19. Hilbertovy prostory

Aplikovaná matematika III, NMAF073

M. Rokyta, KMA MFF UK

ZS 2011/12

D. Hilbert (1862–1943)

Poznámka (připomenutí)

- Nechť $(X, (\cdot, \cdot))$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbb{K}$ reálných nebo komplexních čísel (říkáme též, že X je **unitární prostor** nad $\mathbb{K}$).

Poznámka (připomenutí)

- Nechť $(X, (\cdot,\cdot))$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbb{K}$ reálných nebo komplexních čísel (říkáme též, že X je **unitární prostor** nad $\mathbb{K}$). Potom $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ je norma na X, nazývaná někdy též "norma indukovaná skalárním součinem".

Poznámka (připomenutí)

- Nechť $(X, (\cdot,\cdot))$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem $\mathbb{K}$ reálných nebo komplexních čísel (říkáme též, že X je **unitární prostor** nad $\mathbb{K}$). Potom $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ je norma na X, nazývaná někdy též "norma indukovaná skalárním součinem".
- Nechť $(X, (\cdot,\cdot))$ je unitární prostor nad $\mathbb{K}$. Na $X \times X$ uvažujme normu

$$\big\| [x,y] \big\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Potom je zobrazení $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ spojité.

Definice

Nechť $(X, (\cdot, \cdot))$ je unitární prostor nad $\mathbb{K}$,

Definice

Nechť $(X, (\cdot, \cdot))$ je unitární prostor nad $\mathbb{K}$, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Definice

Nechť $(X, (\cdot, \cdot))$ je unitární prostor nad $\mathbb{K}$, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

- Řekneme, že posloupnost $x_n \in X$ je **cauchyovská v** X, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 \ \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon \, .$$

Definice

Nechť $(X, (\cdot,\cdot))$ je unitární prostor nad $\mathbb{K}$, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

- Řekneme, že posloupnost $x_n \in X$ je **cauchyovská v** X, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 \ \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon\,.$$

- Řekneme, že prostor X je **úplný** vzhledem k normě $\|\cdot\|$, pokud každá cauchyovská posloupnost v X je konvergentní v X.

Definice

Nechť $(X, (\cdot, \cdot))$ je unitární prostor nad $\mathbb{K}$, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

- Řekneme, že posloupnost $x_n \in X$ je **cauchyovská v** X, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 \ \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon \, .$$

- Řekneme, že prostor X je **úplný** vzhledem k normě $\| \cdot \|$, pokud každá cauchyovská posloupnost v X je konvergentní v X.
- Pokud je X úplný vzhledem k normě $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, pak se nazývá **Hilbertovým prostorem**.

Příklad 1

Prostory $\mathbb{R}^n$ (opatřené eukleidovským skalárním součinem) jsou Hilbertovými prostory ***konečné dimenze****.*

Příklad 1

Prostory $\mathbb{R}^n$ (opatřené eukleidovským skalárním součinem) jsou Hilbertovými prostory ***konečné dimenze****.*

Příklad 2

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Pro $p \in \langle 1, \infty)$ definujme tzv. ***Lebesgueovy (L^p) prostory*** *předpisem*
$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \int_\Omega |f|^p < \infty\}$.

Příklad 1

*Prostory $\mathbb{R}^n$ (opatřené eukleidovským skalárním součinem) jsou Hilbertovými prostory **konečné dimenze**.*

Příklad 2

*Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Pro $p \in \langle 1, \infty)$ definujme tzv. **Lebesgueovy (L^p) prostory** předpisem $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \int_\Omega |f|^p < \infty\}$. Na prostoru $L^2(\Omega)$ definujme skalární součin*

$$(f, g)_2 = \int_\Omega f\,\overline{g}\,.$$

Příklad 1

*Prostory $\mathbb{R}^n$ (opatřené eukleidovským skalárním součinem) jsou Hilbertovými prostory **konečné dimenze**.*

Příklad 2

*Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Pro $p \in \langle 1, \infty)$ definujme tzv. **Lebesgueovy (L^p) prostory** předpisem $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \int_\Omega |f|^p < \infty\}$. Na prostoru $L^2(\Omega)$ definujme skalární součin*

$$(f, g)_2 = \int_\Omega f\,\overline{g}\,.$$

*Prostor $L^2(\Omega)$ s tímto skalárním součinem je Hilbertovým prostorem **nekonečné dimenze**.*

Příklad 3

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Mějme na Ω definovanou tzv. ***váhovou funkci (váhu, hustotu)*** *ρ takovou, že $\rho \in \mathcal{C}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $\rho > 0$ na Ω. Pro $p \in (1, \infty)$ definujme tzv.* ***Lebesgueovy (váhové) prostory s vahou ϱ*** *předpisem $L^p_\varrho(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \int_\Omega \varrho |f|^p < \infty\}$. Na prostoru $L^2_\varrho(\Omega)$ definujme skalární součin*

$$(f, g)_{2,\varrho} = \int_\Omega \varrho f\, \overline{g}\,.$$

Příklad 3

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Mějme na Ω definovanou tzv. ***váhovou funkci (váhu, hustotu)*** *ρ takovou, že $\rho \in \mathcal{C}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $\rho > 0$ na Ω. Pro $p \in (1, \infty)$ definujme tzv.* ***Lebesgueovy (váhové) prostory s vahou ϱ*** *předpisem $L^p_\varrho(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \int_\Omega \varrho |f|^p < \infty\}$. Na prostoru $L^2_\varrho(\Omega)$ definujme skalární součin*

$$(f, g)_{2,\varrho} = \int_\Omega \varrho f \, \overline{g} \, .$$

Prostor $L^2_\varrho(\Omega)$ s tímto skalárním součinem je Hilbertovým prostorem ***nekonečné dimenze****.*

Poznámka

- Mezi všemi L^p (resp. L^p_ϱ) prostory je prostor L^2 (resp. L^2_ϱ) jediný, na kterém lze zavést skalární součin.

Poznámka

- Mezi všemi L^p (resp. L^p_ϱ) prostory je prostor L^2 (resp. L^2_ϱ) jediný, na kterém lze zavést skalární součin.
- Pokud má $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **konečnou míru**, platí

$$1 \leq p < r < \infty \qquad \Longrightarrow \; L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)\,.$$

Poznámka

- Mezi všemi L^p (resp. L^p_ϱ) prostory je prostor L^2 (resp. L^2_ϱ) jediný, na kterém lze zavést skalární součin.
- Pokud má $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **konečnou míru**, platí

$$1 \leq p < r < \infty \qquad \Longrightarrow \; L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)\,.$$

Cvičení

- Ukažte: je-li $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ omezená na omezeném intervalu (a, b), pak $f \in L^p(a, b)\ \forall\, p \in \langle 1, \infty)$.

Poznámka

- Mezi všemi L^p (resp. L^p_ϱ) prostory je prostor L^2 (resp. L^2_ϱ) jediný, na kterém lze zavést skalární součin.
- Pokud má $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **konečnou míru**, platí

$$1 \leq p < r < \infty \qquad \Longrightarrow \quad L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)\,.$$

Cvičení

- Ukažte: je-li $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ omezená na omezeném intervalu (a, b), pak $f \in L^p(a, b)\ \forall\, p \in \langle 1, \infty)$.
- Nalezněte funkci $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ takovou, že $f \in L^3(0, 1)$ a přitom $f \notin L^4(0, 1)$. (*Návod: uvažujte funkce* $1/x^\alpha$ *pro* $\alpha \in \mathbb{R}$.)

Definice

Nechť X je Hilbertův prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je systém prvků prostoru X.

(i) Řekneme, že systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma' \colon \; (x_\gamma, x_{\gamma'}) = 0.$$

Definice

Nechť X je Hilbertův prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je systém prvků prostoru X.

(i) Řekneme, že systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall\gamma,\gamma'\in\Gamma,\gamma\neq\gamma'\colon\ (x_\gamma,x_{\gamma'})=0.$$

Jestliže navíc $\|x_\gamma\|=1$ pro každé $\gamma\in\Gamma$, potom říkáme, že je systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ **ortonormální**.

Definice

Nechť X je Hilbertův prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je systém prvků prostoru X.

(i) Řekneme, že systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall\gamma,\gamma'\in\Gamma,\gamma\neq\gamma':\ (x_\gamma,x_{\gamma'})=0.$$

Jestliže navíc $\|x_\gamma\|=1$ pro každé $\gamma\in\Gamma$, potom říkáme, že je systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ **ortonormální**.

(ii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **úplný**, jestliže jeho lineární obal je **hustý v** X, tedy jestliže platí $\overline{\mathrm{Lin}(\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})}=X$.

Definice

Nechť X je Hilbertův prostor, Γ je indexová množina a $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ je systém prvků prostoru X.

(i) Řekneme, že systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall\gamma,\gamma'\in\Gamma,\gamma\neq\gamma'\colon\ (x_\gamma,x_{\gamma'})=0.$$

Jestliže navíc $\|x_\gamma\|=1$ pro každé $\gamma\in\Gamma$, potom říkáme, že je systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ **ortonormální**.

(ii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **úplný**, jestliže jeho lineární obal je **hustý v** X, tedy jestliže platí $\overline{\operatorname{Lin}(\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma})}=X$.

(iii) Ortogonální systém $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je **maximální**, jestliže neexistuje prvek $u\in X\setminus\{0\}$ kolmý na všechna x_γ, tedy pokud platí $(u,x_\gamma)=0\ \forall\gamma\in\Gamma \implies u=0$.

Poznámka

- Zobecnění kartézského souřadného systému do (Hilbertových) prostorů nekonečné dimenze.

Poznámka

- Zobecnění kartézského souřadného systému do (Hilbertových) prostorů nekonečné dimenze.
- Ortogonální systém vektorů tvoří lineárně nezávislou množinu vektorů.

Poznámka

- Zobecnění kartézského souřadného systému do (Hilbertových) prostorů nekonečné dimenze.
- Ortogonální systém vektorů tvoří lineárně nezávislou množinu vektorů.
- Z každého lineárně nezávislého systému lze učinit systém ortogonální pomocí tzv. Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu. (*Viz Příklad 4 za touto poznámkou.*)

Poznámka

- Zobecnění kartézského souřadného systému do (Hilbertových) prostorů nekonečné dimenze.
- Ortogonální systém vektorů tvoří lineárně nezávislou množinu vektorů.
- Z každého lineárně nezávislého systému lze učinit systém ortogonální pomocí tzv. Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu. (*Viz Příklad 4 za touto poznámkou.*)
- Z každého ortogonálního systému lze učinit systém ortonormální (prvky vydělíme jejich normami).

Poznámka

- Zobecnění kartézského souřadného systému do (Hilbertových) prostorů nekonečné dimenze.
- Ortogonální systém vektorů tvoří lineárně nezávislou množinu vektorů.
- Z každého lineárně nezávislého systému lze učinit systém ortogonální pomocí tzv. Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu. (*Viz Příklad 4 za touto poznámkou.*)
- Z každého ortogonálního systému lze učinit systém ortonormální (prvky vydělíme jejich normami).
- Systém $\{1, \sin kx, \cos kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ je ortogonální systém v $L^2(0, 2\pi)$.

Poznámka

- Zobecnění kartézského souřadného systému do (Hilbertových) prostorů nekonečné dimenze.
- Ortogonální systém vektorů tvoří lineárně nezávislou množinu vektorů.
- Z každého lineárně nezávislého systému lze učinit systém ortogonální pomocí tzv. Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu. (*Viz Příklad 4 za touto poznámkou.*)
- Z každého ortogonálního systému lze učinit systém ortonormální (prvky vydělíme jejich normami).
- Systém $\{1, \sin kx, \cos kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ je ortogonální systém v $L^2(0, 2\pi)$.
- Systém $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je ortogonální systém v $L^2(0, 2\pi)$.

Příklad 4 (Gram-Schmidtův OG proces)

Buď $\{v_1, v_2, \dots\}$ *lineárně nezávislá množina nenulových prvků v Hilbertově prostoru* X.

Příklad 4 (Gram-Schmidtův OG proces)

Buď $\{v_1, v_2, \dots\}$ *lineárně nezávislá množina nenulových prvků v Hilbertově prostoru* X. *Položme* $e_1 := v_1$

Příklad 4 (Gram-Schmidtův OG proces)

Buď $\{v_1, v_2, \dots\}$ *lineárně nezávislá množina nenulových prvků v Hilbertově prostoru* X. *Položme* $e_1 := v_1$ *a dále, pro* $n \geq 2$,

$$e_n := v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(v_n, e_j)}{\|e_j\|^2} e_j \,. \tag{1}$$

Příklad 4 (Gram-Schmidtův OG proces)

Buď $\{v_1, v_2, \dots\}$ *lineárně nezávislá množina nenulových prvků v Hilbertově prostoru* X. *Položme* $e_1 := v_1$ *a dále, pro* $n \geq 2$,

$$e_n := v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(v_n, e_j)}{\|e_j\|^2} e_j \,. \tag{1}$$

Ukažte, že $\{e_1, e_2, \dots\}$ *je ortogonální množina nenulových prvků,*

Příklad 4 (Gram-Schmidtův OG proces)

Buď $\{v_1, v_2, \dots\}$ *lineárně nezávislá množina nenulových prvků v Hilbertově prostoru* X. *Položme* $e_1 := v_1$ *a dále, pro* $n \geq 2$,

$$e_n := v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(v_n, e_j)}{\|e_j\|^2} e_j \,. \tag{1}$$

Ukažte, že $\{e_1, e_2, \dots\}$ *je ortogonální množina nenulových prvků, přičemž*

$$\mathrm{Lin}\{e_1, \dots, e_k\} = \mathrm{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}\,, \quad k = 1, 2, \dots$$

Věta 19.1

Nechť $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální posloupnost nenulových prvků Hilbertově prostoru X nad $\mathbb{K}$. Nechť $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, kde $c_n \in \mathbb{K}$. Potom

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Věta 19.1

Nechť $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ortogonální posloupnost nenulových prvků Hilbertově prostoru* X *nad* $\mathbb{K}$*. Nechť* $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$*, kde* $c_n \in \mathbb{K}$*. Potom*

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N} \,. \tag{2}$$

Definice

Číslo c_n, definované pomocí (2), nazýváme n**-tým Fourierovým koeficientem** prvku x vzhledem k ortogonální posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice

Buď $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonální posloupnost nenulových prvků v Hilbertově prostoru X nad $\mathbb{K}$ a mějme $x \in X$.

Definice

Buď $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonální posloupnost nenulových prvků v Hilbertově prostoru X nad $\mathbb{K}$ a mějme $x \in X$. Uvažujme Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj.

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definice

Buď $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonální posloupnost nenulových prvků v Hilbertově prostoru X nad $\mathbb{K}$ a mějme $x \in X$. Uvažujme Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj.

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \tag{3}$$

nazvu **(abstraktní) Fourierovou řadou prvku** x **v prostoru** X **podle ortogonálního systému** $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Otázky:

- Jak zajistit, abych měl "všechny prvky OG systému" (tj. aby tvořil bázi)?

Otázky:

- Jak zajistit, abych měl "všechny prvky OG systému" (tj. aby tvořil bázi)? (Úplnost?

Otázky:

- Jak zajistit, abych měl "všechny prvky OG systému" (tj. aby tvořil bázi)? (Úplnost? Maximalita?)

Otázky:

- Jak zajistit, abych měl "všechny prvky OG systému" (tj. aby tvořil bázi)? (Úplnost? Maximalita?)
- Mám $x \in X$, rozvinu jej do (Fourierovy) řady. Konverguje vůbec tato řada?

Otázky:

- Jak zajistit, abych měl "všechny prvky OG systému" (tj. aby tvořil bázi)? (Úplnost? Maximalita?)
- Mám $x \in X$, rozvinu jej do (Fourierovy) řady. Konverguje vůbec tato řada?
- Pokud konverguje, co má společného její součet s původním prvkem x?

Věta 19.2 (Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost)

Nechť X je Hilbertův prostor nekonečné dimenze, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků v X, $x \in X$, a $c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom

- *Vždy platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselova nerovnost);*

Věta 19.2 (Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost)

Nechť X je Hilbertův prostor nekonečné dimenze, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků v X, $x \in X$, a $c_n = \frac{(x,e_n)}{\|e_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom

- *Vždy platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 \le \|x\|^2$ (Besselova nerovnost);*
- *Fourierova řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ vždy konverguje k nějakému prvku $y \in X$;*

Věta 19.2 (Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost)

Nechť X je Hilbertův prostor nekonečné dimenze, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků v X, $x \in X$, a $c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom

- *Vždy platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselova nerovnost);*
- *Fourierova řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ vždy konverguje k nějakému prvku $y \in X$;*
- *Je $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 = \|x\|^2$ (Parsevalova rovnost).*

Poznámka

S ohledem na (2) lze Parsevalovu rovnost psát také ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\,(x, e_n)\,|^2}{\|e_n\|^2} = \|x\|^2 \,.$$

Poznámka

S ohledem na (2) lze Parsevalovu rovnost psát také ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\,(x, e_n)\,|^2}{\|e_n\|^2} = \|x\|^2 \, .$$

Definice

Nechť X je Hilbertův prostor nad $\mathbb{K}$. Posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z X se nazývá **(Schauderova) báze** prostoru X, jestliže pro každý bod $x \in X$ existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků z $\mathbb{K}$, pro kterou platí

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n .$$

Věta 19.3

Nechť X je Hilbertův prostor a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je Schauderova báze,*

Věta 19.3

Nechť X je Hilbertův prostor a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je Schauderova báze,*

(ii) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je úplný ortogonální systém,*

Věta 19.3

Nechť X je Hilbertův prostor a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je Schauderova báze,*

(ii) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je úplný ortogonální systém,*

(iii) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je maximální ortogonální systém.*

Věta 19.3

Nechť X je Hilbertův prostor a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Schauderova báze,*

(ii) *$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný ortogonální systém,*

(iii) *$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je maximální ortogonální systém.*

(iv) *Pro každé $x \in X$ platí Parsevalova rovnost (vzhledem k systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).*

Věta 19.3

Nechť X je Hilbertův prostor a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální systém nenulových prvků prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je Schauderova báze,*

(ii) *$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplný ortogonální systém,*

(iii) *$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ je maximální ortogonální systém.*

(iv) *Pro každé $x \in X$ platí Parsevalova rovnost (vzhledem k systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).*

(v) *Každý prvek $x \in X$ je roven součtu své Fourierovy řady (vzhledem k systému $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$).*

Definice

Nechť X Hilbertův prostor. Řeknu, že X je **separabilní**, pokud existuje spočetná množina prvků z X, která je hustá v X (tedy jejíž uzávěr je celé X).

Definice

Nechť X Hilbertův prostor. Řeknu, že X je **separabilní**, pokud existuje spočetná množina prvků z X, která je hustá v X (tedy jejíž uzávěr je celé X).

Věta 19.4

(i) *Nechť X je separabilní Hilbertův prostor. Potom v X existuje ortonormální spočetná (Schauderova) báze.*

Definice

Nechť X Hilbertův prostor. Řeknu, že X je **separabilní**, pokud existuje spočetná množina prvků z X, která je hustá v X (tedy jejíž uzávěr je celé X).

Věta 19.4

(i) *Nechť X je separabilní Hilbertův prostor. Potom v X existuje ortonormální spočetná (Schauderova) báze.*

(ii) *Nechť X_1, X_2 jsou nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertovy prostory. Potom jsou X_1 a X_2* ***izometricky izomorfní*** *(tj. existuje mezi nimi bijekce, která zachovává skalární součin).*

Definice

Nechť X Hilbertův prostor. Řeknu, že X je **separabilní**, pokud existuje spočetná množina prvků z X, která je hustá v X (tedy jejíž uzávěr je celé X).

Věta 19.4

(i) *Nechť X je separabilní Hilbertův prostor. Potom v X existuje ortonormální spočetná (Schauderova) báze.*

(ii) *Nechť X_1, X_2 jsou nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertovy prostory. Potom jsou X_1 a X_2 **izometricky izomorfní** (tj. existuje mezi nimi bijekce, která zachovává skalární součin).*

(iii) *Každý separabilní Hilbertův prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ je izometricky izomorfní $\mathbb{R}^n$.*

Věta 19.5

- *Systém* $\{1, \sin kx, \cos kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ *je úplný ortogonální systém v* $L^2(0, 2\pi)$ *a tvoří v něm ortogonální bázi.*

Věta 19.5

- *Systém* $\{1, \sin kx, \cos kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ *je úplný ortogonální systém v* $L^2(0, 2\pi)$ *a tvoří v něm ortogonální bázi.*
- *Systém* $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *je úplný ortogonální systém v* $L^2(0, 2\pi)$ *a tvoří v něm ortogonální bázi.*

Věta 19.6 (o nejlepší aproximaci)

Buď X Hilbertův prostor a $\{e_n\} \subset X$ ortogonální systém v X. Buď $x \in X$. Potom pro libovolná $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{K}$ platí

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \right\| \le \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n \right\|, \tag{4}$$

přičemž nerovnost v (4) je ostrá, pokud je alespoň jedno β_j různé od $\frac{(x, e_j)}{\|e_j\|^2}$.

Důležité otázky:
Jakým způsobem získat nějaký konkrétní úplný ortogonální systém (bázi) v $L^2_\varrho(a,b)$?

Důležité otázky:
Jakým způsobem získat nějaký konkrétní úplný ortogonální systém (bázi) v $L^2_\varrho(a,b)$? Lze to například zařídit tak, aby tato báze byla složena z polynomů?

Důležité otázky:
Jakým způsobem získat nějaký konkrétní úplný ortogonální systém (bázi) v $L^2_\varrho(a,b)$? Lze to například zařídit tak, aby tato báze byla složena z polynomů?

Metoda I: ortogonalizace dané husté LN množiny pomocí Gram-Schmidtova procesu

Důležité otázky:
Jakým způsobem získat nějaký konkrétní úplný ortogonální systém (bázi) v $L^2_\varrho(a,b)$? Lze to například zařídit tak, aby tato báze byla složena z polynomů?

Metoda I: ortogonalizace dané husté LN množiny pomocí Gram-Schmidtova procesu

Uvažujme na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ polynomy

$$1, x, x^2, x^3, x^4 \dots \qquad (5)$$

Důležité otázky:
Jakým způsobem získat nějaký konkrétní úplný ortogonální systém (bázi) v $L^2_\varrho(a,b)$? Lze to například zařídit tak, aby tato báze byla složena z polynomů?

Metoda I: ortogonalizace dané husté LN množiny pomocí Gram-Schmidtova procesu
Uvažujme na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ polynomy

$$1, x, x^2, x^3, x^4 \dots \tag{5}$$

a uvažujme (pokud (a,b) je neomezený) váhovou funkci ϱ takovou, aby $x^n \in L^2_\varrho(a,b)$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Důležité otázky:
Jakým způsobem získat nějaký konkrétní úplný ortogonální systém (bázi) v $L^2_\varrho(a,b)$? Lze to například zařídit tak, aby tato báze byla složena z polynomů?

Metoda I: ortogonalizace dané husté LN množiny pomocí Gram-Schmidtova procesu

Uvažujme na $(a,b) \subset \mathbb{R}$ polynomy

$$1, x, x^2, x^3, x^4 \dots \tag{5}$$

a uvažujme (pokud (a,b) je neomezený) váhovou funkci ϱ takovou, aby $x^n \in L^2_\varrho(a,b)$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ortogonalizací pomocí Gram-Schmidtova procesu dostaneme úplný systém ortogonálních polynomů v $L^2_\varrho(a,b)$.

Příklad 5 (Legendreovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Legendreovy polynomy*** $P_n(x)$.

Příklad 5 (Legendreovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Legendreovy polynomy*** $P_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Příklad 5 (Legendreovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Legendreovy polynomy*** $P_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Příklad 5 (Legendreovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) v prostoru $L^2(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Legendreovy polynomy*** $P_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Prvních několik Legendreových polynomů je:
$P_0(x) = 1$,

Příklad 5 (Legendreovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Legendreovy polynomy*** $P_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

pričemž

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Prvních několik Legendreových polynomů je:
$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$,

Příklad 5 (Legendreovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Legendreovy polynomy*** $P_n(x)$*. Lze ukázat, že platí*

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Prvních několik Legendreových polynomů je:
$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$,

Příklad 5 (Legendreovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Legendreovy polynomy*** $P_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Prvních několik Legendreových polynomů je:
$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$,

Příklad 5 (Legendreovy polynomy)

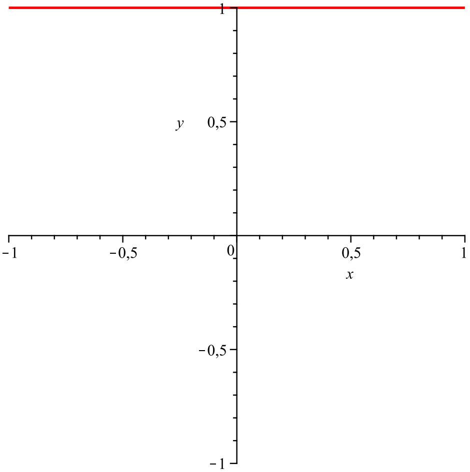
Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Legendreovy polynomy*** $P_n(x)$*. Lze ukázat, že platí*

$$P_0(x) = 1\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

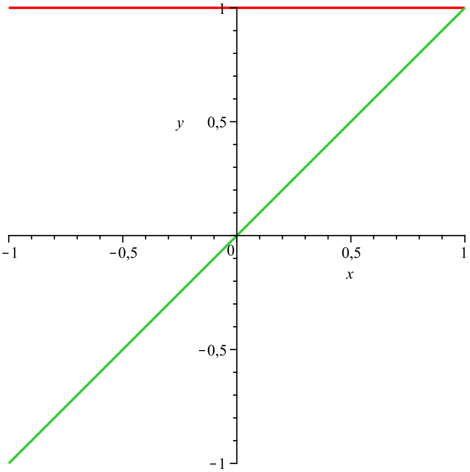
přičemž

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

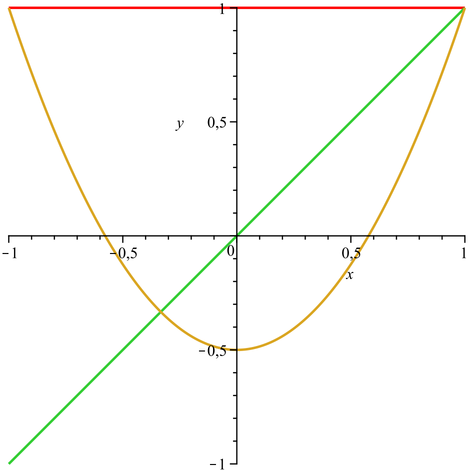
Prvních několik Legendreových polynomů je:
$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, \dots$



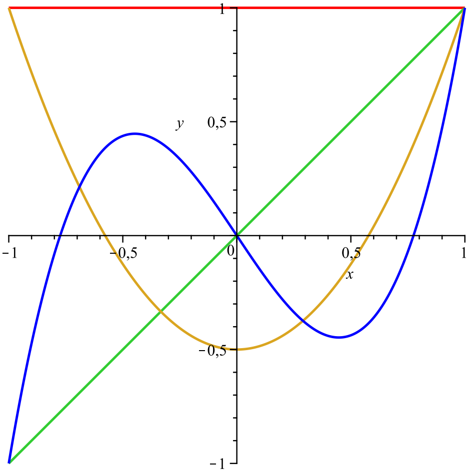
Legendreovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



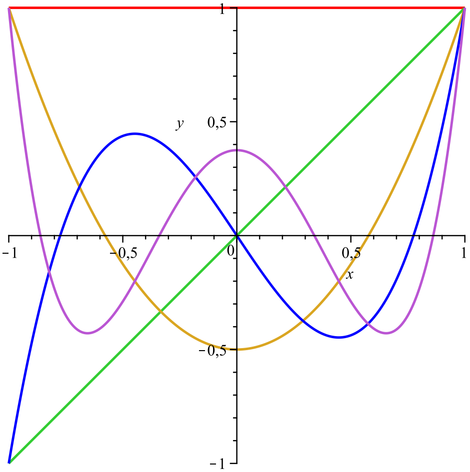
Legendreovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



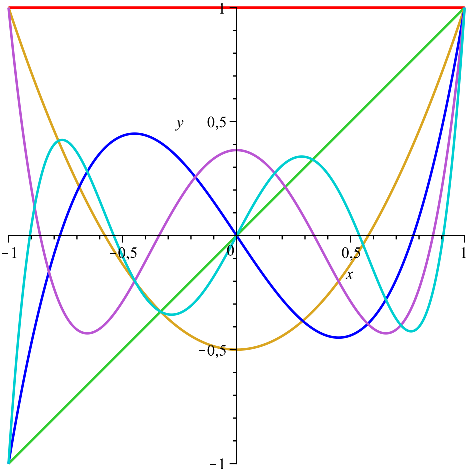
Legendreovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



Legendreovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



Legendreovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



Legendreovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Podle předchozí teorie tedy platí, že pro každou funkci $f \in L^2(-1,1)$ platí

$$f(x) \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

Podle předchozí teorie tedy platí, že pro každou funkci $f \in L^2(-1,1)$ platí

$$f(x) \stackrel{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

kde

$$c_n = \frac{1}{\|P_n(x)\|^2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1,1)$ dostaneme

$$|x| \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1,1)$ dostaneme

$$|x| \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

kde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x|\, P_n(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1,1)$ dostaneme

$$|x| \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

kde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x|\, P_n(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

což dá (spočtěte) $c_{2k+1} = 0 \ \forall k = 0, 1, \dots,$

Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1,1)$ dostaneme

$$|x| \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

kde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x|\, P_n(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

což dá (spočtěte) $c_{2k+1} = 0\ \forall k = 0, 1, \ldots,\ c_0 = \frac{1}{2}$,

Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1,1)$ dostaneme

$$|x| \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

kde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x|\, P_n(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

což dá (spočtěte) $c_{2k+1} = 0 \ \forall k = 0, 1, \dots,\ c_0 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{5}{8},$

Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1,1)$ dostaneme

$$|x| \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

kde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x|\, P_n(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

což dá (spočtěte) $c_{2k+1} = 0\ \forall k = 0, 1, \ldots,$ $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{8}$, $c_4 = -\frac{3}{16}$,

Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1,1)$ dostaneme

$$|x| \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

kde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x|\, P_n(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

což dá (spočtěte) $c_{2k+1} = 0\ \forall k = 0, 1, \dots,\ c_0 = \frac{1}{2},\ c_2 = \frac{5}{8},$ $c_4 = -\frac{3}{16},\ c_6 = \frac{13}{128}\ \dots$

Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1,1)$ dostaneme

$$|x| \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

kde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x|\, P_n(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

což dá (spočtěte) $c_{2k+1} = 0\ \forall k = 0, 1, \ldots$, $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{8}$, $c_4 = -\frac{3}{16}$, $c_6 = \frac{13}{128}$ ... například aproximace do šestého řádu dá $|x| \approx \frac{175}{2048} + \frac{4725}{2048} x^2 - \frac{5775}{2048} x^4 + \frac{3003}{2048} x^6$ na $(-1,1)$.

Například pro $f(x) = |x| \in L^2(-1,1)$ dostaneme

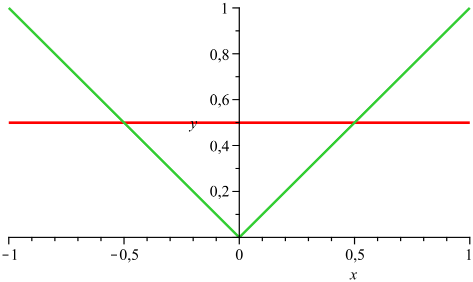
$$|x| \overset{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\,,$$

kde

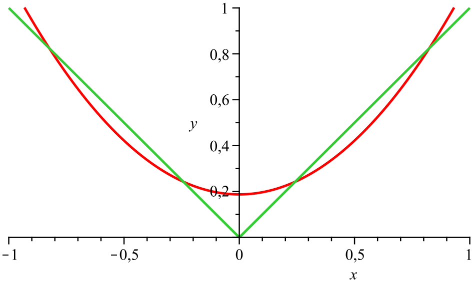
$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} |x|\, P_n(x)\, \mathrm{d}x\,,$$

což dá (spočtěte) $c_{2k+1} = 0\ \forall k = 0, 1, \ldots,$ $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{8}$, $c_4 = -\frac{3}{16}$, $c_6 = \frac{13}{128}$ ... například aproximace do šestého řádu dá $|x| \approx \frac{175}{2048} + \frac{4725}{2048}x^2 - \frac{5775}{2048}x^4 + \frac{3003}{2048}x^6$ na $(-1,1)$.

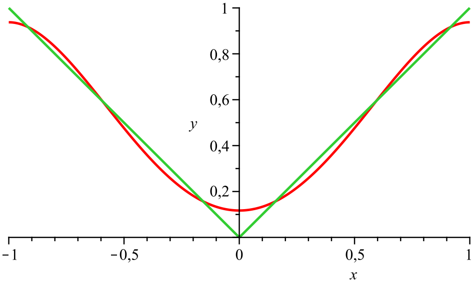
Viz následující obrázky.



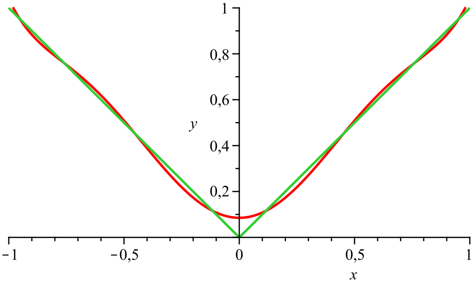
Aproximace $|x|$ pomocí Legendreových polynomů ($n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$).



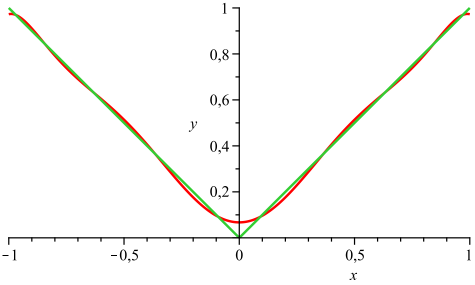
Aproximace $|x|$ pomocí Legendreových polynomů ($n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$).



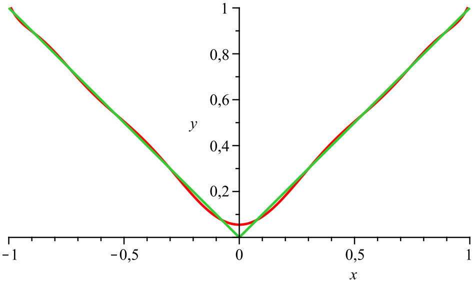
Aproximace $|x|$ pomocí Legendreových polynomů ($n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$).



Aproximace $|x|$ pomocí Legendreových polynomů
($n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$).



Aproximace $|x|$ pomocí Legendreových polynomů ($n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$).



Aproximace $|x|$ pomocí Legendreových polynomů ($n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$).

Poznámka

Legendreovy polynomy splňují tzv. **rekurentní vztah**

$$(n+1)P_{n+1}(x) \;=\; (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

Poznámka

Legendreovy polynomy splňují tzv. **rekurentní vztah**

$$\begin{aligned} (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \\ &\ P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x\,, \end{aligned}$$

Poznámka

Legendreovy polynomy splňují tzv. **rekurentní vztah**

$$\begin{aligned}(n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,\\ & P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x\,,\end{aligned}$$

a jsou řešením tzv. **generující diferenciální rovnice**

$$\left((1-x^2)y'\right)' = -\lambda y\,, \qquad \lambda = n(n+1)\,, n = 0, 1, 2, \dots .$$

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Čebyševovy polynomy*** *(1. druhu)* $T_n(x)$.

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) v prostoru $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Čebyševovy polynomy*** *(1. druhu)* $T_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Čebyševovy polynomy*** *(1. druhu)* $T_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|T_n(x)\|^2_\varrho = \frac{\pi}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Čebyševovy polynomy*** *(1. druhu)* $T_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|T_n(x)\|_\varrho^2 = \frac{\pi}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Prvních několik Čebyševových polynomů je:
$T_0(x) = 1$,

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Čebyševovy polynomy*** *(1. druhu)* $T_n(x)$*. Lze ukázat, že platí*

$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|T_n(x)\|_\varrho^2 = \frac{\pi}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Prvních několik Čebyševových polynomů je:
$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$,

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Čebyševovy polynomy*** *(1. druhu)* $T_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|T_n(x)\|_\varrho^2 = \frac{\pi}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Prvních několik Čebyševových polynomů je:
$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$,

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Čebyševovy polynomy*** *(1. druhu)* $T_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|T_n(x)\|_\varrho^2 = \frac{\pi}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Prvních několik Čebyševových polynomů je:
$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$,

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy)

Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Čebyševovy polynomy*** *(1. druhu)* $T_n(x)$*. Lze ukázat, že platí*

$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

přičemž

$$\|T_n(x)\|_\varrho^2 = \frac{\pi}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Prvních několik Čebyševových polynomů je:
$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 - 1$,

Příklad 6 (Čebyševovy polynomy)

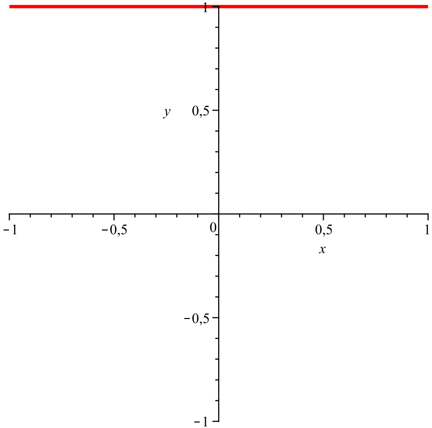
Ortogonalizací systému (5) *v prostoru* $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1,1)$ *dostaneme tzv.* ***Čebyševovy polynomy*** *(1. druhu)* $T_n(x)$. *Lze ukázat, že platí*

$$T_0(x) = 1\,, \qquad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

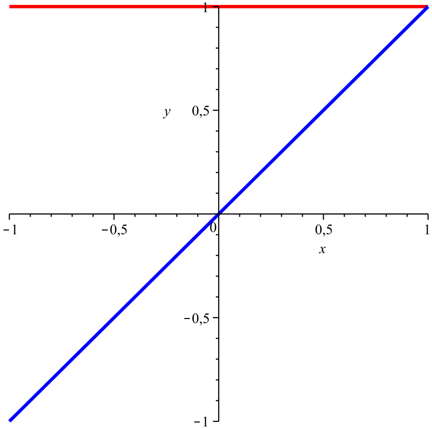
přičemž

$$\|T_n(x)\|_\varrho^2 = \frac{\pi}{2}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

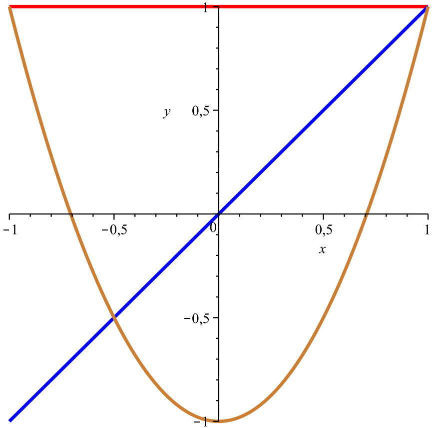
Prvních několik Čebyševových polynomů je:
$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 - 1$, $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$, ...



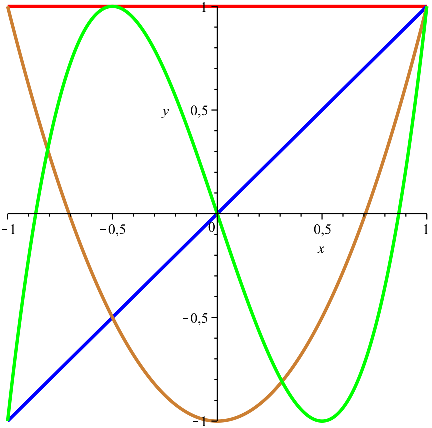
Čebyševovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



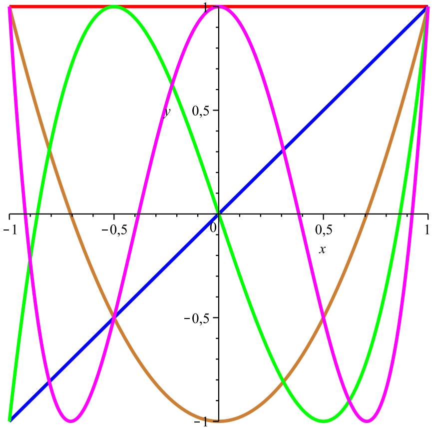
Čebyševovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



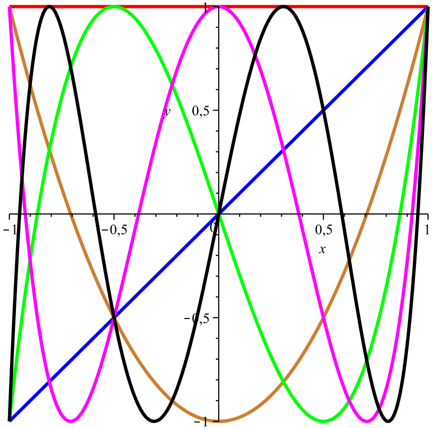
Čebyševovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



Čebyševovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



Čebyševovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



Čebyševovy polynomy pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Poznámka

Čebyševovy polynomy splňují **rekurentní vztah**

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) \quad = \quad 2xT_n(x)\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Poznámka

Čebyševovy polynomy splňují **rekurentní vztah**

$$
\begin{aligned}
T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N} \\
&\ T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x\,,
\end{aligned}
$$

Poznámka

Čebyševovy polynomy splňují **rekurentní vztah**

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ & \; T_0(x) = 1,\; T_1(x) = x\,, \end{aligned}$$

a jsou řešením **generující diferenciální rovnice**

$$\left(\sqrt{1-x^2}\,y'\right)' = -\frac{\lambda y}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \lambda = n^2\,,\; n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Poznámka

- Ortogonalizací základního systému polynomů $1, x, x^2, x^3, \ldots$ v příslušných prostorech $L^2_\varrho(a, b)$ dostaneme odpovídající systém ortogonálních polynomů, do kterého lze rozvíjet všechny funkce, patřící do $L^2_\varrho(a, b)$.

Poznámka

- Ortogonalizací základního systému polynomů $1, x, x^2, x^3, \dots$ v příslušných prostorech $L^2_\varrho(a,b)$ dostaneme odpovídající systém ortogonálních polynomů, do kterého lze rozvíjet všechny funkce, patřící do $L^2_\varrho(a,b)$. Na konkrétní tvar těchto polynomů má vliv zejména tvar skalárního součinu v $L^2_\varrho(a,b)$.

Poznámka

- Ortogonalizací základního systému polynomů $1, x, x^2, x^3, \dots$ v příslušných prostorech $L^2_\varrho(a,b)$ dostaneme odpovídající systém ortogonálních polynomů, do kterého lze rozvíjet všechny funkce, patřící do $L^2_\varrho(a,b)$. Na konkrétní tvar těchto polynomů má vliv zejména tvar skalárního součinu v $L^2_\varrho(a,b)$.
- Takto dostaneme například **Hermiteovy polynomy** H_n (v prostoru $L^2_{e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$),

Poznámka

- Ortogonalizací základního systému polynomů $1, x, x^2, x^3, \ldots$ v příslušných prostorech $L^2_\varrho(a,b)$ dostaneme odpovídající systém ortogonálních polynomů, do kterého lze rozvíjet všechny funkce, patřící do $L^2_\varrho(a,b)$. Na konkrétní tvar těchto polynomů má vliv zejména tvar skalárního součinu v $L^2_\varrho(a,b)$.
- Takto dostaneme například **Hermiteovy polynomy** H_n (v prostoru $L^2_{e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$), **Laguerrovy polynomy** L^s_n **řádu** $s > -1$ (v prostoru $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$)

Poznámka

- Ortogonalizací základního systému polynomů $1, x, x^2, x^3, \dots$ v příslušných prostorech $L^2_\varrho(a,b)$ dostaneme odpovídající systém ortogonálních polynomů, do kterého lze rozvíjet všechny funkce, patřící do $L^2_\varrho(a,b)$. Na konkrétní tvar těchto polynomů má vliv zejména tvar skalárního součinu v $L^2_\varrho(a,b)$.
- Takto dostaneme například **Hermiteovy polynomy** H_n (v prostoru $L^2_{e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$), **Laguerrovy polynomy** L^s_n **řádu** $s > -1$ (v prostoru $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$) a mnoho dalších.

Poznámka

- Ortogonalizací základního systému polynomů $1, x, x^2, x^3, \ldots$ v příslušných prostorech $L^2_\varrho(a,b)$ dostaneme odpovídající systém ortogonálních polynomů, do kterého lze rozvíjet všechny funkce, patřící do $L^2_\varrho(a,b)$. Na konkrétní tvar těchto polynomů má vliv zejména tvar skalárního součinu v $L^2_\varrho(a,b)$.
- Takto dostaneme například **Hermiteovy polynomy** H_n (v prostoru $L^2_{e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$), **Laguerrovy polynomy** L^s_n **řádu** $s > -1$ (v prostoru $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$) a mnoho dalších. Pro každý takový systém existuje rekurentní vztah a generující diferenciální rovnice.

Poznámka

- Ortogonalizací základního systému polynomů $1, x, x^2, x^3, \dots$ v příslušných prostorech $L^2_\varrho(a,b)$ dostaneme odpovídající systém ortogonálních polynomů, do kterého lze rozvíjet všechny funkce, patřící do $L^2_\varrho(a,b)$. Na konkrétní tvar těchto polynomů má vliv zejména tvar skalárního součinu v $L^2_\varrho(a,b)$.
- Takto dostaneme například **Hermiteovy polynomy** H_n (v prostoru $L^2_{e^{-x^2}}(-\infty,\infty)$), **Laguerrovy polynomy** L^s_n **řádu** $s > -1$ (v prostoru $L^2_{x^s e^{-x}}(0,\infty)$) a mnoho dalších. Pro každý takový systém existuje rekurentní vztah a generující diferenciální rovnice. Podrobněji viz tabulku ortogonálních systémů polynomů na stránce této přednášky.

Metoda II: generující diferenciální rovnice, resp. generující operátor

Metoda II: generující diferenciální rovnice, resp. generující operátor

Definice

Buď $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ uzavřený interval, p, q, ϱ dané funkce definované na $\langle a, b \rangle$. Nechť dále $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Metoda II: generující diferenciální rovnice, resp. generující operátor

Definice

Buď $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ uzavřený interval, p, q, ϱ dané funkce definované na $\langle a, b\rangle$. Nechť dále $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. **Okrajovou úlohou v samoadjungovaném tvaru** pro neznámou funkci $y = y(t)$

Metoda II: generující diferenciální rovnice, resp. generující operátor

Definice

Buď $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ uzavřený interval, p, q, ϱ dané funkce definované na $\langle a, b\rangle$. Nechť dále $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. **Okrajovou úlohou v samoadjungovaném tvaru** pro neznámou funkci $y = y(t)$ nazveme diferenciální rovnici druhého řádu v tzv. **samoadjungovaném tvaru**,

$$-(p(t)y')' + q(t)y = \lambda\varrho(t)y\,, \qquad t \in (a, b)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,, \tag{6}$$

Metoda II: generující diferenciální rovnice, resp. generující operátor

Definice

Buď $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ uzavřený interval, p, q, ϱ dané funkce definované na $\langle a, b\rangle$. Nechť dále $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. **Okrajovou úlohou v samoadjungovaném tvaru** pro neznámou funkci $y = y(t)$ nazveme diferenciální rovnici druhého řádu v tzv. **samoadjungovaném tvaru**,

$$-(p(t)y')' + q(t)y = \lambda\varrho(t)y\,, \qquad t \in (a, b)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,, \tag{6}$$

doplněnou o tzv. **okrajové podmínky**

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0\,, \qquad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0\,. \tag{7}$$

Věta 19.7

Uvažujme okrajovou úlohu tvaru (6)–(7)*, kde p je spojitá a kladná na $\langle a, b\rangle$, p' je spojitá na (a, b), q je reálná a spojitá na $\langle a, b\rangle$, ϱ je spojitá, kladná a konečně integrovatelná na (a, b).*

Věta 19.7

Uvažujme okrajovou úlohu tvaru (6)–(7)*, kde p je spojitá a kladná na $\langle a, b\rangle$, p' je spojitá na (a, b), q je reálná a spojitá na $\langle a, b\rangle$, ϱ je spojitá, kladná a konečně integrovatelná na (a, b). Navíc nechť alespoň jedno z čísel α, β a alespoň jedno z čísel γ, δ je nenulové.*

Věta 19.7

Uvažujme okrajovou úlohu tvaru (6)–(7)*, kde p je spojitá a kladná na* $\langle a, b\rangle$*,* p' *je spojitá na* (a, b)*, q je reálná a spojitá na* $\langle a, b\rangle$*,* ϱ *je spojitá, kladná a konečně integrovatelná na* (a, b)*. Navíc nechť alespoň jedno z čísel* α, β *a alespoň jedno z čísel* γ, δ *je nenulové. Potom existují* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, $\lim \lambda_n = \infty$ *taková, že:*

Věta 19.7

Uvažujme okrajovou úlohu tvaru (6)–(7)*, kde p je spojitá a kladná na $\langle a, b\rangle$, p' je spojitá na (a, b), q je reálná a spojitá na $\langle a, b\rangle$, ϱ je spojitá, kladná a konečně integrovatelná na (a, b). Navíc nechť alespoň jedno z čísel α, β a alespoň jedno z čísel γ, δ je nenulové. Potom existují $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, $\lim \lambda_n = \infty$ taková, že:*

- *Pro všechna $\lambda \neq \lambda_n$ má úloha* (6)–(7) ***pouze*** *řešení $y \equiv 0$.*

Věta 19.7

Uvažujme okrajovou úlohu tvaru (6)–(7), *kde p je spojitá a kladná na* $\langle a, b\rangle$, *p' je spojitá na* (a, b), *q je reálná a spojitá na* $\langle a, b\rangle$, ϱ *je spojitá, kladná a konečně integrovatelná na* (a, b). *Navíc nechť alespoň jedno z čísel* α, β *a alespoň jedno z čísel* γ, δ *je nenulové. Potom existují* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, $\lim \lambda_n = \infty$ *taková, že:*

- *Pro všechna* $\lambda \neq \lambda_n$ *má úloha* (6)–(7) ***pouze*** *řešení* $y \equiv 0$.
- *Pro každé* $\lambda = \lambda_n$ *existuje právě jedno (až na násobek konstantou)* ***nenulové*** *řešení* y_n *úlohy* (6)–(7).

Věta 19.7

Uvažujme okrajovou úlohu tvaru (6)–(7)*, kde p je spojitá a kladná na* $\langle a, b\rangle$*,* p' *je spojitá na* (a, b)*, q je reálná a spojitá na* $\langle a, b\rangle$*,* ϱ *je spojitá, kladná a konečně integrovatelná na* (a, b)*. Navíc nechť alespoň jedno z čísel* α, β *a alespoň jedno z čísel* γ, δ *je nenulové. Potom existují* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, $\lim \lambda_n = \infty$ *taková, že:*

- *Pro všechna* $\lambda \neq \lambda_n$ *má úloha* (6)–(7) ***pouze*** *řešení* $y \equiv 0$.
- *Pro každé* $\lambda = \lambda_n$ *existuje právě jedno (až na násobek konstantou)* ***nenulové*** *řešení* y_n *úlohy* (6)–(7).
- *Systém* $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ *je* ***úplný ortogonální systém funkcí*** *v* $L^2_\varrho(a, b)$.

Definice

Čísla λ_n resp. funkce y_n z předchozí věty nazýváme **vlastní čísla** resp. **vlastní funkce** úlohy (6)–(7).

Definice

Čísla λ_n resp. funkce y_n z předchozí věty nazýváme **vlastní čísla** resp. **vlastní funkce** úlohy (6)–(7).

Poznámka

Zobrazení mezi dvěma prostory nazýváme **operátorem**.

Definice

Čísla λ_n resp. funkce y_n z předchozí věty nazýváme **vlastní čísla** resp. **vlastní funkce** úlohy (6)–(7).

Poznámka

Zobrazení mezi dvěma prostory nazýváme **operátorem**. Definujeme-li operátor $T : \mathcal{C}^1(\langle a, b\rangle) \to L^2_\varrho(a, b)$ předpisem $T(y) = -(py')' + qy$, lze rovnici (6) psát ve tvaru tzv. **operátorové rovnice**:

$$Ty = \lambda \varrho y \,. \tag{8}$$

Definice

Čísla λ_n resp. funkce y_n z předchozí věty nazýváme **vlastní čísla** resp. **vlastní funkce** úlohy (6)–(7).

Poznámka

Zobrazení mezi dvěma prostory nazýváme **operátorem**. Definujeme-li operátor $T : \mathcal{C}^1(\langle a, b\rangle) \to L^2_\varrho(a, b)$ předpisem $T(y) = -(py')' + qy$, lze rovnici (6) psát ve tvaru tzv. **operátorové rovnice**:

$$Ty = \lambda \varrho y \; . \tag{8}$$

Analogicky nazýváme nenulová řešení y_n úlohy (8), (7) **vlastními funkcemi (s vahou ϱ)** operátoru T, přináležejícími **vlastnímu číslu** λ_n.

Poznámka

- Pro váhu $\varrho = 1$ má rovnice (8) pro vlastní funkce a vlastní čísla operátoru T tvar $Ty = \lambda y$.

Poznámka

- Pro váhu $\varrho = 1$ má rovnice (8) pro vlastní funkce a vlastní čísla operátoru T tvar $Ty = \lambda y$. (Srovnejte to s definicí vlastního vektoru a vlastního čísla matice.)

Poznámka

- Pro váhu $\varrho = 1$ má rovnice (8) pro vlastní funkce a vlastní čísla operátoru T tvar $Ty = \lambda y$. (Srovnejte to s definicí vlastního vektoru a vlastního čísla matice.)
- Věta 19.7 je formulována pouze pro omezené intervaly. Existují také její varianty pro neomezené intervaly, ty však jsou složitější.

Poznámka

- Pro váhu $\varrho = 1$ má rovnice (8) pro vlastní funkce a vlastní čísla operátoru T tvar $Ty = \lambda y$. (Srovnejte to s definicí vlastního vektoru a vlastního čísla matice.)
- Věta 19.7 je formulována pouze pro omezené intervaly. Existují také její varianty pro neomezené intervaly, ty však jsou složitější. Existují také varianty s obecnější sadou okrajových podmínek.

Poznámka

- Pro váhu $\varrho = 1$ má rovnice (8) pro vlastní funkce a vlastní čísla operátoru T tvar $Ty = \lambda y$. (Srovnejte to s definicí vlastního vektoru a vlastního čísla matice.)
- Věta 19.7 je formulována pouze pro omezené intervaly. Existují také její varianty pro neomezené intervaly, ty však jsou složitější. Existují také varianty s obecnější sadou okrajových podmínek. Obecně však jde vždy o věty, odpovídající na otázku "Za jakých podmínek tvoří vlastní funkce nějakého operátoru T úplný ortogonální systém v daném Hilbertově prostoru?"

Poznámka

- Pro váhu $\varrho = 1$ má rovnice (8) pro vlastní funkce a vlastní čísla operátoru T tvar $Ty = \lambda y$. (Srovnejte to s definicí vlastního vektoru a vlastního čísla matice.)
- Věta 19.7 je formulována pouze pro omezené intervaly. Existují také její varianty pro neomezené intervaly, ty však jsou složitější. Existují také varianty s obecnější sadou okrajových podmínek. Obecně však jde vždy o věty, odpovídající na otázku "Za jakých podmínek tvoří vlastní funkce nějakého operátoru T úplný ortogonální systém v daném Hilbertově prostoru?" Studiem (m.j.) i těchto otázek (které jdou nad rámec tohoto kurzu) se zabývá matematická disciplína jménem **funkcionální analýza**.

Cvičení

- Aplikujte Větu 19.7 pro $a = 0$, $b = \pi$, $p = \varrho = 1$, $q = 0$, a pro $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \delta = 1$ resp. pro $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = 0$.

Cvičení

- Aplikujte Větu 19.7 pro $a = 0$, $b = \pi$, $p = \varrho = 1$, $q = 0$, a pro $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = \delta = 1$ resp. pro $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = 0$.
- Uvažujte rovnici (6) s $a = -\pi$, $b = \pi$, $p = \varrho = 1$, $q = 0$, a se zobecněnou sadou okrajových podmínek $y(-\pi) = y(\pi)$, $y'(-\pi) = y'(\pi)$.

Poznámka

- Existuje varianta Věty 19.7, která připouští, aby funkce p nabývala v některém krajním bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ nulové hodnoty. V takovém případě se ovšem předpokládá omezenost řešení y v tomto bodě. Za těchto předpokladů dostáváme pro $a = -1$, $b = 1$, $p = 1 - t^2$, $\varrho = 1$, $q = 0$ generující rovnici pro Legendreovy polynomy.

Poznámka

- Existuje varianta Věty 19.7, která připouští, aby funkce p nabývala v některém krajním bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ nulové hodnoty. V takovém případě se ovšem předpokládá omezenost řešení y v tomto bodě. Za těchto předpokladů dostáváme pro $a = -1$, $b = 1$, $p = 1 - t^2$, $\varrho = 1$, $q = 0$ generující rovnici pro Legendreovy polynomy.
- Naznačené úvahy lze zobecnit i pro parciální diferenciální rovnice. Můžeme tak mluvit o vlastních funkcích Laplaceova operátoru jako o nenulových řešeních rovnice $-\Delta y = \lambda y$ pro $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, s nulovými okrajovými podmínkami na $\partial\Omega$, atd.