**Prof. Dr. Sergio Pilling (IPD/ Física e Astronomia)**

UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA
São José dos Campos - SP


## IV –Interpolação Numérica

***Objetivos: O objetivo desta aula é apresentar a interpolação polinomial como forma de se obter uma aproximação para uma função f(x) que descreve um conjunto de dados. Veremos 3 metodologias para encontrar os polinômios. Inicialmente, utilizaremos o método de eliminação de Gauss (visto no capítulo III) para resolver o sistema de equações desejado obtido a partir da matriz de Vandermonde.***
***No final da aula veremos duas outras metodologias propostas para obter uma obter uma aproximação polinomial para uma função f(x): o método de Lagrange e o método de Newton.***

## 1. Introdução

Consideremos a tabela abaixo contendo uma lista de valores pra o calor especifico de um dado material em função de sua temperatura:

| temperatura (ºC) | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| calor específico | 0.99907 | 0.99852 | 0.99826 | 0.99818 | 0.99828 | 0.99849 | 0.99878 |

Suponhamos que se queira calcular:

*i*) o calor específico da água a 32.5ºC;

*ii*) a temperatura para a qual o calor específico é 0.99837.

A interpolação nos ajuda a resolver este tipo de problema.

Interpolar uma função f(x) consiste em aproximar essa função por uma outra função g(x), escolhida entre uma classe de funções definida *a priori* e que satisfaça algumas propriedades. A função g(x) é então usada em substituição à função f(x).

A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

*a*) quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado (como é o caso do exemplo anterior);

*b*) quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas.

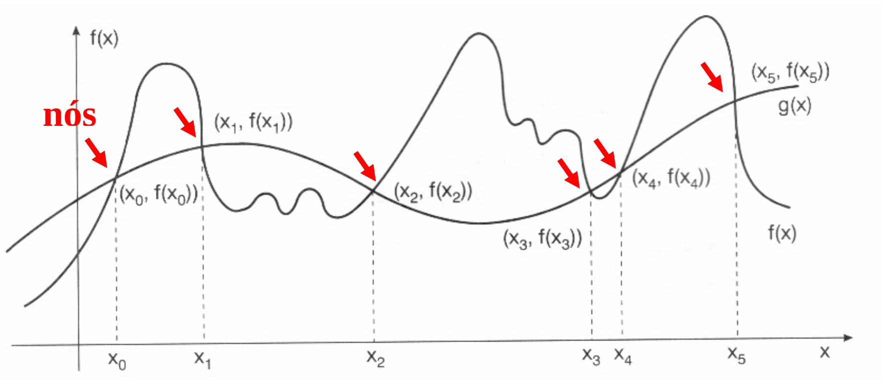
## 2. O conceito de interpolação numérica

Consideremos (n + 1) pontos distintos: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, chamados *nós da interpolação*, e os valores de f(x) nesses pontos: $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

A forma de interpolação de f(x) que veremos a seguir consiste em se obter uma determinada função g(x) tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ g(x_2) = f(x_2) \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

Graficamente, para n=5 temos (6 pontos), por exemplo:



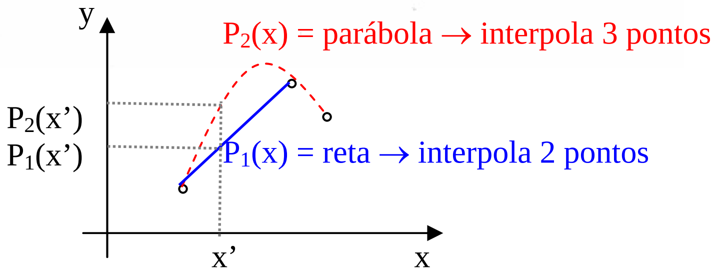

**Obs: Nos nós da interpolação as funções f(x) e g(x) assumem os mesmos valores!**

Durante essa aula consideraremos que g(x) pertence a classe das funções polinomiais embora existam outras formas de interpolação como utilizando funções trigonométricas, expansão por series, etc.

## 3. A interpolação polinomial

Dados os pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, portanto (n+1) pontos, queremos aproximar f(x) por um polinômio $p_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que:

$$f(x_k) = p_n(x_k) \qquad k = 0,1,2,\ldots, n$$



Surgem aqui as perguntas: existe sempre um polinômio $p_n(x)$ que satisfaça estas condições? Caso exista, ele é único?

Representaremos $p_n(x)$ por:

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

Portanto, obter $p_n(x)$ significa obter os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Da condição $p_n(x_k) = f(x_k)$, $\forall$ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, montamos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

com $n + 1$ equações e $n + 1$ variáveis: $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Na notação matricial temos **V** × **a** = **f**, onde

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

A matriz V é uma **matriz de Vandermonde** e, portanto desde que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ sejam pontos distintos temos **det (V)=0**. Portanto, o sistema acima admite solução única. A matriz coluna a é a matriz das incógnitas e a matriz coluna f é a das constantes $f(x_i)=y_i$

Demonstramos, assim, o seguinte teorema:

**TEOREMA 1**

Existe um único polinômio $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que: $p_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ desde que $x_k \neq x_j$, $j \neq k$.

Conforme acabamos de ver, o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é único. No entanto, existem várias formas para se obter tal polinômio. Uma das formas é a resolução do sistema linear obtido anteriormente. Estudaremos ainda as formas de Lagrange e de Newton.

Teoricamente as três formas conduzem ao mesmo polinômio. A escolha entre elas depende de condições como estabilidade do sistema linear, tempo computacional etc.

## 3.1. Interpolação linear

Sejam dois pares ordenados $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$, com $x_0 \neq x_1$, de uma função $y = f(x)$. Para obtermos uma aproximação de $f(x')$, $x' \in (x_0, x_1)$ faz-se a seguinte aproximação:

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

x'

onde $P_1(x)$ é um polinônimo interpolador de 1ª ordem, (grau 1). Impondo que o polinômio interpolador passe pelos dois pares ordenados, temos o seguinte sistema de equações lineares de 2ª ordem:

$$\begin{matrix} P_1(x_0) = y_0 \\ P_1(x_1) = y_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{cases}$$

ou reescrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Transformando o sistema linear acima em um sistema triangular equivalente, temos:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc:c} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{cases} a_0 + x_0 a_1 = y_0 \\ (x_1 - x_0)\, a_1 = y_1 - y_0 \end{cases}$$

Cuja solução é dada por:

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad e \quad a_0 = y_0 - a_1 x_0$$

Logo o polinômio interpolador pode ser escrito da seguinte forma:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x = (y_0 - a_1 x_0) + a_1 x = y_0 + a_1 (x - x_0)$$

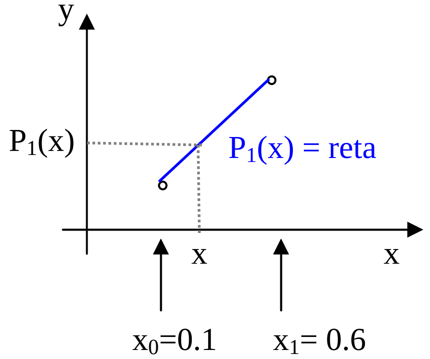
ou de forma mais apropriada:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \qquad (4.1)$$

Como o determinante da matriz do sistema linear acima é igual a $x_1 - x_0 \neq 0$, então o sistema admite uma única solução, isto é, por dois pontos passa um único polinômio interpolador de 1ª ordem, ou grau 1.

## Exemplo 1

Calcular $P_1(0.2)$ e $P_1(0.3)$ a partir dos pontos abaixo:




| $i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $x_i$ | 0.1 | 0.6 |
| $y_i$ | 1.221 | 3.320 |

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Nesse caso a formula geral será:

$$P_1(x) = 1.221 + \frac{3.320 - 1.221}{0.6 - 0.1}(x - 0.1) = 1.221 + 4.198\,x$$

Então para os pontos 0.2 e 0.3 teremos as os valores do polinômio abaixo:

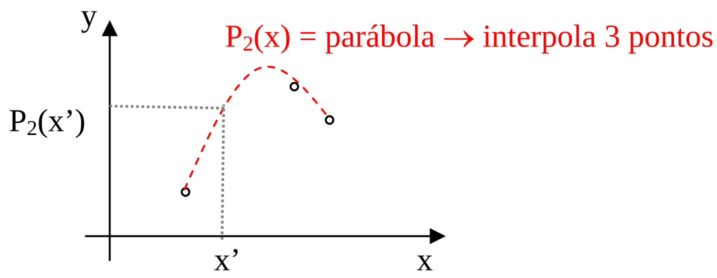
$$P_1(0.2) = 1.221 + \frac{3.320 - 1.221}{0.6 - 0.1}(0.2 - 0.1) \rightarrow P_1(0.2) = 1.641$$

$$P_1(0.3) = 1.221 + \frac{3.320 - 1.221}{0.6 - 0.1}(0.3 - 0.1) \rightarrow P_1(0.3) = 2.061$$

## 3.2. Interpolação quadrática

Sejam três pares ordenados $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ e $(x_2, y_2)$, com $x_i$ distintos, de uma função $y = f(x)$. Para obtermos uma aproximação de $f(x')$, $x' \in (x_0, x_2)$ faz-se a seguinte aproximação:

$$f(x) \approx P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$



onde $P_2(x)$ é um polinômio interpolador de 2ª ordem, ou grau 2. Impondo que o polinômio interpolador passe pelos três pares ordenados, temos o seguinte sistema de equações lineares de 3ª ordem:

$$\begin{array}{l} P_2(x_0) = y_0 \\ P_2(x_1) = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \end{array} \rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

ou reescrevendo na forma matricial temos:

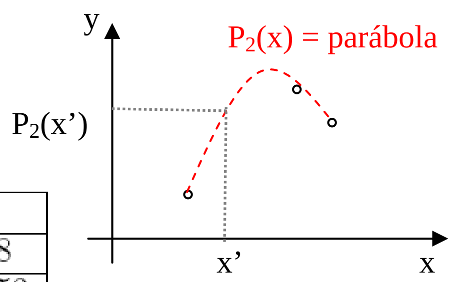
$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

O sistema de equações lineares admite uma única solução, pois o $Det(X) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0) \neq 0$.Desta forma, pelos três pares ordenados passa um único polinômio interpolador de 2ª grau. Este fato pode ser generalizado, dizendo-se que por $n+1$ pontos passa um único polinômio de grau $n$.

Obs. Para encontrarmos os coeficientes $a_i$ temos que resolver esse sistema de equações. Podemos por exemplo utilizar o método direto de eliminação de Gauss (triangularizar a matriz sanduíche) ou adotar métodos iterativos para resolver esse sistema de equações como, por exemplo, os métodos de Gauss-Jacobi e o de Gauss-Seidel.

## Exemplo 2

Determinar $P_2(0.2)$ usando os dados da tabela abaixo:




| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0.1 | 0.6 | 0.8 |
| $y_i$ | 1.221 | 3.320 | 4.953 |

Os coeficientes do polinômio interpolador são determinados pela solução do sistema linear

$P_2(x_i)=f(x_i)=y_i$

$$\begin{array}{l} a_0 \times 1 + a_1 \times 0.1 + a_2 \times 0.1^2 = 1.221 \\ a_0 \times 1 + a_1 \times 0.6 + a_2 \times 0.6^2 = 3.320 \\ a_0 \times 1 + a_1 \times 0.8 + a_2 \times 0.8^2 = 4.953 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.1^2 \\ 1 & 0.6 & 0.6^2 \\ 1 & 0.8 & 0.8^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.221 \\ 3.320 \\ 4.953 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema acima pelo método de Gauss temos o seguinte sistema triangular inferior:

Para a primeira etapa de eliminação temos $m_{21}= 1$ e $m_{31}= 1$, então:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0.1 & 0.01 & 1.221 \\ 0 & 0.5 & 0.35 & 2.099 \\ 0 & 0.7 & 0.63 & 3.733 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Trocando } L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0.1 & 0.01 & 1.221 \\ 0 & 0.7 & 0.63 & 3.733 \\ 0 & 0.5 & 0.35 & 2.099 \end{array}\right)$$

Para a segunda etapa de eliminação temos $m_{32}$=0.5/0.7 = 0.714, então:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0.1 & 0.01 & 1.221 \\ 0 & 0.7 & 0.63 & 3.733 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.567 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Reescrevendo o sistema}]{} \left\{\begin{array}{rr} 1\,a_0 + 0.1\,a_1 + 0.01\,a_2 & = 1.221 \\ 0.7\,a_1 + 0.63\,a_2 & = 3.733 \\ -0.1\,a_2 & = 0.567 \end{array}\right.$$

Resolvendo o sistema de baixo para cima temos:
$a_2$ = 5.667; $a_1$= 0.231 $a_0$=1.141

**Dessa forma o polinômio $P_2$(x) terá a seguinte forma:**

$$\boxed{P_2(x) = 1.141 + 0.231x + 5.667x^2}$$

Calculando $P_2$(0.2) encontramos:

$$P_2(0.2) = 1.141 + 0.231(0.2) + 5.667(0.2)^2 = 1.414$$

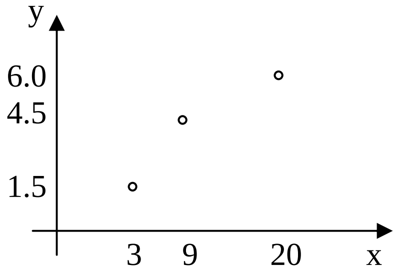
---

Obs. Encontrar um polinômio interpolador a partir da resolução de um sistema de equações para ordens maiores do que a estudada acima pode ser muito trabalhoso. Iremos aprender a seguir, duas metodologias (de Lagrange e de Newton) para encontrarmos os polinômios interpoladores de qualquer ordem sem termos que resolver sistemas de equações.

## Exercício 1

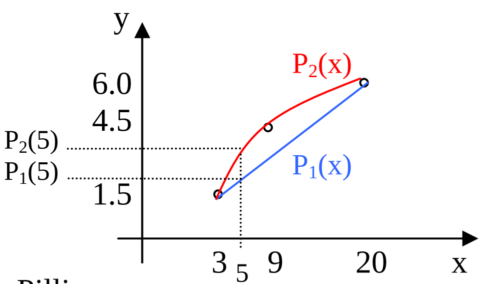
A) Encontre o polinômio interpolador de ordem 2 (Parábola) que ajusta os pontos abaixo utilizando o método de eliminação de Gauss para triangularizar o sistema de equações. **Dica: Faça $P_2(x_i)=f(x_i)=y_i$ em cada ponto *i* e depois triangularize a matriz sanduíche do sistema para achar os coeficientes $a_0$, $a_1$ e $a_2$ do polinômio.**

| *i* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | **3** | **9** | **20** |
| $F(xi)=y_i$ | **1.5** | **4.5** | **6.0** |




**B)** Calcule o valor de $P_2$(5).
**C)** Encontre o polinômio interpolador de ordem 1 (reta) que ajusta os 1º e 3º pares de pontos da tabela do item A. **Dica: Faça $P_1(x_i)=f(x_i)=y_i$ em cada ponto *i* e depois triangularize a matriz sanduíche do sistema para achar os coeficientes $a_0$ e $a_1$ do polinômio.**
**D)** Calcule o valor de $P_1$(5) e verifique se este valor é maior ou menor do que $P_2$(5) obtido no item B.

Respostas:
A) $P_2(x)=-0{,}5778+ 0{,}7566x -0{,}0214x^2$; B) $P_2(5)=2.672$;
C) $P_1(x)=0.7059+0.2647x$; D) $P_1(5)=2.0294 < P_2(5)$



## Exercício 2

Encontre o $P_2(x)$ que ajusta os pontos abaixo. **Dica: Faça $P_2(x_i)=f(x_i)=y_i$ em cada ponto *i* e depois triangularize a matriz sanduíche do sistema para achar os coeficientes $a_0$, $a_1$ e $a_2$ do polinômio.**

| *i* | *0* | *1* | *2* |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | **1** | **2** | **5** |
| $F(xi)=y_i$ | **12** | **4** | **9** |

## Exercício 3

Encontre o $P_3(x)$ que ajusta os pontos abaixo. **Dica: Faça $P_3(x_i)=f(x_i)=y_i$ em cada ponto *i* e depois triangularize a matriz sanduíche do sistema para achar os coeficientes $a_0$, $a_1$ , $a_2$ e $a_3$ do polinômio.**

| *i* | *0* | *1* | *2* | *3* |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | **1** | **2** | **4** | **5** |
| $F(xi)=y_i$ | **12** | **4** | **8** | **9** |

## 4. Forma de Lagrange

Sejam $x_0$, $x_1$,..., $x_n$, (n+1) pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, i = 0, ..., n.

Seja $p_n(x)$ o polinômio de grau $\leqslant$ n que interpola f em $x_0,..., x_n$. Podemos representar $p_n(x)$ na forma $p_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + ... + y_nL_n(x)$, onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n. Para cada i, queremos que a condição $p_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita, ou seja:

$$p_n(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + ... + y_nL_n(x_i) = y_i.$$

De maneira compacta, podemos escrever a forma de Lagrange para o polinomio interpolador como:

$$\boxed{p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x)}$$

onde **$L_k(x)$** são os **fatores de Lagrange** e são dados por:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{J=0 \\ J\neq k}}^{n} (x-x_j) \Big/ \prod_{\substack{J=0 \\ J\neq k}}^{n} (x_k-x_j) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ ...\ (x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ ...\ (x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ ...\ (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ ...\ (x_k-x_n)}$$

## Exercício 4

Calcule o valor dos somatórios e produtórios abaixo:

a) $\sum_{J=0}^{4} (2-j)$ b) $\sum_{\substack{J=0 \\ J\neq 2}}^{4} (2-j)$ c) $\prod_{J=0}^{4} (2-j)$ d) $\prod_{\substack{J=0 \\ J\neq 2}}^{4} (2-j)$

## Exemplo 3

Considere a tabela de dados ao lado:

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| x | −1 | 0 | 2 |
| y = f(x) | 4 | 1 | −1 |

Pela forma de Lagrange, temos que:

$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$, onde:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\ (x-x_2)}{(x_0-x_1)\ (x_0-x_2)} = \frac{(x-0)\ (x-2)}{(-1-0)\ (-1-2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\ (x-x_2)}{(x_1-x_0)\ (x_1-x_2)} = \frac{(x+1)\ (x-2)}{(0+1)\ (0-2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\ (x-x_1)}{(x_2-x_0)\ (x_2-x_1)} = \frac{(x+1)\ (x-0)}{(2+1)\ (2-0)} = \frac{x^2 + x}{6}.$$

**Macete:** Escrevemos primeiro os termos do produtório de j=0→n e depois desconsideramos os termos j=k

n=2, k=0 → $\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

n=2, k=1 → $\dfrac{(x-x_0)\ (x-x_2)}{(x_1-x_0)\ (x_1-x_2)}$

n=2, k=2 → $\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$

Assim, na forma de Lagrange,

$$p_2(x) = \underbrace{4}_{y_0 = f(x_0)}\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) + \underbrace{1}_{y_1 = f(x_1)}\left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + \underbrace{(-1)}_{y_2 = f(x_2)}\left(\frac{x^2 + x}{6}\right).$$

Agrupando os termos semelhantes, obtemos que $p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$,

## Exercício 5

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| **x** | **1.1** | **2.2** | **3.5** |
| **f(x)** | **10** | **29** | **90** |

Considere a tabela de dados experimentais ao lado:
Escreva o polinômio interpolador de Lagrange de ordem 2 para esse conjunto de pontos. Calcule $P_2(1.5)$ e $P_2(2.5)$.

**Dica:** $P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$; $\quad L_k(x) = \prod_{\substack{J=0 \\ J\neq k}}^{2} (x-x_j) \Big/ \prod_{\substack{J=0 \\ J\neq k}}^{2} (x_k-x_j)$

## Exercício 6

Considerando um função do tipo f(x)= 5x + ln(x+1), escreva o polinômio interpolador de Lagrange de ordem 3 passando que passa pelos pontos x=1, 2, 3 e 4. Calcule $P_3(1.1)$ e $P_3(1.2)$.

**Dica: f(1)=5.69; f(2);= 11.09; f(3)= 16.38; f(4)= 21.60**

$$P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x);$$

**onde** $L_k(x) = \prod_{\substack{J=0 \\ J\neq k}}^{3} (x-x_j) \Big/ \prod_{\substack{J=0 \\ J\neq k}}^{3} (x_k-x_j)$

## ALGORITMO

```
Algoritmo do Polinômio de Lagrange
Dados iniciais: m, x, y, z (nr de pontos, abscissas, ordenadas, valor a interpolar)
r=0;
Para i=1 até m Faça
    c=1;
    d=1;
    Para j=1 até m Faça
        Se i~=j Então Faça
            c=c*(z-x(j));
            d=d*(x(i)-x(j));
        Fim Se
    Fim Para
    r=r+y(i)*c/d;
Fim Para
Mostrar (O valor de z interpolado é r);
```

## 5. Forma de Newton

A forma de Newton para o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \dots, x_n$, $(n + 1)$ pontos distintos é a seguinte:

$$p_n(x)= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots\dots + f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

onde o termo **$f[x_i]$** é conhecido como **OPERADOR DIFERENCAS DIVIDADAS**. Este operador é definido a a partir das operações listadas abaixo para certa função $f(x)$ tabelada em n+1 pontos distintos ($x_0$, $x_1$, $x_2$, ...$x_n$):

$$f[x_i] \equiv f(x_i) \qquad \text{e} \qquad f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad \text{(Ordem n)}$$

$$f[x_0] = f(x_0) \qquad \text{(Ordem Zero)}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \text{(Ordem 1)}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \qquad \text{(Ordem 2)}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \qquad \text{(Ordem 3)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \qquad \text{(Ordem n)}$$

Dizemos que $f[x_0, x_1, ..., x_k]$ é a diferença dividida de ordem k da função f(x) sobre os k + 1 pontos: $x_0, x_1, ..., x_k$.

Dada uma função f(x) e conhecidos os valores que f(x) assume nos pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, podemos construir a tabela:

| x | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 | Ordem 3 | ... | Ordem n |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f[x_0]$ | | | | | |
| | | $f[x_0, x_1]$ | | | | |
| $x_1$ | $f[x_1]$ | | $f[x_0, x_1, x_2]$ | | | |
| | | $f[x_1, x_2]$ | | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ | | |
| $x_2$ | $f[x_2]$ | | $f[x_1, x_2, x_3]$ | | . | |
| | | $f[x_2, x_3]$ | | $f[x_1, x_2, x_3, x_4]$ | . | |
| $x_3$ | $f[x_3]$ | | $f[x_2, x_3, x_4]$ | . | | $f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$ |
| | | $f[x_3, x_4]$ | . | . | . | |
| $x_4$ | $f[x_4]$ | . | . | $f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$ | | |
| . | . | . | $f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$ | | | |
| . | . | $f[x_{n-1}, x_n]$ | | | | |
| $x_n$ | $f[x_n]$ | | | | | |

## Exemplo 4

Usando a forma de Newton, polinômio $P_2(x)$ que interpola f(x) nos pontos dados ao lado é:

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| x | –1 | 0 | 2 |
| f(x) | 4 | 1 | –1 |

$$p_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2].$$

Calculando as diferenças divididas pela formula geral

$$\boxed{f[x_i] \equiv f(x_i) \qquad \text{e} \qquad f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad \text{(Ordem n)}}$$

construímos a tabela das diferenças divididas abaixo

| x | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 |
|---|---|---|---|
| −1 | $f[x_0]$ 4 | | |
| | | $f[x_0, x_1]$ −3 | |
| | | | $f[x_0, x_1, x_2]$ $\frac{2}{3}$ |
| 0 | $f[x_1]$ 1 | | |
| | | $f[x_1, x_2]$ −1 | |
| 2 | $f[x_2]$ −1 | | |

e posteriormente reescrevemos facilmente o polinômio interpolador em sua forma final:

$$p_2(x) = 4 + (x+1)(-3) + (x+1)(x-0)\,\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad p_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

**Exemplo 5**

Seja o conjunto de pontos ao lado:

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| x | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f(x) | 1 | 1 | 0 | −1 | −2 |

Utilizando a definição das diferenças divididas escrevemos a tabela das diferenças divididas:

$f[x_0]=f(x_0) = 1$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1-0}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

.
.
.

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-1+1}{2-0} = \boxed{0}$$

.
.
.

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0 + 1/2}{2+1} = \frac{1}{6}$$

| x | Ordem 0 | Ordem 1 | Ordem 2 | Ordem 3 | Ordem 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| −1 | 1 | | | | |
| | | 0 | | | |
| | | | $-\frac{1}{2}$ | | |
| 0 | 1 | | | | |
| | | −1 | | $\frac{1}{6}$ | |
| 1 | 0 | | $\boxed{0}$ | | $-\frac{1}{24}$ |
| | | −1 | | 0 | |
| 2 | −1 | | 0 | | |
| | | −1 | | | |
| 3 | −2 | | | | |

Com a tabela das diferenças divididas encontramos facilmente qualquer polinômio interpolador $P_n(x)$ onde $n \leq 4$ que ajusta os pontos do exercício.

## ALGORITMO

```
Algoritmo do Polinômio de Newton
Dados iniciais: m, x, y, z (nr de pontos, abscissas, ordenadas, valor a interpolar)
r=0;
Para i=1 até m Faça
   dely(i)=y(i);
Fim Para

Para k=1 até m-1 Faça
   Para i=m até k+1 Passo -1 Faça
       dely(i)=(dely(i)-dely(i-1))/(x(i)-x(i-k));
   Fim Para
Fim Para

r=dely(m);

Para i=m-1 Até 1 Passo -1 Faça
   r=r*(z-x(i))+dely(i);
Fim Para
Mostrar (O valor de z interpolado é r);
```

## Exercício 7

Considere a tabela de dados experimentais ao lado:
Escreva o polinômio interpolador de Newton de ordem 2 para esse conjunto de pontos. Calcule $P_2(1.5)$ e $P_2(2.5)$.

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| **x** | **1.1** | **2.2** | **3.5** |
| **f(x)** | **10** | **29** | **90** |

**Dica:** $P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0,x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0,x_1,x_2]$

**onde** $f[x_0] = f(x_0)$;

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

## Exercício 8

Considerando uma função do tipo $f(x)=5x + \ln(x+1)$, escreva o polinômio interpolador de Newton de ordem 3 passando que passa pelos pontos x=1, 2, 3 e 4. Calcule $P_3(1.1)$ e $P_3(1.2)$.

**Dica:** **f(1)=5.69; f(2);= 11.09; f(3)= 16.38; f(4)= 21.60**

$P_3(x) = f[x_0] + (x - x_0)\, f[x_0,x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0,x_1,x_2] +$
$\quad + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\, f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

**onde** $f[x_0] = f(x_0)$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3-x_1} - \dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}}{x_3-x_0}$$

## 6. Estudo do Erro na interpolação

Derivada de função no ponto $\xi_x \in (x_0, x_n)$ de ordem n+1

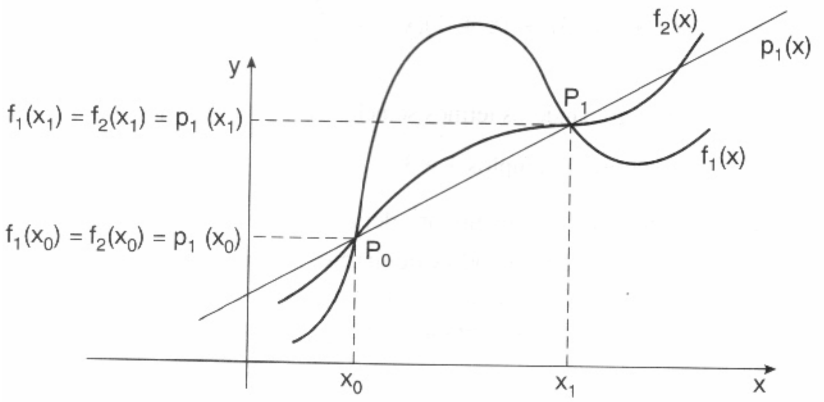
Ao se aproximar uma função f(x) por um polinômio interpolador de grau n, comete-se um erro $E_n(x)$ tal que seu valor estimado é:

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - p_n(x)} = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

O exemplo abaixo ilustra este fato no caso da interpolação linear:

### Exemplo 6

Consideremos duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ que se encontram nos nós $P_0$ e $P_1$.




Nesse caso é possível encontrar um mesmo polinômio interpolador $p_1(x)$ – uma reta – para ajustar ambas as funções.

Contudo, o erro $E_1^1(x) = f_1(x) - p_1(x)$ é maior que $E_1^2(x) = f_2(x) - p_1(x)$, $\forall\, x \in (x_0, x_1)$.

Observamos ainda que o erro, neste caso, depende da concavidade das curvas, ou seja, de $f_1''(x)$ e $f_2''(x)$.

## Exemplo 7

Consideremos o problema de se obter ln(3.7) por interpolação linear, onde ln(x) está tabelado ao lado:

ln(3.7) ?

| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| ln(x) | 0 | 0.6931 | 1.0986 | 1.3863 |

Como $x = 3.7 \in (3, 4)$, escolheremos $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$ e pela forma de Newton, temos:

$$p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] = 1.0986 + (x-3)\,\frac{(1.3863 - 1.0986)}{4 - 3}$$

$$p_1(x) = 1.0986 + (x-3)(0.2877) \quad \Rightarrow \quad p_1(3.7) = 1.300.$$

Dado que, com quatro casas decimais ln(3.7) = 1.3083, o erro cometido é $E_1(3.7) = \ln(3.7) - p_1(3.7) = 1.3083 - 1.3 = 0.0083 = 8.3 \times 10^{-3}$.

## Exemplo 8

Considere a função $f(x) = e^x + x - 1$ e a tabela dada abaixo. Obtenha $p_1(0.7)$ por interpolação linear e faça uma análise do erro cometido.

| x | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.0 | 1.1487 | 2.7183 | 4.9811 | 8.3890 |

Obtenção de $p_1$ (0.7).

$$p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1].$$

$x = 0.7 \in (0.5, 1)$, então $x_0 = 0.5$ e $x_1 = 1$

$$p_1(x) = 1.1487 + (x - 0.5)\left(\frac{2.7183 - 1.1487}{1 - 0.5}\right) = 1.1487 + (x-0.5)3.1392$$

$$p_1(0.7) = 1.7765.$$

O calculo do erro devido a esse processo de interpolação dará:

$$|E_1(0.7)| = |f(0.7) - p_1(0.7)| = |1.7137 - 1.7765| = |-0.0628| = 0.0628.$$

**OBS. Limitante para o Erro** (Leitura Opcional)

A fórmula para o erro

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}, \quad \xi_x \in (x_0, x_n)$$

tem uso limitado na prática, dado que serão raras as situações em que conheceremos $f^{(n+1)}(x)$, e o ponto $\xi_x$ nunca é conhecido.

A importância da fórmula exata para $E_n(x)$ é teórica, uma vez que é usada na obtenção das estimativas de erro para as fórmulas de interpolação, diferenciação e integração numérica.

Na pratica uma estimativa para o erro é dada pela expressão abaixo:

$$\boxed{|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}}$$

onde $M_{n+1} = \max\limits_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$.

## Exercícios propostos:

1) Considerando a tabela de pontos abaixo encontre o valor de f(w) = 0.432 empregando interpolações na Forma de Lagrange de ordem 2, 3 e 4. Encontre o erro associado a cada uma das interpolações.

| w | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(w) | 0.905 | 0.819 | 0.67 | 0.549 | 0.449 | 0.407 |

2) Considere a tabela de pontos abaixo, obtenha uma aproximação para f(0.6) usando polinômios na Forma de Newton de graus 2, 3 e 4. Encontre o erro associado a cada uma das interpolações.

| x | 0 | 0.2618 | 0.5234 | 0.7854 | 1.0472 | 1.309 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 1.0353 | 2 | 2.8284 | 3.4641 | 3.8637 |