

## 17 Hilbertovy prostory

### 17.1 Úvod, základní pojmy

*Poznámka* (připomenutí). • Necht'  $(X, (\cdot, \cdot))$  je vektorový prostor se skalárním součinem nad tělesem  $\mathbb{K}$  reálných nebo komplexních čísel (říkáme též, že  $X$  je **unitární prostor** nad  $\mathbb{K}$ ). Potom  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  je norma na  $X$ , nazývaná někdy též "norma indukovaná skalárním součinem".

- Necht'  $(X, (\cdot, \cdot))$  je unitární prostor nad  $\mathbb{K}$ . Na  $X \times X$  uvažujme normu

$$\|[x, y]\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Potom je zobrazení  $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  spojitě.

**Definice.** Necht'  $(X, (\cdot, \cdot))$  je unitární prostor nad  $\mathbb{K}$ ,  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

- Řekneme, že posloupnost  $x_n \in X$  je **cauchyovská v  $X$** , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

- Řekneme, že prostor  $X$  je **úplný** vzhledem k normě  $\|\cdot\|$ , pokud každá cauchyovská posloupnost v  $X$  je konvergentní v  $X$ .
- Pokud je  $X$  úplný vzhledem k normě  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ , pak se nazývá **Hilbertovým prostorem**.

**Příklad 1.** Prostory  $\mathbb{R}^n$  (opatřené eukleidovským skalárním součinem) jsou Hilbertovými prostory **konečné dimenze**.

**Příklad 2.** Bud'  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otevřená množina. Pro  $p \in \langle 1, \infty \rangle$  definujme tzv. **Lebesgueovy ( $L^p$ ) prostory** předpisem  $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\Omega} |f|^p < \infty\}$ . Na prostoru  $L^2(\Omega)$  definujme skalární součin

$$(f, g)_2 = \int_{\Omega} f \bar{g}.$$

Prostor  $L^2(\Omega)$  s tímto skalárním součinem je Hilbertovým prostorem **nekonečné dimenze**.

**Příklad 3.** Bud'  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otevřená množina. Mějme na  $\Omega$  definovanou tzv. **váhovou funkci (váhu, hustotu)**  $\rho$  takovou, že  $\rho \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ ,  $\rho > 0$  na  $\Omega$ . Pro  $p \in \langle 1, \infty \rangle$  definujme tzv. **Lebesgueovy (váhové) prostory s vahou**  $\rho$  předpisem  $L_{\rho}^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\Omega} \rho |f|^p < \infty\}$ . Na prostoru  $L_{\rho}^2(\Omega)$  definujme skalární součin

$$(f, g)_{2, \rho} = \int_{\Omega} \rho f \bar{g}.$$

Prostor  $L_{\rho}^2(\Omega)$  s tímto skalárním součinem je Hilbertovým prostorem **nekonečné dimenze**.

*Poznámka.* • Mezi všemi  $L^p$  (resp.  $L_{\rho}^p$ ) prostory je prostor  $L^2$  (resp.  $L_{\rho}^2$ ) jediný, na kterém lze zavést skalární součin.

- Pokud má  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  **konečnou míru**, platí

$$1 \leq p < r < \infty \implies L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

**Cvičení.** • Ukažte: je-li  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  omezená na omezeném intervalu  $(a, b)$ , pak  $f \in L^p(a, b)$   $\forall p \in \langle 1, \infty \rangle$ .

- Nalezněte funkci  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  takovou, že  $f \in L^3(0, 1)$  a přitom  $f \notin L^4(0, 1)$ . (Návod: uvažujte funkce  $1/x^{\alpha}$  pro  $\alpha \in \mathbb{R}$ .)

## 17.2 Fourierovy řady v Hilbertově prostoru

**Definice.** Necht'  $X$  je Hilbertův prostor,  $\Gamma$  je indexová množina a  $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  je systém prvků prostoru  $X$ .

(i) Řekneme, že systém  $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  je **ortogonální**, jestliže platí

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma': (x_\gamma, x_{\gamma'}) = 0.$$

Jestliže navíc  $\|x_\gamma\| = 1$  pro každé  $\gamma \in \Gamma$ , potom říkáme, že je systém  $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  **ortonormální**.

(ii) Ortogonální systém  $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  je **úplný**, jestliže jeho lineární obal je **hustý** v  $X$ , tedy jestliže platí  $\overline{\text{Lin}(\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma})} = X$ .

(iii) Ortogonální systém  $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  je **maximální**, jestliže neexistuje prvek  $u \in X \setminus \{0\}$  kolmý na všechna  $x_\gamma$ , tedy pokud platí  $(u, x_\gamma) = 0 \forall \gamma \in \Gamma \implies u = 0$ .

*Poznámka.* • Zobecnění kartézského souřadného systému do (Hilbertových) prostorů nekonečné dimenze.

- Ortogonální systém vektorů tvoří lineárně nezávislou množinu vektorů.
- Z každého lineárně nezávislého systému lze učinit systém ortogonální pomocí tzv. Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu. (Viz Příklad 4 za touto poznámkou.)
- Z každého ortogonálního systému lze učinit systém ortonormální (prvky vydělíme jejich normami).
- Systém  $\{1, \sin kx, \cos kx\}_{k \in \mathbb{N}}$  je ortogonální systém v  $L^2(0, 2\pi)$ .
- Systém  $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  je ortogonální systém v  $L^2(0, 2\pi)$ .

**Příklad 4** (Gram-Schmidtův OG proces). Bud'  $\{v_1, v_2, \dots\}$  lineárně nezávislá množina nenulových prvků v Hilbertově prostoru  $X$ . Položme  $e_1 := v_1$  a dále, pro  $n \geq 2$ ,

$$e_n := v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(v_n, e_j)}{\|e_j\|^2} e_j. \quad (1)$$

Ukažte, že  $\{e_1, e_2, \dots\}$  je ortogonální množina nenulových prvků, přičemž

$$\text{Lin}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Věta 17.1.** Necht'  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  je ortogonální posloupnost nenulových prvků Hilbertově prostoru  $X$  nad  $\mathbb{K}$ . Necht'  $x = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n$ , kde  $c_n \in \mathbb{K}$ . Potom

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

**Definice.** Číslo  $c_n$ , definované pomocí (2), nazýváme  **$n$ -tým Fourierovým koeficientem** prvku  $x$  vzhledem k ortogonální posloupnosti  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Definice.** Bud'  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  ortogonální posloupnost nenulových prvků v Hilbertově prostoru  $X$  nad  $\mathbb{K}$  a mějme  $x \in X$ . Uvažujme Fourierovy koeficienty prvku  $x$  vzhledem k posloupnosti  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ , tj.

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak řadu

$$\sum_{n=1}^\infty c_n e_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \quad (3)$$

nazvu (**abstraktní**) **Fourierovou řadou** prvku  $x$  v prostoru  $X$  podle ortogonálního systému  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Otázky:**

- Jak zajistit, abych měl "všechny prvky OG systému" (tj. aby tvořil bázi)? (Úplnost? Maximalita?)
- Mám  $x \in X$ , rozvinu jej do (Fourierovy) řady. Konverguje vůbec tato řada?
- Pokud konverguje, co má společného její součet s původním prvkem  $x$ ?

**Věta 17.2** (Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost). *Nechť  $X$  je Hilbertův prostor nekonečné dimenze,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  je ortogonální systém nenulových prvků v  $X$ ,  $x \in X$ , a  $c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jsou Fourierovy koeficienty prvku  $x$  vzhledem k  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Potom*

- Vždy platí  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 \leq \|x\|^2$  (Besselova nerovnost);
- Fourierova řada  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$  vždy konverguje k nějakému prvku  $y \in X$ ;
- Je  $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \iff \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|e_n\|^2 = \|x\|^2$  (Parsevalova rovnost).

*Poznámka.* S ohledem na (2) lze Parsevalovu rovnost psát také ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} = \|x\|^2.$$

**Definice.** Nechť  $X$  je Hilbertův prostor nad  $\mathbb{K}$ . Posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  prvků z  $X$  se nazývá (**Schauderova**) **báze** prostoru  $X$ , jestliže pro každý bod  $x \in X$  existuje právě jedna posloupnost  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  prvků z  $\mathbb{K}$ , pro kterou platí  $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ .

**Věta 17.3.** *Nechť  $X$  je Hilbertův prostor a  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  je ortogonální systém nenulových prvků prostoru  $X$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  je Schauderova báze,
- $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  je úplný ortogonální systém,
- $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  je maximální ortogonální systém.
- Pro každé  $x \in X$  platí Parsevalova rovnost (vzhledem k systému  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ).
- Každý prvek  $x \in X$  je roven součtu své Fourierovy řady (vzhledem k systému  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ).

**Definice.** Nechť  $X$  Hilbertův prostor. Řeknu, že  $X$  je **separabilní**, pokud existuje spočetná množina prvků z  $X$ , která je hustá v  $X$  (tedy jejíž uzávěr je celé  $X$ ).

**Věta 17.4.**

- Nechť  $X$  je separabilní Hilbertův prostor. Potom v  $X$  existuje ortonormální spočetná (Schauderova) báze.
- Nechť  $X_1, X_2$  jsou nekonečně-dimenzionální separabilní Hilbertovy prostory. Potom jsou  $X_1$  a  $X_2$  **izometricky izomorfní** (tj. existuje mezi nimi bijekce, která zachovává skalární součin).
- Každý separabilní Hilbertův prostor dimenze  $n \in \mathbb{N}$  je izometricky izomorfní  $\mathbb{R}^n$ .

**Věta 17.5.**

- Systém  $\{1, \sin kx, \cos kx\}_{k \in \mathbb{N}}$  je úplný ortogonální systém v  $L^2(0, 2\pi)$  a tvoří v něm ortogonální bázi.
- Systém  $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  je úplný ortogonální systém v  $L^2(0, 2\pi)$  a tvoří v něm ortogonální bázi.

**Věta 17.6** (o nejlepší aproximaci). *Bud'  $X$  Hilbertův prostor a  $\{e_n\} \subset X$  ortogonální systém v  $X$ . Bud'  $x \in X$ . Potom pro libovolná  $\beta_1, \dots, \beta_N \in \mathbb{K}$  platí*

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \right\| \leq \left\| x - \sum_{n=1}^N \beta_n e_n \right\|, \quad (4)$$

přičemž nerovnost v (4) je ostrá, pokud je alespoň jedno  $\beta_j$  různé od  $\frac{(x, e_j)}{\|e_j\|^2}$ .

**17.3 Ortogonální systémy polynomů, operátory****Důležité otázky:**

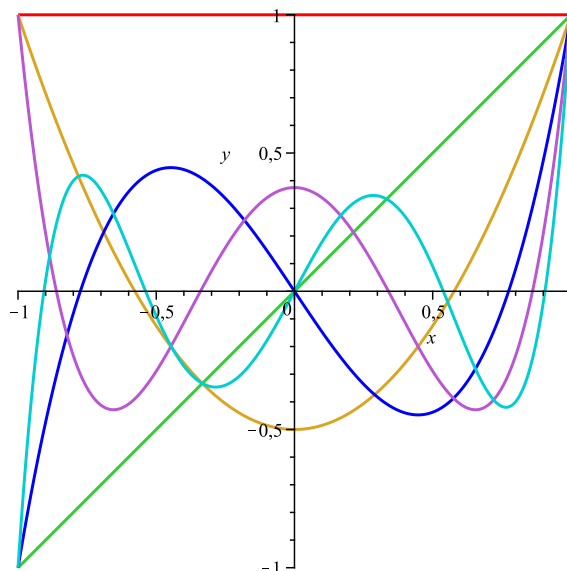
Jakým způsobem získat nějaký konkrétní úplný ortogonální systém (bázi) v  $L^2_\rho(a, b)$ ? Lze to například zařídit tak, aby tato báze byla složena z polynomů?

**Metoda I: ortogonalizace dané husté LN množiny pomocí Gram-Schmidtova procesu**

Uvažujme na  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  polynomy

$$1, x, x^2, x^3, x^4 \dots \quad (5)$$

a uvažujme (pokud  $(a, b)$  je neomezený) váhovou funkci  $\rho$  takovou, aby  $x^n \in L^2_\rho(a, b)$  pro všechna  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Ortogonalizací pomocí Gram-Schmidtova procesu dostaneme úplný systém ortogonálních polynomů v  $L^2_\rho(a, b)$ .



Obr.: Legendreovy polynomy pro  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

**Příklad 5** (Legendreovy polynomy). *Ortogonalizací systému (5) v prostoru  $L^2(-1, 1)$  dostaneme tzv. **Legendreovy polynomy**  $P_n(x)$ . Lze ukázat, že platí*

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

přičemž

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Prvních několik Legendreových polynomů je:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}, \dots$$

Podle předchozí teorie tedy platí, že pro každou funkci  $f \in L^2(-1, 1)$  platí

$$f(x) \stackrel{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

kde

$$c_n = \frac{1}{\|P_n(x)\|^2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

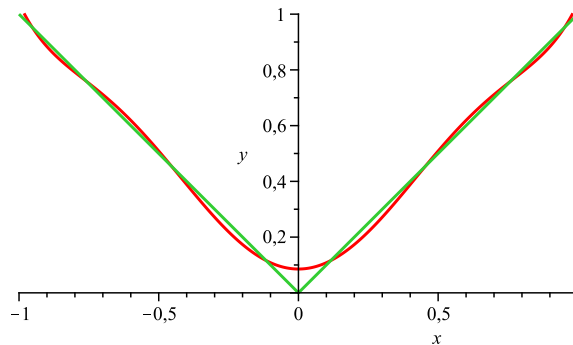
Například pro  $f(x) = |x| \in L^2(-1, 1)$  dostaneme

$$|x| \stackrel{s.v.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

kde

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 |x| P_n(x) dx,$$

což dá (spočtete)  $c_{2k+1} = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots$ ,  $c_0 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{5}{8}$ ,  $c_4 = -\frac{3}{16}$ ,  $c_6 = \frac{13}{128} \dots$  například aproximace do šestého řádu dá  $|x| \approx \frac{175}{2048} + \frac{4725}{2048} x^2 - \frac{5775}{2048} x^4 + \frac{3003}{2048} x^6$  na  $(-1, 1)$ .



Obr.: Aproximace  $|x|$  pomocí Legendreova polynomu do šestého řádu.

*Poznámka.* Legendreovy polynomy splňují tzv. **rekurentní vztah**

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

a jsou řešením tzv. **generující diferenciální rovnice**

$$((1-x^2)y')' = -\lambda y, \quad \lambda = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Příklad 6** (Čebyševovy polynomy). Ortogonalizací systému (5) v prostoru  $L^2_{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(-1, 1)$  dostaneme tzv. **Čebyševovy polynomy** (1. druhu)  $T_n(x)$ . Lze ukázat, že platí

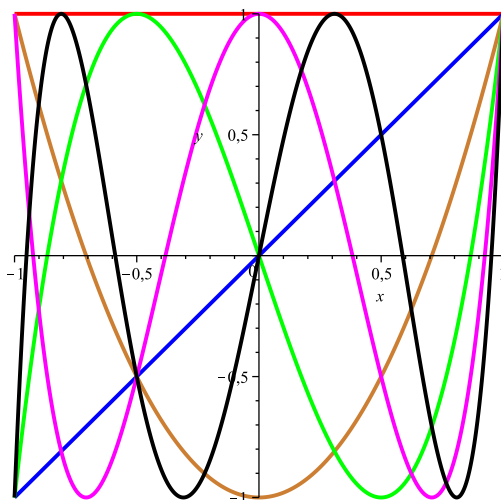
$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

přičemž

$$\|T_n(x)\|_0^2 = \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prvních několik Čebyševových polynomů je:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \dots$$



Obr.: Čebyševovy polynomy pro  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

*Poznámka.* Čebyševovy polynomy splňují **rekurentní vztah**

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= 2xT_n(x), \quad n \in \mathbb{N} \\ T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \end{aligned}$$

a jsou řešením **generující diferenciální rovnice**

$$\left(\sqrt{1-x^2} y'\right)' = -\frac{\lambda y}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lambda = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

*Poznámka.* • Ortogonalizací základního systému polynomů  $1, x, x^2, x^3, \dots$  v příslušných prostorech  $L^2_\rho(a, b)$  dostaneme odpovídající systém ortogonálních polynomů, do kterého lze rozvíjet všechny funkce, patřící do  $L^2_\rho(a, b)$ . Na konkrétní tvar těchto polynomů má vliv zejména tvar skalárního součinu v  $L^2_\rho(a, b)$ .

- Takto dostaneme například **Hermiteovy polynomy**  $H_n$  (v prostoru  $L^2_{e^{-x^2}}(-\infty, \infty)$ ), **Laguerrovy polynomy**  $L_n^s$  řádu  $s > -1$  (v prostoru  $L^2_{x^s e^{-x}}(0, \infty)$ ) a mnoho dalších. Pro každý takový systém existuje rekurentní vztah a generující diferenciální rovnice. Podrobněji viz tabulku ortogonálních systémů polynomů na stránce této přednášky.

**Metoda II: generující diferenciální rovnice, resp. generující operátor**

**Definice.** Bud'  $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  uzavřený interval,  $p, q, \varrho$  dané funkce definované na  $\langle a, b \rangle$ . Necht' dále  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . **Okrajovou úlohou v samoadjungovaném tvaru** pro neznámou funkci  $y = y(t)$  nazveme diferenciální rovnici druhého řádu v tzv. **samoadjungovaném tvaru**,

$$-(p(t)y')' + q(t)y = \lambda \varrho(t)y, \quad t \in (a, b), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (6)$$

doplňnou o tzv. **okrajové podmínky**

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \quad (7)$$

**Věta 17.7.** Uvažujme okrajovou úlohu tvaru (6)–(7), kde  $p$  je spojitá a kladná na  $\langle a, b \rangle$ ,  $p'$  je spojitá na  $(a, b)$ ,  $q$  je reálná a spojitá na  $\langle a, b \rangle$ ,  $\varrho$  je spojitá, kladná a konečně integrovatelná na  $(a, b)$ . Navíc necht' alespoň jedno z čísel  $\alpha, \beta$  a alespoň jedno z čísel  $\gamma, \delta$  je nenulové. Potom existují  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ ,  $\lim \lambda_n = \infty$  taková, že:

- Pro všechna  $\lambda \neq \lambda_n$  má úloha (6)–(7) **pouze** řešení  $y \equiv 0$ .
- Pro každé  $\lambda = \lambda_n$  existuje právě jedno (až na násobek konstantou) **nenulové** řešení  $y_n$  úlohy (6)–(7).
- Systém  $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$  je **úplný ortogonální systém funkcí** v  $L^2_\varrho(a, b)$ .

**Definice.** Čísla  $\lambda_n$  resp. funkce  $y_n$  z předchozí věty nazýváme **vlastní čísla** resp. **vlastní funkce** úlohy (6)–(7).

*Poznámka.* Zobrazení mezi dvěma prostory nazýváme **operátorem**. Definujeme-li operátor  $T: C^1(\langle a, b \rangle) \rightarrow L^2_\varrho(a, b)$  předpisem  $T(y) = -(py')' + qy$ , lze rovnici (6) psát ve tvaru tzv. **operátorové rovnice**:

$$Ty = \lambda \varrho y. \quad (8)$$

Analogicky nazýváme nenulová řešení  $y_n$  úlohy (8), (7) **vlastními funkcemi** (s **váhou**  $\varrho$ ) operátoru  $T$ , příslušnými **vlastnímu číslu**  $\lambda_n$ .

*Poznámka.* • Pro váhu  $\varrho = 1$  má rovnice (8) pro vlastní funkce a vlastní čísla operátoru  $T$  tvar  $Ty = \lambda y$ . (Srovnejte to s definicí vlastního vektoru a vlastního čísla matice.)

- Věta 17.7 je formulována pouze pro omezené intervaly. Existují také její varianty pro neomezené intervaly, ty však jsou složitější. Existují také varianty s obecnější sadou okrajových podmínek. Obecně však jde vždy o věty, odpovídající na otázku "Za jakých podmínek tvoří vlastní funkce nějakého operátoru  $T$  úplný ortogonální systém v daném Hilbertově prostoru?" Studium (m.j.) i těchto otázek (které jdou nad rámec tohoto kurzu) se zabývá matematická disciplína jménem **funkcionální analýza**.

**Cvičení.** • Aplikujte Větu 17.7 pro  $a = 0, b = \pi, p = \varrho = 1, q = 0$ , a pro  $\alpha = \gamma = 0, \beta = \delta = 1$  resp. pro  $\alpha = \gamma = 1, \beta = \delta = 0$ .

- Uvažujte rovnici (6) s  $a = -\pi, b = \pi, p = \varrho = 1, q = 0$ , a se zobecněnou sadou okrajových podmínek  $y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi)$ .

*Poznámka.* • Existuje varianta Věty 17.7, která připouští, aby funkce  $p$  nabývala v některém krajním bodě intervalu  $\langle a, b \rangle$  nulové hodnoty. V takovém případě se ovšem předpokládá omezenost řešení  $y$  v tomto bodě. Za těchto předpokladů dostáváme pro  $a = -1, b = 1, p = 1 - t^2, \varrho = 1, q = 0$  generující rovnici pro Legendreovy polynomy.

- Naznačené úvahy lze zobecnit i pro parciální diferenciální rovnice. Můžeme tak mluvit o vlastních funkcích Laplaceova operátoru jako o nenulových řešeních rovnice  $-\Delta y = \lambda y$  pro  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , s nulovými okrajovými podmínkami na  $\partial\Omega$ , atd.