}$$

y siendo θ^{φ} el isomorfismo asociado a la adjunción $\coprod_{\varphi} \dashv \Delta_{\varphi}$.

De forma similar al caso de la categoría **Sig**, la construcción anterior se puede extender hasta un pseudo-functor $\mathrm{Ter}_{\mathrm{der}}\colon \mathbf{Sig}_{\mathrm{der}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$. Además, para los derivors se cumplen las contrapartidas obvias de las proposiciones en la sección anteriores relativas a morfismo de signaturas. En particular, la realización de términos en las álgebras es invariante respecto de los functores $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}$ y $\mathrm{Ter}_{\mathrm{der}}$, para los que se cumple una proposición análoga a 3.3.15. Se obtiene por consiguiente una categoría de teorías $\mathbf{Thr}_{\mathrm{der}}$ en donde las traducciones entre ecuaciones son las asociadas a los derivors.

Morfismos de Fujiwara.

Los morfismos entre signaturas se pueden generalizar para incorporar interpretaciones entre las álgebras heterogéneas más complejas que las proporcionadas por los derivors, si admitimos que un homomorfismo entre álgebras puede asignar a cada elemento de un cierto tipo, un elemento *derivado* del álgebra codominio, de tal manera que las operaciones del álgebra dominio se interpreten, en el álgebra codominio, como operaciones derivadas para los nuevos elementos. Estas interpretaciones fueron consideradas, para el caso de las álgebras homogéneas, por Fujiwara en [Fuj59] y [Fuj60].

Si A es un conjunto heterogéneo cuyos elementos están clasificados por un conjunto de tipos S, entonces podemos tomar al conjunto de las palabras sobre S como un nuevo conjunto de tipos y, a partir de A, formar un nuevo conjunto heterogéneo cuyos elementos estarán clasificados por dichas palabras. Si, además, A está dotado de alguna estructura algebraica, esta puede ser usada para definir operaciones derivadas a partir de la estructura interna de los nuevos elementos y de las operaciones estructurales originales de dicha álgebra.

Además, en corcondancia con lo dicho, podemos considerar ahora morfismos más complejos entre álgebras heterogéneas, en los que a cada elemento del dominio se le asigne una familia formada con elementos del codominio.

Para describir tales interpretaciones, denotamos a la mónada asociada a la formación del monoide libre mediante **FMon** $= (\star, \between, \curlywedge)$, donde, para cada conjunto S, $\between_S \colon S \longrightarrow S^\star$ es la inclusión canónica de S en $S^\star$ y $\curlywedge \colon S^{\star\star} \longrightarrow S^\star$ es la función de concatenación de palabras. Como es usual, escribimos $S^\star$ en lugar de $\star(S)$ y (s) en lugar $\between_S\ (s)$. Además, si $\varphi\colon S \longrightarrow T^\star$, denotamos mediante $\varphi^\sharp \colon S^\star \longrightarrow T^\star$ la extensión de φ al monoide libre $S^\star$.

3.5.10. Definición. Sean (S, Σ) y (T, Λ) dos signaturas algebraicas. Un **morfismo de Fujiwara** o, para abreviar, un **F-morfismo**, de (S, Σ) en (T, Λ) es un par (φ, d), en el que $\varphi\colon S \longrightarrow T^\star$ es un morfismo en **Set** y $d\colon \Sigma \longrightarrow \Delta_{\varphi^\sharp \times \varphi}(\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda))$ es una $S^\star \times S$-aplicación.

Obsérvese que cada derivor $(\varphi, d) : (S, \Sigma) \longrightarrow (T, \Lambda)$ induce un F-morfismo $(\between_T \circ \varphi, d)$, puesto que $d : \Sigma \longrightarrow \Delta_{\varphi^\star \times \varphi}(\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}_T}(\Lambda)) = \Delta_{(\between_T \circ \varphi)^\sharp \times \varphi}(\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda))$.

Además, si $(\varphi, d)\colon (S, \Sigma) \longrightarrow (T, \Lambda)$ es un F-morfismo, entonces tenemos que d es una $S^\star \times S$-aplicación tal que, para cada $(w, s) \in S^\star \times S$,

$$d_{w,s} : \Sigma_{w,s} \longrightarrow \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\varphi^\sharp(w), \varphi(s)} = \mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(\downarrow \varphi^\sharp(w))_{\varphi(s)}$$

y puesto que $\Delta_{\varphi^\sharp \times \varphi} = \Delta_{1 \times \between_S} \circ \Delta_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp}$ y el functor $\coprod_{1 \times \between_S}$ es adjunto por la izquierda del functor $\Delta_{1 \times \between_S}$, d es, esencialmente, una $S^\star \times S^\star$-aplicación

$$\theta^{1 \times \between_S}(d) : \textstyle\coprod_{1 \times \between_S}(\Sigma) \longrightarrow \Delta_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp}(\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda))$$

Para el desarrollo de esta sección es convenimos en identificar notacionalmente, para cada F-morfismo (φ, d), a d y a $\theta^{1 \times \between_S}(d)$.

Observemos que, para cualquier palabra w sobre $S^\star$, $\varphi^\sharp(w)$ es una palabra sobre T de la forma

$$\begin{aligned}\varphi^\sharp(w) = (&\overbrace{\varphi^\sharp(w)_0, \dots, \varphi^\sharp(w)_{n_1 - 1}}^{\varphi(w_0)}, \dots \\ &\qquad \dots, \overbrace{\varphi^\sharp(w)_{n_i}, \dots, \varphi^\sharp(w)_{n_{i+1}-1}}^{\varphi(w_i)}, \dots \\ &\qquad\qquad \dots, \overbrace{\varphi^\sharp(w)_{n_{|w|-1}} \dots, \varphi^\sharp(w)_{n_{|w|}-1}}^{\varphi(w_{|w|-1})})\end{aligned}$$

y para la que se cumple que si $i \in |w|$ y $j \in |\varphi(w_i)|$, entonces $\varphi(w_i)_j = \varphi^\sharp(w)_{n_i + j}$. Si $\sigma : w \longrightarrow s$ es un símbolo de operación en Σ, entonces $d(\sigma) : \varphi^\sharp(w) \longrightarrow \varphi(s)$, que convenimos en denotar también como

$$d(\sigma) : \begin{pmatrix} \varphi^\sharp(w)_0 & \cdots & \varphi^\sharp(w)_{n_1 - 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^\sharp(w)_{n_{|w|-1}} & \cdots & \varphi^\sharp(w)_{n_{|w|}-1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \varphi(s)_0 & \dots & \varphi(s)_{|\varphi(s)|-1} \end{pmatrix}$$

Para cada signatura algebraica $\underline{\Lambda} = (T, \Lambda)$, $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)$ es el conjunto heterogéneo subyacente del álgebra de Bénabou para T, $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)$. Puesto que $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)$ es isomorfa a $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_T}(\coprod_{1\times\eth_T}\Lambda)$, los F-morfismos pueden definirse como pares (φ, d) en los que $d\colon \Sigma \longrightarrow \mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_T}(\coprod_{1\times\eth_T}\Lambda)$.

Cada aplicación $\varphi\colon S \longrightarrow T^\star$ induce un functor de la categoría $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_T)$ en la categoría $\mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$, aunque, a diferencia del caso de las álgebras de Hall, este no viene inducido por un morfismo de presentaciones algebraicas, sino por un derivor entre las presentaciones algebraicas correspondientes. Como consecuencia, para cada T-signatura Λ, $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}$ está dotado de una estructura de álgebra de Bénabou para S, que nos permitirá, en particular, definir la composición de F-morfismos.

3.5.11. Proposición. Para cada $\varphi\colon S \longrightarrow T^\star$ existe una $(S^\star\times S^\star)^\star\times(S^\star\times S^\star)$-aplicación $\mathrm{b}^\varphi\colon \underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S} \longrightarrow \mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_T})_{(\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp)^\star\times\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}$ definida como:

1. Para cada $w \in S^\star$, y cada $i \in |w|$, $\mathrm{b}^\varphi(\pi^w_i)$ es el $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_T}$-término
$$\mathrm{b}^\varphi(\pi^w_i) = \langle \pi^{\varphi^\sharp(w)}_{n_i}, \dots, \pi^{\varphi^\sharp(w)}_{n_{i+1}-1}\rangle_{\varphi^\sharp(w),\varphi(w_i)}$$
de tipo $\lambda \longrightarrow (\varphi^\sharp(w), (\varphi(w_i)))$

2. Para cada u, $w \in S^\star$, $\mathrm{b}^\varphi(\langle\,\rangle_{u,w})$ es el $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_T}$-término
$$\begin{aligned}\mathrm{b}^\varphi(\langle\,\rangle_{u,w}) = \langle &\pi^{\varphi(w_0)}_0 \circ v_0^{(\varphi^\sharp(u),\varphi(w_0))}, \dots, \pi^{\varphi(w_0)}_{|\varphi(w_0)|-1} \circ v_0^{(\varphi^\sharp(u),\varphi(w_0))}, \dots,\\ &\pi^{\varphi(w_i)}_0 \circ v_i^{(\varphi^\sharp(u),\varphi(w_i))}, \dots, \pi^{\varphi(w_i)}_{|\varphi(w_i)|-1} \circ v_i^{(\varphi^\sharp(u),\varphi(w_i))}, \dots,\\ &\pi^{\varphi(w_{|w|-1})}_0 \circ v_{|w|-1}^{(\varphi^\sharp(u),\varphi(w_{|w|-1}))}, \dots, \pi^{\varphi(w_{|w|-1})}_{|\varphi(w_{|w|-1})|-1} \circ v_{|w|-1}^{(\varphi^\sharp(u),\varphi(w_{|w|-1}))}\rangle\end{aligned}$$
de tipo $((\varphi^\sharp(u), \varphi(w_0)), \dots, (\varphi^\sharp(u), \varphi(w_{|w|-1}))) \longrightarrow (\varphi^\sharp(u), \varphi^\sharp(w))$

3. Para cada u, x, $w \in S^\star$, $\mathrm{b}^\varphi(\circ_{u,x,w})$ es el $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_T}$-término
$$\mathrm{b}^\varphi(\circ_{u,x,w}) = \circ_{\varphi^\sharp(u),\varphi^\sharp(x),\varphi^\sharp(w)}(v_0^{(\varphi^\sharp(u),\varphi^\sharp(x))}, v_1^{(\varphi^\sharp(x),\varphi^\sharp(w))})$$
de tipo $((\varphi^\sharp(u), \varphi^\sharp(x)), (\varphi^\sharp(x), \varphi^\sharp(w))) \longrightarrow (\varphi^\sharp(u), \varphi^\sharp(w))$

Además, $(\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp, \mathrm{b}^\varphi)\colon (S^\star\times S^\star, \underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{B}_S}) \longrightarrow (T^\star\times T^\star, \underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_T}, \mathcal{E}^{\mathrm{B}_T})$ es un morfismo de presentaciones algebraicas. □

Puesto que todo derivor entre presentaciones induce un functor en sentido inverso entre las categorías de álgebras asociadas, cada aplicación $\varphi\colon S \longrightarrow T^\star$, determina un functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}(S^\star\times S^\star, \mathrm{b}^\varphi)\colon \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_T) \longrightarrow \mathbf{Alg}(\mathrm{B}_S)$. La acción del functor sobre el álgebra libre de Bénabou sobre una T-signatura Λ es un álgebra de Bénabou para S, cuyo $S^\star\times S^\star$-conjunto subyacente es $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}$.

Observemos que para un F-morfismo $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$, podemos extender $d\colon \Sigma \longrightarrow \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}$ hasta un homomorfismo de álgebras de Bénabou $d^\sharp\colon \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}$, cuya $S^\star\times S^\star$-aplicación subyacente determina una función de traducción de $\underline{\Sigma}$-términos en $\underline{\Lambda}$-términos. En particular, para cada $(w,s)\in S^\star\times S$, $d^\sharp_{w,(s)}$ es una traducción de términos de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}(\downarrow w)_s$ en términos de $\mathrm{Fr}_{\underline{\Lambda}}(\downarrow\varphi^\sharp(w))_{\varphi(s)}$, que asigna a cada variable v^s_i en $\downarrow w$ la tupla de variables $(v_{n_i}^{\varphi(w_i)_0},\dots,v_{n_{i+1}-1}^{\varphi(w_i)_{|\varphi(w_i)|-1}})$.

3.5.12. Definición. Sean $(\varphi,d)\colon (S,\Sigma)\longrightarrow(T,\Lambda)$ y $(\psi,e)\colon(T,\Lambda)\longrightarrow(U,\Omega)$ dos F-morfismos. Entonces la **composición** de (φ,d) con (ψ,e), denotada como $(\psi,e)\circ(\varphi,d)$, es el morfismo $(\psi^\sharp\circ\varphi, e^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d)$, en el que $\psi^\sharp\circ\varphi\colon S\longrightarrow U^\star$ y $e^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d$ se obtiene a partir de

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\eta_\Lambda"] \arrow[dr, "e"'] & \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda) \arrow[d, "e^\sharp"] \\
& \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_U}(\Omega)_{\psi^\sharp\times\psi^\sharp}
\end{tikzcd}
\quad \text{como} \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp} \arrow[d, "e^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}"] & \Sigma \arrow[l, "d"'] \\
\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_U}(\Omega)_{\psi^\sharp\times\psi^\sharp}{}_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp} &
\end{tikzcd}
$$

y para cada signatura (S,Σ), la **F-identidad** es el F-morfismo $(\between_S, \eta_\Sigma^{\mathrm{B}_S})$.

La definición anterior nos permite formar una categoría de signaturas cuyos morfismos son los morfismos de Fujiwara.

3.5.13. Proposición. Las signaturas algebraicas y los morfismos de Fujiwara determinan una categoría, denotada como $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$.

Demostración. Demostramos, en primer lugar, que las F-identidades son identidades.

$$
\begin{aligned}
(\varphi,d)\circ(\between_S,\eta_\Sigma^{\mathrm{B}_S}) &= (\varphi^\sharp\circ\between_S, d^\sharp_{\between_S^\sharp\times\between_S^\sharp}\circ\eta_\Sigma^{\mathrm{B}_S})\\
&= (\varphi,d)\\
(\between_T,\eta_\Lambda^{\mathrm{B}_T})\circ(\varphi,d) &= (\between_T^\sharp\circ\varphi, (\eta_\Lambda^{\mathrm{B}_T})^\sharp{}_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d)\\
&= (\varphi,d)
\end{aligned}
$$

Veamos ahora que la composición de dos F-morfismos es un F-morfismo.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_U}(\Omega)_{\psi^\sharp\times\psi^\sharp})_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp} &= \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_U}(\Omega)_{(\psi^\sharp\times\psi^\sharp)\circ(\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp)}\\
&= \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_U}(\Omega)_{(\psi^\sharp\circ\varphi^\sharp)\times(\psi^\sharp\circ\varphi^\sharp)}\\
&= \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_U}(\Omega)_{(\psi^\sharp\circ\varphi)^\sharp\times(\psi^\sharp\circ\varphi)^\sharp}
\end{aligned}
$$

Por último, veamos que la composición es asociativa. En efecto, dados $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$, $(\psi, e)\colon (T,\Lambda) \longrightarrow (U,\Omega)$ y $(\gamma, h)\colon (U,\Omega) \longrightarrow (X,\Xi)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\gamma,h)\circ((\psi,e)\circ(\varphi,d)) &= (\gamma,h)\circ(\psi^\sharp\circ\varphi, e^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d)\\
&= (\gamma^\sharp\circ(\psi^\sharp\circ\varphi), h^\sharp_{(\psi^\sharp\circ\varphi)^\sharp\times(\psi^\sharp\circ\varphi)^\sharp}\circ(e^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d))\\
&= ((\gamma^\sharp\circ\psi)^\sharp\circ\varphi, h^\sharp_{{\psi^\sharp\times\psi^\sharp}_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}}\circ(e^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d))\\
&= ((\gamma^\sharp\circ\psi)^\sharp\circ\varphi, (h^\sharp_{{\psi^\sharp\times\psi^\sharp}_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}}\circ e^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp})\circ d)\\
&= ((\gamma^\sharp\circ\psi)^\sharp\circ\varphi, (h^\sharp_{{\psi^\sharp\times\psi^\sharp}_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}}\circ e^\sharp)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d)\\
&= ((\gamma^\sharp\circ\psi)^\sharp\circ\varphi, (h^\sharp_{{\psi^\sharp\times\psi^\sharp}_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}}\circ e)^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d)\\
&= (\gamma^\sharp\circ\psi, h^\sharp_{\psi^\sharp\times\psi^\sharp}\circ e)\circ(\varphi,d)\\
&= ((\gamma,h)\circ(\psi,e))\circ(\varphi,d)
\end{aligned}$$

$\square$

La mónada de Fujiwara.

La categoría $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ se puede obtener también como la categoría de Kleisli para una cierta mónada, aunque la obtención de esta última es más complicada que para los derivors. Esto se debe a que si (T,Λ) es una signatura, entonces el par $(T^\star\times T^\star, \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda))$ no es una signatura.

Para obtener una $S^\star$-signatura tal, obsérvese que el functor $\Delta_{\curlywedge\times 1}\colon \mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star} \longrightarrow \mathbf{Set}^{S^{\star\star}\times S^\star}$ asigna a cada $S^\star\times S^\star$-conjunto una $S^\star$-signatura, por lo que, para cada S-signatura Λ, se cumple que $\Delta_{\curlywedge\times 1}(\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda))$ es una $S^\star$-signatura. Por otra parte, para cada conjunto de tipos S, tenemos la adjunción $\underline{\mathrm{Fr}}_{\mathrm{B}_S} \dashv \mathrm{G}_{\mathrm{B}_S}$, y por consiguiente, una mónada sobre $\mathbf{Sig}(S)$ denotada como $\mathbf{Fr}_{\mathrm{B}_S} = (\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}, \eta^{\mathrm{B}_S}, \mu^{\mathrm{B}_S})$. Podemos describir la mónada asociada a los F-morfismos como sigue.

3.5.14. Definición. Sea fuj el functor definido como

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Sig} & \xrightarrow{\quad\mathrm{fuj}\quad} & \mathbf{Sig}\\[1ex]
(S,\Sigma) & & (S^\star, \mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}(\coprod_{1\times\between_S}\Sigma)_{\curlywedge_S\times 1})\\
{\scriptstyle(\varphi,d)}\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle(\varphi,(d^\sharp)_{\curlywedge_S\times 1})}\\
(T,\Lambda) & & (T^\star, \mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_T}(\coprod_{1\times\between_T}\Lambda)_{\curlywedge_S\times 1})
\end{array}$$

en donde $\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}(\coprod_{1\times\between_S}\Sigma)_{\curlywedge_S\times 1}$ se obtiene como la acción sobre Σ del functor

$$\mathbf{Set}^{S^\star\times S}\xrightarrow{\coprod_{1\times\star\between}}\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star}\xrightarrow{\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}}\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star}\xrightarrow{\Delta_{\curlywedge\times 1}}\mathbf{Set}^{S^{\star\star}\times S^\star}$$

Las componentes de la unidad η^{fuj} de la mónada a determinar se obtienen, para cada signatura (S,Σ), mediante las unidades de las mónadas $\mathbf{Fr}_{\mathrm{B}_S}$, tomando como $\eta^{\mathrm{fuj}}_{(S,\Sigma)}$ al morfismo de signaturas $(\between_S,\eta^{\mathrm{B}_S}_{\Sigma})$.

Las componentes de la multiplicación μ^{fuj}, son, para cada signatura (S,Σ), morfismos de signaturas $\mu^{\mathrm{fuj}}_{(S,\Sigma)}$ de $(S^{\star\star},\mathrm{fuj}(\mathrm{fuj}(\Sigma)))$ en $(S^\star,\mathrm{fuj}(\Sigma))$. La primera coordenada de $\mu^{\mathrm{fuj}}_{(S,\Sigma)}$ es $\curlywedge$, la multiplicación de la mónada $\mathbf{FMon}$, mientras que la segunda ha de ser una aplicación de $\mathrm{fuj}(\mathrm{fuj}(\Sigma))$ en $\mathrm{fuj}(\Sigma)_{\curlywedge,\curlywedge}$. Para obtenerla, hemos de definir una transformación natural α en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Set}^{S^{\star\star}\times S^{\star\star}} \arrow[r, "\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_{S^\star}}"] & \mathbf{Set}^{S^{\star\star}\times S^{\star\star}} \arrow[r, "\Delta_{\curlywedge_{S^\star}\times 1}"] & \mathbf{Set}^{S^{\star\star\star}\times S^{\star\star}} \\
 & \mathbf{Set}^{S^{\star\star}\times S^{\star}} \arrow[u, "\coprod_{1\times\between_{S^\star}}"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & {} \arrow[r, phantom, "="] & {} \\
\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star} \arrow[r, "\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}"', ""{name=C}] & \mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star} \arrow[u, "\Delta_{\curlywedge_S\times 1}"] \arrow[r, "\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu^{\mathrm{B}_S}"] & \mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star} \arrow[uu, "\Delta_{\curlywedge_S\times\curlywedge_S}"] \arrow[r, "\Delta_{\curlywedge\times 1}"] & \mathbf{Set}^{S^{\star\star}\times S^\star} \arrow[uu, "\Delta_{\curlywedge_{S^\star}\times\curlywedge_S}"'] \\
\mathbf{Set}^{S^\star\times S} \arrow[u, "\coprod_{1\times\between_S}"] & {} & &
\end{tikzcd}$$

Sea $\Sigma\in\mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star}$. Entonces $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)_{\curlywedge\times\curlywedge}$ está naturalmente dotado de una estructura de $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_{S^\star}}$-álgebra. Esta se obtiene como la $(S^{\star\star}\times S^{\star\star})^\star\times(S^{\star\star}\times S^{\star\star})$-aplicación $\mathrm{id}^{\varphi}_{S^\star}\colon\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_{S^\star}}\longrightarrow\mathrm{Ter}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_T})_{(\curlywedge\times\curlywedge)^\star\times\curlywedge\times\curlywedge}$ de la proposición 3.5.11. Explícitamente, $\mathrm{id}^{\varphi}_{S^\star}$ asigna a cada símbolo de operación $\pi^{\bar{w}}_i$, la operación en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)_{\curlywedge\times\curlywedge}$ que es la realización en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$ de $\langle\pi^{\curlywedge\bar{w}}_{n_i},\pi^{\curlywedge\bar{w}}_{n_{i+1}-1}\rangle_{\curlywedge\bar{w},\bar{w}_i}$, siendo $\bar{w}$ de la forma

$$((\cdot,\ldots,\cdot),\ldots,\overbrace{(\underset{n_i}{\cdot},\ldots,\underset{n_{i+1}-1}{\cdot})}^{\bar{w}_i},\ldots,(\cdot,\ldots,\cdot))$$

Cada símbolo de operación $\langle\,\rangle_{\bar{u},\bar{w}}$ se realiza en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)_{\curlywedge\times\curlywedge}$, como la realización en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$ del término

$$\begin{aligned}&\langle\pi^{\bar{w}_0}_0\circ P_0,\ldots,\pi^{\bar{w}_0}_{|\bar{w}_0|-1}\circ P_0,\ldots,\\&\pi^{\bar{w}_{|\bar{w}|-1}}_0\circ P_{|\bar{w}|-1},\ldots,\pi^{\bar{w}_{|\bar{w}|-1}}_{|\bar{w}_{|\bar{w}|-1}|-1}\circ P_{|\bar{w}|-1}\rangle_{\curlywedge\bar{u},\curlywedge\bar{w}}\end{aligned}$$

y cada símbolo de operación $\circ_{\bar{u},\bar{x},\bar{w}}$ se realiza en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)_{\curlywedge\times\curlywedge}$ como $\circ_{\curlywedge\bar{u},\curlywedge\bar{x},\curlywedge\bar{w}}$ en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$.

Ahora, para cada $S^{\star\star}\times S^{\star\star}$-conjunto A, tenemos una $S^{\star\star}\times S^{\star\star}$-aplicación f_A de $\coprod_{1\times\between_{S^\star}}(\Delta_{\curlywedge_S\times 1}(A))$ en $\Delta_{\curlywedge_S\times\curlywedge_S}(\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}(A))$ que, en la coordenada $(\bar{u},\bar{w})$-ésima, asigna a un elemento P su imagen bajo la inclusión canónica η^{B_S} de A en $\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}(A)$. La definición es correcta porque, en ese caso, $\bar{w}$ es de la forma (w), P está en $A_{\curlywedge_S u,w}$ y $\eta^{\mathrm{B}_S}(P)$ pertenece a $\Delta_{\curlywedge_S\times\curlywedge_S}\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}(A)$. Su extensión $f^\sharp$ hasta $\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_{S^\star}}(\coprod_{1\times\between_{S^\star}}(\Delta_{\curlywedge_S\times 1}(A)))$ es la componente en A de la transformación natural α buscada.

Por consiguiente, la segunda coordenada de $\mu^{\mathrm{fuj}}_{(S,\Sigma)}$ es el resultado de la acción en Σ de la transformación natural

$$(\Delta_{\curlywedge_{S^\star}\times\curlywedge_S} * \Delta_{\curlywedge\times 1} * \mu^{\mathrm{B}_S} * \textstyle\coprod_{1\times\between_s})\circ(\Delta_{\curlywedge_{S^\star}\times 1} * \alpha * \mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S} * \textstyle\coprod_{1\times\between_S})$$

3.5.15. Proposición. El triplo $\mathbf{fuj} = (\mathrm{fuj},\eta^{\mathrm{fuj}},\mu^{\mathrm{fuj}})$ es un mónada sobre **Sig**. □

3.5.16. Proposición. Las categorías $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ y $\mathbf{Kl}(\mathbf{fuj})$ son isomorfas.

Demostración. Un morfismo $(\varphi,d)\colon(S,\Sigma)\longrightarrow(T,\Lambda)$ en $\mathbf{Kl}(\mathrm{fuj})$ es un morfismo de signaturas $(\varphi,d)\colon(S,\Sigma)\longrightarrow(T^\star,\mathrm{fuj}(\Lambda))$ en **Sig**, luego $\varphi\colon S\longrightarrow T^\star$ y

$$\begin{aligned}
d\colon\Sigma\longrightarrow&\Delta_{\varphi^\star\times\varphi}(\mathrm{fuj}(\Lambda))\\
&=\Delta_{\varphi^\star\times\varphi}(\Delta_{\curlywedge\times 1}(\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_T}(\textstyle\coprod_{1\times\between_S}(\Lambda))))\\
&=\Delta_{\varphi^\sharp\times\varphi}(\mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_T}(\textstyle\coprod_{1\times\between_S}(\Lambda)))\\
&\cong\Delta_{\varphi^\sharp\times\varphi}(\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\textstyle\coprod_{1\times\between_S}(\Lambda)))
\end{aligned}$$

que es exactamente la definición de un F-morfismo en $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. □

Álgebras heterogéneas y F-morfismos.

En lo que sigue se estudia la extensión del functor Alg a la categoría de signaturas con F-morfismos.

Para cada conjunto de tipos S, existe un functor $(\cdot)^{\natural_S}$ de $\mathbf{Set}^S$ en $\mathbf{Set}^{S^\star}$ definido, sobre S-conjuntos y S-aplicaciones, como $(\cdot)^{\natural_S}=(\cdot_u)_{u\in S^\star}$. Si $f\colon A\longrightarrow B$ es una S-aplicación, decimos que $A^{\natural_S}$ y $f^{\natural_S}$ son las **extensiones** de A y f a palabras sobre S. Si no hay riesgo de confusión, denotamos a $A^{\natural_S}$ y $f^{\natural_S}$ mediante $A^\natural$ y $f^\natural$ o, simplemente, por A y f, en especial cuando ocurren con subíndices que indican explícitamente a que nos referimos.

Los functores de la forma $(\cdot)^{\natural_S}$ son los componentes de una transformación natural, como se pone de manifiesto en la proposición que sigue.

3.5.17. Proposición. Del functor Set en el functor Set $\circ$ FMon$^{\mathrm{op}}$ existe una transformación natural $(\cdot)^{\natural}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, "\mathrm{Set}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{(\cdot)^{\natural}}{\Rightarrow}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mathrm{Set}"] \\
& \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}$$

que a cada conjunto S le asigna el functor $(\cdot)^{\natural_S}$.

Demostración. Si $\varphi : S \longrightarrow T$ es una aplicación, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{S} \arrow[r, "(\cdot)^{\natural_S}"] & \mathbf{Set}^{S^{\star}} \\
\mathbf{Set}^{T} \arrow[u, "\Delta_{\varphi}"] \arrow[r, "(\cdot)^{\natural_{T^{\star}}}"'] & \mathbf{Set}^{T^{\star}} \arrow[u, "\Delta_{\varphi^{\star}}"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. En particular, para cada T-conjunto B, se cumple que $B_{\varphi}{}^{\natural_S} = B^{\natural_T}{}_{\varphi^{\star}}$, o, en forma abreviada, $B_{\varphi} = B_{\varphi^{\star}}$. □

3.5.18. Proposición. Sea S un conjunto de tipos. Del functor $(\cdot)^{\natural_{S^{\star}}} \circ (\cdot)^{\natural_S}$ en el functor $\Delta_{\curlywedge_S} \circ (\cdot)^{\natural_S}$ existe un isomorfismo natural ι_S

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{S} \arrow[r, bend left, "(\cdot)^{\natural_{S^{\star}}} \circ (\cdot)^{\natural_S}"] \arrow[r, bend right, "\Delta_{\curlywedge_S} \circ (\cdot)^{\natural_S}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \iota_S"] & \mathbf{Set}^{S^{\star\star}}
\end{tikzcd}$$

tal que, para cada S-conjunto A, $(\iota_S)_A : A^{\natural\natural} \longrightarrow A^{\natural}_{\curlywedge}$ es el $S^{\star\star}$-isomorfismo definido, para cada $\bar{w} \in S^{\star\star}$, como

$$A^{\natural\natural}_{\bar{w}} = \prod\nolimits_{i\in|w|}\prod\nolimits_{j\in|w_i|} A_{w_{ij}} \xrightarrow{\langle \mathrm{pr}_{i_j} \circ \mathrm{pr}_i \rangle_{i\in|w|, j\in|w_i|}} \prod\nolimits_{i\in|w|,\, j\in|w_i|} A_{w_{ij}} = A^{\natural}_{\curlywedge\bar{w}}$$

siendo $\mathrm{pr}_i \colon A_w \longrightarrow A_{w_i}$ y $\mathrm{pr}_{i_j} : A_{w_i} \longrightarrow A_{w_{ij}}$ las proyecciones canónicas. Si no hay riesgo de confusión denotamos a $(\iota_S)_A$ simplemente como ι^A.

Los isomorfismos naturales de la forma ι_S son los componentes de una isomodificación, i.e., de un morfismo inversible entre transformaciones 2-naturales ([Bor94a]).

3.5.19. Proposición. De $((\cdot)^\natural * \mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}) \circ (\cdot)^\natural$ en $(\mathrm{Set} * \curlywedge^{\mathrm{op}}) \circ (\cdot)^\natural$ existe una modificación $\iota = (\iota_S)_{S \in \mathbf{Set}^{S^{\mathrm{op}}}}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dd, "\mathrm{Set}"] & & & & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\curlywedge^{\mathrm{op}}"] & \\
\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[ur, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, "\mathrm{Set}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{(\cdot)^\natural}{\Rrightarrow}"] & {} \arrow[r, phantom, "\overset{(\cdot)^\natural}{\Rrightarrow}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mathrm{Set}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\iota}{\Rrightarrow}"] & {} \arrow[r, phantom, ""] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[ur, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[rr, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Set}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{(\cdot)^\natural}{\Rrightarrow}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mathrm{Set}"] \\
 & \mathbf{Cat} & & & & \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Por la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{Set}^{S^\star} \arrow[drr, "(\cdot)^{\natural_{S^\star}}"] & & \\
 & \mathbf{Set}^{S} \arrow[ur, "(\cdot)^{\natural_S}"] \arrow[ddr, "(\cdot)^{\natural_S}"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\iota_S"] & {} & & \mathbf{Set}^{S^{\star\star}} \\
 & & \mathbf{Set}^{T^\star} \arrow[uu, "\Delta_{\varphi^\star}"] \arrow[ddr, "(\cdot)^{\natural_{T^\star}}"] & & \\
 & & \mathbf{Set}^{S^\star} \arrow[uurr, "\Delta_{\curlywedge_S}"] & & \\
\mathbf{Set}^{T} \arrow[uuur, "\Delta_{\varphi}"] \arrow[uurr, "(\cdot)^{\natural_T}"] \arrow[drr, "(\cdot)^{\natural_T}"'] \arrow[rr, phantom, "\iota_T\Downarrow"] & & {} & \mathbf{Set}^{T^{\star\star}} \arrow[uuur, "\Delta_{\varphi^{\star\star}}"'] & \\
 & & \mathbf{Set}^{T^\star} \arrow[uu, "\Delta_{\varphi^\star}"] \arrow[ur, "\Delta_{\curlywedge_T}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

□

3.5.20. Corolario. Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T^\star$ una aplicación. Entonces, para cada T-conjunto B, se cumple que $B_\varphi = B_{\varphi^\star}$ y $B_{\varphi^\sharp}$ son $S^\star$-conjuntos isomorfos.

Demostración. El isomorfismo es $\iota^B_{\varphi^\star} = (\iota^B_{\varphi^\star(w)}\colon B_{\varphi^\star(w)} \Longrightarrow B_{\varphi^\sharp(w)})_{w \in S^\star}$, obtenido a partir del isomorfismo natural del siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^{T} \arrow[r, "(\cdot)^{\natural_T}"'] \arrow[rr, bend left=40, "(\cdot)^{\natural_{T^\star}} \circ (\cdot)^{\natural_T}"] & \mathbf{Set}^{T^\star} \arrow[u, phantom, "\Downarrow\iota"] \arrow[r, "\Delta_{\curlywedge_T}"] \arrow[rr, bend right=40, "\Delta_{\varphi^\sharp}"'] & \mathbf{Set}^{T^{\star\star}} \arrow[r, "\Delta_{\varphi^\star}"] \arrow[d, phantom, "="] & \mathbf{Set}^{S^\star} \\
 & & {} &
\end{tikzcd}
$$

□

3.5.21. Corolario. Sean $\varphi\colon S \longrightarrow T^\star$ y $\psi\colon T \longrightarrow U^\star$ un par de aplicaciones. Para cada U-conjunto C, se cumple que C_{ψ_φ} y $C_{\psi^\sharp\circ\varphi}$ son S-conjuntos isomorfos.

Demostración. El isomorfismo es $\iota^C_{\psi^\star\circ\varphi} = (\iota^C_{\psi^\star\circ\varphi(s)}\colon C_{\psi^\star\circ\varphi(s)} \longrightarrow C_{\psi^\sharp\circ\varphi(s)})_{s\in S}$, obtenido a partir del isomorfismo natural del siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^U \arrow[r, "(\cdot)^{\natural_U}"'] \arrow[rr, bend left, "(\cdot)^{\natural_{U^\star}} \circ (\cdot)^{\natural_U}"] & \mathbf{Set}^{U^\star} \arrow[u, phantom, "\Downarrow\iota"] \arrow[r, "\Delta_{\curlywedge_U}"] \arrow[rr, bend right, "\Delta_{\psi^\sharp}"'] & \mathbf{Set}^{U^{\star\star}} \arrow[d, phantom, "="] \arrow[r, "\Delta_{\psi^\star}"] & \mathbf{Set}^{T^\star} \arrow[r, "\Delta_\varphi"] & \mathbf{Set}^S
\end{tikzcd}
$$

□

3.5.22. Corolario. Sea $\varphi\colon S \longrightarrow T^\star$ una aplicación. Entonces, para cada T-conjunto B, se cumple que $\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}(B)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}$ y $\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}(B_\varphi)$ son isomorfos. El isomorfismo se denota como $\kappa^B_\varphi\colon \mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}(B)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp} \longrightarrow \mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}(B_\varphi)$.

Demostración. Sea $h\colon B_{\varphi^\sharp(w)} \longrightarrow B_{\varphi^\sharp(u)}$. Entonces $\kappa^B_\varphi(h)$ se obtiene como la $S^\star\times S^\star$-aplicación

$$
B_{\varphi^\star(w)} \xrightarrow{\iota^B_{\varphi^\star(w)}} B_{\varphi^\sharp(w)} \xrightarrow{h} B_{\varphi^\sharp(u)} \xrightarrow{(\iota^B_{\varphi^\star(u)})^{-1}} B_{\varphi^\star(u)}
$$

□

La proposición anterior hace uso de un isomorfismo natural κ_φ, para cada $\varphi : S \longrightarrow T^\star$, definido como

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^S_{\mathrm{iso}} \arrow[r, "\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}"] & \mathbf{Set}^{S^\star\times S^\star} \\
\mathbf{Set}^T_{\mathrm{iso}} \arrow[u, "\Delta_\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_T}"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\kappa_\varphi}{\Leftarrow}"] & \mathbf{Set}^{T^\star\times T^\star} \arrow[u, "\Delta_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}"']
\end{tikzcd}
$$

siendo $\mathbf{Set}^S_{\mathrm{iso}}$ la categoría de S-conjuntos e isomorfismos.

Demostramos a continuación que todo F-morfismo entre signaturas heterogéneas determina un functor es sentido inverso entre las categorías de álgebras heterogéneas asociadas a las signaturas.

3.5.23. Proposición. Sea $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$ un morfismo en $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. Entonces $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi, d)$, es el functor definido como

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Alg}(T,\Lambda) & \xrightarrow{\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)} & \mathbf{Alg}(S,\Sigma) \\
(B,G) & & (B_\varphi, G^{(\varphi,d)}) \\
{\scriptstyle f}\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle f_\varphi} \\
(B',G') & & (B'_\varphi, G'^{(\varphi,d)})
\end{array}$$

siendo, para cada (T,Λ)-álgebra (B,G), $G^{(\varphi,d)}$ el morfismo $\kappa^B_\varphi \circ G^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp} \circ d$, obtenido a partir de

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\eta_\Lambda"] \arrow[dr, "G"'] & \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda) \arrow[d, "G^\sharp"] \\
& \mathrm{Op}_{\mathrm{B}_T}(B)
\end{tikzcd}
\quad \text{como} \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp} \arrow[d, "G^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}"'] & & \Sigma \arrow[ll, "d"'] \\
\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_T}(B)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp} \arrow[rr, "\kappa^B_\varphi"'] & & \mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}(B_\varphi)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Es evidente que $G^{(\varphi,d)}$ es una estructura algebraica sobre B_φ.

Veamos que si $f\colon (B,G) \longrightarrow (B',G')$ es un homomorfismo de (T,Λ)-álgebras, entonces $f_\varphi\colon (B_\varphi, G^{(\varphi,d)}) \longrightarrow (B'_\varphi, G'^{(\varphi,d)})$ es un homomorfismo de (S,Σ)-álgebras. Sea $\sigma : w \longrightarrow s$ un símbolo de operación en Σ. Entonces, en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& B_{\varphi^\sharp(w)} \arrow[rr, "(G^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d)_{w,s}(\sigma)"] \arrow[dd, "f_{\varphi^\sharp(w)}"'] & & B_{\varphi^\sharp(s)} \arrow[dr, "(\iota^B_{\varphi^\star(s)})^{-1}"] \arrow[dd, "f_{\varphi^\sharp(s)}"] & \\
B_{\varphi_w} \arrow[ur, "\iota^B_{\varphi^\star(w)}"] \arrow[rrrr, "G^{(\varphi,d)}(\sigma)"] \arrow[dd, "f_{\varphi_w}"'] & & & & B_{\varphi_s} \arrow[dd, "f_{\varphi_s}"] \\
& B'_{\varphi^\sharp(w)} \arrow[rr, "(G'^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d)_{w,s}(\sigma)"'] & & B'_{\varphi^\sharp(s)} \arrow[dr, "(\iota^{B'}_{\varphi^\star(s)})^{-1}"] & \\
B'_{\varphi_w} \arrow[ur, "\iota^{B'}_{\varphi^\star(w)}"] \arrow[rrrr, "G'^{(\varphi,d)}(\sigma)"'] & & & & B'_{\varphi_s}
\end{tikzcd}$$

se cumple que la cara posterior conmuta porque f es homomorfismo, las caras superior e inferior conmutan por definición y las caras laterales conmutan porque ι es natural. Por lo tanto, la cara anterior del diagrama conmuta, que es precisamente la condición de que f_φ sea un homomorfismo de $(B_\varphi, G^{(\varphi,d)})$ en $(B'_\varphi, G'^{(\varphi,d)})$.

Por último, se cumple que, $(g\circ f)_\varphi = g_\varphi \circ f_\varphi$, porque, para cada $s\in S$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)_{\varphi_s} &= (g\circ f)_{\varphi(s)}\\
&= (g\circ f)_{\varphi(s)_0}\times\cdots\times(g\circ f)_{\varphi(s)_{|\varphi(s)|-1}}\\
&= (g_{\varphi(s)_0}\circ f_{\varphi(s)_0})\times\cdots\times(g_{\varphi(s)_{|\varphi(s)|-1}}\circ f_{\varphi(s)_{|\varphi(s)|-1}})\\
&= (g_{\varphi(s)_0}\times\cdots\times g_{\varphi(s)_{|\varphi(s)|-1}})\circ(f_{\varphi(s)_0}\times\cdots\times f_{\varphi(s)_{|\varphi(s)|-1}})\\
&= g_{\varphi(s)}\circ f_{\varphi(s)}
\end{aligned}
$$

por lo que $\mathrm{Alg}_{\mathrm{der}}(\varphi,d)$ es un functor. □

Si $(\varphi,d)\colon(S,\Sigma)\longrightarrow(T,\Lambda)$ es un F-morfismo, $\underline{B}=(B,G)$ una (T,Λ)-álgebra, $\sigma : w\longrightarrow s$ un símbolo de operación en Σ y

$$
\begin{aligned}
w &= (s_o,\dots,s_{m-1})\\
\varphi(s_0) &= (t_{0,0},\dots,t_{0,n_0-1})\\
&\ \ \vdots\\
\varphi(s_{m-1}) &= (t_{m-1,0},\dots,t_{m-1,n_{m-1}-1})\\
\varphi(s) &= (t_0,\dots,t_{p-1})
\end{aligned}
$$

entonces $\varphi^\sharp(w)$ es la palabra

$$(t_{0,0},\dots,t_{0,n_0-1},\dots,t_{m-1,0},\dots,t_{m-1,n_{m-1}-1})$$

y $d(\sigma)\colon\varphi^\sharp(w)\longrightarrow\varphi^\sharp(s)$ i.e., $d(\sigma)$ es una familia de símbolos de operación polinómica $P=(P_0,\dots,P_{p-1})$ tales que, para cada $i\in p$, $P_i\colon\varphi^\sharp(w)\longrightarrow t_i$. La realización de $d(\sigma)$ en $\underline{B}$, $G^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}(P)$, es la operación derivada $P^{\underline{B}}=\langle P_0^{\underline{B}},\dots,P_{p-1}^{\underline{B}}\rangle$ de tipo

$$B_{t_{0,0}}\times\cdots\times B_{t_{0,n_0-1}}\times\cdots\times B_{t_{m-1,0}}\times\cdots\times B_{t_{m-1,n_{m-1}-1}}\longrightarrow B_{t_0}\times\cdots\times B_{t_{p-1}}$$

que mediante composición con el isomorfismo canónico de B_{φ_w} en $B_{\varphi^\sharp(w)}$ da lugar a la operación $G^{(\varphi,d)}(\sigma)$

$$
\begin{array}{c}
(B_{t_{0,0}}\times\cdots\times B_{t_{0,n_0-1}})\times\cdots\times(B_{t_{m-1,0}}\times\cdots\times B_{t_{m-1,n_{m-1}-1}})\\
\Big\downarrow \iota^B_{(\varphi(s_0),\dots,\varphi(s_{m-1}))}\\
B_{t_{0,0}}\times\cdots\times B_{t_{0,n_0-1}}\times\cdots\times B_{t_{m-1,0}}\times\cdots\times B_{t_{m-1,n_{m-1}-1}}\\
\Big\downarrow P^{\underline{B}}\\
B_{t_0}\times\cdots\times B_{t_{p-1}}
\end{array}
$$

por lo que a $G^{(\varphi,d)}(\sigma)$ la denotamos también de la forma:

$$G^{(\varphi,d)}(\sigma): \begin{pmatrix} B_{t_{0,0}} & \dots & B_{t_{0,n_0-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{t_{m-1,0}} & \dots & B_{t_{m-1,n_{m-1}-1}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B_{t_0} & \dots & B_{t_{p-1}} \end{pmatrix}$$

3.5.24. Proposición. Sea $(\varphi, d)\colon (S, \Sigma) \longrightarrow (T, \Lambda)$ un F-morfismo de signaturas. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Alg}(S,\Sigma) \arrow[r, "\mathrm{G}_{(S,\Sigma)}"] & \mathbf{Set}^S \\ \mathbf{Alg}(T,\Lambda) \arrow[u, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)"] \arrow[r, "\mathrm{G}_{(T,\Lambda)}"'] & \mathbf{Set}^T \arrow[u, "\Delta_{\varphi}^{\natural_S}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta.

El functor $\mathrm{Alg} : \mathbf{Sig} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ se puede extender hasta un pseudo-functor contravariante $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}} : \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ que, mediante la construcción de Grothendieck, determina una categoría $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}}$, en la que los morfismos entre álgebras asocian a las operaciones estructurales del álgebra dominio, operaciones derivadas del álgebra codominio sobre objetos, a su vez, derivados, preservando la correspondencia entre los tipos que viene indicada por los morfismos en cuestión.

3.5.25. Proposición. De $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ en $\mathbf{Cat}$ existe un pseudo-functor contravariante, denotado por $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$, y definido como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \arrow[rr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}"] & & \mathbf{Cat} \\ (S,\Sigma) \arrow[d, "(\varphi,d)"'] & & \mathbf{Alg}(S,\Sigma) \\ (T,\Lambda) & \longmapsto & \mathbf{Alg}_{(T,\Lambda)} \arrow[u, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)"'] \end{tikzcd}$$

1. Para cada triplo de signaturas $\underline{\Sigma}$, $\underline{\Lambda}$, $\underline{\Omega}$, el isomorfismo natural $\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}}$ que, para cada $(\varphi, d)\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ y cada $(\psi, e)\colon \underline{\Lambda} \longrightarrow \underline{\Omega}$, es el isomorfismo natural de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\psi, e) \circ \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi, d)$ en $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}((\psi, e) \circ (\varphi, d))$ que, para cada (U, Ω)-álgebra (C, H), es el isomorfismo $\iota^{C}_{\psi^\star \circ \varphi}$. Denotamos a $(\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}})_{(\varphi,d),(\psi,e)}$ mediante $\gamma_{(\varphi,d),(\psi,e)}$.

2. Para cada signatura (S, Σ), el isomorfismo natural $\nu_{(S,\Sigma)}$ de $\mathrm{Id}_{\mathbf{Alg}(S,\Sigma)}$ en $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\between_S, \eta_\Sigma)$ que, para cada (S, Σ)-álgebra (A, F), es el isomorfismo $\delta^A_S\colon A \longrightarrow (A_{(s)})_{s\in S}$.

Demostración. Dados $(\varphi, d)\colon (S, \Sigma) \longrightarrow (T, \Lambda)$ y $(\psi, e)\colon (T, \Lambda) \longrightarrow (U, \Omega)$, hemos de comprobar que

$$\iota^C_{\psi^\star \circ \varphi} : (C_{\psi_\varphi}, H^{(\psi,e)^{(\varphi,d)}}) \longrightarrow (C_{\psi^\sharp \circ \varphi}, H^{(\psi^\sharp \circ \varphi, e^\sharp_{\psi^\sharp \times \psi^\sharp} \circ d)})$$

es un isomorfismo de (S, Σ)-álgebras, para lo cual es suficiente demostrar que es homomorfismo, puesto que $\iota^C_{\psi^\star \circ \varphi}$ es una biyección.

El diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma \arrow[dl, "H^{(\psi,e)^{(\varphi,d)}}"'] \arrow[dr, "H^{(\psi,e)\circ(\varphi,d)}"] & \\
\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_{S^\star}}(C_{\psi_\varphi}) \arrow[rr, "\mathrm{Op}_{\mathrm{B}}(\iota^C_{\psi^\star\circ\varphi})"'] & & \mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}(C_{\psi^\sharp\circ\varphi})
\end{tikzcd}$$

conmuta, siendo $\mathrm{Op}_{\mathrm{B}}(\iota^C_{\psi^\star \circ \varphi})$ el isomorfismo entre $\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_{S^\star}}(C_{\psi_\varphi})$ y $\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}(C_{\psi^\sharp \circ \varphi})$ inducido por el isomorfismo $\iota^C_{\psi^\star \circ \varphi}$, puesto que se cumple que

$$\begin{aligned}
H^{(\psi,e)^{(\varphi,d)}} &= \kappa^{C_\psi}_\varphi \circ (H^{(\psi,e)})^\sharp_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp} \circ d \\
&= \kappa^{C_\psi}_\varphi \circ (\kappa^C_\psi \circ H^\sharp_{\psi^\sharp \times \psi^\sharp} \circ e)^\sharp_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp} \circ d \\
&= \kappa^{C_\psi}_\varphi \circ (\kappa^C_\psi \circ H^\sharp_{\psi^\sharp \times \psi^\sharp} \circ e^\sharp)_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp} \circ d \\
&= \kappa^{C_\psi}_\varphi \circ (\kappa^C_\psi)_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp} \circ (H^\sharp_{\psi^\sharp \times \psi^\sharp})_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp} \circ e^\sharp_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp} \circ d \\
&= \kappa^{C_\psi}_\varphi \circ (\kappa^C_\psi)_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp} \circ H^\sharp_{(\psi^\sharp \circ \varphi)^\sharp \times (\psi^\sharp \circ \varphi)^\sharp} \circ e^\sharp_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp} \circ d,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{(\psi,e)\circ(\varphi,d)} &= H^{(\psi^\sharp \circ \varphi, e^\sharp_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp} \circ d)} \\
&= \kappa^C_{\psi^\sharp \circ \varphi} \circ H^\sharp_{(\psi^\sharp \circ \varphi)^\sharp \times (\psi^\sharp \circ \varphi)^\sharp} \circ e^\sharp_{\varphi^\sharp \times \varphi^\sharp} \circ d,
\end{aligned}$$

y que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_U}(C)_{\psi^\sharp\times\psi^\sharp})_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp} \arrow[d, "(\kappa^C_\psi)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}"'] \arrow[ddr, "\kappa^C_{\psi^\sharp\circ\varphi}"] & \\
\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_T}(C_\psi)_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp} \arrow[d, "\kappa^{C_\psi}_\varphi"'] & \\
\mathrm{Op}_{\mathrm{B}_{S^\star}}(C_{\psi_\varphi}) \arrow[r, "\mathrm{Op}_{\mathrm{B}}(\iota^C_{\psi^\star\circ\varphi})"'] & \mathrm{Op}_{\mathrm{B}_S}(C_{\psi^\sharp\circ\varphi})
\end{tikzcd}$$

conmuta. □

3.5.26. Definición. La categoría $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ es $\int^{\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}} \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$, i.e., la categoría obtenida mediante la construcción de Grothendieck para pseudo-functores contravariantes sobre el functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$.

La categoría $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ tiene como objetos los pares $((S,\Sigma),(A,F))$, con S un conjunto de tipos, Σ una S-signatura algebraica y (A,F) una Σ-álgebra, y como morfismos de $((S,\Sigma),(A,F))$ en $((T,\Lambda),(B,G))$, los pares $((\varphi,d),h)$, con (φ,d) un F-morfismo de (S,Σ) en (T,Λ) y h un homomorfismo de Σ-álgebras de (A,F) en $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)(B,G) = (B_\varphi, G^{(\varphi,d)})$.

Términos heterogéneos y F-morfismos.

Para cada conjunto de tipos S, el functor $(\cdot)^{\natural_S}$ de $\mathbf{Set}^S$ en $\mathbf{Set}^{S^\star}$, tiene un adjunto por la izquierda, que a cada $S^\star$-conjunto C le asigna el S-conjunto cuya coordenada s-ésima consta de tantas copias de elementos en alguna coordenada w de C como ocurrencias de s hayan en w.

3.5.27. Proposición. Sea S un conjunto de tipos. De $\mathbf{Set}^{S^\star}$ en $\mathbf{Set}^S$ existe un functor $(\cdot)^{\dagger_S}$ definido sobre S-conjuntos y S-aplicaciones como $(\coprod_{w_i=s} \cdot_w)_{s\in S}$ □

Para cada $S^\star$-conjunto C y cada $s \in S$, $C_s^{\dagger_S}$ es, esencialmente, el conjunto

$$C_s^{\dagger_S} = \{(c,w,i) \mid w \in S^\star,\ c \in C_w,\ i \in |w|,\ w_i = s\}$$

Si $f : C \longrightarrow C'$ es una $S^\star$-aplicación, la acción de $f_s^{\dagger_S}$ sobre (c,w,i) es $(f_w(c),w,i)$.

3.5.28. Proposición. Sea S un conjunto de tipos. Entonces el functor $(\cdot)^{\dagger_S}$ es un adjunto por la izquierda del functor $(\cdot)^{\natural_S}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S \arrow[r, shift left=2, "(\cdot)^{\natural_S}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Set}^{S^\star} \arrow[l, shift left=2, "(\cdot)^{\dagger_S}"] \end{tikzcd}$$

Demostración. Para cada $S^\star$-conjunto C y cada S-conjunto A existe un isomorfismo natural $\theta^{\dagger\natural}\colon \mathbf{Set}^S(C^{\dagger_S}, A) \cong \mathbf{Set}^{S^\star}(C, A^{\natural_S})$, precisamente el que a una S-aplicación $f\colon C^{\dagger_S} \longrightarrow A$, le asigna la $S^\star$-aplicación$\theta^{\dagger\natural}(f)$, definida, en la coordenada w-ésima, como

$$c \mapsto (f_{w_i}(c, w, i))_{i \in |w|}$$

Recíprocamente, si $g : C \longrightarrow B^{\natural_S}$ es una $S^\star$-aplicación, $(\theta^{\dagger\natural})^{-1}(g)$ es la S-aplicación definida, en la coordenada s-ésima, como

$$(c, w, i) \mapsto g_w(c)_i$$

□

Como para los functores $(\cdot)^{\natural_S}$, los functores de la forma $(\cdot)^{\dagger_S}$ son los componentes de una transformación natural.

3.5.29. Proposición. Del functor $\mathrm{Set} \circ \mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}$ en el functor Set existe una transformación natural $(\cdot)^\dagger$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, "\mathrm{Set}"'] & \arrow[d, phantom, "(\cdot)^\dagger \Leftarrow"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mathrm{Set}"] \\ & \mathbf{Cat} & \end{tikzcd}$$

que a cada conjunto S le asigna el functor $(\cdot)^{\dagger_S}$. □

De la proposición 3.5.28, se sigue la existencia de una adjunción $(\cdot)^\dagger \dashv (\cdot)^\natural$, i.e., las transformaciones naturales $(\cdot)^\dagger$ y $(\cdot)^\natural$ son 2-células adjuntas en una 3-categoría de 2-categorías, transformaciones 2-naturales y modificaciones del cardinal adecuado.

3.5.30. Proposición. Sea S un conjunto de tipos. Del functor $(\cdot)^{\dagger_S} \circ (\cdot)^{\dagger_{S^\star}}$ en el functor $(\cdot)^{\dagger_S} \circ \coprod_{\curlywedge_{S^\star}}$ existe un isomorfismo natural ς_S

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^S & \mathbf{Set}^{S^{\star\star}} \arrow[l, shift right=3, "(\cdot)^{\dagger_S} \circ (\cdot)^{\dagger_{S^\star}}"'] \arrow[l, shift left=3, "(\cdot)^{\dagger_S} \circ \coprod_{\curlywedge_S}"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow \varsigma_S"] \end{tikzcd}$$

Si no hay riesgo de confusión denotamos a $(\varsigma_S)_A$ simplemente como ς^A.

Demostración. Por la proposición 3.5.18, los functores $(\cdot)^{\natural_{S^\star}} \circ (\cdot)^{\natural_S}$ y $\Delta_{\curlywedge_S} \circ (\cdot)^{\natural_S}$ son isomorfos. Puesto que $(\cdot)^{\dagger_S} \circ (\cdot)^{\dagger_{S^\star}}$ es adjunto por la izquierda de $(\cdot)^{\natural_{S^\star}} \circ (\cdot)^{\natural_S}$ y $\coprod_{\curlywedge_{S^\star}} \circ (\cdot)^{\natural_S}$ es adjunto por la izquierda de $\Delta_{\curlywedge_S} \circ (\cdot)^{\natural_S}$, los functores $(\cdot)^{\dagger_{S^\star}} \circ (\cdot)^{\dagger_S}$ $(\cdot)^{\dagger_S} \circ \coprod_{\curlywedge_{S^\star}}$ son isomorfos. ☐

Para cada $S^{\star\star}$-conjunto C, $(\varsigma_S)_A\colon A^{\dagger\dagger} \longrightarrow A^{\dagger}_{\curlywedge}$ es el S-isomorfismo que, para cada $s \in S$, asigna a un elemento $((c, \bar{x}, i), y, j)$ en $A^{\dagger\dagger}_s$ el elemento $((c, \bar{x}), \curlywedge\bar{x}, k)$, donde $\bar{x}$ es de la forma

$$((\cdot, \dots, \cdot), \dots, \overbrace{(\cdot, \dots, \underset{\curlywedge\bar{x}_k}{\bar{x}_{i,j}}, \dots, \cdot)}^{\bar{x}_i}, \dots, (\cdot, \dots, \cdot))$$

Los isomorfismos naturales de la forma ς_S son los componentes de una isomodificación.

3.5.31. Proposición. De $((\cdot)^\dagger * \mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}) \circ (\cdot)^\dagger$ en $(\cdot)^\dagger \circ (\mathrm{Set} * \curlywedge^{\mathrm{op}})$ existe una modificación $\varsigma = (\varsigma_S)_{S \in \mathbf{Set}^{S^{\mathrm{op}}}}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dd, "\mathrm{Set}" description] & \\
\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[ur, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, "\mathrm{Set}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{(\cdot)^\dagger}{\Leftarrow}"] & {} \arrow[r, phantom, "\overset{(\cdot)^\dagger}{\Leftarrow}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mathrm{Set}"] \\
 & \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}
\quad\overset{\varsigma}{\Rrightarrow}\quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\curlywedge^{\mathrm{op}}"] & \\
\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[ur, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"] \arrow[rr, "\mathrm{FMon}^{\mathrm{op}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Set}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\overset{(\cdot)^\dagger}{\Leftarrow}"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mathrm{Set}"] \\
 & \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}$$

Si $\varphi\colon S \longrightarrow T^\star$ es una aplicación, podemos componer las adjunciones $\coprod_\varphi \dashv \Delta_\varphi$ y $(\cdot)^\dagger \dashv (\cdot)^\natural$ para obtener una adjunción de $\mathbf{Set}^S$ en $\mathbf{Set}^T$, a la que denotamos como $\coprod^\dagger_\varphi \dashv \Delta^\natural_\varphi$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^S \arrow[d, bend right, "\coprod^\dagger_\varphi"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[drr, bend left=10, "\coprod_\varphi"'] \arrow[drr, phantom, "\top"] & & \\
\mathbf{Set}^T \arrow[u, bend right, "\Delta^\natural_\varphi"'] \arrow[rr, bend left, "(\cdot)^\natural"] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Set}^{T^\star} \arrow[ll, bend left, "(\cdot)^\dagger"] \arrow[ull, bend right=30, "\Delta_\varphi"']
\end{tikzcd}$$

El functor $\coprod^\dagger_\varphi$ asigna a cada S-conjunto A el T-conjunto

$$(\{(a, s, i) \mid s \in S,\ a \in A_s,\ i \in |\varphi(s)|,\ \varphi(s)_i = t\})_{t \in T}$$

y el functor $\Delta_\varphi^\natural$ asigna a cada T-conjunto B el S-conjunto $(B_{\varphi(s)})_{s\in S}$. El isomorfismo de la adjunción $\coprod_\varphi^\dagger \dashv \Delta_\varphi^\natural$, denotado como $\theta_\varphi^{\dagger\natural}$, asigna a cada $f\colon \coprod_\varphi^\dagger(A) \longrightarrow B$ la S-aplicación cuya coordenada s-ésima es

$$\theta_\varphi^{\dagger\natural}(f)_s \begin{cases} A_s \longrightarrow B_{\varphi(s)} \\ a \longmapsto (f_{\varphi(s)_i}(a,s,i))_{i\in|\varphi(s)|} \end{cases}$$

y a cada $g : A \longrightarrow \Delta_\varphi^\natural(B)$ la T-aplicación cuya coordenada t-ésima es

$$(\theta_\varphi^{\dagger\natural})^{-1}(g)_s \begin{cases} \coprod_\varphi^\dagger(A)_t \longrightarrow B_t \\ (a,s,i) \longmapsto g_s(a)_i \end{cases}$$

Podemos ahora establecer que cada F-morfismo de signaturas induce un functor entre las categorías de términos asociadas a las mismas.

3.5.32. Proposición. Cada F-morfismo $(\varphi,d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$ determina un functor $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)$ definido como

$$\mathbf{Ter}(S,\Sigma) \xrightarrow{\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)} \mathbf{Ter}(T,\Lambda)$$

$$\begin{array}{ccc} X & & \coprod_\varphi^\dagger X \\ {\scriptstyle P}\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle (\theta_\varphi^{\dagger\natural})^{-1}\left(\left(\theta_\varphi^{\dagger\natural}(\eta^{(T,\Lambda)}_{\coprod_\varphi^\dagger X})\right)^\sharp \circ P\right)} \\ Y & & \coprod_\varphi^\dagger Y \end{array}$$

en donde $\left(\theta_\varphi^{\dagger\natural}(\eta^{(T,\Lambda)}_{\coprod_\varphi^\dagger X})\right)^\sharp$ se obtiene a partir de

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta^{(S,\Sigma)}_X"] \arrow[d, "(\eta_\varphi^{\dagger\natural})_X"'] \arrow[dr, "\theta_\varphi^{\dagger\natural}(\eta^{(T,\Lambda)}_{\coprod_\varphi^\dagger X})"] & \mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(X) \arrow[d, "\left(\theta_\varphi^{\dagger\natural}(\eta^{(T,\Lambda)}_{\coprod_\varphi^\dagger X})\right)^\sharp"] \\ \Delta_\varphi^\natural \coprod_\varphi^\dagger X \arrow[r, "\Delta_\varphi^\natural(\eta^{(T,\Lambda)}_{\coprod_\varphi^\dagger X})"'] & \Delta_\varphi^\natural(\mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(\coprod_\varphi^\dagger X)) \end{tikzcd}$$

siendo $\eta_\varphi^{\dagger\natural}$ la unidad de la adjunción $\coprod_\varphi^\dagger \dashv \Delta_\varphi^\natural$.

Demostración. La demostración es estructuralmente idéntica a la de la proposición 3.3.7. $\square$

Obsérvese que, en la situación de la proposición anterior, $(\eta_{\varphi}^{\dagger\natural})_X$ asigna a un $x \in X_s$ la familia $((x, s, 0), \ldots, (x, s, |\varphi(s)| - 1))$. De manera informal podemos decir que a una variable $x \in X_s$ le corresponde en $\coprod_{\varphi}^{\dagger}(X)$ un *conjunto* de variables de la forma (x, s, i), de tipos $\varphi(s)_i$ y que si $P\colon X \longrightarrow Y$ es un morfismo en $\mathbf{Ter}(S, \Sigma)$, entonces, para cada $(y, s, i) \in (\coprod_{\psi}^{\dagger} Y)_t$, $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\varphi, d)(P)_{\varphi(s)_i}(y, s, i)$ es el (T, Λ)-término que se obtiene al reemplazar, recursivamente, en $P_s(y)$ los símbolos de operación $\sigma\colon w \longrightarrow s$ por familias de operaciones $d(\sigma)\colon \varphi^{\sharp}(w) \longrightarrow \varphi(s)$ y las variables $x \in X_s$ por familias de variables $(x, s, j)_{j \in |\varphi(s)|}$.

La construcción anterior se extiende hasta un pseudo-functor de la categoría de signaturas y F-morfismos hasta **Cat**.

3.5.33. Proposición. De $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ en **Cat** existe un pseudo-functor $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}$ definido como

$$\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \xrightarrow{\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}} \mathbf{Cat}$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{\Sigma} & & \mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}) \\ {\scriptstyle \underline{d}}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})} \\ \underline{\Lambda} & & \mathbf{Ter}(\underline{\Lambda}) \end{array}$$

1. Para cada triplo de signaturas $\underline{\Sigma}$, $\underline{\Lambda}$, $\underline{\Omega}$, el isomorfismo natural $\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}}$ que, para cualesquiera $(\varphi, d)\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$ y $(\psi, e)\colon \underline{\Lambda} \longrightarrow \underline{\Omega}$, es el isomorfismo natural de $\underline{e}_{\diamond} \circ \underline{d}_{\diamond}$ en $(\underline{e} \circ \underline{d})_{\diamond}$ que asigna a cualquier S-conjunto X, el morfismo $\gamma_X^{\underline{d},\underline{e}}\colon \coprod_{\psi}^{\dagger} \coprod_{\varphi}^{\dagger} X \longrightarrow \coprod_{\psi^{\sharp} \circ \varphi}^{\dagger} X$ en $\mathbf{Ter}(\underline{\Omega})$ que corresponde a la U-aplicación

$$\coprod\nolimits_{\psi^{\sharp} \circ \varphi}^{\dagger} X \xrightarrow{\rho_X} \coprod\nolimits_{\psi}^{\dagger} \coprod\nolimits_{\varphi}^{\dagger} X \xrightarrow{\eta^{\underline{\Omega}}_{\coprod_{\psi}^{\dagger} \coprod_{\varphi}^{\dagger} X}} \mathrm{Fr}_{\underline{\Omega}}(\coprod\nolimits_{\psi}^{\dagger} \coprod\nolimits_{\varphi}^{\dagger} X)$$

donde ρ es el isomorfismo obtenido a partir del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{Set}^S \arrow[dl, "\coprod_{\varphi}^{\dagger_T}"'] \arrow[d, "\coprod_{\varphi}"] \arrow[ddd, bend left=60, "\coprod_{\psi^\sharp\circ\varphi}"] \\
 & \mathbf{Set}^T \arrow[dl, "\coprod_{\psi}^{\dagger_U}"'] \arrow[d, "\coprod_{\psi}"] \arrow[r, phantom, "="] & \mathbf{Set}^{T^\star} \arrow[l, "(\cdot)^{\dagger_T}"'] \arrow[d, "\coprod_{\psi^\star}"] \arrow[dd, bend left=50, "\coprod_{\psi^\sharp}"] \arrow[dd, phantom, bend left=90, "\overset{(\gamma^{\varphi,\psi^\sharp})^{\text{-}1}}{\Leftarrow}"] \\
\mathbf{Set}^U & \mathbf{Set}^{U^\star} \arrow[l, "(\cdot)^{\dagger_U}"'] & \mathbf{Set}^{U^{\star\star}} \arrow[l, "(\cdot)^{\dagger_{U^\star}}"'] \arrow[d, "\coprod_{\curlywedge_U}"] \arrow[dl, phantom, "(\varsigma^{U^\star})^{\text{-}1}\,\Lleftarrow"] \arrow[r, phantom, "="] & {} \\
 & & \mathbf{Set}^{U^\star} \arrow[ull, "(\cdot)^{\dagger_U}"]
\end{tikzcd}
$$

y γ el isomorfismo correspondiente asociado al pseudo-functor $\mathrm{Set}^{\amalg}$. Denotamos a $(\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}})_{\underline{d},\underline{e}}$ mediante $\gamma^{\underline{d},\underline{e}}$.

2. Para cada signatura (S,Σ), el isomorfismo natural $\nu^{(S,\Sigma)}$ de $\mathrm{Id}_{\mathbf{Ter}(S,\Sigma)}$ en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\between_S, \eta^{\mathrm{B}_S}_{(S,\Sigma)})$ es el que asigna a cualquier S-conjunto X, el morfismo $\nu_X^{(S,\Sigma)} : X \longrightarrow \coprod_{\mathrm{id}_{(S,\Sigma)}} X$ en $\mathbf{Ter}(S,\Sigma)$ que corresponde a la S-aplicación

$$
\coprod\nolimits^{\dagger}_{\between_S} X \xrightarrow{\ \tau_X^S\ } X \xrightarrow{\ \eta_X^{\underline{\Omega}}\ } \mathrm{Fr}_{\underline{\Omega}}(X)
$$

siendo τ^S el isomorfismo del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set}^S \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}^S}"'] \arrow[dr, "\coprod_{\between_S}"] \arrow[dr, phantom, "\tau^S\Lleftarrow"', near start] & \\
\mathbf{Set}^S & \mathbf{Set}^{S^\star} \arrow[l, "(\cdot)^{\dagger_S}"]
\end{tikzcd}
$$

definido, para S-conjunto A, como la S-aplicación cuya coordenada s-ésima es la que a $((a,s),(s),0)$ le asigna a.

La Institución de Fujiwara.

Los pseudo-functores $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ y $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}$ admiten una descripción alternativa. Para ello, obsérvese que, dada una signatura arbitraria (S,Σ), existe un F-morfismo

$\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(S,\Sigma)} = (\mathrm{id}_{S^\star}, \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\Sigma)})$ de $(S^\star, \mathrm{fuj}(\Sigma))$ en (S,Σ), con $\mathrm{id}_{S^\star} : S^\star \longrightarrow S^\star$ la identidad en $S^\star$ y

$$\widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\Sigma)} : \mathrm{Fr}_{\mathrm{B}_S}(\textstyle\coprod_{1\times\between_S}\Sigma)_{\curlywedge_S\times 1} \longrightarrow \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\textstyle\coprod_{1\times\between_S}\Sigma)_{\curlywedge_S\times 1}$$

el isomorfismo canónico.

La acción del functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ sobre el F-morfismo $\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(S,\Sigma)}$ determina un functor de $\mathbf{Alg}(S,\Sigma)$ en $\mathbf{Alg}(S^\star, \mathrm{fuj}(\Sigma))$, que asigna a cada (S,Σ)-álgebra (B,G) la $(S^\star, \mathrm{fuj}(\Sigma))$-álgebra $(B^\natural, G^\sharp_{\curlywedge_S\times 1})$, cuya estructura algebraica asocia a cada $\mathrm{fuj}(\Sigma)$-término $P\colon \bar{w} \longrightarrow u$, la realización del $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$-término $P\colon \curlywedge \bar{w} \longrightarrow u$ en (B,G).

Si $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$ es un F-morfismo de signaturas, la composición de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(S,\Sigma)})$ con el functor $\mathbf{Alg}(\varphi, \widetilde{d})$, en donde $(\varphi, \widetilde{d})$ es el morfismo de signaturas canónicamente asociado al F-morfismo (φ, d) por la proposición 3.5.16, es idéntico a $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi, d)$.

3.5.34. Proposición. Sea $(\varphi, d)\colon (S,\Sigma) \longrightarrow (T,\Lambda)$ un F-morfismo de signaturas. Entonces $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi, d) = \mathrm{Alg}(\varphi, \widetilde{d}) \circ \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{T^\star}, \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\Lambda)})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Alg}(S,\Sigma) & \\
\mathbf{Alg}(T,\Lambda) \arrow[u, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)"] \arrow[r, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{T^\star}, \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\Lambda)})"'] & \mathbf{Alg}(T^\star, \mathrm{fuj}(\Lambda)) \arrow[ul, "\mathrm{Alg}(\varphi, \widetilde{d})"']
\end{tikzcd}$$

Los functores de la forma $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(S,\Sigma)})$ son los componentes de una transformación natural, a partir de la cual se deriva el functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$.

3.5.35. Proposición. Del functor Alg en el functor $\mathrm{Alg} \circ \mathrm{fuj}^{\mathrm{op}}$ existe una transformación natural $\beta = (\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{S^\star}, \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(S,\Sigma)}))_{(S,\Sigma)\in\mathbf{Sig}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sig}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "\mathrm{fuj}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, "\mathrm{Alg}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\beta}{\Rightarrow}"] & \mathbf{Sig}^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\mathrm{Alg}"] \\
& \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}$$

La acción del functor $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}$ sobre el F-morfismo $\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(S,\Sigma)}$ es un functor que a cada morfismo $P\colon X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{Ter}(S^\star, \mathrm{fuj}(\Sigma))$ le asigna el morfismo en $\mathbf{Ter}(S,\Sigma)$

$$X^\dagger \xrightarrow{(\theta^{\dagger\natural})^{-1}\left(((\eta^{(S,\Sigma)}_{\bar{X}^\dagger})^\natural \circ \eta^{\dagger\natural}_{\bar{X}})^\sharp \circ P\right)} Y^\dagger$$

Si $(\varphi,d)\colon(S,\Sigma)\longrightarrow(T,\Lambda)$ es un F-morfismo de signaturas, la composición de $\mathrm{Ter}(\varphi,\widetilde{d})$ con el functor $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\widetilde{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(S,\Sigma)})$ coincide con $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)$.

3.5.36. Proposición. Sea $(\varphi,d)\colon(S,\Sigma)\longrightarrow(T,\Lambda)$ un F-morfismo de signaturas y $(\varphi,\widetilde{d})\colon(S,\Sigma)\longrightarrow(T^{\star},\mathrm{fuj}(\Lambda))$ el correspondiente morfismo de signaturas. Entonces $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)=\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{T^{\star}},\widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\Lambda)})\circ\mathrm{Ter}(\varphi,\widetilde{d})$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ter}(S,\Sigma) \arrow[d, "\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)"'] \arrow[drr, "\mathrm{Ter}(\varphi,\widetilde{d})"] & & \\
\mathbf{Ter}(T,\Lambda) & & \mathbf{Ter}(T^{\star},\mathrm{fuj}(\Lambda)) \arrow[ll, "\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{T^{\star}},\widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(\Lambda)})"]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $P\colon X\longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathbf{Ter}(S,\Sigma)$. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta^{(S,\Sigma)}_X"] \arrow[d, "\eta^{\varphi}_X"'] \arrow[dd, bend right=60, "(\eta^{\dagger\natural}_{\varphi})_X"'] & \mathrm{Fr}_{(S,\Sigma)}(X) \arrow[d, "f^{\sharp}"] \arrow[dd, bend left=60, "h^{\sharp}"] \\
\Delta_{\varphi}\coprod_{\varphi}X \arrow[r, "\eta^{(T^{\star},\mathrm{fuj}(\Lambda))}_X"] \arrow[d, "\Delta_{\varphi}(\eta^{\dagger\natural}_{\coprod_{\varphi}X})"'] & \Delta_{\varphi}(\mathrm{Fr}_{(T^{\star},\mathrm{fuj}(\Lambda))}(\coprod_{\varphi}X)) \arrow[d, "\Delta_{\varphi}(g^{\sharp})"] \\
\Delta^{\natural}_{\varphi}\coprod^{\dagger}_{\varphi}X \arrow[r, "\Delta^{\natural}_{\varphi}(\eta^{(T,\Lambda)}_{\coprod^{\dagger}_{\varphi}X})"'] & \Delta^{\natural}_{\varphi}(\mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(\coprod^{\dagger}_{\varphi}X))
\end{tikzcd}$$

conmuta, con $f=\eta^{(T^{\star},\mathrm{fuj}(\Lambda))}_X\circ\eta^{\varphi}_X$, $g=(\eta^{(T,\Lambda)}_{\coprod^{\dagger}_{\varphi}X})^{\natural}\circ\eta^{\dagger\natural}_{\coprod_{\varphi}X}$, y $h=\Delta^{\natural}_{\varphi}(\eta^{(T,\Lambda)}_{\coprod^{\dagger}_{\varphi}X})\circ(\eta^{\dagger\natural}_{\varphi})_X$. Por consiguiente, se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)(P) &= (\theta^{\dagger\natural}_{\varphi})^{-1}(h^{\sharp}\circ P)\\
&= (\theta^{\dagger\natural})^{-1}\circ(\theta^{\varphi})^{-1}(h^{\sharp}\circ P)\\
&= (\theta^{\dagger\natural})^{-1}\circ(\theta^{\varphi})^{-1}(\Delta_{\varphi}g\circ f\circ P)\\
&= (\theta^{\dagger\natural})^{-1}(b\circ\theta^{\varphi})^{-1}(\circ f\circ P)\\
&= (\theta^{\dagger\natural})^{-1}(b\circ\mathrm{Ter}(\varphi,\widetilde{d})(P)\\
&= \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{S^{\star}},\widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(S,\Sigma)})(\mathrm{Ter}(\varphi,\widetilde{d})(P))
\end{aligned}$$

□

Los functores de la forma $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\widetilde{\underline{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(S,\Sigma)})$ son, también, los componentes de una transformación natural.

3.5.37. Proposición. Del functor $\mathrm{Ter}\circ\mathrm{fuj}$ en el functor Ter existe una transformación natural $\alpha = (\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\mathrm{id}_{S^\star}, \widetilde{\mathrm{id}}_{\mathrm{fuj}(S,\Sigma)}))_{(S,\Sigma)\in\mathbf{Sig}}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sig} \arrow[rr, "\mathrm{fuj}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ter}"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"] & \mathbf{Sig} \arrow[dl, "\mathrm{Ter}"] \\
& \mathbf{Cat} &
\end{tikzcd}$$

3.5.38. Lema. Para cada signatura algebraica $\underline{\Sigma} = (S, \Sigma)$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \times \mathbf{Ter}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})) \arrow[r, "\alpha_{\underline{\Sigma}} \times 1"] \arrow[d, "1 \times \beta_{\underline{\Sigma}}"'] & \mathbf{Alg}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})) \times \mathbf{Ter}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})) \arrow[d, "\mathrm{Pd}^{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})}"] \\
\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \times \mathbf{Ter}(\underline{\Sigma}) \arrow[r, "\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}}"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

iso-conmuta.

Demostración. En virtud de la proposición 3.3.15, Pd es una transformación pseudo-extranatural, luego, para el morfismo $(\widetilde{\underline{\mathrm{id}}}_{\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})})\colon (S^\star, \mathrm{fuj}(\Sigma)) \longrightarrow (S, \Sigma)$, el diagrama anterior conmuta. En particular, si $(f, P)\colon (\underline{A}, X) \longrightarrow (\underline{B}, Y)$ es un morfismo en $\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma}) \times \mathbf{Ter}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma}))$, entonces tenemos la situación

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\underline{A},X) \arrow[rr, "{(f,P)}"] & & (\underline{B},Y) & \\ (\underline{A},X^\dagger) \arrow[r, "{(f,\beta_{\underline{\Sigma}}(P))}"] & (\underline{B},Y^\dagger) & & (\alpha_{\underline{\Sigma}}(\underline{A}),X) \arrow[r, "{(f^\natural,P)}"] & (\alpha_{\underline{\Sigma}}(\underline{B}),Y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & A_{X^\dagger} \arrow[rrr, "\theta^{\dagger\natural}_{X,A}"] \arrow[dl, "f_{X^\dagger}"'] \arrow[dr, "\beta_{\underline{\Sigma}}(P)^{\underline{A}}"] & & & A^\natural_X \arrow[dl, "f^\natural_X"'] \arrow[dr, "P^{\alpha_{\underline{\Sigma}}(\underline{A})}"] & \\ B_{X^\dagger} \arrow[rrr, "\theta^{\psi}_{X,B}"] \arrow[dr, "\beta_{\underline{\Sigma}}(P)^{\underline{B}}"'] & & A_{Y^\dagger} \arrow[rrr, "\theta^{\dagger\natural}_{Y,A}"] \arrow[dl, "f_{Y^\dagger}"] & B^\natural_X \arrow[dr, "P^{\alpha_{\underline{\Sigma}}(\underline{B})}"'] & & A^\natural_Y \arrow[dl, "f^\natural_Y"] \\ & B_{Y^\dagger} \arrow[rrr, "\theta^{\psi}_{Y,B}"] & & & B^\natural_Y & \end{tikzcd}$$

y $(\theta^{\dagger\natural}_{X,A})_{(\underline{A},X)\in\mathbf{Alg}(\underline{\Sigma})\times\mathbf{Ter}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma}))}$ es un isomorfismo natural. □

3.5.39. Proposición. De la categoría $\mathbf{Sig}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Sig}$ en $\mathbf{Cat}$ se tiene un pseudo-functor definido como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sig}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{fuj}} \times \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \arrow[rr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)\times\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)"] & & \mathbf{Cat} \\ (\underline{\Sigma},\underline{\Lambda}) \arrow[d, "{(\underline{d},\underline{e})}"'] & & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma})\times\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \arrow[d, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})\times\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"] \\ (\underline{\Sigma}',\underline{\Lambda}') & \longmapsto & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}')\times\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}') \end{tikzcd}$$

así como el functor que es constantemente **Set**.

Entonces $\mathrm{Pd} = (\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}})_{\underline{\Sigma}\in\mathbf{Sig}}$, junto con la familia $\theta = (\theta^{\underline{d}})_{\underline{d}\in\mathrm{Mor}(\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}})}$, siendo $\theta^{\underline{d}}_{\underline{A},X} = \theta^{\dagger\natural}_{X,A}$, es una transformación pseudo-extranatural de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)\times\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)$ en **Set**.

Demostración. Nos limitamos a demostrar que para cada F-morfismo de signaturas $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}) \arrow[r, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d}) \times \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"'] & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}) \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}) \arrow[d, "\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}}"] \\
\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \arrow[r, "\mathrm{Pd}^{\underline{\Lambda}}"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

iso-conmuta. Para ello, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}) \arrow[rrrr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d}) \times 1"] \arrow[rrrd, "\alpha_{\underline{\Lambda}} \times 1"] \arrow[ddr, "1 \times \mathrm{Ter}(\widetilde{\underline{d}})"] \arrow[ddd, "1 \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"'] & & & & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}) \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}) \arrow[ddd, "\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}}"] \\
& & & \mathrm{Alg}(\mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})) \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}) \arrow[ur, "\mathrm{Alg}(\widetilde{\underline{d}}) \times 1"] \arrow[d, "1 \times \mathrm{Ter}(\widetilde{\underline{d}})"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \\
& \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \times \mathrm{Ter}(\mathrm{fuj}(\underline{\Sigma})) \arrow[rr, "\alpha_{\underline{\Lambda}} \times 1"] \arrow[dl, "1 \times \beta_{\underline{\Lambda}}"] & & \mathrm{Alg}(\mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})) \times \mathrm{Ter}(\mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})) \arrow[dr, "\mathrm{Pd}^{\mathrm{fuj}(\underline{\Lambda})}"'] \arrow[dl, phantom, "(1)"] & \\
\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \arrow[rrrr, "\mathrm{Pd}^{\underline{\Lambda}}"'] & & & & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

en el que (1) iso-conmuta por el lema, (2) iso-conmuta porque Pd es una transformación pseudo-extranatural y el resto conmuta por definición. $\square$

3.6 Deformaciones.

Los morfismos de Fujiwara entre dos signaturas pueden ser comparados mediante una cierta noción de *deformación* entre ellos, que nos permite obtener una estructura de 2-categoría sobre la categoría de signaturas y F-morfismos y, por tanto, también sobre las categorías de signaturas y morfismos de signaturas o derivors. Estas deformaciones son una generalización del concepto de F-morfismos equivalentes, introducido, para las álgebras homogéneas, por fujiwara en [Fuj60].

Las deformaciones entre F-morfismos determinan transformaciones naturales entre los functores asociados a los F-morfismos, tanto para las categorías de álgebras como para las categorías de términos. Esto nos permite extender los functores $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$ y $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}$ hasta 2-functores.

Las deformaciones son, asimismo, compatibles con la realización de los términos en las álgebras correspondientes. Caracterizamos este hecho mediante la noción de transformación pseudo-extranatural entre pseudo-functores sobre 2-categorías introducida en la sección 3.3. Como corolario inmediato se tiene que la relación entre términos y álgebras heterogéneas es un ejemplo de 2-institución.

Para el estudio de las deformaciones necesitamos considerar ciertas operaciones derivadas en las álgebras de términos relativas a las signaturas algebraicas.

3.6.1. Definición. Sea S un conjunto de tipos.

1. Para cada $\bar{w} \in S^{\star\star}$ y cada $i \in |\bar{w}|$, sea $\pi_i^{\bar{w}}$ la operación derivada de tipo $\lambda \longrightarrow (\curlywedge\bar{w}, \bar{w}_i)$ definida como

$$\langle \pi_{n_i}^{\curlywedge\bar{w}}, \pi_{n_{i+1}-1}^{\curlywedge\bar{w}} \rangle_{\curlywedge\bar{w},\bar{w}_i}$$

   donde $\bar{w}$ es de la forma

$$((\cdot, \ldots, \cdot), \ldots, \overbrace{(\underset{n_i}{\cdot}, \ldots, \underset{n_{i+1}-1}{\cdot})}^{\bar{w}_i}, \ldots, (\cdot, \ldots, \cdot))$$

2. Para cada $u \in S^\star$ y cada $\bar{w} \in S^{\star\star}$, sea $\langle\,\rangle_{u,\bar{w}}$ la operación derivada de tipo $((u, \bar{w}_0), \ldots, (u, \bar{w}_{|\bar{w}|-1})) \longrightarrow (u, \curlywedge\bar{w})$ definida como

$$\begin{aligned}\langle P_0, \ldots, P_{|\bar{w}|-1}\rangle_{u,\bar{w}} = \langle & \pi_0^{\bar{w}_0} \circ P_0, \ldots, \pi_{|\bar{w}_0|-1}^{\bar{w}_0} \circ P_0, \ldots, \\ & \pi_0^{\bar{w}_{|\bar{w}|-1}} \circ P_{|\bar{w}|-1}, \ldots, \pi_{|\bar{w}_{|\bar{w}|-1}|-1}^{\bar{w}_{|\bar{w}|-1}} \circ P_{|\bar{w}|-1}\rangle_{u,\curlywedge\bar{w}}\end{aligned}$$

3. Para cada $n \in \mathrm{N}$, y cada $\bar{u}, \bar{w} \in S^{\star n}$, sea $\curlywedge_{\bar{u},\bar{w}}$ la operación derivada de tipo $((\bar{u}_0, \bar{w}_0), \ldots, (\bar{u}_{n-1}, \bar{w}_{n-1})) \longrightarrow (\curlywedge\bar{u}, \curlywedge\bar{w})$ definida como

$$\curlywedge_{\bar{u},\bar{w}}(P_0, \ldots, P_{n-1}) = \langle P_0 \circ \pi_0^{\bar{u}}, \ldots, P_{n-1} \circ \pi_{n-1}^{\bar{u}} \rangle_{\curlywedge\bar{u},\bar{w}}$$

En lo que sigue, omitimos los índices que no sean estrictamente necesarios para desambiguar las expresiones. Además, para la operaciones derivadas de la forma $\curlywedge_{\bar{u},\bar{w}}$ adoptamos la notación infija, y denotamos a $\curlywedge_{\bar{u},\bar{w}}(P_0, \ldots, P_{n-1})$ mediante $P_0 \curlywedge \cdots \curlywedge P_{n-1}$, y a su tipo como $\bar{u}_0 \curlywedge \cdots \curlywedge \bar{u}_{n-1} \longrightarrow \bar{w}_0 \curlywedge \cdots \curlywedge \bar{w}_{n-1}$.

Para las álgebras de términos $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$, las operaciones de la forma $\curlywedge_{\bar{u},\bar{w}}$ son, esencialmente, el resultado de reunir en una familia los términos correspondientes, reetiquetando adecuadamente las variables de las que dependen.

En esta sección representamos diagramáticamente la composición de los términos y expresamos la igualdad de dos términos, que sean los caminos entre dos vértices, diciendo que el diagrama apropiado conmuta. Esta convención notacional es consistente con el punto de vista de las álgebras de Bénabou como categorías.

3.6.2. Definición. Sean (φ, d), $(\psi, e)\colon (S, \Sigma) \longrightarrow (T, \Lambda)$ dos F-morfismos. Una **deformación** de (φ, d) en (ψ, e) es una función de elección ξ para el S-conjunto $(\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\varphi(s),\psi(s)})_{s\in S}$, tal que, para cada símbolo de operación $\sigma : w \longrightarrow s$, se cumple que

$$\xi_s \circ d(\sigma) = e(\sigma) \circ \xi_w$$

siendo ξ_w el término $\xi_{w_0} \curlywedge \cdots \curlywedge \xi_{w_{|w|-1}}$. Denotamos las deformaciones ξ de (φ, d) en (ψ, e) como $\xi : (\varphi, d) \rightsquigarrow (\psi, e)$.

Las deformaciones son familias de términos $\xi = (\xi_s)_{s\in S}$ tales que, para cada $s \in S$, $\xi_s \in \mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(\downarrow\varphi(s))_{\psi(s)}$, i.e., ξ_s es una familia $((\xi_s)_0, \ldots, (\xi_s)_{|\psi(s)|-1})$ tal que, para cada $i \in |\psi(s)|$, $(\xi_s)_i$ es un (T, Λ)-término de tipo $\psi(s)_i$, cuyas variables son las asociadas a la palabra $\varphi(s)$. La condición de conmutatividad la representamos mediante la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varphi^\sharp(w) \arrow[r, "d(\sigma)"] \arrow[d, "\xi_w"'] & \varphi(s) \arrow[d, "\xi_s"] \\
\psi^\sharp(w) \arrow[r, "e(\sigma)"'] & \psi(s)
\end{tikzcd}$$

y la obtención de ξ_w como

$$\begin{tikzcd}
& \varphi(w_0) \curlywedge \cdots \curlywedge \varphi(w_{|w|-1}) \arrow[dl, "\pi_0^{\varphi^\star(w)}"] \arrow[dd, "\xi_w"] \arrow[dr, "\pi_{|w|-1}^{\varphi^\star(w)}"'] & \\
\varphi(w_0) \arrow[dd, "\xi_{w_0}"'] & & \varphi(w_{|w|-1}) \arrow[dd, "\xi_{w_{|w|-1}}"] \\
& \psi(w_0) \curlywedge \cdots \curlywedge \psi(w_{|w|-1}) \arrow[dl, "\pi_0^{\psi^\star(w)}"] \arrow[dr, "\pi_{|w|-1}^{\psi^\star(w)}"'] & \\
\psi(w_0) & & \psi(w_{|w|-1})
\end{tikzcd}$$

La condición de conmutatividad en la definición anterior se extiende hasta los símbolos de operación derivados.

3.6.3. Proposición. Sean (φ, d), $(\psi, e)\colon (S, \Sigma) \longrightarrow (T, \Lambda)$ dos F-morfismos y $\xi\colon (\varphi, d) \rightsquigarrow (\psi, e)$ una deformación. Entonces, para cada término $P\colon u \longrightarrow w$

en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varphi^\sharp(u) \arrow[r, "d^\sharp(P)"] \arrow[d, "\xi_u"'] & \varphi^\sharp(w) \arrow[d, "\xi_w"] \\
\psi^\sharp(u) \arrow[r, "e^\sharp(P)"'] & \psi^\sharp(w)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Por recursión sobre el álgebra de Bénabou $\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}_S}(\Sigma)$. La base de la inducción es la condición de que ξ sea una deformación. Para las operaciones de la forma π_i^w, se cumple $d^\sharp(\pi_i^w) = \pi_i^{w^\star}$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varphi^\sharp(w) \arrow[r, "\pi_i^{\varphi^\star(w)}"] \arrow[d, "\xi_w"'] & \varphi(w_i) \arrow[d, "\xi_{w_i}"] \\
\psi^\sharp(u) \arrow[r, "\pi_i^{\psi^\star(w)}"'] & \psi(w_i)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Para las operaciones de la forma $\langle\,\rangle_{u,w}$, se cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\varphi^\sharp(u) \arrow[r, "d^\sharp\langle P_0,\ldots,P_{|w|-1}\rangle_{u,w}"] \arrow[d, "\xi_u"'] & \varphi^\sharp(w) \arrow[d, "\xi_w"] \\
\psi^\sharp(u) \arrow[r, "e^\sharp\langle P_0,\ldots,P_{|w|-1}\rangle_{u,w}"'] & \psi^\sharp(w)
\end{tikzcd}$$

conmuta, porque

$$\begin{aligned}
\xi_w \circ d^\sharp(\langle P_0,\ldots,P_{|w|-1}\rangle_{u,w}) &= \langle d^\sharp(P_0),\ldots,d^\sharp(P_{|w|-1})\rangle_{\varphi^\sharp(u),\varphi^\star(w)} \\
&= \langle \xi_{w_0}\circ d^\sharp(P_0),\ldots,\xi_{w_{|w|-1}}\circ d^\sharp(P_{|w|-1})\rangle_{\varphi^\sharp(u),\varphi^\star(w)} \\
&= \langle e^\sharp(P_0)\circ\xi_u,\ldots,e^\sharp(P_{|w|-1})\circ\xi_u\rangle_{\varphi^\sharp(u),\varphi^\star(w)} \\
&= \langle e^\sharp(P_0),\ldots,e^\sharp(P_{|w|-1})\rangle_{\varphi^\sharp(u),\varphi^\star(w)}\circ\xi_u \\
&= e^\sharp(\langle P_0,\ldots,P_{|w|-1}\rangle_{u,w})\circ\xi_u
\end{aligned}$$

Finalmente, para las operaciones de tipo $\circ_{u,x,w}$, es inmediato que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \varphi^\sharp(u) \arrow[r, "d^\sharp(P)"] \arrow[d, "\xi_u"'] & \varphi^\sharp(w) \arrow[r, "d^\sharp(Q)"] \arrow[d, "\xi_w"] & \varphi^\sharp(x) \arrow[d, "\xi_x"] \\ \psi^\sharp(u) \arrow[r, "e^\sharp(P)"'] & \psi^\sharp(w) \arrow[r, "e^\sharp(Q)"'] & \psi^\sharp(x) \end{tikzcd}$$

conmuta. $\square$

Las deformaciones se pueden componer tanto horizontalmente como verticalmente, lo que da lugar a una estructura de 2-categoría sobre las signaturas.

3.6.4. Definición. Dada la situación

$$\begin{tikzcd} & (\varphi, d) \arrow[d, squiggly, "\xi"] \arrow[dr, bend left] & \\ (S,\Sigma) \arrow[ur, dash, bend left] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash, bend right] & (\psi, e) \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\chi"] & (T,\Lambda) \\ & (\gamma, h) \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

la **composición vertical** de ξ y χ, denotada como $\chi \circ \xi$, es $(\chi_s \circ \xi_s)_{s \in S}$.

3.6.5. Proposición. La composición vertical de deformaciones es una deformación.

Demostración. En efecto, porque para cada $\sigma\colon w \longrightarrow s$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \varphi^\sharp(w) \arrow[r, "d(\sigma)"] \arrow[d, "\xi_w"'] & \varphi(s) \arrow[d, "\xi_s"] \\ \psi^\sharp(w) \arrow[r, "e(\sigma)"] \arrow[d, "\chi_w"'] & \varphi(s) \arrow[d, "\chi_s"] \\ \gamma^\sharp(w) \arrow[r, "h(\sigma)"'] & \gamma(s) \end{tikzcd}$$

$\square$

3.6.6. Definición. Dada la situación

$$
\begin{tikzcd}
(S,\Sigma) \arrow[r, bend left, "{(\varphi,d)}"] \arrow[r, bend right, "{(\psi,e)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \xi"] & (T,\Lambda) \arrow[r, bend left, "{(\gamma,h)}"] \arrow[r, bend right, "{(\nu,i)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \chi"] & (U,\Omega)
\end{tikzcd}
$$

la **composición horizontal** de ξ con χ, denotada como $\chi * \xi$, es la S-familia cuya coordenada s-ésima es la diagonal del diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
\gamma^\sharp(\varphi(s)) \arrow[r, "h^\sharp(\xi_s)"] \arrow[d, "\chi_{\varphi(s)}"'] & \gamma^\sharp(\psi(s)) \arrow[d, "\chi_{\psi(s)}"] \\
\nu^\sharp(\varphi(s)) \arrow[r, "i^\sharp(\xi_s)"'] & \nu^\sharp(\psi(s))
\end{tikzcd}
$$

La definición anterior es correcta porque, para cada $s \in S$, ξ_s es un símbolo de operación derivado en $\mathrm{Ter}_{\mathbf{B}_T}(\Lambda)_{\varphi(s),\psi(s)}$ y, puesto que χ es una deformación, el diagrama anterior conmuta.

3.6.7. Proposición. La composición horizontal de deformaciones es una deformación.

Demostración. En la situación de la definición anterior, $\chi * \xi$ es una deformación

$$
\begin{tikzcd}
(S,\Sigma) \arrow[r, bend left, "{(\gamma^\sharp\circ\varphi,\, h^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d)}"] \arrow[r, bend right, "{(\nu^\sharp\circ\psi,\, i^\sharp_{\psi^\sharp\times\psi^\sharp}\circ e)}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \chi * \xi"] & (U,\Omega)
\end{tikzcd}
$$

si, para cada $\sigma\colon w \longrightarrow s$, se cumple que $(\chi * \xi)_s \circ h^\sharp(d(\sigma)) = i^\sharp(e(\sigma)) \circ (\chi \circ \xi)_w$, lo cual se deduce de la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \gamma^\sharp(\varphi^\sharp(w)) \arrow[rr, "h^\sharp(d(\sigma))"] \arrow[dl, "h^\sharp(\xi_w)"'] \arrow[dd, "\chi_{\varphi^\sharp(w)}" near start] & & \gamma^\sharp(\varphi(s)) \arrow[dl, "h^\sharp(\xi_s)"'] \arrow[dd, "\chi_{\varphi(s)}"] \\
\gamma^\sharp(\psi^\sharp(w)) \arrow[rr, "h^\sharp(e(\sigma))" near end] \arrow[dd, "\chi_{\psi^\sharp(w)}"'] & & \gamma^\sharp(\psi(s)) \arrow[dd, "\chi_{\psi(s)}" near start] & \\
 & \nu^\sharp(\varphi^\sharp(w)) \arrow[rr, "i^\sharp(d(\sigma))" near end] \arrow[dl, "i^\sharp(\xi_w)"'] & & \nu^\sharp(\varphi(s)) \arrow[dl, "i^\sharp(\xi_s)"'] \\
\nu^\sharp(\psi^\sharp(w)) \arrow[rr, "i^\sharp(e(\sigma))"] & & \nu^\sharp(\psi(s)) &
\end{tikzcd}
$$

en el que las caras superior e inferior conmutan porque ξ es una deformación y $h^\sharp$ y $i^\sharp$ son homomorfismos, y el resto porque χ es una deformación. $\square$

Las composiciones horizontales y verticales de deformaciones satisfacen la ley de intercambio de Godement.

3.6.8. Proposición. Dada la situación

$$\begin{tikzcd}
 & (\varphi_0, d_0) \arrow[dr] \arrow[d, squiggly, "\xi"] & & (\psi_0, e_0) \arrow[dr] \arrow[d, squiggly, "\xi'"] & \\
(S, \Sigma) \arrow[ur, dash, bend left] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash, bend right] & (\varphi_1, d_1) \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\chi"] & (T, \Lambda) \arrow[ur, dash, bend left] \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash, bend right] & (\psi_1, e_1) \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "\chi'"] & (U, \Omega) \\
 & (\varphi_2, d_2) \arrow[ur] & & (\psi_2, e_2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

se cumple que $(\chi' * \chi) \circ (\xi' * \xi) = (\chi' \circ \xi') * (\chi \circ \xi)$.

Demostración. Por la conmutatividad del diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\psi_0^\sharp(\varphi_0(s)) \arrow[r, "e_0^\sharp(\xi_s)"'] \arrow[d, "\xi'_{\varphi_0(s)}"] \arrow[rr, bend left, "e_0^\sharp(\chi_s \circ \xi_s)"] \arrow[dd, bend right=60, "(\chi' \circ \xi')_{\varphi_0(s)}"'] & \psi_0^\sharp(\varphi_1(s)) \arrow[r, "e_0^\sharp(\chi_s)"'] \arrow[d, "\xi'_{\varphi_1(s)}"] & \psi_0^\sharp(\varphi_2(s)) \arrow[d, "\xi'_{\varphi_2(s)}"'] \arrow[dd, bend left=60, "(\chi' \circ \xi')_{\varphi_2(s)}"] \\
\psi_1^\sharp(\varphi_0(s)) \arrow[r, "e_1^\sharp(\xi_s)"] \arrow[d, "\chi'_{\varphi_0(s)}"] & \psi_1^\sharp(\varphi_1(s)) \arrow[r, "e_1^\sharp(\chi_s)"] \arrow[d, "\chi'_{\varphi_1(s)}"] & \psi_1^\sharp(\varphi_2(s)) \arrow[d, "\chi'_{\varphi_2(s)}"'] \\
\psi_2^\sharp(\varphi_0(s)) \arrow[r, "e_2^\sharp(\xi_s)"] \arrow[rr, bend right, "e_2^\sharp(\chi_s \circ \xi_s)"'] & \psi_2^\sharp(\varphi_1(s)) \arrow[r, "e_2^\sharp(\chi_s)"] & \psi_2^\sharp(\varphi_2(s))
\end{tikzcd}$$

en donde los triángulos superior e inferior conmutan porque $e_0^\sharp$ y $e_2^\sharp$ son homomorfismos de álgebras de Bénabou; los triángulos izquierdo y derecho por definición de la composición de S-aplicaciones y los cuadrados por la definición de deformaciones. El morfismo de $\psi_0(\varphi_0(s))$ en $\psi_2(\varphi_2(s))$ definido por la composición de las diagonales de los cuadrados interiores es la componente s-ésima del morfismo $(\chi * \chi') \circ (\xi' * \xi)$ mientras que el morfismo definido por el cuadrado exterior es la componente s-ésima del morfismo del morfismo $(\chi' \circ \xi') * (\chi \circ \xi)$. $\square$

3.6.9. Definición. Para cada F-morfismo $(\varphi, d)\colon (S, \Sigma) \longrightarrow (T, \Lambda)$, la S-familia $(\langle \pi_0^{\varphi(s)}, \ldots, \pi_{|\varphi(s)|-1}^{\varphi(s)} \rangle_{\varphi(s),\varphi(s)})_{s \in S}$ es la **deformación identidad** en (φ, d), denotada como $\mathrm{id}_{(\varphi,d)}$.

3.6.10. Proposición. Dada la situación

$$
\begin{tikzcd}
(S,\Sigma) \arrow[r, bend left, "(\varphi,d)"] \arrow[r, bend right, "(\varphi,d)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_{(\varphi,d)}"] & (T,\Lambda) \arrow[r, bend left, "(\psi,e)"] \arrow[r, bend right, "(\psi,e)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_{(\psi,e)}"] & (U,\Omega)
\end{tikzcd}
$$

se cumple que $\mathrm{id}_{(\psi,e)} * \mathrm{id}_{(\varphi,d)}$ es la identidad en $(\psi, e) \circ (\varphi, d)$ □

3.6.11. Proposición. Las signaturas, los F-morfismos y las deformaciones determinan una 2-categoría, denotada como $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. □

Álgebras heterogéneas y Deformaciones.

Las deformaciones entre F-morfismos determinan transformaciones naturales para los functores entre las categorías de álgebras asociadas a los mismos.

3.6.12. Proposición. Sean (φ, d) y (ψ, e) dos F-morfismos de (S, Σ) en (T, Λ) y $\xi\colon (\varphi, d) \rightsquigarrow (\psi, e)$ una deformación en $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. Para cada (T, Λ)-álgebra (B, G) sea $\xi^{(B,G)}$ la S-aplicación $(\xi_s^{(B,G)})_{s \in S}$. Entonces, $\xi^{(B,G)}\colon B_\varphi \longrightarrow B_\psi$ es un homomorfismo de (S, Σ)-álgebras desde $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi, d)(B, G)$ hasta $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\psi, e)(B, G)$.

Demostración. Hay que demostrar que, para cada símbolo de operación $\sigma\colon w \longrightarrow s$, en Σ, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
B_{\varphi_w} \arrow[r, "G_\sigma^{(\varphi,d)}"] \arrow[d, "\xi_w^{(B,G)}"'] & B_{\varphi_s} \arrow[d, "\xi_s^{(B,G)}"] \\
B_{\psi_w} \arrow[r, "G_\sigma^{(\psi,e)}"'] & B_{\psi_s}
\end{tikzcd}
$$

conmuta, para lo cual es suficiente que demostremos que todas las caras del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
& B_{\varphi^\sharp(w)} \arrow[r, "(G^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp}\circ d)_{w,s}(\sigma)"] \arrow[dd, "(\xi_w)^{(B,G)}"'] & B_{\varphi^\sharp(s)} \arrow[dr, "(\iota^B_{\varphi^\star(s)})^{-1}"] \arrow[dd, "(\xi_s)^{(B,G)}"] & \\
B_{\varphi_w} \arrow[ur, "\iota^B_{\varphi^\star(w)}"] \arrow[rrr, "G^{(\varphi,d)}(\sigma)"] \arrow[dd, "(\xi^{(B,G)})_w"'] & & & B_{\varphi_s} \arrow[dd, "(\xi^{(B,G)})_s"] \\
& B_{\psi^\sharp(w)} \arrow[r, "(G^\sharp_{\psi^\sharp\times\psi^\sharp}\circ e)_{w,s}(\sigma)"'] & B_{\psi^\sharp(s)} \arrow[dr, "(\iota^B_{\psi^\star(s)})^{-1}"] & \\
B_{\psi_w} \arrow[ur, "\iota^B_{\psi^\star(w)}"] \arrow[rrr, "G^{(\psi,e)}(\sigma)"'] & & & B_{\psi_s}
\end{tikzcd}
$$

excepto la anterior, conmutan, de lo cual se deduce que también ella conmuta.

Las caras superior e inferior conmutan por definición.

Por ser ξ una deformación, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\varphi^\sharp(w) \arrow[r, "d(\sigma)"] \arrow[d, "\xi_w"'] & \varphi(s) \arrow[d, "\xi_s"] \\
\psi^\sharp(w) \arrow[r, "e(\sigma)"'] & \psi(s)
\end{tikzcd}
$$

conmuta, luego

$$
\begin{aligned}
(\xi_s)^{(B,G)} \circ (G^\sharp_{\varphi^\sharp\times\varphi^\sharp} \circ d)_{w,s}(\sigma) &= G^\sharp_{\varphi(s),\psi(s)}(\xi_s) \circ G^\sharp_{\varphi^\sharp(w),\varphi(s)}(d_{w,s}(\sigma)) \\
&= G^\sharp_{\varphi^\sharp(w),\psi(s)}(\xi_s \circ d_{w,s}(\sigma)) \\
&= G^\sharp_{\varphi^\sharp(w),\psi(s)}(e_{w,s}(\sigma) \circ \xi_w) \\
&= G^\sharp_{\psi^\sharp(w),\psi(s)}(e_{w,s}(\sigma)) \circ G^\sharp_{\varphi^\sharp(w),\psi^\sharp(w)}(\xi_w) \\
&= (G^\sharp_{\psi^\sharp\times\psi^\sharp} \circ e)_{w,s}(\sigma) \circ (\xi_w)^{(B,G)}
\end{aligned}
$$

y por lo tanto, la cara posterior conmuta.

Respecto de las caras laterales, veamos, por ejemplo, que la cara lateral izquierda conmuta. Para ello demostramos que

$$(\xi_w)^{(B,G)} = \iota^B_{\psi^\star(w)} \circ \xi_w^{(B,G)} \circ (\iota^B_{\varphi^\star(w)})^{-1}$$

Se cumple que

$$\begin{aligned}(\xi_w)^{(B,G)} &= G^{\sharp}_{\varphi^\sharp(w),\psi^\sharp(w)}(\xi_{w_0} \curlywedge \cdots \curlywedge \xi_{w_{|w|-1}})\\ &= G^{\sharp}_{\varphi(w_0),\psi(w_0)}(\xi_{w_0}) \curlywedge \cdots \curlywedge G^{\sharp}_{\varphi(w_{|w|-1},\psi(w_{|w|-1})}(\xi_{w_{|w|-1}})\\ &= \xi^{(B,G)}_{w_0} \curlywedge \cdots \curlywedge \xi^{(B,G)}_{w_{|w|-1}}\\ &= \langle \xi^{(B,G)}_{w_0} \circ \mathrm{pr}^{B_{\varphi^\sharp(w)}}_{(0)}, \ldots, \xi^{(B,G)}_{w_{|w|-1}} \circ \mathrm{pr}^{B_{\varphi^\sharp(w)}}_{(|w|-1)} \rangle\end{aligned}$$

por lo tanto, es suficiente demostrar que, para cada $i \in |w|$, tenemos que

$$\mathrm{pr}^{B_{\psi^\sharp(w)}}_{(i)} \circ \iota^B_{\psi^\star(w)} \circ \xi^{(B,G)}_w \circ (\iota^B_{\varphi^\star(w)})^{-1} = \xi^{(B,G)}_{w_i} \circ \mathrm{pr}^{B_{\varphi^\sharp(w)}}_{(i)}$$

lo cual se deduce de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_{\varphi^\sharp(w)} \arrow[d, "(\iota^B_{\varphi^\star(w)})^{-1}"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}^{B_{\varphi^\sharp(w)}}_{(i)}"] & \\
B_{\varphi_w} \arrow[r, "\mathrm{pr}^{B_{\varphi_w}}_{i}"'] \arrow[d, "(\xi^{(B,G)})_w"'] & B_{\varphi(w_i)} \arrow[d, "\xi^{(B,G)}_{w_i}"] \\
B_{\psi_w} \arrow[r, "\mathrm{pr}^{B_{\psi_w}}_{i}"'] \arrow[d, "\iota^B_{\psi^\star(w)}"'] & B_{\psi(w_i)} \\
B_{\psi^\sharp(w)} \arrow[ur, "\mathrm{pr}^{B_{\psi^\sharp(w)}}_{(i)}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

3.6.13. Proposición. Sea $\xi\colon (\varphi, d) \rightsquigarrow (\psi, e)$ una deformación en $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$, siendo (φ, d), (ψ, e) dos F-morfismos de (S, Σ) en (T, Λ). Entonces la familia $(\xi^{\underline{B}})_{\underline{B}\in\mathbf{Alg}(T,\Lambda)}$, denotada como $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\xi)$, es una transformación natural de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi, d)$ en $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\psi, e)$.

Demostración. Hay que demostrar que, para cada morfismo $f\colon (B, G) \longrightarrow (C, H)$ en $\mathbf{Alg}(T, \Lambda)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(B_\varphi, G^{(\varphi,d)}) \arrow[r, "\xi^{(B,G)}"] \arrow[d, "f_\varphi"'] & (B_\psi, G^{(\psi,e)}) \arrow[d, "f_\psi"] \\
(C_\varphi, H^{(\varphi,d)}) \arrow[r, "\xi^{(C,H)}"'] & (C_\psi, H^{(\psi,e)})
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero esto es inmediato puesto que, para cada $s \in S$, se tiene que $\xi_s^{(B,G)}$ y $\xi_s^{(C,H)}$ son las realizaciones del símbolo de operación polinómica ξ_s en las álgebras correspondientes, por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} B_{\varphi(s)} \arrow[r, "\xi_s^{(B,G)}"] \arrow[d, "f_{\varphi(s)}"'] & B_{\psi(s)} \arrow[d, "f_{\psi(s)}"] \\ C_{\varphi(s)} \arrow[r, "\xi_s^{(C,H)}"'] & C_{\psi(s)} \end{tikzcd}$$

conmuta. $\square$

El pseudo-functor $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}} : \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ se puede extender para las 2-células en la 2-categoría $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$.

3.6.14. Proposición. De la 2-categoría $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ en $\mathbf{Cat}$ existe un pseudo-functor, contravariante en los morfismos y covariante en las 2-células, denotado como $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}$, y definido como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \arrow[rrr, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}"] & & & \mathbf{Cat} \\ (S,\Sigma) \arrow[d, bend right, "(\varphi,d)"'] \arrow[d, bend left, "(\psi,e)"] \arrow[d, phantom, "\overset{\xi}{\rightsquigarrow}"] & \longmapsto & & \mathbf{Alg}(S,\Sigma) \\ (T,\Lambda) & & & \mathbf{Alg}(T,\Lambda) \arrow[u, bend left, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)"] \arrow[u, bend right, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\psi,e)"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\xi)}{\rightsquigarrow}"] \end{tikzcd}$$

junto con los isomorfismo naturales $\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}}$ y $\nu_{\underline{\Sigma}}$ definidos en la proposición 3.5.25.

Demostración. Los isomorfismos naturales del pseudo-functor son compatibles con la estructura de 2-categoría de $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. $\square$

Términos heterogéneos y deformaciones.

Las deformaciones entre F-morfismos inducen también transformaciones naturales para los functores entre las categorías de términos asociados a los F-morfismos.

3.6.15. Definición. Sean (φ,d) y (ψ,e) dos F-morfismos de (S,Σ) en (T,Λ) y $\xi\colon (\varphi,d) \rightsquigarrow (\psi,e)$ una deformación en $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. Para cada S-conjunto X sea

$\xi_X \colon \coprod_\psi^\dagger X \longrightarrow \mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(\coprod_\varphi^\dagger X)$ la T-aplicación definida, en la coordenada t-ésima, como la aplicación

$$(x,s,i) \longmapsto (\xi_s)_i(v_0^{\varphi(s)_0}/(x,s,0),\dots,v_{|\varphi(s)|-1}^{\varphi(s)_{|\varphi(s)|-1}}/(x,s,|\varphi(s)|-1))$$

La definición anterior es correcta porque, para cada $j \in |\varphi(s)|$, se cumple que $(x,s,j) \in (\coprod_\varphi^\dagger X)_{\varphi(s)_j}$ y $(\xi_s)_i \colon \varphi(s) \longrightarrow \psi(s)_i$, por lo que $(\xi_X)_t(x,s,i)$ es un (T,Λ)-término de tipo $\psi(s)_i = t$.

Las aplicaciones ξ_X, para cada S-conjunto X, son, en la categoría $\mathbf{Ter}(T,\Lambda)$, morfismos de $\coprod_\varphi^\dagger X$ en $\coprod_\psi^\dagger X$, y constituyen los componentes de una transformación natural.

3.6.16. Proposición. Sea $\xi \colon (\varphi,d) \rightsquigarrow (\psi,e)$ una deformación en $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$, siendo (φ,d), (ψ,e) dos F-morfismos de (S,Σ) en (T,Λ). Entonces la familia $(\xi_X)_{X\in\mathbf{Ter}(S,\Sigma)}$, denotada como $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\xi)$, es una transformación natural de $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)$ en $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\psi,e)$.

Demostración. Para cada morfismo $P \colon X \longrightarrow Y$ en $\mathbf{Ter}(S,\Sigma)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_\varphi^\dagger X \arrow[r, "\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\xi)_X"] \arrow[d, "\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)(P)"'] & \coprod_\psi^\dagger X \arrow[d, "\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\psi,e)(P)"] \\
\coprod_\varphi^\dagger Y \arrow[r, "\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\xi)_Y"'] & \coprod_\psi^\dagger Y
\end{tikzcd}$$

conmuta. □

La proposición anterior es análoga a la proposición 3.6.3 para símbolos de operación derivados con variables en conjuntos arbitrarios.

El pseudo-functor $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}} : \mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ se puede también extender para las 2-células de la 2-categoría $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$.

3.6.17. Proposición. De la 2-categoría $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$ en $\mathbf{Cat}$ existe un pseudo-functor, covariante en los morfismos y las 2-células, denotado como $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}$, y definido como

$$\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} \xrightarrow{\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}} \mathbf{Cat}$$

$$\begin{tikzcd}
(S,\Sigma) \arrow[d, bend right=50, "(\varphi,d)"'] \arrow[d, bend left=50, "(\psi,e)"] \arrow[d, phantom, "\overset{\xi}{\rightsquigarrow}"] \\
(T,\Lambda)
\end{tikzcd}
\quad \longmapsto \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{Ter}(S,\Sigma) \arrow[d, bend right=50, "\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\varphi,d)"'] \arrow[d, bend left=50, "\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\psi,e)"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\xi)}{\rightsquigarrow}"] \\
\mathbf{Ter}(T,\Lambda)
\end{tikzcd}$$

junto con los isomorfismo naturales $\gamma_{\underline{\Sigma},\underline{\Lambda},\underline{\Omega}}$ y $\nu_{\underline{\Sigma}}$ definidos en la proposición 3.5.33.

Demostración. Los isomorfismos naturales del pseudo-functor son compatibles con la estructura de 2-categoría de $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. □

La 2-Institución de las deformaciones.

La realización de los términos en las álgebras correspondientes es consistente con la estructura adicional impuesta por las deformaciones.

3.6.18. Lema. Sean (φ, d) y (ψ, e) dos F-morfismos de (S, Σ) en (T, Λ) y $\xi : (\varphi, d) \rightsquigarrow (\psi, e)$ una deformación en $\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}$. Entonces, para cada (T, Λ)-álgebra $\underline{B} = (B, G)$, y cada S-conjunto X, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
B_{\coprod^{\dagger}_{\varphi} X} \arrow[r, "(\xi_X)^{\underline{B}}"] \arrow[d, "(\theta^{\dagger\natural}_{\varphi})_{X,B}"'] & B_{\coprod^{\dagger}_{\psi} X} \arrow[d, "(\theta^{\dagger\natural}_{\psi})_{X,B}"] \\
(\Delta^{\natural}_{\varphi} B)_X \arrow[r, "(\xi^{\underline{B}})_X"'] & (\Delta^{\natural}_{\psi} B)_X
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. Para cada $f \in B_{\coprod^{\dagger}_{\varphi} X}$, $(\xi_X)^{\underline{B}}(f) \in B_{\coprod^{\dagger}_{\psi} X}$ es el morfismo $f^{\sharp} \circ \xi_X$, obtenido a partir del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\coprod^{\dagger}_{\varphi} X \arrow[r, "\eta^{(T,\Lambda)}_{\coprod^{\dagger}_{\varphi} X}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Fr}_{(T,\Lambda)}(\coprod^{\dagger}_{\varphi} X) \arrow[d, "f^{\sharp}"] & \coprod^{\dagger}_{\psi} X \arrow[l, "\xi_X"'] \\
& B &
\end{tikzcd}
$$

por lo que $(\theta^{\dagger\natural}_{\psi})_{X,B}((\xi_X)^{\underline{B}}(f))$ es un morfismo de X en $\Delta^{\natural}_{\psi}B$. Si $x \in X_s$, entonces

$$
\begin{aligned}
\Big((\theta^{\dagger\natural}_{\psi})_{X,B}\big((\xi_X)^{\underline{B}}(f)\big)\Big)_s(x) &= \Big((\theta^{\dagger\natural}_{\psi})_{X,B}\big(f^{\sharp}\circ \xi_X\big)\Big)_s(x)\\
&= \Big((f^{\sharp}\circ \xi_X)_{\psi(s)_i}(x,s,i)\Big)_{i\in|\varphi(s)|}\\
&= \Big(f^{\sharp}_{\psi(s)_i}\big((\xi_X)_{\psi(s)_i}(x,s,i)\big)\Big)_{i\in|\varphi(s)|}\\
&= f^{\sharp}_{\psi(s)}\Big(\big((\xi_X)_{\psi(s)_i}(x,s,i)\big)_{i\in|\varphi(s)|}\Big)\\
&= f^{\sharp}_{\psi(s)}\Big(\big((\xi_s)_i(v_0^{\varphi(s)_i}/(x,s,i))\big)_{i\in|\varphi(s)|}\Big)\\
&= f^{\sharp}_{\psi(s)}\Big((\xi_s)^{\underline{\mathrm{Fr}}_{(T,\Lambda)}(\coprod^{\dagger}_{\varphi}X)}\big((x,s,i)_{i\in|\varphi(s)|}\big)\Big)\\
&= \xi_s^{\underline{B}}\Big(f^{\sharp}_{\varphi(s)}\big((x,s,i)_{i\in|\varphi(s)|}\big)\Big)
\end{aligned}
$$

puesto que $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\xi)$ es natural y $f^{\sharp}$ es homomorfismo

$$
\begin{aligned}
&= \xi_s^{\underline{B}}\Big(\big(f^{\sharp}_{\varphi(s)_i}(x,s,i)\big)_{i\in|\varphi(s)|}\Big)\\
&= \xi_s^{\underline{B}}\Big((\theta^{\dagger,\natural}_{\varphi})_{X,B}(f)_s(x)\Big)\\
&= \Big((\xi^{\underline{B}})_X\big((\theta^{\dagger,\natural}_{\varphi})_{X,B}(f)\big)\Big)_s(x)
\end{aligned}
$$

□

3.6.19. Proposición. De la 2-categoría $\mathbf{Sig}^{\mathrm{op}}\times\mathbf{Sig}$ en $\mathbf{Cat}$ existe un pseudo-functor definido como

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Sig}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{fuj}}\times\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}} & \xrightarrow{\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)\times\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)} & \mathbf{Cat}\\
(\underline{\Sigma},\underline{\Lambda}) & & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma})\times\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda})\\
{\scriptstyle(\underline{d},\underline{e})}\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})\times\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})}\\
(\underline{\Sigma}',\underline{\Lambda}') & & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}')\times\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}')
\end{array}
$$

así como el functor que es constantemente $\mathbf{Set}$. Entonces $\mathrm{Pd}=(\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}})_{\underline{\Sigma}\in\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}}$, junto con la familia $\theta=(\theta^{\underline{d}})_{\underline{d}\in\mathrm{Mor}(\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}})}$, siendo $\theta^{\underline{d}}_{\underline{A},X}=\theta^{\dagger\natural}_{X,A}$, es una transformación pseudo-extranatural de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)\times\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\cdot)$ en $\mathbf{Set}$.

Demostración. Nos limitamos a demostrar que, para cada deformación

$$\begin{tikzcd}
(S,\Sigma) \arrow[r, bend left, "(\varphi,d)"] \arrow[r, bend right, "(\psi,e)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\xi"] & (T,\Lambda)
\end{tikzcd}$$

el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
 & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}) \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}) \arrow[dr, "\mathrm{Pd}^{\underline{\Sigma}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\theta_d}{\swarrow}"] & \\
\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Sigma}) \arrow[ur, bend left=40, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d}) \times 1"] \arrow[ur, bend right=10, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e}) \times 1"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\xi)\times 1 \, \Downarrow"] \arrow[dr, bend left=10, "1 \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})"] \arrow[dr, bend right=40, "1 \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{e})"'] \arrow[dr, phantom, "1 \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\xi) \, \Downarrow"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\theta_e}{\swarrow}"] & \mathbf{Set} \\
 & \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \times \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda}) \arrow[ur, "\mathrm{Pd}^{\underline{\Lambda}}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $f\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un morfismo en $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{\Lambda})$ y $P\colon X \longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathbf{Ter}(\underline{\Sigma})$. Entonces se tiene la situación descrita en el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(\underline{A}, X) \arrow[r, "{(f, P)}"] & (\underline{B}, Y)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\underline{A}, \coprod^{\dagger}_{\varphi} X) \arrow[r, "{(\underline{A}, \xi_X)}"] \arrow[d, "{(f, \underline{d}(P))}"'] & (\underline{A}, \coprod_{\psi} X) \arrow[d, "{(f, \underline{e}(P))}"] \\
(\underline{B}, \coprod^{\dagger}_{\varphi} Y) \arrow[r, "{(\underline{B}, \xi_Y)}"'] & (\underline{B}, \coprod_{\psi} Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\underline{d}(\underline{A}), X) \arrow[r, "{(\xi^{\underline{A}}, X)}"] \arrow[d, "{(f_{\varphi}, P)}"'] & (\underline{e}(\underline{A}), X) \arrow[d, "{(f_{\psi}, P)}"] \\
(\underline{d}(\underline{B}), Y) \arrow[r, "{(\xi^{\underline{B}}, X)}"'] & (\underline{e}(\underline{B}), Y)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& (A_{\varphi})_X \arrow[rr, "(\xi^{\underline{A}})_X"] \arrow[dd, "P^{\underline{d}(\underline{A})}"] & & (A_{\psi})_X \arrow[dd, "P^{\underline{e}(\underline{A})}"] \\
A_{\coprod^{\dagger}_{\varphi} X} \arrow[ur, "(\theta^{\dagger\natural}_{\varphi})_{X,A}"] \arrow[rr, "(\xi_X)^{\underline{A}}"] \arrow[dd, "\underline{d}(P)^{\underline{A}}"] & & A_{\coprod^{\dagger}_{\psi} X} \arrow[ur, "(\theta^{\dagger\natural}_{\psi})_{X,A}"] \arrow[dd, "\underline{e}(P)^{\underline{A}}"] & \\
& (A_{\varphi})_Y \arrow[rr, "(\xi^{\underline{A}})_Y"] \arrow[dd, "(f_{\varphi})_Y"] & & (A_{\psi})_Y \arrow[dd, "(f_{\psi})_Y"] \\
A_{\coprod^{\dagger}_{\varphi} Y} \arrow[ur, "(\theta^{\dagger\natural}_{\varphi})_{Y,A}"] \arrow[rr, "(\xi_Y)^{\underline{A}}"] \arrow[dd, "f_{\coprod^{\dagger}_{\varphi} Y}"] & & A_{\coprod^{\dagger}_{\psi} Y} \arrow[ur, "(\theta^{\dagger\natural}_{\psi})_{Y,A}"] \arrow[dd, "f_{\coprod^{\dagger}_{\psi} Y}"] & \\
& (B_{\varphi})_Y \arrow[rr, "(\xi^{\underline{B}})_Y"] & & (B_{\psi})_Y \\
B_{\coprod^{\dagger}_{\varphi} Y} \arrow[ur, "(\theta^{\dagger\natural}_{\varphi})_{Y,B}"] \arrow[rr, "(\xi_Y)^{\underline{B}}"] & & B_{\coprod^{\dagger}_{\psi} Y} \arrow[ur, "(\theta^{\dagger\natural}_{\psi})_{Y,B}"] &
\end{tikzcd}
$$

en el que $\underline{d}(P)$ denota $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(P)$ y $\underline{d}(\underline{A})$ denota $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(\underline{A})$.

Las caras superior, media e inferior conmutan por el lema. Las caras laterales conmutan por el lema 3.5.38. La cara anterior del cubo superior conmuta por la proposición 3.6.16 y la anterior del cubo inferior porque f es homomorfismo. La cara posterior del cubo superior conmuta porque $\xi^{\underline{A}}$ es homomorfismo (prop. 3.6.12) y la posterior del cubo inferior por la proposición 3.6.13. □

A partir de la definición anterior, es inmediato que el cuádruplo $(\mathbf{Sig}_{\mathrm{fuj}}, \mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}, \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}, (\mathrm{Pd}, \theta))$ es una 2-institución sobre **Set**.

Teorías heterogéneas y deformaciones.

Todo lo realizado en la sección anterior sobre teorías heterogéneas tiene una aplicación inmediata para los derivors y los F-morfismos. Se dispone, por tanto, de categorías de teorías ecuacionales $\mathbf{Thp}_{\mathrm{der}}$ y $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$ cuyos morfismos son, respectivamente, derivors y F-morfismos de signaturas compatibles con las ecuaciones respectivas.

La realización de los términos heterogéneos es invariante respecto de los F-morfismos de signaturas. Por la proposición 3.5.39, se cumple un lema de satisfacción similar a 3.4.1, por el que para cada F-morfismo de signaturas $\underline{d}\colon \underline{\Sigma} \longrightarrow \underline{\Lambda}$, si (P, Q) es una $\underline{\Sigma}$-ecuación de tipo (X, Y) y $\underline{B}$ una $\underline{\Lambda}$-álgebra, entonces

$$\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(\underline{B}) \models^{\Sigma} (P, Q) \text{ exactamente si } \underline{B} \models^{\Lambda} \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(P, Q)$$

en donde $\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(P, Q)$ es la $\underline{\Lambda}$-ecuación $(\mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(P), \mathrm{Ter}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})(Q))$ de tipo $(\coprod_{\varphi}^{\dagger} X, \coprod_{\varphi}^{\dagger} Y)$.

La traducción de ecuaciones determinada por los functores de la forma $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})$ nos permiten definir la noción de **F-morfismo de presentaciones de teorías** de $(\underline{\Sigma}, \mathcal{E})$ en $(\underline{\Lambda}, \mathcal{H})$ como un F-morfismo de signaturas $\underline{d}\colon \Sigma \longrightarrow \Lambda$ tal que $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fuj}}(\underline{d})[\mathcal{E}] \subseteq \mathrm{Cn}_{\underline{\Lambda}}(\mathcal{H})$.

Las presentaciones de teorías ecuacionales y los F-morfismos entre ellas determinan, también por 3.5.39, una categoría denotada como $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$. Se tiene asimismo, un functor contravariante $\mathrm{Alg}^{\mathrm{th}}_{\mathrm{fuj}}$ de $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$ en **Cat**, así como un functor covariante $\mathrm{Ter}^{\mathrm{th}}_{\mathrm{fuj}}$ de $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$ en **Cat**.

Las deformaciones entre F-morfismos pueden ser utilizadas para definir una estructura de 2-categoría sobre cualquiera de las categorías de teorías **Thp**, $\mathbf{Thp}_{\mathrm{der}}$ o $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$. No obstante, la condición de conmutatividad de las deformaciones es, para las teorías, excesivamente estricta, puesto que exige que la traducción de un símbolo de operación realizada por un F-morfismo pueda ser transformada por la deformación en exactamente el mismo término asignado por el otro F-morfismo en cuestión. En presencia de ecuaciones, la transformación de símbolos de operación puede cumplirse sólo modulo la equivalencia generada por las ecuaciones en la teoría codominio. Para los F-morfismos de teorías, la siguiente noción de deformación es, pues, más adecuada.

3.6.20. Definición. Sean $(\varphi, d), (\psi, e)\colon (S, \Sigma, \mathcal{E}) \longrightarrow (T, \Lambda, \mathcal{H})$ dos F-morfismos de teorías. Una **deformación** de (φ, d) en (ψ, e) es una función de elección ξ para el S-conjunto $(\mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_T}(\Lambda)_{\varphi(s), \psi(s)})_{s \in S}$, tal que, para cada símbolo de operación $\sigma : w \longrightarrow s$, se cumple que

$$\xi_s \circ d(\sigma) \equiv_{\overline{\mathcal{H}}} e(\sigma) \circ \xi_w$$

i.e., tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \varphi^\sharp(w) \arrow[r, "{[d(\sigma)]_{\overline{\mathcal{H}}}}"] \arrow[d, "{[\xi_w]_{\overline{\mathcal{H}}}}"'] & \varphi(s) \arrow[d, "{[\xi_s]_{\overline{\mathcal{H}}}}"] \\ \psi^\sharp(w) \arrow[r, "{[e(\sigma)]_{\overline{\mathcal{H}}}}"'] & \psi(s) \end{tikzcd}$$

conmuta.

A partir de la definición anterior de deformación entre F-morfismos de teorías, se pueden obtener resultados similares a los obtenidos para las deformaciones entre F-morfismos de signaturas, que permiten definir una 2-categoría $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$ de presentaciones de teorías, F-morfismos y deformaciones entre F-morfismos. En tal 2-categoría se puede demostrar, por ejemplo, la equivalencia de las presentaciones de teorías de Hall y Bénabou, equivalencia que fue demostrada, para las categorías de álgebras correspondientes, en 2.12.27.

Para demostrar que las presentaciones $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{B}_S})$ y $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{H}_S})$ son equivalentes en la 2-categoría $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$ necesitamos definir un par de F-morfismos entre ellas.

3.6.21. Definición. Sea S un conjunto de tipos. De la signatura $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}$ en la signatura $\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}$, se tiene el F-morfismo (φ, d), en el que φ es la aplicación

$$\begin{array}{rcl} S^\star \times S^\star & \longrightarrow & (S^\star \times S)^\star \\ (u, v) & \longmapsto & ((u, v_0), \ldots, (u, v_{|v|-1})) \end{array}$$

y $d\colon \Sigma^{\mathrm{B}_S} \longrightarrow \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_{S^\star \times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{\varphi^\sharp \times \varphi}$ se define como

1. Para cada $w \in S^\star$, y cada $i \in |w|$,

$$d(\pi_i^w) = (\pi_i^w)$$

2. Para cada u, $w \in S^\star$,

$$d(\langle\,\rangle_{u,w}) = (v_0^{u,w_0}, \ldots, v_{|w|-1}^{u,w_{|w|-1}})$$

3. Para cada u, v, $w \in S^\star$,

$$d(\circ_{u,v,w}) = (\xi_{u,v,w_0}(v_{|v|}^{u,w_0}, v_0^{u,v_0}, \ldots, v_{|v|-1}^{u,v_{|v|-1}}), \ldots \\ , \xi_{u,v,w_{|w|-1}}(v_{|v|+|w|-1}^{u,w_{|w|-1}}, v_0^{u,v_0}, \ldots, v_{|v|-1}^{u,v_{|v|-1}}))$$

Veamos que la definición anterior es correcta. Para los operadores de la forma $\pi_i^w \in \Sigma^{\mathrm{B}_S}_{\lambda,(w,(w_i))}$, se cumple que

$$\begin{aligned} d(\pi_i^w) &\in \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_{S^\star\times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{\varphi^\sharp(\lambda),\varphi(w,(w_i))} \\ &= \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_{S^\star\times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{\lambda,((w,(w_i)))} \\ &= \mathrm{Fr}_{\Sigma^{\mathrm{H}_S}}(\downarrow\lambda)_{((w,(w_i)))} \end{aligned}$$

puesto que $d(\pi_i^w)$ es una palabra de longitud 1 que consta de un símbolo de operación de coariedad $(w,(w_i))$.

Para los operadores de la forma $\langle\,\rangle_{u,w} \in \Sigma^{\mathrm{B}_S}_{((u,(w_0)),\ldots,(u,(w_{|v|-1}))),(u,w)}$, se cumple que

$$\begin{aligned} d(\langle\,\rangle_{u,w}) &\in \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_{S^\star\times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{\varphi^\sharp((u,w_0),\ldots,(u,(w_{|w|-1}))),\varphi(u,w)} \\ &= \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_{S^\star\times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{((u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1})),((u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1}))} \\ &= \mathrm{Fr}_{\Sigma^{\mathrm{H}_S}}(\downarrow((u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1})))_{((u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1}))} \end{aligned}$$

puesto que $d(\langle\,\rangle_{u,w})$ es una palabra de longitud $|w|$ tal que, para cada $i \in |w|$, consta de un símbolo de operación derivado de coariedad $(u,(w_i))$.

Respecto a los operadores de la forma $\circ_{u,v,w} \in \Sigma^{\mathrm{B}_S}_{((u,v),(v,w)),(u,w)}$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(\circ_{u,v,w}) &\in \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_{S^\star\times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{\varphi^\sharp((u,v),(v,w)),\varphi(u,w)} \\ &= \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_{S^\star\times S}}(\Sigma^{\mathrm{H}_S})_{((u,v_0),\ldots,(u,v_{|v|-1}),(v,w_0),\ldots,(v,w_{|v|-1})),((u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1}))} \\ &= \mathrm{Fr}_{\Sigma^{\mathrm{H}_S}}(\downarrow((u,v_0),\ldots,(u,v_{|v|-1}),(v,w_0),\ldots,(v,w_{|v|-1})))_{((u,w_0),\ldots,(u,w_{|w|-1}))} \end{aligned}$$

puesto que $d(\circ_{u,v,w})$ es una palabra de longitud $|w|$ tal que, para cada $i \in |w|$, consta de un término de coariedad (u,w_i).

De $\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}$ en $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}$ se tiene también un F-morfismo, que es el asociado a un derivor.

3.6.22. Definición. Sea S un conjunto de tipos. De la signatura $\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}$ en la signatura $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}$ se tiene el F-morfismo (ψ, e), donde ψ es la aplicación

$$\begin{aligned} S^\star \times S &\longrightarrow (S^\star \times S^\star)^\star \\ (w,s) &\longmapsto ((w,(s))) \end{aligned}$$

y $e\colon \Sigma^{\mathrm{H}_S} \longrightarrow \mathrm{Ter}_{\mathrm{B}_{S^\star\times S}}(\Sigma^{\mathrm{B}_S})_{\psi^\sharp\times\psi}$ se define como

1. Para cada $w \in S^\star$ y cada $i \in |w|$,

$$e(\pi_i^w) = (\pi_i^w)$$

2. Para cada u, $w \in S^\star$ y cada $s \in S$,

$$e(\xi_{u,w,s}) = (v_0^{w,s} \circ \langle v_1^{u,w_0}, \ldots , v_{|w|}^{u,w_{|w|-1}} \rangle)$$

Los F-morfismos definidos son compatibles con las ecuaciones respectivas.

3.6.23. Proposición. Los F-morfismos de signaturas (φ, d) y (ψ, e) son F-morfismos de presentaciones. □

De las composiciones de los F-morfismos (φ, d) y (ψ, e) en las identidades respectivas se tienen deformaciones inversibles que permiten concluir la equivalencia de las teorías correspondientes.

3.6.24. Proposición. Las presentaciones de teorías $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{B}_S})$ y $(\underline{\Sigma}^{\mathrm{H}_S}, \mathcal{E}^{\mathrm{H}_S})$ son equivalentes en la 2-categoría $\mathbf{Thp}_{\mathrm{fuj}}$.

Demostración. Nos limitamos a demostrar la existencia de deformaciones inversibles entre la identidad en $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}$ y el F-morfismo $(\psi, e) \circ (\varphi, d)$.

De la identidad en $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}$ en $(\psi, e) \circ (\varphi, d)$ se tiene una deformación χ, definida, para cada coordenada $(u, w) \in S^\star \times S^\star$ como el término

$$\chi_{(u,w)} = (\pi_0^w \circ v_0, \ldots , \pi_{|w|-1}^w \circ v_0) \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}}(\downarrow((u, w)))_{((u,(w_0)),\ldots,(u,(w_{|w|-1})))}$$

y de $(\psi, e) \circ (\varphi, d)$ en la identidad en $\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}$ se tiene una deformación ρ, definida, para cada coordenada $(u, w) \in S^\star \times S^\star$, como el término

$$\rho_{(u,w)} = \langle v_0, \ldots , v_{|w|-1}\rangle_{u,w} \in \mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}^{\mathrm{B}_S}}(\downarrow((u, (w_0)), \ldots , (u, (w_{|w|-1}))))_{((u,w))}$$

Entonces $\rho_{(u,w)} \circ \chi_{(u,w)}$ es el término

$$\langle \pi_0^w \circ v_0, \ldots , \pi_{|w|-1}^w \circ v_0\rangle_{u,w} = v_0$$

y $\chi_{(u,w)} \circ \rho_{(u,w)}$ es el término

$$(\pi_0^w \circ \langle v_0, \ldots , v_{|w|-1}\rangle_{u,w}, \ldots , \pi_{|w|-1}^w \circ \langle v_0, \ldots , v_{|w|-1}\rangle_{u,w}) = (v_0, \ldots , v_{|w|-1})$$

por lo que ξ y ρ son inversas. □

4 Mónadas.

En este capítulo estudiamos las álgebras desde el punto de vista de las mónadas. En primer lugar, demostramos una versión categorial del teorema de completud para las mónadas sobre categorías de la forma $\mathbf{Set}^S$.

En secciones posteriores se introducen ciertas 2-categorías de mónadas y adjunciones, que generalizan los resultados obtenidos para las álgebras heterogéneas.

4.1 Mónadas sobre S-conjuntos.

En esta sección, consideramos las categorías de Kleisli asociadas a un mónada sobre una categoría arbitraria como una categoría de términos y definimos la noción de ecuación relativa a una mónada, así como la realización de los términos y las validez de las ecuaciones en las álgebras para esa mónada. Se obtienen así los conceptos de clase ecuacional y teoría ecuacional relativas a una mónada.

Usando tales nociones, demostramos, para las categorías de la forma $\mathbf{Set}^S$, una versión del teorema de completud de la lógica ecuacional heterogénea, que es, por tanto, invariante respecto de las presentaciones sintácticas de los conceptos relevantes

Para ello, introducimos la noción de congruencia compatible con los límites en una categoría y demostramos que el retículo de las congruencias compatibles con los productos en la categoría de los términos relativa a un mónada sobre $\mathbf{Set}^S$ es isomorfo al retículo de las teorías ecuacionales relativas a ella.

Términos y ecuaciones.

Introducimos, en primer lugar, las nociones de *término* y *ecuación* relativos a un mónada arbitraria. A partir de estas se obtienen los conceptos de *realización* de un término y *validez* de una ecuación en un álgebra relativa a la mónada en cuestión.

4.1.1. Definición. Sea $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ una mónada sobre $\mathbf{C}$ y X, $Y \in \mathbf{C}$. Un **término relativo a T** de tipo (X, Y) es un morfismo $P\colon Y \longrightarrow T(X)$ en $\mathbf{C}$. Una **T-ecuación** de tipo (X, Y), es un par (P, Q) de términos relativos a $\mathbf{T}$ de tipo (X, Y).

En lo que sigue, identificamos los términos relativos a $\mathbf{T}$ y las $\mathbf{T}$-ecuaciones con los morfismos y pares de morfismos en la **categoría de los términos relativos a T**, $\mathbf{Ter}(\mathbf{T}) = \mathbf{Kl}(\mathbf{T})^{\mathrm{op}}$, la categoría dual de la categoría de Kleisli para el funtor T. Denotamos mediante $\mathrm{Eq}(\mathbf{T})$ al $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})^2$-conjunto de todas las $\mathbf{T}$-ecuaciones. Los sub-$\mathrm{Ob}(\mathbf{C})^2$-conjuntos de $\mathrm{Eq}(\mathbf{T})$ son las relaciones en los morfismos de $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$, a las que denominamos, en este contexto, familias de $\mathbf{T}$-ecuaciones.

Para distinguir la categoría en la que se calculan las composiciones, denotamos mediante $\diamond$ el operador de composición en las categorías $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$ (y también, por lo tanto, en las categorías $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$), reservando la notación estándar $\circ$ para la composición en la categoría base $\mathbf{C}$.

Basándonos en lo anterior, definimos a continuación tanto la realización de los términos relativos a $\mathbf{T}$ como la validez de $\mathbf{T}$-ecuaciones en las $\mathbf{T}$-álgebras.

4.1.2. Definición. Sea $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ una mónada sobre $\mathbf{C}$ y (A, α) una $\mathbf{T}$-álgebra. Cada término $P\colon X \longrightarrow Y$ relativo a $\mathbf{T}$ determina una aplicación $P^{(A,\alpha)}$ de $\mathbf{C}(X, A)$ en $\mathbf{C}(Y, A)$, denominada la **realización** de P en (A, α), y que asocia a un $f\colon X \longrightarrow A$ el morfismo $\alpha \circ T(f) \circ P\colon Y \longrightarrow A$.

4.1.3. Definición. Sea (A, α) una $\mathbf{T}$-álgebra y (P, Q) una $\mathbf{T}$-ecuación de tipo (X, Y). Decimos que (P, Q) es **válida** en (A, α), denotado por $(A, \alpha) \models^{\mathbf{T}}_{X,Y} (P, Q)$, si para cada $f : X \longrightarrow A$, $\alpha \circ \mathrm{T}(f) \circ P = \alpha \circ \mathrm{T}(f) \circ Q$, i.e., si los dos caminos del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, shift left, "P"] \arrow[r, shift right, "Q"'] & T(X) \arrow[r, "T(f)"] & T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A
\end{tikzcd}
$$

coinciden o, lo que es equivalente, si $P^{(A,\alpha)} = Q^{(A,\alpha)}$.

A partir de la noción de validez de un $\mathbf{T}$-ecuación, se obtienen, como en al caso clásico, los operadores de formación de clase $\mathbf{T}$-ecuacional y teoría $\mathbf{T}$-ecuacional. Estos constituyen una conexión de Galois contravariante, a partir de la cual se definen los conceptos de clase y teoría $\mathbf{T}$-ecuacional.

4.1.4. Definición. Sea $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ una mónada sobre $\mathbf{C}$.

1. Si $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{EM}(\mathbf{T})$, entonces la **teoría T-ecuacional determinada** por $\mathcal{K}$, $\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})$, consta de todas las $\mathbf{T}$-ecuaciones válidas en todas las $\mathbf{T}$-álgebras de $\mathcal{K}$, i.e.,

$$
\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K}) = \left(\left\{ (P, Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbf{T})_{X,Y} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall (A, \alpha) \in \mathcal{K}, \\ (A, \alpha) \models^{\mathbf{T}}_{X,Y} (P, Q) \end{array} \right\} \right)_{(X,Y) \in \mathbf{C}^2}
$$

2. Si $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}(\mathbf{T})$, entonces la **clase ecuacional determinada** por $\mathcal{E}$, $\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}(\mathcal{E})$, consta de todas las $\mathbf{T}$-álgebras (A, α) que satisfacen todas las ecuaciones de $\mathcal{E}$, i.e.,

$$\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}(\mathcal{E}) = \left\{ (A, \alpha) \in \mathbf{EM}(\mathbf{T}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall X, Y \in \mathbf{C}, \forall (P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}, \\ (A, \alpha) \models^{\mathbf{T}}_{X,Y} \mathcal{E} \end{array} \right\}$$

siendo $\mathbf{EM}(\mathbf{T})$ la categoría de Eilenberg-Moore de la mónada $\mathbf{T}$.

4.1.5. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ dos familia de $\mathbf{T}$-ecuaciones y $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ dos conjuntos de $\mathbf{T}$-álgebras. Entonces se cumple que

1. Si $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$, $\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}(\mathcal{E}') \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}(\mathcal{E})$.
2. Si $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$, $\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K}') \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})$.
3. $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}(\mathcal{E}))$ y $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}(\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K}))$.

Las funciones $\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}$ y $\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}$ forman una *conexión de Galois contravariante*. □

Las categorías asociadas a los retículos de las clases de $\mathbf{T}$-álgebras y relaciones en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$ están entrelazadas mediante la adjunción

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Sub}}(\mathbf{EM}(\mathbf{T}))^{\mathrm{op}} \arrow[r, shift left, "\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \underline{\mathrm{Sub}}(\mathrm{Eq}(\mathbf{T})) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}"] \end{tikzcd}$$

en donde, para cada clase $\mathcal{K}$ de $\mathbf{T}$-álgebras y cada familia $\mathcal{E}$ de $\mathbf{T}$-ecuaciones, se cumple que:

$$\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}(\mathcal{E}) \text{ si y sólo si } \mathcal{E} \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})$$

4.1.6. Definición.

1. El operador clausura sobre $\mathrm{Eq}(\mathbf{T})$ asociado a la conexión de Galois, $\mathrm{Th}_{\mathbf{T}} \circ \mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}$, se denota como $\mathrm{Cn}_{\mathbf{T}}$ y los cerrados de $\mathrm{Cn}_{\mathbf{T}}$ se denominan **teorías T-ecuacionales**. Si $\mathcal{E}$ es una familia de $\mathbf{T}$-ecuaciones y E una $\mathbf{T}$-ecuación, entonces E es una **consecuencia semántica** de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} \Vdash E$, si $\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}(E)$, i.e., si $E \in \mathrm{Cn}_{\mathbf{T}}(\mathcal{E})$.

2. El operador clausura sobre $\mathbf{EM}(\mathbf{T})$ asociado a la conexión de Galois, $\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}} \circ \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}$, se denota como $\mathrm{Ec}_{\mathbf{T}}$ y los cerrados de $\mathrm{Ec}_{\mathbf{T}}$ se denominan **clases T-ecuacionales**. Si $\mathcal{K}$ es una clase de $\mathbf{T}$-álgebras y (A, α) una $\mathbf{T}$-álgebra, entonces (A, α) está en la clase ecuacional determinada por $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \models \underline{A}$, si $\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\underline{A})$, i.e., si $\underline{A} \in \mathrm{Ec}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})$.

Subálgebras y cocientes.

Para la demostración del teorema de completud para las mónadas sobre categorías de S-conjuntos, necesitamos definir las nociones abstractas de subálgebra y cociente de una $\mathbf{T}$-álgebra. En particular, mostramos que los cocientes de $\mathbf{T}$-álgebras de mónadas sobre S-conjuntos se caracterizan mediante la noción de $\mathbf{T}$-congruencias sobre esas álgebras.

4.1.7. Definición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$ y (A, α) una $\mathbf{T}$-álgebra. Entonces un monomorfismo $i\colon B \longrightarrow A$ en $\mathbf{C}$ es una **sub-T-álgebra** de (A, α) o, simplemente, una **subálgebra**, si existe un $\mathbf{C}$-morfismo $\beta\colon T(B) \longrightarrow A$ tal que $i \circ \beta = \alpha \circ T(i)$.

En la situación de la definición anterior, β es única cuando existe, puesto que i es mónica. Además, es una estructura algebraica. Como $\mathrm{G}^{\mathbf{T}}$ es fiel, refleja monomorfismos y como tiene un adjunto por la izquierda, los preserva, por lo que una subálgebra es precisamente un $\mathbf{EM}(\mathbf{T})$-monomorfismo.

4.1.8. Definición. Sea $f\colon (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$ un $\mathbf{T}$-homomorfismo. Entonces f o, simplemente, (B, β), es un **cociente** de (A, α) si $f\colon A \longrightarrow B$ es un epimorfismo.

La situación para los cocientes de $\mathbf{T}$-álgebras es más complicada, debido a que si $f\colon (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$ es un epimorfismo, entonces no se cumple necesariamente que $f\colon A \longrightarrow B$ sea un epimorfismo en $\mathbf{C}$. Si $f\colon (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$ es un $\mathbf{T}$-morfismo y $f\colon A \longrightarrow B$ es un epimorfismo, entonces $f : (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$ es un epimorfismo, por lo que todo cociente de (A, α) es un epimorfismo. Afirmaciones similares se cumplen para los epimorfismos regulares, las retracciones, etc., por lo que las distintas clases de epimorfismos en $\mathbf{C}$ generan nociones correspondientes de cocientes en $\mathbf{EM}(\mathbf{T})$. La noción de cociente de $\mathbf{T}$-álgebras depende por tanto de la noción de cociente en $\mathbf{C}$. Si (A, α) es una $\mathbf{T}$-álgebra, $e\colon A \longrightarrow B$ es un epimorfismo y existe un morfismo $\beta\colon T(B) \longrightarrow B$ en $\mathbf{C}$ tal que $e \circ \alpha = \beta \circ T(e)$ entonces β no es necesariamente la única con esa propiedad, a menos que $T(e)$ sea un epimorfismo. Pero si β existe y $TT(e)$ es un epimorfismo, entonces β es una $\mathbf{T}$-estructura sobre B. Por consiguiente, si T preserva epimorfismos, la situación es como para las subálgebras, y los cocientes de $\mathbf{T}$-álgebras (A, α) son epimorfismos $e\colon A \longrightarrow B$ tales que existe un $\mathbf{C}$-morfismo $\beta\colon T(B) \longrightarrow A$ para el que $e \circ \alpha = \beta \circ T(e)$.

4.1.9. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$. Entonces T preserva epimorfismos.

Demostración. Puesto que en $\mathbf{Set}^S$ todo epimorfismo es una retracción, si $f\colon A \longrightarrow B$ es un epimorfismo, existe un $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Por otra parte, si $u, v\colon T(B) \longrightarrow C$ son tales que $u \circ T(f) = v \circ T(f)$, entonces $u = u \circ T(f) \circ T(g) = v \circ T(f) \circ T(g) = v$ y $T(f)$ es un epimorfismo. $\square$

4.1.10. Definición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$ y (A,α) una $\mathbf{T}$-álgebra. Entonces Φ es una **congruencia** sobre (A,α) si $\Phi \in \mathrm{Eqv}(A)$ y para cada $a, b\colon Y \longrightarrow A$ tales que $\mathrm{pr}^\Phi \circ a = \mathrm{pr}^\Phi \circ b$, los dos caminos del siguiente diagrama coinciden:

$$
\begin{tikzcd}
T(Y) \arrow[r, shift left, "T(a)"] \arrow[r, shift right, "T(b)"'] & T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\mathrm{pr}^\Phi"] & A/\Phi
\end{tikzcd}
$$

4.1.11. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$ y (A,α) una $\mathbf{T}$-álgebra. Entonces Φ es una congruencia sobre (A,α) si y sólo si $\Phi \in \mathrm{Eqv}(A)$ y los dos caminos del siguiente diagrama coinciden:

$$
\begin{tikzcd}
T(\Phi) \arrow[r, shift left, "T(\mathrm{p}^0)"] \arrow[r, shift right, "T(\mathrm{p}^1)"'] & T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \arrow[r, "\mathrm{pr}^\Phi"] & A/\Phi
\end{tikzcd}
$$

□

4.1.12. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$ y (A,α) una $\mathbf{T}$-álgebra. Si Φ es una congruencia sobre (A,α), existe una única estructura de $\mathbf{T}$-álgebra α/Φ sobre A/Φ tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(\mathrm{pr}^\Phi)"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(A/\Phi) \arrow[d, "\alpha/\Phi"] \\
A \arrow[r, "\mathrm{pr}^\Phi"'] & A/\Phi
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. Puesto que pr^Φ es un retracción, existe un $k\colon A/\Phi \longrightarrow A$ tal que $\mathrm{pr}^\Phi \circ k = \mathrm{id}_{A/\Phi}$ y tomando como α/Φ, a $\mathrm{pr}^\Phi \circ \alpha \circ T(k)$ el diagrama conmuta. La S-aplicación α/Φ es independiente del k elegido, ya que si para otro k' tuviéramos que $\mathrm{pr}^\Phi \circ k = \mathrm{pr}^\Phi \circ k' = \mathrm{id}_{A/\Phi}$, entonces, por ser Φ una congruencia, se cumpliría que $\mathrm{pr}^\Phi \circ \alpha \circ T(k) = \mathrm{pr}^\Phi \circ \alpha \circ T(k')$. Además, α/Φ es única con esa propiedad puesto que $T(\mathrm{pr}^\Phi)$ es un epimorfismo.

Veamos por último, que $(A/\Phi, \alpha/\Phi)$ es una $\mathbf{T}$-álgebra. Sea k un inverso por la derecha de pr^{Φ}. Entonces los dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
& T(A/\Phi) \arrow[r, "T(k)"] \arrow[dd, "\alpha/\Phi"'] & T(A) \arrow[dd, "\alpha"] & \\
A/\Phi \arrow[ur, "\eta^{A/\Phi}"] \arrow[rrr, "k"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & & A \arrow[ul, "\eta^{A}"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
& A/\Phi & A \arrow[l, "\mathrm{pr}^{\Phi}"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& T(A/\Phi) \arrow[dd, "\alpha/\Phi"'] & T(A) \arrow[l, "T(\mathrm{pr}^{\Phi})"'] \arrow[dd, "\alpha"] & \\
TT(A/\Phi) \arrow[ur, "T(\alpha/\Phi)"] \arrow[rrr, "TT(k)"] \arrow[dd, "\mu^{A/\Phi}"'] & & & TT(A) \arrow[ul, "T(\alpha)"'] \arrow[dd, "\mu^{A}"] \\
& A/\Phi & A \arrow[l, "\mathrm{pr}^{\Phi}"'] & \\
T(A/\Phi) \arrow[ur, "\alpha/\Phi"] \arrow[rrr, "T(k)"'] & & & T(A) \arrow[ul, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

conmutan puesto que en ambos, todas las caras excepto las de la izquierda conmutan. □

Teorema de completud.

Demostramos a continuación un teorema de completud para las mónadas sobre categorías de S-conjuntos. Para ello, introducimos la noción de congruencia *compatible con los productos* en una categoría y demostramos que, para cada mónada $\mathbf{T}$ sobre una categoría de la forma $\mathbf{Set}^S$, el retículo de las teorías ecuacionales sobre $\mathbf{T}$ es isomorfo al retículo al de las congruencias compatibles con productos en la categoría de términos relativos a $\mathbf{T}$.

4.1.13. Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría, $\mathcal{E}$ una congruencia en $\mathbf{C}$, $D\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{C}$ y (b, β), (b, β') dos conos proyectivos de b en D. Decimos que β y β' son **$\mathcal{E}$-congruentes**, denotado por $\beta \equiv \beta'$, si, para cada $i \in \mathbf{I}$, se cumple que $(\beta(i), \beta'(i)) \in \mathcal{E}_{b,D(i)}$. Por último, decimos que la congruencia $\mathcal{E}$ es **compatible con los límites de** D si, para cada límite (a, α) de D y cada par de conos (B, β), (B, β') en D que sean $\mathcal{E}$-congruentes, los únicos morfismos $f, f'\colon b \longrightarrow a$ que existen por la propiedad universal de (a, α), son congruentes, i.e., $(f, f') \in \mathcal{E}_{b,a}$.

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "f'"] \arrow[d, phantom, "\equiv"] \arrow[dr, bend left, "\beta"] \arrow[dr, bend right, "\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & \\
a \arrow[r, "\alpha"'] & D
\end{tikzcd}
$$

La definición anterior se extiende a clases de diagramas de la manera obvia. Las congruencias compatibles con límites se comportan como las congruencias algebraicas respecto de los morfismos.

4.1.14. Proposición. Sea $\mathcal{E}$ una congruencia en $\mathbf{C}$ compatible con los límites de diagramas $D, D' \colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{C}$ y sean $\sigma, \tau \colon D \longrightarrow D'$ dos transformaciones naturales entre los diagramas. Entonces, para cada límite (a, α) de D y cada límite (a', α') de D', se cumple que las únicas aplicaciones $f \colon a \longrightarrow a'$ y $g \colon a \longrightarrow a'$ que existen en virtud de la propiedad universal de (a', α'), son congruentes.

Demostración. A partir de la situación descrita por el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, shift right=2, "f"'] \arrow[d, shift left=2, "g"] & D \arrow[d, shift right=2, "\sigma"'] \arrow[d, shift left=2, "\tau"] \\
a' \arrow[r, "\alpha'"'] & D'
\end{tikzcd}
$$

por ser $\mathcal{E}$ congruencia, $\sigma \circ \alpha$ es congruente con $\tau \circ \alpha$ y por ser $\mathcal{E}$ compatible con los límites de D', f es congruente con g. □

En particular, nos interesamos por aquellas congruencias en una categoría que sean compatibles con los productos. Por la proposición anterior, se cumple que si $(f_i, g_i \colon A_i \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ son pares de morfismos congruentes, para cada $i \in I$, entonces $\prod_{i \in I} f_i$ es congruente con $\prod_{i \in I} g_i$. Todo lo anterior puede dualizarse para los colímites y, en especial, para los coproductos. Tenemos entonces que una congruencia $\mathcal{E}$ en $\mathbf{C}$ es compatible con los productos si y sólo si la congruencia $\mathcal{E}^{-1}$ en $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ es compatible con los coproductos.

Las congruencias compatibles con productos en una categoría $\mathbf{C}$ determinan un retículo completo, al que denotamos como $\underline{\mathrm{Cgr}}^{\Pi}(\mathbf{C})$. Al operador asociado de congruencia generada compatible con los productos lo denotamos como $\mathrm{Cg}^{\Pi}_{\mathbf{C}}$.

Para la demostración del teorema de completud, consideraremos las congruencias compatibles con productos en la categoría de términos relativos a una mónada $\mathbf{T}$. Obsérvese que la categoría de términos relativos a $\mathbf{T}$ tiene productos si la categoría base de la mónada tiene coproductos.

4.1.15. Proposición. Sea $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ una mónada sobre $\mathbf{C}$. Si $\mathbf{C}$ tiene coproductos entonces $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$ tiene coproductos.

Demostración. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de objetos en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$. Entonces $\coprod_{i \in I} X_i$, junto con la familia $(\eta_{\coprod_{i \in I} X_i} \circ \mathrm{in}_i)_{i \in I}$ es un coproducto en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$.

Sea $(f_i \colon X_i \longrightarrow Y)_{i \in I}$ una familia de morfismos en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$. Entonces se tiene el diagrama conmutativo en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \coprod_{i \in I} X_i \arrow[r, "\eta_{\coprod_{i \in I} X_i}"] \arrow[d, "{[f_i]_{i \in I}}"] & T(\coprod_{i \in I} X_i) \arrow[d, "{T([f_i]_{i \in I})}"] \\
 & T(Y) & TT(Y) \arrow[l, "\mu_Y"]
\end{tikzcd}$$

y $[f_i] \colon \coprod_{i \in I} X_i \longrightarrow Y$ en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$ satisface la propiedad universal correspondiente. □

Por la proposición anterior, si $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ es una mónada sobre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}$ tiene coproductos, entonces $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$ tiene productos. En particular, todas las categorías de términos de mónadas sobre $\mathbf{Set}^S$ tienen productos.

Las congruencias compatibles con los productos en las categorías $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$, siendo $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$, están determinadas por los pares de morfismos en la congruencia cuyo codominio es de la forma δ^s.

4.1.16. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$ y $\mathcal{E}$ una congruencia compatible con los productos en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$. Entonces $(P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}$ si y sólo si, para cada $s \in S$ y cada $(y) \colon \delta^s \longrightarrow Y$ en $\mathbf{Set}^S$, $(P \circ (y), Q \circ (y)) \in \mathcal{E}_{X,\delta^s}$.

Demostración. Obsérvese, en primer lugar, que si $(y) \colon \delta^s \longrightarrow Y$, entonces $\eta^Y \circ (y)$ es un morfismo en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$ de Y en δ^s. Si $R \colon X \longrightarrow Y$ es otro morfismo en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$, entonces su composición, $(\eta^Y \circ (y)) \diamond R$, coincide con $R \circ (y)$.

Si $(P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}$, entonces para cada $s \in S$ y cada $(y) \colon \delta^s \longrightarrow Y$, se tiene que $(P \circ (y), Q \circ (y)) \in \mathcal{E}_{X,Y}$, por ser $\mathcal{E}$ una congruencia.

Recíprocamente, supongamos que, para cada $s \in S$ y cada $(y) \colon \delta^s \longrightarrow Y$, se tiene que $(P \circ (y), Q \circ (y)) \in \mathcal{E}_{X,\delta^s}$. Puesto que $(Y, \eta^Y \circ (y)_{s \in S, y \in Y_s})$ es un producto en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$ de $(\delta^s)_{s \in S, y \in Y_s}$, y $\mathcal{E}$ es compatible con los productos, entonces se cumple que $(\langle P \circ (y) \rangle_{s \in S, y \in Y_s}, \langle Q \circ (y) \rangle_{s \in S, y \in Y_s}) \in \mathcal{E}_{X,Y}$. Pero el par ordenado anterior es, por la propiedad universal del producto, igual a (P, Q), por lo que $(P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}$. □

A continuación estableceremos que toda teoría $\mathbf{T}$-ecuacional es una congruencia compatible con los productos. Necesitamos, sin embargo, de la siguiente convención notacional. Decimos que un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[r, phantom, "+"] & c \arrow[r, "k"] & d \end{tikzcd}$$

conmuta, si los dos diagramas obtenidos por eliminación de g y h coinciden, i.e., si se cumple que $k \circ g \circ f = k \circ h \circ f$, y, por lo tanto, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[r, "g"] & c \arrow[dr, "k"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & & d \\ & b \arrow[r, "h"'] & c \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta en sentido ordinario. Extendemos esta convención a diagramas similares cuando no haya riesgo de confusión.

4.1.17. Teorema (de corrección). Sea S un conjunto y $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$. Entonces cada teoría ecuacional es una congruencia en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$ compatible con los productos.

Demostración. Sea $\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})$ una teoría ecuacional. Entonces para cualesquiera X, $Y \in \mathbf{Set}^S$, $\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})_{X,Y}$ es, obviamente, una relación de equivalencia.

Veamos que la equivalencia $\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})$ es compatible con los morfismos de $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$. Sea $(P, Q) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})_{X,Y}$ y $R\colon Y \longrightarrow Z$ un morfismo en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$. Entonces, para cada $\mathbf{T}$-álgebra (A, α) y cada $f\colon X \longrightarrow A$, tenemos el siguiente diagrama en $\mathbf{Set}^S$:

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[r, shift left, "P"] \arrow[r, shift right, "Q"'] \arrow[r, phantom, "+"] & T(X) \arrow[r, "T(f)"] & T(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \\ Z \arrow[r, "R"'] & T(Y) \arrow[rr, shift left, "T(P)"] \arrow[rr, shift right, "T(Q)"'] \arrow[rr, phantom, "+"] & & TT(X) \arrow[u, "\mu_X"'] \arrow[r, "TT(f)"'] & TT(A) \arrow[u, "\mu_A"'] \arrow[r, "T(\alpha)"'] & T(A) \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

La parte superior del diagrama conmuta porque $(P, Q) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})_{X,Y}$, los cuadrados conmutan porque μ es una transformación natural y α es el morfismo estructural de una $\mathbf{T}$-álgebra, mientras que la parte inferior conmuta porque T es functor. Por consiguiente, $(R \diamond P, R \diamond Q) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K})_{X,Z}$.

Sea $W\colon U \longrightarrow X$ un morfismo en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$. Entonces para cada $\mathbf{T}$-álgebra (A, α) y cada $f\colon X \longrightarrow A$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, shift left, "P"] \arrow[r, shift right, "Q"'] \arrow[r, phantom, "+"] & T(X) \arrow[r, "T(W)"] & TT(U) \arrow[r, "TT(f)"] \arrow[d, "\mu_U"'] & TT(A) \arrow[r, "T(\alpha)"] \arrow[d, "\mu_A"] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ & & T(U) \arrow[r, "T(f)"'] & T(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A \end{tikzcd}$$

conmuta y $(P \diamond W, Q \diamond W) \in \mathrm{Th}_{\underline{\Sigma}}(\mathcal{K})_{U,Y}$.

Veamos por último que $\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})$ es compatible con los productos. Sea $(P_i, Q_i \colon X \longrightarrow Y_i)_{i \in I}$ una familia de morfismos en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$ tal que, para cada $i \in I$, $(P_i, Q_i) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})_{X,Y_i}$, (A, α) una $\mathbf{T}$-álgebra en $\mathcal{K}$ y $f \colon X \longrightarrow A$ un morfismo en $\mathbf{Set}^S$. Entonces tenemos la situación del diagrama en $\mathbf{Set}^S$

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[rr, "\mathrm{in}_i"] \arrow[drr, shift left, "P_i"] \arrow[drr, shift right, "Q_i"'] & & \coprod_{i \in I} Y_i \arrow[d, shift right, "{[Q_i]_{i \in I}}"'] \arrow[d, shift left, "{[P_i]_{i \in I}}"] & & \\
& & T(X) \arrow[r, "T(f)"'] & T(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}$$

Sea $f_i = \alpha \circ T(f) \circ P_i = \alpha \circ T(f) \circ Q_i$. Entonces, por la propiedad universal de $\coprod_{i \in I} Y_i$, existe un único $[f_i]_{i \in I} \colon \coprod_{i \in I} Y_i \longrightarrow A$ tal que $[f_i] \circ \mathrm{in}_i = f_i$. Además, se cumple que $\alpha \circ T(f) \circ [P_i]_{i \in I} \circ \mathrm{in}_i = f_i = \alpha \circ T(f) \circ [Q_i]_{i \in I} \circ \mathrm{in}_i$, luego también que $\alpha \circ T(f) \circ [P_i]_{i \in I} = \alpha \circ T(f) \circ [Q_i]_{i \in I}$, y por consiguiente, podemos afirmar que $([P_i]_{i \in I}, [Q_i]_{i \in I}) \in \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})_{X, \coprod_{i \in I} Y_i}$. □

La proposición anterior es equivalente a la afirmación de que el operador de congruencia generada compatible con los productos en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$, $\mathrm{Cg}^{\Pi}_{\mathbf{Ter}(\mathbf{T})}$ es menor que el operador de consecuencia semántica $\mathrm{Cn}_{\mathbf{T}}$, $\mathrm{Cg}^{\Pi}_{\mathbf{Ter}(\mathbf{T})} \leq \mathrm{Cn}_{\mathbf{T}}$.

4.1.18. Definición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$, $\mathcal{E}$ una familia de ecuaciones en $\mathrm{Eq}(\mathbf{T})$ y X un S-conjunto. Entonces denotamos por $\mathcal{E}_X$ al S-conjunto $(\{(p, q) \in T(X)_s^2 \mid ((p), (q)) \in \mathcal{E}_{X, \delta^s}\})_{s \in S}$.

4.1.19. Lema. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$, $\mathcal{E}$ una congruencia compatible con los productos en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$ y X un S-conjunto. Para cada $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbf{T})_{X,Y}$, se cumple que $(P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}$ si y sólo si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, shift left, "P"] \arrow[r, shift right, "Q"'] \arrow[r, phantom, "+"] & T(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X}"] & T(X)/\mathcal{E}_X
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Si $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbf{T})_{X,Y}$, entonces, para cada $s \in S$ y cada $(y) \colon \delta^s \longrightarrow Y$ en $\mathbf{Set}^S$, se tiene el diagrama en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "P"] \arrow[r, shift right, "Q"'] \arrow[rr, bend left=50, "P \circ (y)"] \arrow[rr, bend right=50, "Q \circ (y)"'] & Y \arrow[r, "\eta^Y \circ (y)"] & \delta^s
\end{tikzcd}$$

en el que $P \circ (y) = (\eta^Y \circ (y)) \diamond P$ y $Q \circ (y) = (\eta^Y \circ (y)) \diamond Q$. Ahora bien, por ser $\mathcal{E}$ una congruencia $(P \circ (y), Q \circ (y)) \in \mathcal{E}_{X,\delta^s}$, luego $(P_s(y), Q_s(y) \in \mathcal{E}_{X,s}$. Pero ya que los δ^s son un conjunto de generadores en $\mathbf{Set}^S$, $\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ P = \mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ P$.

Recíprocamente, si $\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ P = \mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ Q$, entonces, para cada $s \in S$ y cada $(y)\colon \delta^s \longrightarrow Y$, $\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ P \circ (y) = \mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ Q \circ (y)$ y por tanto, $(P \circ (y), Q \circ (y)) \in \mathcal{E}_{X,\delta^s}$. Luego, por la proposición 4.1.16, $(P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}$. □

4.1.20. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$ y $\mathcal{E}$ una congruencia compatible con los productos en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$. Entonces, para cada S-conjunto X, $\mathcal{E}_X$ es una congruencia sobre $(T(X), \mu_X)$.

Demostración. Puesto que $(\mathcal{E}_{X,\delta^s})_{s\in S}$ es una S-relación de equivalencia sobre $T(X)$, también $\mathcal{E}_X$ lo es.

Veamos que $\mathcal{E}_X$ es una congruencia. Sean $a, b\colon Y \longrightarrow T(X)$ dos S-aplicaciones tales que $\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ a = \mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ b$. Por el lema anterior, se cumple que $(a, b) \in \mathcal{E}_{X,Y}$. Considérese el diagrama en$\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] \arrow[rr, bend left=40, "\mu_X \circ T(a)"] \arrow[rr, bend right=40, "\mu_X \circ T(b)"'] & Y \arrow[r, "\mathrm{id}_{T(Y)}"] & T(Y) \end{tikzcd}$$

en el que $\mu_X \circ T(a) = \mathrm{id}_{T(Y)} \diamond a$ y $\mu_X \circ T(b) = \mathrm{id}_{T(Y)} \diamond b$. Entonces se cumple que $(\mu_X \circ T(a), \mu_X \circ T(b) \in \mathcal{E}_{X,T(Y)}$, puesto que $\mathcal{E}$ es una congruencia. Una vez más, por el lema anterior, el diagrama en $\mathbf{Set}^S$

$$\begin{tikzcd} T(Y) \arrow[r, shift left, "T(a)"] \arrow[r, shift right, "T(b)"'] & TT(X) \arrow[r, "\mu_X"] & T(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X}"] & T(X)/\mathcal{E}_X \end{tikzcd}$$

conmuta y $\mathcal{E}_X$ es una congruencia sobre $T(X)$. □

4.1.21. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$ y $\mathcal{E}$ una congruencia compatible con los productos en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$. Entonces, para cada S-conjunto Z, $(T(Z)/\mathcal{E}_Z, \mu_Z/\mathcal{E}_Z) \models^{\mathbf{T}} \mathcal{E}$.

Demostración. Sea $(P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}$ y $f\colon X \longrightarrow T(Z)/\mathcal{E}_Z$. Entonces, por ser $\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_Z}$ una retracción, existe un $R\colon X \longrightarrow T(Z)$ tal que $f = \mathrm{pr}_{\mathcal{E}_Z} \circ R$. Por consiguiente,

$(P \diamond R, Q \diamond R) \in \mathcal{E}_{Z,Y}$, y por el lema 4.1.19, $\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_Z} \circ \mu_Z \circ T(R) \circ P = \mathrm{pr}^{\mathcal{E}_Z} \circ \mu_Z \circ T(R) \circ Q$. Como consecuencia, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & TT(Z) \arrow[rr, "\mu^Z"] \arrow[d, "T(\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_Z})"] & & T(Z) \arrow[d, "\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_Z}"] \\
Y \arrow[r, shift left=2, "P"] \arrow[r, shift right=2, "Q"'] \arrow[r, phantom, "+"] & T(X) \arrow[ur, "T(R)"] \arrow[r, "T(f)"'] & T(T(Z)/\mathcal{E}_Z) \arrow[rr, "\alpha/\mathcal{E}_Z"'] & & T(Z)/\mathcal{E}_Z
\end{tikzcd}$$

conmuta y $(T(Z)/\mathcal{E}_Z, \mu_Z/\mathcal{E}_Z) \models^{\mathbf{T}} \mathcal{E}$. □

4.1.22. Teorema (de adecuación.). Sea S un conjunto y $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$. Entonces cada congruencia compatible con los productos en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$ es una teoría ecuacional.

Demostración. Demostramos que si $\mathcal{E}$ es una congruencia compatible con los productos en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$, entonces $\mathcal{E} = \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})$, con $\mathcal{K} = \{(T(X)/\mathcal{E}_X, \mu_X/\mathcal{E}_X) \mid X \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S\}$. En virtud de la proposición anterior, $\mathcal{K} \models \mathcal{E}$ y por tanto, $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}(\mathcal{K})$, de donde $(T(X), \mu_X)/\mathcal{E}_X \models^{\mathbf{T}}_{X,Y} (P, Q)$.

Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & TT(X) \arrow[rr, "\mu^X"] \arrow[d, "T(\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X})"] \arrow[rr, phantom, shift right=8, "(2)"] & & T(X) \arrow[d, "\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X}"] \\
Y \arrow[r, shift left=2, "P"] \arrow[r, shift right=2, "Q"'] \arrow[r, phantom, "+"] & T(X) \arrow[ur, "T(\eta^X)"] \arrow[r, "T(\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ \eta^X)"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "(1)"] & T(T(X)/\mathcal{E}_X) \arrow[rr, "\mu_X/\mathcal{E}_X"'] & & T(X)/\mathcal{E}_X
\end{tikzcd}$$

donde (1) y (2) conmutan y $\mu_X/\mathcal{E}_X \circ T(\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ \eta^X) \circ P = \mu_X/\mathcal{E}_X \circ T(\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ \eta^X) \circ Q$. Ahora bien, puesto que $\mu_X \circ T(\eta^X) = \mathrm{id}_X$, $\mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ P = \mathrm{pr}^{\mathcal{E}_X} \circ Q$, y, por el lema 4.1.19, $(P, Q) \in \mathcal{E}_{X,Y}$. □

4.1.23. Corolario (Teorema de completud). Sea S un conjunto y $\mathbf{T}$ un mónada sobre $\mathbf{Set}^S$. Entonces, los retículos de las congruencias compatibles con los productos en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$ y de las teorías ecuacionales sobre $\mathbf{T}$ son isomorfos. □

Para las mónadas $\mathbf{T}$ sobre $\mathbf{Set}^S$, la correspondiente categoría de términos sobre $\mathbf{T}$ es una categoría con productos en la que los objetos de la forma δ^s, con $s \in S$, forman un conjunto de cogeneradores. En particular, de esto se sigue que una $\mathbf{T}$-ecuación $(P, Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbf{T})_{X,Y}$ es satisfecha en una $\mathbf{T}$-álgebra (A, α) si y sólo si esta satisface a todas y cada una de las $\mathbf{T}$-ecuaciones en $\mathrm{Eq}(\mathbf{T})_{X,\delta^s}$, obtenidas por composición de P y Q con un morfismo $R\colon Y \longrightarrow \delta^s$ en $\mathbf{Ter}(\mathbf{T})$. Este hecho permite que, para las mónadas sobre categorías de S-conjuntos, se puedan considerar exclusivamente ecuaciones con codominio δ^s, para algún $s \in S$. Además, para estas últimas se tiene un operador de consecuencia definible directamente, y que es equivalente al operador de congruencia generada compatible con los productos.

4.1.24. Definición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$ y $\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})$ la familia $(\mathbf{Ter}(\mathbf{T})(X,\delta^s)^2)_{(X,s)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^S\times S}$. Entonces denotamos mediante $\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbf{T}}$ y $\widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbf{T}}$ los operadores definidos como:

$$\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbf{T}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathbf{EM}(\mathbf{T})) \\ \mathcal{D} \longmapsto \left\{ (A,\alpha) \in \mathbf{EM}(\mathbf{T}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall (X,s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S,\ \forall (P,Q) \in \mathcal{E}_{X,s}, \\ (A,\alpha) \models^{\mathbf{T}}_{X,\delta^s} \mathcal{E} \end{array} \right\} \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbf{T}} \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathbf{EM}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})) \\ \mathcal{K} \longmapsto \left(\left\{ (P,Q) \in \widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})_{X,s} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall (A,\alpha) \in \mathcal{K}, \\ (A,\alpha) \models^{\mathbf{T}}_{X,\delta^s} (P,Q) \end{array} \right\} \right)_{(X,s)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^S\times S} \end{cases}$$

Las funciones $\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbf{T}}$ y $\widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbf{T}}$ forman una conexión de Galois contravariante. A los operadores clausura asociados los denotamos como $\widetilde{\mathrm{Cn}}_{\mathbf{T}}$, para las ecuaciones, y $\widetilde{\mathrm{Ec}}_{\mathbf{T}}$, para las $\mathbf{T}$-álgebras.

4.1.25. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$. Considérense las aplicaciones siguientes:

$$I \begin{cases} \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbf{T})) \\ \mathcal{D} \longmapsto \left(\left\{ (P,Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbf{T})_{X,Y} \;\middle|\; \exists s \in S,\ Y = \delta^s,\ (P,Q) \in \mathcal{D}_{X,s} \right\} \right)_{(X,Y)\in(\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)^2} \end{cases}$$

$$H \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})) \\ \mathcal{E} \longmapsto \left(\left\{ (P,Q) \in \widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})_{X,s} \;\middle|\; (P,Q) \in \mathcal{E}_{X,\delta^s} \right\} \right)_{(X,s)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^S\times S} \end{cases}$$

$$D \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})) \\ \mathcal{E} \longmapsto \left(\left\{ (P\circ(y), Q\circ(y) \in \widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})_{X,s} \;\middle|\; (P,Q) \in \mathcal{E}_{X,Y},\ y \in Y_s \right\} \right)_{(X,s)\in\boldsymbol{\mathcal{U}}^S\times S} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbf{T})) \\ \mathcal{D} \longmapsto \left(\left\{ (P,Q) \in \mathrm{Eq}(\mathbf{T})_{X,Y} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall s \in S,\ \forall (y)\colon \delta^s \longrightarrow Y, \\ (P\circ(y), Q\circ(y)) \in \mathcal{D}_{X,s} \end{array} \right\} \right)_{(X,Y)\in(\boldsymbol{\mathcal{U}}^S)^2} \end{cases}$$

Los operadores D, B, I, H preservan el orden, y constituyen, por tanto, functores entre las categorías asociadas a los retículos respectivos. Por otra parte, para cada

$\mathcal{E} \subseteq \mathrm{Eq}(\mathbf{T})$ y cada $\mathcal{D} \subseteq \widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})$, se cumple que:

$$D(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \text{ si y sólo si } \mathcal{E} \subseteq B(\mathcal{D})$$
$$I(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{E} \text{ si y sólo si } \mathcal{D} \subseteq H(\mathcal{E})$$

por lo que $D \dashv B$ y $I \dashv H$.

Además, se cumple que $H \circ I = D \circ I = H \circ B = D \circ B = \mathrm{Id}_{\mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T}))}$.

Demostración. La demostración es formalmente idéntica a la de la proposición 2.12.31 □

Por la proposición anterior, la unidad de la adjunción $I \dashv H$ y la counidad de la adjunción $D \dashv B$ son identidades. Además, la adjunción compuesta $D \circ I \dashv H \circ B$ es la adjunción identidad por lo que la categoría $\mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T}))$ constituye un retracto de $\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbf{T})$ en la categoría **Adj** de categorías y adjunciones.

A partir de las definiciones es inmediata la siguiente proposición.

4.1.26. Proposición. Los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbf{T})) \arrow[d, shift right, "D"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathrm{Sub}(\mathbf{EM}(\mathbf{T}))^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}"'] \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})) \arrow[u, shift right, "B"'] \arrow[r, shift right, "\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbf{T}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathrm{Sub}(\mathbf{EM}(\mathbf{T}))^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift right, "\widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbf{T}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})) \arrow[d, shift right, "I"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[r, shift right, "\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbf{T}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathrm{Sub}(\mathbf{EM}(\mathbf{T}))^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift right, "\widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbf{T}}"'] \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}(\mathbf{T})) \arrow[u, shift right, "H"'] \arrow[r, shift right, "\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathrm{Sub}(\mathbf{EM}(\mathbf{T}))^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Th}_{\mathbf{T}}"']
\end{tikzcd}$$

□

Este hecho implica que las adjunciones $\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}} \dashv \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}$ y $\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbf{T}} \dashv \widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbf{T}}$ son equivalentes en una 2-categoría de adjunciones, morfismos algebraicos de adjunciones y deformaciones entre tales morfismos, que consideraremos posteriormente.

Para las ecuaciones en $\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})$ podemos definir un sistema de clausura cuyo retículo de teorías es isomorfo a $\underline{\mathrm{Cgr}}^{\Pi}(\mathbf{Ter}(\mathbf{T}))$.

4.1.27. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$ y $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{T}}$ el conjunto de las partes $\mathcal{E}$ de $\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})$ que cumplen las siguientes condiciones:

1. Para cada $(X, s) \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^S \times S$, $\mathcal{E}_{X,s}$ es una relación de equivalencia.

2. Para cada $(P, Q) \in \mathcal{E}_{Y,s}$, y cada $(P', Q') \in \mathbf{Ter}(\mathbf{T})(X, Y)$, si para cada $s' \in S$ y cada $(y)\colon \delta^{s'} \longrightarrow Y$, $(P' \circ (y), Q' \circ (y)) \in \mathcal{E}_{X,s'}$ entonces se cumple que $(P \diamond P', Q \diamond Q') \in \mathcal{E}_{X,s}$.

Entonces $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{T}}$ es un sistema de clausura sobre $\widetilde{\mathrm{Eq}}(\mathbf{T})$. Al operador clausura asociado se denota como $\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathbf{T}}$. □

4.1.28. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$. Entonces los retículos $\widetilde{\mathcal{C}}_{\mathbf{T}}$ y $\underline{\mathrm{Cgr}}^{\Pi}(\mathbf{Ter}(\mathbf{T}))$ son isomorfos.

Demostración. La demostración es formalmente idéntica a la de la proposición 2.12.33. □

El teorema de completud que acabamos de demostrar tiene, como caso particular, al teorema de completud que demostramos para las ecuaciones asociadas a una signatura algebraica. Si $\underline{\Sigma}$ es una S-signatura algebraica y $\mathbf{T}$ la mónada $\mathrm{Fr}_{\underline{\Sigma}}$ asociada a ella, los operadores $\widetilde{\mathrm{C}}_{\mathbf{T}}$y $\mathrm{Cgr}^{\Pi}(\mathbf{Ter}(\mathbf{T}))$ son, respectivamente, los operadores definidos en las proposiciones 2.12.11 y 2.12.30, excepto que en estos últimos se consideran exclusivamente ecuaciones con conjuntos de variables finitos asociados a una palabra.

La demostración llevada a cabo en esta sección hace innecesario considerar álgebras de Hall o de Bénabou con operaciones localmente finitarias para demostrar el teorema de completud para ecuaciones localmente finitarias. Esto es así, porque la categoría de términos para la mónada asociada a una S-signatura algebraica constituye una versión categorial de las álgebras libres de Hall y Bénabou para esa signatura.

4.2 La 2-categoría Mnd(C).

En esta sección se introduce una cierta 2-categoric de mónadas sobre una categoric arbitraria pero fija $\mathbf{C}$, y se demuestra la existencia de un 2-isomorfismo entre ella y ciertas 2-categorías asociadas a las construcciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore.

4.2.1. Definición. Sean $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ y $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ dos mónadas sobre una misma categoría $\mathbf{C}$. Un **morfismo de mónadas** $\lambda : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ es una transformación natural $\lambda : T \Longrightarrow T'$ tal que $\lambda \circ \eta = \eta'$ y $\lambda \circ \mu = \mu' \circ (\lambda * \lambda)$, i.e., tal que los siguientes diagramas conmutan.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Id} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] & T \arrow[d, "\lambda"] \\
 & T'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \circ T \arrow[r, "\lambda * \lambda"] \arrow[d, "\mu"'] & T' \circ T' \arrow[d, "\mu'"] \\
T \arrow[r, "\lambda"'] & T'
\end{tikzcd}
$$

Si $\lambda : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ y $\lambda' : \mathbf{T}' \longrightarrow \mathbf{T}''$ son morfismos de mónadas, su **composición** es la transformación natural $\lambda' \circ \lambda : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}''$.

La conmutatividad de los diagramas en la definición anterior equivale a que se cumplan las siguientes ecuaciones de 2-diagramas,

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left=70, "1"{name=U}] \arrow[r, "T"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=70, "T'"{name=D, swap}] & \mathbf{C}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\eta"] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D, "\lambda"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left=40, "1"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "T'"{name=D, swap}] & \mathbf{C}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\eta'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left=40, "T"{name=U1}] \arrow[r, bend right=40, "T'"{name=D1, swap}] \arrow[rr, bend right=70, "T'"{name=B, swap}] & \mathbf{C} \arrow[r, bend left=40, "T"{name=U2}] \arrow[r, bend right=40, "T'"{name=D2, swap}] & \mathbf{C}
\arrow[Rightarrow, from=U1, to=D1, "\lambda"] \arrow[Rightarrow, from=U2, to=D2, "\lambda"] \arrow[from=1-2, to=B, phantom, "\Downarrow\mu'"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left=40, "T"] \arrow[rr, bend right=40, "T"{name=M, description}] \arrow[rr, bend right=70, "T'"{name=D, swap}] & \mathbf{C} \arrow[r, bend left=40, "T"] & \mathbf{C}
\arrow[from=1-2, to=M, phantom, "\Downarrow\mu"] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D, "\lambda"]
\end{tikzcd}
$$

4.2.2. Proposición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Las mónadas sobre $\mathbf{C}$ y los morfismos entre ellas determinan una categoría, denotada como $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$. □

4.2.3. Proposición. Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ dos mónadas sobre la misma categoría $\mathbf{C}$. Entonces existe una biyección entre

1. Los morfismos de mónadas $\lambda : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$.

2. Los functores $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$ tales que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'}$.

Demostración. Sea $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ un morfismo de mónadas sobre $\mathbf{C}$. Entonces λ determina un functor H_λ de $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$ en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$, definido sobre los objetos como la identidad y que a cada $P\colon Y \longrightarrow T(X)$ en $\mathbf{C}$ le asigna $\lambda_X \circ P$.

La preservación de las identidades es inmediata puesto que $\lambda \circ \eta = \eta'$. Veamos que H_λ preserva composiciones. Sean $Q\colon Z \longrightarrow T(Y)$ y $P\colon Y \longrightarrow T(X)$ un par de morfismos componibles en $\mathbf{C}$. Entonces se cumple que

$$
\begin{aligned}
H_\lambda(P \diamond Q) &= \lambda_X \circ \mu_X \circ T(P) \circ Q \\
&= \mu'_X \circ (\lambda * \lambda)_X \circ T(P) \circ Q \\
&= \mu'_X \circ T'(\lambda_X) \circ \lambda_{T(X)} \circ T(P) \circ Q \\
&= \mu'_X \circ T'(\lambda_X) \circ T'(P) \circ \lambda_{T(Y)} \circ Q \\
&= (\lambda_{T(X)} \circ P) \diamond (\lambda_{T(Y)} \circ Q) \\
&= H_\lambda(P) \diamond H_\lambda(Q)
\end{aligned}
$$

Se cumple que H_λ es tal que $H_\lambda \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'}$, puesto que, para cada $f\colon Y \longrightarrow X$ en $\mathbf{C}$, se cumple que

$$
\begin{aligned}
H_\lambda \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}}(f) &= H_\lambda(\eta_X \circ f) \\
&= \lambda_X \circ \eta_X \circ f = \eta'_X \circ f = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'}(f)
\end{aligned}
$$

Recíprocamente, si $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$ es tal que $H \circ \mathrm{F}^{\mathbf{T}} = \mathrm{F}^{\mathbf{T}'}$, entonces sea λ_H la aplicación que a cada X le asigna $H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})$, la imagen bajo H del morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$ que corresponde a la identidad de $T(X)$ en $\mathbf{C}$.

Antes de pasar a demostrar que λ_H es una transformación natural de T en T', comprobamos, en primer lugar, que, para cada $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$-morfismo $P\colon Y \longrightarrow X$, $H(P) = H(\mathrm{id}_{T(X)}) \circ P$. El diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F_{\mathbf{T}}(P)"] \arrow[dr, "P"'] & T(X) \arrow[d, "\mathrm{id}_{T(X)}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

conmuta, y, puesto que H es functor, también el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "H(F_{\mathbf{T}}(P))"] \arrow[dr, "H(P)"'] & T(X) \arrow[d, "H(\mathrm{id}_{T(X)})"] \\ & X \end{tikzcd}$$

conmuta. Como $H(F_{\mathbf{T}}(P)) = F_{\mathbf{T}'}(P) = \eta'_{T(X)} \circ P$, el diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "P"] \arrow[rrrd, "H(P)"'] & T(X) \arrow[r, "\eta'_{T(X)}"] & T'T(X) \arrow[r, "T'(H(\mathrm{id}_{T(X)}))"] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\ & & & T'(X) \end{tikzcd}$$

conmuta. Pero $\mu'_X \circ T'(H(\mathrm{id}_{T(X)})) \circ \eta'_{T(X)} = H(\mathrm{id}_{T(X)})$,

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\eta'_{T(X)}"] \arrow[d, "H(\mathrm{id}_{T(X)})"'] & T'T(X) \arrow[d, "T'(H(\mathrm{id}_{T(X)}))"] \\ T'(X) \arrow[r, "\eta'_{T'(X)}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T'(X)}"'] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\ & T'(X) \end{tikzcd}$$

y por consiguiente, $H(T(f)) = H(\mathrm{id}_{T(X)}) \circ T(f)$.

Veamos que $\lambda_H \colon T \longrightarrow T'$ es una transformación natural. Sea $f \colon Y \longrightarrow X$ un $\mathbf{C}$-morfismo. Para comprobar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} T(Y) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(Y)})"'] & T(X) \arrow[d, "H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})"] \\ T'(Y) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(X) \end{tikzcd}$$

demostramos que ambos caminos coinciden con $H(T(f))$. Obviamente, se cumple que $H(\mathrm{id}_{T(X)}) \circ T(f) = H(T(f))$, porque $T(f) \colon T(Y) \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$.

Por otra parte, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$

$$\begin{tikzcd} T(Y) \arrow[d, "\mathrm{id}_{T(Y)}"'] \arrow[dr, "T(f)"] & \\ Y \arrow[r, "F_{\mathbf{T}}(f)"'] & X \end{tikzcd}$$

conmuta, luego el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$

$$\begin{tikzcd} T(Y) \arrow[d, "H(\mathrm{id}_{T(Y)})"'] \arrow[dr, "H(T(f))"] & \\ Y \arrow[r, "H(F_{\mathbf{T}}(f))"'] & X \end{tikzcd}$$

también conmuta. Como $H(F_{\mathbf{T}}(f)) = F_{\mathbf{T}'}(f) = \eta'_X \circ f$, el diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} T(Y) \arrow[r, "H(\mathrm{id}_{T(Y)})"] \arrow[drrr, "H(T(f))"'] & T'(Y) \arrow[r, "T'(f)"] & T'(X) \arrow[r, "T'(\eta'_X)"] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\ & & & T'(X) \end{tikzcd}$$

conmuta, y, por consiguiente, $H(T(f)) = T'(f) \circ H(\mathrm{id}_{T(Y)})$.

Veamos que la transformación natural λ_H es un morfismo de mónadas. Para cada $X \in \mathbf{C}$, $H(\eta_X) = H(F_{\mathbf{T}}(\mathrm{id}_X) = F_{\mathbf{T}'}(\mathrm{id}_X) = \eta'_X$, por lo que $\lambda_H \circ \eta = \eta'$. Además, $\lambda_H \circ \mu = \mu' \circ (\lambda_H * \lambda_H)$, porque el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$

$$\begin{tikzcd} TT(X) \arrow[r, "\mathrm{id}_{TT(X)}"] \arrow[dr, "\mu_X"'] & T(X) \arrow[d, "\mathrm{id}_{T(X)}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

es conmutativo y, por consiguiente, también lo es el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$

$$\begin{tikzcd} TT(X) \arrow[r, "H(\mathrm{id}_{TT(X)})"] \arrow[dr, "H(\mu_X)"'] & T(X) \arrow[d, "H(\mathrm{id}_{T(X)})"] \\ & X \end{tikzcd}$$

de donde se sigue la conmutatividad en $\mathbf{C}$ del diagrama

$$\begin{tikzcd} TT(X) \arrow[r, "H(\mathrm{id}_{TT(X)})"] \arrow[rr, bend left, "T'(\lambda_X)\circ\lambda_{T(X)}"] \arrow[drr, "H(\mu_X)"'] & T'T(X) \arrow[r, "T'(H(\mathrm{id}_{T(X)}))"] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\ & & T'(X) \end{tikzcd}$$

Pero $H(\mathrm{id}_{T(X)}) \circ \mu_X = H(\mu_X)$, luego $\lambda_H \circ \mu = \mu' \circ (\lambda_H * \lambda_H)$.

Sólo falta comprobar que ambos procesos son inversos. Si $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ es un morfismo de mónadas, entonces λ_{H_λ} es, en cada X, el morfismo $\lambda(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)}) = \lambda_X$. Por otra parte, si $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$, entonces H_{λ_H} asigna a un $P\colon Y \longrightarrow X$ en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$ el morfismo $(\lambda_H)_X \circ P = H(\mathrm{id}_{T(X)}) \circ P = H(P)$. □

4.2.4. Proposición. Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ dos mónadas sobre la misma categoría $\mathbf{C}$. Entonces existe una biyección entre

1. Los morfismos de mónadas $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$.

2. Los functores $H\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$ tales que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$.

Demostración. Cada morfismo de mónadas $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$, determina un functor $H^{\lambda}\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$, precisamente el que asigna a una $\mathbf{T}'$-álgebra (A, α) la $\mathbf{T}$-álgebra $(A, \alpha \circ \lambda_A)$ y que es la identidad sobre los morfismos.

Veamos que H^{λ} está bien definido. Si (A, α) es una $\mathbf{T}'$-álgebra, $(A, \alpha \circ \lambda_A)$ es una $\mathbf{T}$-álgebra, puesto que

$$
\begin{aligned}
(\alpha \circ \lambda_A) \circ \eta_A &= \alpha \circ \eta'_A \\
&= \mathrm{id}_A \ , \\
(\alpha \circ \lambda_A) \circ \mu_A &= \alpha \circ \mu'_A \circ (\lambda * \lambda)_A = \alpha \circ \mu'_A \circ \lambda_{T'(A)} \circ T(\lambda)_A \\
&= \alpha \circ T'(\alpha) \circ \lambda_{T(A)} \circ T(\lambda_A) = \alpha \circ \lambda_A \circ T(\alpha) \circ T(\lambda_A) \\
&= (\alpha \circ \lambda_A) \circ T(\alpha \circ \lambda_A)
\end{aligned}
$$

Si $f\colon (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$ es un morfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras, entonces $H^{\lambda}(f)$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}$-álgebras porque

$$
f \circ \alpha \circ \lambda_A = \beta \circ T'(f) \circ \lambda_A = \beta \circ \lambda_B \circ T(f)
$$

La preservación de composiciones e identidades es inmediata, así como que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$.

Recíprocamente, si $H\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$ es tal que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$, entonces, H asigna a cada $\mathbf{T}'$-álgebra (A, α), la $\mathbf{T}$-álgebra $H(A, \alpha)$, cuyo objeto subyacente es, necesariamente, A, y cuya estructura denotamos mediante α^H. En particular, para cada objeto A, $(T'(A), \mu'_A)$ es una $\mathbf{T}'$-álgebra, a la que el functor H asigna la $\mathbf{T}$-álgebra $(T'(A), (\mu'_A)^H)$.

La aplicación $A \mapsto (\mu'_A)^H$ es una transformación natural $(\mu'_{(\cdot)})^H$ de TT' en T', puesto que, para cada $f\colon A \longrightarrow B$, como μ' es una transformación natural y H es functor, los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
T'T'(A) \arrow[r, "T'T'(f)"] \arrow[d, "\mu'_A"'] & T'T'(B) \arrow[d, "\mu'_B"] \\
T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TT'(A) \arrow[r, "TT'(f)"] \arrow[d, "(\mu'_A)^H"'] & TT'(B) \arrow[d, "(\mu'_B)^H"] \\
T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(B)
\end{tikzcd}
$$

conmutan.

Sea $\lambda^H\colon T \Longrightarrow T'$ la transformación natural obtenida mediante la composición de $T\eta'$ con $(\mu'_{(\cdot)})^H$, que a cada A le asigna el morfismo

$$
T(A) \xrightarrow{T(\eta'_A)} TT'(A) \xrightarrow{(\mu'_A)^H} T'(A)
$$

Se cumple entonces que, para cada $f\colon A \longrightarrow B$, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "T(\eta'_A)"'] \arrow[dd, bend right=60, "\lambda^H_A"'] & T(B) \arrow[d, "T(\eta'_B)"] \arrow[dd, bend left=60, "\lambda^H_B"] \\
TT'(A) \arrow[r, "TT'(f)"] \arrow[d, "(\mu'_A)^H"'] & TT'(B) \arrow[d, "(\mu'_B)^H"] \\
T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(B)
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Además, $\lambda^H \circ \eta = \eta'$, puesto que para cada A, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\eta'_A"'] & T(A) \arrow[d, "T(\eta'_A)"] \arrow[dd, bend left=60, "\lambda^H_A"] \\
T'(A) \arrow[r, "\eta_{T'(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & TT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
 & T'(A)
\end{tikzcd}
$$

conmuta. La condición $\lambda^H \circ \mu = \mu' \circ (\lambda^H * \lambda^H)$ se deriva de la conmutatividad

del diagrama

$$\begin{tikzcd}
TT(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "TT\eta'_A"'] \arrow[dd, bend right=60, "T\lambda^H_A"'] & T(A) \arrow[d, "T\eta'_A"] \arrow[dd, bend left=60, "\lambda^H_A"] \\
TTT'(A) \arrow[r, "\mu_{T'(A)}"] \arrow[d, "T(\mu'_A)^H"'] & TT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
TT'(A) \arrow[r, "(\mu'_A)^H"] \arrow[d, "T\eta' T'(A)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{TT'(A)}"] \arrow[dd, bend right=60, "\lambda^H_{T'(A)}"'] & T'(A) \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_{T'(A)}"] \\
TT'T'(A) \arrow[r, "T\mu'_A"'] \arrow[d, "(\mu'_{T'(A)})^H"'] & TT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
T'T'(A) \arrow[r, "\mu'_A"'] & T'(A)
\end{tikzcd}$$

en el que el cuadrado inferior conmuta porque el functor H preserva homomorfismos.

Veamos que ambos procesos son inversos. Si $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ es un morfismo de mónadas, entonces $\lambda^{H^\lambda} = \lambda$, puesto que para cada A, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "T\eta'_A"'] & T'(A) \arrow[d, "T'\eta'_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T'(A)}"] & \\
TT'(A) \arrow[r, "\lambda_{T'(A)}"'] \arrow[rr, bend right=40, "(\mu'_A)^{H^\lambda}"'] & T'T'(A) \arrow[r, "\mu'_A"'] & T'(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Finalmente, si $H\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$ es tal que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$, entonces se cumple que $H^{\lambda^H} = H$, porque, para cada $\mathbf{T}'$-álgebra (A, α), el $\mathbf{T}'$-homomorfismo

$\alpha\colon (T'(A), \mu'_A) \longrightarrow (A, \alpha)$ es preservado por H, y por tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T\eta'_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T(A)}"'] & TT'(A) \arrow[r, "(\mu'_A)^H"] \arrow[d, "T(\alpha)"] & T'(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
 & T(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta. $\square$

Las correspondencias biunívocas de las dos proposiciones anteriores se extienden naturalmente hasta un isomorfismo de categorías. En la próxima sección veremos que el isomorfismo persiste cuando se consideran ciertas 2-células entre los morfismos de mónadas, y que corresponden, respectivamente a las transformaciones naturales de los functores entre categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore, que conmutan, respectivamente, con los functores libres y de olvido.

4.2.5. Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría.

1. $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})$ es la categoría cuyos objetos son las mónadas $\mathbf{T}$ sobre $\mathbf{C}$, y en la que los morfismos de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$ son los functores $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$ tales que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'}$.

2. $\mathbf{EM}(\mathbf{C})$ es la categoría cuyos objetos son las mónadas $\mathbf{T}$ sobre $\mathbf{C}$, y en la que los morfismos de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$ son los functores $H\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$ tales que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$.

4.2.6. Proposición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Entonces las categorías $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$, $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}}$ son isomorfas. $\square$

4.2.7. Proposición. Sea $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ un morfismo de mónadas sobre $\mathbf{C}$, P un morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$ y (A, α) una $\mathbf{T}'$-álgebra. Entonces $H_\lambda(P)^{(A,\alpha)} = P^{H^\lambda(A,\alpha)}$.

Demostración. Si $P\colon Y \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$, entonces, para cada morfismo $f\colon X \longrightarrow A$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "P"] \arrow[rrrr, bend left, "P^{H^\lambda(A,\alpha)}"] \arrow[rrrr, bend right, "H_\lambda(P)^{(A,\alpha)}"'] & T(X) \arrow[r, shift left, "T(f)"] \arrow[r, shift right, "\lambda_X"'] & T(A) \arrow[r, shift left, "\lambda_A"] \arrow[r, shift right, "T'(f)"'] & T'(A) \arrow[r, "\alpha"] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta, puesto que $\lambda_A \circ T(f) = T'(f) \circ \lambda_X$ por ser λ una transformación natural. $\square$

4.2.8. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre una categoría $\mathbf{C}$ y (A, α) una $\mathbf{T}$-álgebra. Entonces, para cada $f\colon X \longrightarrow A$, los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[d, "\alpha \circ T(f)"'] \arrow[dr, "T(f)"] & TT(X) \arrow[l, "\mu_X"'] \arrow[d, "T(\alpha \circ T(f))"] \\
A & T(A) \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\
A & T(A) \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Es suficiente comprobar que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[d, "\alpha \circ T(f)"'] & TT(X) \arrow[l, "\mu_X"'] \arrow[d, "TT(f)"] \\
T(A) \arrow[d, "\alpha"'] & TT(A) \arrow[l, "\mu_A"'] \arrow[d, "T(\alpha)"] \\
A & T(A) \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & T(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

conmutan. □

Las construcciones de las proposiciones anteriores se extienden a sendos functores $\mathrm{Kl}^{\mathbf{C}}\colon \mathbf{Mnd}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Cat}$ y $\mathrm{EM}^{\mathbf{C}}\colon \mathbf{Mnd}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$, definidos sobre los morfismos de mónadas $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ como $\mathrm{Kl}^{\mathbf{C}}(\lambda) = H_\lambda$ y $\mathrm{EM}^{\mathbf{C}}(\lambda) = H^\lambda$. Podemos entonces considerar una cierta trasformación extranatural que formaliza la relación entre las categorías de Kleisli, *sintácticas* y de Eilenberg-Moore, *semánticas*, asociadas a las mónadas.

Por cuestiones de consistencia con otras partes de este trabajo, conviene considerar en lugar del functor $\mathrm{Kl}^{\mathbf{C}}$, el functor $\mathrm{Ter}^{\mathbf{C}}\colon \mathbf{Mnd}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{Cat}$, definido como $\mathrm{Ter}^{\mathbf{C}}(\lambda) = H_\lambda^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{Ter}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Ter}(\mathbf{T}')$.

4.2.9. Proposición. De la categoría $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ en $\mathbf{Cat}$ se tiene un functor definido como

$$\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Mnd}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\mathrm{EM}^{\mathbf{C}}(\cdot) \times \mathrm{Ter}^{\mathbf{C}}(\cdot)} \mathbf{Cat}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{T}, \mathbf{L}) \arrow[d, "(\lambda, \delta)"'] & & \mathbf{EM}(\mathbf{T}) \times \mathbf{Ter}(\mathbf{L}) \arrow[d, "H^\lambda \times H_\delta^{\mathrm{op}}"] \\
(\mathbf{T}', \mathbf{L}') & \longmapsto & \mathbf{EM}(\mathbf{T}) \times \mathbf{Ter}(\mathbf{T}')
\end{tikzcd}$$

así como el functor que es constantemente $\mathbf{Set}$.

Para cada mónada $\mathbf{T}$, sea $\mathrm{Pd}^{\mathbf{T}}$ el functor definido como

$$\mathbf{EM}(\mathbf{T}) \times \mathbf{Ter}(\mathbf{T}) \xrightarrow{\mathrm{Pd}^{\mathbf{T}}} \mathbf{Set}$$

$$\begin{tikzcd}
((A,\alpha),X) \arrow[dd, "{(f,P)}"'] & & & \mathbf{C}(X,A) \arrow[dl, "{\mathbf{C}(X,f)}"'] \arrow[dr, "P^{(A,\alpha)}"] & \\
 & \longmapsto & \mathbf{C}(X,B) \arrow[dr, "P^{(B,\beta)}"'] & & \mathbf{C}(Y,A) \arrow[dl, "{\mathbf{C}(Y,f)}"] \\
((B,\beta),Y) & & & \mathbf{C}(Y,B) &
\end{tikzcd}$$

siendo $\mathrm{Pd}^{\mathbf{T}}(f,P)$ la diagonal del cuadrado anterior, que conmuta porque, para cada $a\colon X \longrightarrow A$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "P"] & T(X) \arrow[r, "T(a)"] & T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(B) \arrow[d, "\beta"] \\
 & & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, por ser f un homomorfismo de $\mathbf{T}$-álgebras. Entonces la familia $\mathrm{Pd}_{\mathbf{C}} = (\mathrm{Pd}^{\mathbf{T}})_{\mathbf{T}\in\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})}$ es una transformación extranatural de $\mathrm{EM}(\cdot) \times \mathrm{Ter}(\cdot)$ en $\mathbf{Set}$.

Demostración. Queremos demostrar que $\mathrm{Pd}^{\mathbf{T}}$ es una transformación extranatural, i.e., que para cada morfismo de mónadas $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbf{T}') \times \mathbf{Ter}(\mathbf{T}) \arrow[r, "H^{\lambda} \times \mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times H_{\lambda}^{\mathrm{op}}"'] & \mathbf{EM}(\mathbf{T}) \times \mathbf{Ter}(\mathbf{T}) \arrow[d, "\mathrm{Pd}^{\mathbf{T}}"] \\
\mathbf{EM}(\mathbf{T}') \times \mathbf{Ter}(\mathbf{T}') \arrow[r, "\mathrm{Pd}^{\mathbf{T}'}"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $(f,P)\colon ((A,\alpha),X) \longrightarrow ((B,\beta),Y)$ un morfismo en $\mathbf{EM}(\mathbf{T}') \times \mathbf{Ter}(\mathbf{T})$.

Entonces, para cada $a\colon X \longrightarrow A$, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "P"] & T(X) \arrow[r, "T(a)"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\lambda_A"] & T(B) \arrow[d, "\lambda_B"] \\
& T'(X) \arrow[r, "T'(a)"'] & T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] \arrow[d, "\alpha"'] & T'(B) \arrow[d, "\beta"] \\
& & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

conmuta y, por lo tanto, $\mathrm{Pd}^{\mathbf{T}}$ es una transformación extranatural. $\square$

La proposición anterior nos permite considerar las mónadas sobre una categoría como una institución.

4.2.10. Proposición. Si $\mathbf{C}$ una categoría, entonces $(\mathbf{Mnd}(\mathbf{C}), \mathrm{EM}, \mathrm{Ter}, \mathrm{Pd}_{\mathbf{C}})$ es una institución sobre $\mathbf{Set}$.

Deformaciones.

La categoría $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ tiene una estructura adicional de 2-categoría.

4.2.11. Definición. Sean $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$ dos mónadas sobre $\mathbf{C}$, y λ, λ' dos morfismos de mónadas de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$. Una **deformación** de λ en λ' es una transformación natural $\Xi\colon 1_{\mathbf{C}} \Longrightarrow T'$ tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\Xi\lambda"] \arrow[d, "\lambda'\Xi"'] & T'T' \arrow[d, "\mu'"] \\
T'T' \arrow[r, "\mu'"'] & T'
\end{tikzcd}
$$

conmuta, i.e., tal que

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=60, "T"] \arrow[r, "T'"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\lambda"] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, "T'"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\Xi"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, "T'"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, bend left=60, "T"] \arrow[r, "T'"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\lambda'"] & {}
\end{tikzcd}
$$

El hecho de que $\Xi\colon 1_{\mathbf{C}} \Longrightarrow T'$ sea una deformación de λ en λ' se denota como $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$.

La **composición vertical** de dos deformaciones $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ y $\Xi'\colon \lambda' \rightsquigarrow \lambda''\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$, denotada como $\Xi'\tilde{\circ}\Xi$, es la transformación natural $\mu' \circ \Xi'\Xi$, obtenida como

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\Xi'"] & {}
\end{tikzcd}$$

La **composición horizontal** de dos deformaciones $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ y $\Xi'\colon \lambda'' \rightsquigarrow \lambda'''\colon \mathbf{T}' \longrightarrow \mathbf{T}''$, denotada como $\Xi'\tilde{*}\Xi$ es la única transformación natural de 1 en T'' del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\Xi"] & T' \arrow[r, "\Xi'\lambda''"] \arrow[d, "\lambda'''\Xi'"'] & T''T'' \arrow[d, "\mu''"] \\
& T''T'' \arrow[r, "\mu''"'] & T''
\end{tikzcd}$$

obtenida como

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, bend left=40, "T'"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[r, phantom, bend left=60, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\Downarrow\lambda''"] \arrow[rr, bend right=50, "T''"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\Xi'"] & {} \arrow[r, phantom, "="] & {} \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[rr, bend right=50, "T''"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, bend left=40, "T'"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[r, phantom, bend left=60, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, phantom, bend left=20, "\Downarrow\lambda'''"] & {}
\end{tikzcd}$$

4.2.12. Proposición. Sea **C** una categoría. Las mónadas sobre **C**, los morfismos de mónadas y las deformaciones entre ellas determinan una 2-categoría, denotada como **Mnd**(**C**).

Demostración. En primer lugar, comprobemos que la composición vertical de deformaciones es una deformación. En la situación del diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{T} \arrow[r, bend left=50, "\lambda"] \arrow[r, "\lambda'" description] \arrow[r, bend right=50, "\lambda''"'] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\wr\Downarrow\Xi"] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\wr\Downarrow\Xi'"] & \mathbf{T}'
\end{tikzcd}$$

$\Xi' \mathbin{\tilde{\circ}} \Xi$ es una deformación puesto que

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\lambda"] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "T''"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi'"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\lambda"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "T''"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi"] & {} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi'"] & {}
\end{tikzcd}$$

T′ es mónada

$$=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "T''"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\lambda'"] & {} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi'"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "T''"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\lambda'"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi'"] & {}
\end{tikzcd}$$

Ξ es deformación **T**′ es mónada

$$=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "T''"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\lambda''"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "T''"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\Xi'"] & {} \arrow[r, "T'"'] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\lambda''"] & {}
\end{tikzcd}$$

Ξ' es deformación **T**′ es mónada

La composición vertical es asociativa.

La composición horizontal de deformaciones es una deformación. En la situación del diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{T} \arrow[r, bend left, "\lambda"] \arrow[r, bend right, "\lambda'"'] \arrow[r, phantom, "\wr\,\Xi"] & \mathbf{T}' \arrow[r, bend left, "\lambda''"] \arrow[r, bend right, "\lambda'''"'] \arrow[r, phantom, "\wr\,\Xi'"] & \mathbf{T}''
\end{tikzcd}$$

$\Xi' \mathbin{\tilde{*}} \Xi$ es una deformación puesto que

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, bend left=50, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda"] \arrow[r, "T'"] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\Downarrow\lambda''"] \arrow[r, bend right=50, "T''"'] \arrow[rrr, bend right=60, "T''"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu''"] & {} \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=65, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda''"] \arrow[r, "T''"] \arrow[rr, bend right=50, "T''"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu''"] & {} \arrow[r, bend left=50, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T''"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, bend left=50, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda"] \arrow[r, "T'"] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\Downarrow\lambda''"] \arrow[r, bend right=50, "T''"'] \arrow[rrr, bend right=60, "T''"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu''"] & {} \arrow[r, bend left=50, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T''"] \arrow[rr, bend right=50, "T''"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu''"] & {} \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=65, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[r, "T''"] & {}
\end{tikzcd}
$$

Ξ' es deformación

$$
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, bend left=50, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda"] \arrow[r, "T'"] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\Downarrow\lambda''"] \arrow[r, bend right=50, "T''"'] \arrow[rr, bend right=60, "T''"'] \arrow[rr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu''"] \arrow[rrr, bend right=70, "T''"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=55, "\Downarrow\mu''"] & {} \arrow[r, bend left=50, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T''"] & {} \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=65, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[r, "T''"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, bend left=50, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T''"] \arrow[rr, bend right=50, "T''"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu''"] \arrow[rrr, bend right=60, "T''"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu''"] & {} \arrow[r, bend left=80, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=65, "\Downarrow\lambda"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[r, "T''"] & {} \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=65, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[r, "T''"] & {}
\end{tikzcd}
$$

T′ es mónada $\qquad$ Ξ' es deformación

$$
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, bend left=50, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T''"] \arrow[rrr, bend right=60, "T''"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu''"] & {} \arrow[r, bend left=80, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=65, "\Downarrow\lambda"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[r, "T''"] \arrow[rr, bend right=50, "T''"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu''"] & {} \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=65, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[r, "T''"] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, bend left=50, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T''"] \arrow[rrr, bend right=70, "T''"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=55, "\Downarrow\mu''"] & {} \arrow[r, bend left=50, "T"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\lambda"] \arrow[r, "T'"] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "\Downarrow\mu'"] \arrow[rr, bend right=30, "T''"'] \arrow[rr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[rr, bend right=50, "T''"'] & {} \arrow[r, bend left=50, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, "T'"] & {}
\end{tikzcd}
$$

T′ es mónada $\qquad$ λ''' es morfismo de mónadas

$$
= \begin{tikzcd}[column sep=large]
\cdot \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[rrr, bend right=80, "T''"'] \arrow[rrr, phantom, shift right=9, "\Downarrow\mu''"] & \cdot \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=30, "T''"] \arrow[rr, bend right=70, "T''"] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow\mu'"] \arrow[rr, phantom, shift right=7, "\Downarrow\lambda'''"] & \cdot \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\lambda'"] \arrow[r, "T'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\cdot \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[rrr, bend right=80, "T''"'] \arrow[rrr, phantom, shift right=8, "\Downarrow\mu''"] & \cdot \arrow[r, bend left=90, "T"] \arrow[r, phantom, shift left=6, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[rr, bend right=40, "T''"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow\mu''"] & \cdot \arrow[r, bend left=90, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=6, "\Downarrow\lambda'"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[r, "T''"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

Ξ es deformación $\qquad\qquad$ λ''' es morfismo de mónadas

$$
= \begin{tikzcd}[column sep=large]
\cdot \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[rr, bend right=40, "T''"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow\mu''"] \arrow[rrr, bend right=80, "T''"'] \arrow[rrr, phantom, shift right=8, "\Downarrow\mu''"] & \cdot \arrow[r, bend left=90, "T"] \arrow[r, phantom, shift left=6, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[r, "T''"'] & \cdot \arrow[r, bend left=90, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=6, "\Downarrow\lambda'"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\lambda'''"] \arrow[r, "T''"'] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\cdot \arrow[r, bend left=90, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=6, "\Downarrow\Xi"] \arrow[r, bend left=50, "T'"] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\lambda''"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[rr, bend right=40, "T''"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow\mu''"] \arrow[rrr, bend right=80, "T''"'] \arrow[rrr, phantom, shift right=8, "\Downarrow\mu''"] & \cdot \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[r, "T''"'] & \cdot \arrow[r, bend left=70, "T"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\lambda'"] \arrow[r, "T'"] \arrow[r, bend right=70, "T''"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\lambda'''"] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

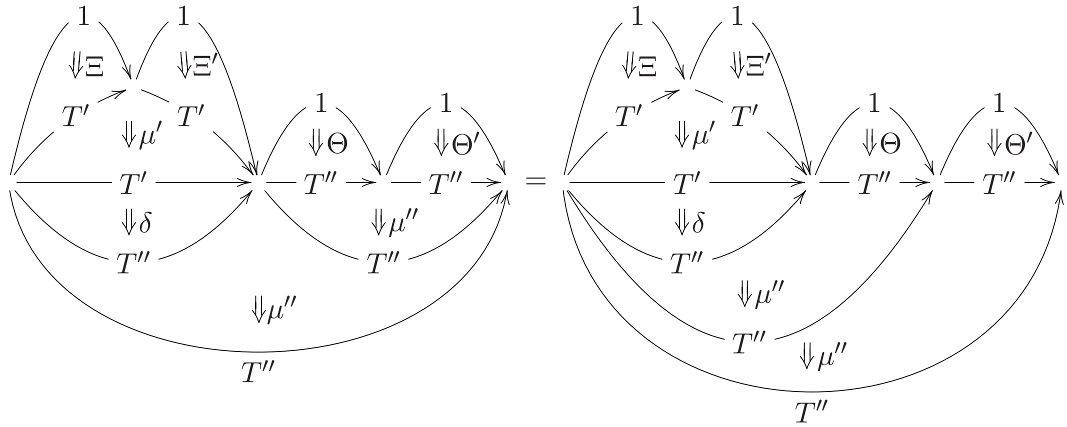
$\mathbf{T}'$ es una mónada $\qquad\qquad$ Ξ' es deformación

La composición horizontal de deformaciones es asociativa.

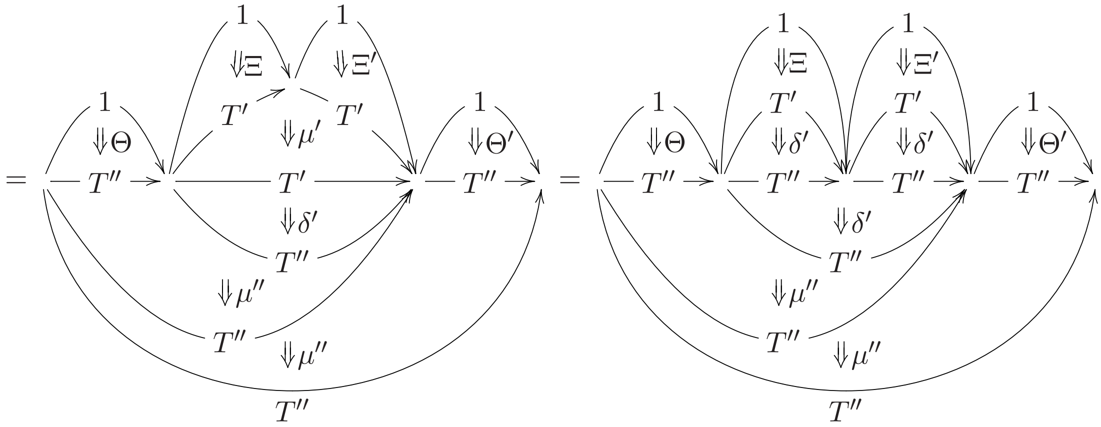
Veamos que se cumple la ley de intercambio de Godement. En la situación

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{T} \arrow[r, bend left=50, "\lambda"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\wr\,\Xi"] \arrow[r, "\lambda'" description] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\wr\,\Xi'"] \arrow[r, bend right=50, "\lambda''"'] & \mathbf{T}' \arrow[r, bend left=50, "\delta"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\wr\,\Theta"] \arrow[r, "\delta'" description] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\wr\,\Theta'"] \arrow[r, bend right=50, "\delta''"'] & \mathbf{T}''
\end{tikzcd}
$$

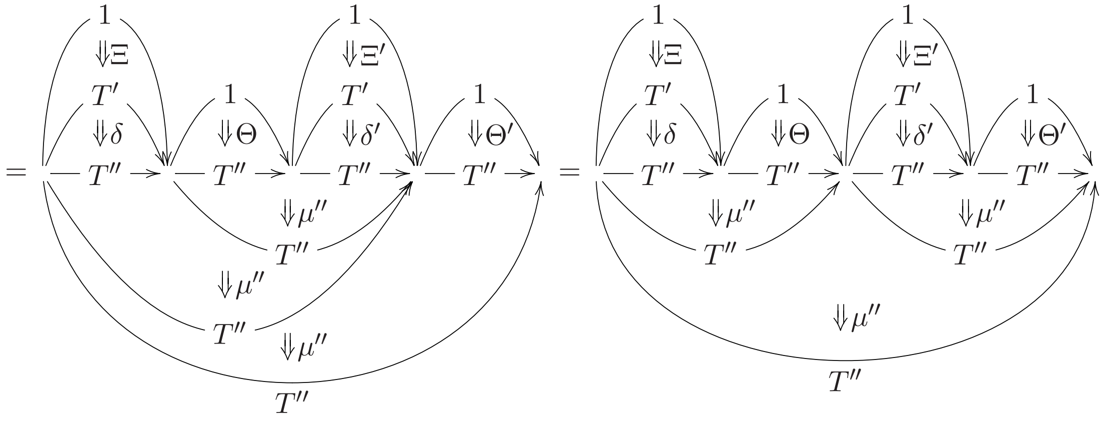
tenemos que $(\Theta' \mathbin{\tilde{\circ}} \Theta) \mathbin{\tilde{*}} (\Xi' \mathbin{\tilde{\circ}} \Xi) = (\Theta' \mathbin{\tilde{*}} \Xi') \mathbin{\tilde{\circ}} (\Theta \mathbin{\tilde{*}} \Xi)$ puesto que



$\mathbf{T}''$ es mónada



Θ es deformación δ' es morfismo de mónadas



Θ es deformación $\mathbf{T}''$ es mónada

Para cada morfismo de mónadas $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$, la unidad η' de $\mathbf{T}'$ es una deformación de λ en si misma, por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & T' \arrow[r, "\eta' T'"] & T'T' \arrow[d, "\mu'"] \\
T' \arrow[r, "T'\eta'"'] & T'T' \arrow[r, "\mu'"] & T'
\end{tikzcd}$$

y constituye una unidad para la composición vertical de deformaciones, puesto que se cumplen las ecuaciones:

$$\eta' \mathbin{\tilde{\circ}} \Xi = \mu' \circ \eta' T' \circ \Xi = \Xi$$
$$\Xi \circ \eta' = T'\eta' \circ \Xi = \Xi$$

Dadas dos mónadas $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ sobre una categoría $\mathbf{C}$, los morfismos de mónadas de $\mathbf{T}$ en $\mathbf{T}'$ y las deformaciones entre ellas constituyen una categoría, denotada como $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})(\mathbf{T}, \mathbf{T}')$, tomando como identidades las deformaciones $\widetilde{\mathrm{id}_\lambda} = \eta'$ y como composición la vertical.

Obsérvese que todas las identidades en las categorías $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})(\mathbf{T}, \mathbf{T}')$ son siempre la misma transformación natural, la unidad de $\mathbf{T}'$.

Finalmente, solo falta comprobar que $\widetilde{\mathrm{id}}_{1_T} = \eta$ es, para cada mónada $\mathbf{T}$, una unidad para la composición horizontal. Sea $\Xi\colon \lambda_0 \rightsquigarrow \lambda_1\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$. Entonces se cumplen las ecuaciones:

$$\Xi \mathbin{\tilde{*}} \eta = \mu' \circ \Xi(\lambda_0 \circ \eta) = \mu' \circ \Xi\eta' = \mu' \circ T'\eta' \circ \Xi = \Xi$$
$$\eta' \mathbin{\tilde{*}} \Xi = \mu' \circ \eta'(1_{T'} \circ \Xi) = \mu' \circ \eta'\Xi = \mu' \circ \eta' T' \circ \Xi = \Xi$$

$\square$

Los isomorfismos entre la categoría de mónadas sobre una categoría y las categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore asociadas, se pueden extender hasta ciertas 2-categorías obtenidas a partir de las anteriores, añadiéndoles las 2-células adecuadas. Para ello, utilizamos en lo que sigue la terminología de Bénabou para las diversas clases de simetrías sobre una 2-categoría. Si $\mathbf{C}$ es una 2-categoría, denotamos, respectivamente, mediante $\mathbf{C}^{\mathrm{cn}}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{tr}}$ y $\mathbf{C}^{\mathrm{sm}}$ a las 2-categorías conjugada, transpuesta y simétrica de la primera.

Recordamos las relaciones de incidencia respectivas con la siguiente figura,

$\mathbf{C}$ $\mathbf{C}^{\mathrm{cn}}$ $\mathbf{C}^{\mathrm{tr}}$ $\mathbf{C}^{\mathrm{sm}}$

Las categorías $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{EM}(\mathbf{C})$ tienen una estructura natural de 2-categoría, tomando como 2-células las transformaciones naturales entre sus morfismos. La 2-categoría de las mónadas sobre una categoría $\mathbf{C}$ es entonces isomorfa a la 2-categoría conjugada de la 2-categoría de Kleisli sobre $\mathbf{C}$, así como a la 2-categoría transpuesta de la 2-categoría de Eilenberg-Moore sobre $\mathbf{C}$.

4.2.13. Definición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría.

1. $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})$ es la 2-categoría en la que las 0-células son las categorías de la forma $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$, para $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, las 1-células los functores $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$ tales que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'}$ y las 2-células las transformaciones naturales entre tales functores.

2. $\mathbf{EM}(\mathbf{C})$ es la 2-categoría en la que las 0-células son las categorías de la forma $\mathbf{EM}(\mathbf{T})$, para $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, las 1-células los functores $H\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$ tales que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$ y las 2-células las transformaciones naturales entre tales functores.

4.2.14. Proposición. Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Las 2-categorías $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$, $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$ y $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{tr}}$ son isomorfas.

Demostración. Veamos, en primer lugar, que $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$ son isomorfas. Por la proposición 4.2.3 existe una correspondencia biunívoca entre las 1-células de $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y las de $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$. Si λ, $\lambda'\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ y $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$, sea τ^{Ξ} la aplicación que a cada $X \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$ que corresponde al morfismo $\Xi_X\colon X \longrightarrow T'(X)$ en $\mathbf{C}$. Entonces τ^{Ξ} es una transformación natural, puesto que, para cada morfismo $f\colon Y \longrightarrow X$ en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "H_{\lambda'}(f)"] \arrow[d, "\tau^{\Xi}_Y"'] & X \arrow[d, "\tau^{\Xi}_X"] \\ Y \arrow[r, "H_{\lambda}(f)"'] & X \end{tikzcd}$$

conmuta, en virtud de la conmutatividad del diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Xi_Y"'] \arrow[rr, bend left, "H_{\lambda'}(f)"] & T(X) \arrow[r, "\lambda'_X"] \arrow[d, "\Xi T_X"'] & T'(X) \arrow[r, "T'\Xi_X"] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\
T'(Y) \arrow[r, "T'(f)"'] \arrow[rr, bend right, "T'(H_\lambda(f))"'] & T'T(X) \arrow[r, "T'\lambda_X"'] & T'T'(X) \arrow[r, "\mu'_X"'] & T'(X)
\end{tikzcd}$$

en donde el rectángulo izquierdo conmuta porque $\Xi\colon 1 \longrightarrow T'$ es natural, el derecho porque Ξ es una deformación y el resto por definición.

Recíprocamente, si $H,\ H'\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$ y $\tau\colon H' \Longrightarrow H$, sea Ξ^τ la aplicación que a cada $X \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo en $\mathbf{C}$ que corresponde a τ_X en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$.

Puesto que $\tau_X = \tau_{\mathrm{F}_\mathbf{T}(X)}\colon H'\,\mathrm{F}_\mathbf{T}(X) = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'}(X) = X \longrightarrow H\,\mathrm{F}_\mathbf{T}(X) = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'}(X) = X$, se cumple que $\Xi^\tau_X\colon X \longrightarrow T'(X)$. Si $f\colon Y \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces, por ser τ natural, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "H'(\mathrm{F}_\mathbf{T}(f))"] \arrow[d, "\tau_Y"'] & X \arrow[d, "\tau_X"] \\
Y \arrow[r, "H(\mathrm{F}_\mathbf{T}(f))"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego el diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Xi^\tau_Y"'] & X \arrow[r, "\eta'_X"] \arrow[d, "\Xi^\tau_X"] & T'(X) \arrow[d, "T'\Xi^\tau_X"] \\
T'(Y) \arrow[r, "T'(f)"'] \arrow[d, "T'(f)"'] & T'(X) & T'T'(X) \arrow[l, "\mu'_X"] \\
T'(X) \arrow[r, "T'\eta'_X"'] & T'T'(X) \arrow[u, "\mu'_X"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta y $\Xi^\tau\colon 1_\mathbf{C} \Longrightarrow T'$ es una transformación natural.

Veamos que Ξ^τ es una deformación de λ_H en $\lambda_{H'}$. Por ser τ natural, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "H'(\mathrm{id}_{T(X)})"] \arrow[d, "\tau_{T(X)}"'] & X \arrow[d, "\tau_X"] \\
T(X) \arrow[r, "H(\mathrm{id}_{T(X)})"'] & X
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, por consiguiente, el diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "H'(\mathrm{id}_{T(X)})"] \arrow[d, "\Xi^\tau_{T(X)}"'] & T'(X) \arrow[r, "T'(\Xi^\tau_X)"] & T'T'(X) \arrow[d, "\mu'_X"] \\
T'T(X) \arrow[r, "T'(H(\mathrm{id}_{T(X)}))"'] & T'T'(X) \arrow[r, "\mu'_X"'] & T'(X)
\end{tikzcd}$$

también conmuta. Pero entonces, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\lambda_{H'}"] \arrow[d, "\Xi^\tau T"'] \arrow[rr, bend left, "\lambda_{H'}\Xi^\tau"] \arrow[dr, bend right=60, "\Xi^\tau\lambda_H"'] & T' \arrow[r, "T'\Xi^\tau"] & T'T' \arrow[d, "\mu'"] \\
T'T(X) \arrow[r, "T'\lambda_H"'] & T'T' \arrow[r, "\mu'"'] & T'
\end{tikzcd}$$

conmuta y Ξ^τ es una deformación.

Los procesos descritos son claramente inversos entre sí.

Para demostrar que las 2-categorías $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$ son isomorfas sólo falta comprobar la compatibilidad con la composición y las identidades.

Respecto a la composición vertical, si $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$ y $\Xi'\colon \lambda' \rightsquigarrow \lambda''$ son deformaciones, siendo λ, λ', $\lambda''\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$, entonces, para cada $X \in \mathbf{C}$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\tau_X^{\Xi'\tilde{\circ}\Xi} &= (\mu' \circ T'\Xi \circ \Xi')_X \\
&= (\Xi)_X \diamond (\Xi')_X \\
&= (\tau_0^\Xi \circ \tau_1^\Xi)_X
\end{aligned}$$

Para la composición horizontal, supongamos que $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$ y $\Xi'\colon \lambda'' \rightsquigarrow \lambda'''$, siendo $\lambda, \lambda'\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ y $\lambda'', \lambda'''\colon \mathbf{T}' \longrightarrow \mathbf{T}''$. Entonces, para cada $X \in \mathbf{C}$, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\tau_X^{\Xi' \tilde{*} \Xi} &= (\mu'' \circ \lambda''' \Xi' \circ \Xi)_X \\
&= (\mu'' \circ T'' \Xi' \circ \lambda''' \circ \Xi)_X \\
&= (\Xi')_X \diamond (\lambda''' \Xi)_X \\
&= (\tau^{\Xi'} H_\lambda)_X \diamond (H_{\lambda'''} \tau^{\Xi})_X \\
&= (\tau^{\Xi'} * \tau^{\Xi})_X
\end{aligned}
$$

La compatibilidad con las identidades es inmediata, por lo que la construcción anterior, junto a la desarrollada en la proposición 4.2.3, determina un 2-isomorfismo de $\mathbf{Mon}(\mathbf{C})$ en $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$.

Veamos ahora que $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{tr}}$ son isomorfas. Por la proposición 4.2.4 existe una correspondencia biunívoca entre las 1-células de $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y las de $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{tr}}$. Si λ, $\lambda'\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ y $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'$, sea τ_Ξ la aplicación que a cada $\mathbf{T}'$-álgebra (A, α) en $\mathbf{EM}(\mathbf{T}')$ le asigna el morfismo $\alpha \circ \Xi_A$. Por la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[rr, "(T\Xi)_A"] \arrow[dd, "\lambda_A"'] \arrow[ddrr, phantom, "(1)"] & & TT'(A) \arrow[r, "(T\alpha)_A"] \arrow[d, "(\lambda' T')_A"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & T(A) \arrow[dd, "\lambda'_A"] \\
& & T'T'(A) \arrow[d, "\mu'_A"'] \arrow[dr, "(T'\alpha)_A"] & \\
T'(A) \arrow[r, "(\Xi T')_A"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & T'T'(A) \arrow[r, "\mu'_A"] \arrow[dr, "(T'\alpha)_A"'] & T'(A) \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[d, phantom, "(4)"] \arrow[r, phantom, "(3)"] & T'(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \arrow[rr, "\Xi_A"'] & & T'(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}
$$

en el que (1) conmuta porque Ξ es una deformación, (2) porque λ' es natural, (3) y (4) porque (A, α) es una $\mathbf{T}'$-álgebra y (5) porque Ξ es natural, se tiene que $(\tau_\Xi)_{(A,\alpha)}$ es un morfismo de $\mathbf{T}$-álgebras. Además, τ_Ξ es una transformación natural, puesto que, para cada morfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras $f\colon (A, \alpha) \longrightarrow (B, \beta)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Xi_A"'] & B \arrow[d, "\Xi_B"] \\
T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] \arrow[d, "\alpha"'] & T'(B) \arrow[d, "\beta"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Recíprocamente, si $H, H' \colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$ y $\tau \colon H \Longrightarrow H'$, sea Ξ_τ la aplicación que a cada $A \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo $\tau_{(T'(A),\mu'_A)} \circ \eta'_A$. Sea $f \colon A \longrightarrow B$ un morfismo en $\mathbf{C}$. Entonces $T'(f) \colon (T'(A), \mu'_A) \longrightarrow (T'(B), \mu'_B)$ es un morfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras, y por la naturalidad de τ y η', el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta'_A"] \arrow[d, "f"'] & T'(A) \arrow[r, "\tau_{(T'(A),\mu'_A)}"] \arrow[d, "T'(f)"'] & T'(A) \arrow[d, "T'(f)"] \\
B \arrow[r, "\eta'_B"'] & T'(B) \arrow[r, "\tau_{(T'(B),\mu'_B)}"'] & T'(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que Ξ_τ es una transformación natural de $1_{\mathbf{C}}$ en T'.

La transformación natural Ξ_τ es una deformación si y sólo si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\Xi_\tau \lambda^H"] \arrow[d, "\lambda^{H'} \Xi_\tau"'] & T'T' \arrow[d, "\mu'"] \\
T'T' \arrow[r, "\mu'"'] & T'
\end{tikzcd}$$

conmuta. Considérese el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[rr, "\lambda^H_A"] \arrow[dr, "(T\eta')_A"] \arrow[dd, "(T\Xi_\tau)_A"'] \arrow[dddd, bend right=60, "(\lambda^{H'}\Xi_\tau)_A"'] & & T'(A) \arrow[r, "\eta'_{T'(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & T'T'(A) \arrow[r, "\tau_{(T'T'(A),\mu'T'_A)}"] \arrow[d, "\mu'_A"] & T'T'(A) \arrow[dd, "\mu'_A"] \\
 & TT'(A) \arrow[ur, "(\mu'_A)^H"'] \arrow[dl, "T(\tau_{(T'(A),\mu'_A)})"] & (2) & T'(A) \arrow[dr, "\tau_{(T'(A),\mu'_A)}"'] & (1) \\
TT'(A) \arrow[rrrr, "(\mu'_A)^{H'}"] \arrow[dr, "(T\eta'T')_A"] \arrow[dd, "(\lambda^{H'}T')_A"'] & & & & T'(A) \\
 & TT'T'(A) \arrow[rr, "(T'\mu')_A"'] \arrow[dl, "(\mu'T'T'_A)^{H'}"] & & TT'(A) \arrow[ur, "(\mu'_A)^{H'}"] & (3) \\
T'T'(A) \arrow[rrrruu, "\mu'_A"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

en el que todo conmuta, excepto, quizás, (1), (2) y (3). Ahora bien, como $\mu'_A\colon (T'T'(A), \mu'_{T'(A)}) \longrightarrow (T'(A), \mu'_A)$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras y H' es functor, (3) conmuta, y por ser τ natural, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(T'T'(A), (\mu'_{T'(A)})^H) \arrow[r, "\mu'_A"] \arrow[d, "\tau_{(T'T'(A),\mu'_{T'(A)})}"'] & (T'(A), (\mu'_A)^H) \arrow[d, "\tau_{(T'(A),\mu'_A)}"] \\
(T'T'(A), (\mu'_{T'(A)})^{H'}) \arrow[r, "\mu'_A"'] & (T'(A), (\mu'_A)^{H'})
\end{tikzcd}
$$

conmuta, y por tanto, también (1) conmuta. Por otra parte, como se cumple que $\tau_{(T'(A),\mu'_A)}\colon (T'(A), (\mu'_A)^H) \longrightarrow (T'(A), (\mu'_A)^{H'})$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras, (2) conmuta.

Los procesos descritos son inversos, por la conmutatividad de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta'_A"] \arrow[dr, "\Xi_A"'] \arrow[rrr, bend left=40, "(\Xi_{\tau_\Xi})_A"] & T'(A) \arrow[r, "\Xi_{T'(A)}"] \arrow[rr, bend left=35, "(\tau_\Xi)_{(T'(A),\mu'_A)}"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & T'T'(A) \arrow[r, "\mu'_A"] & T'(A) \\
& T'(A) \arrow[ur, "T'\eta'_A"] \arrow[urr, "\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "(\eta')_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, bend left=35, "(\Xi_\tau)_A"] \arrow[rrr, bend left=45, "(\tau_{\Xi_\tau})_{(A,\alpha)}"] & T'A \arrow[r, "\tau_{(T'A,\mu'_A)}"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & T'A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \\
& A \arrow[r, "\tau_{(A,\alpha)}"'] & A \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}
$$

en donde (1) conmuta porque Ξ es natural y (2) porque $\alpha\colon (T'A, \mu'_A) \longrightarrow (A, \alpha)$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras y τ es natural.

Veamos la compatibilidad con las composiciones. En la situación del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{T} \arrow[r, bend left=50, "\lambda"] \arrow[r, "\lambda'" description] \arrow[r, bend right=50, "\lambda''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3.5, "\Downarrow \Xi"] \arrow[r, phantom, shift right=3.5, "\Downarrow \Xi'"] & \mathbf{T}'
\end{tikzcd}
$$

se cumple que, para cada $(A, \alpha) \in \mathbf{EM}(\mathbf{T}')$, $\alpha\colon (T'A, \mu'_A) \longrightarrow (A, \alpha)$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras, por lo que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T'(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\Xi')_{T'(A)}"'] & A \arrow[d, "(\Xi')_A"] \\
T'T'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)"'] & T'(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
T'(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Se tiene entonces que

$$
\begin{aligned}
(\tau_{\Xi' \tilde{\circ} \Xi})_{(A,\alpha)} &= \alpha \circ (\Xi' \,\tilde{\circ}\, \Xi)_A \\
&= \alpha \circ \mu'_A \circ (\Xi' T')_A \circ \Xi_A \\
&= \alpha \circ \Xi'_A \circ \alpha \circ \Xi_A \\
&= (\tau_{\Xi'} \circ \tau_\Xi)_{(A,\alpha)}
\end{aligned}
$$

Para la composición horizontal, tenemos que en la situación del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{T} \arrow[r, bend left, "\lambda"] \arrow[r, bend right, "\lambda'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi"] & \mathbf{T}' \arrow[r, bend left, "\lambda''"] \arrow[r, bend right, "\lambda'''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi'"] & \mathbf{T}''
\end{tikzcd}$$

se cumple que

$$\begin{aligned}
(\tau_{\Xi' \tilde{*} \Xi})_{(A,\alpha)} &= \alpha \circ (\Xi' \mathbin{\tilde{*}} \Xi)_A \\
&= \alpha \circ (\mu'' \circ \Xi' T'' \circ \lambda'' \circ \Xi)_A \\
&= (\alpha \circ \mu''_A \circ (\Xi' T'')_A \circ \lambda''_A) \circ \Xi_A \\
&= \alpha \circ (\Xi')_A \circ \alpha \circ \lambda''_A \circ \Xi_A \\
&= H^{\lambda'}(\alpha \circ \Xi'_A) \circ (\tau_\Xi)_{(A,\alpha \circ \lambda''_A)} \\
&= (H^{\lambda'} \Xi')_{(A,\alpha)} \circ (\tau_\Xi H^{\lambda''})_{(A,\alpha)} \\
&= (H^{\lambda'} \tau_{\Xi'} \circ \tau_\Xi H^{\lambda''})_{(A,\alpha)} \\
&= (\tau_\Xi * \tau_{\Xi'})_{(A,\alpha)}
\end{aligned}$$

La compatibilidad con las identidades es inmediata, por lo que la construcción anterior, junto a la desarrollada en la proposición 4.2.4, determina un 2-isomorfismo de $\mathbf{Mon}(\mathbf{C})$ en $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{tr}}$. □

4.3 Mónadas, morfismos y deformaciones.

En esta sección estudiamos los morfismos y las deformaciones de mónadas sobre categorías arbitrarias y su relación con las adjunciones.

Dadas dos categorías y una mónada sobre cada una de ellas, definimos dos tipos de morfismos denominados, respectivamente, morfismos de Kleisli y de Eilenberg-Moore, puesto que están en correspondencia biunívoca con ciertos functores entre las categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore asociados a las mónadas respectivas. Además, para cada tipo de morfismo entre mónadas se tiene una noción correspondiente de deformación, que es más general que la noción habitual de 2-célula entre morfismos de mónadas (v. e.g., [Str72]).

A partir de los conceptos anteriores, definimos los morfismos y deformaciones algebraicas entre mónadas, que son, simultáneamente, morfismos y deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore. Los F-morfismos y las deformaciones entre ellos introducidas en el capítulo anterior para las álgebras heterogéneas, son casos de los morfismos y deformaciones algebraicas entre las mónadas.

Para las adjunciones, existen conceptos correspondientes a los introducidos para las mónadas. En particular, se tienen 2-categorías de adjunciones con morfismos y 2-células de Kleisli y de Eilenberg-Moore, y 2-functores de tales 2-categorías hasta las correspondientes de mónadas. Las construcciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore son, respectivamente, 2-adjuntos por la izquierda y por la derecha de tales 2-functores. Mediante las nociones de cuadrado algebraico y deformación entre cuadrados algebraicos es posible formalizar ciertas relaciones entre adjunciones surgidas anteriormente y se da cuenta, a través del 2-functor apropiado, de los morfismos y deformaciones algebraicas para las mónadas.

Cuadrados adjuntos.

Revisamos, en primer lugar, la noción de cuadrado adjunto, mediante la cual se definen muchos de los conceptos usados posteriormente.

4.3.1. Proposición. Sean $(F, G, \eta, \varepsilon)\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ y $(F', G', \eta', \varepsilon')\colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{D}'$ dos adjunciones y $J\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$, $H\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}'$ dos functores.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

Entonces existe un cuadrado conmutativo de biyecciones

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Nat}(F'J, HF) & \cong & \mathrm{Nat}(J, G'HF) \\
\wr\| & & \wr\| \\
\mathrm{Nat}(F'JG, H) & \cong & \mathrm{Nat}(JG, G'H)
\end{array}
$$

Demostración. Es suficiente considerar los pares de aplicaciones inversas entre si definidas por los siguientes diagramas.

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda \Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {}
\end{tikzcd}
\overset{\rho_{0,1}}{\longmapsto}
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda \Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta'}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "1"] \\
{} & {} \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} & {} \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
\overset{\rho_{1,0}}{\longmapsto}
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varepsilon'}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "F'"'] \arrow[d, "1"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {}
\end{tikzcd}
\overset{\rho_{0,2}}{\longmapsto}
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\xi}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "1"] \\
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {}
\end{tikzcd}
\overset{\rho_{2,0}}{\longmapsto}
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "1"] \\
{} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {}
\end{tikzcd}
\overset{\rho_{0,3}}{\longmapsto}
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\xi}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\Nearrow"] & {} \arrow[d, "1"] \\
{} \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta'}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "1"] \\
{} & {} \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} & {} \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
\overset{\rho_{3,0}}{\longmapsto}
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "1"] \\
{} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varepsilon'}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G'"'] \arrow[d, "1"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

$\square$

4.3.2. Definición. Un **cuadrado adjunto** es un diagrama de adjunciones y functores como en 4.3.1, junto a una matriz

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

de transformaciones naturales compatible con las biyecciones en 4.3.1. Tales transformaciones naturales se denominan **transpuestas**. Las transformaciones naturales λ_0 y λ_3 se denominan **conjugados**. Esta última nomenclatura es usual cuando los functores considerados son identidades.

Denotamos a los cuadrados adjuntos como triplos $(F \dashv G, (J, H, \lambda), F' \dashv G')$, mediante diagramas de la forma

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

o, mostrando explícitamente los cuádruplos de transformaciones naturales transpuestas, como

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0 \Nearrow"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_1}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_2}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \lambda_3"] & \cdot \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

Las transformaciones naturales de un cuadrado adjunto pueden, por tanto, obtenerse unas a partir de las otras mediante las unidades y counidades de las adjunciones involucradas. Representamos tal situación con la figura

$$
\begin{tikzcd}
\lambda_0 \arrow[r, bend left, "\eta'"] \arrow[d, bend left, "\varepsilon"] & \lambda_1 \arrow[l, bend left, "\varepsilon'"] \arrow[d, bend left, "\varepsilon"] \\
\lambda_2 \arrow[u, bend left, "\eta"] \arrow[r, bend left, "\eta'"] & \lambda_3 \arrow[u, bend left, "\eta"] \arrow[l, bend left, "\varepsilon'"]
\end{tikzcd}
$$

a partir de la cual es inmediata la proposición que sigue.

4.3.3. Proposición. Sea

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

un cuadrado adjunto. Entonces los 2-diagramas siguientes conmutan

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[rr, bend left=50, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dl, phantom, "\lambda_0 \Nearrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \arrow[dl, phantom, "\lambda_3 \Swarrow"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] \arrow[rr, bend right=50, "1"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Uparrow\eta'"] & \mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"'] \arrow[rr, bend left=50, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Uparrow\varepsilon"] & \mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"] \arrow[dl, phantom, "\lambda_3 \Swarrow"] & \mathbf{D} \arrow[d, "H"] \arrow[dl, phantom, "\lambda_0 \Nearrow"] \\
\mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] \arrow[rr, bend right=50, "1"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\varepsilon'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
$$

□

La categoría doble de los cuadrados adjuntos.

La clase de los cuadrados adjuntos forma una categoría doble, que es, a su vez, la categoría doble subyacente de una categoría triple.

4.3.4. Proposición. Los cuadrados adjuntos determinan una categoría doble, denotada por **AdFun**.

Demostración. En la categoría doble **AdFun** los dos tipos de morfismos involucrados son adjunciones y functores. Dado un cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

su **Ad-dominio** y **Ad-codominio** son las adjunciones superior e inferior del mismo, mientras que su **Fun-dominio** y **Fun-codominio** son los funtores izquierdo y derecho del mismo.

Las identidades en **AdFun** se denominan, respectivamente, **Ad-identidades** y **Fun-identidades**, y son los cuadrados adjuntos de la forma

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5, "1"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\begin{pmatrix} J & J \\ J & J \end{pmatrix}"] & \mathbf{C} \arrow[l, shift right=1.5, "1"'] \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right=1.5, "1"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{C}' \arrow[l, shift right=1.5, "1"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\begin{pmatrix} F & \eta \\ \varepsilon & G \end{pmatrix}"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5, "G"'] \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5, "G"']
\end{tikzcd}$$

La **Ad-composición** de dos cuadrados adjuntos

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5, "G"'] \arrow[r, shift right=1.5, "L"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta"] & \mathbf{E} \arrow[l, shift right=1.5, "R"'] \arrow[d, "M"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right=1.5, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right=1.5, "G'"'] \arrow[r, shift right=1.5, "L'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{E}' \arrow[l, shift right=1.5, "R'"']
\end{tikzcd}$$

es el cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5, "LF"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5, "GR"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right=1.5, "L'F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right=1.5, "G'R'"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0 \Nearrow"] & \cdot \arrow[r, "L"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_0 \Nearrow"] & \cdot \arrow[d, "M"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "L'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_1 \Rightarrow"] & \cdot \arrow[r, "L"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_1 \Rightarrow"] & \cdot \arrow[d, "M"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G'"] & \cdot \arrow[l, "R'"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_2 \Rightarrow"] & \cdot \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_2 \Rightarrow"] & \cdot \arrow[l, "R"'] \arrow[d, "M"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "L'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \lambda_3"] & \cdot \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \delta_3"] & \cdot \arrow[l, "R"'] \arrow[d, "M"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G'"] & \cdot \arrow[l, "R'"]
\end{tikzcd}$$

La **Fun-composición** de dos cuadrados adjuntos

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\delta"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[d, "H'"] \\
\mathbf{C}'' \arrow[r, shift right, "F''"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}'' \arrow[l, shift right, "G''"']
\end{tikzcd}
$$

es el cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J'J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H'H"] \\
\mathbf{C}'' \arrow[r, shift right, "F''"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}'' \arrow[l, shift right, "G''"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0 \Nearrow"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0 \Nearrow"] & \cdot \arrow[d, "H'"] \\
\cdot \arrow[r, "F''"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_1}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varepsilon^{F' \dashv G'}}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[l, "G'"'] \arrow[d, "1"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\delta_1}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[d, "H'"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G''"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_2}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta^{F' \dashv G'}}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[d, "1"] \\
\cdot \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\delta_2}{\Rightarrow}"] & \cdot \arrow[l, "G'"'] \arrow[d, "H'"] \\
\cdot \arrow[r, "F''"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \lambda_3"] & \cdot \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \delta_3"] & \cdot \arrow[l, "G'"'] \arrow[d, "H'"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, "G''"]
\end{tikzcd}
$$

Es inmediato que las identidades son efectivamente cuadrados adjuntos, y que son identidades para las composiciones respectivas.

Usando la notación anterior, no hay dificultad en comprobar que las Ad-composiciones y Fun-composiciones de cuadrados adjuntos son cuadrados adjuntos. La asociatividad de las composiciones y la ley de intercambio se deducen de las propiedades correspondientes de los componentes de los cuadrados adjuntos. □

De cada categoría doble se obtienen dos sub-2-categorías. En **AdFun**, si tomamos como adjunciones las identidades, se obtiene simplemente **Cat**. Si tomamos como functores las identidades se obtiene la 2-categoría **Adj**, con objetos categorías, morfismos de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ adjunciones $F \dashv G$ y 2-células de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$ cuadrados adjuntos

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift left, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift left, "G"'] \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, shift left, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift left, "G'"']
\end{tikzcd}$$

o, lo que es equivalente, pares conjugados (λ_0, λ_3), que representamos mediante diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\lambda_0"] & \mathbf{D} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda_3"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

La 2-categoría **Adj** es la 2-categoría conjugada de la categoría de categorías, adjunciones y pares conjugados de [Mac71].

Pares compatibles.

Dar una transformación natural $\sigma\colon J \Longrightarrow J'$, equivale a dar un cuadrado adjunto en donde las adjunciones involucradas son identidades. En lo que sigue identificamos las transformaciones naturales con tales cuadrados adjuntos.

4.3.5. Definición. Sean

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift left, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift left, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift left, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift left, "G'"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift left, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift left, "G"'] \arrow[d, "H'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift left, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift left, "G'"']
\end{tikzcd}$$

dos cuadrados adjuntos y $\sigma\colon J \Longrightarrow J'$, $\tau\colon H \Longrightarrow H'$ un par de transformaciones naturales. Entonces el par (σ, τ) es **compatible** respecto de λ y λ' si $\lambda' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \sigma = \tau \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \lambda$.

La existencia de pares compatibles entre cuadrados adjuntos se denota mediante diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right=40, "J"'] \arrow[dd, bend left=40, "J'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, bend right=10, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\top"] & \\
& \mathbf{D} \arrow[ul, bend right=10, "G"'] \arrow[dd, bend right=40, "H"'] \arrow[dd, bend left=40, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[dr, bend right=10, "F'"'] \arrow[dr, phantom, "\top"] \arrow[ur, phantom, "\lambda \qquad \lambda'"] & \\
& \mathbf{D} \arrow[ul, bend right=10, "G'"']
\end{tikzcd}$$

La condición de compatibilidad en la definición anterior equivale a que algún, y por consiguiente todos, los 2-diagramas siguientes, que constituyen los componentes del cuadrado adjunto $\sigma \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \lambda = \lambda' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \tau$, conmuten.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right=40, "J"'] \arrow[dd, bend left=40, "J'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "F"] & \\
& \mathbf{D} \arrow[dd, bend right=40, "H"'] \arrow[dd, bend left=40, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[dr, "F'"] \arrow[ur, phantom, "\lambda_0 \qquad \lambda_0'"] & \\
& \mathbf{D}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right=40, "J"'] \arrow[dd, bend left=40, "J'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "F"] & \\
& \mathbf{D} \arrow[dd, bend right=40, "H"'] \arrow[dd, bend left=40, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[ur, phantom, "\lambda_1 \qquad \lambda_1'"] & \\
& \mathbf{D}' \arrow[ul, "G'"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right=40, "J"'] \arrow[dd, bend left=40, "J'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \\
& \mathbf{D} \arrow[ul, "G"'] \arrow[dd, bend right=40, "H"'] \arrow[dd, bend left=40, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[dr, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\lambda_2 \qquad \lambda_2'"] & \\
& \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right=40, "J"'] \arrow[dd, bend left=40, "J'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \\
& \mathbf{D} \arrow[ul, "G"'] \arrow[dd, bend right=40, "H"'] \arrow[dd, bend left=40, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[ur, phantom, "\lambda_3 \qquad \lambda_3'"] & \\
& \mathbf{D}' \arrow[ul, "G'"']
\end{tikzcd}$$

AdFun es una categoría triple.

La estructura de categoría triple de **AdFun** se obtiene considerando las siguientes 3-células.

4.3.6. Definición. Una **3-célula** en **AdFun** está formada por

1. Cuadrados adjuntos

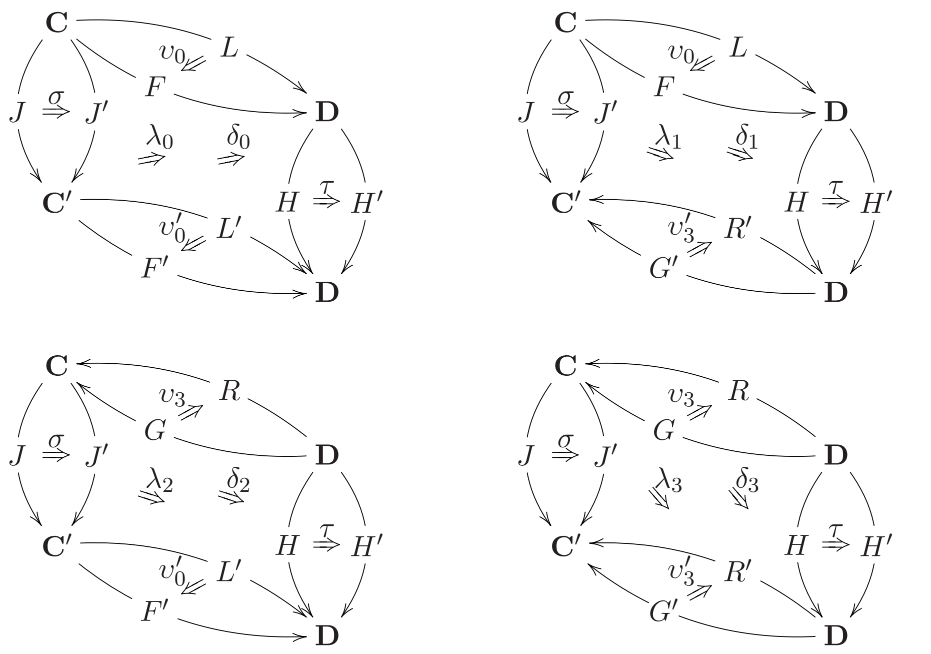
$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[d, "J"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[ur, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "L"'] \arrow[d, "J'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "R"'] \arrow[d, "H'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "L'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[ur, phantom, "\delta"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "R'"']
\end{tikzcd}
$$

2. Dos pares de transformaciones naturales, $\upsilon_0\colon L \Longrightarrow F$, $\upsilon_3\colon G \Longrightarrow R$ conjugadas respecto de $F \dashv G$ y $L \dashv R$, y $\upsilon'_0\colon L' \Longrightarrow F'$, $\upsilon'_3\colon G' \Longrightarrow R'$ conjugadas respecto de $F' \dashv G'$ y $L' \dashv R'$.

3. Transformaciones naturales $\sigma\colon J \Longrightarrow J'$, $\tau\colon H \Longrightarrow H'$, tales que σ y τ sean compatibles con $\upsilon' \overset{\text{fn}}{\circ} \lambda$ y $\delta \overset{\text{fn}}{\circ} \upsilon$, i.e., tales que $(\delta \overset{\text{fn}}{\circ} \upsilon) \overset{\text{ad}}{\circ} \sigma = \tau \overset{\text{ad}}{\circ} (\upsilon' \overset{\text{fn}}{\circ} \lambda)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{C} \arrow[rr, shift right, "L"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[dd, "J'"'] & & \mathbf{D} \arrow[ll, shift right, "R"'] \arrow[dd, "H'"] \\
\mathbf{C} \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, shift right, "F"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[dd, "J"'] \arrow[r, phantom, "\sigma \Rrightarrow"] & & \mathbf{D} \arrow[ll, shift right, "G"'] \arrow[ur, "1"] \arrow[dd, "H"] \arrow[ul, phantom, "\upsilon"] \arrow[ur, phantom, "\delta"] \arrow[r, phantom, "\tau \Rrightarrow"] & \\
 & \mathbf{C}' \arrow[rr, shift right, "L'"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{D}' \arrow[ll, shift right, "R'"'] \\
\mathbf{C}' \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, shift right, "F'"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[ur, phantom, "\lambda"] & & \mathbf{D}' \arrow[ll, shift right, "G'"'] \arrow[ur, "1"] \arrow[ul, phantom, "\upsilon'"] &
\end{tikzcd}
$$

La condición en la definición anterior, expresada para los componentes de los cuadrados adjuntos de la 3-célula, equivale a la conmutatividad de cualquiera, y por consiguiente todos, los 2-diagramas



o, de manera equivalente, a la conmutatividad de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
L'J \arrow[r, "L'\sigma"] \arrow[d, "\upsilon'_0 J"'] & L'J' \arrow[r, "\delta_0"] & H'L \arrow[d, "H'\upsilon_0"] \\
F'J \arrow[r, "\lambda_0"'] & HF \arrow[r, "\tau F"'] & H'F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\lambda_1"'] & J' \arrow[r, "\delta_1"] & R'H'L \arrow[d, "R'H'\upsilon_0"] \\
G'HF \arrow[r, "\upsilon'_3 HF"'] & R'HF \arrow[r, "R'\tau F"'] & R'H'F
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
L'JG \arrow[r, "L'\sigma G"] \arrow[d, "\upsilon'_0 JG"'] & L'J'G \arrow[r, "L'J'\upsilon_3"] & L'J'R \arrow[d, "\delta_2"] \\
F'JG \arrow[r, "\lambda_2"'] & H \arrow[r, "\tau"'] & H'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
JG \arrow[r, "\sigma G"] \arrow[d, "\lambda_3"'] & J'G \arrow[r, "J'\upsilon_3"] & J'R \arrow[d, "\delta_3"] \\
G'H \arrow[r, "\upsilon'_3 H"'] & R'H \arrow[r, "R'\tau"'] & R'H'
\end{tikzcd}
$$

Morfismos de mónadas y deformaciones.

Dadas un mónada $\mathbf{T}$ sobre $\mathbf{C}$, una mónada $\mathbf{T}'$ sobre $\mathbf{C}'$ y un functor J de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}'$, se tienen transformaciones naturales λ entre los functores $J \circ T$ y $T' \circ J$. Dependiendo del sentido que se elija para la transformación natural, se obtienen dos nociones de morfismos de mónadas como pares (J, λ) que cumplan una condición adicional de compatibilidad con las estructuras de mónadas respectivas. Cada uno de los tipos de morfismos así definidos está en correspondencia biunívoca con ciertos pares de functores que relacionan entre sí las categorías subyacentes y, respectivamente, las categorías de Kleisli y de Eilenberg-Moore asociadas a las mónadas respectivas.

Morfismos de Kleisli.

Definimos, en primer lugar, la noción de *morfismo de Kleisli* entre dos monadas.

4.3.7. Definición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{T}'$ una sobre $\mathbf{C}'$. Un **morfismo de Kleisli**, o, simplemente, un Kl-morfismo de $(\mathbf{C},\mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}',\mathbf{T}')$ es un par (J,λ), con $J\colon \mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}'$ un functor y $\lambda\colon JT\longrightarrow T'J$ una transformación natural

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

tales que se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left=50, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\mathrm{id}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=50, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\Downarrow\eta'"] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \\
 & {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left=50, "TT"] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Downarrow\mu"] \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

Para cada mónada $\mathbf{T}$ sobre $\mathbf{C}$, la **identidad** en $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$, $\mathrm{id}_{(\mathbf{C},\mathbf{T})}$, es el morfismo $(\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}, \mathrm{id}_T)$. Si $(J, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ y $(J', \lambda')\colon (\mathbf{C}', \mathbf{T}') \longrightarrow (\mathbf{C}'', \mathbf{T}'')$ son dos Kl-morfismos, su **composición**, $(J', \lambda') \circ (J, \lambda)$ es el par $(J' \circ J, \lambda' J \circ J' \lambda)$.

4.3.8. Proposición. Las mónadas y los Kl-morfismos entre ellas determinan una categoría denotada como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$.

4.3.9. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{T}'$ una sobre $\mathbf{C}'$. Entonces existe una biyección entre

1. Los Kl-morfismos $(J, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbf{T}')$.

2. Los pares (J, H), en los que $J\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ y $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$, tales que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'} \circ J$, i.e. para los que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}}"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}'}"'] & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}') \end{tikzcd}$$

Demostración. A un Kl-morfismo $(J, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}, \mathbf{T}')$ le asociamos el par (J, H_λ), en el que $H_\lambda\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$ asocia a un $\mathbf{C}$-morfismo $P\colon Y \longrightarrow T(X)$ el $\mathbf{C}'$-morfismo $\lambda_X \circ J(P)$. Así definido, H_λ es, en efecto, un functor en virtud de las dos condiciones definitorias de los morfismos de Kleisli.

Además, se cumple que $(J, H_\lambda) \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'} \circ J$, puesto que, para cada $f\colon Y \longrightarrow X$ en $\mathbf{C}$, tenemos que

$$\begin{aligned} H_\lambda \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}}(f) &= (J, H_\lambda)(\eta_X \circ f) \\ &= \lambda_X \circ J(\eta_X) \circ J(f) \\ &= \eta'_{J(X)} \circ J(f) \\ &= \mathrm{F}_{\mathbf{T}'} \circ J(f) \end{aligned}$$

Recíprocamente, dado un par (J, H) que cumpla las condiciones en (2), sea κ la transformación natural conjugada de la transformación natural identidad de

$\mathrm{F}_{\mathbf{T}'} \circ J$ en $H \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}}$, obtenida a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, "1"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\varepsilon_{\mathbf{T}}}{\Rightarrow}" near end, shift right=6] & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \arrow[l, "\mathrm{G}_{\mathbf{T}}"'] \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}}"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}'}"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}') \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{C}' & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}') \arrow[l, "\mathrm{G}_{\mathbf{T}'}"]
\end{tikzcd}$$

Componiendo $\mathrm{F}_{\mathbf{T}}$ con la transformación natural κ, se obtiene una transformación natural $\lambda_H = \kappa\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}} \colon JT = J\,\mathrm{G}_{\mathbf{T}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}} \Longrightarrow \mathrm{G}_{\mathbf{T}'}\,H\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{G}_{\mathbf{T}'}\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}'}\,J = T'J$.

Para cada $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$-objeto X, $(\lambda_H)_X$ es $H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})$, puesto que se obtiene como el morfismo

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{G}_{\mathbf{T}'}\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}'}\,J\,\mathrm{G}_{\mathbf{T}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}}(X) \arrow[d, equal] & \\
J\,\mathrm{G}_{\mathbf{T}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}}(X) \arrow[ur, "(\eta^{\mathbf{T}} J\,\mathrm{G}_{\mathbf{T}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}})_X"] & \mathrm{G}_{\mathbf{T}'}\,H\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}}\,\mathrm{G}_{\mathbf{T}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}}(X) \arrow[r, "(\mathrm{G}_{\mathbf{T}'}\,H\varepsilon^{\mathbf{T}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}})_X"'] & \mathrm{G}_{\mathbf{T}'}\,H\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}}(X)
\end{tikzcd}$$

i.e., como el morfismo

$$\begin{tikzcd}
 & T'JT(X) \arrow[d, equal] & & \\
JT(X) \arrow[ur, "(\eta^{\mathbf{T}'} JT)_X"] & T'HT(X) \arrow[r, "T'H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})"'] & T'T'H(X) \arrow[r, "(\mu^{\mathbf{T}'} H)_X"] & T'H(X) = T'J(X)
\end{tikzcd}$$

que es igual a $H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})$.

Para demostrar que el par (J, λ_H) constituye un Kl-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}, \mathbf{T}')$ es suficiente considerar los diagramas definitorios de los Kl-morfismos para la transformación natural λ_H y las ecuaciones triangulares de las adjunciones involucradas.

Veamos por último que los procesos descritos son inversos. En efecto, si $(J, \lambda) \colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}, \mathbf{T}')$ es un Kl-morfismo, entonces, dado un X, se cumple que $(\lambda_{(H_\lambda)})_X = H_\lambda(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)}) = \lambda_X \circ J(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)}) = \lambda_X$. Por otra parte, si el par (J, H) cumple las condiciones en (2), entonces, dado un $P\colon Y \longrightarrow X$, tenemos que $H_{(\lambda_H)}(P) = (\lambda_H)_X \circ J(P) = H(P)$. □

4.3.10. Definición. Sea **Kl** la categoría en la que los objetos son los pares $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ tales que $\mathbf{T}$ es una mónada sobre $\mathbf{C}$, los morfismos de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ los pares (J, H), con $J\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ y $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$, tales que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'} \circ J$, y en donde las identidades y la composición se definen a partir de las de sus componentes.

4.3.11. Proposición. Las categorías $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ y **Kl** son isomorfas.

Demostración. Las biyecciones definidas en la proposición anterior son functoriales. En efecto, si $(J, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ y $(J', \lambda')\colon (\mathbf{C}', \mathbf{T}') \longrightarrow (\mathbf{C}'', \mathbf{T}'')$ son Kl-morfismos y $P\colon Y \longrightarrow T(X)$ un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
(J', H_{\lambda'}) \circ (J, H_\lambda)(P) &= (J', H_{\lambda'})(\lambda_X \circ J(P)) \\
&= \lambda' J_X \circ J'\lambda_X \circ J'J(P) \\
&= (J'J, H_{(\lambda' J \circ J'\lambda)})(P)
\end{aligned}$$

□

Deformaciones de Kleisli.

Los Kl-morfismos entre mónadas pueden ser comparados entre sí por medio de ciertas *deformaciones de Kleisli.* Estas están en correspondencia biunívoca con las transformaciones naturales entre los functores sobre las categorías de Kleisli asociados a los Kl-morfismos.

4.3.12. Definición. Sean (J, λ), $(J', \lambda')\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ dos Kl-morfismos de mónadas. Una **deformación de Kleisli** o, simplemente, una **Kl-deformación**, de (J, λ) en (J', λ') es una transformación natural $\Xi\colon J' \Longrightarrow T'J$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
J'T \arrow[r, "\Xi T"] \arrow[d, "\lambda'"'] & T'JT \arrow[r, "T'\lambda"] & T'T'J \arrow[d, "\mu' J"] \\
T'J' \arrow[r, "T'\Xi"'] & T'T'J \arrow[r, "\mu' J"'] & T'J
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \\
& {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

El hecho de que Ξ sea una Kl-deformación de (J, λ) en (J', λ') se denota como $\Xi\colon (J, \lambda) \rightsquigarrow (J', \lambda')$. En ese caso, también usamos Ξ_{k} para la única transformación natural de $J'T$ en $T'J$ en el diagrama anterior.

Para cada Kl-morfismo de mónadas $(J, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbf{T}')$, la **Kl-identidad** es la transformación natural $J\eta'\colon J \Longrightarrow T'J$.

La **composición vertical** de Kl-deformaciones

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\mathbf{C}, \mathbf{T}) \arrow[r, bend left=50, "{(J,\lambda)}"] \arrow[r, "{(J',\lambda')}" description] \arrow[r, bend right=50, "{(J'',\lambda'')}"'] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Xi"] \arrow[r, phantom, bend right=25, "\Xi'"] & (\mathbf{C}', \mathbf{T}')
\end{tikzcd}
$$

denotada como $\Xi' \mathbin{\tilde{\circ}} \Xi$, es la transformación natural

$$J'' \xrightarrow{\ \Xi'\ } T'J' \xrightarrow{\ T'\Xi\ } T'T'J \xrightarrow{\ \mu' J\ } T'J$$

obtenida a partir de

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\Xi'\swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J''"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

La **composición horizontal** de Kl-deformaciones

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\mathbf{C}, \mathbf{T}) \arrow[r, bend left, "{(J,\lambda)}"] \arrow[r, bend right, "{(J',\lambda')}"'] \arrow[r, phantom, "\Xi"] & (\mathbf{C}', \mathbf{T}') \arrow[r, bend left, "{(J'',\lambda'')}"] \arrow[r, bend right, "{(J''',\lambda''')}"'] \arrow[r, phantom, "\Xi'"] & (\mathbf{C}'', \mathbf{T}'')
\end{tikzcd}
$$

denotada como $\Xi' \,\tilde{*}\, \Xi$, es la transformación natural

$$J'''J' \xrightarrow{J'''\Xi} J'''T'J \xrightarrow{\Xi'_{\mathrm{k}}J} T'J''J$$

obtenida a partir de

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[drr, phantom, "\Xi"] & & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "J''"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda''"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J''"] \arrow[dr, phantom, "\Xi'"] & \mathbf{C}' \arrow[d, "J'''"] \\
\mathbf{C}'' \arrow[r, "T''"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}'' \arrow[r, "T''"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}'' \\
& \, &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[drr, phantom, "\Xi"] & & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J''"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "J''"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'''"] & \mathbf{C}' \arrow[d, "J'''"] \\
\mathbf{C}'' \arrow[r, "T''"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}'' \arrow[r, "T''"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}'' \\
& \, &
\end{tikzcd}$$

4.3.13. Proposición. Las mónadas, los Kl-morfismos de mónadas y las Kl-deformaciones entre ellas determinan una 2-categoría, denotada como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$.

Demostración. La demostración es análoga a la de la proposición 4.2.12. □

Para la demostración de ciertas proposiciones, conviene considerar una definición alternativa, pero equivalente, de las Kl-deformaciones.

4.3.14. Proposición. Sean $(J,\lambda), (J',\lambda')\colon (\mathbf{C},\mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}',\mathbf{T}')$, dos Kl-morfismos. Entonces existe una biyección entre las Kl-deformaciones de (J,λ) en (J',λ') y las transformaciones naturales de $J'T$ en $T'J$ tales que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \\
& \, &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \\
& \, &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Si $\Xi\colon (J,\lambda) \rightsquigarrow (J',\lambda')$ es una Kl-deformación, entonces Ξ_{k} cumple la condición de la proposición, puesto que

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[r, "T'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left=60, "T^2"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] \arrow[phantom, u, "\Downarrow\mu"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[rr, bend left=60, "T^2"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] \arrow[phantom, u, "\Downarrow\mu"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \\
& {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right, "T'"'] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[r, "T'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

Recíprocamente, si Ξ cumple la condición de la proposición, entonces

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=40, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

es una Kl-deformación, puesto que se cumple que

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=40, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \\
& {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=40, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \cdot \arrow[r, "T'"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

□

Con la caracterización anterior de las Kl-deformaciones, tenemos una descripción alternativa de las composiciones verticales y horizontales. En particular, la composición horizontal adopta, con la notación de los párrafos precedentes, la forma más simple siguiente

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi\,\Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J'"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "J''"'] \arrow[dr, phantom, "\Xi'\,\Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J'''"] \\
\cdot \arrow[r, "T''"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

Las 2-células entre morfismos de mónadas consideradas por Street en [Str72] son un caso particular de las deformaciones consideradas aquí. Las primeras se caracterizan como aquellas deformaciones que pueden factorizarse a través de una cierta transformación natural.

4.3.15. Definición. Sean (J, λ), $(J', \lambda')\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ dos Kl-morfismos. Una **deformación de Street** de (J, λ) en (J', λ') es una transformación natural $\sigma\colon J' \Longrightarrow J$ tal que $\lambda \circ \sigma T = T'\sigma \circ \lambda'$, i.e., tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "T"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] \arrow[urr, phantom, "\Swarrow\lambda \qquad \Swarrow\lambda'"] & & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Cada deformación de Street induce una deformación de Kleisli a través de la transformación natural de su diagrama conmutativo.

4.3.16. Proposición. Sea τ una deformación de Street de (J, λ) en (J', λ'). Entonces la transformación natural $\eta' J \circ \sigma = \lambda\sigma\eta = T'\sigma \circ \lambda'(J'\eta)$ es una deformación de Kleisli.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma\Leftarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=60, "T'"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\eta'"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\sigma\Leftarrow"] \arrow[dr, phantom, "\lambda \quad \lambda'"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\sigma\Leftarrow"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

□

En lo que sigue, se dice que una Kl-deformación $\Xi\colon (J,\lambda) \rightsquigarrow (J',\lambda')$ es una deformación de Kleisli-Street o, simplemente, una Kl-St-deformación, si Ξ se obtiene a partir de una deformación de Street $\sigma\colon J' \Longrightarrow J$ de la manera indicada en la proposición anterior. No toda deformación de Kleisli puede obtenerse a partir de una deformación de Street. Para un ejemplo relevante véase la sección posterior sobre la relación entre teorías algebraicas heterogéneas y mónadas.

El conjunto de las Kl-St-deformaciones está cerrado bajo composición, por lo que estas determinan una sub-2-categoría de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ que denotamos como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl,St}}$

4.3.17. Definición. Sea **Kl** la 2-categoría con 0-células los pares $(\mathbf{C},\mathbf{T})$ con $\mathbf{T} \in \mathrm{Mnd}(\mathbf{C})$, 1-células de $(\mathbf{C},\mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}',\mathbf{T}')$ los pares de functores (J,H) tales que $J\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$, $H\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$ y $H \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'} \circ J$, 2-células de (J,H) en (J',H') las transformaciones naturales de H en H' e identidades y composiciones definidas a partir de las de las componentes.

4.3.18. Proposición. Las 2-categorías $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ y $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}$ son isomorfas.

Demostración. Por la proposición 4.3.9 existe una correspondencia biunívoca entre las 1-células de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ y las de $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}$. Si $(J,\lambda), (J',\lambda')\colon (\mathbf{C},\mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}',\mathbf{T}')$ son Kl-morfismos y $\Xi\colon (J,\lambda) \rightsquigarrow (J',\lambda')$ es una Kl-deformación, sea τ^{Ξ} la aplicación que a cada $X \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$ que corresponde al morfismo $\Xi_X\colon J'(X) \longrightarrow T'(J(X))$ en $\mathbf{C}$. Entonces $\tau^{\Xi}\colon (J',H_{\lambda'}) \Longrightarrow (J,H_{\lambda})$ es una 1-célula de $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}$, debido a que $\tau^{\Xi}\colon H_{\lambda'} \Longrightarrow H_{\lambda}$ es una transformación natural. En efecto, si $f\colon Y \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$

$$
\begin{tikzcd}
J'(Y) \arrow[r, "H_{\lambda'}(f)"] \arrow[d, "\tau^{\Xi}_Y"'] & J'(X) \arrow[d, "\tau^{\Xi}_X"] \\
J(Y) \arrow[r, "H_{\lambda}(f)"'] & J(X)
\end{tikzcd}
$$

conmuta, en virtud de la conmutatividad del diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
J'(Y) \arrow[r, "J'(f)"] \arrow[d, "\Xi_Y"'] \arrow[rr, bend left, "H_{\lambda'}(f)"] & J'T(X) \arrow[r, "\lambda'_X"] \arrow[d, "\Xi_{T(X)}"'] & T'J'(X) \arrow[r, "T'\Xi_X"] & T'T'J(X) \arrow[d, "\mu'_{J(X)}"] \\
T'J(Y) \arrow[r, "T'J(f)"'] \arrow[rr, bend right, "T'H_\lambda(f)"'] & T'JT(X) \arrow[r, "T'\lambda_X"'] & T'T'J(X) \arrow[r, "\mu'_{J(X)}"'] & T'J(X)
\end{tikzcd}$$

en el que el rectángulo izquierdo conmuta porque $\Xi\colon J' \Longrightarrow T'J$ es natural, el derecho porque Ξ es una deformación y el resto por definición.

Recíprocamente, si (J,H), $(J',H')\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$ son 1-células en $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}$ y $\vartheta\colon (J',H') \Longrightarrow (J,H)$, es una 2-célula en $\mathbf{Kl}$, sea Ξ^ϑ la aplicación que a cada $X \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo en $\mathbf{C}'$ que corresponde a ϑ_X en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$.

Puesto que $\vartheta_X = \vartheta_{\mathrm{F}_{\mathbf{T}}(X)}\colon H'\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}}(X) = J'(X) \longrightarrow H\,\mathrm{F}_{\mathbf{T}}(X) = J(X)$, se cumple que $\Xi^\vartheta_X\colon J'(X) \longrightarrow T'J(X)$. Si $f\colon Y \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces, por ser ϑ natural, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$

$$\begin{tikzcd}
J'(Y) \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}'}\,J'(f)"] \arrow[d, "\vartheta_Y"'] & J'(X) \arrow[d, "\vartheta_X"] \\
J(Y) \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}'}\,J'(f)"'] & J(X)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Luego el diagrama en $\mathbf{C}'$

$$\begin{tikzcd}
J'(Y) \arrow[r, "J'(f)"] \arrow[d, "\Xi^\vartheta_Y"'] & J'(X) \arrow[r, "\eta'_{J'(X)}"] \arrow[d, "\Xi^\vartheta_X"] & T'J'(X) \arrow[d, "T'\Xi^\vartheta_X"] \\
T'J(X) \arrow[r, "T'J(f)"'] \arrow[d, "T'J(f)"'] & T'J(X) & T'T'J(X) \arrow[l, "\mu'_{J(X)}"] \\
T'J(X) \arrow[r, "T'\eta'_{J(X)}"'] & T'T'J(X) \arrow[u, "\mu'_{JX}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta y $\Xi^{\vartheta}\colon J' \Longrightarrow T'J$ es una transformación natural.

Veamos que Ξ^{ϑ} es una deformación de λ_H en $\lambda_{H'}$. Por ser ϑ natural, el diagrama en $\mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$

$$\begin{tikzcd}
H'T(X) \arrow[r, "H'(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})"] \arrow[d, "\Xi^{\vartheta}_{T(X)}"'] & H'(X) \arrow[d, "\vartheta_X"] \\
HT(X) \arrow[r, "H(\mathrm{id}^{\mathbf{C}}_{T(X)})"'] & H(X)
\end{tikzcd}$$

conmuta, y, por consiguiente, el diagrama en $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
J'T(X) \arrow[r, "H'(\mathrm{id}_{T(X)})"] \arrow[d, "\vartheta_{T(X)}"'] & T'J'(X) \arrow[r, "T'(\Xi^{\vartheta}_X)"] & T'T'J(X) \arrow[d, "\mu'_{J(X)}"] \\
T'JT(X) \arrow[r, "T'(H(\mathrm{id}_{T(X)}))"'] & T'T'J(X) \arrow[r, "\mu'_{J(X)}"'] & T'J(X)
\end{tikzcd}$$

también conmuta. Pero entonces, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
J'T \arrow[r, "\lambda_{H'}"] \arrow[d, "\Xi^{\vartheta}T"'] & T'J' \arrow[r, "T'\Xi^{\vartheta}"] & T'T'J \arrow[d, "\mu'J"] \\
T'JT \arrow[r, "T'\lambda_H"'] & T'T'J \arrow[r, "\mu'J"'] & T'J
\end{tikzcd}$$

conmuta y Ξ^{ϑ} es una deformación.

Los dos procesos descritos son inversos entre sí.

Para acabar de demostrar que las 2-categorías $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$ son isomorfas, sólo falta comprobar la compatibilidad con la composición y las identidades.

Para la composición vertical de Kl-deformaciones

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbf{T}) \arrow[rr, bend left, "(J,\lambda)"] \arrow[rr, "(J',\lambda')" description] \arrow[rr, bend right, "(J'',\lambda'')"'] & & (\mathbf{C}',\mathbf{T}')
\end{tikzcd}$$
$$\Xi \qquad \Xi'$$

se cumple, para cada $X \in \mathbf{C}$, que

$$\begin{aligned}
\tau_X^{\Xi' \tilde{\circ} \Xi} &= (\mu' J \circ T'\Xi \circ \Xi')_X \\
&= \Xi_X \diamond \Xi'_X \\
&= \tau_X^{\Xi} \circ \tau_X^{\Xi'}
\end{aligned}$$

Para la composición horizontal de Kl-deformaciones

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C}, \mathbf{T}) \arrow[r, bend left, "{(J, \lambda)}"] \arrow[r, bend right, "{(J', \lambda')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi"] & (\mathbf{C}', \mathbf{T}') \arrow[r, bend left, "{(J'', \lambda'')}"] \arrow[r, bend right, "{(J''', \lambda''')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Xi'"] & (\mathbf{C}'', \mathbf{T}'')
\end{tikzcd}$$

se cumple, para cada $X \in \mathbf{C}$, que

$$\begin{aligned}
\tau_X^{\Xi' \tilde{*} \Xi} &= (\mu'' \circ T''\Xi' J \circ \lambda''' J \circ J'''\Xi)_X \\
&= (\Xi' J)_X \diamond (\lambda''' J \circ J'''\Xi)_X \\
&= (\Xi'(J, H_\lambda)_X \diamond H_{\lambda'''} \tau^{\Xi} \\
&= \tau_X^{\Xi'} * \tau_X^{\Xi}
\end{aligned}$$

La compatibilidad con las identidades es inmediata, por lo que la construcción anterior, junto a la desarrollada en la proposición 4.3.9, determina un 2-isomorfismo de $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ en $\mathbf{Kl}(\mathbf{C})^{\mathrm{cn}}$. □

La imagen del isomorfismo anterior sobre $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl,St}}$ determina la sub-2-categoría de $\mathbf{Kl}$ siguiente.

4.3.19. Definición. Sea $\mathbf{Kl}_{\mathrm{St}}$ la 2-categoría en la que las 0-células son los pares $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ con $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathrm{Mnd}(\mathbf{C})$, las 1-células de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ los pares de functores (J, H), con $J \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ y $H \colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')$, tales que $H \circ \mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'} \circ J$, las 2-células de (J, H) en (J', H') los pares de transformaciones naturales (σ, τ), con $\sigma \colon J \Longrightarrow J'$ y $\tau \colon H \Longrightarrow H'$, tales que $\tau\, \mathrm{F}_{\mathbf{T}} = \mathrm{F}_{\mathbf{T}'}\, \sigma$, i.e., tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}}"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \arrow[d, bend right, "H"'] \arrow[d, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}'}"'] & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}')
\end{tikzcd}$$

conmuta y con identidades y composiciones las definidas a partir de las de sus componentes.

La 2-categoría $\mathbf{Kl}_{\mathrm{St}}$ es una sub-2-categoría de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$, mediante el functor que olvida la primera componente de las 2-células.

4.3.20. Proposición. Las 2-categorías $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl,St}}$ y $\mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{St}}$ son isomorfas. □

Morfismos de Eilenberg-Moore.

Si invertimos el sentido de la transformación natural en los Kl-morfismos se obtiene otra noción de morfismo de mónadas. Puesto que el sentido del functor permanece invariante, los conceptos no son duales. Por su relación con los morfismos algebraicos entre mónadas introducidos posteriormente, es conveniente definir los *morfismos de Eilenberg-Moore* entre mónadas invirtiendo el sentido del functor en lugar del de la transformación natural.

4.3.21. Definición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{T}'$ una sobre $\mathbf{C}'$. Un **morfismo de Eilenberg-Moore**, o, simplemente, un **EM-morfismo** de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ es un par (K, λ), en el que $K\colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{C}$ es un functor y $\lambda\colon TK \Longrightarrow KT'$ una transformación natural

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \end{tikzcd}$$

tales que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "T"'] \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=60, "T'"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Downarrow\eta'"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=50, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \\ & {} & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "T"'] \arrow[r, bend left=60, "TT"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Downarrow\mu"] & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \end{tikzcd}$$

Para cada mónada $\mathbf{T}$ sobre $\mathbf{C}$, la **identidad** en $(\mathbf{C},\mathbf{T})$, $\mathrm{id}_{(\mathbf{C},\mathbf{T})}$, es el morfismo $(\mathrm{Id}_{\mathbf{C}},\mathrm{id}_T)$. Si $(K,\lambda)\colon(\mathbf{C},\mathbf{T})\longrightarrow(\mathbf{C}'\mathbf{T}')$ y $(K',\lambda')\colon\mathbf{T}'\longrightarrow\mathbf{T}''$ son dos EM-morfismos, su **composición**, $(K',\lambda')\circ(K,\lambda)$ es el par $(K'\circ K, K\lambda'\circ\lambda K')$.

En lo que sigue, identificamos las mónadas con los pares $(\mathbf{C},\mathbf{T})$ en los que $\mathbf{T}$ es una mónada sobre $\mathbf{C}$.

4.3.22. Proposición. Las mónadas y los EM-morfismos entre ellas determinan una categoría, denotada como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$.

4.3.23. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{T}'$ una sobre $\mathbf{C}'$. Entonces existe una biyección entre

1. Los EM-morfismos $(K,\lambda)\colon(\mathbf{C},\mathbf{T})\longrightarrow(\mathbf{C}',\mathbf{T}')$.
2. Los pares (K,H), en los que $K\colon\mathbf{C}'\longrightarrow\mathbf{C}$ y $H\colon\mathbf{EM}(\mathbf{T}')\longrightarrow\mathbf{EM}(\mathbf{T})$, tales que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}}\circ H = K\circ\mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$, i.e. tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbf{T}) \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbf{T}}"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{EM}(\mathbf{T}') \arrow[u, "H"] \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbf{T}'}"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. A cada EM-morfismo $(K,\lambda)\colon(\mathbf{C},\mathbf{T})\longrightarrow(\mathbf{C}',\mathbf{T}')$ le asignamos el par (K,H^λ), en el que $H^\lambda\colon\mathbf{EM}(\mathbf{T}')\longrightarrow\mathbf{EM}(\mathbf{T})$ es el functor que a una $\mathbf{T}'$-álgebra (A,α) le hace corresponder la $\mathbf{T}$-álgebra $(K(A),K(\alpha)\circ\lambda_A)$ y a un $\mathbf{EM}(\mathbf{T}')$-morfismo f el $\mathbf{EM}(\mathbf{T})$-morfismo $K(f)$.

Comprobemos que H^λ está bien definido. Si (A,α) es una $\mathbf{T}'$-álgebra, entonces $(A,K(\alpha)\circ\lambda_A)$ es una $\mathbf{T}$-álgebra, puesto que se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned}
(K(\alpha)\circ\lambda_A)\circ\eta_{K(A)} &= K(\alpha)\circ K(\eta'_A)\\
&= K(\alpha\circ\eta'_A)\\
&= \mathrm{id}_{K(A)}\ ,\\
(K(\alpha)\circ\lambda_A)\circ\mu_{K(A)} &= K(\alpha)\circ K(\mu'_A)\circ\lambda_{T'(A)}\circ T(\lambda)_A\\
&= K(\alpha\circ\mu'_A)\circ\lambda_{T'(A)}\circ T(\lambda)_A\\
&= K(\alpha\circ T'(\alpha))\circ\lambda_{T'(A)}\circ T(\lambda_A)\\
&= K(\alpha)\circ K(T'(\alpha))\circ\lambda_{T'(A)}\circ T(\lambda_A)\\
&= K(\alpha)\circ\lambda_A\circ TK(\alpha)\circ T(\lambda_A)\\
&= (K(\alpha)\circ\lambda_A)\circ T(K(\alpha)\circ\lambda_A)
\end{aligned}$$

Si $f\colon (A,\alpha) \longrightarrow (B,\beta)$ es un morfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras, entonces $H^{\lambda}(f)$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}$-álgebras porque

$$K(f) \circ K(\alpha) \circ \lambda_A = K(\beta) \circ KT'(f) \circ \lambda_A = K(\beta) \circ \lambda_B \circ TK(f)$$

La preservación de composiciones e identidades es inmediata, así como que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$.

Recíprocamente, a un par (K,H) que cumpla las condiciones en (2), le asociamos el EM-morfismo (K,λ^H), en donde λ^H se define como sigue. Puesto que $H\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$ es tal que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$, H asigna a cada $\mathbf{T}'$-álgebra (A,α), la $\mathbf{T}$-álgebra $H(A,\alpha)$, cuyo objeto subyacente es, necesariamente, $K(A)$, y cuya estructura denotamos mediante α^H. En particular, para cada objeto A, $(T'(A),\mu'_A)$ es una $\mathbf{T}'$-álgebra, a la que el functor H asigna la $\mathbf{T}$-álgebra $(KT'(A),(\mu'_A)^H)$.

La aplicación $A \mapsto (\mu'_A)^H$ es una transformación natural $(\mu'_{(\cdot)})^H$ de TKT' en KT', puesto que, para cada $f\colon A \longrightarrow B$, como μ' es una transformación natural y H es functor, los diagramas

$$\begin{tikzcd}
T'T'(A) \arrow[r, "T'T'(f)"] \arrow[d, "\mu'_A"'] & T'T'(B) \arrow[d, "\mu'_B"] \\
T'(A) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TKT'(A) \arrow[r, "TKT'(f)"] \arrow[d, "(\mu'_A)^H"'] & TKT'(B) \arrow[d, "(\mu'_B)^H"] \\
KT'(A) \arrow[r, "KT'(f)"'] & KT'(B)
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Sea $\lambda^H\colon TK \Longrightarrow KT'$ la transformación natural obtenida mediante la composición de $TK\eta'$ con $(\mu'_{(\cdot)})^H$, y que a cada $A \in \mathbf{C}$ le asigna el morfismo

$$TK(A) \xrightarrow{(TK\eta')_A} TKT'(A) \xrightarrow{(\mu'_A)^H} KT'(A)$$

La transformación natural λ^H también se puede obtener como sigue. Sea κ la transformación natural conjugada de la transformación natural identidad de

$K \circ \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$ en $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H$, obtenida a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(T) \arrow[rr, phantom, shift right=5, "\overset{\varepsilon^{\mathbf{T}}}{\Leftarrow}"] & & \mathbf{C} \arrow[ll, "\mathrm{F}^{\mathbf{T}}"'] \\
\mathbf{EM}(T) \arrow[u, "1"] \arrow[rr, "\mathrm{G}^{\mathbf{T}}"] \arrow[rr, phantom, shift right=5, "\overset{=}{\Nwarrow}"] & & \mathbf{C} \arrow[u, "1"'] \\
\mathbf{EM}(T)' \arrow[u, "H"] \arrow[rr, "\mathrm{G}^{\mathbf{T}'}"] \arrow[rr, phantom, shift right=5, "\overset{\eta^{\mathbf{T}'}}{\Leftarrow}"] & & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \\
\mathbf{EM}(T)' \arrow[u, "1"] & & \mathbf{C}' \arrow[u, "1"'] \arrow[ll, "\mathrm{F}^{\mathbf{T}'}"]
\end{tikzcd}$$

Componiendo con $\mathrm{F}^{\mathbf{T}}$, se obtiene la transformación natural

$$\lambda^H = \mathrm{G}^{\mathbf{T}}\,\kappa \colon TK = \mathrm{G}^{\mathbf{T}}\,\mathrm{F}^{\mathbf{T}}\,K \Longrightarrow \mathrm{G}^{\mathbf{T}}\,H\,\mathrm{F}^{\mathbf{T}'} = K\,\mathrm{G}^{\mathbf{T}'}\,\mathrm{F}^{\mathbf{T}'} = KT'$$

Se cumple que $\lambda^H \circ \eta K = K\eta'$, puesto que, para cada A, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
KA \arrow[r, "(\eta K)_A"] \arrow[d, "(K\eta')_A"'] & TK(A) \arrow[d, "(TK\eta')_A"] \arrow[dd, bend left=60, "\lambda^H_A"] \\
KT'(A) \arrow[r, "(\eta KT')_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & TKT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
& KT'(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

La condición $\lambda^H \circ \mu K = K\mu' \circ \lambda^H T' \circ T\lambda^H$ se deduce de la conmutatividad

del diagrama

$$\begin{tikzcd}
TTK(A) \arrow[r, "\mu K_A"] \arrow[d, "TTK\eta'_A"'] \arrow[dd, bend right=60, "T\lambda^H_A"'] & TK(A) \arrow[d, "TK\eta'_A"] \arrow[dd, bend left=60, "\lambda^H_A"] \\
TTKT'(A) \arrow[r, "\mu KT'_A"] \arrow[d, "T(\mu'_A)^H"'] & TKT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
TKT'(A) \arrow[r, "(\mu'_A)^H"] \arrow[d, "TK\eta' T'_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{TKT'(A)}"] \arrow[dd, bend right=60, "\lambda^H_{T'(A)}"'] & KT'(A) \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_{KT'(A)}"] \\
TKT'T'(A) \arrow[r, "TK\mu'_A"'] \arrow[d, "(\mu'_{T'(A)})^H"'] & TKT'(A) \arrow[d, "(\mu'_A)^H"] \\
KT'T'(A) \arrow[r, "\mu'_A"'] & KT'(A)
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado inferior conmuta porque el functor H preserva homomorfismos.

Los dos procesos son inversos entre sí. Si $(K, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ es un EM-morfismo de mónadas, entonces $\lambda^{(H^\lambda)} = \lambda$, puesto que, para cada A, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
TK(A) \arrow[r, "\lambda_A"] \arrow[d, "TK\eta'_A"'] & KT'(A) \arrow[d, "KT'\eta'_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{KT'(A)}"] & \\
TKT'(A) \arrow[r, "\lambda_{T'(A)}"'] \arrow[rr, bend right=40, "{\mu'_A}^{H^\lambda}"'] & KT'T'(A) \arrow[r, "K\mu'_A"'] & KT'(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por último, si el functor $H\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$ es tal que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$, entonces $H^{\lambda^H} = H$, porque, para cada $\mathbf{T}'$-álgebra (A, α), el $\mathbf{T}'$-homomorfismo

$\alpha\colon (T'(A),\mu'_A) \longrightarrow (A,\alpha)$ es preservado por H, y por tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd}
TK(A) \arrow[r, "TK\eta'_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{TK(A)}"'] & TKT'(A) \arrow[r, "(\mu'_A)^H"] \arrow[d, "TK(\alpha)"] & KT'(A) \arrow[d, "K(\alpha)"] \\
& TK(A) \arrow[r, "K(\alpha)"'] & K(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta. □

4.3.24. Definición. Sea **EM** la categoría en la que los objetos son los pares $(\mathbf{C},\mathbf{T})$ tales que $\mathbf{T}$ es una mónada sobre $\mathbf{C}$, y los morfismos de $(\mathbf{C},\mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}',\mathbf{T}')$ los pares de functores (K,H) tales que $K\colon \mathbf{C}'\longrightarrow\mathbf{C}$, $H\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}')\longrightarrow\mathbf{EM}(\mathbf{T})$ y $\mathrm{G}_{\mathbf{T}}\circ H = K\circ \mathrm{G}_{\mathbf{T}'}$.

4.3.25. Proposición. Las categorías $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$ y $\mathbf{EM}^{\mathrm{op}}$ son isomorfas. □

Deformaciones de Eilenberg-Moore.

Para los EM-morfismos entre mónadas se tiene asimismo una noción de deformación. Las *deformaciones de Eilenberg-Moore* están en correspondencia biunívoca con las transformaciones naturales entre los functores sobre las categorías de Eilenberg-Moore asociados a los EM-morfismos.

4.3.26. Definición. Sean $(K,\lambda),(K',\lambda')\colon (\mathbf{C},\mathbf{T})\longrightarrow(\mathbf{C}',\mathbf{T}')$ dos EM-morfismos de mónadas. Entonces una **deformación de Eilenberg-Moore** o, simplemente, una **EM-deformación** de (K,λ) en (K',λ') es una transformación natural $\Xi\colon K\Longrightarrow K'T'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
TK \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "T\Xi"'] & KT' \arrow[r, "\Xi T'"] & K'T'T' \arrow[d, "K'\mu'"] \\
TK'T' \arrow[r, "\lambda' T'"'] & K'T'T' \arrow[r, "K'\mu'"'] & K'T'
\end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"', ""{name=a}] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \\
& {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda'"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \\
& {} &
\end{tikzcd}$$

El hecho de que Ξ sea una EM-deformación de (K, λ) en (K', λ') se denota como $\Xi\colon (K,\lambda) \rightsquigarrow (K', \lambda')$. En ese caso, convenimos que Ξ_{e} es la única transformación natural de TK en $K'T'$ en el diagrama anterior.

Para cada EM-morfismo $(K,\lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ la **EM-identidad** es la transformación natural $K\eta'\colon K \Longrightarrow KT'$.

La **composición vertical** de deformaciones

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbf{T}) \arrow[rr, bend left=40, "{(K,\lambda)}"] \arrow[rr, "{(K',\lambda')}" description] \arrow[rr, bend right=40, "{(K'',\lambda'')}"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow\,\Xi"] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow\,\Xi'"] & & (\mathbf{C}',\mathbf{T}')
\end{tikzcd}$$

denotada como $\Xi' \,\tilde{\circ}\, \Xi$, es la transformación natural

$$K \xrightarrow{\ \Xi\ } K'T' \xrightarrow{\ \Xi'T'\ } K''T'T' \xrightarrow{\ K''\mu'\ } K''T'$$

obtenida a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, shift right=5ex, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K''"']
\end{tikzcd}$$

La **composición horizontal** de deformaciones

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbf{T}) \arrow[r, bend left, "{(K,\lambda)}"] \arrow[r, bend right, "{(K',\lambda')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\,\Xi"] & (\mathbf{C}',\mathbf{T}') \arrow[r, bend left, "{(K'',\lambda'')}"] \arrow[r, bend right, "{(K''',\lambda''')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\,\Xi'"] & (\mathbf{C}'',\mathbf{T}'')
\end{tikzcd}$$

denotada como $\Xi' \,\tilde{*}\, \Xi$, es la transformación natural

$$KK'' \xrightarrow{\ \Xi K''\ } K'T'K'' \xrightarrow{\ K'\Xi'_{\mathrm{e}}\ } K'K'''T''$$

obtenida a partir de

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "1"] & & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "1"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \\
\mathbf{C}'' \arrow[u, "K''"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda''"] \arrow[rr, bend right=60, "T''"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\Downarrow\mu''"] & \mathbf{C}'' \arrow[u, "K''"'] \arrow[r, "T''"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi'"] & \mathbf{C}'' \arrow[u, "K'''"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "1"] & & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"'] \\
\mathbf{C}'' \arrow[u, "K''"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi'"] \arrow[rr, bend right=60, "T''"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\Downarrow\mu''"] & \mathbf{C}'' \arrow[u, "K''"'] \arrow[r, "T''"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda'''"] & \mathbf{C}'' \arrow[u, "K'''"']
\end{tikzcd}
$$

4.3.27. Proposición. Las mónadas, los EM-morfismos y las EM-deformaciones determinan una 2-categoría, denotada como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$.

Demostración. La demostración es análoga a la de la proposición 4.2.12. $\square$

Las deformaciones entre morfismos de mónadas sobre una misma categoría $\mathbf{C}$ son simultáneamente deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore.

Se puede dar una definición alternativa, pero equivalente, de las deformaciones que resulta, ocasionalmente, más adecuada para la demostración de algunas proposiciones. La relación entre ellas es, esencialmente, la que existe entre las aplicaciones desde los conjuntos de variables y sus extensiones a las álgebras libres.

4.3.28. Proposición. Sean (K, λ), $(K', \lambda')\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ EM-morfismos. Entonces existe una biyección entre las EM-deformaciones de (K, λ) en (K', λ') y las transformaciones naturales de KT en $K'T'$ tales que

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\Downarrow\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"'] \arrow[r, "T'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Si $\Xi\colon (K, \lambda) \rightsquigarrow (K', \lambda')$ es una EM-deformación, entonces Ξ_{e}

cumple la condición de la proposición, puesto que

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \bullet \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=45, "\Downarrow\mu'"] & \bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow\mu'"] & \bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & \bullet \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left=60, "T^2"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\mu"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \bullet \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & \bullet \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "1"] \arrow[rr, bend left=60, "T^2"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\mu"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda'"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & \bullet \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda'"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda'"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow\mu'"] \arrow[rrr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=45, "\Downarrow\mu'"] & \bullet \arrow[u, "K'"] \arrow[r, "T'"'] & \bullet \arrow[u, "K'"] \arrow[r, "T'"'] & \bullet \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

Recíprocamente, si Ξ cumple la condición de la proposición entonces

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=40, "\Downarrow\eta"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & \bullet \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

es una EM-deformación, puesto que se cumple que

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=40, "\Downarrow\eta"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & \bullet \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=80, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=40, "\Downarrow\eta"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \bullet \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda'"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=60, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\mu'"] & \bullet \arrow[u, "K'"] \arrow[r, "T'"'] & \bullet \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Con la caracterización anterior de las EM-deformaciones, tenemos una descripción alternativa tanto de la composición vertical como de la horizontal. En particular, la composición horizontal adopta, haciendo uso de la notación de los párrafos precedentes, la forma más simple siguiente:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=90, "1"] \arrow[r, bend left=90, phantom, shift right=3, "\Downarrow\eta"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi"] & {} \arrow[u, "K'"'] \\
{} \arrow[u, "K''"] \arrow[r, "T''"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\Xi'"] & {} \arrow[u, "K'''"']
\end{tikzcd}$$

Lo mismo que para las deformaciones de Kleisli, existen EM-deformaciones que tienen la propiedad adicional de factorizar a través de una transformación natural entre los functores subyacentes de los EM-morfismos.

4.3.29. Definición. Sean (K, λ) y (K', λ') EM-morfismos de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$. Una **deformación de Street** de (K, λ) en (K', λ') es una transformación natural $\sigma\colon K \Longrightarrow K'$ tal que $\sigma T' \circ \lambda = \lambda' \circ T\sigma$, i.e., tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "T"] & & \mathbf{C} \\
& & \\
\mathbf{C}' \arrow[uu, bend left=60, "K"] \arrow[uu, bend right=60, "K'"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[rr, "T'"'] \arrow[uurr, phantom, "\Swarrow\lambda \quad \Swarrow\lambda'"] & & \mathbf{C} \arrow[uu, bend left=60, "K"] \arrow[uu, bend right=60, "K'"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Cada deformación de Street determina una deformación de Eilenberg-Moore, tal como demostramos en la siguiente proposición.

4.3.30. Proposición. Sea τ una deformación de Street de (K, λ) en (K', λ'). Entonces la transformación natural $K'\eta' \circ \sigma = \sigma T' \circ \lambda \circ \eta K = \lambda' \circ \eta \circ \sigma$ es una deformación de Eilenberg-Moore.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[drr, "1"] \arrow[ddrr, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & & \\
 & & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[uu, "K"] \arrow[drr, "1"] \arrow[drr, bend right=60, "T'"'] \arrow[drr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\eta'"] & & \\
 & & \mathbf{C} \arrow[uu, "K'"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "T"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] & & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, bend left, "K"] \arrow[u, bend right, "K'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[rr, "T'"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow\lambda \quad \Downarrow\lambda'"] & & \mathbf{C} \arrow[u, bend left, "K"] \arrow[u, bend right, "K'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

□

Decimos que una EM-deformación $\Xi\colon (K,\lambda) \rightsquigarrow (K',\lambda')$ es una deformación de Eilenberg-Moore-Street o, simplemente, una EM-St-deformación, si Ξ se obtiene a partir de una deformación de Street $\sigma\colon K \Longrightarrow K'$ de la manera indicada en la proposición anterior. Lo mismo que para las Kl-St-deformaciones, no toda deformación de Eilenberg-Moore puede obtenerse a partir de una deformación de Street.

El conjunto de las EM-St-deformaciones está cerrado bajo la composición, por lo que estas determinan una sub-2-categoría de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$, a la que denotamos como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM,St}}$.

4.3.31. Definición. Sea $\mathbf{EM}$ la 2-categoría en la que las 0-células son los pares $(\mathbf{C},\mathbf{T})$, con $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, las 1-células de $(\mathbf{C},\mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}',\mathbf{T}')$ los pares de functores (K,H), en los que $K\colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{C}$, $H\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$ y para los que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$, las 2-células de (K,H) en (K',H') las transformaciones naturales de H en H' y con identidades y composiciones las definidas a partir de las de sus componentes.

4.3.32. Proposición. Las 2-categorías $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$ y $\mathbf{EM}^{\mathrm{tr}}$ son isomorfas.

Demostración. Por la proposición 4.3.23 hay una correspondencia biunívoca entre las 1-células de $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y las de $\mathbf{EM}(\mathbf{C})^{\mathrm{tr}}$. Cada EM-deformación Ξ determina una transformación natural τ_Ξ para la que se cumplen las relaciones de incidencia indicadas en los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbf{T}) \arrow[rr, bend left, "{(K,\lambda)}"] \arrow[rr, bend right, "{(K',\lambda')}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\Xi"] & & (\mathbf{C}',\mathbf{T}')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbf{T}) & & \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \arrow[ll, bend right, "{(K,H^{\lambda})}"'] \arrow[ll, bend left, "{(K',H^{\lambda'})}"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow\tau_\Xi"]
\end{tikzcd}
$$

En efecto, sea τ_Ξ la aplicación que a cada $\mathbf{T}'$-álgebra (A,α) en $\mathbf{EM}(\mathbf{T}')$ le asigna el morfismo $K'(\alpha)\circ\Xi_A$. Entonces, por la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
TK(A) \arrow[rr, "(T\Xi)_A"] \arrow[ddd, "(\lambda)_A"'] \arrow[dddrr, phantom, "(1)"] & & TK'T'(A) \arrow[r, "(TK'\alpha)_A"] \arrow[d, "(\lambda'T')_A"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & TK'(A) \arrow[ddd, "(\lambda')_A"] \\
& & K'T'T'(A) \arrow[dd, "K'\mu'_A"'] \arrow[ddr, "(K'T'\alpha)_A"] & \\
& & & \\
KT'(A) \arrow[r, "(\Xi T')_A"] \arrow[d, "K(\alpha)"'] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & K'T'T'(A) \arrow[r, "K'\mu'_A"] \arrow[dr, "(T'\alpha)_A"'] & K'T'(A) \arrow[dr, "K'\alpha"] \arrow[d, phantom, "(4)"] \arrow[r, phantom, "(3)"] & T'(A) \arrow[d, "K'\alpha"] \\
K(A) \arrow[rr, "\Xi_A"'] & & K'T'(A) \arrow[r, "K'(\alpha)"'] & K'(A)
\end{tikzcd}
$$

en el que (1) conmuta porque Ξ es una deformación, (2) porque λ' es natural, (3) y (4) porque (A,α) es una $\mathbf{T}'$-álgebra y (5) porque Ξ es natural, se tiene que $(\tau_\Xi)_{(A,\alpha)}$ es un morfismo de $\mathbf{T}$-álgebras. Además, τ_Ξ es una transformación natural, puesto que, para cada morfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras $f\colon (A,\alpha)\longrightarrow(B,\beta)$, el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[r, "K(f)"] \arrow[d, "\Xi_A"'] & K(B) \arrow[d, "\Xi_B"] \\
K'T'(A) \arrow[r, "K'T'(f)"'] \arrow[d, "K'(\alpha)"'] & K'T'(B) \arrow[d, "K'(\beta)"] \\
K'(A) \arrow[r, "K'(f)"'] & K'(B)
\end{tikzcd}
$$

Recíprocamente, cada 2-célula ζ en $\mathbf{EM}$ determina una EM-deformación Ξ_ζ con las relaciones de incidencia indicadas en los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{EM}(\mathbf{T}) & \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \arrow[l, bend right, "(K,H)"'] \arrow[l, bend left, "(K',H')"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow\zeta"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbf{T}) \arrow[r, bend left, "(K,\lambda^H)"] \arrow[r, bend right, "(K',\lambda^{H'})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Xi_\zeta"] & (\mathbf{C}',\mathbf{T}')
\end{tikzcd}
$$

Sea Ξ_ζ la aplicación que a cada $A\in\mathbf{C}$ le asigna el morfismo $\zeta_{(T'(A),\mu'_A)}\circ K(\eta'_A)$. Si $f\colon A\longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces $T'(f)\colon (T'(A),\mu'_A)\longrightarrow(T'(B),\mu'_B)$

es un morfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras, y por la naturalidad de ζ y η', el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[r, "K(\eta'_A)"] \arrow[d, "K(f)"'] & KT'(A) \arrow[r, "\zeta_{(T'(A),\mu'_A)}"] \arrow[d, "KT'(f)"'] & K'T'(A) \arrow[d, "T'(f)"] \\
K(B) \arrow[r, "K(\eta'_B)"'] & KT'(B) \arrow[r, "\zeta_{(T'(B),\mu'_B)}"'] & K'T'(B)
\end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que Ξ_ζ es una transformación natural de K en $K'T'$.

La transformación natural Ξ_ζ es una deformación precisamente si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
TK \arrow[r, "\lambda^H"] \arrow[d, "T\Xi_\zeta"'] & KT' \arrow[r, "\Xi_\zeta T'"] & K'T'T' \arrow[d, "K'\mu'"] \\
TK'T' \arrow[r, "\lambda^{H'}"'] & K'T'T' \arrow[r, "K'\mu'"'] & K'T'
\end{tikzcd}$$

conmuta. Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
TK(A) \arrow[rr, "(\lambda^H)_A"] \arrow[dr, "(TK\eta')_A"] \arrow[dd, "(T\Xi_\zeta)_A"'] & & KT'(A) \arrow[r, "K\eta'_{T'(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, "(2)"] & KT'T'(A) \arrow[r, "\zeta_{(T'T'(A),\mu'T'_A)}"] \arrow[d, "K\mu'_A"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & K'T'T'(A) \arrow[dd, "K'\mu'_A"] \\
& TKT'(A) \arrow[ur, "(\mu'_A)^H"'] \arrow[dl, "T(\zeta_{(T'(A),\mu'_A)})"] & & KT'(A) \arrow[dr, "\zeta_{(T'(A),\mu'_A)}"'] & \\
TK'T'(A) \arrow[rrrr, "(\mu'_A)^{H'}"] \arrow[dr, "(TK'\eta'T')_A"] \arrow[dd, "(\lambda^{H'})_A"'] & & & & K'T'(A) \\
& TK'T'T'(A) \arrow[rr, "(T'K'\mu')_A"'] \arrow[dl, "(\mu'T'T'_A)^{H'}"] & & TK'T'(A) \arrow[ur, "(\mu'_A)^{H'}"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \\
K'T'T'(A) \arrow[rrrruu, bend right, "K'\mu'_A"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

en el que todo conmuta, excepto, quizás, (1), (2) y (3). Ahora bien, como $\mu'_A\colon (T'T'(A),\mu'_{T'(A)}) \longrightarrow (T'(A),\mu'_A)$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras y H'

es functor, (3) conmuta, y por ser ζ natural, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(T'T'(A),(\mu'_{T'(A)})^H) \arrow[r, "\mu'_A"] \arrow[d, "\zeta_{(T'T'(A),\mu'_{T'(A)})}"'] & (T'(A),(\mu'_A)^H) \arrow[d, "\zeta_{(T'(A),\mu'_A)}"] \\
(T'T'(A),(\mu'_{T'(A)})^{H'}) \arrow[r, "\mu'_A"'] & (T'(A),(\mu'_A)^{H'})
\end{tikzcd}$$

conmuta, y por tanto, también (1) conmuta. Por otra parte, puesto que se cumple que $\zeta_{(T'(A),\mu'_A)}\colon (KT'(A),(\mu'_A)^H)\longrightarrow(K'T'(A),(\mu'_A)^{H'})$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras, (2) conmuta.

Los procesos descritos son inversos, por la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[r, "(K\eta')_A"] \arrow[dr, "\Xi_A"'] \arrow[rrr, bend left=40, "(\Xi_{\tau_\Xi})_A"] & KT'(A) \arrow[r, "\Xi_{T'(A)}"] \arrow[d, phantom, "(1)"] \arrow[rr, bend left=30, "(\tau_\Xi)_{(T'(A),\mu'_A)}"] & K'T'T'(A) \arrow[r, "(K'\mu')_A"] & K'T'(A) \\
 & K'T'(A) \arrow[ur, "(K'T'\eta')_A"] \arrow[urr, "\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[r, "(K\eta')_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, bend left=30, "(\Xi_\zeta)_A"] \arrow[rrr, bend left=40, "(\zeta_{\Xi_\zeta})_{(A,\alpha)}"] & KT'(A) \arrow[r, "\zeta_{(T'A,\mu'_A)}"] \arrow[d, "K(\alpha)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & K'T'(A) \arrow[r, "K'(\alpha)"] \arrow[d, "K'(\alpha)"] & K'(A) \\
 & K(A) \arrow[r, "\zeta_{(A,\alpha)}"'] & K'(A) \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

en donde (1) conmuta porque Ξ es natural y (2) porque $\alpha\colon (T'A,\mu'_A)\longrightarrow(A,\alpha)$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras y ζ es natural.

Veamos la compatibilidad con las composiciones. Dada la situación

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbf{T}) \arrow[rr, bend left, "{(K,\lambda)}"] \arrow[rr, "{(K',\lambda')}" description] \arrow[rr, bend right, "{(K'',\lambda'')}"'] & \arrow[phantom, u, "\wr\downarrow\Xi"] \arrow[phantom, d, "\wr\downarrow\Xi'"] & (\mathbf{C}',\mathbf{T}')
\end{tikzcd}$$

se cumple que, para cada $(A,\alpha) \in \mathbf{EM}(\mathbf{T}')$, $\alpha\colon (T'A, \mu'_A) \longrightarrow (A,\alpha)$ es un homomorfismo de $\mathbf{T}'$-álgebras por lo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K'T'(A) \arrow[r, "K'(\alpha)"] \arrow[d, "(\Xi')_{T'(A)}"'] & K'(A) \arrow[d, "(\Xi')_A"] \\
K''T'T'(A) \arrow[d, "K''(\mu'_A)"'] & K''T'(A) \arrow[d, "K''(\alpha)"] \\
K''T'(A) \arrow[r, "K''(\alpha)"'] & K''(A)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
(\tau_{\Xi'\tilde{\circ}\Xi})_{(A,\alpha)} &= K''(\alpha) \circ (\Xi' \tilde{\circ} \Xi)_A \\
&= K''(\alpha) \circ (K''\mu')_A \circ (\Xi'T')_A \circ (\Xi)_A \\
&= K''(\alpha) \circ (\Xi')_A \circ K'(\alpha) \circ (\Xi)_A \\
&= (\tau_{\Xi'})_{(A,\alpha)} \circ (\tau_{\Xi})_{(A,\alpha)}
\end{aligned}$$

Para la composición horizontal, dada la situación

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C},\mathbf{T}) \arrow[r, bend left, "{(K,\lambda)}"] \arrow[r, bend right, "{(K',\lambda')}"'] \arrow[r, phantom, "\wr\downarrow\Xi"] & (\mathbf{C}',\mathbf{T}') \arrow[r, bend left, "{(K'',\lambda'')}"] \arrow[r, bend right, "{(K''',\lambda''')}"'] \arrow[r, phantom, "\wr\downarrow\Xi'"] & (\mathbf{C}'',\mathbf{T}'')
\end{tikzcd}$$

se cumple que:

$$
\begin{aligned}
(\tau_{\Xi' \tilde{*} \Xi})_{(A,\alpha)} &= K'K'''(\alpha) \circ (\Xi' \mathbin{\tilde{*}} \Xi)_A \\
&= K'K'''(\alpha) \circ (K'K'''\mu'' \circ K'\Xi'T'' \circ K'\lambda'' \circ \Xi K'')_A \\
&= K'(K'''(\alpha) \circ (K'''\mu'')_A \circ (\Xi'T'')_A \circ (\lambda'')_A) \circ (\Xi K'')_A \\
&= K'(K'''(\alpha) \circ (\Xi')_A \circ K''(\alpha) \circ (\lambda'')_A) \circ (\Xi K'')_A \\
&= K'K'''(\alpha) \circ (K'\Xi')_A \circ K'K''(\alpha) \circ (K'\lambda'')_A \circ (\Xi K'')_A \\
&= K'K'''(\alpha) \circ (K'\Xi')_A \circ K'(K''(\alpha) \circ \lambda'')_A \circ (\Xi K'')_A \\
&= H^{\lambda'}(K'''(\alpha) \circ (\Xi')_A) \circ (\tau_\Xi)_{(K''(A), K''(\alpha)\circ(\lambda'')_A)} \\
&= (H^{\lambda'}\Xi')_{(A,\alpha)} \circ (\tau_\Xi H^{\lambda''})_{(A,\alpha)} \\
&= (H^{\lambda'}\tau_{\Xi'} \circ \tau_\Xi H^{\lambda''}_{(A,\alpha)} \\
&= (\tau_{\Xi'} * \tau_\Xi)_{(A,\alpha)}
\end{aligned}
$$

La compatibilidad con las identidades es inmediata, por lo que la construcción anterior, junto a la desarrollada en la proposición 4.3.23, determina un 2-isomorfismo de $\mathbf{Mon}_{\mathrm{EM}}$ en $\mathbf{EM}^{\mathrm{tr}}$. □

Una consecuencia inmediata de la anterior proposición es que las 2-categorías **Kl** y **EM** son simétricas. Si se considera que las construcciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore representan las versiones formales de los aspectos sintáctico y semántico de las mónadas, y, por tanto, del álgebra desde un punto de vista categorial, entonces la proposición anterior expresa una de las formas de la dualidad entre sintaxis y semántica.

La imagen del isomorfismo anterior sobre $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM,St}}$ determina la sub-2-categoría de **EM** siguiente.

4.3.33. Definición. Sea $\mathbf{EM}_{\mathrm{St}}$ la 2-categoría en la que las 0-células son los pares $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ con con $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, las 1-células de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ los pares de functores (K, H), en los que $K\colon \mathbf{C}' \longrightarrow \mathbf{C}$, $H\colon \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \longrightarrow \mathbf{EM}(\mathbf{T})$ y para los que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \circ H = K \circ \mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$, las 2-células de (K, H) en (K', H') los pares de transformaciones naturales (σ, τ), con $\sigma\colon K \Longrightarrow K'$ y $\tau\colon H \Longrightarrow H'$, tales que $\mathrm{G}^{\mathbf{T}}\,\sigma = \tau\,\mathrm{G}^{\mathbf{T}'}$, i.e., tales que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge]
\mathbf{EM}(\mathbf{T}) \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbf{T}}"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{EM}(\mathbf{T}') \arrow[u, bend left, "K"] \arrow[u, bend right, "K'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \arrow[r, "\mathrm{G}^{\mathbf{T}'}"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, bend left, "H"] \arrow[u, bend right, "H'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta, y con identidades y composiciones las definidas a partir de las de sus componentes.

La 2-categoría $\mathbf{EM}_{\mathrm{St}}$ es una sub-2-categoría de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$ mediante el functor que olvida la primera componente de las 2-células.

4.3.34. Proposición. Las 2-categorías $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM,St}}$ y $\mathbf{EM}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{St}}$ son isomorfas. $\square$

Las álgebras para una mónada pueden ser consideradas como EM-morfismos entre mónadas. Los homomorfismos entre álgebras corresponden entonces a las EM-deformaciones entre EM-morfismos de mónadas. Las EM-deformaciones entre álgebras son siempre deformaciones de Street.

4.3.35. Proposición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$. Las categorías $\mathbf{EM}(\mathbf{T})$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}((\mathbf{C},\mathbf{T})(\mathbf{1},1))$ son isomorfas.

Demostración. Las $\mathbf{T}$-álgebras (A,α) están en correspondencia biunívoca con los EM-morfismos de mónadas

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{1} \arrow[u, "A"] \arrow[r, "1"'] \arrow[ur, phantom, "\Searrow\alpha"] & \mathbf{1} \arrow[u, "A"']
\end{tikzcd}$$

Además, si $f\colon (A,\alpha) \longrightarrow (B,\beta)$ es un $\mathbf{T}$-homomorfismo, entonces es evidente que la conmutatividad de cualquiera de los dos diagramas siguientes implica la del otro

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, bend right, "A"'] \arrow[d, bend left, "B"] \arrow[d, phantom, "\overset{f}{\Rightarrow}"] \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\alpha\quad\Searrow\beta"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "A"'] \arrow[d, bend left, "B"] \arrow[d, phantom, "\overset{f}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "1"'] & \mathbf{1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & T(B) \arrow[d, "\beta"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

$\square$

Morfismos y deformaciones algebraicas.

En esta sección presentamos una 2-categoría de mónadas, morfismos algebraicos y deformaciones algebraicas. Los morfismos y deformaciones algebraicas se definen como cuadrados adjuntos que contienen, simultáneamente, morfismos y deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore. La 2-categoría así obtenida es isomorfa a la sub-2-categoría plena para las 2-células de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$, tales que los functores subyacentes de las 1-células tienen un adjunto por la derecha, así como a la sub-2-categoría plena para las 2-células de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$ tales que los functores subyacentes de las 1-células tienen un adjunto por la izquierda.

4.3.36. Proposición. Sea $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ una adjunción, $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ una mónada sobre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ una sobre $\mathbf{C}'$. Entonces se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "T"] \arrow[d, shift right=2ex, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{C} \arrow[d, shift right=2ex, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] \arrow[u, shift right=2ex, "K"'] & & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2ex, "K"']
\end{tikzcd}$$

para el que existe, por la proposición 4.3.1, un cuadrado conmutativo de biyecciones

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Nat}(JT, T'J) & \cong & \mathrm{Nat}(T, KT'J) \\
\wr\Vert & & \wr\Vert \\
\mathrm{Nat}(J'TK, T') & \cong & \mathrm{Nat}(TK, KT')
\end{array}$$

Entonces las siguientes condiciones sobre las transformaciones naturales, son compatibles con las biyecciones anteriores:

1. Las transformaciones naturales $\lambda_0\colon JT \Longrightarrow T'J$ tales que

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, bend left=60, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow J"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=60, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\eta'"] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \cdot \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & \cdot \arrow[r, "T'"] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, bend left=60, "TT"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\mu"] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\lambda"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "T'"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

2. Las transformaciones naturales $\lambda_1\colon T \Longrightarrow KT'J$ tales que

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[r, "T'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{\eta}"] & {} \\
{} \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=70, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow\eta'"] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{\varepsilon}"] \arrow[d, "J"] & {} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[r, "T'"'] \arrow[rrr, bend right=40, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=20, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"'] & {} \arrow[r, "T'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "TT"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\mu"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[r, "T'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

3. Las transformaciones naturales $\lambda_2\colon JTK \Longrightarrow T'$ tales que

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\eta"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{\varepsilon}"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=70, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow\eta'"] & {}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\overline{\eta}"] & {} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rrr, bend right=40, "T'"'] \arrow[rrr, phantom, bend right=20, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[r, "1"'] & {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & {}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "TT"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\mu"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

4. Las transformaciones naturales $\lambda_3\colon TK \Longrightarrow KT'$ tales que

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "1"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\eta"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow K"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=70, "T'"'] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow\eta'"] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda"] & {} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] \arrow[rr, bend right=50, "T'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\mu'"] & {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "T"] \arrow[r, bend left=70, "TT"] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow\mu"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

4.3.37. Definición. Sea $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$ y $\mathbf{T}'$ una sobre $\mathbf{C}'$. Un **morfismo algebraico** de mónadas, o, simplemente, un **alg-morfismo** de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en

$(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ es un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2, "K"'] \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2, "K"']
\end{tikzcd}$$

tal que sus componentes sean compatibles con las condiciones de la proposición anterior. Las identidades y composiciones de alg-morfismos se definen como las Ad-identidades y las Ad-composiciones de sus cuadrados adjuntos subyacentes.

A partir de la definición anterior, es inmediato que si $(J \dashv K, \lambda)$ es un alg-morfismo entonces (J, λ_0) es un Kl-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ y (K, λ_3) es un EM-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0 \Swarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow \lambda_3"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

Recíprocamente, si (J, λ) es un Kl-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ y el functor J tiene un adjunto por la derecha K, entonces λ da lugar a un alg-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$. Del mismo modo, si (K, λ) es un EM-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ y K tiene un adjunto por la izquierda J, entonces λ da lugar a un alg-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$.

4.3.38. Definición. Sean

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2, "K"'] \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2, "K"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right=2, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right=2, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2, "K'"'] \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2, "K'"']
\end{tikzcd}$$

un par de alg-morfismos de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$. Una **deformación algebraica** de $(J \dashv K, \lambda)$ en $(J' \dashv K', \lambda')$ es un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"']
\end{tikzcd}$$

tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\lambda"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\Xi"] \arrow[d, phantom, "\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"'] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] \arrow[u, shift right, "1"'] & & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "1"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\Xi"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"] \arrow[u, shift right, "K'"'] \arrow[ur, phantom, "\lambda'"] \arrow[d, phantom, "\mu'"] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"'] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "T'"'] \arrow[u, shift right, "1"'] & & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "1"']
\end{tikzcd}$$

i.e., tal que $\mu' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\Xi \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \lambda) = \mu' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\lambda' \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \Xi)$.

Para cada alg-morfismo $(J \dashv K, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}', \mathbf{T}')$, la **identidad** es el cuadrado adjunto determinado por la matriz

$$\begin{pmatrix} J\eta' & K\eta' J \circ \eta^{J,K} \\ \eta' \circ \varepsilon & \eta' K \end{pmatrix}$$

La **composición vertical** de deformaciones algebraicas

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\mathbf{C}, \mathbf{T}) \arrow[r, bend left=40, "(J \dashv K, \lambda)", ""{name=U, below}] \arrow[r, "(J' \dashv K', \lambda')" description, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=40, "(J'' \dashv K'', \lambda'')"', ""{name=D, above}] & (\mathbf{C}', \mathbf{T}') \arrow[from=U, to=M, phantom, "\wr\Downarrow \Xi"] \arrow[from=M, to=D, phantom, "\wr\Downarrow \Xi'"]
\end{tikzcd}$$

denotada como $\Xi' \,\tilde{\circ}\, \Xi$, es el cuadrado adjunto $\mu' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\Xi' \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \Xi)$.

La **composición horizontal** de deformaciones algebraicas

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(\mathbf{C}, \mathbf{T}) \arrow[r, bend left, "(J \dashv K, \lambda)"] \arrow[r, bend right, "(J' \dashv K', \lambda')"'] \arrow[r, phantom, "\wr\Downarrow \Xi"] & (\mathbf{C}', \mathbf{T}') \arrow[r, bend left, "(J'' \dashv K'', \lambda'')"] \arrow[r, bend right, "(J''' \dashv K''', \lambda''')"'] \arrow[r, phantom, "\wr\Downarrow \Xi'"] & (\mathbf{C}'', \mathbf{T}'')
\end{tikzcd}$$

denotada como $\Xi' \tilde{*} \Xi$, es el cuadrado adjunto $\mu' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\lambda'' \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \Xi') \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \Xi = \mu' \overset{\mathrm{ad}}{\circ} (\Xi' \overset{\mathrm{fn}}{\circ} \lambda''') \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \Xi$.

Lo mismo que para los alg-morfismos, $\Xi\colon (J \dashv K, \lambda) \rightsquigarrow (J' \dashv K', \lambda')$ es una deformación algebraica exactamente si Ξ_0 es una deformación de Kleisli, o Ξ_3 es una deformación de Eilenberg-Moore.

Se tiene también aquí una caracterización alternativa de las deformaciones al estilo de las de Kleisli o de Eilenberg-Moore, reemplazando en la definición anterior las identidades en $\mathbf{C}$ por el functor T.

4.3.39. Definición. Sean $(J \dashv K, \lambda)$ y $(J' \dashv K', \lambda')$ dos alg-morfismos de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$. Una **deformación de Street** de $(J \dashv K, \lambda)$ en $(J' \dashv K', \lambda')$ es un cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[r, "1"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

tal que

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[r, "1"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\Xi"] & \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda'"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[r, "1"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"'] \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"']
\end{tikzcd}
$$

Dar una deformación de Street equivale a dar un par de transformaciones naturales (σ, τ), con $\sigma\colon J' \Longrightarrow J$ y $\tau\colon K \Longrightarrow K'$, tales que σ sea un Kl-St-deformación y τ una EM-St-deformación. Es inmediato que cada deformación de Street determina una deformación algebraica, aunque no toda deformación algebraica puede obtenerse a partir de una deformación de Street.

Las deformaciones de Street son transformaciones naturales entre los functores subyacentes de los alg-morfismos correspondientes que tienen la propiedad adicional de ser compatibles con las estructuras de las mónadas involucradas, pero que, a diferencia de las deformaciones algebraicas, no hacen un uso esencial de la estructura de mónada de la que está dotado el codominio.

4.3.40. Proposición. Las mónadas, los alg-morfismos y las alg-deformaciones determinan un 2-categoría, denotada como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$. Las deformaciones de Street entre alg-morfismos determinan una sub-2-categoría de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ denotada como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg,St}}$. $\square$

La fibración de las mónadas.

Si nos olvidamos de las 2-células, el functor de olvido de la categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ en la categoría de categorías y adjunciones, constituye una fibración, obtenida a través de la construcción de Grothendieck para un cierto functor de $\mathbf{Adj}$ en $\mathbf{Cat}$.

4.3.41. Proposición. Cualquier adjunción $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ determina un 2-functor $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})^*\colon \mathrm{Mnd}(\mathbf{D}) \longrightarrow \mathrm{Mnd}(\mathbf{C})$, que a cada mónada $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ le asigna la mónada $(KTJ, K\eta J, K\mu J \circ KT\overline{\varepsilon}TJ)$, a cada morfismo de mónadas $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ el morfismo de mónadas $K\lambda J$, y a cada deformación $\Xi\colon \lambda \longrightarrow \lambda'$ la deformación $\overline{G}\Xi\overline{F} \circ \overline{\eta}$.

Demostración. Veamos que $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})^*(\mathbf{T})$ es una mónada sobre $\mathbf{C}$. Para ello, sea $(F, G, \eta, \varepsilon)\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{E}$ una adjunción que de lugar a la mónada $\mathbf{T}$, e.g., la adjunción canónica entre $\mathbf{D}$ y la categoría de álgebras de Kleisli (o de Eilenberg-Moore) sobre $\mathbf{T}$. Entonces componiendo las adjunciones del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend right=20, "J"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, bend right=20, "K"'] \arrow[r, bend right=20, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{E} \arrow[l, bend right=20, "G"']
\end{tikzcd}$$

se obtiene la adjunción $(FJ, KG, K\eta J \circ \overline{\eta}, \varepsilon \circ F\overline{\varepsilon}G)\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{E}$, cuya mónada asociada es $(KGFJ, K\eta J \circ \overline{\eta}, KG(\varepsilon \circ F\overline{\varepsilon}G)FJ)$ que es $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})^*(\mathbf{T})$, puesto que se cumple

$$\begin{aligned}
KG(\varepsilon \circ F\overline{\varepsilon}G)FJ &= K(G\varepsilon F \circ GF\overline{\varepsilon}GF)J \\
&= K(\mu \circ GF\overline{\varepsilon}GF)J \\
&= K\mu J \circ KGF\overline{\varepsilon}GFJ \\
&= K\mu J \circ KT\overline{\varepsilon}TJ
\end{aligned}$$

Alternativamente, podemos verificar directamente que $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})^*(\mathbf{T}) = (\widehat{T}, \widehat{\eta}, \widehat{\mu})$ es una mónada en virtud de la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd}
KTJ \arrow[r, "KTJ\overline{\eta}"] \arrow[rr, bend left=40, "\widehat{T}\widehat{\eta}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & KTJKJ \arrow[r, "KTJK\eta J"] \arrow[d, "KT\overline{\varepsilon}J"] & KTJKTJ \arrow[d, "KT\overline{\varepsilon}TJ"] & KJKTJ \arrow[l, "K\eta JKTJ"'] \arrow[d, "K\overline{\varepsilon}TJ"] & KTJ \arrow[l, "\overline{\eta}KTJ"'] \arrow[ll, bend right=40, "\widehat{\eta}\widehat{T}"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
& KTJ \arrow[r, "KT\eta J"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & KTTJ \arrow[d, "K\mu J"] & KTJ \arrow[l, "KT\eta J"] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] & \\
& & KTJ & &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
KTJKTJKTJ \arrow[r, "KTJKT\overline{\varepsilon}TJ"] \arrow[d, "KT\overline{\varepsilon}TJKTJ"] \arrow[rr, bend left, "\widehat{T}\widehat{\mu}"] \arrow[dd, bend right, "\widehat{\mu}\widehat{T}"'] & KTJKTTJ \arrow[r, "KTJK\mu J"] \arrow[d, "KT\overline{\varepsilon}TTJ"] & KTJKTJ \arrow[d, "KT\overline{\varepsilon}TJ"] \arrow[dd, bend left, "\widehat{\mu}"] \\
KTTJKTJ \arrow[r, "KTT\overline{\varepsilon}TJ"'] \arrow[d, "K\mu JKTJ"] & KTTTJ \arrow[r, "KT\mu J"'] \arrow[d, "K\mu TJ"] & KTTJ \arrow[d, "K\mu J"] \\
KTJKTJ \arrow[r, "KT\overline{\varepsilon}TJ"'] \arrow[rr, bend right, "\widehat{\mu}"'] & KTTJ \arrow[r, "K\mu J"'] & KTJ
\end{tikzcd}
$$

Si $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$ es un morfismo de mónadas, entonces $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})^*(\lambda) = \widehat{\lambda}$ es un morfismo de mónadas, por la conmutatividad de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Id} \arrow[d, "K\eta J"'] \arrow[dr, "K\eta' J"] & \\
KTJ \arrow[r, "K\lambda J"'] & KT'J
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
KTJKTJ \arrow[r, "KTJK\lambda J"] \arrow[d, "KT\overline{\varepsilon}TJ"] \arrow[rr, bend left, "\widehat{\lambda}\widehat{\lambda}"] \arrow[dd, bend right, "\widehat{\mu}"'] & KTJKT'J \arrow[r, "K\lambda JKT'J"] \arrow[d, "KT\overline{\varepsilon}T'J"] & KT'JKT'J \arrow[d, "KT'\overline{\varepsilon}T'J"] \arrow[dd, bend left, "\widehat{\mu}'"] \\
KTTJ \arrow[r, "KT\lambda J"'] \arrow[d, "K\mu J"] & KTT'J \arrow[r, "K\lambda T'J"'] & KT'T'J \arrow[d, "K\mu' J"] \\
KTJ \arrow[rr, "K\lambda J"'] \arrow[rr, bend right, "\widehat{\lambda}"'] & & KT'J
\end{tikzcd}
$$

Si $\Xi\colon \lambda \rightsquigarrow \lambda'\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$, es una deformación en $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C}')$, entonces

$\mathrm{Mnd}(\overline{\mathbf{F}})(\Xi) = \overline{G}\Xi\overline{F} \circ \overline{\eta}$ es una deformación puesto que

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, "\overline{F}"] & \mathbf{C}' \arrow[r, bend left, "T"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda"] \arrow[rrrr, bend right=70, "T'"'] \arrow[rrrr, phantom, "\Downarrow\mu'", yshift=-60pt] & \mathbf{C}' \arrow[r, "\overline{G}"] \arrow[rr, bend right=50, "1"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\overline{\varepsilon}", yshift=-15pt] & \mathbf{C} \arrow[r, "\overline{F}"] \arrow[rrr, bend left=50, "1"] \arrow[rrr, phantom, "\Downarrow\overline{\eta}", yshift=35pt] & \mathbf{C}' \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Xi"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "\overline{G}"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, "\overline{F}"] & \mathbf{C}' \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Xi"] \arrow[rrrr, bend right=70, "T'"'] \arrow[rrrr, phantom, "\Downarrow\mu'", yshift=-60pt] & \mathbf{C}' \arrow[r, "\overline{G}"] \arrow[rr, bend right=50, "1"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\overline{\varepsilon}", yshift=-15pt] & \mathbf{C} \arrow[r, "\overline{F}"] \arrow[rrr, bend left=50, "1"] \arrow[rrr, phantom, "\Downarrow\overline{\eta}", yshift=35pt] & \mathbf{C}' \arrow[r, bend left, "T"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda'"] & \mathbf{C}' \arrow[r, "\overline{G}"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

La compatibilidad con las composiciones y las identidades se demuestra de manera similar. □

La construcción anterior se puede extender hasta un functor desde la categoría de adjunciones **Adj** hasta la categoría de 2-categorías y 2-functores **2Cat**.

4.3.42. Proposición. De **Adj** en **2Cat** existe un functor contravariante Mnd, que a cada categoría $\mathbf{C}$ le asigna $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$ y a cada adjunción $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ el 2-functor $(J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})^*\colon \mathbf{Mnd}(\mathbf{D}) \longrightarrow \mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$.

Demostración. La preservación de las identidades es inmediata. Por lo que respecta a la composición de adjunciones, se cumple que si $\mathbf{J} = (J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ y $\mathbf{J}' = (J', K', \overline{\eta}', \overline{\varepsilon}')\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{E}$ son dos adjunciones y $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ una mónada sobre $\mathbf{E}$, entonces $\mathrm{Mnd}(\mathbf{J}') \circ \mathrm{Mnd}(\mathbf{J})(\mathbf{T})$ coincide con $\mathrm{Mnd}(\mathbf{J}' \circ \mathbf{J})(\mathbf{T})$. En particular, para la multiplicación, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\mu^{\mathrm{Mnd}(\mathbf{J}')\circ\mathrm{Mnd}(\mathbf{J})(\mathbf{T})} &= K(K'\mu J' \circ K'T\overline{\varepsilon}'TJ')J \circ KK'TJ'\overline{\varepsilon}K'TJ'J \\
&= KK'\mu J'J \circ KK'T\overline{\varepsilon}'TJ'J \circ KK'TJ'\overline{\varepsilon}K'TJ'J \\
&= KK'\mu J'J \circ KK'T(\overline{\varepsilon}' \circ J'\overline{\varepsilon}K')TJ'J \\
&= \mu^{\mathrm{Mnd}(\mathbf{J}'\circ\mathbf{J})(\mathbf{T})}
\end{aligned}
$$

□

La construcción de Grothendieck aplicada a la composición del functor contravariante Mnd con el functor de olvido de las 2-células $U\colon \mathbf{2Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$, determina la categoría $\int^{\mathbf{Adj}} U \circ \mathrm{Mnd}$, que tiene como objetos los pares $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$, en los que $\mathbf{T}$ una mónada sobre $\mathbf{C}$, y como morfismos de $(\mathbf{C}, T)$ en $(\mathbf{C}', T')$ los pares $(\mathbf{J}, \lambda)$ para los que se cumple que $\mathbf{J} = (J, K, \overline{\eta}, \overline{\varepsilon})\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}'$ es una adjunción y $\lambda\colon \mathbf{T} \longrightarrow \mathrm{Mnd}(\mathbf{J})(\mathbf{T}')$ un morfismo de mónadas en $\mathbf{Mnd}(\mathbf{C})$.

4.3.43. Proposición. La categoría $\int^{\mathbf{Adj}} U \circ \mathrm{Mnd}$ es isomorfa a la categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ de mónadas y morfismos algebraicos.

Demostración. Ambas categorías tienen los mismos objetos. Además, los morfismos $(J \dashv K, \lambda)\colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{C}, \mathbf{T}')$ en la categoría $\int^{\mathbf{Adj}} U \circ \mathrm{Mnd}$ determinan cuadrados adjuntos mediante los transpuestos de λ. Por la proposición 4.3.36, los pares conjugados de tales cuadrados adjuntos son, respectivamente, morfismos de Kleisli y de Eilenberg-Moore, y por tanto, el cuadrado adjunto es un morfismo algebraico.

Recíprocamente, dado un morfismo en $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$, su adjunción subyacente, junto con la componente 1-ésima de su cuadrado adjunto subyacente, determinan un morfismo en $\int^{\mathbf{Adj}} U \circ \mathrm{Mnd}$. □

Por la proposición anterior, el functor de olvido de la categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ en $\mathbf{Adj}$ que asigna a cada par $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ su categoría subyacente $\mathbf{C}$ y a cada alg-morfismo de mónadas $(J \dashv K, \lambda)$ su adjunción subyacente, es una fibración.

No parece haber, sin embargo, ninguna estructura de 2-categoría sobre $\mathbf{Adj}$ de tal manera que la construcción de Grothendieck para los 2-functores en $\mathbf{2Cat}$, dé lugar a la 2-categoría de mónadas, alg-morfismos y alg-deformaciones (o, en particular, deformaciones de Street). Si como 2-células en $\mathbf{Adj}$ tomamos los pares conjugados, entonces no existe, en general, una manera obvia de asociarles transformaciones 2-naturales, puesto que una de las dos componentes del par conjugado parece ir en el sentido erróneo. Pero si invertimos el sentido de una de las dos componentes, y les imponemos ciertas condiciones, de modo que nos permitan asociarles transformaciones 2-naturales, entonces las adjunciones consideradas son necesariamente isomorfas.

Adjunciones y mónadas.

En esta sección definimos ciertas 2-categorías de adjunciones, que nos permiten extender hasta un 2-functor la asociación clásica que a adjunciones les asigna mónadas. A los morfismos y deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore entre mónadas los caracterizamos, respectivamente, como la imagen de morfismos y deformaciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore entre las adjunciones. Las construcciones de Kleisli y de Eilenberg-Moore son, respectivamente, 2-adjuntos a izquierda y derecha de tales 2-functores.

Adjunciones.

Las adjunciones pueden ser consideradas como los objetos de una categoría, cuyos morfismos son los cuadrados adjuntos. En ese caso, denotamos mediante $(J, H, \delta)\colon F \dashv G \longrightarrow F' \dashv G'$ la existencia de un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{D} \arrow[l, bend right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, bend right, "G'"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} & \mathbf{D} \\ {\scriptstyle J}\downarrow & \delta & \downarrow{\scriptstyle H} \\ \mathbf{C}' & \underset{F'}{\overset{G'}{\rightleftarrows}} & \mathbf{D}' \end{array}$$

considerado como un morfismo de adjunciones de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$.

4.3.44. Proposición. Las adjunciones y los cuadrados adjuntos determinan una categoría, denotada como **Ad**.

Demostración. Es suficiente definir las identidades y composición en **Ad** como las Fun-identidades y la Fun-composición de cuadrados adjuntos. □

La categoría **Ad** tiene una estructura adicional de 2-categoría, tal como recoge la siguiente definición.

4.3.45. Definición. Sean (J, H, δ) y (J', H', δ') dos cuadrados adjuntos de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$. Una **deformación** del primero en el segundo es una transformación natural τ de H en H'.

4.3.46. Proposición. Las adjunciones, los cuadrados adjuntos y las deformaciones constituyen una 2-categoría, denotada como **Ad**.

Demostración. Para las deformaciones de cuadrados adjuntos existen identidades, composiciones horizontales y composiciones verticales, definidas como las de sus transformaciones naturales subyacentes. □

4.3.47. Definición. Sea (J, H, δ) un cuadrado adjunto de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$ y (J', H', δ') uno de $F' \dashv G'$ en $F'' \dashv G''$. Una deformación del primero en el segundo es de **Street**, si existe una transformación natural $\sigma\colon J \Longrightarrow J'$ tal que el par (σ, τ) es compatible con los cuadrados adjuntos respectivos, i.e., si alguno, y por consiguiente, todos, los diagramas siguientes conmutan

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right, "J"'] \arrow[dd, bend left, "J'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[drr, "F"] & & \\
& \arrow[r, phantom, "\overset{\delta_0}{\Rightarrow} \quad \overset{\delta'_0}{\Rightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[dd, bend right, "H"'] \arrow[dd, bend left, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[drr, "F'"] & & \\
& & \mathbf{D}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right, "J"'] \arrow[dd, bend left, "J'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[drr, "F"] & & \\
& \arrow[r, phantom, "\overset{\delta_1}{\Rightarrow} \quad \overset{\delta'_1}{\Rightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[dd, bend right, "H"'] \arrow[dd, bend left, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' & & \\
& & \mathbf{D}' \arrow[ull, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right, "J"'] \arrow[dd, bend left, "J'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & & \\
& \arrow[r, phantom, "\overset{\delta_2}{\Rightarrow} \quad \overset{\delta'_2}{\Rightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[ull, "G"'] \arrow[dd, bend right, "H"'] \arrow[dd, bend left, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[drr, "F'"'] & & \\
& & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right, "J"'] \arrow[dd, bend left, "J'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] & & \\
& \arrow[r, phantom, "\overset{\delta_3}{\Rightarrow} \quad \overset{\delta'_3}{\Rightarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[ull, "G"'] \arrow[dd, bend right, "H"'] \arrow[dd, bend left, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \\
\mathbf{C}' & & \\
& & \mathbf{D}' \arrow[ull, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

La composición de deformaciones de Street es una deformación de Street. La sub-2-categoría de **Ad** determinada por las deformaciones de Street se denota como $\mathbf{Ad}_{\mathrm{St}}$. Esta se puede obtener a partir de la categoría triple **AdFun**, tomando como 0-células las Fun-identidades, como 1-células los cuadrados adjuntos y como 2-células las 3-células en **AdFun** tales que sus transformaciones conjugadas son identidades.

Cuadrados adjuntos de Kleisli.

No todo cuadrado adjunto, considerado como un morfismo de adjunciones, da lugar a un morfismo entre las mónadas asociadas a las adjunciones correspondientes. Sin embargo, para una cierta clase de cuadrados adjuntos esta asociación sí es posible.

4.3.48. Definición. Un **cuadrado adjunto de Kleisli** es un cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

tal que su componente 0-ésima, δ_0, es un isomorfismo natural.

Puesto que la composición de dos cuadrados adjuntos de Kleisli es un cuadrado adjunto de Kleisli, estos determinan una sub-2-categoría de **Ad**.

4.3.49. Definición. Denotamos mediante $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ la sub-2-categoría plena para las 2-células de **Ad** determinada por los cuadrados adjuntos de Kleisli. Las 1-células en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ se denominan, abreviadamente, **Kl-cuadrados**.

4.3.50. Lema. Sea $(J, H, \delta)\colon F \dashv G \longrightarrow F' \dashv G'$ un Kl-cuadrado. Entonces se cumplen las siguientes ecuaciones

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1}\Swarrow"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_3\Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "G'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[drr, phantom, "J\Swarrow"] & & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, bend right, "F'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\eta'"] & & \cdot \\
& \cdot \arrow[ur, bend right, "G'"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_3\Swarrow"] & \cdot \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1}\Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[r, "G'"] \arrow[rr, bend right=60, "1"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\varepsilon'"] & \cdot \arrow[r, "F'"] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dr, bend left, "F"] & \\
\cdot \arrow[ur, bend left, "G"] \arrow[rr, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\Downarrow\varepsilon"] \arrow[d, "H"'] \arrow[drr, phantom, "H\Swarrow"] & & \cdot \arrow[d, "H"] \\
\cdot \arrow[rr, "1"'] & & \cdot
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Es suficiente observar que

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=50, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1}\Swarrow"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_3\Swarrow"] & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "G'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=50, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Downarrow\eta"] \arrow[ddd, "J"'] \arrow[dddr, phantom, "\delta_0^{-1}\Downarrow"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Leftarrow}"] & \cdot \arrow[d, "1"] \\
& \cdot \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\delta_0}{\Nwarrow}"] & \cdot \arrow[l, "F"'] \arrow[d, "J"] \\
& \cdot \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta'}{\Leftarrow}"] & \cdot \arrow[l, "F'"'] \arrow[d, "1"] \\
\cdot \arrow[r, "F'"'] & \cdot \arrow[r, "G'"'] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, "1"] \arrow[d, "J"'] \arrow[drr, phantom, "J\Swarrow"] & & \cdot \arrow[d, "J"] \\
\cdot \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, bend right, "F'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\eta'"] & & \cdot \\
& \cdot \arrow[ur, bend right, "G'"'] &
\end{tikzcd}
$$

La demostración para la segunda ecuación es formalmente idéntica. $\square$

De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ en la 2-categoría conjugada de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ existe un 2-functor que asigna a cada adjunción su mónada correspondiente, a cada cuadrado adjunto de Kleisli un Kl-morfismo de mónadas y a cada deformación de Kl-cuadrados una Kl-deformación. Este 2-functor tiene un 2-adjunto por la izquierda, y que se obtiene, esencialmente, componiendo el 2-isomorfismo de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}^{\mathrm{cn}}$ en $\mathbf{Kl}$ con el 2-functor de inclusión que asocia a cada objeto de $\mathbf{Kl}$ su adjunción de Kleisli correspondiente, a cada 1-célula el Kl-cuadrado obtenido mediante las transformaciones naturales transpuestas de la identidad del cuadrado conmutativo correspondiente a la 1-célula, y que es la identidad en las 2-células. De esto se sigue que la sub-2-categoría plena de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ determinada por las adjunciones de Kleisli es una subcategoría correflectiva de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$.

4.3.51. Proposición. De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}^{\mathrm{cn}}$ existe un 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}$, que a cada adjunción $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$ le hace corresponder la mónada $(G \circ F, \eta, G\varepsilon F)$, a cada Kl-cuadrado (J, H, δ), el Kl-morfismo de mónadas (J, λ_δ) en donde $\lambda_\delta = G\delta_0^{-1} \circ \delta_3 F$, y a cada deformación $\tau\colon (J', H', \delta') \longrightarrow (J, H, \delta)$

la Kl-deformación $\Xi^{\tau} = G'\delta_0^{-1} \circ G'\tau F \circ \delta'_3 F \circ J'\eta$.

$$\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}} \xrightarrow{\quad \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}} \quad} \mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[dd, bend right, "J"'] \arrow[dd, bend left, "J'"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, bend right, "G"'] \arrow[dd, bend right, "H"'] \arrow[dd, bend left, "H'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] \\
\delta & \delta' \\
\mathbf{C}' \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, bend right, "G'"']
\end{tikzcd}
\quad \longmapsto \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "G \circ F"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_\delta \Leftarrow \quad \overset{\Xi^\tau}{\rightsquigarrow} \quad \lambda_{\delta'} \Leftarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "G' \circ F'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

donde Ξ^{τ} se obtiene a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[rr, bend left, "1"] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1} \Leftarrow"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, bend right, "H"'] \arrow[d, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\delta'_3 \Leftarrow"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend left, "J'"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}$$

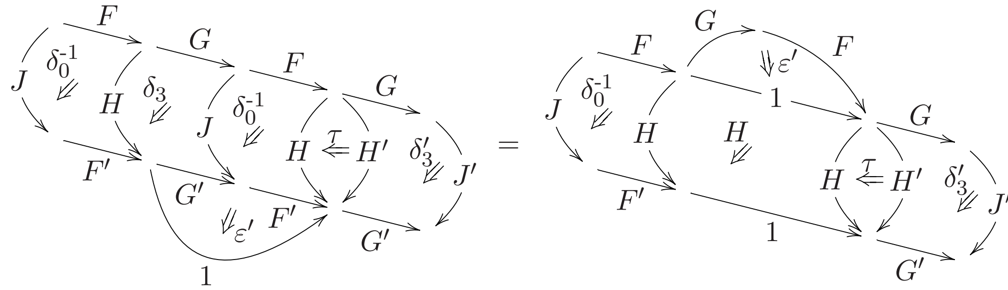
Demostración. Sea $(J, H, \delta)\colon F \dashv G \longrightarrow F' \dashv G'$ un Kl-cuadrado. A partir del lema anterior es inmediato comprobar que la transformación natural

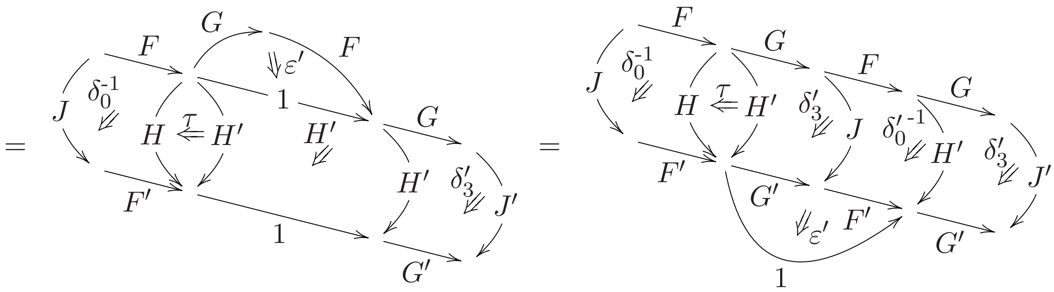
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1} \Leftarrow"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\delta_3 \Leftarrow"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

es un Kl-morfismo de mónadas.

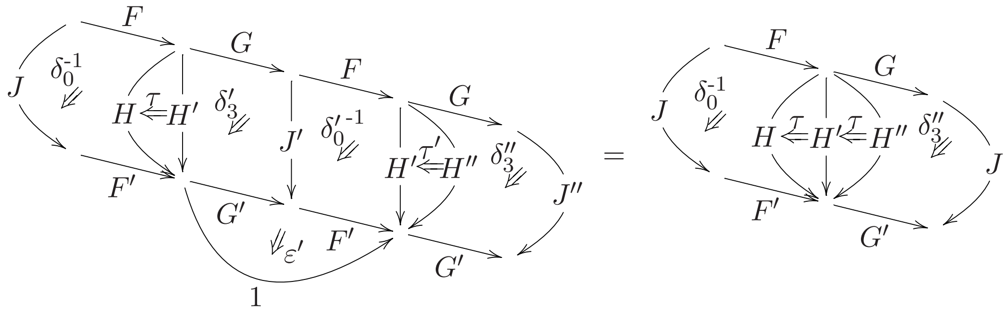
La compatibilidad con la identidad y las composiciones es inmediata.

Por el lema, Ξ^{τ} es una deformación, puesto que





La compatibilidad con las 2-identidades es inmediata. También lo es la compatibilidad con la composición horizontal, haciendo uso de la definición alternativa de la composición horizontal de Kl-deformaciones. Para la composición vertical, se cumple que



□

Las deformaciones de Street entre Kl-cuadrados se transforman en Kl-deformaciones a través del 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}$. Denotamos mediante $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl,St}}$ la birrestricción de $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}$ a $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl,St}}$ y a $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl,St}}$. La acción de $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl,St}}$ sobre una deformación de Street (σ, τ) es la aplicación

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\delta_0^{-1}\ \delta_0'^{-1}"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, bend right, "H"'] \arrow[d, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\delta_3\ \delta_3'"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "G \circ F"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_{\delta'}\ \lambda_{\delta}"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "G' \circ F'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
$$

El 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}$ resulta de la composición del 2-functor de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ en $\mathbf{Kl}$ que olvida todas las componentes de los cuadrados adjuntos de Kleisli excepto la primera, y del 2-isomorfismo existente entre $\mathbf{Kl}$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}^{\mathrm{cn}}$.

4.3.52. Proposición. De $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}^{\mathrm{cn}}$ en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ existe un 2-functor Kl, que a un par $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ le asigna la adjunción canónica $(\mathrm{F}_{\mathbf{T}}, \mathrm{G}_{\mathbf{T}})$, a un Kl-morfismo (J, λ), el Kl-cuadrado $(J, H_\lambda, \delta_\lambda)$, en el que H_λ es el functor asociado a λ por la biyección de la proposición 4.3.9 y δ_λ el cuadrado adjunto determinado por el cuadrado conmutativo correspondiente, y a una Kl-deformación $\tau\colon (J, \lambda) \longrightarrow (J', \lambda')$ la deformación τ^{Ξ} asociada a Ξ por la biyección de la proposición 4.3.18

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}} & & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}} \arrow[lll, "\mathrm{Kl}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend right, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\delta_\lambda\ \delta_{\lambda'}"] & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \arrow[l, bend right, "\mathrm{G}_{\mathbf{T}}"'] \arrow[d, bend right, "H_\lambda"'] \arrow[d, bend left, "H_{\lambda'}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau^{\Xi}}{\Leftarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, bend right, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}'}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}') \arrow[l, bend right, "\mathrm{G}_{\mathbf{T}'}"']
\end{tikzcd}
\longleftarrow\!\shortmid
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\lambda\ \overset{\Xi}{\leadsto}\ \lambda'"] & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J"'] \arrow[d, bend left, "J'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}
$$

□

Las deformaciones de Street entre Kl-morfismos de mónadas se transforman en deformaciones de Street entre Kl-cuadrados a través del 2-functor Kl. La birrestricción de Kl a $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl,St}}$ y a $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl,St}}$ se denota como $\mathrm{Kl}_{\mathrm{St}}$.

4.3.53. Proposición. El 2-functor Kl es 2-adjunto por la izquierda del 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}} \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}^{\mathrm{cn}} \arrow[l, shift left=2, "\mathrm{Kl}"]
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Nos proponemos demostrar que para cada adjunción existe un morfismo universal desde el 2-functor Kl hasta ella, i.e., que si $F \dashv G$ es una adjunción con mónada asociada $\mathbf{T}$, entonces se cumple que existe un Kl-cuadrado $\varepsilon_{F\dashv G}\colon \mathrm{F}_{\mathbf{T}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbf{T}} \longrightarrow F \dashv G$ tal que, para cada par $(\mathbf{A}, \mathbf{M})$, con $\mathbf{M}$ una mónada sobre $\mathbf{A}$ y cada Kl-cuadrado $(J, H, \delta)\colon \mathrm{F}_{\mathbf{M}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbf{M}} \longrightarrow F \dashv G$, el Kl-morfismo de mónadas $(J, \lambda_\delta)\colon (\mathbf{A}, \mathbf{M}) \longrightarrow (\mathbf{C}, \mathbf{T})$ es, salvo isomorfismo, el único para el que existe una deformación inversible $\theta_\delta\colon (J, H, \delta) \Longrightarrow \varepsilon_{F\dashv G} \circ \mathrm{Kl}(J, \lambda_\delta)$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbf{M}} \arrow[d, "\mathrm{Kl}(J,\lambda_\delta)"'] \arrow[dr, "{(J,H,\delta)}"] \arrow[dr, phantom, shift right=4ex, "\theta_\delta \Leftarrow"] & \\
\mathrm{F}_{\mathbf{T}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbf{T}} \arrow[r, "\varepsilon_{F\dashv G}"'] & F \dashv G
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{A}, \mathbf{M}) \arrow[d, "{(J,\lambda_\delta)}"] \\
(\mathbf{C}, \mathbf{T})
\end{tikzcd}
$$

y que, para cada deformación $\tau\colon (J', H', \delta') \longrightarrow (J, H, \delta)$, la Kl-deformación $\Xi^\tau\colon (J, \lambda_\delta) \longrightarrow (J', \lambda_{\delta'})$ es la única que hace conmutativo el triángulo izquierdo del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbf{M}} \arrow[d, bend right=50, "\mathrm{Kl}(J,\lambda_\delta)"'] \arrow[d, bend left=50, "\mathrm{Kl}(J',\lambda_{\delta'})"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathrm{Kl}(\Xi^\tau)}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "{(J,H,\delta)}"] \arrow[dr, bend left=40, "{(J',H',\delta')}"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\tau \Leftarrow"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\theta_\delta \Leftarrow\ \theta_{\delta'} \Leftarrow"] & \\
\mathrm{F}_{\mathbf{T}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbf{T}} \arrow[r, "\varepsilon_{F\dashv G}"'] & F \dashv G
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{A}, \mathbf{M}) \arrow[d, bend right=40, "{(J,\lambda_\delta)}"'] \arrow[d, bend left=40, "{(J',\lambda_{\delta'})}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Xi^\tau}{\Rightarrow}"] \\
(\mathbf{C}, \mathbf{T})
\end{tikzcd}
$$

Sea $F \dashv G\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ una adjunción y $\mathbf{T}$ su mónada asociada. A partir del functor de comparación de Kleisli $L\colon \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbf{D}$ se obtiene un Kl-cuadrado, $(1, L, \delta^L)$ de $\mathrm{F}_{\mathbf{T}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbf{T}}$ en $F \dashv G$, por la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}}"] \arrow[d, "1"'] & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbf{T}}"] \arrow[d, "L"] & \mathbf{C} \arrow[d, "1"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "F"'] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

y el hecho de que las transformaciones naturales identidad en los cuadrados del diagrama anterior son conjugadas entre si. El Kl-cuadrado $(1, L, \delta^L)$ es el valor de la counidad de la 2-adjunción buscada sobre $F \dashv G$. Sea $\mathbf{M}$ una mónada sobre $\mathbf{A}$ y (J, H, δ) un Kl-cuadrado de $\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbf{M}}$ en $F \dashv G$. Entonces $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(J, H, \delta) = (J, \lambda_\delta)$ es un Kl-morfismo de mónadas.

Sea $(J, H_{\lambda_\delta}, \delta_{\lambda_\delta})$ su imagen bajo el functor Kl. Entonces se tiene la situación descrita por el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "\mathrm{F}_{\mathbf{M}}"] \arrow[d, swap, "J"] \arrow[ddr, "J"] & & \mathbf{Kl}(\mathbf{M}) \arrow[rr, "\mathrm{G}_{\mathbf{M}}"] \arrow[d, swap, "H_{\lambda_\delta}"] \arrow[ddr, "H"] \arrow[rr, phantom, shift right=4, "(\delta_{\lambda_\delta})_3 \Swarrow"] & & \mathbf{A} \arrow[d, swap, "J"] \arrow[ddr, "J"] & \\
\mathbf{C} \arrow[rr, "\mathrm{F}_{\mathbf{T}}"] \arrow[dr, swap, "1"] & & \mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \arrow[rr, "\mathrm{G}_{\mathbf{T}}"] \arrow[dr, swap, "L"] \arrow[rr, phantom, shift left=2, "\delta_3 \Swarrow"] \arrow[drr, phantom, "\delta_3^L ="] & & \mathbf{C} \arrow[dr, swap, "1"] & \\
& \mathbf{C} \arrow[rr, swap, "F"] & & \mathbf{D} \arrow[rr, swap, "G"] & & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[rr, "M"] \arrow[dr, swap, "J"] & & \mathbf{A} \arrow[dr, "J"] \arrow[dl, phantom, "\lambda_\delta \Swarrow"] & \\
& \mathbf{C} \arrow[rr, swap, "T"] & & \mathbf{C}
\end{tikzcd}
$$

Sea θ_δ la aplicación que a un a en $\mathbf{Kl}(\mathbf{M})$ le asigna el $\mathbf{D}$-morfismo $(\delta_0^{-1})_a \colon H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a) \longrightarrow FJ(a)$. Entonces θ_δ es un isomorfismo natural de $L \circ H_{\lambda_\delta}$ en H. Veamos que es una deformación inversible en la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$. Para comprobarlo, sea $f \colon a \longrightarrow a'$ un $\mathbf{Kl}(\mathbf{M})$-morfismo. El functor H_{λ_δ} asigna a f el $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$-morfismo que corresponde al $\mathbf{C}$-morfismo

$$
J(a) \xrightarrow{\;J(f)\;} J\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a') \xrightarrow{\;(\lambda_\delta)_{a'}\;} GFJ(a')
$$

y el functor de comparación L asigna a cada $\mathbf{Kl}(\mathbf{T})$-morfismo $g \colon c \longrightarrow c'$, el morfismo $L(g)$ en $\mathbf{D}$

$$
F(c) \xrightarrow{\;F(g)\;} FGF(c') \xrightarrow{\;\varepsilon_{F(c')}\;} F(c')
$$

por lo que $L \circ H_{\lambda_\delta}(f)$ es el $\mathbf{D}$-morfismo de $FJ(a)$ en $FJ(a')$ en el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
FJ(a) \arrow[r, "FJ(f)"] & FJ\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a') \arrow[r, "(F\lambda_\delta)_{a'}"] \arrow[dr, swap, "(F\delta_3\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_{a'}"] & FGFJ(a') \arrow[r, "\varepsilon FJ_{a'}"] & FJ(a') \\
& & FGH\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a') \arrow[u, "(FG\delta_0^{-1})_{a'}"] \arrow[r, swap, "(\varepsilon H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_{a'}"] & H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a') \arrow[u, swap, "(\delta_0^{-1})_{a'}"]
\end{tikzcd}
$$

Se cumple que $\varepsilon H \circ F\delta_3 = H\varepsilon_{\mathbf{M}} \circ \delta_0 \, \mathrm{G}_{\mathbf{M}}$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbf{M}}"] \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_3 \Swarrow"] & {} \arrow[d, "J"] & \\
{} \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend right, "1"'] & {} \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & {} \\
& {} &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon_{\mathbf{M}}"] & \\
{} \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbf{M}}"] \arrow[rr, bend left, "1"] & {} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{M}}"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\delta_0 \Swarrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\
& {} \arrow[r, "F"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

luego $L \circ H_{\lambda_\delta}(f)$ es

$$
\begin{tikzcd}
FJ(a) \arrow[r, "FJ(f)"] & FJ\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a') \arrow[d, "(\delta_0\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_{a'}"] & \\
& H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a') \arrow[r, "(H\varepsilon_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_{a'}"'] & H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a')
\end{tikzcd}
$$

Por otra parte, se cumple que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(f) &= (\eta_{\mathbf{M}})_{M(a')} \circ f \\
&= \mathrm{F}_{\mathbf{M}}((\eta_{\mathbf{M}})_{a'}) \diamond f
\end{aligned}
$$

y, por consiguiente, también

$$
\begin{aligned}
(H\varepsilon_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_{a'} \circ H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(f) &= (H\varepsilon_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_{a'} \circ H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}((\eta_{\mathbf{M}})a') \circ H(f) \\
&= \mathrm{id}_{H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a')} \circ H(f) \\
&= \mathrm{id}_{H(a')} \circ H(f) \\
&= H(f)
\end{aligned}
$$

Como consecuencia, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
FJ(a) \arrow[r, "FJ(f)"] \arrow[rrrr, bend left, "L \circ H_{\lambda_\delta}(f)"] & FJ\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a') \arrow[r, "(\delta_0\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_{a'}"] & H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a') \arrow[r, "(H\varepsilon_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_{a'}"] & H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a') \arrow[r, "(\delta_0^{-1})_{a'}"] & FJ(a') \\
H(a) \arrow[u, "(\delta_0^{-1})_a"] \arrow[r, "H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(f)"'] \arrow[rrrr, bend right, "H(f)"'] & H\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}(a') \arrow[u, "(\delta_0^{-1}\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_{a'}"] \arrow[ur, "1"'] \arrow[rrr, "(H\varepsilon_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_{a'}"'] & & & H(a') \arrow[u, "(\delta_0^{-1})_{a'}"'] \arrow[ul, "1"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta y θ_δ es una deformación inversible de (J, H, δ) en $(1, L, \delta^L) \circ (H, H_{\lambda_\delta}, \delta_{\lambda_\delta})$.

Si $(J', \lambda')\colon (\mathbf{A}, \mathbf{M}) \longrightarrow (\mathbf{C}, \mathbf{T})$ es un Kl-morfismo y $\theta'\colon H \Longrightarrow L \circ H_{\lambda'}$ es una deformación inversible de $(1, L, \delta^L) \circ (H, H_{\lambda'}, \delta_{\lambda'})$ en (J, H, δ), entonces se cumple que $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta' \circ \theta_\delta^{-1})$ es una Kl-deformación inversible en $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}$ de (J, λ_δ) en (J', λ') puesto que

$$
\begin{array}{c}
(J, \lambda_\delta) = (J, \lambda_{H_{\lambda_\delta}}) = \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}((1, L, \delta^L) \circ (J, H_{\lambda_\delta}, \delta_{\lambda_\delta})) \\
\big\downarrow \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta_\delta^{-1}) \\
\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(J, H, \delta) \\
\big\downarrow \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta') \\
\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}((1, L, \delta^L) \circ (J, H_{\lambda'}, \delta_{\lambda'})) = (J, \lambda') = (J, \lambda_{H_{\lambda'}})
\end{array}
$$

Sea $\tau\colon (J', H', \delta') \longrightarrow (J, H, \delta)$ una deformación. Entonces $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau)$ es, precisamente, la Kl-deformación $\Xi^\tau = G\delta_0^{-1} \circ G\tau\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \circ \delta_3\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \circ J'\eta_{\mathbf{M}}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[rr, bend left=50, "1"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\delta_0^{-1}}{\Leftarrow}"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, bend right, "H"'] \arrow[d, bend left, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\delta'_3}{\Leftarrow}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
$$

Sea $\tau^{\Xi^\tau} = \mathrm{Kl}(\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau))$. Veamos que $\theta_\delta \circ \tau = \varepsilon_{F\dashv G}\tau^{\Xi^\tau} \circ \theta_{\delta'}$. Para ello es suficiente comprobar que $\tau \circ \theta_\delta = L\tau^{\Xi^\tau} \circ \theta_{\delta'}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Kl}(\mathbf{M}) \arrow[d, bend right, "H_{\lambda_\delta}"'] \arrow[d, bend left, "H_{\lambda_{\delta'}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau^{\Xi^\tau}}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, bend left, "H"'] \arrow[dr, bend left=60, "H'"] \arrow[dr, phantom, bend left=50, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta_\delta}{\Swarrow}\ \overset{\theta_{\delta'}}{\Swarrow}"] \\
\mathbf{Kl}(\mathbf{T}) \arrow[r, "L"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

Para cada a en $\mathbf{Kl}(\mathbf{M})$, $\tau_a^{\Xi^\tau}$, es el $\mathbf{Kl}(T)$-morfismo que corresponde al $\mathbf{C}$-morfismo Ξ_a^τ, luego $L\tau^{\Xi^\tau}(a) = L(\Xi_a^\tau) = L(G\delta_0^{-1} \circ G\tau\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \circ \delta_3'\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \circ J'\eta_{\mathbf{M}})_a$, i.e., la acción en a de la transformación natural del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rr, "\mathrm{F}_{\mathbf{M}}"] \arrow[rrrr, bend left, "1"] \arrow[rrr, phantom, "\Downarrow\eta_{\mathbf{M}}", yshift=3ex] \arrow[dr, bend right, "J"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\delta_0^{-1}}{\Swarrow}"] & & \cdot \arrow[rr, "\mathrm{G}_{\mathbf{M}}"] \arrow[dr, bend right, "H"'] \arrow[dr, bend left, "H'"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] \arrow[drrr, phantom, "\overset{\delta_3'}{\Swarrow}"] & & \cdot \arrow[dr, bend left, "J'"] \\
& \cdot \arrow[rr, "F"'] & & \cdot \arrow[rr, "G"'] \arrow[rrr, bend right, "1"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\varepsilon", yshift=-3ex] & & \cdot \arrow[r, "F"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

y que, por tanto, es igual a

$$FJ' \xrightarrow{FJ'\eta_{\mathbf{M}}} FJ'\,\mathrm{G}_{\mathbf{M}}\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \xrightarrow{F\delta_3'\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}} FGH'\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \xrightarrow{FG\tau\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}} FGH\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \xrightarrow{FG\delta_0^{-1}} FGFJ \xrightarrow{\varepsilon FJ} FJ$$

Pero $\delta_3'\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \circ J'\eta_{\mathbf{M}} = G\delta_0 \circ \eta J'$, porque

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{M}}"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\eta", yshift=4ex] & \cdot \arrow[r, "\mathrm{G}_{\mathbf{M}}"] \arrow[dr, bend right, "H'"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{\delta_3'}{\Swarrow}"] & \cdot \arrow[dr, bend left, "J'"] \\
& & \cdot \arrow[r, "G"'] & \cdot
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{M}}"] \arrow[d, bend right, "J'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\delta_0'}{\Swarrow}"] & \cdot \arrow[d, bend left, "H'"] \\
\cdot \arrow[r, "F"'] \arrow[rr, bend right=60, "1"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\eta", yshift=-4ex] & \cdot \arrow[r, "G"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

luego la transformación natural considerada es

$$FJ' \xrightarrow{F\eta J'} FGFJ' \xrightarrow{FG\delta_0} FGH'\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \xrightarrow{FG\tau\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}}} FGH\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \xrightarrow{FG\delta_0^{-1}} FGFJ \xrightarrow{\varepsilon FJ} FJ$$

i.e., la transformación natural del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[dd, "F"] & & \\
\cdot \arrow[urr, bend left, "J"] \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{M}}"] \arrow[dr, bend right, "J'"'] \arrow[ur, phantom, "\delta_0^{-1}\Rightarrow"] \arrow[d, phantom, "\delta'_0\Rightarrow"] & \cdot \arrow[dr, bend left, "H"] \arrow[dr, bend right, "H'"'] \arrow[dr, phantom, "\tau\Rightarrow"] & & & \\
 & \cdot \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "1"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\eta_{\mathbf{M}}"] & \cdot \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left, "1"] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & \cdot \arrow[r, "F"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

que coincide con $\delta_0^{-1} \circ \tau\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \circ \delta'_0$.

Entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
(\theta_\delta \circ \tau)_a &= (\delta_0^{-1})_a \circ \tau_a \\
&= (\delta_0^{-1})_a \circ (\tau\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}})_a \\
&= (\delta_0^{-1} \circ \tau\,\mathrm{F}_{\mathbf{M}} \circ \delta'_0 \circ \delta'^{-1}_0)_a \\
&= (L\tau^{\Xi^\tau} \circ \theta_{\delta'})_a
\end{aligned}$$

Veamos por último que se cumple la unicidad. Si $\Xi\colon (J, \lambda_\delta) \longrightarrow (J', \lambda_{\delta'})$ es una deformación tal que $\theta_\delta \circ \tau = L\tau^{\Xi} \circ \theta_{\delta'}$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau^{\Xi^\tau}) \circ \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta_{\delta'}) &= \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(1_L \circ \tau^{\Xi^\tau} \circ \theta_{\delta'}) \\
&= \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(1_L \circ \tau^{\Xi} \circ \theta_{\delta'}) \\
&= \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau^{\Xi}) \circ \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta_{\delta'})
\end{aligned}$$

pero $\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\theta_{\delta'})$ es un isomorfismo y, por tanto,

$$\Xi^\tau = \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau^{\Xi^\tau}) = \mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}(\tau^{\Xi}) = \Xi$$

□

Cuadrados adjuntos de Eilenberg-Moore.

Estudiamos a continuación la contrapartida de los Kl-cuadrados para la construcción de Eilenberg-Moore.

4.3.54. Definición. Un **cuadrado adjunto de Eilenberg-Moore** es un cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right=1.5, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right=1.5, "G"'] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, "K"] \arrow[r, shift right=1.5, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[ur, phantom, "\delta"] & \mathbf{D}' \arrow[u, "H"'] \arrow[l, shift right=1.5, "G'"']
\end{tikzcd}
$$

tal que su componente 3-ésima, δ_3, es un isomorfismo natural.

4.3.55. Definición. Denotamos mediante $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ la sub-2-categoría plena para las 2-células de $\mathbf{Ad}$ determinada por los EM-cuadrados. Las 1-células en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ se denominan, abreviadamente, **EM-cuadrados**.

4.3.56. Lema. Sea $(K, H, \delta)\colon F' \dashv G' \longrightarrow F \dashv G$ un EM-cuadrado. Entonces se cumplen las siguientes ecuaciones

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] & {} \arrow[r, "G"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta_0"] & {} \arrow[u, "H"] \arrow[r, "G'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta_3^{-1}"] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[rr, "1"] && {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[rr, "1"] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow K"] \arrow[dr, "F'"'] && {} \arrow[u, "K"'] \\
& {} \arrow[ur, "G'"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta'"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "G"] & {} \arrow[r, "F"] & {} \\
{} \arrow[u, "H"] \arrow[r, "G'"] \arrow[rr, bend right=60, "1"'] \arrow[rr, phantom, bend right=30, "\Downarrow\varepsilon'"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta_3^{-1}"] & {} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta_0"] & {} \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& {} \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \\
{} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "1"] && {} \\
{} \arrow[u, "H"] \arrow[rr, "1"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow H"] && {} \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}
$$

Demostración. Es suficiente observar que

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] & {} \arrow[r, "G"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\delta_0"] & {} \arrow[u, "H"] \arrow[r, "G'"'] \arrow[ur, phantom, "\delta_3^{-1}"] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\eta"] & {} \arrow[r, "G"] & {} \\
{} \arrow[u, "1"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[u, "1"'] \arrow[l, "G"'] & \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[ur, phantom, "\delta_3"] & {} \arrow[u, "H"'] \arrow[l, "G'"'] \arrow[uur, phantom, "\Downarrow\delta_3^{-1}"] & \\
{} \arrow[u, "1"] \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\eta'}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[u, "1"'] \arrow[r, "G'"'] & {} \arrow[uuu, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{} \arrow[rr, "1"] && {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[rr, "1"] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow K"] \arrow[dr, bend right, "F'"'] \arrow[rr, phantom, bend right=40, "\Downarrow\eta'"] && {} \arrow[u, "K"'] \\
& {} \arrow[ur, bend right, "G'"'] &
\end{tikzcd}
$$

La demostración para la segunda ecuación es formalmente idéntica. □

De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ en la 2-categoría transpuesta de $\mathrm{Mnd}_{\mathrm{EM}}$ existe un 2-functor que asigna a cada adjunción su mónada asociada, a cada EM-cuadrado un EM-morfismo de mónadas y a cada deformación de EM-cuadrados una EM-deformación. Este 2-functor tiene un 2-adjunto por la derecha EM, y que se obtiene, esencialmente, componiendo el 2-isomorfismo de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{tr}}$ en $\mathbf{EM}$ con el 2-functor de inclusión que asocia a cada objeto de $\mathbf{EM}$ su adjunción de Eilenberg-Moore correspondiente, a cada 1-célula el EM-cuadrado obtenido mediante las transformaciones naturales transpuestas de la identidad del cuadrado conmutativo correspondiente a la 1-célula, y que es la identidad en las 2-células. De esto se sigue que la sub-2-categoría plena de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ determinada por las adjunciones de Eilenberg-Moore es una subcategoría reflectiva de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$.

4.3.57. Proposición. De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{tr}}$ existe un 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$, que a cada adjunción $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$ le hace corresponder la mónada $(G \circ F, \eta, G\varepsilon F)$, a cada EM-cuadrado (K, H, δ), el EM-morfismo de mónadas (K, λ^{δ}) en donde $\lambda^{\delta} = \delta_3^{-1} F' \circ G\delta_0$ y a cada EM-deformación

$\tau\colon (J,H,\delta) \longrightarrow (J',H',\delta')$ la EM-deformación $\Xi_\tau = \delta_3'^{-1}F' \circ G\tau F' \circ G\delta_0 \circ \eta K$

$$\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}} \xrightarrow{\quad \mathrm{Md}_{\mathrm{EM}} \quad} \mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, bend right=10, "F"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{D} \arrow[ll, bend right=10, "G"'] & & \mathbf{C} \arrow[rr, "G \circ F"] \arrow[drr, phantom, "\lambda^{\delta} \Rrightarrow\ \overset{\Xi_\tau}{\rightsquigarrow}\ \Rrightarrow \lambda^{\delta'}"] & & \mathbf{C} \\
& \delta \quad \delta' & & \longmapsto & & & \\
\mathbf{C}' \arrow[uu, bend left, "K"] \arrow[uu, bend right, "K'"'] \arrow[rr, bend right=10, "F'"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{D}' \arrow[ll, bend right=10, "G'"'] \arrow[uu, bend left, "H"] \arrow[uu, bend right, "H'"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] & & \mathbf{C}' \arrow[uu, bend left, "K"] \arrow[uu, bend right, "K'"'] \arrow[rr, "G' \circ F'"'] & & \mathbf{C}' \arrow[uu, bend left, "K"] \arrow[uu, bend right, "K'"']
\end{tikzcd}$$

donde Ξ_τ se obtiene a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend left=40, "1"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\Downarrow\eta"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] & \mathbf{C} \\
\mathbf{C} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\delta_0 \Rrightarrow"] & \mathbf{C}' \arrow[u, bend left, "H"] \arrow[u, bend right, "H'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] \arrow[r, "G'"'] \arrow[ur, phantom, "\delta_3'^{-1} \Rrightarrow"] & \mathbf{D}' \arrow[u, "K'"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración es formalmente idéntica al caso de Kleisli. $\square$

Las deformaciones de Street entre EM-cuadrados se transforman en EM-deformaciones de mónadas a través del 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$. Denotamos mediante $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM,St}}$ la birrestricción de $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$ a $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM,St}}$ y a $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM,St}}$.

El 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$ resulta de la composición del 2-functor de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ en EM que olvida todas las componentes de los cuadrados adjuntos de Eilenberg-Moore excepto la primera, y del 2-isomorfismo existente entre $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$ y $\mathbf{Mnd}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}}$.

4.3.58. Proposición. De $\mathbf{Mnd}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}}$ en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$ existe un 2-functor EM, que a un par $(\mathbf{C},\mathbf{T})$ le asigna la adjunción canónica $(\mathrm{F}^{\mathbf{T}},\mathrm{G}^{\mathbf{T}})$, a cada EM-morfismo de mónadas (K,λ), el EM-cuadrado $(K,H^\lambda,\delta^\lambda)$, en el que H^λ es el functor asociado a λ por la biyección de la proposición 4.3.23 y δ^λ el cuadrado adjunto determinado por el cuadrado conmutativo correspondiente, y a cada EM-deformación $\tau\colon (K,\lambda) \longrightarrow (K',\lambda')$ la deformación τ_Ξ asociada a Ξ por la biyección de la proposición 4.3.32

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}} & & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}} \arrow[lll, "\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathbf{C} \arrow[rr, bend right=15, "\mathrm{F}^{\mathbf{T}}"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{EM}(\mathbf{T}) \arrow[ll, bend right=15, "\mathrm{G}^{\mathbf{T}}"'] \\
\arrow[r, phantom, "\delta^{\lambda}"] & \arrow[r, phantom, "\delta^{\lambda'}"] & \\
\mathbf{C}' \arrow[uu, bend left=30, "K"] \arrow[uu, bend right=30, "K'"'] \arrow[rr, bend right=15, "\mathrm{F}^{\mathbf{T}'}"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{EM}(\mathbf{T}') \arrow[ll, bend right=15, "\mathrm{G}^{\mathbf{T}'}"'] \arrow[uu, bend left=30, "H^{\lambda}"] \arrow[uu, bend right=30, "H^{\lambda'}"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\tau_{\Xi}}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathbf{C} \arrow[rr, "T"] & & \mathbf{C} \\
\arrow[r, phantom, "\Lleftarrow \lambda \quad \overset{\Xi}{\rightsquigarrow} \quad \Lleftarrow \lambda'"] & & \\
\mathbf{C}' \arrow[uu, bend left=30, "K"] \arrow[uu, bend right=30, "K'"'] \arrow[rr, "T'"'] & & \mathbf{C}' \arrow[uu, bend left=30, "H"] \arrow[uu, bend right=30, "H"']
\end{tikzcd}
$$

□

Las deformaciones de Street entre EM-morfismos de mónadas se transforman en deformaciones de Street entre EM-cuadrados a través del 2-functor EM. La birrestricción de EM a $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM,St}}$ y a $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM,St}}$ se denota como $\mathrm{EM}_{\mathrm{St}}$.

4.3.59. Proposición. El 2-functor EM es 2-adjunto por la derecha del 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}} \arrow[r, bend right=15, "\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{Mnd}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}} \arrow[l, bend right=15, "\mathrm{EM}"']
\end{tikzcd}
$$

Demostración. La demostración es análoga al caso de Kleisli, considerando morfismos universales desde cada adjunción hasta el 2-functor EM. Concretamente, se cumple que, para cada adjunción $F \dashv G$, con mónada asociada $\mathbf{T}$, existe un EM-cuadrado $\eta_{F \dashv G} \colon F \dashv G \longrightarrow \mathrm{F}^{\mathbf{T}} \dashv \mathrm{G}^{\mathbf{T}}$, obtenido a partir del functor de comparación de Eilenberg-Moore, tal que, para cada par $(\mathbf{A}, \mathbf{M})$, con $\mathbf{M}$ una mónada sobre $\mathbf{A}$, y cada EM-cuadrado $(K, H, \delta) \colon F \dashv G \longrightarrow \mathrm{F}^{\mathbf{M}} \dashv \mathrm{G}^{\mathbf{M}}$, el EM-morfismo de mónadas $(K, \lambda^{\delta}) \colon (\mathbf{C}, \mathbf{T}) \longrightarrow (\mathbf{A}, \mathbf{M})$ es, salvo isomorfismo, el único para el que existe una deformación inversible $\theta_{\delta} \colon (K, H, \delta) \Longrightarrow \mathrm{EM}(K, \lambda^{\delta}) \circ \eta_{F \dashv G}$

$$
\begin{tikzcd}
F \dashv G \arrow[r, "\eta_{F \dashv G}"] \arrow[dr, "{(K, H, \delta)}"'] & \mathrm{F}_{\mathbf{T}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbf{T}} \arrow[d, "{\mathrm{EM}(K, \lambda_{\delta})}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\theta_{\delta}}{\Rightarrow}"] \\
& \mathrm{F}_{\mathbf{M}} \dashv \mathrm{G}_{\mathbf{M}}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathbf{A}, \mathbf{M}) \\
(\mathbf{C}, \mathbf{T}) \arrow[u, "{(K, \lambda_{\delta})}"']
\end{tikzcd}
$$

y que, para cada deformación $\tau \colon (K, H, \delta) \longrightarrow (K', H', \delta')$, la EM-deformación $\Xi_{\tau} \colon (K, \lambda_{\delta}) \longrightarrow (K', \lambda_{\delta'})$ es la única que hace conmutativo el triángulo izquierdo

del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F\dashv G \arrow[rrr, "\eta_{F\dashv G}"] \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & \mathrm{F}^{\mathbf{T}}\dashv\mathrm{G}^{\mathbf{T}} \arrow[ddl, dash] \arrow[ddr, dash] & \\
(K,H,\delta) \arrow[rr, phantom, "\overset{\tau}{\Rrightarrow}"] \arrow[ddrrrr, bend right] & & (K',H',\delta') \arrow[ddrr] & \theta_{\delta'}\ \Nearrow & & \\
 & & \theta_{\delta}\ \Nearrow & \mathrm{EM}(K,\lambda_\delta) \arrow[rr, phantom, "\overset{\mathrm{EM}(\Xi_\tau)}{\Rightarrow}"] \arrow[dr] & & \mathrm{EM}(K',\lambda_{\delta'}) \arrow[dl] \\
 & & & & \mathrm{F}_{\mathbf{M}}\dashv\mathrm{G}_{\mathbf{M}} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (\mathbf{A},\mathbf{M}) & \\
(K,\lambda_\delta) \arrow[ur] \arrow[rr, phantom, "\overset{\Xi^\tau}{\Rightarrow}"] & & (K',\lambda_{\delta'}) \arrow[ul] \\
 & (\mathbf{C},\mathbf{T}) \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

□

Adjunciones y morfismos algebraicos.

La existencia simultánea de cuadrados adjuntos de Kleisli y Eilenberg-Moore entre dos adjunciones puede ser considerado desde, al menos, dos puntos de vista.

En primer lugar, obsérvese que un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}$$

puede ser simultáneamente un Kl-cuadrado y un EM-cuadrado. En ese caso, se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

conmuta y el par (J,H) es una **transformación** de adjunciones en el sentido de MacLane ([Mac71]). Las adjunciones, las transformaciones y las deformaciones determinan una 2-categoría, denotada como $\mathbf{Ad}_{\mathrm{tn}}$, y que es la sub-2-categoría común de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}$ y $\mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}}$.

Para las mónadas se tiene asimismo una noción de transformación. Una **transformación** de $(\mathbf{C},\mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}',\mathbf{T}')$, es un funtor $J\colon \mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C}'$ tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] & \mathbf{C} \arrow[d, "J"] \\ \mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] & \mathbf{C}' \end{tikzcd}$$

conmuta y que cumple que $J\eta = \eta' J$ y $\mu' J = J\mu$. Una transformación tal es un Kl-morfismo de $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$ en $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$, así como un EM-morfismo de $(\mathbf{C}', \mathbf{T}')$ en $(\mathbf{C}, \mathbf{T})$. Las transformaciones dan lugar a una 2-categoría, denotada como $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{tn}}$ y que es la sub-2-categoría común a $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}^{\mathrm{cn}}$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{tr}}$.

De $\mathbf{Ad}_{\mathrm{tn}}$ en $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{tn}}$ existe un 2-functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{tn}}$, por birrestricción de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{tn}}$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{tn}}$. Asimismo, es fácil comprobar que el morfismo de adjunciones de Kleisli (resp. de Eilenberg-Moore) determinado por una transformación de mónadas es una transformación de adjunciones, por lo que los functores Kl y EM pueden birrestringirse, respectivamente, a functores $\mathrm{Kl}_{\mathrm{tn}}$ y $\mathrm{EM}_{\mathrm{tn}}$ de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{tn}}$ en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{tn}}$, y que, por consiguiente, son adjuntos a izquierda y derecha del functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{tn}}$.

Resumimos la situación con el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Ad}_{\mathrm{EM}} \arrow[rr, bend right=10, "\mathrm{Md}_{\mathrm{EM}}"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{tr}} \cong \mathbf{EM} \arrow[ll, bend right=10, "\mathrm{EM}"'] \\
\mathbf{Ad}_{\mathrm{tn}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, "\mathrm{Md}_{\mathrm{tn}}" description] & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{tn}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ll, bend right=20, "\mathrm{EM}_{\mathrm{tn}}"'] \arrow[ll, bend left=20, "\mathrm{Kl}_{\mathrm{tn}}"] \arrow[ll, phantom, shift right=2, "\top"] \arrow[ll, phantom, shift left=2, "\top"] & \\
 & \mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}} \arrow[rr, bend left=10, "\mathrm{Md}_{\mathrm{Kl}}"] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}}^{\mathrm{cn}} \cong \mathbf{Kl} \arrow[ll, bend left=10, "\mathrm{Kl}"]
\end{tikzcd}$$

La existencia de transformaciones, en el sentido de MacLane, entre adjunciones no es, sin embargo, la situación más usual en contextos algebraicos. En muchas ocasiones se tienen pares de adjunciones tales que sus categorías subyacentes están, a su vez, relacionadas entre si también mediante adjunciones. Las siguientes situaciones son equivalentes:

- Existe un Kl-cuadrado de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$ y un EM-cuadrado de $F' \dashv G'$ en $F \dashv G$, de manera tal que los functores subyacentes son, dos a dos, adjuntos entre si.

- Existe un Kl-cuadrado de $F \dashv G$ en $F' \dashv G'$ tal que los functores subyacentes tienen adjuntos por la derecha.

- Existe un EM-cuadrado de $F' \dashv G'$ en $F \dashv G$ tal que los functores subyacentes tienen adjuntos por la izquierda.

La situación anterior admite una descripción más concisa, y es equivalente, a la existencia de un isomorfismo natural en un cuadrado de adjunciones.

4.3.60. Definición. Un **cuadrado algebraico** es un diagrama de categorías y adjunciones

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, shift right, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[u, shift right, "K"'] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, shift right, "I"']
\end{tikzcd}$$

junto con un par conjugado de isomorfismos naturales (α, β) de $H \circ F \dashv G \circ I$ en $F' \circ J \dashv K \circ G'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left, "H \circ F"] \arrow[r, bend right, "F' \circ J"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \mathbf{D}' \arrow[r, bend left, "G \circ I"] \arrow[r, bend right, "K \circ G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

Representamos los cuadrados algebraicos mediante diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha, \beta)"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, shift right, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[u, shift right, "K"'] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, shift right, "I"']
\end{tikzcd}$$

Los isomorfismos naturales α y β de la definición anterior son conjugados si se cumple cualquiera de las dos ecuaciones siguientes.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left, "HF"] \arrow[r, bend right, "F'J"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & {}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "HF"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] & {} \arrow[r, bend left, "GI"] \arrow[r, bend right, "KG'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[rr, bend right=60, "1"'] & {} \arrow[r, "F'J"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
{} \arrow[r, "GI"] \arrow[rr, bend left=60, "1"] & {} \arrow[r, bend left, "HF"] \arrow[r, bend right, "F'J"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[rr, bend right=60, "1"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & {} \arrow[r, "KG'"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & {}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, bend left, "GI"] \arrow[r, bend right, "KG'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & {}
\end{tikzcd}
$$

en las que η y ε son las unidades y counidades de las adjunciones compuestas correspondientes.

Obsérvese que si se tiene un diagrama de categorías y adjunciones como en la definición anterior y α es un isomorfismo natural de $F' \circ J$ en $H \circ F$, entonces su conjugado β es, necesariamente, un isomorfismo natural. Además, los inversos de ambos isomorfismos α^{-1} y β^{-1} forman a su vez un par conjugado de $F' \circ J \dashv K \circ G'$ en $H \circ F \dashv G \circ I$.

4.3.61. Proposición. Dado un cuadrado algebraico como en 4.3.60, cada uno de los isomorfismos naturales $\alpha\colon F'J \Longrightarrow HF$, $\beta^{-1}\colon KG' \Longrightarrow GI$, $\alpha^{-1}\colon HF \Longrightarrow F'J$ y $\beta\colon GI \Longrightarrow KG'$ determinan cuadrados adjuntos

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\alpha}"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{C'} \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D'} \arrow[l, shift right, "G'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\,\Nearrow"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_1^{\alpha}}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} & {} \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_2^{\alpha}}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\lambda_3^{\alpha}"] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} & {} \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\beta^{-1}}"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \\
\mathbf{C'} \arrow[u, "K"] \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D'} \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\lambda_0^{\beta^{-1}}"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] & {} \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_1^{\beta^{-1}}}{\Rightarrow}"] & {} \arrow[l, "G"'] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F'"'] & {} \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\lambda_2^{\beta^{-1}}}{\Rightarrow}"] & {} \\
{} \arrow[u, "K"] & {} \arrow[l, "G'"] \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[dr, phantom, "\beta^{-1}\Nearrow"] & {} \arrow[l, "G"'] \\
{} \arrow[u, "K"] & {} \arrow[l, "G'"] \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{D} \arrow[d, shift right=2, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] \arrow[u, shift right=2, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\lambda^{\alpha^{-1}}"] & \mathbf{D}' \arrow[u, shift right=2, "I"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\alpha^{-1}\Swarrow"] & {}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] & {} \\
{} \arrow[r, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda_1^{\alpha^{-1}}"] & {} \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] & {} \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] \arrow[u, "K"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda_2^{\alpha^{-1}}"] & {}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] & {} \\
{} \arrow[r, "F'"'] \arrow[u, "K"] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda_3^{\alpha^{-1}}"] & {} \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}
$$

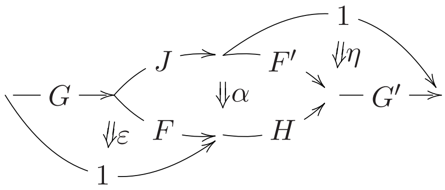
$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{D} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, shift right=2, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right=2, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\lambda^{\beta}"] & \mathbf{D}' \arrow[l, "G'"] \arrow[u, shift right=2, "I"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "J"'] & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\lambda_0^{\beta}"] & {} \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} & {} \arrow[l, "G"'] \arrow[d, "H"] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda_1^{\beta}"] & {} \arrow[l, "G'"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "J"'] & {} \arrow[l, "G"'] \\
{} \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\lambda_2^{\beta}"] & {} \arrow[l, "G'"] \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} & {} \arrow[l, "G"'] \\
{} \arrow[u, "K"] \arrow[ur, phantom, "\beta\Swarrow"] & {} \arrow[l, "G'"] \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}
$$

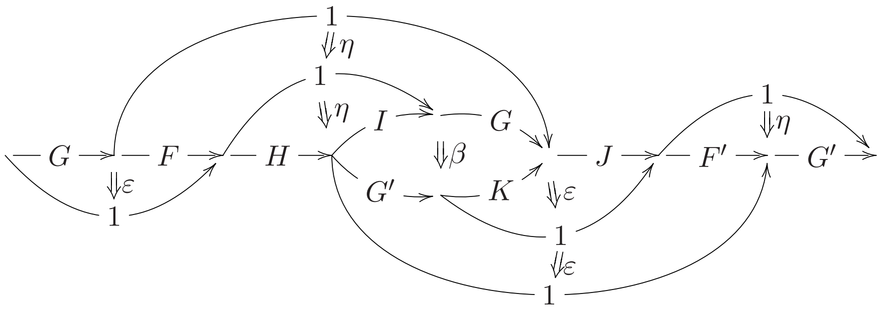
Además, cada una de las transformaciones naturales de los diagramas anteriores determina a todas las demás unívocamente.

Demostración. Puesto que en cualquier cuadrado adjunto los cuádruplos de transformaciones naturales se determinan mutuamente, es suficiente encontrar, para cada par de cuadrados adjuntos, un par de transformaciones naturales interdefinibles. En particular se cumple que $\lambda_3^\alpha = \lambda_0^\beta$ y $\lambda_3^{\alpha^{-1}} = \lambda_0^{\beta^{-1}}$.

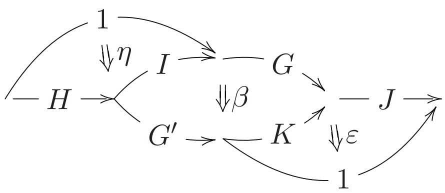
$\lambda_3^\alpha \;=$



$=$

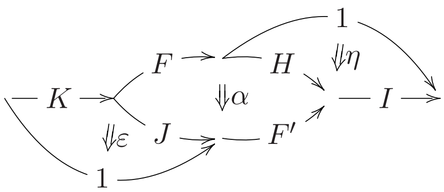


$=$

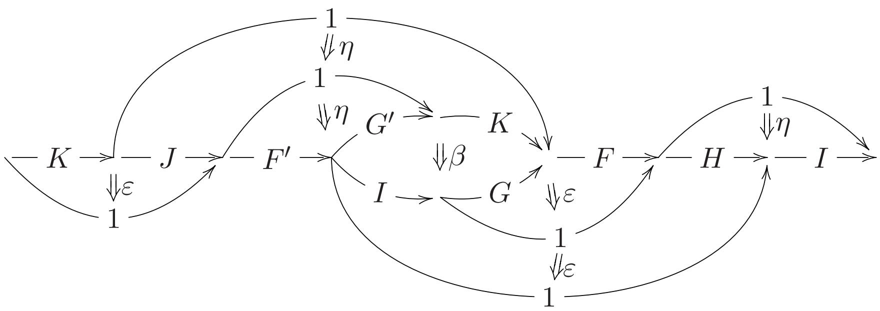


$= \;\lambda_0^\beta$

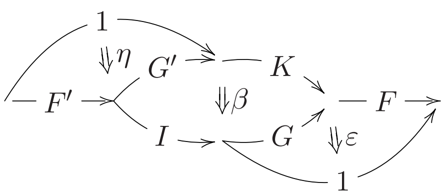
$\lambda_3^{\alpha^{-1}} \;=$



$=$



$=$



$= \;\lambda_0^{\beta^{-1}}$

□

Los cuadrados algebraicos son una caso especial de lax-cuadrados en la 2-categoría **Adj**.

4.3.62. Definición. Sea **C** una 2-categoría. Un **lax-cuadrado** en **C** es un diagrama de objetos, morfismos y 2-células

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\swArrow"] & d \arrow[d, "h"] \\ c' \arrow[r, "f'"'] & d' \end{tikzcd}$$

Un **pseudo-cuadrado** en **C** es un lax-cuadrado tal que su 2-célula es un isomorfismo.

4.3.63. Proposición. Sea **C** una 2-categoría. Los lax-cuadrados en **C** determinan una categoría doble, denotada como $\mathbf{LSq}(\mathbf{C})$. Además, los pseudo-cuadrados en **C** forman una sub-categoría doble denotada como $\mathbf{PSq}(\mathbf{C})$.

Demostración. Las composiciones vertical y horizontal de los lax-cuadrados se definen haciendo uso de las composiciones en **C** de 1-células y 2-células,

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\swArrow"] & d \arrow[d, "h"] \\ c' \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, "j'"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha'\swArrow"] & d' \arrow[d, "h'"] \\ c'' \arrow[r, "f''"'] & d'' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha\swArrow"] & d \arrow[r, "l"] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, phantom, "\alpha'\swArrow"] & e \arrow[d, "i"] \\ c' \arrow[r, "f'"'] & d' \arrow[r, "l'"'] & e' \end{tikzcd}$$

Las identidades para las composiciones vertical y horizontal son, respectivamente,

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "f\swArrow"] & d \arrow[d, "1"] \\ c' \arrow[r, "f"'] & d' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "1"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "j\swArrow"] & c \arrow[d, "j"] \\ c' \arrow[r, "1"'] & c' \end{tikzcd}$$

Es inmediato que las composiciones de pseudo-cuadrados son pseudo-cuadrados. □

La categoría doble de lax-cuadrados sobre **Adj** tiene como objetos categorías, como morfismos de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{D}$ adjunciones $F \dashv G$ y como 2-células cuadrados

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F \dashv G"] \arrow[d, "J \dashv K"'] \arrow[dr, phantom, "{(\alpha,\beta)} \Swarrow"] & \mathbf{D} \arrow[d, "H \dashv I"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F' \dashv G'"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}$$

en los que (α, β) es un par conjugado de transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, bend left, "H \circ F"] \arrow[r, bend right, "F' \circ J"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \mathbf{D}' \arrow[r, bend left, "G \circ I"] \arrow[r, bend right, "K \circ G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

Los cuadrados algebraicos son, por tanto, las 2-células de $\mathbf{PSq}(\mathbf{Adj})$.

Si en la categoría doble $\mathbf{PSq}(\mathbf{Adj})$ nos olvidamos de la composición horizontal y tomamos las identidades para la composición vertical como objetos y las 2-células como morfismos, obtenemos la categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ de adjunciones y cuadrados algebraicos. En este caso, denotamos mediante $(J \dashv K, H \dashv I, (\alpha, \beta)) \colon (F \dashv G) \longrightarrow (F' \dashv G')$ la existencia de un cuadrado algebraico como en 4.3.60, considerado como un morfismo de adjunciones. Esta categoría se puede completar hasta una 2-categoría.

4.3.64. Definición. Sean

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "{(\alpha,\beta)}"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, shift right, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, shift right, "I"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, shift right, "F"'] \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "{(\alpha',\beta')}"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "G"'] \arrow[d, shift right, "H'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, shift right, "F'"'] \arrow[u, shift right, "K'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "G'"'] \arrow[u, shift right, "I'"']
\end{tikzcd}$$

dos cuadrados algebraicos. Una **deformación algebraica** del primero en el segundo es un par conjugado $\tau = (\tau_0 \colon H' \Longrightarrow H, \tau_1 \colon I \Longrightarrow I')$ de $H \dashv I$ en $H' \dashv I'$.

Representamos la existencia de deformaciones algebraicas entre cuadrados algebraicos mediante diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "F \dashv G"] \arrow[d, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[d, bend left, "J' \dashv K'"] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "(\alpha,\beta)\ (\alpha',\beta')"] & & \mathbf{D} \arrow[d, bend right, "H \dashv I"'] \arrow[d, bend left, "H' \dashv I'"] \arrow[d, phantom, "\tau"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "F' \dashv G'"'] & & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}$$

Las deformaciones algebraicas son un caso especial de lax-cuadrados. Formalmente, se tiene una biyección entre las deformaciones algebraicas y los lax-cuadrados en $\mathbf{LSq}(\mathbf{Adj})$ de la forma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D} \arrow[r, shift right, "1"'] \arrow[d, shift right, "H'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "(\tau_0,\tau_1)"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift right, "1"'] \arrow[d, shift right, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{D}' \arrow[r, shift right, "1"'] \arrow[u, shift right, "I'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{D}' \arrow[l, shift right, "1"'] \arrow[u, shift right, "I"']
\end{tikzcd}$$

4.3.65. Proposición. Las adjunciones, los cuadrados algebraicos y las deformaciones algebraicas determinan una 2-categoría, denotada como $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$.

Demostración. Las identidades, y composiciones de deformaciones se definen como las de sus pares conjugados o, equivalentemente, mediante las composiciones de sus lax-cuadrados asociados. $\square$

4.3.66. Definición. Considérense cuadrados algebraicos como en 4.3.64. Una **deformación de Street** del primero en el segundo es un par (σ,τ), en el que $\sigma = (\sigma_0,\sigma_1)$ es un par conjugado de $J \dashv K$ en $J' \dashv K'$ y $\tau = (\tau_0,\tau_1)$ un par conjugado de $H \dashv I$ en $H' \dashv I'$, **compatible** con los cuadrados algebraicos, i.e., tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "1 \dashv 1"] \arrow[d, "J' \dashv K'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{(\sigma_0,\sigma_1)}{\swArrow}"] & \mathbf{C} \arrow[r, "F \dashv G"] \arrow[d, "J \dashv K"] \arrow[dr, phantom, "\overset{(\alpha,\beta)}{\swArrow}"] & \mathbf{D} \arrow[d, "H \dashv I"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "1 \dashv 1"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "F' \dashv G'"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "F \dashv G"] \arrow[d, "J' \dashv K'"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{(\alpha,\beta)}{\swArrow}"] & \mathbf{C} \arrow[r, "1 \dashv 1"] \arrow[d, "H' \dashv I'"] \arrow[dr, phantom, "\overset{(\tau_0,\tau_1)}{\swArrow}"] & \mathbf{D} \arrow[d, "H \dashv I"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F' \dashv G'"'] & \mathbf{C}' \arrow[r, "1 \dashv 1"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}$$

Representamos la existencia de deformaciones de Street entre cuadrados algebraicos mediante diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, "F\dashv G"] \arrow[d, bend right=40, "J\dashv K"'] \arrow[d, bend left=40, "J'\dashv K'"] \arrow[d, phantom, "\sigma"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha,\beta)\quad(\alpha',\beta')"] & \mathbf{D} \arrow[d, bend right=40, "H\dashv I"'] \arrow[d, bend left=40, "H'\dashv I'"] \arrow[d, phantom, "\tau"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'\dashv G'"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}$$

Las **identidades** y **composiciones** de deformaciones de Street se definen mediante las de sus pares conjugados o, equivalentemente, las de sus lax-cuadrados asociados.

A partir de la definición anterior, es inmediato que de toda deformación de Street se obtiene una deformación algebraica olvidando su primera componente. La sub-2-categoría de $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ determinada por las deformaciones de Street se denota como $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg,St}}$.

De cada cuadrado algebraico se obtienen un cuadrado adjunto de Kleisli y un cuadrado adjunto de Eilenberg-Moore. Además, cada deformación entre cuadrados algebraicos determina un par de deformaciones entre los cuadrados de Kleisli y de Eilenberg-Moore respectivos. Se cumple también que cada Kl-cuadrado tal que sus functores subyacentes tienen adjuntos por la derecha, determina un cuadrado algebraico. Si entre dos de tales cuadrados se tiene una deformación, ésta determina, a su vez, una deformación entre los cuadrados algebraicos asociados. La situación para los cuadrados de Eilenberg-Moore es idéntica cuando los functores subyacentes tienen adjuntos por la izquierda.

4.3.67. Proposición. De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ en la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}^{\mathrm{cn}}$ existe un 2-functor

$$\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\qquad\quad \mathrm{I}_{\mathrm{Kl}} \qquad\quad} \mathbf{Ad}_{\mathrm{Kl}}^{\mathrm{cn}}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, "F\dashv G"] \arrow[d, bend right=40, "J\dashv K"'] \arrow[d, bend left=40, "J'\dashv K'"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha,\beta)\quad(\alpha',\beta')"] & \mathbf{D} \arrow[d, bend right=40, "H\dashv I"'] \arrow[d, bend left=40, "H'\dashv I'"] \arrow[d, phantom, "\tau"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'\dashv G'"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathbf{C} \arrow[r, "F\dashv G"] \arrow[d, bend right=40, "J"'] \arrow[d, bend left=40, "J'"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\alpha}\quad\lambda^{\alpha'}"] & \mathbf{D} \arrow[d, bend right=40, "H"'] \arrow[d, bend left=40, "H'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\tau_0}{\Leftarrow}"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'\dashv G'"'] & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}$$

en el que λ^{α} y $\lambda^{\alpha'}$ son, respectivamente, los cuadrados adjuntos determinados por α y α'. El 2-functor I_{Kl} es inyectivo en los objetos, pseudo-inyectivo en los morfismos, i.e., para cada Kl-cuadrado su fibra consta de cuadrados algebraicos isomorfos, fiel y pleno en las 2-células.

Demostración. El 2-functor I_{Kl} es pseudo-inyectivo en los morfismos puesto que si $J \dashv K$ y $J \dashv K'$ son adjunciones, entonces $K \cong K'$ y por consiguiente, $J \dashv K$ y $J \dashv K'$ son isomorfos en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$. Es fiel para las 2-células puesto que los pares conjugados son únicos. Es pleno para la 2-células puesto que cada deformación entre morfismos algebraicos determina un par conjugado correspondiente. □

4.3.68. Proposición. De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ en la 2-categoría $\mathbf{Ad}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}}$ existe un functor

$$\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\quad \mathrm{I}_{\mathrm{EM}} \quad} \mathbf{Ad}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "F \dashv G"] \arrow[d, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[d, bend left, "J' \dashv K'"] & (\alpha,\beta) \quad (\alpha',\beta') & \mathbf{D} \arrow[d, bend right, "H \dashv I"'] \arrow[d, bend left, "H' \dashv I'"] \arrow[d, phantom, "\tau"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "F' \dashv G'"'] & & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "F \dashv G"] & \lambda^{\beta^{-1}} \quad \lambda^{\beta'^{-1}} & \mathbf{D} \\
\mathbf{C}' \arrow[u, bend left, "K"] \arrow[u, bend right, "K'"'] \arrow[rr, "F' \dashv G'"'] & & \mathbf{D}' \arrow[u, bend left, "I"] \arrow[u, bend right, "I'"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\tau_1}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

en el que $\lambda^{\beta^{-1}}$ y $\lambda^{\beta'^{-1}}$ son, respectivamente, los cuadrados adjuntos determinados por β^{-1} y β'^{-1}. El 2-functor I_{EM} es inyectivo en los objetos, pseudo-inyectivo en los morfismos, fiel y pleno en las 2-células. □

Finalmente, tenemos la siguiente proposición.

4.3.69. Proposición. De la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ existe un functor

$$\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\quad \mathrm{Mnd}_{\mathrm{alg}} \quad} \mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "F \dashv G"] \arrow[d, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[d, bend left, "J' \dashv K'"] & (\alpha,\beta) \quad (\alpha',\beta') & \mathbf{D} \arrow[d, bend right, "H \dashv I"'] \arrow[d, bend left, "H' \dashv I'"] \arrow[d, phantom, "\tau"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "F' \dashv G'"'] & & \mathbf{D}'
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, "G \circ F"] \arrow[d, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[d, bend left, "J' \dashv K'"] & \lambda_{(\alpha,\beta)} \overset{\Xi_\tau}{\rightsquigarrow} \lambda_{(\alpha',\beta')} & \mathbf{C} \arrow[d, bend right, "J \dashv K"'] \arrow[d, bend left, "J' \dashv K'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[rr, "G' \circ F'"'] & & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

en el que $\lambda_{(\alpha,\beta)}$ es el cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "T'"'] \arrow[u, shift right, "K"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha^{-1}\Swarrow"] & {} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_3^{\alpha}\Swarrow"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {} \arrow[r, "G'"'] & {}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha^{-1}\Swarrow"] & {} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda_1^{\beta}"] & {} \\
{} \arrow[r, "F'"'] & {} \arrow[r, "G'"'] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\lambda_2^{\alpha^{-1}}"] & {} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\lambda_0^{\beta}\Swarrow"] & {} \arrow[d, "J"] \\
{} \arrow[r, "F'"'] \arrow[u, "K"] & {} \arrow[r, "G'"'] & {}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\lambda_0^{\beta^{-1}}"] & {} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, phantom, "\beta\Searrow"] & {} \\
{} \arrow[r, "F'"'] \arrow[u, "K"] & {} \arrow[r, "G'"'] \arrow[u, "I"] & {} \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

$\lambda_{(\alpha',\beta')}$ es el cuadrado adjunto correspondiente y Ξ_τ la deformación $(\lambda^{\beta'} \overset{\text{fn}}{\circ} \tau \overset{\text{fn}}{\circ} \lambda^{\alpha^{-1}}) \overset{\text{ad}}{\circ} \eta$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rrr, "1"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[drrr, phantom, "\begin{pmatrix}\eta & \eta \\ \eta & \eta\end{pmatrix}"] & & & \mathbf{C} \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C} \arrow[u, shift right, "1"'] \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\alpha^{-1}}"] & \mathbf{D} \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\tau"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, shift right, "H'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\beta'^{-1}}"] & \mathbf{C} \arrow[u, shift right, "1"'] \arrow[d, shift right, "J'"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K"'] \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}' \arrow[u, shift right, "I"'] \arrow[r, "1"'] & \mathbf{D}' \arrow[u, shift right, "I'"'] \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}' \arrow[u, shift right, "K'"']
\end{tikzcd}$$

representada como

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, bend left, "1"] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J\dashv K"'] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\alpha^{-1}}"] \arrow[rr, phantom, "\eta"] & \mathbf{D} \arrow[r, "G"] \arrow[d, bend right, "H\dashv I"'] \arrow[d, bend left, "H'\dashv I'"] \arrow[d, phantom, "\tau"] \arrow[dr, phantom, "\lambda^{\beta'}"] & \mathbf{C} \arrow[d, "J'\dashv K'"] \\
\mathbf{C}' \arrow[r, "F'"'] & \mathbf{D}' \arrow[r, "G'"'] & \mathbf{C}'
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por la proposición 4.3.61, las transformaciones naturales en la imagen de un cuadrado algebraico son transpuestas entre si y forman, por tanto, un morfismo algebraico de mónadas. Alternativamente, se puede verificar que $\lambda_{(\alpha,\beta)} = \lambda^{\beta} \overset{\mathrm{ad}}{\circ} \lambda^{\alpha^{-1}}$.

La demostración de que Ξ_{τ} es, efectivamente, una deformación algebraica es formalmente idéntica a las demostraciones de que Ξ^{τ_0} y Ξ_{τ_3} son, respectivamente, deformaciones de mónadas de Kleisli y de Eilenberg-Moore.

La preservación de identidades y composiciones se sigue asimismo de las de sus componentes. $\square$

Resumimos la situación anterior con el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Ad}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}} \arrow[rr, bend right=10, "\mathrm{EM}^{\mathrm{tr}}"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{EM}} \cong \mathbf{EM}^{\mathrm{tr}} \arrow[ll, bend right=10, "\mathrm{Md}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{EM}}"'] \\
\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}} \arrow[ur, bend left, "\mathrm{I}_{\mathrm{EM}}"] \arrow[rr, "\mathrm{Md}_{\mathrm{alg}}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{I}_{\mathrm{Kl}}"'] & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}} \arrow[ur, bend left=10, "\mathrm{J}_{\mathrm{EM}}"'] \arrow[dr, bend right=10, "\mathrm{J}_{\mathrm{Kl}}"] & \\
 & \mathbf{Ad}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}} \arrow[rr, bend left=10, "\mathrm{Md}^{\mathrm{cn}}_{\mathrm{Kl}}"] \arrow[rr, phantom, "\top"] & & \mathbf{Mnd}_{\mathrm{Kl}} \cong \mathbf{Kl}^{\mathrm{cn}} \arrow[ll, bend left=10, "\mathrm{Kl}^{\mathrm{cn}}"]
\end{tikzcd}
$$

El functor $\mathrm{Md}_{\mathrm{alg}}$ no tiene en general un adjunto por la izquierda. Para algunas subcategorías de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ este adjunto por la izquierda existe, como, por ejemplo, para la sub-2-categoría plena de $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ determinada por las categorías de la forma $\mathbf{Set}^{S}$.

Podemos ahora describir la relación entre ciertas adjunciones surgidas anteriormente. Si se tiene un par de functores equivalentes $H \equiv I$ y un par de cuadrados iso-conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{C} \arrow[rr, shift right, "F"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right=2, "J"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{D} \arrow[ll, shift right, "G"'] \arrow[d, shift right=2, "H"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C} \arrow[rr, shift right, "F'"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[u, shift right=2, "K"'] & & \mathbf{D}' \arrow[ll, shift right, "G'"'] \arrow[u, shift right=2, "I"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{C}' \arrow[rr, shift right, "F'"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[d, shift right=2, "K"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & & \mathbf{D}' \arrow[ll, shift right, "G'"'] \arrow[d, shift right=2, "I"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathbf{C} \arrow[rr, shift right, "F"'] \arrow[rr, phantom, "\top"] \arrow[u, shift right=2, "L"'] & & \mathbf{D} \arrow[ll, shift right, "G"'] \arrow[u, shift right=2, "H"']
\end{tikzcd}
$$

entonces las adjunciones $F \dashv G$ y $F' \dashv G'$ son equivalentes en la 2-categoría de adjunciones, morfismos algebraicos de adjunciones y deformaciones. Esto es así porque los cuadrados iso-conmutativos pueden completarse hasta cuadrados algebraicos y, por ser las categorías $\mathbf{D}$ y $\mathbf{D}'$ equivalentes, las identidades para ellas son, respectivamente, naturalmente isomorfas a los functores $I \circ H$ y $H \circ I$. Tales isomorfismos naturales dan lugar a sendas deformaciones inversibles entre los cuadrados algebraicos, por lo que las adjunciones $F \dashv G$ y $F' \dashv G'$ son equivalentes en la 2-categoría $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$. Puesto que todo 2-functor preserva equivalencias, las mónadas asociadas son también equivalentes en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$.

La situación descrita es la que encontramos al estudiar la relación entre las adjunciones relativas a las álgebras de Hall y las álgebras de Bénabou. Sin embargo, tales adjunciones no son equivalentes en la sub-2-categoría determinada por las deformaciones de Street.

Otro ejemplo de adjunciones equivalentes en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$, es el de las adjunciones $\mathrm{Mod}_{\mathbf{T}} \dashv \mathrm{Th}_{\mathbf{T}}$ y $\widetilde{\mathrm{Mod}}_{\mathbf{T}} \dashv \widetilde{\mathrm{Th}}_{\mathbf{T}}$ ligadas por los morfismos algebraicos de la proposición 4.1.26. Para demostrar que las adjunciones son equivalentes, hay que comprobar que las composiciones de ambos cuadrados algebraicos son isomorfas a las identidades respectivas, pero esto es inmediato porque las deformaciones inversibles necesarias son, simplemente, las 2-identidades para la adjunción identidad en $\mathrm{Sub}(\mathbf{EM}(\mathbf{T}))^{\mathrm{op}}$. Ambas adjunciones no son, sin embargo, equivalentes en la sub-2-categoría determinada por las deformaciones de Street, lo que muestra que, aún siendo en este caso triviales las 2-células consideradas, su existencia es relevante para formalizar la relación entre ambas adjunciones.

F-morfismos y deformaciones

Lo expuesto en este capítulo tiene como ejemplo y como campo de aplicación lo desarrollado para las álgebras heterogéneas en el capitulo anterior.

Cada signatura algebraica (S, Σ) tiene asociada, canónicamente, una adjunción entre la categoría de (S, Σ)-álgebras y la de $\mathbf{Set}^S$-conjuntos, así como una mónada sobre $\mathbf{Set}^S$. Por lo expuesto en el capítulo anterior, es inmediato que los morfismos de signaturas inducen cuadrados algebraicos entre las adjunciones correspondientes, así como morfismos algebraicos entre las mónadas asociadas. Esto es así también para los derivors o los morfismos de Fujiwara entre las signaturas. En particular, de las propiedades demostradas para los functores asociados a los F-morfismos de signaturas, tanto entre las categorías de términos, como entre las categorías de álgebras, se sigue inmediatamente que los F-morfismos determinan cuadrados algebraicos entre las adjunciones y morfismos algebraicos entre las mónadas asociadas.

Las deformaciones entre F-morfismos de signaturas algebraicas inducen asimismo deformaciones entre cuadrados algebraicos y deformaciones algebraicas entre morfismos algebraicos. Para comprobarlo, es suficiente tener en cuenta que cada deformación induce una transformación natural entre los functores correspondientes para las categorías de álgebras y de términos, que dan lugar a su vez a las 2-células correspondientes en $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$.

Se tienen por tanto 2-functores de inclusión de las diversas categorías de signaturas en las 2-categorías $\mathbf{Ad}_{\mathrm{alg}}$ y $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$. Además, todo lo anterior es igualmente válido si en lugar de las 2-categorías de signaturas se consideran las 2-categorías de teorías.

Los functores de inclusión mencionados no son, obviamente, plenos, Las categorías de signaturas algebraicas discutidas pueden ser consideradas como descripciones sintácticas de morfismos algebraicos entre las mónadas asociadas a las signaturas. La teoría general desarrollada en este capítulo puede ser de utilidad tanto a la hora de demostrar ciertas proposiciones relativas a las álgebras heterogéneas, como de marco para posibles generalizaciones de los conceptos de morfismo entre signaturas o entre presentaciones de teorías.

Espacios de Clausura.

En los párrafos que siguen, mostramos, por último, una aplicación de los resultados anteriores al estudio de los espacios de clausura heterogéneos. Para ello, consideramos los espacios de clausura sobre un conjunto heterogéneo como mónadas sobre las categorías asociadas al conjunto ordenado de las partes de tal conjunto. A pesar de que la teoría general desarrollada se simplifica en gran medida al ser las categorías consideradas las asociadas a ordenes, de este punto de vista se sigue que los espacios de clausura pueden comparase de manera más general que la habitual, de un modo que resulta esencial para dar cuenta de la equivalencia entre algunos de ellos.

Si A es un S-conjunto y C un operador clausura sobre A, entonces C determina una mónada sobre $\mathrm{Sub}(A)$, puesto que C es functor por ser isótona, y la unidad y la multiplicación se definen unívocamente por la extensividad y la idempotencia de C. Su categoría de Eilenberg-Moore es la determinada por el sistema de clausura $\mathcal{C}$ asociado a C, i.e., el conjunto ordenado de los puntos fijos de C, y su categoría de Kleisli consta de las partes del conjunto ordenadas respecto a C, de manera tal que $X \subseteq Y$ exactamente si $X \subseteq \mathrm{C}(Y)$.

Los morfismos entre espacios de clausura heterogéneos son un caso de alg-morfismos entre las mónadas asociadas a tales espacios. Las distintas caracterizaciones de la continuidad de un morfismo se corresponden con las transformaciones naturales transpuestas de los alg-morfismos.

Si C es un operador clausura sobre un S-conjunto A y D un operador clausura sobre un T-conjunto B, un alg-morfismo de $(\mathbf{Sub}(A), \mathrm{C})$ en $(\mathbf{Sub}(B), \mathrm{D})$ es un cuadrado adjunto

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "\mathrm{C}"] \arrow[d, shift right=2, "f_*"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathrm{Sub}(A) \arrow[d, shift right=2, "f_*"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathrm{Sub}(B) \arrow[r, "\mathrm{D}"'] \arrow[u, shift right=2, "f^*"'] & \mathrm{Sub}(B) \arrow[u, shift right=2, "f^*"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{C}"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "\leq"] & \cdot \arrow[d, "f_*"] \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{D}"'] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{C}"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "\leq"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{D}"'] & \cdot \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{C}"] \arrow[dr, phantom, "\leq"] & \cdot \arrow[d, "f_*"] \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{D}"'] \arrow[u, "f^*"] & \cdot
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\mathrm{C}"] \arrow[dr, phantom, "\leq"] & \cdot \\
\cdot \arrow[r, "\mathrm{D}"'] \arrow[u, "f^*"] & \cdot \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

lo que equivale a que $f_* \dashv f^* \colon \mathrm{Sub}(\mathbf{A}) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathbf{B})$ es una adjunción y se cumplen cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

0. Para cada $X \subseteq A$, $f_*(\mathrm{C}(X)) \subseteq \mathrm{D}(f_*(X))$.

1. Para cada $X \subseteq A$, $\mathrm{C}(X) \subseteq f^*\mathrm{D}(f_*(X))$.

2. Para cada $Y \subseteq B$, $f_*(\mathrm{C}((f^*(Y)))) \subseteq \mathrm{D}(Y)$.

3. Para cada $Y \subseteq B$, $\mathrm{C}(f^*(Y)) \subseteq f^*(\mathrm{D}(Y))$.

En la situación descrita, decimos que el par (f_*, f^*) es un alg-morfismo de $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A}), \mathrm{C})$ en $(\mathrm{Sub}(\mathbf{B}, \mathrm{D})$.

A un alg-morfismo tal le corresponde un functor de $\mathbf{EM}(\mathrm{D}) = \mathcal{D}$ en $\mathbf{EM}(\mathrm{C}) = \mathcal{C}$ que conmuta con los functores de olvido G_C y G_D, que, en este caso, son simplemente las inclusiones respectivas de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{Sub}(A)$ y de $\mathcal{D}$ en $\mathbf{Sub}(B)$. La existencia de tal functor equivale a la condición de que, para cada $Y \in \mathcal{D}$, $f^*(Y) \in \mathcal{C}$, puesto que si H es un functor de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{G}_\mathrm{C} \circ H = f^* \circ \mathrm{G}_\mathrm{D}$, H ha de ser, necesariamente, $f^*{\restriction}_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$, la birrestricción de f^* a $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$.

Para las categorías de Kleisli, la existencia de un functor de $\mathbf{Kl}(\mathrm{C})$ en $\mathbf{Kl}(\mathrm{D})$ que conmute con los functores F_C y F_D, equivale a la condición de que, para cada X, $Z \subseteq A$, si $X \subseteq \mathrm{C}(Z)$ entonces $f_*(X) \subseteq \mathrm{D}(f_*(Z))$.

A partir de lo anterior se sigue que los morfismos continuos entre espacios de clausura son un caso de alg-morfismos. Si $(\varphi, f) \colon (S, A, \mathrm{C}) \longrightarrow (T, B, \mathrm{D})$ es un morfismo de espacios de clausura heterogéneos, entonces la adjunción $f[\cdot] \dashv f^{-1}[\cdot]$ determina un alg-morfismo entre las mónadas correspondientes. Por consiguiente, la categoría $\mathbf{HClSp}$ de espacios de clausura heterogéneos es una subcategoría de la sub-2-categoría $\mathbf{Mnd}_\mathrm{alg}$.

No todos los alg-morfismos entre espacios de clausura son, sin embargo, de la forma $(f[\cdot], f^{-1}[\cdot])$. Por ejemplo, para los operadores de consecuencia de Hall y de Bénabou, se tiene, por la proposición 2.12.32, que existen cuadrados adjuntos

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})) \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}"] \arrow[d, shift right, "I"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})) \arrow[d, shift right, "I"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})) \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}"'] \arrow[u, shift right, "H"'] & \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})) \arrow[u, shift right, "H"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})) \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})}"] \arrow[d, shift right, "D"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{B}}(\underline{\Sigma})) \arrow[d, shift right, "D"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})) \arrow[r, "\mathrm{Cg}_{\underline{\mathrm{Ter}}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})}"'] \arrow[u, shift right, "B"'] & \mathrm{Sub}(\mathrm{Eq}_{\mathrm{H}}(\underline{\Sigma})) \arrow[u, shift right, "B"']
\end{tikzcd}
$$

que son, por tanto, alg-morfismos entre los espacios de clausura correspondientes. Las aplicaciones subyacentes de las adjunciones $H \dashv I$ y $D \dashv B$ no pueden definirse a partir de ninguna aplicación entre los conjuntos heterogéneos de las ecuaciones, sino que se definen, necesariamente, entre las partes de ellas.

Puesto que $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$ es una 2-categoría, se tiene, en particular, la noción de deformación entre alg-morfismos de espacios de clausura. Por ser las categorías involucradas retículos completos, sin embargo, existe a lo sumo una deformación entre dos alg-morfismos, lo que determinan un preorden en el conjunto de los alg-morfismos entre dos espacios de clausuras.

Una deformación entre alg-morfismos de espacios de clausura es, simplemente, un cuadrado adjunto

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sub}(A) \arrow[r, "1"] \arrow[d, shift right, "f_*"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathrm{Sub}(A) \arrow[d, shift right, "g_*"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathrm{Sub}(B) \arrow[r, "D"'] \arrow[u, shift right, "f^*"'] & \mathrm{Sub}(B) \arrow[u, shift right, "g^*"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "\geq"] & {} \arrow[d, "g_*"] \\
{} \arrow[r, "D"'] & {}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "\geq"] & {} \\
{} \arrow[r, "D"'] & {} \arrow[u, "g^*"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\geq"] & {} \arrow[d, "g_*"] \\
{} \arrow[r, "D"'] \arrow[u, "f^*"] & {}
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "1"] \arrow[dr, phantom, "\geq"] & {} \\
{} \arrow[r, "D"'] \arrow[u, "f^*"] & {} \arrow[u, "g^*"']
\end{tikzcd}
$$

puesto que las condiciones adicionales de conmutación de las deformaciones se cumplen inmediatamente, por ser las categorías involucradas retículos completos. Por consiguiente, de (f_*, f^*) en (g_*, g^*) existe una deformación, lo que denotamos mediante $(f_*, f^*) \prec (g_*, g^*)$, si se cumplen cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes:

0. Para cada $X \subseteq A$, $g_*(X) \subseteq \mathrm{D}(f^*(X))$.
1. Para cada $X \subseteq A$, $X \subseteq g^*(\mathrm{D}(f_*(X)))$.
2. Para cada $Y \subseteq B$, $g_*(f^*(Y)) \subseteq \mathrm{D}(Y)$.

3. Para cada $Y \subseteq B$, $f^*(Y) \subseteq g^*(\mathrm{D}(Y))$.

La condición 3 es, además, equivalente a que para cada cerrado $Y \subseteq \mathcal{D}$, $f^*(Y) \subseteq g^*(Y)$, que es la condición de que exista una transformación natural de $f^*\restriction_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ en $g^*\restriction_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$.

4.3.70. Proposición. Sean (S, A, C) y (T, B, D) dos espacios de clausura heterogéneos, y (f_*, f^*) y (g_*, g^*) un par de alg-morfismos de $(\mathrm{Sub}(\mathbf{A}), C)$ en $(\mathrm{Sub}(\mathbf{B}), D)$. Entonces (f_*, f^*) y (g_*, g^*) son isomorfos, $(f_*, f^*) \approx (g_*, g^*)$, si y sólo si $f^*\restriction_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ y $g^*\restriction_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ son idénticos.

Demostración. Si (f_*, f^*) y (g_*, g^*) son isomorfos, existen un par de deformaciones inversibles entre ellos y por tanto $f^*\restriction_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ y $g^*\restriction_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ son idénticos. Recíprocamente si $f^*\restriction_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ y $g^*\restriction_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ son idénticos, la transformación natural identidad determina deformaciones inversibles entre (f_*, f^*) y (g_*, g^*). $\square$

En particular, de la proposición anterior y la proposición 2.12.33, se sigue que los espacios de clausura heterogéneos asociados a los operadores de consecuencia de Hall y de Bénabou, son equivalentes en la 2-categoría $\mathbf{Mnd}_{\mathrm{alg}}$.

Bibliografía

[AHS90] J. Adámek, H. Herrlich, and G.E. Strecker. *Abstract and concrete categories*. Wiley-Interscience, 1990.

[Bén67] J. Bénabou. *Introduccion to Bicategories*. Reports of the Midwest Category Seminar, 1967.

[Bén68] J. Bénabou. Structures algebriques dans les categories. *Cahiers de topologie et géometrie différentielle*, 10:1–126, 1968.

[BL70] G. Birkhoff and J. Lipson. Heterogeneous algebras. *J. of Combinatorial Mathematics*, 8:115–133, 1970.

[Bor94a] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra 1, Basic category theory*. Cambridge University Press, 1994.

[Bor94b] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra 2, Categories and structures*. Cambridge University Press, 1994.

[Bor94c] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra 3, Categories of sheaves*. Cambridge University Press, 1994.

[BS81] S. Burris and H. Sankappanavar. *A course in universal algebra*. Springer-Verlag, 1981.

[Büc89] J. Büchi. *Finite automata, their algebras and grammars*. Springer-Verlag, 1989.

[BW85] M. Barr and Ch. Wells. *Toposes, triples and theories*. Springer-Verlag, 1985.

[CF90] J. Climent and L. Fernandino. On the relation between heterogeneous uniform 2-algebraic closure operators and heterogeneous algebras. *Collec. Math.*, 40:93–101, 1990.

[Coh81] P. Cohn. *Universal Algebra*. D. Reidel Publishing Company, 1981.

[CSM94] J. Climent, J. Soliveres, and J. Martinez. On the relationship between Lindenbaum-Tarski's functors and interpretations between propositional logical systems. In *Reunió de lògica matemàtica*, 1994.

[Die66] K. Diener. Order in absolutely free and related algebras. *Coll. Math.*, 14:62–72, 1966.

[Die93] K. Diener. On the predecessor relation in abstract algebras. *Mathematical Logic Quarterly*, 39:492–514, 1993.

[Fre72] P. Freyd. Aspects of topoi. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 7:1–72, 1972.

[Fuj59] T. Fujiwara. On mappings between algebraic systems. *Osaka Math. J.*, 11:153–172, 1959.

[Fuj60] T. Fujiwara. On mappings between algebraic systems, II. *Osaka Math. J.*, 12:253–268, 1960.

[GB84a] J. Goguen and R. Burstall. Introducing institutions. In *Logics of programs*, 1984.

[GB84b] J.A. Goguen and R.M. Burstall. Some fundamental algebraic tools for the semantics of computation. part 1: Comma Categories, Colimits, Signatures and Theories. *Theoretical Computer Science*, 31:175–209, 1984.

[GB84c] J.A. Goguen and R.M. Burstall. Some fundamental algebraic tools for the semantics of computation. part 2: Signed and Abstract Theories. *Theoretical Computer Science*, 31:263–295, 1984.

[GB86] J.A. Goguen and R.M. Burstall. A study in the foundations of programming methodology: Specificatons, institutions, charters and parchments. In *Proceedings of Summer Workshop on Category Theory and Computer Programming*, 1986.

[GM85] J. Goguen and J. Meseguer. Completeness of many-sorted equational logic. *Houston J. Math.*, 11:307–334, 1985.

[Gol84] R. Goldblatt. *Topoi*. Elsevier, 1984.

[Gra74] J. Gray. *Formal Category Theory: Adjointness for 2-categories*. Springer-Verlag, 1974.

[Grä79] G. Grätzer. *Universal algebra*. Springer-Verlag, 1979.

[Hey30] A. Heyting. Die formalen regeln der intuitionistischen logik. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse*, pages 42–56, 1930.

[Hey56] A. Heyting. *Intuitionism: an introduction.* North-Holland, 1956.

[Hig63] P. Higgins. Algebras with a scheme of operators. *Math. Nachrichten*, 27:115–132, 1963.

[KS74] G. Kelly and R. Street. Review of the elements of 2-categories. In *Category Seminar. Sydney 1972/73.* Springer-Verlag, 1974.

[Law63] F. Lawvere. *Functorial semantics of algebraic theories.* PhD thesis, Columbia University, 1963.

[Mac71] S. MacLane. *Categories for the working mathematician.* Springer-Verlag, 1971.

[Man67] E. Manes. *A triple miscellany: Some aspects of the theory of algebras over a triple.* PhD thesis, Wesleyan University, 1967.

[Man76] E. Manes. *Algebraic Theories.* Springer-Verlag, 1976.

[Mat72] G. Mathiessen. Heterogene algebren. Universität Bremen, unveröffentlichte Ausarbeitung eines Seminarvortrages, 1972.

[Mat76] G. Mathiessen. *Theorie der heterogenen Algebren.* PhD thesis, Universität Bremen, 1976.

[Mat78a] G. Mathiessen. A heterogeneous algebraic approach to some problems in automata theory, many valued logic and other topics. In *Contributions to general algebra*, 1978.

[Mat78b] G. Mathiessen. Regular and strongly finitary structures over strongly algebroidal categories. *Can. J. Math.*, 30:250–261, 1978.

[Mes89] J. Meseguer. General logics. In *Logic colloquium*, 1989.

[MT44] J. McKinsey. and A. Tarski. *The algebra of topology.* Ann. Math. 45, 1944.

[Pal71] P. H. Palmquist. The double category of adjoint squares. In *Reports of the Midwest Category Seminar V.* Springer-Verlag, 1971.

[Sio65] F. Sioson. Decomposition of generalized algebras I, II. *Proc. Japan. Ac.*, 41:923–932, 1965.

[Sio66] F. Sioson. On generalized algebras. *Portugaliae Mathematica*, 25:67–90, 1966.

[Str72] R. Street. The formal theory of monads. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2:149–168, 1972.

[Str80] R. Street. Fibrations in bicategories. *Cahiers de topologie et géometrie différentielle*, 21:111–160, 1980.

[TBG91] A. Tarlecki, R. Burstall, and J. Goguen. Some fundamental algebraic tools for the semantics of computation. part 3: Indexed Categories. *Theoretical Computer Science*, 91:239–264, 1991.

Índice de Términos