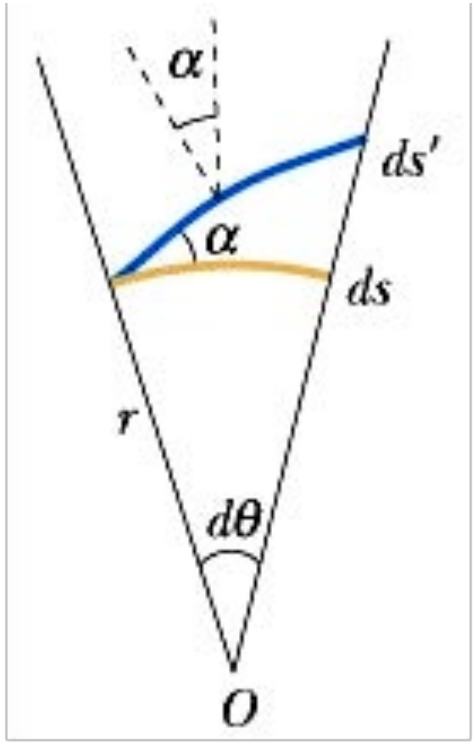
Equivalentemente si può dedurre la legge di Gauss dalla legge di Coulomb usando l’angolo solido.

Dall'angolo piano a quello solido

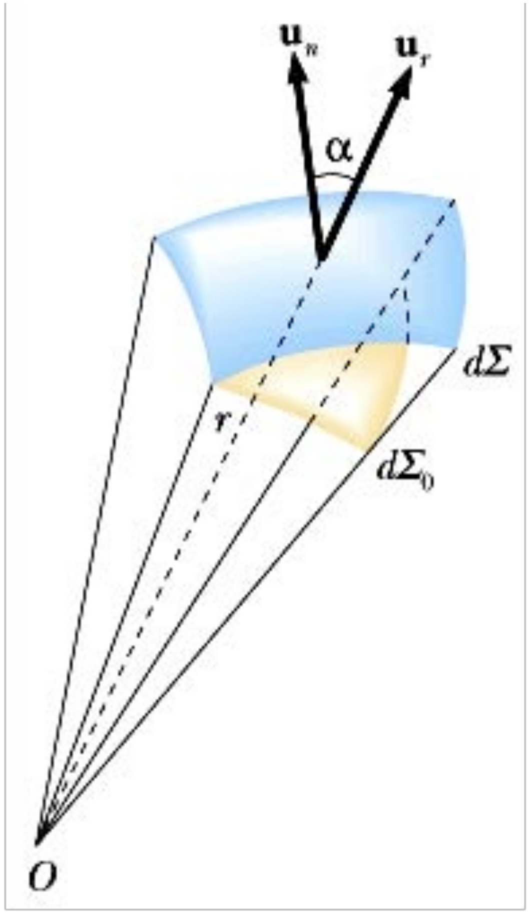
L'angolo solido è l'estensione tridimensionale dell'angolo piano infinitesimo



$$d\vartheta \equiv \frac{ds'\cos\alpha}{r} = \frac{ds}{r}$$

L'angolo solido

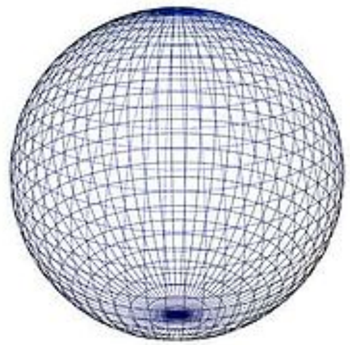
Dato un elemento dS di superficie, $\mathbf{u_n}$ la sua normale e dS_0 la sua proiezione a $\mathbf{u_r}$, il versore del raggio r uscente dal punto di osservazione O, definiamo l'elemento dΩ di angolo solido



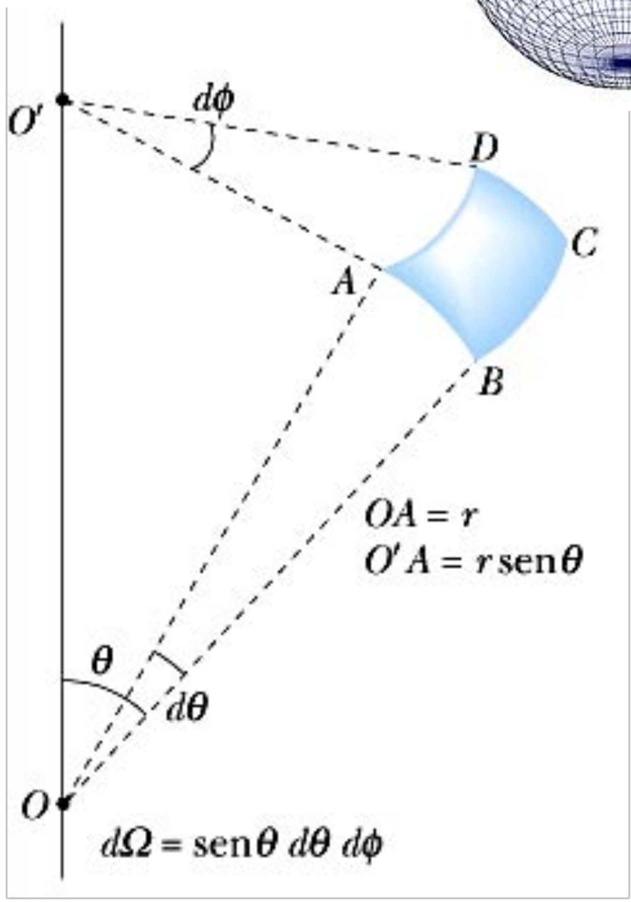
$$d\Omega \equiv \frac{dS\cos\alpha}{r^2} = \frac{dS_0}{r^2}$$

dS_0 è un elemento di calotta sferica

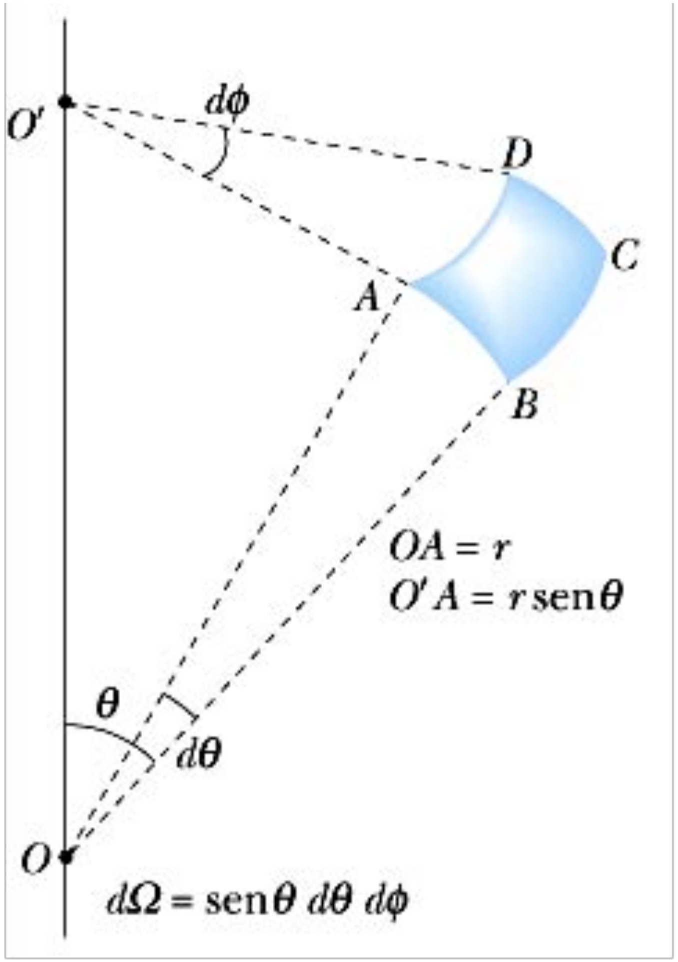
Per calcolare l'elemento di calotta sferica dS_0 ci mettiamo in coordinate sferiche :

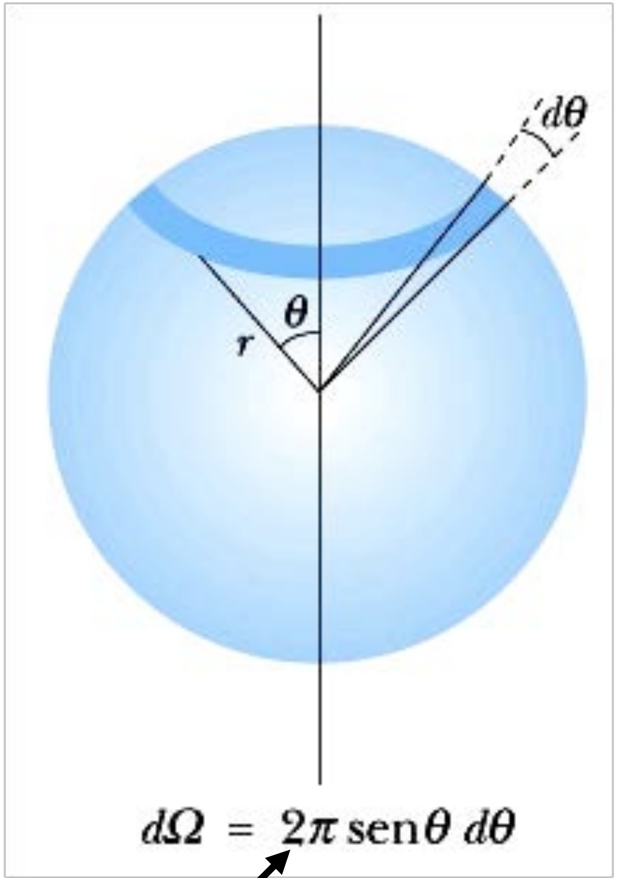


$$dS_0 = (AB)(AD) =$$
$$= (r d\vartheta)(r \sin\vartheta d\phi) =$$
$$= r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\phi$$
$$\Rightarrow d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\phi$$



$$\Omega = \iint \sin\vartheta d\vartheta d\phi$$





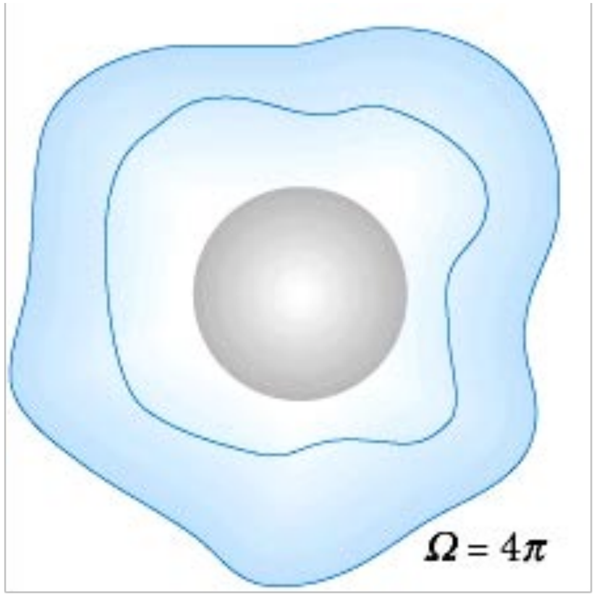
per una corona sferica infinitesima integro su ϕ da 0 a 2π

Integrando anche su ϑ da ϑ_1 a ϑ_2

$$\Omega(\vartheta_1,\vartheta_2) = 2\pi \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= 2\pi(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2)$$

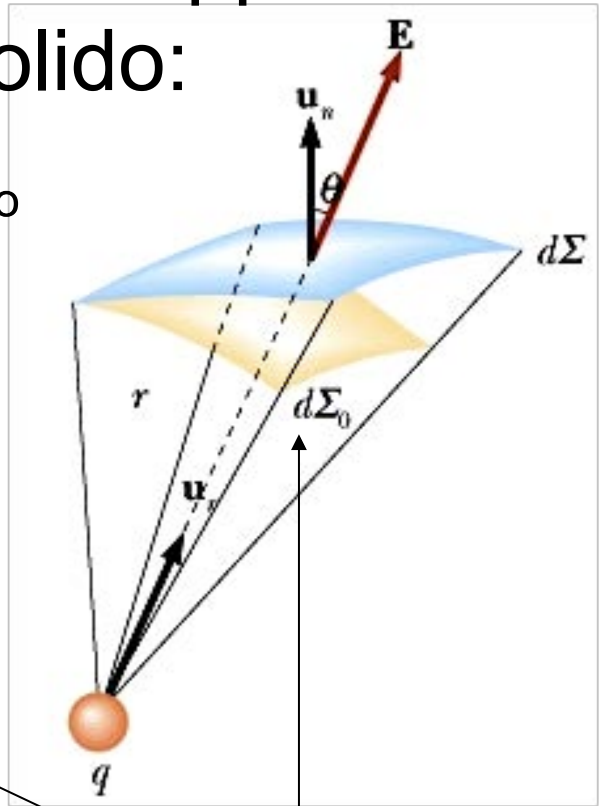
Integrando da 0 a π otteniamo l'angolo solido sotto cui dal centro è vista tutta la superficie sferica



UNITÀ DI MISURA: STERADIANTE

Equivalentemente si può dedurre la legge di Gauss da Coulomb+ Princ. Sovrapposizione usando l'angolo solido:

Partiamo sempre dalla carica puntiforme e prendiamo un generico elemento di superficie orientata



$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n dS =$$

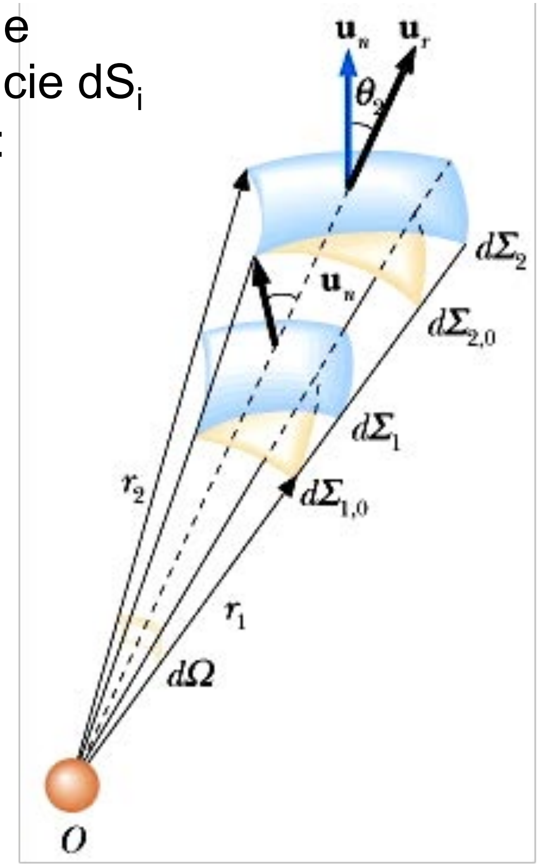
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cos\vartheta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS_0}{r^2}$$

angolo solido $d\Omega$ sotto cui è visto il contorno di dS

proiezione di dS sul piano $\perp$ a $\mathbf{u_r}$

Il flusso di E di una carica puntiforme q <u>dipende</u> <u>solo</u>* <u>dal</u> <u>l'angolo solido</u> (non dalla superficie né dalla sua distanza da q)

Infatti prese un insieme di semirette che partono da q e che definiscono un cono infinitesimo con vertice in q, ∀ superficie dS_i il cui contorno si appoggi sulla superficie laterale del cono:



$$d\Omega =$$

$$= \frac{dS_1 \cos\vartheta}{r_1^2} = \frac{dS_{1,0}}{r_1^2} =$$

$$= \frac{dS_2 \cos\vartheta}{r_2^2} = \frac{dS_{2,0}}{r_2^2} = \ldots$$

*dipende solo dall'angolo solido grazie alla dipendenza $1/r^2$

Il flusso attraverso la superficie finita S vale allora

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \Omega$$

Passando ora ad una superficie chiusa dobbiamo distinguere i casi in cui

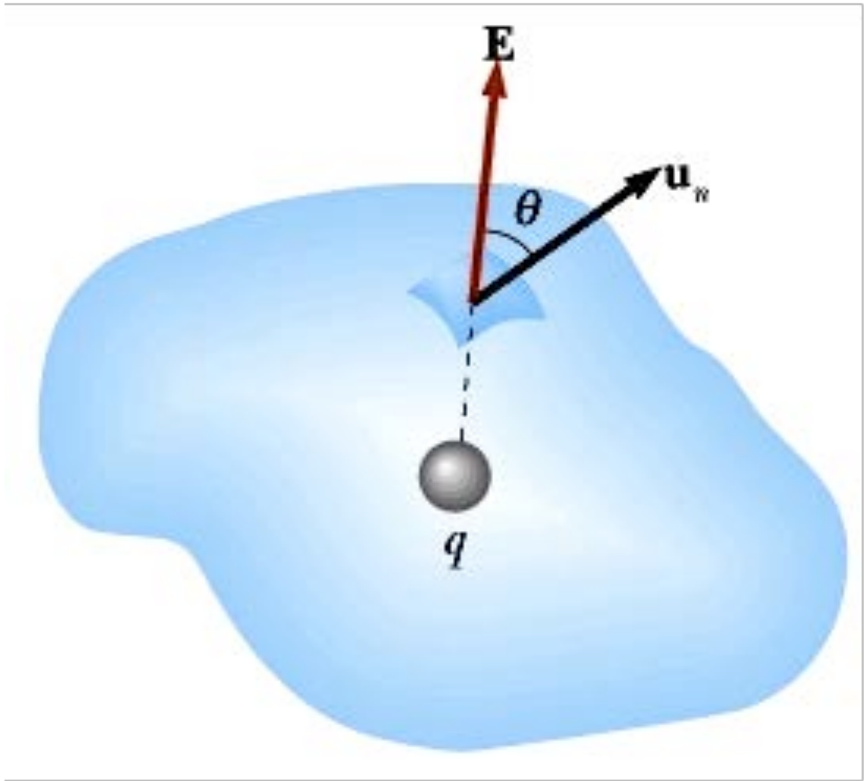
- carica interna
- carica esterna

Se la carica è interna alla superficie chiusa, tutti i contributi hanno lo stesso segno e si sommano

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS =$$

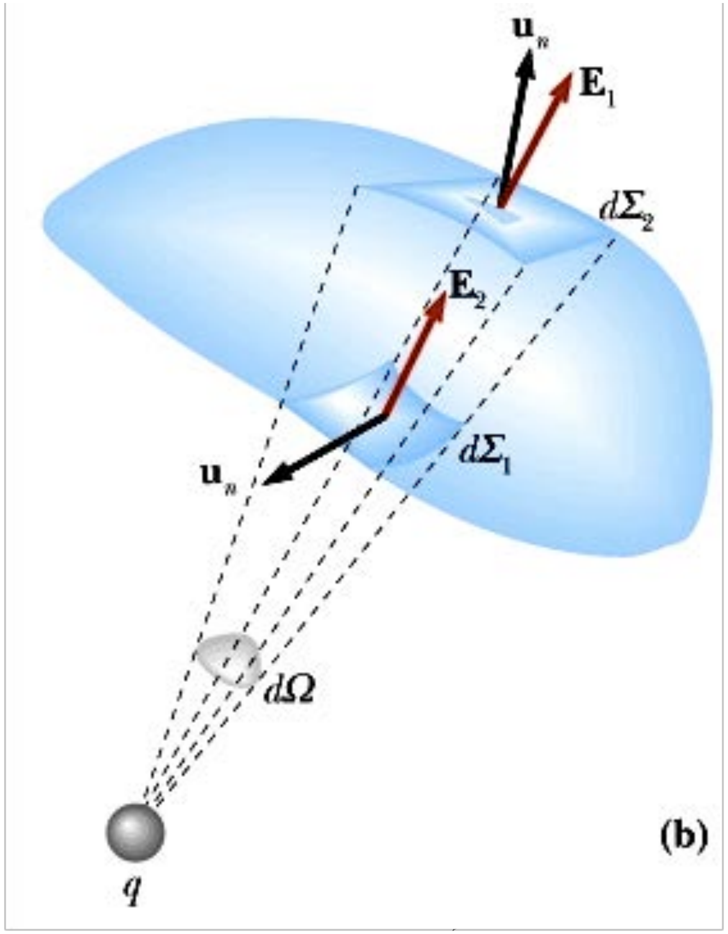
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S d\Omega =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



l'angolo solido totale sotto cui
è vista una superficie chiusa qualunque da un punto all'interno

Se la carica è <u>esterna</u> alla superficie chiusa, considerando un cono elementare che sottende l'angolo solido $d\Omega$ e che stacca sulla superficie chiusa due elementi dS_1 e dS_2 l'orientazione della normale è tc i segni dei flussi elementari siano opposti e che:



$$d\Phi_1(\vec{E}) \equiv \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS_1 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

$$d\Phi_2(\vec{E}) \equiv \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

$$\Rightarrow d\Phi_1(\vec{E}) + d\Phi_2(\vec{E}) = 0$$

integrando su tutta la superficie si ottiene

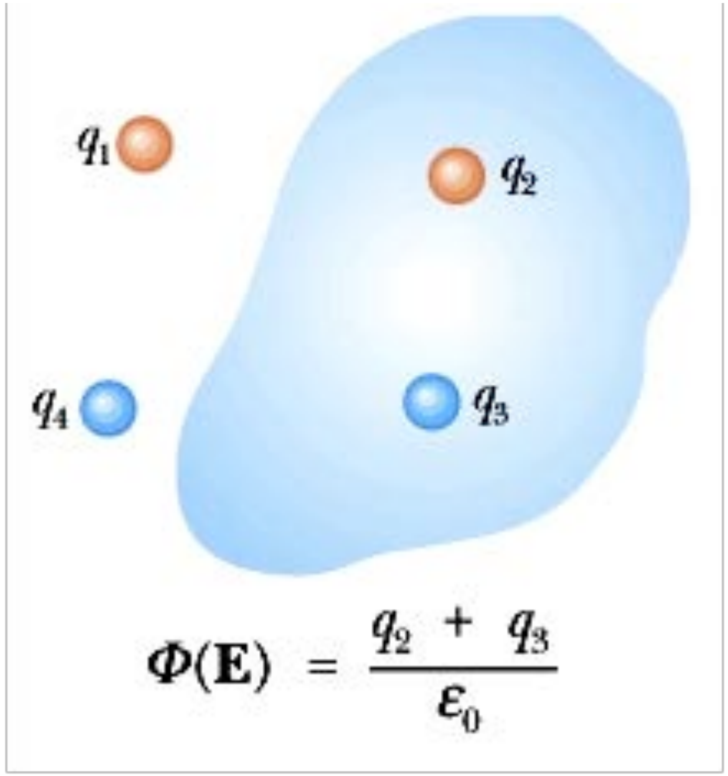
$$\Phi(E) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS = 0$$

Se ci sono più cariche puntiformi, al solito usiamo il principio di sovrapposizione e l'additività degli integrali:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS =$$

$$= \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot \hat{u}_n dS =$$

$$= \sum_i \underbrace{\oint_S \vec{E}_i \cdot \hat{u}_n dS}_{q_i/\varepsilon_0 ,\ 0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i^{\text{int}} q_i$$



Se le cariche sono distribuite in modo continuo all'interno di un volume τ racchiuso dalla superficie S

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_\tau dq}_{\text{carica totale interna ad S}}$$

IN CONCLUSIONE:

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

comunque siano distribuite!

La legge di Gauss si dimostra grazie alla dipendenza $1/r^2$ ed è quindi formulazione alternativa della legge di Coulomb basata sul concetto di campo

Legge di Gauss

Unificando le scritture precedenti:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Vedremo che questa equazione integrale (1ª eq. di Maxwell) ha una formulazione differenziale o locale.