Rapport bibliographique : Fluctuations électroniques et mesure de k_B

Melvin Creff, Félix Faisant

Il s'agit d'étudier les bruits électroniques, qui sont des fluctuations de grandeurs électriques de causes environnementales ou fondamentales. Les fluctuations fondamentales nous intéressent ici pour la détermination de la constante de Boltzmann.

1 Bruit thermique et bruit de grenaille

Ces deux types de bruits ont la même cause fondamentale : la quantification de la charge électrique.

Le **bruit de grenaille**, ou *shot noise*, est la conséquence de la nature discrète du courant électrique. Si l'on modélise le courant par $I(t) = e\sum_n \delta(t-t_n)$ avec un intervalle entre deux électrons suivant une distribution de Poisson $\mathbb{P}(\Delta t) \propto \mathrm{e}^{-\Delta t/\tau}$, on montre [Blanter and Büttiker, 1999, eq.11] que la densité spectrale du courant [1] I est

$$S_I(\omega) = 2e\langle I\rangle$$

Le nombre d'électrons passant par unité de temps est décrit par une distribution de Poisson. Lorsque le courant est faible, les fluctuations de courant ($\propto \sqrt{\langle I\rangle}$) deviennent importantes face au courant moyen $\langle I\rangle$: c'est là que le bruit est le plus distinguable. Plus généralement, on a $S_I(\omega) = F \times 2e\langle I\rangle$, avec F facteur de Fano [2].

Puisque qu'un courant doit être établi, le bruit de grenaille concerne les conducteurs *hors d'équilibre*. Notons que ce résultat n'est valable qu'à température nulle. Lorsque $T \neq 0$, il faut prendre en compte les effets de diffusion thermique [Blanter and Büttiker, 1999, p10].

Lorsque que, au contraire, le dipôle est *à l'équilibre* (donc $\langle I\rangle = 0$) et à $T \neq 0$, on observe le **bruit de Johnson–Nyquist**, ou bruit thermique. Si l'on modélise [Wikipedia, a] le mouvement des N électrons dans une section de conducteur de longueur L comme un mouvement brownien (électrons thermalisés), leur libre parcours moyen quadratique est

$$\langle \ell^2\rangle = 2\alpha\langle\tau\rangle$$

1. Par le théorème de Wiener-Khintchine, la densité spectrale de puissance d'une variable X peut être définie comme la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation [Wikipedia, b] :

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tau\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\langle X(t)X(t+\tau)\rangle$$

S_V s'exprime en V^2/Hz et S_I en A^2/Hz

2. Par exemple, pour un supra-conducteur, on a $F = 2$, car les porteurs de charge élémentaire sont alors des paires de Copper.

avec la constante de diffusion $\alpha = \mu k_\mathrm{B}T/e$ (loi de Nernst-Einstein), μ mobilité des électrons, et τ temps entre collisions. On montre que, comme la diffusion est un processus de Poisson,

$$S_I(\omega) = \underbrace{2}_{\omega>0} \overbrace{\frac{N}{\langle\tau\rangle}}^{\text{taux moyen d'évènement}} \times \left\langle \left(\underbrace{e\frac{\ell}{L}}_{\text{charge par évènement}} \right)^2 \right\rangle = 2\frac{N}{\langle\tau\rangle}\frac{e^2}{L^2}2\langle\tau\rangle\alpha = 4k_\mathrm{B}T \underbrace{\mu e\frac{N}{L^2}}_{=R^{-1}\text{ (loi d'Ohm)}}$$

Ainsi, la densité spectrale de puissance du bruit thermique est

$$S_I(\omega) = 4k_\mathrm{B}T/R \iff S_V(\omega) = 4k_\mathrm{B}TR$$

pour un dipôle purement résistif. Nyquist proposa [Nyquist, 1928] une démonstration plus élégante, basée sur la seconde loi de la thermodynamique et le théorème d'équirépartition. De façon plus générale, le bruit thermique est la conséquence d'un *théorème de fluctuation-dissipation*.

On remarque que ces deux bruits (que l'on peut unifier théoriquement, et qui sont en pratique indistinguables à I et T fixés) ont un spectre plat : ce sont des *bruits blancs*.

Néanmoins, comme le fait remarquer Nyquist, ce spectre ne peut être valable à haute fréquence, la valeur efficace de la tension serait infinie. De façon similaire au cas du corps noir, on a

$$S_V(f) = 4k_\mathrm{B}T\eta(f) \quad \text{avec} \quad \eta(f) = \frac{hf/k_\mathrm{B}T}{\mathrm{e}^{hf/k_\mathrm{B}T} - 1}$$

À température ambiante, la fréquence caractéristique $f_* = k_\mathrm{B}T/h$ à partir de laquelle le spectre décroît se situe dans les THz, on peut donc ignorer ces effets.

Il existe d'autres types de bruits électroniques, dont le *bruit 1/f*, ou *flicker noise*. Ce terme regroupe une variété de bruits dont la dépendance fréquentielle est f^{-1}. Les sources de ce bruit sont (sauf cas spécifiques) mal connues, et sont un sujet de recherche actif [Kogan, 2010, p205].

2 Mesure de k_B

Nous mesurerons k_B en utilisant le bruit thermique $S_V(\omega) = 4k_\mathrm{B}TR$ aux bornes de résistances. Il existe de nombreuses autres méthodes de détermination de k_B.

L'objectif actuel derrière la mesure de la constante fondamentale k_B est la redéfinition du Kelvin. Cette redéfinition devrait avoir lieu en novembre 2018 à l'occasion de la 26ème Conférence Générale des Poids et Mesures. Après révision du Système International, k_B sera fixée.

Actuellement, k_B est déterminée par la mesure de $\mathcal{N}_A$, le nombre d'Avogadro, et R, la constante des gaz parfaits, par la définition :

$$k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A}$$

Les premières mesures de $\mathcal{N}_A$ furent obtenues par coulométrie (électrolyse d'argent métallique, $\mathcal{N}_A = F/e$ avec F constante de Faraday) [CODATA, 1998, p408].

La nouvelle définition de $\mathcal{N}_A$ se base sur les résultats de [Avogadro Project, 2011] : une boule extrêmement ronde d'un monocristal de silicium de 1 kg est utilisée, et $\mathcal{N}_A$ est alors mesurée par cristallographie aux rayons X. Cette mesure va de pair avec la nouvelle définition du kilogramme à l'aide d'une balance de Kibble.

R est quand à elle déterminée par thermométrie acoustique dans un gaz. La valeur recommandée de 1988 est déterminée par mesure des fréquences de résonances acoustiques d'un gaz d'argon dans un volume sphérique [CODATA, 1998, p420].

Une méthode moderne [Daussy, 2006] de détermination de k_B permet de se passer de $\mathcal{N}_A$. Avec la largeur Doppler [3] $2\Delta\nu_D$ d'une bande d'absorption à ν_0 dans un gaz à l'équilibre thermodynamique, on a :

$$\frac{\Delta\nu_D}{\nu_0} = \sqrt{\frac{2k_BT}{mc^2}}$$

On peut supprimer la dépendance en $\mathcal{N}_A$ (provenant de m) en réécrivant :

$$\frac{\Delta\nu_D}{\nu_0} = \sqrt{\frac{2(k_B/h)T}{(m/h)c^2}}$$

En effet, mc^2/h est homogène à une fréquence peut être mesurée directement par interférométrie atomique.

Références

Avogadro Project. An accurate determination of the avogadro constant by counting the atoms in a silicium 28 crystal. *Phys. Rev. Lett. 106*, 2011. URL https://arxiv.org/pdf/1010.2317.pdf.

Blanter and Büttiker. Shot noise in mesoscopic conductors. *Physics Reports 336*, 1999. doi : 10.1016/S0370-1573(99)00123-4.

CODATA. Codata recommended values of the fundamental physical constants : 1998. *NIST*, 1998. URL https://physics.nist.gov/cuu/Archive/1998RMP.pdf.

Christophe Daussy. La constante de boltzmann mesurée par spectroscopie laser. *Images de la physique*, 2006. URL http://www.cnrs.fr/publications/imagesdelaphysique/couv-PDF/IdP2006/13_Constante_de_Boltmann.pdf.

Kogan. *Electronic Noise and Fluctuations in Solids*. CUP, 2010. ISBN 9780511551666. URL http://ebooks.cambridge.org/ref/id/CBO9780511551666.

H. Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Physical Review 37*, 1928.

Wikipedia. Bruit thermique, a. URL https://fr.wikipedia.org/wiki/Bruit_thermique.

Wikipedia. Spectral density, b. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_density#Power_spectral_density.

3. élargissement du à l'effet Doppler provenant de l'agitation thermique des particules du gaz, et mesurée par spectroscopie laser