11.1. Das Potential

Es gibt verschiedene Wege, diese Aufgabe zu lösen. In den einzelnen Teilaufgaben werden z. T. verschiedene Lösungsmethoden verwendet.

(a) Sei f ein Potential zu K. Aus $f_x\binom{x}{y} = P\binom{x}{y} = x^2 - 2y^3$ folgt durch Integration nach x, dass

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; = \; \int (x^2 - 2y^3)\, dx \; = \; \frac{1}{3}x^3 - 2xy^3 + g(y),$$

wobei die Integrationskonstante $g(y)$ von y, aber keinesfalls von x, abhängen darf. Durch Ableiten dieser Gleichung nach y erhalten wir

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -6xy^2 + g'(y).$$

Zusammen mit der Gleichung

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{!}{=} Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 5y,$$

schliessen wir daraus, dass gilt $g'(y) = 6xy^2 + x + 5y$ und mit dem unbestimmten Integral

$$g(y) = 2xy^3 + xy + \frac{5}{2}y^2 + c$$

für eine Konstante c. Dies ist ein Widerspruch, da die Funktion g nur von y abhängen darf. Folglich existiert kein Potential.
Aliter: Für das hier betrachtete Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$,

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^3 \\ x + 5y \end{pmatrix},$$

gilt $P_y - Q_x = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -6y^2 - 1 \neq 0$. Folglich ist K nicht wirbelfrei und besitzt daher kein Potential.

(b) Sei f ein Potential zu K. Aus $f_x\binom{x}{y} = P\binom{x}{y} = y^2 + 5$ folgt dann mit dem unbestimmten Integral

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; = \; \int (y^2 + 5)\, dx \; = \; (y^2 + 5)x + g(y) \; = \; xy^2 + 5x + g(y),$$

wobei die Integrationskonstante $g(y)$ noch von y abhängen darf! Ableiten dieser Gleichung nach y liefert

$$f_y\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2xy + g'(y).$$

Andererseits gilt

$$f_y\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} Q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2xy - 8,$$

also $g'(y) = -8$ und somit $g(y) = -8y + c$ für eine Konstante c. Somit ist

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xy^2 + 5x - 8y + c$$

ein Potential zu K.

Bemerkung: Da $\mathbb{R}^2$ zusammenhängend ist, unterscheiden sich zwei beliebige Potentiale nur um eine konstante Funktion. Darum hat jedes Potential von K die genannte Gestalt.

Aliter: Für das hier betrachtete Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$,

$$K\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y^2+5\\2xy-8\end{pmatrix},$$

gilt $P_y - Q_x = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 2y = 0$. Damit ist K wirbelfrei. Da ausserdem der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, besitzt K ein Potential. Daraus folgt, dass das Linienintegral

$$f(P) := \int_{P_0}^{P} K \cdot \mathrm{d}x$$

nicht von der Wahl eines Wegs von P_0 nach P abhängt, und definiert für jeden festen Anfangspunkt $P_0 \in \mathbb{R}^2$ ein Potential zu K. Der Einfachheit halber wählen wir als Weg die gerade Strecke

$$\gamma \ : \ t \mapsto \begin{pmatrix}xt\\yt\end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1],$$

von $P_0 := \binom{0}{0}$ nach $P = \binom{x}{y}$. Das Potential f ergibt sich dann als

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \int_0^1 K(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 K\begin{pmatrix}xt\\yt\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix}y^2t^2+5\\2xyt^2-8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big[xy^2t^2 + 5x + 2xy^2t^2 - 8y\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[xy^2t^3 + (5x-8y)t\Big]_{t=0}^{1} \\
&= xy^2 + 5x - 8y\,.
\end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüft, gilt in der Tat $\nabla f = K$.

(c) Wir berechnen $\frac{\partial A}{\partial z}(x,y,z)$ und $\frac{\partial C}{\partial x}(x,y,z)$. Wir bekommen

$$\frac{\partial A}{\partial z}(x,y,z) = 2z$$

und

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x,y,z) = z\,.$$

Wir sehen, dass im Allgemeinen

$$\frac{\partial A}{\partial z}(x,y,z) \neq \frac{\partial C}{\partial x}(x,y,z)$$

ist.

Daher ist K nicht konservativ, weil die notwendige Bedingung nicht gilt.

11.2. Das Potential

Wir betrachten in der punktierten x-y–Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Der Kreis mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt am Ursprung kann auf folgende Weise durch eine Winkelkoordinate parametrisiert werden:

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [\,0, 2\pi)\,.$$

Daraus erhalten wir

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix},\; K(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \frac{-2R\cos(t)\cdot R\sin(t)}{(R^2)^2} \\ \frac{R^2\cos^2(t)-R^2\sin^2(t)}{(R^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ \cos^2(t)-\sin^2(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}\Big\langle K(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\Big\rangle &= \frac{1}{R^2}\left\langle \begin{pmatrix} -2\cos(t)\sin(t) \\ \cos^2(t)-\sin^2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}\right\rangle \\ &= \frac{1}{R}\Big[\,2\cos(t)\sin^2(t) + \cos^3(t) - \cos(t)\sin^2(t)\Big] \\ &= \frac{1}{R}\,\cos(t)\Big[\,\cos^2(t) + \sin^2(t)\Big] = \frac{1}{R}\,\cos(t).\end{aligned}$$

Das Umlaufintegral berechnet sich also zu

$$\oint_\gamma K \cdot dx = \int_0^{2\pi} \Big\langle K(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \Big\rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \cos(t)\, dt = \frac{1}{R} \sin(t) \Big|_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

(b) Wir suchen ein Potential von K, d.h. eine Funktion $f\binom{x}{y}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ mit

$$\nabla f = K$$

oder in Komponenten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,. \tag{1}$$

Wir lösen die erste Gleichung in (1) durch unbestimmte Integration nach x (y ist dabei eine Konstante) und erhalten

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx = \int \frac{-y}{u^2}\, du = \frac{y}{u} + C(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C(y),$$

wobei wir die Substitution $u = u(x) := x^2 + y^2$ mit $du = 2x\, dx$ verwendet haben. Jetzt setzen wir $f\binom{x}{y} = \frac{y}{x^2+y^2} + C(y)$ in die zweite Gleichung in (1) ein und finden

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y) \overset{!}{=} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

woraus folgt

$$C'(y) = 0 \;\Leftrightarrow\; C(y) = C = \text{konst.}$$

Die Funktion

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{x^2+y^2} + C\,,$$

ist daher ein Potential von K, wobei für C eine beliebige Konstante gewählt werden kann (z.B. $C = 0$). Das Feld K ist damit ein Gradientenfeld und folglich konservativ.

(c) Für ein Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1\binom{x}{y} \\ K_2\binom{x}{y} \end{pmatrix}$$

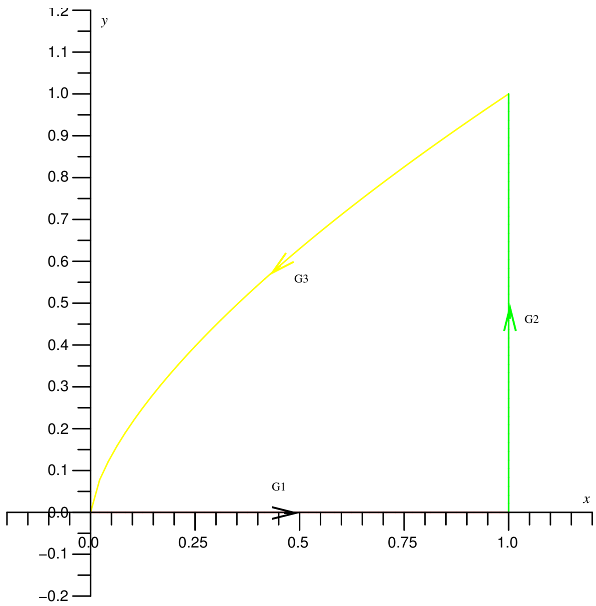
lautet die Integrabilitätsbedingung $\operatorname{rot} K := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0$, was wir durch direkte Rechnung nachprüfen können. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} K = \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right] \\
&= \frac{2x(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&\quad + \frac{2x(x^2+y^2)^2 - (2xy)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\cdot 4x + 2x(x^2+y^2) - (2xy)\cdot 4y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{4x\Big[(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\Big] - (2xy)\cdot 4y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{8xy^2 - 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = 0\,.
\end{aligned}$$

11.3. Satz von Green

(a) Zunächst skizzieren wir den Rand ∂B des Gebietes

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le x^{2/3} \right\}.$$



Nun parametrisieren wir die drei Randstücke G_1, G_2 und G_3 durch die drei Kurvenstücke

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \ \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ (1-t)^{2/3} \end{pmatrix},$$

wobei wir jeweils $t \in [\,0, 1\,]$ wählen. Die Tangentialvektoren an diese Kurvenstücke sind

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3}\,(1-t)^{-1/3} \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 := \int_{\gamma_1} K \cdot dx &= \int_{\gamma_1} \Big\langle K(\gamma_1(t)), \dot\gamma_1(t) \Big\rangle\, dt = \int_{\gamma_1} \left\langle \begin{pmatrix} x(t)\,y(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 0\, dt = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 := \int_{\gamma_2} K \cdot dx &= \int_{\gamma_2} \Big\langle K(\gamma_2(t)), \dot\gamma_2(t) \Big\rangle\, dt = \int_{\gamma_2} \left\langle \begin{pmatrix} x(t)\,y(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 1\, dt = 1 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} I_3 := \int_{\gamma_3} K \cdot dx &= \int_{\gamma_3} \Big\langle K(\gamma_3(t)), \dot\gamma_3(t) \Big\rangle\, dt = \int_{\gamma_3} \left\langle \begin{pmatrix} x(t)\,y(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} (1-t)^{5/3} \\ (1-t)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3}\,(1-t)^{-1/3} \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \Big[-(1-t)^{5/3} - \frac{2}{3}\,(1-t)^{5/3} \Big]\, dt = \int_0^1 -\frac{5}{3}\,(1-t)^{5/3}\, dt \\ &= \left[\frac{5}{8}\,(1-t)^{8/3} \right] \Bigg|_0^1 = -\frac{5}{8}\,. \end{aligned}$$

Da die Parametrisierungen der Randkurvenstücke so gewählt wurden, dass der Rand ∂B mit wachsenden Kurvenparametern jeweils im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, gilt

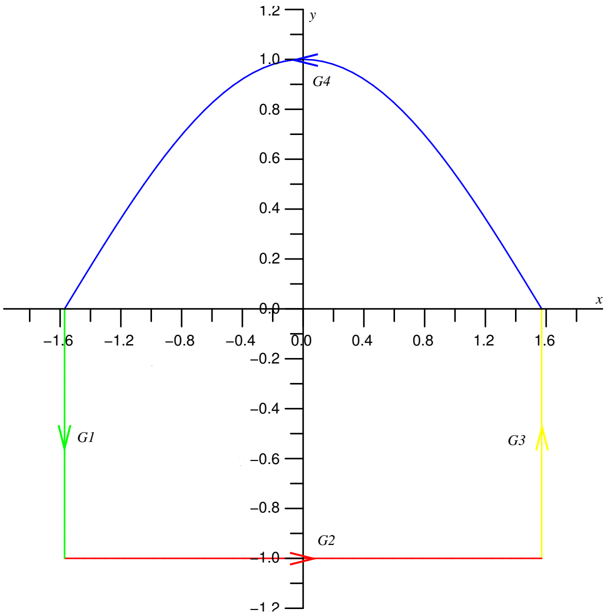
$$I_a = \oint_{\partial B} K \cdot dx = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}\,.$$

Durch Anwendung des Satzes von GREEN erhalten wir das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned} I_a &= \oint_{\partial B} K \cdot dx = \int_B \left[K^2_x - K^1_y \right] dx\, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^{2/3}} [\, 2x - x \,]\, dy\, dx = \int_0^1 x \cdot x^{2/3}\, dx = \int_0^1 x^{5/3}\, dx = \frac{3}{8}\,. \end{aligned}$$

(b) Zunächst skizzieren wir den Rand ∂B des Gebietes

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ -1 \leq y \leq \cos(x) \right\}.$$



Nun parametrisieren wir die vier Randstücke G_1, G_2, G_3 und $-G_4$ durch die vier Kurvenstücke

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \qquad \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}+t\pi \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1],$$
$$\gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \qquad \gamma_4 \,:\, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Die Tangentialvektoren an diese Kurvenstücke sind

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \dot\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$I_1 := \int_{\gamma_1} K \cdot dx = \int_{\gamma_1} \Big\langle K(\gamma_1(t)), \dot\gamma_1(t) \Big\rangle\, dt = \int_{\gamma_1} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$
$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -t \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 1\, dt = 1,$$

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_{\gamma_2} K \cdot dx = \int_{\gamma_2} \Big\langle K(\gamma_2(t)), \dot\gamma_2(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_2} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + t\pi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = -\pi \int_0^1 1 \, dt = -\pi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_{\gamma_3} K \cdot dx = \int_{\gamma_3} \Big\langle K(\gamma_3(t)), \dot\gamma_3(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_3} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t-1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 1 \, dt = 1 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} I_4 &:= \int_{\gamma_4} K \cdot dx = \int_{\gamma_4} \Big\langle K(\gamma_4(t)), \dot\gamma_4(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_4} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\cos(t) - \sin^2(t) \Big] \, dt \\ &= \sin(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2} \,. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Durchlaufrichtungen der gewählten Parametrisierungen der Randkurvenstücke gilt

$$I_b = \oint_{\partial B} K \cdot dx = I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 1 - \pi + 1 - \left[2 - \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{\pi}{2} \,.$$

Durch Anwendung des Satzes von Green erhalten wir das gleiche Ergebnis:

$$\begin{aligned} I_b &= \oint_{\partial B} K \cdot dx = \int_B \operatorname{rot}(K) \, dB = \int_B \Big[K^2_x - K^1_y \Big] \, dx \, dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^{\cos(x)} [\cos(x) - 1] \, dy \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x) - 1] \cdot [\cos(x) + 1] \, dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\cos^2(x) - 1 \Big] \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \,. \end{aligned}$$