Universidad Zaragoza

Trabajo de fin de grado en Matemáticas

Fundamentos del análisis armónico sobre grupos localmente compactos abelianos

Pilar Virgós Navarro

Facultad de Ciencias Universidad Zaragoza

Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: José E. Galé

Prólogo

El análisis armónico abstracto es una de las ramas modernas del análisis matemático. Hunde sus raíces en el primer tercio del siglo XX. Entre las ideas centrales que lo motivan está la de unificar las varias transformadas de Fourier generalizándolas a una transformación de funciones integrables definida sobre grupos localmente compactos.

Los grupos topológicos fueron introducidos por Schreier en 1926, en un contexto en el que ya se conocían los grupos de Lie (grupos continuos de transformaciones). Hacia los años 30 del siglo pasado hubo una actividad muy intensa y fructífera en grupos topológicos. De esa época datan los trabajos de Weyl, la introducción de la medida de Haar y los trabajos de Pontryagin estableciendo el teorema de dualidad de grupos topológicos localmente compactos abelianos, que junto con la transformada de Fourier son la piedra angular del análisis armónico.

Un grupo importante en este contexto es el toro o circunferencia unidad $\mathbb{T}$, grupo mutiplicativo de los números complejos de módulo uno, con la topología inducida por la usual de $\mathbb{C}$. En efecto, $\mathbb{T}$ es el objeto dualizante en la teoría de dualidad de Pontryagin. Los homomorfismos de un grupo abeliano cualquiera G en $\mathbb{T}$ se denominan caracteres, y su conjunto $Hom(G,\mathbb{T})$ constituye un grupo respecto de la operación definida puntualmente.

En este trabajo se exponen los fundamentos de la teoría abstracta de la medida de Haar, la transformada de Fourier, y la dualidad de Pontryagin sobre grupos topológicos localmente compactos abelianos. Se trata de un tema que abarca aspectos algebraicos, topológicos, de teoría de la medida y de análisis de Fourier.

A partir de la teoría mínima necesaria sobre grupos topológicos, del teorema de existencia y unidad de la medida de Haar, y del concepto y resultados básicos sobre álgebras de Banach conmutativas y su representación de Gelfand, llegaremos a $L^1(G)$, espacio de las funciones integrables en el grupo localmente compacto y abeliano G. Definiremos la operación de convolución sobre G en $L^1(G)$ y sus principales propiedades, y analizaremos $L^1(G)$ como álgebra de Banach identificando el espectro del álgebra con el grupo dual de G. Daremos los resultados fundamentales sobre la transformada de Fourier en G, para concluir con el teorema de dualidad de Pontryagin. A continuación, un breve bosquejo de los elementos a tratar:

1. GRUPOS LOCALMENTE COMPACTOS Y MEDIDA DE HAAR. Un grupo topológico es un grupo, en sentido algebraico, dotado de una topología para la cual las operaciones de multiplicación (o producto) y de inversión son continuas. Los grupos a tratar en este trabajo son localmente compactos como espacios topológicos. De esta forma, podemos considerar la σ-álgebra $\mathscr{B}(G)$ de los conjuntos borelianos de G (y su completada) y estudiar aspectos de teoría de la medida sobre G. Concretamente la medida de Haar, que es por definición invariante para la operación producto en G y representa una manera de asignar un volumen invariante a los subconjuntos de grupos localmente compactos. En el presente trabajo presentamos algunas de las propiedades básicas de teoría de la medida sobre grupos localmente compactos y demostramos la existencia y unicidad de la medida de Haar.

2. ÁLGEBRAS DE BANACH Y REPRESENTACIÓN DE GELFAND. La teoría de los anillos normados, conocidos posteriormente como álgebras de Banach, tiene su origen en la primera mitad

del siglo XX. Trabajos de Hilbert, Banach y Riesz ayudaron a Gelfand a desarrollar toda una teoría dentro del análisis matemático que culminó con la publicación del libro de Gelfand que recoge los elementos fundamentales de la misma. En este trabajo presentamos los conceptos relevantes y resultados necesarios de álgebras de Banach, con el fín de llegar a la definición y propiedades de la transformada de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas con o sin identidad. La transformada de Gelfand es indispensable para establecer los fundamentos del análisis de Fourier en grupos localmente compactos.

3. DUALIDAD EN GRUPOS LOCALMENTE COMPACTOS ABELIANOS. Las bases de la teoría de grupos abelianos localmente compactos y de su dualidad fueron sentadas por Lev Pontryagin en 1934. Los puntos cruciales de la misma, que tratamos en este capítulo, son:

   a) Definición de la operación convolución en el espacio $L^1(G)$, con G grupo localmente compacto y abeliano, que da a $L'(G)$ estructura de álgebra de Banach, junto con los resultados fundamentales consecuentes a estas definiciones. La definición de la convolución es posible gracias a la existencia de medida de Haar en G.

   b) Introducción del grupo dual de G y su identificación con el conjunto de caracteres del álgebra $L^1(G)$, para llegar a la transformada de Fourier y a sus propiedades fundamentales.

   c) Los teoremas fundamentales del análisis de Fourier: El primer teorema de inversión, el teorema de Plancherel y el teorema de la dualidad de Pontryagin y la principal consecuencia del mismo.

Finalmente, quisiera dejar constancia de mi gratitud hacia mi familia, la cual siempre me ha apoyado y ha confiado en mí, y sobretodo a mi tutor, Jose E. Galé, por toda la ayuda proporcionada, por su paciencia, y su humor, que han beneficiado mucho a la hora de sacar adelante este trabajo.

Summary

In classical Fourier analysis the action takes place on the unit circle, on the integers and on the real line. During the last 25 or 30 years, however, an increasing number of mathematicians have adopted the point of view that the most appropiate setting for the development of the theory of Fourier analysis is furnished by the class of all locally compact abelian groups. The relative ease with which the basic concepts and theorems can be transferred to this general context may be one of the factors which contributes to the feeling of some that this extension is a dilution of the classical theory, that it is merely generalization for the sake of generalization.

The purpose of this paper is to develop the basic Theorems of Fourier Analysis. This development is based in some simple facts concerning topological groups and Banach algebras.
A brief sketch of the chapters follows.

1. Topological groups

The general discussion begins with basic notions and culminates with the proof of the existence and uniqueness of Haar (invariant) measures on locally compact groups.

A *topological abelian group* (LCA group) is an abelian group G (identity denoted e) together with a topology such that the following conditions hold: the group operation $(x,y) \mapsto xy$ is a continuous mapping of the product space $G \times G$ onto G and the map $x \mapsto x^{-1}$ is likewise continuous. It follows that translation (on either side) by any given group element is a homeomorphism $G \to G$. Thus the topology is translation invariant in the sense that for all $g \in G$ and $U \subseteq G$ the following three assertions are equivalent:

$$(i)\ U \text{ is open} \qquad (ii)\ gU \text{ is open} \qquad (iii)\ Ug \text{ is open.}$$

If X is a topological space and $x \in X$, we shall say that $U \subseteq X$ is a *neighborhood of x* if x lies in the interior of U (i.e., the largest open subset contained in U). Thus a neighborhood need not be open, and it makes sense to speak of a closed or compact neighborhood, as the case may be. A subset S of G is called *symetric* if $S = S^{-1}$.

Recall that a topological space is called *locally compact* if every point admits a compact neighborhood. A topological abelian group G that is both locally compact and Hausdorff is called *locally compact abelian group*.

On the other hand, given an arbitrary function f on a group, we define its left and right translates by the formulas

$$L_h f(g) = f(h^{-1}g) \qquad R_h f(g) = f(gh).$$

If f is a (real-or complex-valued) continuous function on a topological group, we say that f is *left uniformly continuous* if for every $\varepsilon > 0$ there is a neighborhood V of e such that $h \in V \Rightarrow \|L_h f - f\|_u < \varepsilon$ where $\|\cdot\|_u$ denotes the uniform, or sup norm. Right uniform continuity is defined similarly. Recall that $\mathscr{C}_c(G)$ is denotes the set of continuous functions on G with compact support.

Finally, we first refresh a sequence of fundamental definitions from analysis that culminate in the definition of Haar measure.

A collection $\mathscr{R}$ of subsets of a set X is called *σ-algebra* if it satisfies the following conditions: (i) $X \in \mathscr{R}$; (ii) If $A \in \mathscr{R}$, then $A^c \in \mathscr{R}$, where A^c denotes the complement of A in X; (iii) Suppose that $A_n \in \mathscr{R}$ $(n \geq 1)$, and let $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Then also $A \in \mathscr{R}$; that is, $\mathscr{R}$ is closed under countable unions.A set X together with a σ-algebra of subsets $\mathscr{R}$ is called *measurable space*. If X is moreover a topological space, we may consider the smallest σ-algebra $\mathscr{B}$ containing all of the open sets of X. The elements of $\mathscr{B}$ are called the *Borel subsets* of X.

A *positive measure* μ on an arbitrary measurable space $< X, \mathscr{R} >$ is a function $\mu : \mathscr{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ that is countably additive for any family $\{A_n\}$ of disjoint sets in $\mathscr{R}$. In particular, a positive measure defined on the Borel sets of locally compact Hausdorff space X is called a *Borel measure*.

Let μ be a Borel measure on a locally compact Hausdorff space X, and let E be a Borel subset of X. We say that μ is *outer regular* on E if $\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) \;:\; U \supseteq E,\, U \text{ open}\}$. We say that μ is *inner regular* on E if $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \;:\; K \subseteq E,\, K \text{ compact}\}$. A *Radon measure* on X is Borel measure that is finite on compact sets, outer regular on all Borel sets and inner regular on all open sets.

Let G be a group and let μ be a Borel measure on G. We say that μ is *left translation invariant* if for all Borel subsets E of G, $\mu(sE) = \mu(E)$ for all $s \in G$. Right translation invariance is defined similarly.

Let G be a locally compact topological group. Then a *left (respectively, right) Haar measure* on G is a nonzero Radon measure μ on G that is left (respectively, right) translation-invariant. The existence of a left Haar measure is equivalent to the existence of a right Haar measure, and, in a sense, equates the translation invariance of measure with that of integration. As usual, we let

$$\mathscr{C}_c^+(G) = \{f \in \mathscr{C}_c(G) \;:\; f(s) \geq 0 \;\forall s \in G \text{ and } \|f\|_u > 0\}$$

Let G be a locally compact group with nonzero Radon measure μ. Then: (i) The measure μ is a left Haar measure on G if and only if the measure $\tilde{\mu}$ defined by $\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$ is a right Haar measure on G; (ii) The measure μ is a left Haar measure on G if and only if $\int_G L_s f d\mu = \int_G f d\mu$ for all $f \in \mathscr{C}_c^+$ and $s \in G$; (iii) If μ is a Left Haar measure on G , then μ is positive on all nonempty open subsets of G and $\int_G f d\mu > 0$ for all $f \in \mathscr{C}_c^+$; (iv) If μ is a left Haar measure on G, then $\mu(G)$ is finite if and only if G is compact.With these preliminaries completed, we now come to one of the major theorems in analysis.

THEOREM. *Let G be a locally compact group. Then G admits a left (hence right) Haar measure. Moreover, this measure is unique up to a scalar multiple.*

Via the Riesz representation theorem and statement (ii) previous, the existence part of the proof reduces to the construction of a left-invariant linear functional on $\mathscr{C}_c(G)$. The key idea is the introduction of a translation-invariant device for comparing functions in $\mathscr{C}_c^+$.

2. Banach algebras and the Gelfand transform

A vector space A over the complex field is a *commutative algebra* if a multiplication is defined in A which satisfies the usual commutative, associative and distributive laws. If a norm is defined in a commutative algebra A which makes A into a Banach space, and if the inequality $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ holds for all $x, y \in A$, then A is a *commutative Banach algebra*.

In this summary, the symbol A will always denote a commutative Banach algebra. There may or may not be a *unit* in A,i.e., an element e such thtat $xe = x$ for all $x \in A$. If A has a unit, the norm of A can be replaced by an equivalent one such that $\|e\| = 1$. The element $x \in A$ is *invertible* if it has a multiplicative inverse, i.e., if there is an element $x^{-1} \in A$ such that $x^{-1}x = e$.

A subalgebra I of A is an *ideal in* A if $xy \in I$ whenever $x \in A$ and $y \in I$. If $I \neq A$, I is a *proper ideal*. *Maximal ideals* are proper ideals which are not contained in any proper ideals.
If A has a unit, then every proper ideal in A is contained in a maximal idea, and every maximal ideal

is closed. This is an easy consequence of Zorn's lemma and the following three facts: (a) proper ideals contain no invertible elements, (b) the set of all invertible elements is opne, and (c) the closure of an ideal is an ideal.

If I is an ideal in A, a multiplication may be defined in the quotient space A/I by setting

$$(x+I)(y+I) = xy+I \qquad\qquad (x,y \in A);$$

this makes A/I into an algebra, the so-called quotient algebra of modulo I. If I is closed and if A/I is given the quotient norm ($\|x+I\| = \inf_{y\in M}\|x+y\|,\ \ x \in A$), then A/I is a Banach algebra.

A complex homomorphism h of A is a linear functional on A which is also multiplicative: $h(xy) = h(x)h(y)$. Let Φ_A be the set of all complex homomorphisms of A which are not identically 0. The following statements contain the core of the theory of commutative Banach algebras, as developed by Gelfand:

- If I is a maximal ideal in A, then A/I is (isometrically isomorphic to) the complex filed, and so the canonical homomorphism of A onto A/I belongs to Φ_A.
- Conversely, if $h \in \Phi_A$, the kernel of h is a maximal ideal in A.
- If A has a unit, then $x \in A$ is invertible if and only if $h(x) \neq 0$ for all $h \in \Phi_A$.
- Each $h \in$ is a bounded linear functional on A, of norm 1. Thus Φ_A is a subset of the unit ball S' in the dual space A' of the Banach space A.
- Each $x \in A$ defines a function $\hat{x}$ on Φ_A, given by

  $$\hat{x}(h) = h(x) \qquad\qquad (h \in \Phi_A).$$

  The weak topology induced in Φ_A by the collection of all these functions $\hat{x}$ is called *the Gelfand topology of* Φ_A. It coincides with the relative topology which Φ_A has as a subset of A' if A' is given the weak* topology. Since $\Phi_A \subset S'$, since S' is a weak*-compact, and since $\Phi_A \cup 0$ is easily seen to be a closed subset of S', it follows that Φ_A is a locally compact Hausdorff space and each $\hat{x}$ is a member of $\mathscr{C}_0(\Phi_A)$.
- The map $x \mapsto \hat{x}$ is a homomorphism of A onto a subalgebra $\hat{A}$ of $\mathscr{C}_0(\Phi_A)$, since

  $$(\hat{x}\hat{y})(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \hat{x}(h)\hat{y}(h) \qquad (x,y \in A;\ h \in \Phi_A),$$

  and similarly for addition and scalar multiplication. Since $\|h\| \leq 1$ the important inequality

  $$\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$$

  holds. We call $\hat{x}$ the *Gelfand transform* of x.
- If A has a unit e, then Φ_A is compact, since $\hat{e}(h) = h(e) = 1$ and $1 \in \mathscr{C}_0(\Phi_A)$ only if Φ_A is compact.

3. Duality for locally compact abelian groups

The main points here are the abstract definition of the Fourier transform, the Fourier inversion formula, the Plancherel theorem and the Pontryagin duality theorem. These require many preliminaries, including basic notions of the $L^1(G)$ space, the convolution and some of its properties, the dual group of G, the functions of positive type and the Bochner theorem.

If m is a Haar measure on a LCA group G and if $0 < p < \infty$, $L^p(m)$ denotes the set of all Borel functions f on G for which the norm

$$\|f\|_p = \left\{ \int_G |f|^p dm \right\}^{1/p} \qquad (1)$$

is finite. If we identify functions which differ only on a set E with $m(E) = 0$, $L^p(m)$ becomes a Banach space, normed by (1), if $1 \leq p < \infty$. $L^\infty(m)$ is the space of all bounded Borel functions on G, normed by

$$\|f\|_\infty = \text{ess}\sup_{x\in G} |f(x)|;$$

the essential supremum of $|f|$ is by definition, the smallest number λ such that $m(\{x : f(x) > \lambda\}) = 0$.

Translation in $L^p(G)$. It is clear that L^p-norms are translation invariant,i.e., that $\|L_x f\|_p = \|f\|_p$ $(x \in G)$. Suppose $1 \leq p < \infty$ and $f \in L^p(G)$. The map $x \mapsto L_x f$ is a uniformly continuous map of G into $L^p(G)$.

Convolutions. For any pair of Borel functions f and g on the LCA group G, we define their convolution $f * g$ by the formula

$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy.$$

If $\int_G |f(y)g(y^{-1}x)| dy < \infty$ for some $x \in G$, then $(f*g)(x) = (g*f)(x)$; if $f \in L^1(G)$ and $g \in L^\infty(G)$, then $f*g$ is bounded and uniformly cotinuous; if $f, g \in L^1(G)$, then exists $f*g$ for almost all $x \in G$, $f*g \in L^1(G)$, and the inequality $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ holds.

THEOREM. For any LCA group G, $L^1(G)$ is a commutative Banach algebra, if multiplication is defined by convolution. Moreover, G is discrete if and only if $L^1(G)$ has a unit.

The Dual Group. A complex function ξ on a LCA group G is called *character* of G if $|\xi(x)| = 1$ for all $x \in G$ and if the functional equation $\xi(xy) = \xi(x)\xi(y)$ is satisfied for all $x, y \in G$. The set of all continuous characters of G forms a group $\hat{G}$, *the dual group* of G, if addition is defined by $(\xi_1\xi_2)(x) = \xi_1(x)\xi_2(x)$ for all $x \in G$ and $\xi_1, \xi_2 \in \hat{G}$. In view of the duality between G and $\hat{G}$ which will be established with the Pontryagin's duality theorem, it is customary to write $< x, \xi >$ in place of $\xi(x)$. We identify $\hat{G}$ with the set of the complex homomorphisms of $L^1(G)$ which are not identically 0, Δ.

THEOREM. If $\xi \in \hat{G}$ and if

$$(1) \qquad \hat{f}(\xi) = \int_G f(x) \overline{< x, \xi >} dx \qquad (f \in L^1(G)),$$

then the map $f \mapsto \hat{f}(\xi)$ is a complex homomorphism of $L^1(G)$, and its not identically 0. Conversely, every non-zero complez homomorphism of $L^1(G)$ is obtained in this way, and distinct characters induce distinct homomorphisms.

The Fourier transform. For all $f \in L^1(G)$, the function $\hat{f}$ defined on $\hat{G}$ by (1) is called *the Fourier transform of f.* The set of all functions $\hat{f}$ so obtained will be denoted thoughout by $\mathscr{F}(L^1(G))$. $\hat{f}$ is precisely the Gelfand transform of f. If we give $\hat{G}$ the weak topology induced by $\mathscr{F}(L^1(G))$, the basic facts of the Gelfand theory show that $\mathscr{F}(L^1(G))$ is a separating subalgebra of $\mathscr{C}_0(\hat{G})$. We summarize some of the properties of $\mathscr{F}(L^1(G))$.

THEOREM. (a) $\mathscr{F}(L^1(G))$ is a dense in $C_0(\hat{G})$, by the Stone-Weierstrass theorem; (b) $\mathscr{F}(L^1(G))$ is invariant under translation and under multiplication by $< x, \xi >$, for any $x \in G$; (c) The Fourier transform of $f * g$ is $\hat{f}\hat{g}$; (d) The Fourier transform, considered as a map of $L^1(G)$ into $\mathscr{C}_0(\hat{G})$, is norm-decreasing and therefore continuous: $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$; (e) For $f \in L^1(G)$ and $\xi \in \hat{G}$, $(f * \xi)(x) =< x\xi > \hat{f}$.

Positive-Definite functions A function ϕ, defined on G, is said to be *positive-definite* if the inequality

$$\int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dydx \geq 0$$

holds for all $f \in L^1(G)$. The set of all positive-definite functions will be denoted by P(G). We can see inmediately that if $\phi \in P(G)$ them $\bar{\phi} \in P(G)$. Moreover, $f * \tilde{f} \in P(G)$ for all function $f \in L^1(G)$.

BOCHNER'S THEOREM. A continuous function ϕ on G is positive-definite if and only if there is a non-negative measure $\mu \in M(\hat{G})$ (set of all complex radon measures on G) such that

$$\phi(x) = \int_{\hat{G}} < x, \xi > d\mu(\xi) \qquad (x \in G).$$

The first Inversion Theorem. We let B(G) be the set of all functions f on G which are representable in the form $f(x) = \int_{\hat{G}} < x, \xi > d\mu(\xi)$ $(x \in G)$. Bochner's theorem implies, in combination with the Jordan decomposition theorem, that B(G) is exactly the set of all finite linear combinations of continuous positive-definite functions on G.

THEOREM. If $f \in L^1(G) \cap B(G)$, then $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$. Moreover, the inversion formula

$$f(x) = \int_{\hat{G}} < x, \xi > \hat{f}(\xi)d\xi \qquad (x \in G)$$

is valid for every $f \in L^1(G) \cap B(G)$.

The Plancherel Theorem. Another fundamental result in Fourier analysis is the Plancherel theorem.

THE PLANCHEREL THEOREM The Fourier transform, restricted to $(L^1 \cap L^2)(G)$ is an isometry (with respect to the L^2-norms) onto a dense linear subspace of $L^2(\hat{G})$. Hence it may be extended, in a unique manner, to an isometry of $L^2(G)$ onto $L^2(\hat{G})$.
The above extension of the Fourier transform to $L^2(G)$ is sometimes referred to as the Plancherel transform; the symbol $\hat{f}$ will be used in this context as well. An important part of the theorem is the assertion that each function in $L^2(\hat{G})$ is the Plancherel transform of some $f \in L^2(G)$.

The Pontryagin Duality Theorem. IF G is a LCA group, we know ([R], p.10) that its dual $\hat{G}$ is also a LCA group. Hence $\hat{G}$ has a dual group, say $\hat{\hat{G}}$, and everything we have proved so far for the ordered pair $(G, \hat{G})$ holds equally well for the pair $(\hat{G}, \hat{\hat{G}})$. The value of a character $\hat{\xi} \in \hat{\hat{G}}$ at the point $\xi \in \hat{G}$ will be written $< \xi, \hat{\xi} >$.

We have seen that every $x \in G$ may be regarded as a continuous character on $\hat{G}$, and thus there is a natural map α of G into $\hat{\hat{G}}$, defined by

$$< x, \xi > = < \xi, \alpha(x) > \qquad (x \in G,\ \xi \in \hat{G}).$$

THEOREM. *The above map α is an isomorphism and a homeomorhism of G onto $\hat{\hat{G}}$.* Thus $\hat{\hat{G}}$ may be identified with G, and a more informal statement of the resulto would be:

Every LCA group is the dual group of its dual group.

The symmetry between G and $\hat{G}$ which is now established shows that every theorem proved for the ordered pair $(G, \hat{G})$ also holds for $(\hat{G}, G)$ and this enables us to complete some of the results which were previously established in provisional form only.
(a) Every compact abelian group is the dual of a discrete abelian group, and every discrete abelian group is the dual of a compact abelian group.

(b) (Second version of the Inversion Theorem) If $f \in L^1(G)$, and $f \in L^1(\hat{G})$, then $f(x) = \hat{\hat{f}}(x^{-1})$ a.e $x \in G$; that is to say

$$f(x) = \int_{\hat{G}} < x, \xi > \hat{f}(\xi) d\xi \qquad \forall x \; a.e.$$

If f is continuous then there is the equality for all $x \in G$.

Índice general

Prólogo III

Summary V

1. Grupos localmente compactos **1**
1.1. Nociones básicas 2
1.2. Medida de Haar 3
1.2.1. Preliminares y definición. 3
1.2.2. Existencia y unicidad de la medida de Haar 5

2. Álgebras de Banach y representación de Gelfand **11**
2.1. Nociones básicas 11
2.2. Representación de Gelfand 12

3. Transformada de Fourier en grupos localmente compactos abelianos **17**
3.1. Espacio $L^1(G)$ 17
3.2. La transformada de Fourier 21
3.3. Primer teorema de inversión 24
3.4. Teorema de Plancherel 25
3.5. Dualidad de Pontryagin 26

Bibliografía **29**

Capítulo 1

Grupos localmente compactos

Para dar comienzo al trabajo, damos por conocidos los fundamentos básicos de la teoría de espacios topológicos, sin embargo son necesarios específicamente algunos conceptos que más adelante utilizaremos y serán relevantes a la hora de comprender la materia. Los comentamos a continuación:

- Sea X un conjunto no vacío. La **topología discreta de X** es la topología dada por la familia $\mathscr{T} = \wp(X)$, formada por todos los subconjuntos de X; es decir, todo subconjunto de X es un conjunto abierto en la topología discreta. En este caso decimos que (X,$\mathscr{T}$) es un espacio topológico discreto.

- Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ una familia arbitraria de espacios topológicos y la familia de proyecciones correspondientes $\{p_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \longmapsto (X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$. La **topología producto** sobre $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ es aquella que tiene como una subbase la colección de los conjuntos de la forma $\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\}$ donde cada U_α es un abierto de X_α; dicho de otro modo, la topología producto es la topología generada por los conjuntos de la forma $\prod\limits_{\alpha\in B} U_\alpha \times \prod\limits_{\alpha\in A\setminus B} X_\alpha$, donde B es algún subconjunto finito de A y U_α es un abierto de X_α para cada $\alpha \in B$.

- Un espacio topológico $X \neq \emptyset$ se dice **Hausdorff** si para cualesquiera dos puntos distintos $p, q \in X$ existen dos subconjuntos abiertos disjuntos U y V tales que $p \in U$ y $q \in V$. Claramente, todo conjunto con la topología discreta es Hausdorff.

- Un subconjunto K de un grupo topológico X se llama **compacto** si cada cubrimiento abierto de K contiene un subrecubrimiento finito, es decir, si $\forall$ colección $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de subconjuntos abiertos de X tal que
$$K \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$$
existe una subcolección finita $\{V_{\alpha_j}\}_{j=1}^{n}$ de $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de modo que
$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{\alpha_j} \ .$$

  Si X es compacto se dice que X es **espacio topológico compacto**.

- Un espacio topológico X se dice **localmente compacto** si cada punto de X tiene un entorno cuya clausura es un subconjunto compacto.

- **Teorema de Tychonoff**. Sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ un espacio topológico con la topología producto, entonces X es compacto si y solo si cada espacio topológico X_i es compacto (véase [J]).

1.1. Nociones básicas

En este primer capitulo, introducimos los conceptos y resultados necesarios sobre grupos topológicos y localmente compactos para la sucesión posterior del trabajo.

Definición 1.1.1. Un **grupo topológico** es una terna $(G, \mathscr{T}, \cdot)$ de forma que:

1. $(G, \mathscr{T})$ es espacio topológico.
2. $(G, \cdot)$ es grupo (no necesariamente abeliano).
3. Las aplicaciones producto $G \times G \longrightarrow G$, $(s,t) \mapsto s \cdot t$, e inversa $G \longrightarrow G$, $s \mapsto s^{-1}$, son continuas.

Denotaremos por e la identidad (ó unidad) del grupo G y trabajaremos unicamente con grupos topológicos *abelianos* (aquellos cuyo grupo $(G, \cdot)$ es abeliano),en el capítulo 3.

De la propia definición se sigue inmediatamente que las traslaciones $G \longrightarrow G$, $s \longmapsto ts$ ó st $(t \in G)$ son homeomorfismos (biyección continua con inversa continua). Entonces la topología es *invariante por traslación*, es decir, $\forall t \in G$ y $U \subseteq G$ con U abierto en G, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) U es abierto, (ii) tU es abierto, (iii) Ut es abierto.

Además, como la aplicación inversa también es un homeomorfismo, se tiene que U es abierto si y solo si $U^{-1} = \{s : s^{-1} \in U\}$ es abierto.

Ejemplos

1. Cualquier grupo G es grupo topológico respecto a la topología discreta.
2. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son grupos topológicos respecto a la suma de n-tuplas y a la topología euclídea.
3. Grupos de Lie, en particular la esfera de dimensión n $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, son grupos topológicos.
4. El cuerpo de los números p-ádicos, $\mathbb{Q}_p$, es un grupo topológico compacto.

Definición 1.1.2. Un subconjunto S de un grupo topológico G se dice **simétrico** si $S = S^{-1}$.

Damos el siguiente enunciado sin demostración por tratarse de resultados complementarios respecto a los teoremas fundamentales, y por razones de espacio.

Proposición 1.1.3. *Sea G un grupo topológico. Se siguen las siguientes afirmaciones:*

1. *Todo entorno U de la identidad contiene un entorno V de la identidad tal que $VV \subseteq U$.*
2. *Todo entorno U de la identidad contiene un entorno simétrico V de la identidad.*
3. *Si H es un subgrupo de G, también lo es su clausura.*
4. *Todo subgrupo abierto de G es también cerrado.*
5. *Si K_1 y K_2 son subconjuntos compactos de G, entonces $K_1K_2 := \{k_1k_2 \mid k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\}$ también lo es.*

Definición 1.1.4. Un grupo topológico G que es tanto localmente compacto como Hausdorff se dice **grupo localmente compacto**.

Traslación de funciones y continuidad uniforme. Sea f una función real o compleja definida sobre un grupo topológico G, y sea $t \in G$. Definimos la *traslación de f por t a izquierda ó derecha*, respectivamente, por

$$L_t f(s) = f(t^{-1}s) \quad \text{y} \quad R_t f(s) = f(st)\ , \forall s \in G$$

Supongamos f continua. Diremos que f es *uniformemente continua a izquierda* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno V de e de forma que

$$\|L_t f - f\|_u < \varepsilon, \ \ \forall t \in V,$$

donde $\|\cdot\|_u$ denota la norma uniforme; es decir,

$$\| f \|_u := sup_{s \in G} \mid f(s) \mid .$$

La continuidad uniforme a derecha se define de forma análoga. Notemos que si una función f es continua, entonces su traslación tanto a izquierda como a derecha también lo es.

1.2. Medida de Haar

En esta sección vamos a demostrar la existencia de la medida de Haar a izquierda (a derecha), es decir, medida positiva invariante por traslación a izquierda (a derecha) sobre todo grupo localmente compacto. Comenzamos recordando unos cuantos conceptos de teoría de la medida.

1.2.1. Preliminares y definición.

Definición 1.2.1. Una *medida positiva* μ en un espacio medible $(X, \mathscr{A})$, donde $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra de X, es una función $\mu : \ \mathscr{A} \longmapsto [0, +\infty]$ contablemente aditiva, es decir,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

para cualquier familia contable $\{A_n\}$ de subconjuntos medibles disjuntos dos a dos en la σ-álgebra $\mathscr{A}$. En particular, cualquier medida positiva definida sobre los conjuntos borelianos (σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}(X)$) de un espacio de Hausdorff localmente compacto se denomina **medida de Borel**.

Sea μ medida de Borel en un espacio Hausdorff localmente compacto X y sea E un subconjunto boreliano de X. Diremos que μ es *regular exterior* en E si $\mu(E) = inf\{\mu(U) \ : \ U \supseteq E, \text{U abierto}\}$. Diremos que μ es *regular interior* en E si $\mu(E) = sup\{\mu(K) \ : \ K \subseteq E, \text{K compacto}\}$. Una medida μ en X se dice *regular exterior (regular interior)* si es regular exterior (interior) en todo subconjunto boreliano E de X. Si una medida μ en X es tanto regular exterior como interior diremos que μ es una **medida regular** en X. Denotamos por M(X) al conjunto de medidas de Borel regulares en X.

Definición 1.2.2. Una *medida de Radon* en X es una medida de Borel finita sobre conjuntos compactos, regular exterior sobre conjuntos borelianos y regular interior sobre todos los conjuntos abiertos.

Sea G un grupo topológico y sea μ una medida de Borel en G. Diremos que μ es *invariante por traslación a izquierda* si $\forall$ E boreliano de G y $\forall s \in G, \ \mu(sE) = \mu(E)$. La medida invariante por traslación a derecha se define análogamente.

Definición 1.2.3. Llamamos **medida de Haar a izquierda** (a derecha respectivamente) sobre un grupo topológico localmente compacto G a toda medida de Radon no nula e invariante por traslación a izquierda (a derecha respectivamente) en G.
Una *medida de Haar bi-invariante* es una medida de Radon no nula tanto invariante por traslación a derecha como a izquierda.

Por otra parte recordemos que, dada $f : G \longmapsto \mathbb{C}$ se define *el soporte* $sop(f)$ *de* f como $sop(f) := \overline{\{s \in G \mid f(s) \neq 0\}}$. Denotamos $\mathscr{C}_c = \{f : G \longmapsto \mathbb{C} \mid \ f$ continua y con $sop(f)$ compacto$\}$ y $\mathscr{C}_c^+(G) = \{f \in \mathscr{C}_c : \ f(s) > 0 \ \ \forall\, s \in G, \ \|f\|_u > 0\}$. Cuando el dominio sea claro unicamente pondremos $\mathscr{C}_c^+$.

La siguiente proposición muestra, entre otras cosas, que la existencia de una medida de Haar a izquierda es equivalente a la existencia de una medida de Haar a derecha. Enunciamos previamente el teorema de representación de Riesz, que es necesario para demostrar una de las afirmaciones de dicha proposición.

Teorema 1.2.4 (Teorema de representación de Riesz). *Sea X espacio de Hausdorff localmente compacto y sea T funcional lineal positivo sobre* $\mathscr{C}_c(X)$*; es decir,* $T(f) > 0 \ \forall f \in \mathscr{C}_c(X)$. *Entonces existe una* $\sigma -$ *álgebra* $\mathscr{M}$ *en X que contiene a todos los conjuntos de Borel de X, es decir, a* $\mathscr{B}(X)$*, y existe una única medida de Borel* μ *sobre* $\mathscr{M}$ *de forma que*

$$T(f) = \int_X f\, d(\mu) \quad para\ cada\ f \in \mathscr{C}_c(X).$$

De hecho, la medida μ *viene dada por*

$$\mu(U) = sup\{\int_X f\, d\mu : \ f \in \mathscr{C}_c(X),\ \|f\|_u \leqslant 1,\ y\ sop(f) \subseteq U\} \quad \forall\, U\ abierto \subseteq X.$$

La demostración de este teorema no es sencilla y excede los límites del espacio de este trabajo, por tanto consideramos el resultado, central en teoría de la medida y análisis funcional, como auxiliar para el objetivo de esta memoria. (Véase [DS], p.373,380).

Proposición 1.2.5. *Sea G un grupo localmente compacto con una medida de Radon no nula* μ. *Entonces:*

(i) La medida μ *es medida de Haar a izquierda en G si y solo si la medida* $\tilde{\mu}$ *definida por* $\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$ *es medida de Haar a derecha en G.*

(ii) La medida μ *es medida de Haar a izquierda en G si y solo si*

$$\int_G L_s f\, d\mu = \int_G f\, d\mu\ ,\ \ \forall\ f \in \mathscr{C}_c^+\ y\ s \in G.$$

(iii) Si μ *es una medida de Haar en G, entonces* μ *es positiva para todo subconjunto abierto no vacío de G y* $\displaystyle\int_G f\, d\mu > 0\ ,\ \ \forall f \in \mathscr{C}_c^+$.

(iv) Si μ *es medida de Haar a izquierda en G entonces* $\mu(G)$ *es finito si y solo si G es compacto.*

Demostración. (i) Observar primero que para todo grupo topológico G tenemos que

$$E \subseteq \mathscr{B}(G) \Leftrightarrow E^{-1} \subseteq \mathscr{B}(G),$$

puesto que la aplicación inversion $s \mapsto s^{-1}$ es homeomorfismo de G, luego por definición tenemos la equivalencia

$$\tilde{\mu}(E) = \tilde{\mu}(Es)\ \forall s \in G \Leftrightarrow \mu(E^{-1}) = \mu(s^{-1}E^{-1})\ \forall s \in G$$

para todo conjunto boreliano E de G y se sigue inmediatamente la afirmación (i).

(ii) Si μ es medida de Haar en G, entonces la igualdad de integrales se sigue por definición para toda función simple (o sea, combinaciones lineales finitas de funciones características en G), y por lo tanto, tomando límites de sucesiones crecientes de funciones simples, y aplicando el teorema de la convergencia monótona, se sigue también para toda función arbitraria $f \in \mathscr{C}_c^+$. Recíprocamente, tomando el funcional lineal positivo $\int_G (\cdot)\, d\mu$ en $\mathscr{C}_c(G)$ podemos, por el teorema de representación de Riesz, obtener explicitamente la medida de Radon μ para todo subconjunto abierto $U \subseteq G$ como $\mu(U) = sup\{\int_G f\, d\mu : f \in \mathscr{C}_c, \|f\|_u \leqslant 1$, y $sop(f) \subseteq U\}$. Por lo tanto vemos que si la integral es invariante por traslación a izquierda, entonces $\mu(sU) = \mu(U)$ para todos los subconjuntos abiertos U de G, ya que $sop(f) \subseteq U$ si y sólo si $sop(L_s f) \subseteq sU$. El resultado se extiende para todo subconjunto boreliano de G ya que una medida de Radon es regular exterior por definición.

(iii) Teniendo en cuenta la regularidad interior de μ y su no nulidad, existe un conjunto compacto K de forma que $\mu(K)$ es positivo. Sea U un subconjunto abierto no vacío de G. Entonces, teniendo en cuenta que $K \subseteq \bigcup_{s \in G} sU$ deducimos que K es cubierto por un conjunto finito de traslaciones de U, las cuales tienen la misma medida. Entonces, al ser $\mu(K)$ positivo, también lo es $\mu(U)$. Si $f \in \mathscr{C}_c^+$ existe un subconjunto abierto no vacío U de G tal que $f(s) > R$, $\forall s \in U$ para alguna constante R positiva. Por lo tanto

$$\int_G f\, d\mu \geq \int_U f\, d\mu \geq R\mu(U) > 0$$

como queríamos probar.

(iv) Si G es compacto, entonces $\mu(G)$ es finito por la definición de medida de Radon. Para probar el recíproco, supongamos que G no es compacto. Sea K un entorno compacto que contiene a e (identidad de G) de forma que G está cubierto por un grupo no finito de traslaciones de K (las cuales son también compactos ya que las traslaciones son funciones continuas), entonces existe una sucesión infinita $\{s_j\}$ en G tal que

$$s_n \notin \bigcup_{j<n} s_j K. \qquad (1.1)$$

Además K contiene un entorno U de e simétrico de forma que $UU \subseteq K$. Entonces afirmamos que las traslaciones $s_j U$ $(j \geq 1)$ son disjuntas, de donde se sigue a partir de (iii) que $\mu(G)$ es infinito. Probemos ahora la afirmación anterior. Supongamos que para $i < j$ tenemos que $s_i u = s_j v$ donde $u, v \in U$. Entonces $s_j = s_i u v^{-1} \in s_i K$ ya que U es simétrico y $UU \subseteq K$, lo cual contradice 1.1.

□

1.2.2. Existencia y unicidad de la medida de Haar

Con los preliminares y la definición completados, pasamos a enunciar y a probar uno de los teoremas fundamentales del análisis armónico sobre grupos.

Teorema 1.2.6. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces G admite una medida de Haar a izquierda (y por lo tanto a derecha). Además esta medida es única salvo constante multiplicativa; es decir, si μ, ν son dos medidas de Haar a izquierda en G entonces, existe $c > 0$ tal que $\mu = c\nu$.*

Vía el teorema de Riesz enunciado anteriormente y el apartado 2 de la proposición anterior, la existencia de la medida de Haar a izquierda se reduce a la construcción de un funcional lineal positivo invariante a izquierda en $\mathscr{C}_c(G)$.

Preliminares de la prueba de la existencia

Sean $f, \varphi \in \mathscr{C}_c^+$. Tomamos $U = \{s \in G : \varphi(s) > \|\varphi\|_u/2\}$, que es abierto en G por ser φ una función continua, de modo que un número finito de traslaciones del abierto U es suficiente para cubrir el soporte de f. En efecto, notemos que $\forall t \in G$, $\exists\ s \in G \ni st \in U$; es decir, $\varphi(st) > \|\varphi\|_u/2$. De lo contrario $\varphi(st) \leq \|\varphi\|_u/2\ \forall s \in G$, y tomando $s = gt^{-1}$ tendríamos $\varphi(g) \leq \|\varphi\|_u/2 < \|\varphi\|_u\ \forall g \in G$, que es absurdo. Por tanto $G \subseteq \bigcup_{g \in G} gU$ y en particular tenemos el cubrimiento $sop(f) \subseteq \bigcup_{s \in G} sU$. Entonces existen n elementos $s_1, s_2, ..., s_n \in G$ de forma que una combinación lineal de traslaciones de φ por s_j dominan f en el siguiente sentido:

$$f \leq \frac{2\|f\|_u}{\|\varphi\|_u} \sum_{j=1}^{n} L_{s_j}\varphi \quad .$$

En efecto, si $s \in \ sop(f)$ entonces $s \in s_jU$ para algún j luego $s_j^{-1}s \in U$. Por lo tanto, para ese j se tiene que

$$\frac{2\|f\|_u}{\|\varphi\|_u}(\sum_{j=1}^{n}(L_{s_j}\varphi)(s)) \geq \frac{2\|f\|_u}{\|\varphi\|_u}(L_{s_j}\varphi)(s) = \frac{2\|f\|_u}{\|\varphi\|_u}(\varphi(s_j^{-1}s)) > \|f\|_u\frac{2}{\|\varphi\|_u}(\frac{\|\varphi\|_u}{2}) \geq f(s).$$

Ahora tiene sentido definir $(f:\varphi)$, el *número de cubrimiento de Haar*, mediante la fórmula

$$(f:\varphi) = inf\{\sum_{j=1}^{n} c_j : 0 < c_1, ..., c_n \ y \ f \leq \sum_{j=1}^{n} c_jL_{s_j}\varphi \text{ para algunos } s_1, ..., s_n \in G\}.$$

Notemos que el número de Haar nunca es cero por ser siempre $\|f\|_u > 0$.

Lema 1.2.7. *El número de cubrimiento de Haar cumple las siguientes propiedades:*
1. $(f:\varphi) = (L_sf:\varphi) \ \ \forall\, s \in G$*; 2.* $(f_1+f_2:\varphi) \leq (f_1:\varphi)+(f_2:\varphi)$*; 3.* $(cf:\varphi) = c(f:\varphi) \ \ \forall c > 0$*;*
4. $(f_1:\varphi) \leq (f_2:\varphi)\ \forall f_1 < f_2$*; 5.* $(f:\varphi) \geq \|f\|_u\|\varphi\|_u$*; 6.* $(f_1:\varphi) \leq (f_1:f_0)(f_0:\varphi)$

La demostración de este lema es técnica y no aporta mucho a lo esencial del trabajo como para incluirla (véase [RV, p.13]).

A partir del número de cubrimiento de Haar, definimos un funcional lineal aproximado de la siguiente forma: Fijamos $f_0 \in \mathscr{C}_c^+$ y ponemos

$$I_\varphi(f) := \tfrac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \quad (f,\varphi \in \mathscr{C}_c^+).$$

Por el apartado 6. del lema 1.2.7 tenemos las siguientes desigualdades

$$(f:\varphi) \leq (f:f_0)(f_0:\varphi) \ \ y \ \ (f_0:\varphi) \leq (f_0:f)(f:\varphi)$$

Dividiendo en la primera por $(f_0:\varphi)$ y la segunda por $(f:\varphi)$ tenemos que

$$(f_0:f)^{-1} \leq I_\varphi(f) \leq (f:f_0)$$

Lema 1.2.8. *Dadas f_1 y $f_2 \in \mathscr{C}_c^+$, para todo $\varepsilon > 0$ existe un entorno V de la identidad e tal que*

$$I_\varphi(f_1)+I_\varphi(f_2) \leq I_\varphi(f_1+f_2)+\varepsilon,$$

$\forall\varphi \in \mathscr{C}_c^+ \ni sop(\varphi) \subseteq V.$

Demostración. Por el lema de Uryshon (véase [R3], p.35-40), podemos encontrar $g \in \mathscr{C}_c^+(G)$ tal que $g \equiv 1$ en $sop(f_1+f_2)$. Sea $\delta > 0$ (a elegir después convenientemente). Tomemos

$$h := f_1+f_2+\delta g$$

y

$$h_i = \frac{f_i}{h} \quad (i = 1,2).$$

Entonces, $h_i \in \mathscr{C}_c^+$, y por lo tanto h_i es uniformemente continua para $i = 1,2$, luego

$$\exists\, V \text{ abierto, con } e \in V \text{ , tal que } |h_i(x)-h_i(y)| < \delta \text{ siempre que } y^{-1}x \in V.$$

Supongamos $\varphi \in \mathscr{C}_c^+ \ni sop(\varphi) \subseteq V$. Si $h \leq \sum c_jL_{x_j}\varphi$ entonces $\forall i = 1,2,$

$$f_i(x) = h(x)h_i(x) \leq \sum c_j\varphi(x_j^{-1}x)h_i(x) \leq \sum c_j\varphi(x_j^{-1}x)[h_i(x_j)+\delta]$$

siempre que $x_j^{-1}x \in sop(\varphi)$. Como $h_1 + h_2 \leq 1$, tenemos

$$(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leq \sum c_j[h_1(x_j) + \delta] + \sum c_j[h_2(x_j) + \delta] \leq \sum c_j[1 + 2\delta].$$

Por la defición de $I_\varphi(h)$ y teniendo en cuenta el lema 1.2.7,

$$I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq (1 + 2\delta)I_\varphi(h) \leq (1 + 2\delta)[I_\varphi(f_1 + f_2) + \delta I_\varphi(g)]$$

Tomando δ suficientemente pequeño de forma que $2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(g : f_0) < \varepsilon$ y por la 2º desigualdad inmediatamente anterior al lema 1.2.8, llegamos a que

$$2\delta I_\varphi(f_1 + f_2) + (2\delta + 1)\delta I_\varphi(g) \leq 2\delta(f_1 + f_2 : f_0) + \delta(1 + 2\delta)(g : f_0) \leq \varepsilon$$

y de aquí

$$I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq I_\varphi(f_1 + f_2) + \varepsilon.$$

□

Existencia de la medida.

Demostración. Probemos ahora la existencia de medida invariante en un grupo localmente compacto G. Para ello, construimos a partir del funcional invariante a izquierda aproximado $I_\varphi(f)$, un funcional lineal exacto. Lo obtendremos como un limite en un espacio adecuado. Sea X el espacio topológico formado como el producto cartesiano de los intervalos $[(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$ con f variando en $\mathscr{C}_c^+$; es decir: si $f \in \mathscr{C}_c^+$ denotamos por X_f el intervalo $X_f = [(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$ y así

$$X = \prod_{f \in \mathscr{C}_c^+} X_f$$

Por el teorema de Tychonoff, X es compacto ya que los intervalos $[(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$ son compactos, y además

$$X \longleftrightarrow \{F : \mathscr{C}_c^+ \longrightarrow (0, +\infty) \ : \ F(f) \in \ X_f\} \equiv \{(x_f)_{f \in \mathscr{C}_c^+} \mid x_f \in X_f\}$$

Por tanto, $I_\varphi \in X \ \forall \varphi \in \mathscr{C}_c^+$. Ahora, para todo entorno compacto U de e, sea K_U la clausura del conjunto $\{I_\varphi : sop(\varphi) \subseteq U\}$ en X. La colección $\{K_U\}$ satisface la propiedad de la intersección finita ya que

$$\bigcap_{j=1}^{n} K_{U_j} \supseteq K_{\bigcap_{j=1}^{n} U_j} \neq \emptyset$$

para cada subfamilia finita $\{K_{U_j}\}_{j=1}^{n}$. Por lo tanto, como X es compacto

$$\exists \ I \in X \ \ni \ I \in \bigcap_U K_U.$$

Vamos a ver que I se extiende como el funcional lineal invariante a izquierda en $\mathscr{C}_c(G)$ requerido. Puesto que I está en la intersección de las clausuras de los conjuntos $\{I_\varphi : sop(\varphi) \subseteq U\}$, todo entorno abierto de I en X interseca cada conjunto $\{I_\varphi : sop(\varphi) \subseteq U\}$. Podemos reescribir esta afirmación de la siguiente manera:

$\forall \ U$ entorno abierto de e, $\forall \ \varepsilon > 0$ y $\forall \ f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathscr{C}_c^+ \ \ \exists \ \varphi \in \mathscr{C}_c^+$ con $sop(\varphi) \subset U$ tal que
$|I(f_j) - I_\varphi(f_j)| < \varepsilon \ \ \forall j = 1, \ldots, n$

Luego dada $f \in \mathscr{C}_c^+$ y $c > 0$ tenemos que $\mid I(cf)$ - $I_\varphi(cf) \mid < \varepsilon$ y $\mid cI(f) - cI_\varphi(f) \mid < \varepsilon$. Teniendo en cuenta el lema 1.2.7 se tiene que $I(cf) = cI(f)$. Para ver que I es aditiva y tener la linealidad del funcional, usamos el lema 1.2.8 para encontrar un entorno U de e tal que

$$I_\varphi(f_1)+I_\varphi(f_2)\leq I_\varphi(f_1+f_2)+\tfrac{\varepsilon}{4}$$

siempre que $sop(\varphi)\subseteq U$. A continuación elegimos φ con $sop(\varphi)\subseteq U$ de forma que

$$|I(f_i)-I_\varphi(f_i)|<\frac{\varepsilon}{4}\ \ j=1,2\ \text{ y }\ |I(f_1+f_2)-I_\varphi(f_1+f_2)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$I(f_1)+I(f_2)\leq I_\varphi(f_1)+\frac{\varepsilon}{4}+I_\varphi(f_2)+\frac{\varepsilon}{4}\leq I_\varphi(f_1+f_2)+\frac{3\varepsilon}{4}\leq I(f_1+f_2)+\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario y teniendo en cuenta el lema 1.2.7, donde al cumplirse 2. tenemos que $I(f_1+f_2)\leq I(f_1)+I(f_2)$ obtenemos la linealidad de I.
La invarianza a izquierda se obtiene inmediatamente a partir del primer apartado del lema 1.2.7. Finalmente extendemos I a un funcional lineal positivo invariante a izquierda en $\mathscr{C}_c(G)$ poniendo $I(f)=I(f^+)-I(f^-)$. De esta forma, mediante el teorema de representación de Riesz y el enunciado (ii) de la proposición 1.2.4 tenemos demostrada la existencia de una medida de Haar a izquierda en G.

Unicidad de la Medida de Haar

Probemos ahora que la medida de Haar es única salvo una constante multiplicativa positiva. Dadas dos medidas de Haar μ y ν en G es suficiente ver que la relación de las integrales

$$\frac{\int_G f\,d\nu}{\int_G f\,d\mu}$$

es independiente de $f\in\mathscr{C}_c^+$. Para simplificar la notación, escribiremos $I(f)\ y\ J(f)$ para indicar las integrales respecto a ν y μ anteriores, respectivamente. Dadas dos funciones $f,g\in\mathscr{C}_c^+$ la idea es producir una función $h\in\mathscr{C}_c^+$ de forma que $I(h)/J/(h)$ puede aproximar simultáneamente a $I(f)/J(f)$ y a $I(g)/J(g)$ arbitrariamente.

Sea K un subconjunto compacto de G de forma que en su interior se encuentre la identidad e. Entonces K contiene un entorno abierto simétrico de la identidad cuya clausura K_0 es compacto y simétrico (La simetría es claramente preservada por la clausura). Definimos ahora los subconjuntos compactos K_f y K_g como

$$K_f=(sop(f)\cdot K_0)\cup(K_0\cdot sop(f))\quad y\quad K_g=(sop(g)\cdot K_0)\cup(K_0\cdot sop(g))$$

Para $t\in K_O$, definimos $\gamma_t f$ como

$$\gamma_t f=R_t f-L_{t^{-1}}f$$

Es decir, $\gamma_t f(s)=f(st)-f(ts)$. Definimos $\gamma_t g$ de forma análoga. Claramente $\gamma_t f$ y $\gamma_t g$ están definidas sobre K_f y K_g respectivamente, y ambas se anulan en el centro $Z(G):=\{u\in G\mid ur=ru\ \forall r\in G\}$ de G, en particular en e. Sea $\varepsilon>0$ dado, entonces por la continuidad uniforme a izquierda y a derecha

$$\exists\ U_0,\ \text{entorno simétrico},\ U_0\subseteq K_0\ \text{tal que}\ |\gamma_t f(s)|<\varepsilon,\ |\gamma_t g(s)|<\varepsilon\ \forall\ s,\ \text{si}\ t\in K_0.$$

Tomemos $h\in\mathscr{C}_c^+$ de forma que $h(s)=h(s^{-1})$ y además $sop(h)\subset K_0$. Entonces, teniendo en cuenta la proposición 1.2.4 y el teorema de Fubini (véase [R3], cap.8)

$$\int_G h\,d\mu\cdot\int_G f\,d\nu=\iint_{G\times G}h(y)f(x)\,d\nu(x)d\mu(y)=\iint_{G\times G}h(y)f(yx)\,d\nu(x)d\mu(y)\ \ ,$$

y también

$$\int_G h\,d\nu\cdot\int_G f\,d\mu=\iint_{G\times G}h(x)f(y)\,d\nu(x)d\mu(y)=\iint_{G\times G}h(y^{-1}x)f(y)\,d\nu(x)d\mu(y)$$

que aplicando de nuevo el teorema de Fubini y como h es simétrica

$$= \int_G \left(\int_G h(x^{-1}y) f(y)\, d\mu(y) \right) d\nu(x)$$

ahora haciendo el cambio $y = xu$ a esta última integral, con μ invariante a izquierda y volviendo a aplicar Fubini

$$= \int_G \left(\int_G h(u) f(xu)\, d\mu(u) \right) d\nu(x) = \iint_{G\times G} h(y) f(xy)\, d\nu(x) d\mu(y)$$

Por tanto,

$$\left| \int_G h\, d\nu \cdot \int_G f\, d\mu - \int_G h\, d\mu \cdot \int_G f\, d\nu \right| = \left| \iint_{G\times G} h(y)[f(xy) - f(yx)]\, d\nu(x) d\mu(y) \right| \leq \varepsilon \nu(K_f) \int_G h\, d\mu.$$

Análogamente,

$$|\int_G h\, d\nu \cdot \int_G g\, d\mu - \int_G h\, d\mu \cdot \int_G g\, d\nu\, | \leq \varepsilon \nu(K_g) \int_G h\, d\mu.$$

Dividiendo adecuadamente las dos últimas desigualdades y usando la desigualdad triangular por medio de $I(h)/J(h)$ se tiene,

$$|\frac{I(f)}{J(f)} - \frac{I(g)}{J(g)}| \leq [\frac{\nu(K_f)}{J(f)} + \frac{\nu(K_g)}{J(g)}]\varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{I(f)}{J(f)} = \frac{I(g)}{J(g)} \quad \forall f, g \in \mathscr{C}_c^+$$

Llamemos c (> 0) a esta fracción. Entonces $I(f) = cJ(f)$ $\forall f \in \mathscr{C}_c^+$, ó equivalentemente

$$\int_G f\, d(\nu - c\mu) = 0 \;\; \forall f \in \mathscr{C}_c^+$$

Por el teorema de representación de Riesz, $\nu = c\mu$. □

Observación Si G es un grupo topológico compacto es habitual normalizar la medida de Haar μ de forma que $\mu(G) = 1$. Por otro lado, si G es discreto, a todo conjunto formado por un único punto se le asigna medida 1. Estos requisitos son contradictorios si G es un grupo finito, pero no nos causará ninguna dificultad para la continuación del trabajo.

Ejemplos de medida de Haar

- En $\mathbb{R}^n$ la medida de Haar es $\lambda_n = \lambda \times \lambda \times \cdots \times \lambda$ la medida producto, donde λ es la medida Lebesgue en $\mathbb{R}$.

- En $\mathbb{R}^+$, sea $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}$ definida como $\mu(E) = \int_E \frac{1}{x} d\lambda(x)$ para todo $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$. Sea $y \in \mathbb{R}^+$ y $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$, entonces

  $$\mu(yE) = \int \frac{1_{\{yE\}}(x)}{x} d\lambda(x) = \int \frac{1_{\{E\}}(y^{-1}x)}{x} d\lambda(x) \equiv \int \frac{1_{\{E\}}(y^{-1}x)}{x} dx$$

  Haciendo el cambio de variable $u = y^{-1}x$,

  $$\mu(sE) = \int \frac{1_{\{E\}}(u)}{u} d\lambda(u) = \mu(E).$$

  Por lo tanto se trata de una medida de Haar invariante a izquierda.

- Dada $x \in \mathbb{T}$ existe $t \in [0, 2\pi)$ tal que $x = e^{it}$. Sea $E \subseteq \mathbb{T}$, definimos $\tilde{E} = \{t \in [0, 2\pi) \mid e^{it} \in E\}$ y sea $\tilde{\lambda} = \lambda(mod\ 2\pi)$. Entonces

  $$\mu(E) = \textstyle\int e^{it}\, d\tilde{\lambda} \text{ es medida de Haar.}$$

Capítulo 2

Álgebras de Banach y representación de Gelfand

En este segundo capitulo introducimos las nociones básicas sobre álgebras de Banach conmutativas que conducen a la representación de Gelfand.

2.1. Nociones básicas

Damos por conocidos los conceptos y resultados básicos sobre espacios de Banach, que por definición son espacios normados tales que toda sucesión de Cauchy converge en el propio espacio.

Definición 2.1.1. Un espacio normado complejo $(A, \cdot, \|\cdot\|)$ se denomina **álgebra de Banach** si $(A, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ con la operación multiplicación asociativa y distributiva tal que $\forall x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se verifica:

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y) \ \ y \ \ \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Diremos que A *posee unidad* si existe $1 \in A$ (unidad de A) de forma que $x1 = 1x = x \ \forall x \in A$.
Diremos que A es *conmutativa* si $xy = yx \ \ \forall x, y \in A$ y a partir de ahora, denotaremos $(A, \cdot, \|\cdot\|) \equiv A$.

Ejemplos

- El ejemplo más sencillo de álgebra de Banach unitaria es $\mathbb{C}$, álgebra compleja con el producto usual y la norma euclídea (también dada por $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, siendo $\bar{\cdot}$ la conjugación en $\mathbb{C}$.

- El espacio de las funciones continuas con valores complejos sobre un espacio topológico compacto K con la norma del supremo, denotado por $\mathscr{C}(K)$, es un ejemplo relevante de álgebra de Banach conmutativa con la función constante 1 como unidad del espacio. En este caso las operaciones son la de suma y producto punto a punto de las funciones.

- El ejemplo esencial para este trabajo es $L^1(G) = \{f : G \to \mathbb{C}$ medible Haar $\mid \int_G |f| < \infty\}$ con G grupo localmente compacto abeliano. El producto en $L^1(G)$ es el de convolución, denotado por $*$, que se define de la siguiente manera:

  $$(f * g)(s) = \int_G f(s^{-1}t)g(s)dt \qquad (f, g \in \ L^1(G)).$$

  $L^1(G)$ es álgebra de Banach conmutativa sin identidad. Este ejemplo será tratado con detalle en el capítulo 3.

Definición 2.1.2. Sea A álgebra de Banach y 1 unidad de A. Diremos que un elemento $x \in A$ es **inversible en** A si existe un elemento $y \in A$ tal que

$$yx = xy = 1.$$

En caso de que $x \in A$ sea inversible, su inverso es único y lo denotaremos por x^{-1}.
El conjunto de de los elementos inversibles de A lo denotaremos por A^{-1}. Notamos que A^{-1} es un grupo para la multiplicación.

Proposición 2.1.3. *Sea A álgebra de Banach y $x \in A$ con $\|x\| < 1$. Entonces $1-x \in A^{-1}$, es decir, $1-x$ es inversible en A.*

Demostración. Sea la sucesión $s_n = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n$. Se cumple $\|s_{n+1}-s_n\| = \|x^{n+1}\| \leq \|x\|^{n+1}$ y como $\|x\| < 1$ se tiene que $\|s_{n+1}-s_n\| \to 0$. Sea ahora $m,n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$. Se tiene que

$$\|s_m - s_n\| = \|x^{n+1}+\ldots+x^m\| \leq \|x\|^{n+1}+\ldots+\|x\|^m = \sum_{k=n}^{\infty}\|x\|^k - \sum_{k=m+1}^{\infty}\|x\|^k \longrightarrow_{n,m\to\infty} 0$$

pues $\|x\| < 1$ y por lo tanto la sucesión es de Cauchy. Por ser A completo se deduce que existe $s \in A$ tal que $s_n \to s$. Además como $x^n \to 0$ y $s_n(1-x) = 1-x^{n+1} = (1-x)s^n$ se deduce, haciendo $n \to \infty$, que $s(1-x) = 1 = (1-x)s$; es decir, s es el inverso de $1-x$. □

Definición 2.1.4. Sea un álgebra de Banach A y $x \in A$. Se define como **espectro de** x al conjunto

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda 1 \text{ no inversible en } A\}.$$

El conjunto complementario del espectro de x se denomina *resolvente de x*, es decir:

$$Res(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda 1 \in A^{-1}\}.$$

Al número $\rho(x) = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in \sigma(x)\}$ se le llama **radio espectral** de x.

Teorema 2.1.5. *Si A es álgebra de Banach con unidad, entonces A^{-1} es un subconjunto abierto de A. Además, si $x \in A$, el espectro $\sigma(x)$ de x, es un compacto no vacío del plano complejo.*

Consecuencia de este teorema (que no demostramos por razones de espacio y por basarse en propiedades de funciones holomorfas vectoriales) es que para cada $x \in A$ se tiene que $\rho(x) \leq \|x\| \ \forall \, x \in A$. De hecho $\rho(x) = \lim_{n\to\infty}(\|x^n\|)^{1/n} = \inf_{n\geq 1}(\|x^n\|)^{1/n}$ (Véase [R2], p. 243-245).

Teorema 2.1.6 (Gelfand-Mazur)**.** *Si A es álgebra de Banach tal que $\forall x \in A$, $x \neq 0$, $\exists \, x^{-1} \in A$, entonces A es isomorfa al álgebra de los números complejos $\mathbb{C}$; es decir, $A \cong \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $x \in A$. Como $\sigma(x) \neq \emptyset$, $\exists \ \lambda_0 \in \mathbb{C} \ \ni \ \lambda_0 - x$ no es inversible en A. Luego de la hipótesis se deduce que $\lambda_0 - x = 0$ y por lo tanto $x = \lambda_0 1$. Así la aplicación que asocia a cada $x \in A$ su correspondiente $\lambda \in \mathbb{C}$ es un isomorfismo de A sobre $\mathbb{C}$ que cumple

$$|\lambda| = \|\lambda 1\| = \|x\|, \ \forall \, x \in A.$$

□

2.2. Representación de Gelfand

La teoría de Gelfand sobre álgebras de Banach conmutativas se basa en tres conceptos fundamentales: ideales maximales, homomorfismos complejos no identicamente nulos (caracteres), y espectros.

Definición 2.2.1. Sea A álgebra de Banach conmutativa con unidad 1. Un subespacio vectorial I se dice *ideal de A* si $xy \in I$ siempre que $x \in A$, $y \in I$. Un ideal I se dice *ideal propio de A* si I es no nulo e $I \neq A$ y es ***ideal maximal de A*** si es propio y no está contenido en otro ideal de A. Al conjunto de los ideales maximales de A, que se denota $SpecA$, se le llama ***espectro de** A*; Es decir

$$SpecA = \{M \mid M \text{ ideal maximal de A}\}.$$

Recordemos que dado el ideal propio I, las operaciones definidas de forma natural sobre el conjunto cociente formado por las clases laterales de I, $A/I = \{x+I \ : \ x \in A\}$, dotan a este conjunto de estructura de álgebra cociente de A por I respecto a la norma $\|x+I\| = \inf_{y \in I} \|x+y\|$.. Por otro lado, todo ideal propio I está contenido en algún ideal maximal de A. Además, si I es un ideal de A, entonces $\overline{I}$ (clausura topológica de I) es ideal de A. En particular, si M es ideal maximal de A entonces $\overline{M}$ es un ideal propio de A, pero por ser M maximal, se tiene que $M = \overline{M}$ y por lo tanto todo ideal maximal es cerrado. Por último, si un ideal I de A es cerrado, A/I es un álgebra de Banach.

Teorema 2.2.2. *Sea A álgebra de Banach conmutativa con unidad e. Entonces*

$$\forall\, M \in SpecA, \ \ A/M \cong \mathbb{C}.$$

Demostración. Inmediata teniendo en cuenta que M es cerrado, que A/M es un cuerpo por ser M maximal, y aplicando el teorema de Gelfand-Mazur. □

Definición 2.2.3. Sean A, B álgebras de Banach. Llamaremos **homomorfismo** a toda aplicación lineal $\varphi : A \to B$ de forma que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)\ \forall\, x, y \in A$. Se llama **carácter de A** a cualquier homomorfismo complejo $\varphi : A \to \mathbb{C}$ no idénticamente nulo ($\varphi \neq 0$).

Todo carácter de un álgebra de Banach A con unidad cumple $\varphi(1) = 1$ con 1 elemento unidad de A, pues dado $x \in A$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ se tiene que $\varphi(x) = \varphi(x1) = \varphi(x)\varphi(1)$. Denotamos por Φ_A al conjunto de caracteres de A.

Propiedades 2.2.4. *Sea A álgebra de Banach conmutativa con unidad* 1*, y* Φ_A *el conjunto de caracteres de A. Entonces*

(i) $x \in A^{-1} \Leftrightarrow x \notin I$ *para todo ideal propio I de A.*

(ii) $x \in A^{-1} \Leftrightarrow \varphi(x) \neq 0,\ \forall \varphi \in \Phi_A$.

(iii) $\sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in \Phi_A\},\ \forall x \in A$.

(iv) Si $\varphi \in \Phi_A$*, entonces ker(*φ*) es ideal maximal de A.*

Demostración. El primer apartado es inmediato por la definición de ideal propio. El segundo apartado es consecuencia del hecho de que dado φ carácter de A, se tiene que $x \in A^{-1}$ si y solo si existe $x^{-1} \in A$ tal que $1 = xx^{-1}$ luego se cumple $1 = \varphi(1) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1})$. Por lo tanto $\varphi(x) \neq 0$. Ahora, si $\lambda \in \sigma(x)$, se tiene que $x - \lambda e \notin A^{-1}$ luego por (ii) se tiene que existe $\varphi \in \phi_A$ tal que $\varphi(x) = \lambda,\ \forall x \in A$ y queda demostrado el tercer apartado. Por último, para (iv), tomemos $\varphi \in \Phi_A$. Por el segundo apartado se deduce que si $x \in \varphi^{-1}(0)$ entonces $x \notin A^{-1}$ y por lo tanto por (i) se tiene que $\varphi^{-1}(0)$ es ideal propio de A. Debemos probar que $\varphi^{-1}(0)$ es ideal maximal de A, y para ello supongamos que no lo es, entonces existirá M ideal maximal de A de forma que $\varphi^{-1}(0) \subseteq M$. Ahora, si existe $x \in M$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, entonces de nuevo por el segundo apartado se tiene que $x \in A^{-1}$, con lo cual $1 = xx^{-1} \in M$ y así $M = A$. □

Teorema 2.2.5. *Existe una biyección* $SpecA \longleftrightarrow \Phi$ *dada por* $M \mapsto \varphi_M \ \ni \ \varphi_M : A \longrightarrow A/M \cong \mathbb{C}$ *(proyección canónica), y ker(*φ_M*)* $= M$.

Demostración. Sea $\varphi \in \Phi_A$, entonces por la propiedad (iv) de 2.2.4 se tiene que $\exists\ M \in SpecA \ni ker(\varphi) = M$. Recíprocamente se tiene que para cada $M \in SpecA$, como M es maximal y cerrado tenemos que A/M es cuerpo, luego álgebra de división. Por el teorema de Gelfand-Mazur $A/M \cong \mathbb{C}$ luego tomando $\varphi : A \to \mathbb{C} \equiv A/M \ \ni \varphi(a) = a + M$, se tiene que $\varphi \in \Phi_A$. □

A partir de ahora por Φ_A ó *SpecA* denotaremos indistintamente el conjunto de caracteres de A o el conjunto de ideales maximales de A ya que por el teorema anterior los ideales maximales de A se pueden identificarse con los caracteres de A.

Teorema 2.2.6. *Sea A álgebra de Banach conmutativa con unidad y Φ_A conjunto de caracteres de A. Entonces, $\|\varphi\| = 1\ \forall \varphi \in \Phi_A$, siendo $\|\cdot\|$ la norma del dual topológico A' de A.*

Demostración. Por definición $\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|$. Entonces, debido a que $\varphi(1) = 1$, se tiene que $\|\varphi\| \geq 1$. Si $\|\varphi\| > 1$, existe $x \in A$ tal que $\|x\| < 1$ y $\varphi(x) = 1$. Por la proposición 2.1.3, $1 - x$ es inversible en A. Luego,

$$\varphi(1) = \varphi((1-x)(1-x)^{-1}) = (\varphi(1) - \varphi(x))\varphi((1-x)^{-1}) = 0,$$

lo cual es contradicción con $\varphi(1) = 1$. Así $\|\varphi\| = 1$. □

Definición 2.2.7. Se llama ***topología débil en A' inducida por A*** a aquella cuyos entornos del origen vienen definidos por:

$$V_{a_1,\ldots,a_n;\varepsilon} := \{\psi \in A' : |\psi(a_j)| < \varepsilon\ ,\ j = 1, \ldots, n\}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a_1, \ldots a_n \in A$.

Tanto el resultado del teorema 2.2.5 como el del teorema 2.2.6, permiten identificar a Φ_A con un subconjunto de la esfera unitaria cerrada $\Omega_{A'}$ del dual A' de A. Se define la *topología de Gelfand en Φ_A* como la topología débil en Φ_A inducida por la del dual A' de A,$\sigma(A', A)$. Nótese que la topología débil en A' inducida por A, hace de $\Omega_{A'}$ un espacio compacto (teorema de Alaoglu-Bourbaki) y como Φ_A es $\sigma(A', A)$-cerrado en $\Omega_{A'}$ ya que el límite de homomorfismos que satisfacen $\varphi(1) = 1$ es nuevamente un homomorfismo no nulo, entonces se tiene que Φ_A es compacto en la topología de Gelfand.

Definición 2.2.8. Sea A un álgebra de Banach conmutativa con Φ_A su conjunto de caracteres. Se define la ***transformada de Gelfand de*** $x \in A$ como la función

$$\begin{aligned} \hat{x} : \Phi_A &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \hat{x}(\varphi) = \varphi(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in A$ y $\varphi \in \Phi_A$. Claramente $\hat{x}$ es continua $\forall\ x \in A$, con la topología de Gelfand en Φ_A.

Sea $\hat{A}$ el conjunto de todas las funciones $\hat{x}$, con $x \in A$. La aplicación

$$\begin{aligned} \mathscr{G} : A &\to \hat{A} \subseteq \mathscr{C}(\Phi_A) \\ x &\mapsto \hat{x} : \Phi_A \to \mathbb{C} \end{aligned}$$

se define como ***la representación de Gelfand***. Llamaremos *radical de A*, *RadA*, al núcleo de la representación de Gelfand, es decir, $RadA = Ker(\mathscr{G})$. El álgebra A se llama *semisimple* si $RadA = \{0\}$; es decir, si $\mathscr{G}$ es inyectiva.

Teorema 2.2.9. *La representación de Gelfand es un homomorfismo continuo de A en el álgebra de las funciones continuas sobre Φ_A de forma que $\hat{A} \subseteq \mathscr{C}(\Phi_A)$. De hecho $\|\hat{x}\|_u = \rho(x) \leq \|x\|$. Además*

$$Ker\mathscr{G} = \bigcap_{M \in SpecA} M = \{x \in A\ \mid \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi_A\}$$

Demostración. Como $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ donde $\varphi \in \Phi_A$ es obvio que $\hat{x} \in \mathscr{C}(\Phi_A)\ \forall x \in A$ luego $\hat{A} \subseteq \mathscr{C}(\Phi_A)$. Sobre $\mathscr{C}(\Phi_A)$ se considera la norma $\|f\|_u = \sup_{t \in SpecA} |f(t)|$. Entonces,

$$\|\hat{x}\|_u = \max_{\varphi \in \Phi_A} |\hat{x}(\varphi)| = \max|\varphi(x)| = \max(\sigma(x)) = \rho(x) \leq \|x\|.$$

□

¿Qué ocurre si A no tiene unidad?

Sea $A_1 = A \oplus \mathbb{C} \cdot e$ la unitización de A; entonces $\exists\ \varphi_\infty : A \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\varphi_\infty(a + \lambda e) = \lambda$ nuevo caracter de A_1 (con respecto a Φ_A) y se tiene que

$$\Phi_{A_1} = \Phi_A \cup \{\varphi_\infty\},$$

Es decir, Φ_{A_1} es la compactificación de Alexandroff de Φ_A, y además Φ_A es localmente compacto: en efecto, dado $\varphi \in \Phi_A, \exists\ a \in A\ \ni\ \varphi(a) \neq 0$. Entonces $\{\psi \in \Phi_{A_1} :\ |\psi(a)| \geq \frac{1}{2}|\varphi(a)|\}$ es un entorno compacto (ya que es un cerrado de ϕ_{A_1}) de φ que no contiene a φ_∞.

Teorema 2.2.10. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa sin unidad. Entonces*

(i) $\Phi_A = SpecA$ *es localmente compacto y* T_2.

(ii) $\hat{x} \in \mathscr{C}_0(SpecA)\ \forall\, x \in A$ *y además* $x \in A \mapsto \hat{x} \in \mathscr{C}_0(SpecA)$ *es un homomorfismo.*

(iii) $\hat{x}(\Phi_A)\backslash\{0\} = \sigma(x)\backslash\{0\}$.

(iv) $\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x)\ \ \forall\, x \in A$.

Demostración. Consecuencia de las observaciones anteriores sobre la compactificación de Alexandroff, y del teorema 2.2.9. □

Ejemplos

1. Sea $A = \mathscr{C}(K)$ con la norma uniforme el álgebra de Banach de las funciones continuas sobre el espacio K compacto y Hausdorff. Sea la aplicación de K en el espectro del álgebra, $\Phi_{\mathscr{C}(K)}$ de forma que $x \mapsto \delta_x$ siendo δ_x carácter del álgebra definido por $\delta_x(f) = f(x)$ para cada $f \in \mathscr{C}(K)$. Entonces llegamos a que $\Phi_{\mathscr{C}(K)} \cong K$. Por otro lado, sea X espacio localmente compacto y Hausdorff. Llamando $K = X \cup \{\infty\}$ tenemos que $\mathscr{C}(K) = \mathscr{C}_0(X) \oplus \mathbb{C}e$ (unitización de $\mathscr{C}_0(X)$). Así, por lo visto anteriormente para álgebras de Banach sin unidad, se tiene que $\Phi_{\mathscr{C}(K)} = \Phi_{\mathscr{C}_0(X)} \cup \{\varphi_\infty\}$ y así teniendo en cuenta el ejemplo anterior, $\Phi_{\mathscr{C}_0(X)} \cong X$ (para más detalle puede verse [L]). Vemos pues que $\mathscr{C}(K)$ y $\mathscr{C}_0(K)$ son los ejemplos canónicos de la teoría.

2. Sea el álgebra de Banach $A = l^1(\mathbb{Z}) = \{\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C} \mid\ \sum |x_n| < +\infty\}$ con la operación convolución definida del siguiente modo: $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \mathbf{z}\ \ni\ z_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k$. De esta forma, el espectro del álgebra A es $\Phi_A \cong \mathbb{T} = \{e^{it}\ :\ t \in [0, 2\pi)\} \cong [0, 2\pi)$ y la representación de Gelfand es la aplicación
$$\mathscr{G} : l^1(\mathbb{Z}) \to \mathscr{C}(\mathbb{T})$$
$$(x_n)_n \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}.$$
De hecho $\widehat{l^1(\mathbb{Z})} = \{f \in \mathbb{T}\ :\ \sum |\hat{f}(n)| < +\infty\}$.

3. Sea $A = L^1(\mathbb{T})$ algebrá de Banach conmutativa sin unidad (con la operación convolución que definiremos posteriormente). En este caso, $\phi_A \cong \mathbb{Z}$ y la representación de Gelfand viene dada por $\mathscr{G} : L^1(\mathbb{T}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{Z})$ de forma que $\mathscr{G}(f) = \{\hat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$.
Este ejemplo es un caso particular de la teoría que veremos en el siguiente capítulo.

4. Por último, sea A=$L^1(\mathbb{R}^n)$ álgebra de Banach sin unidad. En este caso $\Phi_A = \mathbb{R}^n$ y la transformada de Gelfand viene dada por la aplicación $L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ de forma que $f \mapsto \hat{f}$ siendo $\hat{f}(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(s) e^{-its} ds$. Así la transformada de Gelfand coincide con la transformada de Fourier (véase [L]).

Capítulo 3

Transformada de Fourier en grupos localmente compactos abelianos

3.1. Espacio $L^1(G)$

Para llegar al espacio $L^1(G)$ como álgebra de Banach y dar sus características y resultados fundamentales, es necesario dar una definición previa sobre el mismo y sobre la operación que le dará estructura de álgebra. Recordamos que damos por conocidos los conceptos básicos de teoría de la medida. Notamos que a partir de ahora trabajaremos sobre grupos topológicos localmente compactos y abelianos (LCA),

Definición 3.1.1. Sea G un grupo LCA, μ medida de Haar en G y $1 \leq p < \infty$. El espacio $L^p(\mu)$ es el conjunto de clases de funciones medibles-Haar de norma

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

finita, idénticas entre si salvo en conjuntos de medida nula. El espacio vectorial (con las operaciones habituales de suma y producto por escalares complejos) $L^p(\mu)$ tiene estructura de *espacio de Banach* con la norma anterior. Para $p = \infty$, $L^\infty(G)$ es el espacio de funciones esencialmente acotadas y medibles-Haar en G con norma

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\ sup}_{x \in G} |f(x)|;$$

El *supremo esencial*, (ess sup), de $|f|$ es, por definición, el menor número λ de forma que $\mu\{x \,:\, f(x) > \lambda\} = 0$.

Dada esta definición, nosotros escribiremos $L^p(G)$ en lugar de $L^p(\mu)$, $\forall\ 1 \leq p \leq \infty$. Es claro que las normas de los espacios $(L^P, \|\cdot\|_p)$ son invariantes por traslación, es decir

$$\|L_x f\|_p = \|f\|_p \quad \forall\ f \in \mathscr{C}_c^+.$$

donde $L_x f$ es la traslación de f por x definida por $L_x f(y) = f(x^{-1}y)\ \forall y \in G$.

Teorema 3.1.2. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(G)$. La aplicación de G en $L^p(G)$ definida por*

$$x \mapsto L_x(f)$$

es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\mathscr{C}_c(G)$ es denso en $L^p(G)$, $\exists\ g \in \mathscr{C}_c(G)$ con soporte compacto K de forma que $\|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Como $g \in \mathscr{C}_c(G)$, g es uniformemente continua, lo que implica que existe V entorno del origen en G de forma que

$$\|g - L_x(g)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}[\mu(K)]^{-1/p}$$

$\forall\, x \in V$. Por lo tanto $\|g - L_x(g)\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$, y así

$$\|f - L_x(f)\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - L_x(g)\|_p + \|L_x(g) - L_x(f)\|_p < \varepsilon$$

si $x \in V$. Finalmente, $L_x(f) - L_y(f) = L_x(f - L_{x^{-1}y}(f))$, luego $\|L_x(f) - L_y(f)\|_p < \varepsilon$ si $x^{-1}y \in V$, y prueba la continuidad uniforme. $\square$

Definición 3.1.3. Para cualquier par de funciones borelianas sobre el grupo topológico localmente compacto G, definimos su ***convolución*** $f * g$ mediante la fórmula

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy \qquad (1)$$

siempre que

$$\int_G |f(y)g(y^{-1}x)|\; dy < \infty \qquad (2)$$

es decir, siempre que $fL_y(g) \in L^1(G)$. Notemos que la medida respecto a la cual integramos es la medida de Haar, que denotaremos $dx, dy, \ldots$ en lugar de $d\mu(x), d\mu(y)\ldots$ por simplificar la notación.

Proposición 3.1.4. *(i) Si (2) se cumple para algún $x \in G$, entonces $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.*

(ii) Si $f, g \in L^1(G)$, entonces (2) se cumple a.e (para todo $x \in G$ salvo un subconjunto $N \subseteq G$ de medida nula), $f * g \in L^1(G)$, y se tiene la desigualdad

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(iii) Si $f, g, h \in L^1(G)$, entonces $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Demostración. Haciendo un cambio de variable $y = xt$ en (1) y teniendo en cuenta que integramos respecto a la medida de Haar la cual es invariante por traslación y que G es abeliano, se tiene que

$$(f * g)(x) = \int_G f(tx)g(t^{-1})dt = \int_G f(t^{-1}x)g(t)dt = (g * f)(x).$$

Para probar (ii) veamos en primer lugar que el integrando de (1) es una función boreliana en $G \times G$. Fijemos un abierto V en el plano, pongamos $E = g^{-1}(V)$, $E' = E \times G$, y $E'' = \{(x, y) \;\mid y^{-1}x \in E\}$. Claramente E' es boreliano en $G \times G$, y como el homeomorfismo $G \times G$ en sí mismo dado por $(x, y) \mapsto (y, yx)$ lleva E' a E'', E'' es también un boreliano en $G \times G$. Además, como $g(y^{-1}x) \in V$ si y solo si $(x, y) \in E''$ entonces $g(y^{-1}x)$ es una función boreliana en $G \times G$ y por lo tanto lo es el producto $f(y)g(y^{-1}x)$. Ahora, por el teorema de Fubini,

$$\int_G \int_G |f(y)g(y^{-1}x)| dx dy = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Llamando $\Phi(x) = \int_G |f(y)g(y^{-1}x)| dy$, se sigue que $\Phi \in L^1(G)$. En particular, $\Phi(x) < \infty$ para casi todo $x \in G$, y por lo tanto $(f * g)(x)$ existe para casi todo $x \in G$. Finalmente, $|(f * g)(x)| \leq \Phi(x)$, y se tiene la desigualdad de (ii).
Por último, para probar (iii) debemos aplicar de nuevo el teorema de Fubini justificado por (ii) para casi todo x:

$$(f * (g * h))(x) = \int_G f(z^{-1}x)(g * h)(z)dz = \int_G \int_G f(z^{-1}x)g(y^{-1}z)h(y)dydz$$

$$= \int_G \int_G f(y^{-1}z^{-1}x)g(z)h(y)dydz = \int_G (f * g)(y^{-1}x)h(y)dy = ((f * g) * h).$$

$\square$

Proposición 3.1.5. *Sea* $1 < p < \infty$*,* $f \in L^1(G)$*,* $g \in L^P(G)$*. Entonces se tiene que*

(a) $\exists\, f*g(x)$ *a.e,* $f*g \in L^P(G)$ *y además,* $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$*.*

(b) Si $p = \infty$*,* $f*g$ *está acotado y además es uniformemente continuo.*

Demostración. Que existe a.e se prueba como en la afirmación (ii) de la proposición anterior. Sea $1 < p < \infty$, y sea q su exponente conjugado, es decir, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\int_G |f(t)||g(t^{-1}x)|dt = \int_G |f(t)|^{1/q}|f(t)|^{1/p}|g(t^{-1}x)|dt \leq \left\{\int_G |f(t)||g(t^{-1}x)|^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_G |f(t)|dt\right\}^{1/q}.$$

Entonces,

$$\|f*g\|_p^p \leq \int_G \left(\int_G |f(t)||g(t^{-1}x)|dt\right)^p dx \leq \|f\|_1^{p/q}\int_G\int_G |f(t)||g(t^1x)|^p dtdx = \|f\|_1^{(p/q)+1}\|g\|_p^p$$

Por último, elevando a 1/p,

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1^{1/p+1/q}\|g\|_p = \|f\|_1\|g\|_p,$$

con lo cual hemos demostrado (a). En el caso de (b), por hipótesis se sigue que

$$|(f*g)(x)| \leq \|f\|_1\|g\|_\infty, \text{ (para casi todo } x \in G)$$

por lo tanto $f*g$ está acotado. Ahora para $x \in G$, $z \in G$, se tiene, aplicando la afirmación (i) de la proposición 3.1.4, y de nuevo la desigualdad de Hölder,

$$|(f*g)(x)-(f*g)(z)| \leq \int_G |f(y^{-1}x)-f(y^{-1}z)||g(y)|dy \leq \|L_xf - L_zf\|_1\|g\|_\infty.$$

Por el teorema 3.1.2 es inmediato ver que esta expresión puede hacerse arbitrariamente pequeña cuando $z^{-1}x \in V$ entorno de la unidad e. □

Teorema 3.1.6. *Para cualquier grupo localmente compacto y abeliano G,* $L^1(G)$ *es un álgebra de Banach conmutativa con la operación convolución* $*$*. De hecho,* $L^1(G)$ *tiene unidad si y solo si G es discreto.*

Demostración. La primera afirmación del teorema se sigue inmediatamente por las propiedades 3.1.4 de la convolución. Si G es discreto, definimos

$$\delta_e(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = e \\ 0 & si\ x \neq e \end{cases}$$

Claramente la función $\delta_e \in L^1(G)$. Teniendo en cuenta que por ser G discreto la convolución se define mediante la fórmula

$$(f*g)(x) := \sum_{x_1 \in G} f(x_1)g(x_1^{-1}x)$$

se sigue inmediatamente que $f*\delta_e(x) = f(x)\ \forall x \in G$ y por lo tanto $\delta_e \equiv 1_{L^1(G)}$ es la unidad de $L^1(G)$. Recíprocamente, sea δ_e la unidad de $L^1(G)$. Si G no es discreto entonces existen entornos de la unidad e de medida tan pequeña como queramos (véase [L], p.107); es decir,

$$\exists\, U \text{ entorno de e } \ni \int_U |\delta_e(x)|dx < \frac{1}{2}$$

Escogemos $V \subseteq U$ entorno de la unidad de forma que $VV \subseteq U$ y además $V = V^{-1}$ (entorno simétrico), que sabemos que existe por la proposición 1.1.3. Sea C_V función característica de V. Si $x \in V$,

$$1 = C_V(x) = (C_V*\delta_e)(x) = \int_G C_V(y)\delta(y^{-1}x)dy = \int_G \delta_e(y)C_V(y^{-1}x)dy \leq \int_{xV} |\delta_e(y)|dy < \frac{1}{2}$$

con lo que llegamos a una contradicción, por lo tanto G es discreto, □

Definición 3.1.7. Sea G grupo LCA. Se llama ***grupo dual $\hat{G}$ de G*** al conjunto de caracteres (homomorfismos complejos no identicamente nulos) continuos de G, es decir

$$\hat{G} := \{\xi : G \to \mathbb{T} \text{ carácter continuo}\}.$$

El grupo dual $\hat{G}$ separa los puntos de G; es decir, para todo $x, y \in G$ tal que $x \neq y$, existe un homomorfismo $\xi \in \hat{G}$ de forma que $\xi(x) \neq \xi(y)$. Esto es consecuencia del teorema de Gelfand-Raikov (véase [F], p.84), por ejemplo, ya que los caracteres de G son exactamente sus representaciones unitarias irreducibles. A partir de ahora emplearemos la notación $< x, \xi >:= \xi(x), \quad (x \in G, \xi \in \hat{G})$.

Identifiquemos $\hat{G}$ con el conjunto de caracteres $\Phi_{L^1(G)}$ de $L^1(G)$.

Teorema 3.1.8. *Si $\xi \in \hat{G}$ y*

$$(1) \qquad \hat{f}(\xi) = \int_G f(x)\overline{< x, \xi >}dx \qquad (f \in L^1(G)),$$

entonces la aplicación $f \mapsto \hat{f}(\xi)$ es un homomorfismo complejo no idénticamente nulo de $L^1(G)$. Recíprocamente, todo homomorfismo complejo no nulo de $L^1(G)$ es obtenido de esta manera, y distintos caracteres inducen distintos homomorfismos.

Demostración. Sea $\xi \in \hat{G}$ y sea $\gamma : L^1(G) \to \mathbb{C}$ de forma que $\gamma(f) \equiv \hat{f}(\xi) := \int_G < x, \xi > f(x)dx$, $\forall f \in L^1(G)$. Claramente se trata de una aplicación lineal. Además, para $f, g \in L^1(G)$ tenemos que

$$\gamma(f * g) = \int_G < x, \xi > (f * g)(x)dx = \int_G \int_G < x, \xi > f(xy^{-1})g(y)dy$$

$$= \int_G < y, \xi > g(y)dy \int_G < xy^{-1}, \xi > f(xy^{-1})dx = \gamma(g)\gamma(f).$$

ya que ξ es multiplicativo y $< x, \xi >=< xy^{-1}y, \xi >=< xy^{-1}, \xi >< y, \xi >$, luego se trata de un homomorfismo complejo no identicamente nulo ($|< x, \xi >| = 1$), y por lo tanto $\gamma \in \Phi_{L^1(G)}$.
Recíprocamente, sea $\varphi \in \Phi_{L^1(G)}$. Como $\varphi \in (L^1(G))' = L^\infty(G)$ Entonces existe una función $h \in L^\infty(G)$ de forma que $\varphi(f) = \int_G fh$ $(f \in L^1(G))$. Fijamos $f \in L^1(G)$ de forma que $\varphi(f) \neq 0$. $\forall g \in L^1(G)$ tenemos que

$$\int_G \varphi(f)h(y)g(y)dy = \varphi(f)\varphi(g) = \varphi(f * g) = \int_G (f * g)(x)h(x)dx$$

$$= \int_G \int_G h(x)f(xy^{-1})g(y)dydx = \int_G \varphi(L_y f)g(y)dy$$

Por lo tanto $h(y) = \varphi(L_y f)/\varphi(f)$ a.e. Redefinimos h para que sea $\varphi(L_y f)/\varphi(f)$ $\forall y \in G$, y así h es continua por serlo el cociente. Además, $h(xy)\varphi(f) = \varphi(L_{xy} f) = \varphi(L_x L_y f) = h(x)\varphi(L_y f) = h(x)h(y)\varphi(f)$ luego $h(xy) = h(x)h(y)$. Por último, $h(x^n) = (h(x))^n$ y h está acotada, luego $|h(x)| = 1$. Por lo tanto $h : G \to \mathbb{T}$ es un homomorfismo complejo continuo, es decir, $h \in \hat{G}$.
Finalmente, si $\hat{f}(\xi_1) = \hat{f}(\xi_2)$ para toda función $f \in L^1(G)$, por (1) se tiene que $< x, \xi_1 >=< x, \xi_2 >$ para casi todo $x \in G$ y como ξ_1 y ξ_2 son continuos la igualdad se da para todo punto, con lo cual debe ser $\xi_1 = \xi_2$. □

El dual $\hat{G}$ es un grupo abeliano para el producto $(\xi \cdot \eta)(x) := \xi(x) \cdot \eta(x)$, con identidad $1_{\hat{G}} \equiv 1$; Además, $< x, \xi^{-1} >=< x^{-1}, \xi >= \overline{< x, \xi >}$. La topología de $\hat{G}$ es la de la convergencia uniforme sobre compactos de G, τ_c; es decir, decimos que $\xi_j \to \xi$ en $\hat{G}$ si y solo si $\xi_j \to \xi$ uniformemente en los compactos de G. Se tiene que $\tau_c \equiv \sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ restringido a $\hat{G}$, donde $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ coincide con la topología de Gelfand sobre $\hat{G}$ (véase [GRS], p.143). De hecho, $\hat{G} \cup \{0\} = \Phi_{L^1(G)} \cup \{0\} \subseteq \overline{\Omega}_{L^\infty(G)}$ (bola unidad cerrada en $L^\infty(G)$), luego por la teoría de Gelfand, $\hat{G} \cup \{0\}$ es compacto; es decir, **$\hat{\mathbf{G}}$ es localmente compacto**.

3.2. La transformada de Fourier

Una vez conocida la relación entre $\hat{G}$ (dual del grupo G) y el espectro del álgebra $L^1(G)$, veámos como se define la transformada de Fourier. Dada $\xi \in \hat{G}$, definimos $\bar{\xi} \in \hat{G} \ \ni \ \bar{\xi} = \overline{< x, \xi >}$.

Definición 3.2.1. Para toda función $f \in L^1(G)$, la función $\hat{f}$ definida en $\hat{G}$ de forma que

$$\hat{f}(\xi) = \int_G \overline{< x, \xi >} f(x) dx \qquad (\xi \in \hat{G})$$

se llama *transformada de Fourier de f*, que coincide precisamente con la transformada de Gelfand de $f \in L^1(G)$. Podemos considerar **la transformada de Fourier** como la transformación de Gelfand sobre $L^1(G)$, es decir, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : L^1(G) &\to \mathscr{C}_0(\hat{G}) \\ f &\mapsto \hat{f} \quad . \end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathscr{F}(L^1(G))$ al conjunto de todas las funciones $\hat{f}$. Enunciemos algunas propiedades fundamentales de la transformada de Fourier.

Proposición 3.2.2. *(a) $\mathscr{F}(L^1(G))$ es denso en $\mathscr{C}_0(\hat{G})$, es decir, $\overline{\mathscr{F}(L^1(G))} = \mathscr{C}_0(\hat{G})$*

(b) La tranformada de Fourier de $f * g$ es $\hat{f}\hat{g}$; es decir, $\mathscr{F}$ es un homomorfismo continuo de álgebras de Banach.

(c) $\mathscr{F}(L^1(G))$ es invariante por traslación e invariante por multiplicación por $< x, \xi >$, para todo $x \in G$.

(d) La transformada de Fourier es decreciente en norma y por lo tanto continua: $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(e) Para toda $f \in L^1(G)$ y $\xi \in \hat{G}$, $(f * \xi)(x) = < x, \xi > \hat{f}(\xi)$.

Demostración. Es claro que $\mathscr{F}(L^1(G))$ es subálgebra de $\mathscr{C}_0(\hat{G})$ para el producto puntual. Por tanto $\overline{\mathscr{F}(L^1(G))}$ es un subalgebra cerrada de $\mathscr{C}_0(\hat{G})$. Además se cumple:

(i) Para cada $\xi \in \hat{G}$ existe $\hat{f} \in \mathscr{F}(L^1(G)) \subseteq \overline{\mathscr{F}(L^1(G))}$ tal que $\hat{f}(\xi) \neq 0$.

(ii) $\mathscr{F}(L^1(G))$, y por tanto, $\overline{\mathscr{F}(L^1(G))}$ separa puntos de $\hat{G}$.

(iii) Para cada $f \in L^1(G)$, sea $\tilde{f}$ definida por $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Es inmediato ver que la transformada de Fourier de $\tilde{f}$ es el complejo conjugado $\bar{\hat{f}}$ de $\hat{f}$, y claramente $\bar{\hat{f}} \in \mathscr{F}(L^1(G)) \subseteq \overline{\mathscr{F}(L^1(G))}$.

Aplicando una de las formas del teorema de Stone-Weierstrass (véase [C] p.151) se tiene que $\overline{\mathscr{F}(L^1(G)} = \mathscr{C}_0(\hat{G})$ lo que prueba (a); (b) está implícito en el teorema 3.1.8. Si $\xi_0 \in \hat{G}$ y $g(x) = < x, \xi_0 > f(x)$, entonces $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi_0^{-1}\xi)$, luego $\overline{\mathscr{F}(L^1(G))}$ es invariante por traslación. Si $g = L_x f$, entonces

$$\hat{g}(\xi) = \int_G \overline{< y, \xi >} f(x^{-1}y) dy = \overline{< x, \xi >} \int_G < y^{-1}x, \xi > f(x^{-1}y) dy = \overline{< x, \xi >} \hat{f}(\xi).$$

Esto prueba (c); (d) y (e) son inmediatas. □

Teorema 3.2.3. *Si G es discreto, $\hat{G}$ es compacto. Si G es compacto, $\hat{G}$ es discreto.*

Demostración. Si G es discreto, $L^1(G)$ tiene unidad (por el teorema 3.1.6) y por lo tanto $\hat{G}$ es compacto. Si G es compacto y su medida de Haar esta normalizada de forma que $m(G) = 1$, se cumple la relación de ortogonalidad

$$\int_G < x, \xi > dx = \begin{cases} 1 & si\ \xi = 1 \\ 0 & si\ \xi \neq 1 \end{cases} \qquad (1)$$

El caso $\xi = 1$ es inmediato. Si $\xi \neq 1$ entonces $< x_0, \xi > \neq 1$para algún $x_0 \in G$, y

$$\int_G < x, \xi > dx = < x_0, \xi > \int_G < x_0^{-1} x, \xi > dx = < x_0, \xi > \int_G < x, \xi > dx.$$

lo que prueba (1). Si $f(x) = 1$ para todo $x \in G$, entonces $f \in L^1(G)$ ya que G es compacto, y por (1) $\hat{f}(1) = 1,\ \hat{f}(\xi) = 0\ \forall \xi \neq 1$. Como $\hat{f}$ es continua, el conjunto formado unicamente por la unidad de $\hat{G}$ es un abierto en $\hat{G}$ y por lo tanto $\hat{G}$ es discreto.

□

Ejemplos Los grupos clásicos del análisis de Fourier son:

- El grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ de las n-tuplas reales, con $n \in \mathbb{N}$.
- El grupo multiplicativo $\mathbb{T}$ de los números complejos de módulo uno (también denominado toro).
- El grupo aditivo $\mathbb{Z}$ de los enteros.

Veámos cuáles son sus respectivos grupos duales:

1. Supongamos que $G = \mathbb{R}$ y fijemos $\phi \in \hat{\mathbb{R}}$. Escribiremos $\phi(x)$ en lugar de $< x, \phi >$ de momento; Como $\phi(0) = 1$, existe $\delta > 0$ de forma que

$$\int_0^\delta \phi(t)dt = \alpha \neq 0.$$

Teniendo en cuenta que $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, esto implica que

$$\alpha \cdot \phi(x) = \phi(x) \int_0^\delta \phi(t)dt = \int_0^\delta \phi(x+t)dt = \int_x^{x+\delta} \phi(t)dt.$$

Como ϕ es continua, la ultima expresión es diferenciable y por lo tanto ϕ tiene derivada continua ϕ'. Derivando obtenemos la ecuación diferencial

$$\phi'(x) = \frac{1}{\alpha}(\phi(x+\delta) - \phi(x)) = C\phi(x), \qquad C = \frac{\phi(\delta) - 1}{\alpha}.$$

Por lo tanto $\phi(t) = e^{ct}$ y como $|\phi| = 1$ se tiene finalmente que,

$$\phi(x) = e^{2\pi i \xi},\ \ \xi \in \mathbb{R} \qquad (5).$$

La correspondencia $\phi \leftrightarrow \xi$ es un isomorfismo entre $\hat{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}$. Por lo tanto, ***el grupo dual de*** $\mathbb{R}$ ***es*** $\mathbb{R}$.

De esta manera si $G = \mathbb{R}^n$, es casi inmediato probar que el grupo dual del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ es el producto cartesiano de los grupos duales $\hat{\mathbb{R}} \times \ldots \times \hat{\mathbb{R}}$, pero el grupo dual de $\mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$ por lo tanto tenemos que el grupo dual de $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}^n$.

3. Si $G = \mathbb{T}$, el mismo razonamiento anterior muestra que todo caracter de $\hat{\mathbb{T}}$ es de la forma que aparece en (5), pero ahora además se verifica que $\phi(x+2\pi) = \phi(x)$, por lo tanto 'ξ' debe ser un entero y el grupo dual de $\mathbb{T}$ se identifica con el grupo discreto $\mathbb{Z}$.

4. Si G=$\mathbb{Z}$ y $\phi \in \hat{\mathbb{Z}}$, entonces $< 1, \phi >= e^{i\alpha}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y se sigue que $< n, \phi >= e^{in\alpha}$. La correspondencia $\phi \leftrightarrow \alpha$ es un isomorfismo entre $\hat{\mathbb{Z}}$ y $\mathbb{T}$ y concluimos que el dual del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es el toro $\mathbb{T}$.

Las transformadas de Fourier en estos tres casos tienen la siguiente forma:

$$G=\mathbb{R}^n: \ \hat{f}(y)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i<\xi,x>}dx \ \ (y\in\mathbb{R}^n), \qquad G=\mathbb{T}: \ \hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta \ \ (n\in\mathbb{Z})$$

$$G=\mathbb{Z}: \ \hat{f}(e^{i\alpha})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\alpha} \quad (e^{i\alpha}\in\mathbb{T}).$$

Funciones de tipo positivo

A continuación introducimos el concepto de función de tipo positivo, central en el estudio de la transformada de Fourier en grupos LCA, y abordamos una serie de resultados dependientes de dichas funciones.

Definición 3.2.4. Sea $\phi : G\to\mathbb{C}$ definida a.e. Decimos que ϕ es de *tipo positivo* si $\phi\in L^\infty(G)$ y además, como elemento del dual de $L^1(G)$, cumple que

$$\phi(\tilde{f}*f)\geq 0 \qquad (\forall\, f\in L^1(G))$$

siendo $\tilde{f}(x):=\overline{f(x^{-1})}$, $\forall x\in G$. Notemos que utilizando la definición y aplicando dos cambios de variable se tiene que

$$\begin{aligned}\phi(\tilde{f}*f) &:= \int_G(\tilde{f}*f)(x)\phi(x)dx=\int_G\int_G\overline{f(y^{-1})}f(y^{-1}x)\phi(x)dydx\\ &= \int_G\int_G\overline{f(y)}f(yx)\phi(x)dydx=\int_G\int_G f(t)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}t)dydt;\end{aligned}$$

por tanto,

$$\phi \text{ es de tipo positivo si y solo si } \int_G\int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)dydx\geq 0 \qquad \forall f\in L^1(G.)$$

Denotaremos por $P(G)$ al conjunto de funciones de tipo positivo y continuas. Es inmediato probar que si $\phi\in P(G)$ entonces $\overline{\phi}\in P(G)$ (precisamente esto sigue de la última caracterización, tomando conjugados).

Proposición 3.2.5. *Para toda función* $f\in L^2(G)$ *se tiene* $f*\tilde{f}\in P(G)$.

Demostración. Primero notemos que si $<\cdot,\cdot>_{L^2}$ denota el producto escalar (o interno) en el espacio de Hilbert $L^2(G)$ dado por

$$<\alpha,\beta>_{L^2}:=\int_G\alpha(s)\overline{\beta(s)}ds \qquad (\forall\alpha,\beta\in L^2(G))$$

entonces $\forall x,y\in G,\ f\in L^2(G)$ tenemos, aplicando un cambio de variable

$$<L_{y^{-1}x}f,f>_{L^2}=<L_xf,L_yf>_{L^2}.$$

Sea ahora $\phi:=f*\tilde{f}$. Para todo $x\in G$, se tiene que

$$\phi(x):=\int_G f(x^{-1}y)\overline{f(y)}dy=\int_G(L_xf)(y)\overline{f(y)}dy=<L_xf,f>_{L^2}$$

es continua en x, ya que por el teorema 3.1.2 la aplicación $x\in G\mapsto L_xf\in L^2(G)$ es continua (de la topología de G a la de la norma $\|\cdot\|_2$ de $L^2(G)$). Más aún, $\forall g\in L^1(G)$,

$$\begin{aligned}\int_G\int_G g(x)\overline{g(y)}\phi(y^{-1}x)dxdy &= \int_G\int_G g(x)\overline{g(y)}<L_{y^{-1}x}f,f>_{L^2}dxdy=\int_G\int_G g(x)\overline{g(y)}<L_xf,L_yf>_{L^2}dxdy\\ &= \int_G\int_G<g(x)L_xf,g(y)L_yf>_{L^2}dxdy=<\int_G g(x)L_xfdx,\int_G g(y)L_yfdy>_{L^2}\\ &= \int_G\left(\int_G g(x)L_xfdx\right)\overline{\left(\int_G g(y)L_yfdy\right)}d\lambda=\left\|\int_G g(x)L_xfdx\right\|^2_{L^2(G)}\geq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, en vista de la observación siguiente a la definición de función de tipo positivo, se tiene que $\phi=f*\tilde{f}\in P(G)$

□

Denotamos por $M(\hat{G})$ al conjunto de medidas de Radon complejas sobre G. Sea $\mu \in M(\hat{G})$, definimos

$$\phi_\mu(x) := \int_{\hat{G}} < x, \xi > d\mu(\xi), \qquad (x \in G)$$

Lema 3.2.6. *La aplicación dada por $\mu \in M(\hat{G}) \mapsto \phi_\mu \in \mathscr{C}(G)$ es lineal e inyectiva.*

Demostración. La linealidad es inmediata. Veámos la unicidad: Si $\phi_\mu = 0$, entonces

$$0 = \int_G \int_{\hat{G}} f(x) < x, \xi > d\mu(\xi) dx = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\xi^{-1}) d\mu(\xi) \qquad \forall f \in L^1(G).$$

Como $\overline{\mathscr{F}(L^1(G))} = \mathscr{C}_0(\hat{G})$ se sigue que $\mu = 0$ por el teorema de dualidad de Riesz. □

Observación. Dada $\mu \in M(\hat{G})$ positiva, se tiene que $\phi_\mu \in P(G)$. En efecto: si $f \in L^1(G)$ se tiene

$$\int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\phi_\mu(y^{-1}x) dx dy = \int_G \int_G \int_{\hat{G}} f(x)\overline{f(y)}\, \overline{< y, \xi >} < x, \xi > d\mu(\xi) dx dy$$
$$= \int_{\hat{G}} \left(\int_G < x, \xi > f(x) dx \right) \left(\int_G \overline{< y, \xi >}\, \overline{f(y)} dy \right) d\mu(\xi) = \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\mu(\xi) \geq 0.$$

Reciprocamente se sigue el siguiente importante resultado.

Teorema 3.2.7 (Bochner)**.** *Para toda función $\phi \in P(G)$ existe una única medida $\mu \in M(\hat{G})$ positiva tal que $\phi = \phi_\mu$.*

La demostración de este teorema se basa en resultados profundos de análisis funcional que no incluimos ya que no entran en el Grado, y por falta de espacio.
Denotaremos $B(G) := \{\phi_\mu \, : \, \mu \in M(\hat{G})\}$, luego $P(G) \subseteq B(G)$. De hecho, el teorema de Bochner implica que $B(G)$ es la *clausura algebraica* de $P(G)$.

3.3. Primer teorema de inversión

Damos aquí un teorema de inversión que es básico para demostrar el teorema de Plancherel. Necesitamos dos lemas previos.

Lema 3.3.1. *Sea $K \subset\subset \hat{G}$. Entonces existe una función $f \in \mathscr{C}_c(G) \cap P(G)$ de forma que $\hat{f} \geq 0$ en $\hat{G}$ y $\hat{f} > 0$ en K.*

Teniendo en cuenta el teorema de Bochner, a continuación utilizaremos la siguiente notación:

$$M(\hat{G}) \to B(G)$$
$$\mu \mapsto \phi_\mu$$
$$\mu_\phi \leftarrow \phi.$$

Lema 3.3.2. *Sean $f, g \in B(G) \cap L^1(G)$, entonces se tiene que*

$$\hat{f} d\mu_g = \hat{g} d\mu_f$$

Demostración. $\forall h \in L^1(G)$, vemos que

$$\int_{\hat{G}} \hat{h} d\mu_f = \int_{\hat{G}} \int_G < x^{-1}, \xi > h(x) dx d\mu_f(\xi) = \int_G h(x) \left(\int_{\hat{G}} < x^{-1}, \xi > d\mu_f(\xi) \right) dx$$
$$= \int_G h(x) f(x^{-1}) dx = (h * f)(e)$$

Poniendo $h * g$ ó $h * f$ por h, y f por g en el cálculo anterior, tenemos que

$$\int_{\hat{G}} \hat{h}\hat{g} d\mu_f = ((h * g) * f)(e) = ((h * f) * g)(e) = \int_{\hat{G}} \hat{h}\hat{f} d\mu_g.$$

Usando la densidad de $\mathscr{F}(L^1(G))$ en $\mathscr{C}_0(\hat{G})$ se demuestra la tesis. □

Teorema 3.3.3 (Primer teorema de Inversión de Fourier)**.** *Si* $f \in B(G) \cap L^1(G)$*, entonces* $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$*. Más aún,*

$$f(x) = \int_{\hat{G}} < x, \xi > \hat{f}(\xi) d\xi \qquad (x \in G).$$

Demostración. Construimos un funcional lineal positivo sobre $\mathscr{C}_c(\hat{G})$. Si $\psi \in \mathscr{C}_c(\hat{G})$, por el lema 3.3.1 tenemos que existe una función $h \in L^1(G) \cap P(G)$ de forma que $\hat{h} \geq 0$ y $\hat{g} > 0$ en $sop(\psi)$. Sea

$$I(\psi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi}{\hat{h}} d\mu_h(\xi)$$

Notemos que si g fuera otra tal función como h, entonces por el lema 3.3.2 se tendría que

$$\int_{\hat{G}} \frac{\psi}{\hat{h}} d\mu_h(\xi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi}{\hat{h}\hat{g}} \hat{g} d\mu_h(\xi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi}{\hat{h}\hat{g}} \hat{h} d\mu_g(\xi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi}{\hat{g}} d\mu_g(\xi).$$

Es sencillo probar que I es lineal en ψ y ademas $I(\psi) \geq 0 \ \forall \psi \geq 0$ (pues $\hat{h}, \mu_h \geq 0$). Más aún, si $g \in B(G) \cap L^1(G)$ se tiene que

$$I(\hat{g}\psi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi}{\hat{h}} \hat{g} d\mu_h(\xi) = \int_{\hat{G}} \psi d\mu_g$$

como antes, que es no nulo para convenientes ψ y g, luego I no es identicamente nulo. Ahora, para todo $\eta \in \hat{G}$, aplicando un cambio de variable sencillo, se tiene

$$\int_{\hat{G}} < x, \xi > d\mu_h(\eta\xi) = \int_{\hat{G}} < x, \eta^{-1}\xi > d\mu_h(\xi) = \overline{< x, \eta >} h(x) = (\bar{\eta} h)(x),$$

luego

$$d\mu_h(\eta\xi) = d\mu_{\bar{\eta}h}(\xi).$$

También se tiene que $\widehat{(\bar{\eta}h)}(\xi) = \hat{h}(\eta\xi)$ de modo que si h es tal que $\hat{h}(\xi) > 0 \ \forall \xi \in Sop\psi \cup SopL_\eta\psi$,

$$I(L_\eta\psi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi(\eta^{-1}\xi)}{\hat{h}(\xi)} d\mu_h(\xi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\hat{h}(\eta\xi)} d\mu_h(\eta\xi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi(\xi)}{\widehat{(\bar{\eta}h)}(\xi)} d\mu_{\bar{\eta}h}(\xi) = I(\psi)$$

y por lo tanto I es un funcional lineal invariante por traslación, de manera que $I(\psi) = \int_{\hat{G}} \psi(\xi) d\xi$ siendo $d\xi$ medida de Haar en $\hat{G}$ (una de ellas). Finalmente, si $f \in B(G) \cap L^1(G)$ y $\psi \in \mathscr{C}_c(\hat{G})$, se tiene

$$\int_{\hat{G}} \psi(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi = I(\psi\hat{f}) = \int_{\hat{G}} \psi(\xi) d\mu_f(\xi)$$

y así $\hat{f}(\xi)d\xi = d\mu_f(\xi)$, con lo que se prueba el teorema. □

3.4. Teorema de Plancherel

Este teorema es fundamental en análisis armónico.

Teorema 3.4.1 (Plancherel)**.** *La transformada de Fourier sobre* $L^1(G) \cap L^2(G)$ *se extiende unívocamente a un isomorfismo isométrico* $L^2(G) \to L^2(\hat{G})$*.*

Demostración. Sea $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Por la definición de $\tilde{f}$ y por la proposición 3.2.5 tenemos que $f * \tilde{f} \in L^1(G) \cap P(G)$ y $\widehat{(f * \tilde{f})} = |\hat{f}|^2$ luego, por el teorema 3.3.3 de inversión de Fourier

$$\int_G |f(x)|^2 dx = f * \tilde{f}(1) = \int_{\hat{G}} \widehat{(f * \tilde{f})}(\xi) d\xi = \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

luego $f \mapsto \hat{f}$ es una $\|\cdot\|_2$-isometría; se extiende pues de $L^2(G)$ a $L^2(\hat{G})$. Veamos la suprayectividad: Sea $\psi \in L^2(\hat{G})$ ortogonal a $\mathscr{F}[L^1(G) \cap L^2(G)]$, entonces

$$0 = \int_{\hat{G}} \psi(\xi)\overline{\widehat{(L_x f)}}(\xi)d\xi = \int_{\hat{G}} < x, \xi > \psi(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}d\xi \qquad \forall f \in L^1(G) \cap L^2(G),\ x \in G$$

Como $\psi, \hat{f} \in L^2(\hat{G})$, tenemos que $\psi\bar{\hat{f}} \in L^1(G)$ por la desigualdad de Hölder con p=2, luego $\psi\bar{\hat{f}}d\xi \in M(\hat{G})$, así que teniendo en cuenta la inyectividad de $\mu \in M(\hat{G}) \mapsto \phi_\mu$ se tiene que $\psi(\xi)\bar{\hat{f}}(\xi) = 0$ a.e $\forall f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, y por lo tanto $\psi = 0$ a.e. □

3.5. Dualidad de Pontryagin

Para finalizar, veamos la relación entre un grupo LCA, y su bidual (teorema de Pontryagin).

Lema 3.5.1. *Si $\phi, \psi \in \mathscr{C}_c(\hat{G})$ entonces $\phi * \psi = \hat{h}$ con $h \in B(G) \cap L^1(G)$. En particular, $\mathscr{F}(B(G) \cap L^1(G))$ es denso en $L^p(\hat{G})$, si $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sean las funciones

$$f(x) = \int_{\hat{G}} < x, \xi > \phi(\xi)d\xi, \qquad g(x) = \int_{\hat{G}} < x, \xi > \psi(\xi)d\xi, \qquad h(x) = \int_{\hat{G}} < x, \xi > (\phi * \psi)(\xi)d\xi.$$

Como $\phi, \psi, \phi * \psi \in L^1(\hat{G})$, tenemos que $f, g, h \in B(G)$. Además, si $k \in L^1(G) \cap L^2(G)$,

$$\left| \int_G f(x)\bar{k}(x)dx \right| = \left| \int_G \int_{\hat{G}} < x, \xi > \phi(\xi)\overline{k(x)}d\xi dx \right| = \left| \int_{\hat{G}} \phi(\xi)\overline{\hat{k}(\xi)}d\xi \right| \leq \|\phi\|_2\|\hat{k}\|_2 = \|\phi\|_2\|k\|_2$$

por lo tanto $f \in L^2(G)$ y análogamente $g \in L^2(G)$. Respecto a h,

$$h(x) = \int_{\hat{G}} \int_{\hat{G}} < x, \xi > \phi(\xi\eta^{-1})\psi(\eta)d\eta d\xi = \int_{\hat{G}} \int_{\hat{G}} < x, \xi\eta > \phi(\xi)\psi(\eta)d\xi d\eta = f(x)g(x)$$

luego $h \in L^1(G)$. Así, $h \in B(G) \cap L^1(G)$ y por tanto $h(x) = \int_{\hat{G}} < x, \xi > \hat{h}(\xi)d\xi$, y $\hat{h} = \phi * \psi$. □

Sea $\Psi : G \to \hat{\hat{G}}$ definido por $< \xi, \Psi(x) > = < x, \xi >$, $x \in G, \xi \in \hat{G}$. La aplicación Ψ es un homomorfismo de grupos.

Teorema 3.5.2 (Pontryagin)**.** *Ψ es un isomorfismo de grupos topológicos*

Demostración. (1) Ψ es inyectiva: Si $\Psi(x_1) = \Psi(x_2)$, por la definición del homomorfismo se tiene que $< x_1, \xi > = < x_2, \xi >$ $\forall \xi \in \hat{G}$. Como $\hat{G}$ separa puntos de G, $x_1 = x_2$.

(2) Sean $x \in G$, $(x_\alpha) \subseteq G$., red en G Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) $x_\alpha \to x$.

(ii) $f(x_\alpha) \to f(x)\ \ \forall f \in B(G) \cap L^1(G)$.

(iii) $\int_{\hat{G}} < x_\alpha, \xi > \hat{f}(\xi)d\xi \to \int_{\hat{G}} < x, \xi > \hat{f}(\xi)d\xi\ \ \forall f \in B(G) \cap L^1(G)$.

(iv) $\Psi(x_\alpha) \to \Psi(x)$ en $\hat{\hat{G}}$.

En efecto, $(i) \Rightarrow (ii)$ es trivial. Recíprocamente, supongamos que $x_\alpha \nrightarrow x$. Entonces, existe un entorno U de x, y un subconjunto B cofinal en A de forma que $x_\beta \notin U\ \ \forall \beta \in B$. Por un lema técnico de densidad, $\exists\ f \in B(G) \cap L^1(G)$ de forma que $Sop(f) \subseteq U$ y $f(x) \neq 0$ ($\mathscr{C}_c(G) \cap P(G)$ es denso en $\mathscr{C}_c(G)$ en norma uniforme) por lo tanto $f(x_\alpha) \nrightarrow f(x)$ lo cual contradice la hipótesis y se prueba el recíproco. $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ se sigue inmediatamente del primer teorema de Inversión.

Por último, (iv) es equivalente a decir que $\int_{\hat{G}} \Psi(x_\alpha)h \to \int_G \Psi(x)h \ \ \forall h \in L^1(\hat{G})$. Por lo tanto (iv) implica (iii) ya que si $f \in B(G) \cap L^1(G)$ se tiene que $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ por el primer teorema de inversión. Finalmente, puesto que (iii) sepuede escribir como $\int_{\hat{G}} \Psi(x_\alpha)\hat{f} \to \int_{\hat{G}} \Psi(x)\hat{f}$, $\|\Psi(x_\alpha)\|_\infty = 1 \ \forall \alpha$, y $\mathscr{F}(B(G) \cap L^1(G))$ es denso en $L^1(\hat{G})$ (por el lema 3.5.1) se sigue obviamente que $(iii) \to (iv)$.

(3) Por (2), resulta que Ψ es homeomorfismo de G sobre $\Psi(G)$, luego $\Psi(G)$ es (subgrupo de $\hat{\hat{G}}$) localmente compacto, y por lo tanto es cerrado en $\hat{\hat{G}}$. Sea $\mathbf{x} \in \hat{\hat{G}} \backslash \Psi(G)$. Tomemos V entorno simétrico de la unidad en $\hat{\hat{G}}$ de forma que $\mathbf{x}VV \cap \Psi(G) = \emptyset$. Tomemos entonces $\eta,\ \psi \geq 0$ no nulas, en $\mathscr{C}_c(\hat{\hat{G}})$, de forma que $sop(\eta) \subset \mathbf{x}V$, $sop(\psi) \subset V$. Entonces $\eta * \psi \neq 0$, $sop(\eta * \psi) \cap \phi(G) = \emptyset$ y por el lema 3.5.1 $\eta * \psi = \hat{h}$ con $h \in B(\hat{G}) \cap L^1(\hat{G})$. Pero así tenemos

$$0 = \hat{h}(\Psi(x^{-1})) = \int_{\hat{G}} < \xi, \Psi(x) > h(\xi) d\xi = \int_{\hat{G}} < x, \xi > h(\xi) d\xi \quad \forall x \in G$$

Luego $h = 0$, por lo tanto $\hat{h} = 0$ lo cual es contradictorio con lo anterior. Así $\Psi(G) = \hat{\hat{G}}$

□

El teorema de dualidad permite dar una nueva versión del primer teorema de Inversión.

Teorema 3.5.3 (Segundo teorema de Inversión de Fourier)**.** *Si $f \in L^1(G)$, y $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ entonces $f(x) = \hat{\hat{f}}(x^{-1})$ a.e $x \in G$; es decir*

$$f(x) = \int_{\hat{G}} < x, \xi > \hat{f}(\xi) d\xi \qquad \forall x \ a.e$$

Si f es continua entonces se da la igualdad en todo punto.

Demostración. $\forall \xi \in \hat{G}$ tenemos que

$$\hat{\xi} = \int_G \overline{< x, \xi >} f(x) dx = \int_G < x^{-1}, \xi > f(x) dx = \int_G < x, \xi > f(x^{-1}) dx$$

y así $f \in B(\hat{G}) \cap L^1(\hat{G})$ y además $d\mu_{\hat{f}}(x) = f(x^{-1})dx$. Por el primer teorema de inversión se tiene que $f(x^{-1}) = \hat{\hat{f}}(x)$ a.e. El resto es inmediato. □

Como consecuencia inmediata del teorema anterior obtenemos la inyectividad de la transformada de Fourier.

Corolario 3.5.4. *$L^1(G)$ es un álgebra de Banach semisimple; es decir, la tranformada de Fourier $\mathscr{F} : L^1(G) \to \mathscr{C}_0(\hat{G})$ es inyectiva.*

Demostración. Sea $f \in L^1(G)$ tal que $f \in Ker\mathscr{F}$. Entonces $\hat{f} = 0 \in L^1(\hat{G})$. Por el teorema 3.5.3 tenemos por tanto que $f = 0$ a.e $x \in G$ □

Bibliografía

[C] J. B. CONWAY, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York 1985.

[DS] N. DUNFORD, J.T.SCHWARTZ, *Lineal Operators. Part I: General theory*, Interscience, New York, 1958.

[F] G.B FOLLAND, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, Washington 1995.

[GRS] I. GELFANS,D.RAIKOV, G.SHILOV, *Commutative Normed Rings*, Chelsea Pub,Co., Bronx, New York, 1964.

[J] P.T.JOHNSTONE, *Tychonoff's theorem without the axiom of choice*, Fundamenta Mathematica, 1981.

[L] R. LARSEN, *Banach Algebras*, Marcel Dekker, Wesleyan, Middletown, 1973.

[Lo] L. H. LOOMIS, *Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, 1953.

[R1] W. RUDIN, *Fourier analysis on groups*, Interscience tracts in pure and applied mathematics, number 12, Interscience publishers, New York, 1967.

[R2] W. RUDIN, *Análisis funcional*, Ed. Reverté, Barcelona 1979.

[R3] W. RUDIN, *Análisis real y complejo*, tercera ed., Mc.Graw-Hill,1988.

[RV] D. RAMAKRISHNAN, R. J.VALENZA, *Fourier Analysis on Number Fields*, Springer-Verlag, New York, 1999.